חדו"א 2א ~ הרצאה 13

שחר פרץ

9 ליוני 2026

מרצה: יעל קרשון

תרגיל 1 (פתיחה).

1. רשמו את המספר $\frac{1}{2-i}$ בצורה $a+bi$ עם $a,b\in\mathbb{R}$.
2. למספר מרוכב $z=a+bi$, הוכיחו: $|a|,|b|\le|z|\le|a|+|b|$ עבור $a,b\in\mathbb{R}$.
3. נגדיר יחס שקילות על $\mathbb{R}$: $x\sim y \iff x-y\in 2\pi z$. נסמן ב־$[x]$ מחלקת שקילות וב־$R/_{2\pi\mathbb{Z}}$ את מרחב המנה. האם $[x]+[y]+[x+y]$ מוגדר היטב? האם $[x]\cdot[y]=[x\cdot y]$ מוגדר היטב?
4. נתונה קבוצת ממשיים $S\subset\mathbb{R}$. השלימו את החסר: "לכל x_0 קיים $x>x_0$ כך ש־$x\in S$, אמ"מ קיימת סדרה $(x_k)k=1^\infty$ כל שלכל k, $x_k\in S$ וכך ש־[השלימו], אמ"מ הקבוצה S איננה [השלימו]".

סוגי סכימות

הגדרה 1. נאמר: $\sum_{k=0}^\infty a_k=L$ (C) פירושו:

$$\frac{\overbrace{S_0+\cdots+S_N}^{:=\sigma_n}}{N+1}\xrightarrow{n\to\infty}L$$

כאשר $S_n=\sum_{k=0}^\infty a_k$.

הערה 1. למעשה יש לנו כאן סכום כפול:

$$\sigma_N=\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{n}\underbrace{\sum_{k=1}^{n}a_k}_{S_k}=\frac{1}{N+1}\sum_{0\le k\le n\le N}a_k=\frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N}\sum_{n=k}^{N}a_k=\frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N}(N-k+1)a_k=\sum_{k=0}^{N}\left(1-\frac{k}{N+1}\right)a_k$$

יעל ממליצה לחשוב על זה כמעין טבלה תת־ממדית (שמשוכנת ב־$\mathbb{Z}^2$). זה מאפשר בקלות לראות את השוויונות לעיל.

הגדרה 2. אבל (Abel): $\sum_{k=0}^\infty a_k=L$ (A), פירושו:

$$\lim_{R\to1^-}\sum_{k=0}^\infty a_kR^k=L$$

משפט 1. אם טור $\sum_{k=0}^\infty a_k=L$ במובן הרגיל, אז $\sum_{k=0}^\infty a_k=L$ (A) וגם $\sum_{k=0}^\infty a_k=L$ (C).

הוכחה. נניח $\sum_{k=0}^\infty=L$.

- מההנחה $S_n\to L$, כאשר S_n סדרת הסכומים החלקיים. בחדו"א 1א הוכחנו שאם סדרה מתכנס במובן הרגיל אז היא מתכנס צזארו, ולכן $S_n\to L$ (C) (כלומר $\frac{S_0+\cdots+S_n}{n+1}\to L$), כלומר $\sum_{k=0}^\infty a_k=L$ (C).
- מההנחה, הטור $\sum_{k=0}^\infty a_kx^k$ מתכנס כאשר $x=1$. ממשפט אבל, הטור מתכנס במ"ש (לאו דווקא בהחלט) בכל $[0,1]$. נסמן $f(x):=\sum_{k=0}^\infty a_kx^k$. נבחין ש־$f:[0,1]\to\mathbb{R}$ גבול במ"ש של פונקציות רציפות, ולכן רציפה. בפרט $\lim_{R\to1^-}f(R)=f(1)$, נציב ב־f ונקבל את הנדרש.

■

משפט 2. התכנסות צזארו גוררת התכנסות לפי אבל, כלומר אם $\sum_{k=0}^\infty a_k=L$ (C), אז $\sum_{k=0}^\infty a_k=L$ (A).

הוכחה באמצעות הרשימות של שירי. ראה הרשימות של שירי. ■

משפט 3 (טאובר). אם $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ (A) וגם $a_k = o(\frac{1}{k})$ אז $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = L$.

הערה 2. הכוונה ב־$a_k = o\left(\frac{1}{k}\right)$ הוא ש־$\frac{a_k}{1/k} = ka_k \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

הוכחה באמצעות הרשימות של שירי. ראה הרשימות של שירי. ■

אין אמ"מ, גם במקרה שבו הטור חיובי. לדוגמה:

$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{k} & \exists n \in \mathbb{N} \colon k = 2^n \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

אומנם, $a_k \neq o\left(\frac{1}{k}\right)$ אך $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ מתכנס במובן הרגיל וגם (ולכן גם במובן אבל).

תרגיל 2. $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k$ אינו מתכנס במובן הרגיל (כמובן), אך כן מתכנס צזארו (ל־$\frac{1}{2}$).

תרגיל 3. $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \cdot (k+1)$ אינו מתכנס, אך מתכנס אבל ל־$\frac{1}{2}$.

סדר סכימה

ה־subsection הזה הוא תזכורת מחדו"א 1א.

משפט 4. אם טור מתכנס בהחלט, אז הוא מתכנס, וכמו כן כל טור שמתקבל ממנו ע"י שינוי סדר האיברים או קיבוץ האיברים, גם הוא מתכנס (בהחלט) לאותו הגבול.

הגדרה 3. יהי $(t_j)_{j\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$. תזכורת־הגדרה: הטור $\sum t_j$ מתכנס בהחלט ל־L פירושו:

- הטור $\sum |t_j|$ מתכנס.
- הטור המקורי $\sum t_j$ מתכנס ל־L.

שימו לב, הטור $\sum_{n=0}^{\infty} |t_j|$ לאו דווקא מתכנס ל־L. מתנאי קושי ידוע שאם הטור מתכנס בהחלט, אז הטור המקורי מתכנס (בהחלט) ל־L כלשהו.

משפט 5. 1. הטור $\sum t_j$ מתכנס בהחלט, אמ"מ קבוצת הסוכמים הסופיים של הערכים המוחלטים:

$$\left\{ \sum_{j\in J} |t_j| \,\middle|\, J \subset \mathbb{Z}_{\geq 0} \wedge |J| \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \right\}$$

חסומה.

2. נניח $\sum t_j$ מתכנס בהחלט ל־L. אז:

(א) לכל $\varepsilon > 0$ קיימת ת"ק סופית $J \subset \mathbb{Z}_{\geq 0}$ כך שלכל ת"ק סופית $J \subset I \subset \mathbb{Z}_{\geq 0}$ מתקיים $\left|\sum_{j\in I} t_i - L\right| < \varepsilon$.

(ב) לכל פירוק זר לתתי קבוצות סופיות $\mathbb{Z}_{\geq 0} = J_0 \uplus J_1 \uplus J_2 \uplus \cdots$, אם נסמן $c_m := \sum_{j\in J_m} t_j$ הטור c_m מתכנס בהחלט ל־L.

סעיף (ב) תוצאה ישירה של דברים בחדו"א 1א.

הוכחה. תעלה למודל. ■

כל הסיפור הזה רלוונטי לקונספט של מכפלת טורים.

משפט 6. נתונים טורים $\sum_{\ell=0}^{\infty} \beta_\ell$ ו־$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k$ שמתכנסים בהחלט לגבולות A, B בהחלפה. נגדיר $\gamma_m = \sum_{k+\ell=m} \alpha_k \beta_\ell$. אז הטור $\sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m$ שנקרא מכפלת קושי של הטורים $\sum \alpha_k, \sum \beta_k$ מתכנס בהחלט לגבול $A \cdot B$.

זה מופיע ברשימות של שירי לחדו"א 1א (על אף שלא ראינו את זה סמסטר קודם).

הוכחה. נסמן $\hat{A}=\sum_{k=0}^{\infty}|\alpha_k|$ ו־$\hat{B}=\sum_{\ell=0}^{\infty}|\beta_\ell|$. לכל ת"ק סופית $J\subset\mathbb{Z}^2_{\geq 0}$ נבחר $\hat{k},\hat{l}$ כך ש־$J\subset\{0\dots\hat{k}\}\times\{0\dots\hat{\ell}\}$, אז:

$$\sum_{(k,\ell)\in J}|\alpha_k\beta_k|\leq\sum_{(0,0)\leq(k,\ell)\leq(\hat{k},\hat{\ell})}|\alpha_k\beta_\ell|=\left(\sum_{k=0}^{\hat{k}}|\alpha_k|\right)\cdot\left(\sum_{\ell=0}^{\hat{\ell}}|\beta_\ell|\right)\leq\hat{A}\cdot\hat{B}$$

נבחר מניה כלשהי $\mathbb{N}$ ל־$\mathbb{Z}^2_{\geq 0}$ חחע"ל. מהמשפט על סידור סדר סכימה, $\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_{k_i}\beta_{\ell_i}$ מתכנס בהחלט לאנשהו. נסמן ב־L את גבולו. נטען ש־$L=AB$. לשם כך נפרק את $\mathbb{Z}_{\geq 0}\times\mathbb{Z}_{\geq 0}=J_0\uplus\cdots$ באופן שיעל לא הגדירה וציירה על הלוח (מעין שכבות בצל כאלו). אז:

$$\sum_{m=0}^{N}\sum_{(k,\ell)\in J_m}\alpha_k\beta_\ell=\left(\sum_{k=0}^{N}\alpha_k\right)\left(\sum_{\ell=0}^{N}\beta_\ell\right)\xrightarrow{N\to\infty}AB$$

מחלק 2ב של המשפט על שינוי סדר סכימה, ש־$L=AB$.

עתה נפרק אחרת, באלכסונים:

$$J'_m=\{(k,\ell)\mid k+\ell=m\}$$

מחלק 2ב של המשפט על שינוי סדר סכימה נקבל ש־:

$$\sum_{m=0}^{\infty}\underbrace{\sum_{(k,\ell)\in J'_m}\alpha_k\beta_\ell}_{\gamma_m}$$

מתכנס לאותו הגבול $L=AB$. ■

מרוכבים

מגדירים $\mathbb{C}=\mathbb{R}^2$ ואז דוחפים על זה כל מיני פעולות. משכנים $\mathbb{R}\hookrightarrow\mathbb{C}$ ע"י $a\mapsto a+0i$. רושמים $i=0+1i$. עבור $z=a+ib$, החלק ממשי $a=\Re z$ והחלק המדומה $b=\Im z$. יש לנו חיבור, כפל בסקלר ממשי, נורמה (ערך מוחלט), כמו ב־$\mathbb{R}^2$. הנורמה משרה מטריקה שמשטרה טופולוגיה שמשרה סיגמא אלגברה ואז אנחנו יכולים לעשות שטויות כמו גבולות ואינטגרלים. יעל מגדירה כל מיני פעולות בצורה מעגלית שאני לא ממש מעוניין להעתיק. אני אנסח את זה כמו פיזיקאי ואגיד שכדי לחלק מכפילים בצמוד (המרוכב) ואז עובדים עם שאר ההגדרות של כפל מרוכבים וחילוק בסקלר, לדוגמה:

$$(1+i)^{-1}=\frac{1}{1+i}=\frac{1-i}{(1+i)(1-i)}=\frac{1-i}{2}$$

הפעולה של הצמדה היא אוטומורפיזם (איזומורפיזם מהשדה אל עצמו) של השדה. יש לזה תכונות נחמדות כמו:

$$\Re z=\frac{z+\bar{z}}{2}\qquad\Im z=\frac{z-\bar{z}}{2i}$$

זה גם הומיאומורפיזם טופולוגי ואיזומורפיזם קטגורי ואנדופונקטור ב־2 קטגוריה.

תרגיל 4. עשו את תרגיל פתיחה 2.

.....

שחר פרץ, 2026

קומפל ב־LaTeX ונוצר באמצעות תוכנה חופשית בלבד