חדו"א 2א ~ הרצאה 18

שחר פרץ

הרצאה מה־25 ביוני, הוקלד ב־6 ביולי (2026)

מרצה: יעל קרשון

תרגיל 1 (פתיחה)**.** 1. פתרו את התעלומה: תהי $f(t)=e^{i\alpha t}$ עם $\alpha\notin\mathbb{Z}$. נחשב את $\hat{f}(n)$ בשתי דרכים:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{-int}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(\alpha-n)t}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{e^{i(\alpha-n)t}}{i(\alpha-n)}\bigg|_{-\pi}^{\pi}=(-1)^n\frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi(\alpha-n)}$$
$$\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}f(t)e^{-int}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}e^{i(\alpha-n)t}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{e^{i(\alpha-n)t}}{i(\alpha-n)}\bigg|_{0}^{2\pi}=e^{i\alpha}\frac{\sin(\alpha n)}{\pi(\alpha-n)}$$

- בדקו את החישוב – אם צריך, תקנו
- קיבלנו שתי תשובות שונות! מה קרה?

2. תהי $f\in R(\mathbb{T})$ נתונה ע"י $f(t)=e^{i\alpha t}$ עבור $-\pi\le t<\pi$. רשמו את שוויון פרסבל $\sum_{-\infty}^{\infty}\left|\hat{f}(n)\right|^2=||f||^2$ עבור פונקציה זו. הסיקו:

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(n+\alpha)^2}=\left(\frac{\pi}{\sin(\alpha n)}\right)^2$$

3. (היה ניתן להוכיח אותו לפני מספר שיעורים) הוכיחו שקל פונקציה רציפה מחזורית רבמ"שית, חסומה ומשיגה את חסמיה בכל $\mathbb{R}$.

גרעין אבל ודיריכלה

נבחין שאת מקדמי פורייה הגדרנו להיות:

$$\hat{f}(n)e^{inx}=\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{-int}\,\mathrm{d}t\right)e^{inx}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{in(x-t)\,\mathrm{d}t}=:\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)e_n(x-t)\,\mathrm{d}t$$

כלומר נגדיר $e_n(y)=e^{iny}$.

עתה, נסכום את המקבלים ונסיק שכתלות ב־e_n־ים פולינום פורייה הוא:

$$S_Nf:=\sum_{n=-N}^{N}\hat{f}(n)e^{inx}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\underbrace{\left(\sum_{n=-N}^{N}e_n(y)\right)}_{D_N(x-t)}\mathrm{d}t$$

הגדרה 1. ל־$D_N(y):=\sum_{n=-N}^{N}e_N(y)$ קוראים גרעין דיריכלה.

נזכר שרצינו להוכיח את משפט Fejer משבוע שעבר, לפיו יש התכנסות במ"ש של סכומי צ'זארו של פולינומי פורייה לפונקציה. ננסה

להבין כיצד מקדמי צ'זארו נראים:

$$\begin{aligned}(\sigma_N f)(x) &= \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}(S_n f)(x)\\ &= \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(x-t)\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cdot\left(\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}D_n(x-t)\right)\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)F_N(x-t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

כאשר:

$$F_N(y) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}D_n(y)$$

הגדרה 2. $F_N(y)$ המוגדרת לעיל תקרא גרעין פייר (Fejer).

נבחין בדימיון בין הנוסחא לסכומי צ'זארו בכתלות בגרעין פייר ובנוסחא לטורי פורייה כתלות בגרעין פייר:

טענה 1.

$$\begin{aligned}\sigma_N f &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)F_N(x-t)\,\mathrm{d}t\\ S_N f &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_N(x-t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

ההבחנה הזו תביא אותנו להגדרת הקונבולוציה, מושג כללי יותר:

הגדרה 3. לכל $f,g\in R(\mathbb{T})$, הקונבולוציה של f,g בנקודה x היא:

$$(f*g)(x) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t$$

טענה 2 (תכונות הקונבלוציה).

- סימטריה: $f*g = g*f$
  קל להראות זאת באמצעות שינוי משתנה.
- בילינאריות: $(\alpha f_1+\beta f_2)*g = \alpha(f_1*g)+\beta(f_2*g)$
- רציפות: $f*g\in C(\mathbb{T})$
- אסוציאטיביות: $(f*g)*h = f*(g*h)$
  (ההוכחה של זה בחדו"א 3)

מהסימטרייה, נבחין שאם $g\geq 0$ ו־$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(t)\,\mathrm{d}t = 1$, אז אפשר לחשוב על g כמו על "ממוצע משוקלל של ערכי f". אכן מה שקורה בעבור הגרעינים שלנו הם שהם מקיימים תכונה זו, וש"g (הגרעינים) מרוכזת סביב $t=0$" ואז רוב ה"משקל" בסביבת $f(x)$, ואז הקונבלוציה תהיה "ממוצע משוקלל של ערכי f בסביבת $t=0$".

דוגמה. עבור:

$$g_n(t) = \begin{cases} n\pi & -\frac{1}{n}\leq t\leq\frac{1}{n}\\ 0 & \frac{1}{n}\leq |t|\leq\pi\end{cases}$$

(בהמשך נבחין בדמיון בין הדוגמה הזו לגרעין דיריכלה), נקבל ש־: [שינוי משתנה]

$$(f*g_n)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f(x-t)n\pi\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\cancel{\pi}}n\cancel{\pi}\int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} f(t)\,\mathrm{d}t$$

ואם f רציפה ב־x, אז $(f*g_n)\xrightarrow{n\to\infty} f(x)$.

עתה נחזור לטענה 1 ונקבל ש־:

$$\begin{aligned}\hat{f}(n)e^{inx} &= (f * e_n)(x)\\ S_N f &= f * D_n\\ \sigma_N f = \frac{S_0 f + \cdots + S_N f}{N+1} &= f * F_n\end{aligned}$$

טענה 3 (תכונות הקונבולוציה, פרק 2). 1. אם $g \equiv 1$:

$$(f * 1) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)1\,\mathrm{d}t = \hat{f}(0)$$

כאשר נבחין ש־$\hat{f}(0)$ קבועה ולא תלויה בקונבולוציה.

2. באופן כללי, אם g פולינום מדרגה $n \geq$ אז כך גם $f * g$.
3. אם g פולינום טריגונומטרי מדרגה $n \leq$ אז כך גם $f * g$.
4. באופן יותר ספציפי, מתקיים ש־$\widehat{(f*g)}(n)\hat{f}(n)\hat{g}(n)$ (זה נובע מאסציאטיביות)

הוכחת 2. בעבור $g(y) = y^n$ (לאחר מכן אפשר לקחת צירופים לינאריים), נקבל ש־:

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)(x-t)^n\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{k}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(t)\cdot t^{n-k}\,\mathrm{d}t\right)\right)x^k$$

כנדרש. ■

הוכחת 3. גם כאן נתעסק עם $g(y) = e^{iny}$ ואז ניקח צירופים לינאריים. כבר הראנו ש־:

$$(f * g)(x) = (f * e_n)(x) = \hat{f}(n)e^{inx}$$

■

נוסחאות מפורשות לגרעינים

כנראה הנוסחאות האלו יופיע בדף הנוסחאות של כולם.

למה 1 (נוסחה מפורשת לגרעין דיריכלה).

$$D_N(y) = \sum_{n=-N}^{N} e^{iny} \overset{!}{=} \begin{cases} 2N+1 & y = 0\\ \frac{\sin((N+\frac{1}{2}))y}{\sin(\frac{1}{2}y)} & y \neq 0\end{cases}$$

הוכחה. מסכום הנדסי:

$$\begin{aligned}\sum_{n=-N}^{N} e^{iny} &= \frac{e^{-iNy} - e^{i(N+1)y}}{1 - e^{iy}} = \frac{e^{-i\frac{y}{2}}\left(e^{i(N+1)y} - e^{-iNy}\right)}{e^{-i\frac{y}{2}}\left(e^{iy} - 1\right)}\\ &= \frac{e^{i(N+\frac{1}{2})y} - e^{-i(N+\frac{1}{2})y}}{e^{i\frac{y}{2}} - e^{-i\frac{y}{2}}} = \frac{\cancel{2i}\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)y\right)}{\cancel{2i}\sin\left(\frac{1}{2}y\right)}\end{aligned}$$

כנדרש. ■

הערה 1. לגבי טור הנדסי, ברור לנו ש־$\sum_{k=0}^{17}\alpha^k = \frac{1-\alpha^{18}}{1-\alpha}$, אך נבחין שמכאן מתקיי סש־$\sum_{n=-N}^{N}\alpha^k = \frac{\alpha^{-N}+\alpha^{N+1}}{-\alpha}$, פשוט מהזזת הטור.

למה 2 (נוסחה מפורשת של גרעין פייר).

$$F_N(y) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} D_n(y) \overset{!}{=} \frac{1}{N+1}\left(\frac{\sin\left(\frac{N+1}{2}y\right)}{\sin(\frac{1}{2}y)}\right)^2$$

הוכחה.

$$
\begin{aligned}
F_n(y) &= \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\underbrace{\sum_{m=-n}^{n} e^{imy}}_{D_n(y)} \\
&= \frac{1}{N+1}\sum_{m=-N}^{N}(N_1-|m|)e^{imy} \\
&= \frac{1}{N+1}e^{iNy}\left(\sum_{k=}^{N} e^{iky}\right)^2 \\
&= \frac{e^{-iNy}}{N+1}\left(\frac{1-e^{(i(N+1)y)}}{1-e^{iy}}\right)^2 \\
&= \frac{1}{N+1}\cdot\left(\frac{e^{-i\frac{N}{2}y}\left(e^{i(N+1)y}-1\right)\cdot e^{-i\frac{y}{2}}}{(e^{iy}-1)\cdot e^{-i\frac{y}{2}}}\right)^2 \\
&= \frac{1}{N+1}\cdot\left(\frac{e^{\frac{N+1}{2}y}-e^{-i\frac{N+1}{2}y}}{e^{i\frac{y}{2}}-e^{-i\frac{y}{2}}}\right)^2 \\
&= \frac{1}{N+1}\cdot\left(\frac{\cancel{2i}\sin\left(\frac{N+1}{2}y\right)}{\cancel{2i}\sin\left(\frac{1}{2}y\right)}\right)
\end{aligned}
$$

טריק: קיבוץ איברים

טריק 2 שנראה בהמשך

סכום הנדסי

נכניס את e^{-iNy} לתוך הריבוע

$i\sin x = \sinh x$

זאת בעבור $y \neq 0$ (השתמשנו בנוסחה של קריטריון דיריכלה). כאשר $y = 0$ נקבל ש־:

$$F_N(0) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} 2n+1 = \frac{1}{N+1}\left(N(N+1)+(N+1)\right) = \frac{(N+1)^2}{N+1} = N+1$$

נותר לנו להוכיח את טריק 2.

$$\left(\sum_{k=0}^{N} e^{iky}\right)\left(\sum_{\ell=0}^{N} e^{i\ell y}\right) = \sum_{k,\ell \text{ s.t. } k,\ell\in[N]} e^{i(k+\ell)y} = \sum_{n=-N}^{N}\left(N+1-|m|\right)e^{i(N+m)y} = e^{iNy}\sum_{m=-N}^{N}\left(N+1-|m|\right)e^{imy}$$

זה נובע גם משינוי סדר סכימה. ■

בדיקת שפיות ל־$y = 0$: [טיילור]

$$\lim_{y\to 0}\frac{1}{N+1}\cdot\frac{\sin\frac{N+1}{2}y}{\sin\frac{1}{2}y} = \lim_{y\to 0}\frac{1}{N+1}\left(\frac{\frac{N+1}{\cancel{2}}\cancel{y}}{\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{y}}\right) = \lim_{y\to 0}\frac{(N+1)^2}{N+1} = N+1$$

נרצה לשאול את עצמנו מיהם מקדמי הפורייה של הגרעינים שלנו. נבחין מהנוסחה המפורשת שלנו ש־:

$$\widehat{D_n}(n) = \begin{cases} 1 & |n| \leq N \\ 0 & |n| > N \end{cases} \qquad \widehat{F_n}(m) = \begin{cases} \frac{1}{N+1}\left(N+1-|m|\right) = 1-\frac{|m|}{N+1} & |m| \leq N \\ 0 & |m| > N \end{cases}$$

מכאן, באופן ישיר האינטגרל המנורמל יהיה:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(y)\,\mathrm{d}y = \widehat{D_n}(0) = 1$$
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_n(y)\,\mathrm{d}y = \widehat{F_n}(0) = 1$$

עוד נבחין ש־D_N, F_N ממשיות וזוגיות. אפילו $F_N \geq 0$.

עתה נוכיח ש"גרעין פייר מרוכז סביב $y = 0$". למה הכוונה? שבקטע בין $-\pi$ עד π ערכה גודל באיזור 0 ככל ש־N גודל. פורמלית, נראה שלכל δ מתקיים:

$$0 \leq \frac{1}{2\pi}\int_{\delta\leq|y|\leq\pi} F_N(y)\,\mathrm{d}y \xrightarrow{N\to\infty} 0$$

הערה 2. הכוונה היא:

$$\int_{\delta\le|y|\le\pi} F_N(y)\,\mathrm{d}y := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\delta} F_N(y)\,\mathrm{d}y + \frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\pi} F_N(y)\,\mathrm{d}y$$

הוכחה. נוכיח זאת באמצעות הנוסחה המפורשת.

$$F_N(y) = \frac{1}{N+1}\left(\frac{\sin\left(\frac{N+1}{2}y\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}y\right)}\right)^2 \le \frac{1}{N+1}\cdot\frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}}^2 \xrightarrow[N\to\infty]{u} 0$$

השאיפה במ"ש בתחום $[-\pi,-\delta]\cup[\delta,\pi]$. משום שיש שאיפה לאפס במ"ש, גם האינטגרל שואף לאפס כנדרש. ■

משפט 1 (משפט פייר). עבור $f\in C(\mathbb{T})$, מתקיים ש־:

$$\sigma_N f \xrightarrow[N\to\infty]{u} f$$

במ"ש.

הוכחה. יהי $\varepsilon>0$ כלשהו. f רציפה ומחזורית ולכן חסומה[1] ורבמ"שית. נסמן את חסמה ב־$N=\max|f|$. נבחר $\hat{\varepsilon}=?$ בהמשך. נבחר N_0 כך שלכל $N>N_0$, מתקיים ש־$\frac{1}{2\pi}\int_{\delta\le|y|\le\pi}F_N(y)\,\mathrm{d}y<\hat{\varepsilon}$.

יהי $N>N_0$. לכל $x\in\mathbb{R}$, מתקיים ש־:

$$|\sigma_N f(x)-f(x)| = |(F_n * f)(x)-f(x)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F_N(t)f(x-t)\,\mathrm{d}t - \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi}F_N(t)\,\mathrm{d}t\right)}_{1}f(x)\right|$$

$$= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F_N(t)\left(f(x-t)-f(x)\right)\,\mathrm{d}x\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F_N(t)\left|f(x-t)-f(x)\right|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\cdots_1 + \frac{1}{2\pi}\int_{\delta\le|t|\le\pi}\cdots_2 = \cdots_3$$

האינטגרל הראשון:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}F_N(t)\underbrace{|f(x-t)-f(x)|}_{\le\hat{\varepsilon}}\,\mathrm{d}t \le \hat{\varepsilon}\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}F_N(t)\,\mathrm{d}t}_{1} = \hat{\varepsilon}$$

והשני:

$$0 \le \frac{1}{2\pi}\int_{\delta\le|t|\le\pi}F_N(t)\cdot\underbrace{|f(x-t)-f(x)|}_{\le 2M}\,\mathrm{d}t \le 2M\cdot\frac{1}{2\pi}\underbrace{\int_{\delta\le|t|\le\delta}F_N(t)\,\mathrm{d}t}_{\le\hat{\varepsilon}} \le 2M\hat{\varepsilon}$$

ואז:

$$|(\sigma_N f)(x)-f(x)| \le \cdots_3 \le \hat{\varepsilon}+2M\hat{\varepsilon} = (1+2M)\hat{\varepsilon} < \varepsilon$$

סה"כ נבחר בדיעבד $\hat{\varepsilon}=\frac{\varepsilon}{2+2M}$ וסיימנו. ■

.....

שחר פרץ, 2026

קומפל ב־LaTeX וצוצר באמצעות תוכנה חופשית בלבד

[1] תמונה קומפקטית של S_1 היא קומפקטית, וקבוצה קומפקטית היא חסומה (בפרט התמונה). אפשר גם להשתמש במשפט קנטור.