

# Pricing d'options asiatiques sous le modèle de Black-Scholes

Arnaud PELISSIER et Emilien HUILLET

Mars 2025



Une option asiatique est un produit financier permettant à son détenteur d'échanger la moyenne du prix de l'actif sur une période donnée. Nous développons ici plusieurs méthodes d'évaluation d'une telle option.

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Prix d'un actif sous le modèle de Black-Scholes</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Option asiatique</b>	<b>3</b>
2.1	Payoff . . . . .	3
2.2	Cas général $t \neq 0$ . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Approximation de Turnbull &amp; Wakeman</b>	<b>4</b>
3.1	Principe de l'approximation . . . . .	4
3.2	Formule d'approximation . . . . .	4
<b>4</b>	<b>Approximation par simulation Monte-Carlo</b>	<b>4</b>
<b>5</b>	<b>Réduction de variance par variable de contrôle</b>	<b>6</b>
<b>6</b>	<b>Résultats</b>	<b>6</b>
6.1	Convergence des estimations . . . . .	6
6.2	Étude du biais de l'approximation de Turnbull & Wakeman . . . . .	7
6.2.1	Sensibilité au changement de $K$ . . . . .	7
6.2.2	Sensibilité au changement de $\sigma$ . . . . .	8
6.2.3	Sensibilité au changement de $\Delta t$ . . . . .	9
6.3	Temps de calcul . . . . .	10
6.4	Conclusion . . . . .	11
<b>7</b>	<b>Étude de la parité Call-Put</b>	<b>11</b>
<b>8</b>	<b>Méthode de réduction de variance</b>	<b>11</b>
<b>9</b>	<b>Conclusion</b>	<b>11</b>

<b>A</b>	<b>Formule du prix sous Black&amp;Scholes</b>	<b>12</b>
A.1	Existence et unicité . . . . .	12
A.2	Formule . . . . .	12
<b>B</b>	<b>Réduction du problème au cas <math>t_0 = 0</math></b>	<b>13</b>
<b>C</b>	<b>Prix d'une option européenne</b>	<b>13</b>
<b>D</b>	<b>Coefficients de la variable de contrôle</b>	<b>15</b>
<b>E</b>	<b>Formule de la parité Call-Put</b>	<b>16</b>

# 1 Prix d'un actif sous le modèle de Black-Scholes

Afin de calculer le prix d'un tel produit financier, nous nous plaçons sous le modèle de Black-Scholes. Ce dernier modélise le prix d'un actif comme un processus aléatoire en temps continu  $S_t$  vérifiant l'équation :

$$\begin{cases} dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t & t > 0 \\ S_0 \text{ déterministe} & t = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Où  $(W_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$  est un mouvement Brownien standard,  $\sigma \in \mathbb{R}^+$  est la volatilité de l'actif et  $r \in \mathbb{R}^+$  est le taux sans risque de l'actif.

Sous ce modèle, on montre (Annexe A) que

$$S_t = S_0 e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t} \quad (2)$$

## 2 Option asiatique

### 2.1 Payoff

Les options asiatiques offrent à leur détenteur le droit d'échanger la moyenne d'une période donnée à un prix fixe. Mathématiquement, le payoff d'une telle option se définit comme :

$$P^0 = \left( \epsilon \left( \frac{1}{T - t_0} \int_{t_0}^T S_t dt - K \right) \right)_+ \quad (3)$$

Avec  $\epsilon = 1$  pour un Call, et  $\epsilon = -1$  pour un put. Nous souhaitons dans ce sujet, calculer le prix d'une telle option :

$$P^0 = e^{-rT} \mathbb{E} \left[ \left( \epsilon \left( \frac{1}{T - t_0} \int_{t_0}^T S_t dt - K \right) \right)_+ \right] \quad (4)$$

### 2.2 Cas général $t \neq 0$

En notant  $P^0(K, t_0, T)$  le prix d'une telle option en fonction des paramètres  $K$ ,  $T$ , et  $t_0$ , nous pouvons lier  $P^0(K, t_0, T)$  et  $P^0(K, t_0 = 0, T)$ .

On montre (Annexe B) que,

$$P^0(K, t_0, T) = \frac{T}{T - t_0} P^0(\tilde{K}, 0, T) \quad (5)$$

Avec

$$\tilde{K} = \frac{T - t_0}{T} \left( K - \frac{1}{T - t_0} \int_{t_0}^0 S_t dt \right) \quad (6)$$

Cette formule nous permet de déduire le calcul du prix d'une option en fonction de  $t_0$ , en un calcul du prix d'une autre option asiatique, mais avec  $t_0 = 0$ . Nous pouvons donc sans perte de généralité étudier le cas  $t_0 = 0$ . De plus, nous nous concentrons dans la suite du sujet que sur le cas  $\epsilon = 1$  (call).

### 3 Approximation de Turnbull & Wakeman

#### 3.1 Principe de l'approximation

Le terme  $\frac{1}{T} \int_0^T S_t dt$  dépend de toute la trajectoire  $(S_t)_{t \geq 0}$  ce qui rend le calcul du prix de l'option asiatique plus difficile qu'une option européenne. Turnbull et Wakeman ont proposé d'approcher ce terme par une loi log-normale  $S_A(t) = e^{(r_A - \frac{\sigma_A^2}{2})t + \sigma_A W_t}$ , avec :

- $r_A = \frac{\log(M_1)}{T}$
- $\sigma_A = \sqrt{\frac{\log(M_2)}{T} - 2r_A}$
- $M_1 = \frac{e^{rT} - 1}{rT}$
- $M_2 = \frac{2e^{(2r+\sigma^2)T}}{(r+\sigma^2)(2r+\sigma^2)T^2} + \frac{2}{rT^2} \left[ \frac{1}{2r+\sigma^2} - \frac{e^{rT}}{r+\sigma^2} \right]$

De plus, le terme discret  $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N S_{i\Delta t}$  peut aussi être approché par une loi log-normale avec les paramètres suivants :

- $r_A = \frac{\ln(M_1)}{T}$
- $\sigma_A = \sqrt{\frac{\ln(M_2)}{T} - 2r_A}$
- $M_1 = \frac{1}{N} \cdot \frac{e^{r\Delta t}(1 - e^{rN\Delta t})}{1 - e^{r\Delta t}}$
- $M_2 = \frac{1}{N^2} \left[ \frac{e^{(2r+\sigma^2)\Delta t}(1 - e^{(2r+\sigma^2)N\Delta t})}{1 - e^{(2r+\sigma^2)\Delta t}} \right]$
- +  $\frac{1}{N^2} \left[ \frac{2e^{r\Delta t}}{1 - e^{r\Delta t}} \left( \frac{e^{(2r+\sigma^2)\Delta t}(1 - e^{(2r+\sigma^2)(N-1)\Delta t})}{1 - e^{(2r+\sigma^2)\Delta t}} - e^{((N+1)r+\sigma^2)\Delta t} \frac{1 - e^{(r+\sigma^2)(N-1)\Delta t}}{1 - e^{(r+\sigma^2)\Delta t}} \right) \right]$

#### 3.2 Formule d'approximation

Sous ces approximations, le payoff ne dépend que de la dernière valeur d'un processus qui suit le modèle de Black&Scholes, donc le calcul du prix de l'option est le même que pour une option européenne. On montre (Annexe C) que :

$$\begin{cases} P^{0,TW} = e^{-rT} (e^{rAT} S_0 \mathcal{N}(\sigma_A \sqrt{T} - d) - K \mathcal{N}(-d)) \\ d = \frac{1}{\sigma_A \sqrt{T}} \left( \log\left(\frac{K}{S_0}\right) - (r_A - \frac{\sigma_A^2}{2})T \right) \end{cases} \quad (7)$$

Nous pouvons désormais calculer le prix d'une option asiatique de façon numérique sous cette approximation.

### 4 Approximation par simulation Monte-Carlo

La méthode précédente a l'avantage d'être facile à implémenter et rapide à calculer. Mais il est en l'état difficile de quantifier l'erreur du modèle. Nous développons dans cette partie une méthode d'évaluation de l'option par simulation Monte-Carlo.

L'intégrale stochastique continue  $\int_0^T S_t dt$  étant inaccessible en pratique, on se concentre sur l'approximation discrète du payoff :  $(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N S(i\Delta t) - K)_+$ . La méthode la plus simple pour estimer

le prix de l'option, consiste alors à choisir un nombre  $N$  grand, et de simuler  $n$  trajectoires discrètes vérifiant Black-Scholes  $(S_j^i)_{j \in \{0, \dots, N\Delta t\}}$  pour  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

L'implémentation des trajectoires de prix se faisant en python, on souhaite minimiser le nombre de boucles `for` utilisées et s'appuyer sur les briques élémentaires de `numpy`. Pour arriver à ce résultat, on transforme successivement une matrice de loi gaussiennes indépendantes générée via `numpy.random.normal()` :

**Étape 1 :** Matrice des loi normales via la fonction `numpy.random.normal()`

$$\begin{pmatrix} G_1^1 & \dots & G_1^N \\ \vdots & & \vdots \\ G_n^1 & \dots & G_n^N \end{pmatrix}$$

**Étape 2 :** Multiplication par la variance et ajout du drift : on obtient les différences successives des trajectoires log-normales :

$$\begin{pmatrix} (r_A - \frac{\sigma_A^2}{2})\Delta t + \sigma_A \sqrt{\Delta t} G_1^1 & \dots & (r_A - \frac{\sigma_A^2}{2})\Delta t + \sigma_A \sqrt{\Delta t} G_1^N \\ \vdots & & \vdots \\ (r_A - \frac{\sigma_A^2}{2})\Delta t + \sigma_A \sqrt{\Delta t} G_n^1 & \dots & (r_A - \frac{\sigma_A^2}{2})\Delta t + \sigma_A \sqrt{\Delta t} G_n^N \end{pmatrix}$$

**Étape 3 :** Ajout de  $S_0$

$$\begin{pmatrix} \log(S_0) & (r_A - \frac{\sigma_A^2}{2})\Delta t + \sigma_A \sqrt{\Delta t} G_1^1 & \dots & (r_A - \frac{\sigma_A^2}{2})\Delta t + \sigma_A \sqrt{\Delta t} G_1^N \\ \vdots & & & \vdots \\ \log(S_0) & (r_A - \frac{\sigma_A^2}{2})\Delta t + \sigma_A \sqrt{\Delta t} G_n^1 & \dots & (r_A - \frac{\sigma_A^2}{2})\Delta t + \sigma_A \sqrt{\Delta t} G_n^N \end{pmatrix}$$

Enfin, la fonction `np.cumsum` permet de remplacer chaque coefficients de cette matrice, par la somme partielle des coefficients jusqu'à cette colonne. On obtient alors le logarithme des trajectoire qu'il est facile de transformer en trajectoire. L'algorithme en python pour générer ces chemin est le suivant :

```
def price_paths_bs(r, sig, T, S0, num_subdivs, num_paths):
    step = (T/num_subdivs)
    log_diffs = (r-0.5*sig**2) * step
    + sig*np.sqrt(step)*npr.normal(0, 1, size=(num_paths, num_subdivs))
    log_diffs = np.concatenate((np.log(S0)*np.ones((num_paths, 1)), log_diffs), axis=1)
    log_paths = np.cumsum(log_diffs, axis=1)
    price_paths = np.exp(log_paths)
    return price_paths
```

L'estimateur Monte-Carlo s'implémente alors comme suit :

```
def call_asian_bs_mc(r, sig, T, S0, K, num_subdivs, num_paths):
    price_paths = price_paths_bs(r, sig, T, S0, num_subdivs, num_paths)
    payoffs_asian = np.exp(-r*T)*np.maximum(price_paths.mean(axis=1) - K, 0)
    var = payoffs_asian.var(ddof=1) / num_paths
    return payoffs_asian.mean(), var
```

## 5 Réduction de variance par variable de contrôle

Nous développons dans cette section un nouvel estimateur Monte-Carlo  $P^{\Delta t, MC, ctrl}$  de l'évaluation de l'option asiatique, mais dont la vitesse de convergence est bien meilleure. On utilise pour ça une méthode de réduction de variance par variable de contrôle.

L'estimation précédente consiste à simuler un grand nombre de payoff, et de calculer numériquement son espérance via la statistique de moyenne empirique, ce qui mène vers une convergence lente. La méthode de la variable de contrôle consiste à remplacer le payoff  $X$  par une variable aléatoire  $Z$  avec

$$Z = X - Y + \mathbb{E}(Y)$$

Où  $Y$  est une variable aléatoire dont la dynamique est inverse de celle de  $X$ , c'est-à-dire que pour un événement  $w \in \Omega$  tel que  $X$  est éloigné de sa moyenne dans un sens, on souhaite que  $Y(w)$  soit éloigné dans le sens inverse de sa moyenne. Enfin l'espérance de  $Y$  doit se calculer de façon exacte.

Nous choisissons comme variable  $Y = (e^{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln S(i\Delta t)} - K)_+$ . On peut alors montrer (Annexe D) que  $e^{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln S(i\Delta t)}$  suit une loi log-normale :

$$e^{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln S(i\Delta t)} \stackrel{\text{Loi}}{=} S_0 e^{(r^E - \frac{(\sigma^E)^2}{2})T + \sigma^E W_T^E}$$

Avec

$$\begin{cases} \sigma^E &= \sigma \sqrt{\frac{(N+1)(2N+1)}{6N^2}} \\ r^E &= \frac{(\sigma^E)^2}{2} + (r - \frac{\sigma^2}{2}) \frac{N+1}{2N} \end{cases} \quad (8)$$

On déduit de ces calculs un estimateur par variable de contrôle de  $P^{0, \Delta t}$  :

```
def call_asian_bs_mc_ctrl(r, sig, T, S0, K, num_subdivs, num_paths):
    price_paths = price_paths_bs(r, sig, T, S0, num_subdivs, num_paths)
    payoffs_asian = np.maximum(price_paths.mean(axis=1) - K, 0)
    Y = np.exp( np.log(price_paths)[: , 1:].mean(axis=1) )
    control_samples = np.maximum(Y - K, 0)

    r_e, sig_e = ctrl_coeffs(r, sig, num_subdivs)
    control_mean = np.exp(r_e*T)*call_eur_bs(r_e, sig_e, T, S0, K)
    res_sample = np.exp(-r*T)*(payoffs_asian - control_samples + control_mean)

    var = res_sample.var(ddof=1) / num_paths
    return (res_sample.mean(), var)
```

## 6 Résultats

### 6.1 Convergence des estimations

Afin de comparer les estimations  $P^{\Delta t, TW}$ ,  $P^{\Delta t, MC}$  et  $P^{\Delta t, MC, ctrl}$ , on trace la convergence de leur valeur en fonction du nombre de trajectoires, avec les paramètres suivants :

$$\begin{cases} S_0 &= 1 \\ K &= 1 \\ \sigma &= 0,3 = 30\% \\ T &= 6 \\ r &= 0,01 = 1\% \\ \Delta t &= \frac{1}{252} \end{cases} \quad (9)$$

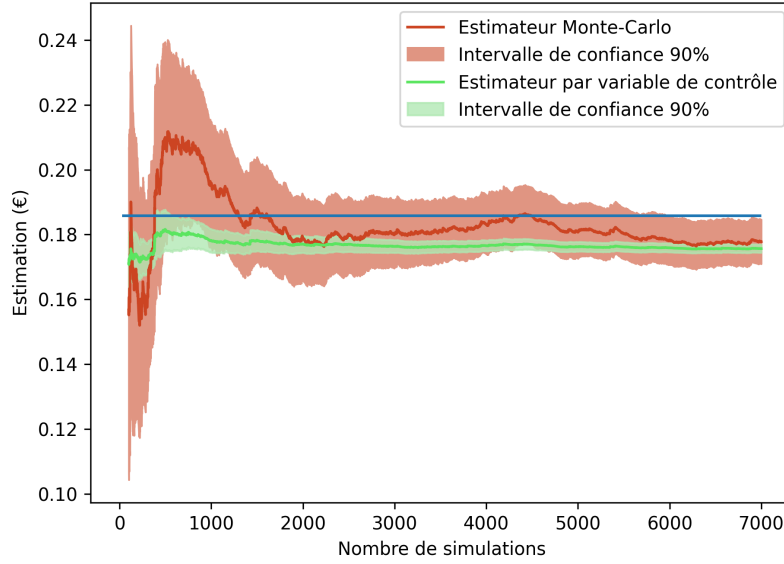


FIGURE 1 – Convergence des méthodes de Monte-carlo

On observe une amélioration drastique de la vitesse de convergence grâce à la méthode de variable de contrôle. De plus, l'approximation  $P^{\Delta t, TW}$  possède un biais qui peut être significatif selon les usages.

Dans la suite, on n'utilisera uniquement l'estimateur  $P^{\Delta t, MC, ctrl}$ , et on fixe le nombre de simulations à  $M = 3000$ . Ce nombre doit être choisis afin de vérifier une précision ciblée qui dépend du contexte du pricing. dans notre cas, ce choix est plus arbitraire, on le choisit de sorte que la taille de l'intervalle de confiance soit "petit" devant la différence entre  $P^{\Delta t, MC, ctrl}$  et  $P^{\Delta t, TW}$ .

## 6.2 Étude du biais de l'approximation de Turnbull & Wakeman

### 6.2.1 Sensibilité au changement de $K$

On étudie désormais en détail l'erreur de  $P^{\Delta t, TW}$ . En ne faisant varier que  $K$  entre 0 et 2, on remarque que cette approximation reste très proche de la valeur réelle approchée par  $P^{\Delta t, MC, ctrl}$ . En effet l'erreur maximum observée est inférieure à  $8 \times 10^{-3}$  (il est atteint pour  $K \approx 0,75$ ), mais reste en moyenne inférieur à  $2 \times 10^{-3}$ .

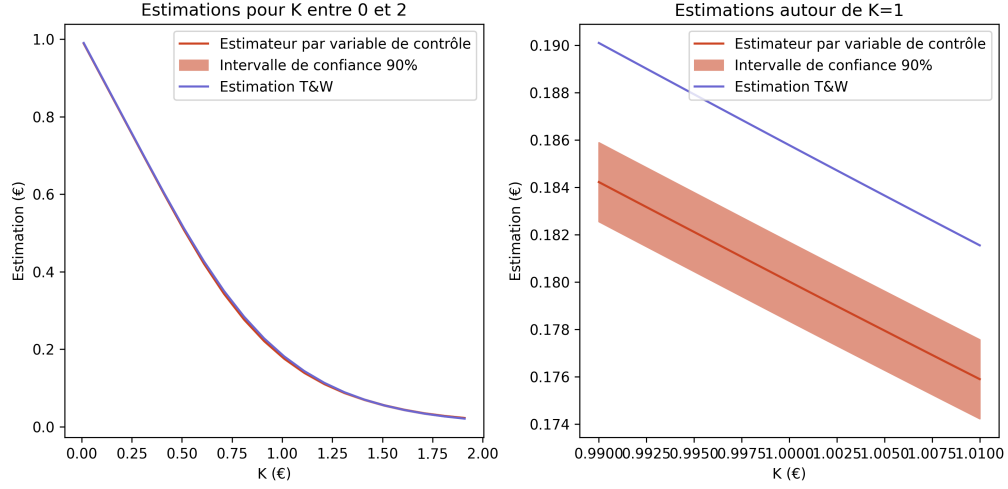


FIGURE 2 – Valeur de l'option en fonction de  $K$

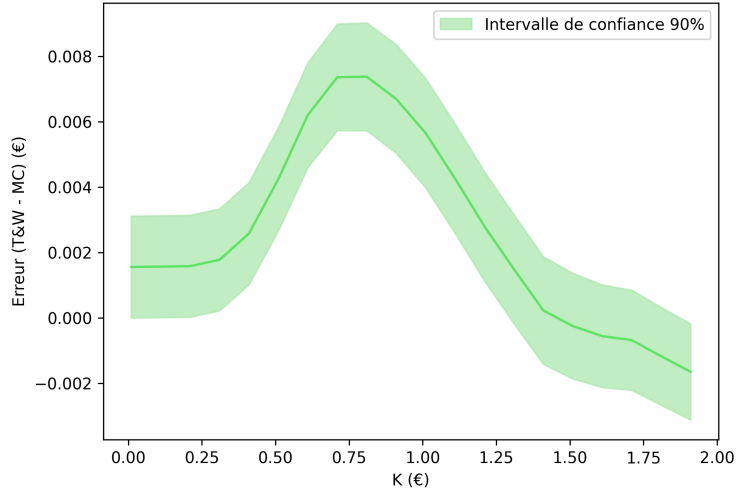


FIGURE 3 – Erreur de l'estimation de T&W en fonction de  $K$

### 6.2.2 Sensibilité au changement de $\sigma$

En étudiant le biais de l'approximation T&W en fonction de  $\sigma$ , on constate une erreur importante lorsque la volatilité dépasse 0,4. En effet l'estimateur  $P^{\Delta t, TW}$  suit une courbe presque linéaire en fonction de  $\sigma$  alors que  $P^{\Delta t, MC, ctrl}$  est concave.



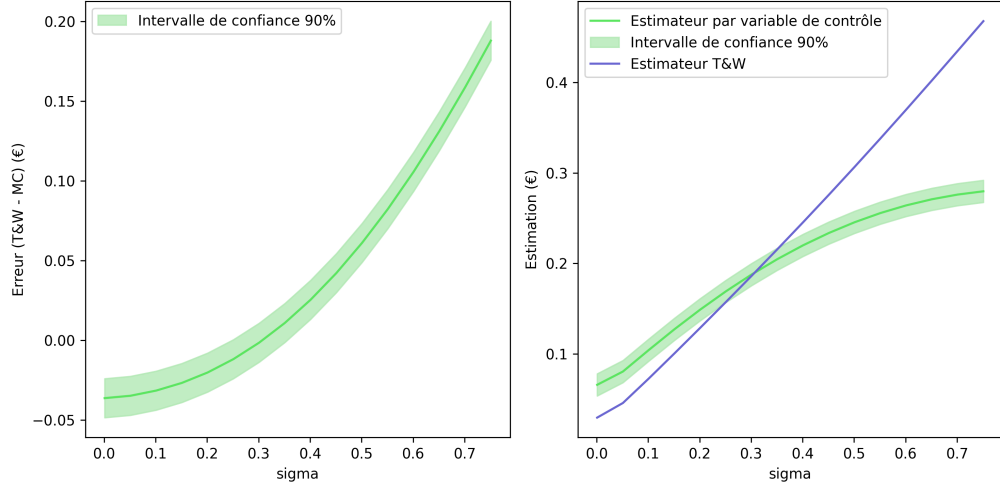


FIGURE 4 – Erreur de l'estimation de T&W en fonction de  $\sigma$

### 6.2.3 Sensibilité au changement de $\Delta t$

On trace la différence  $P^{\Delta, TW} - P^{\Delta, MC, ctrl}$  en fonction de  $K \in [0, 2]$  pour différentes valeurs de  $\Delta t$ . On n'observe pas de variation significative de l'erreur en fonction de  $\Delta t$  si ce n'est que le prix augmente en fonction de  $\Delta t$ , en effet dans le cas le prix extrême  $\Delta t = T$ , l'option devient une option européenne qui est plus chère qu'une option asiatique.

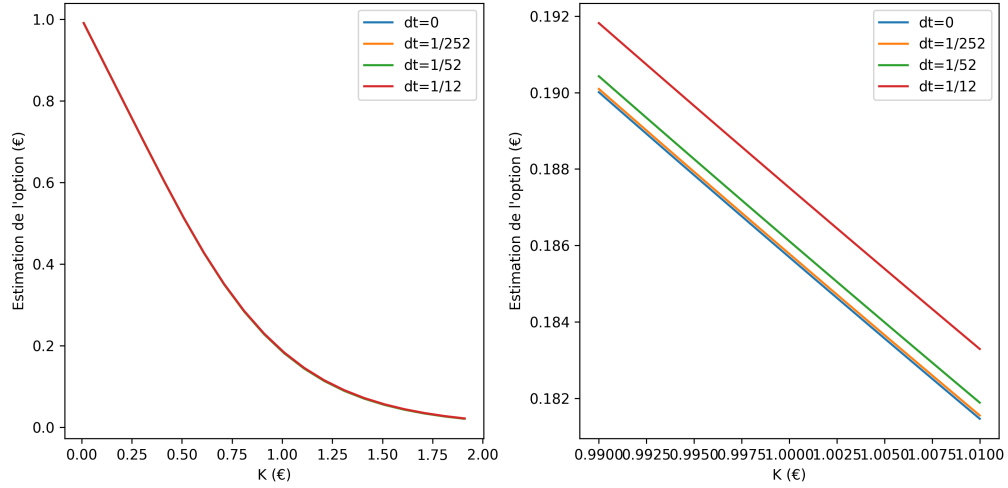


FIGURE 5 – Estimation de T&W en fonction de  $\Delta t$

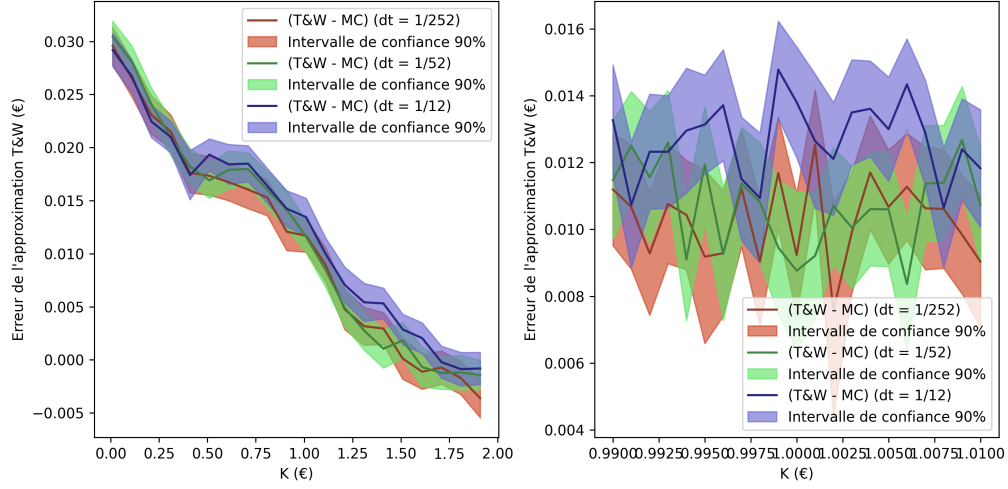


FIGURE 6 –  $P^{\Delta t, TW} - P^{\Delta t, MC, ctrl}$  pour différents  $\Delta t$

Aucune erreur significative n'est observée lorsque  $\Delta t$  varie.

### 6.3 Temps de calcul

Nous nous intéressons désormais au temps de calcul des différentes méthodes, et notamment leur évolution en fonction de  $\Delta t$ .

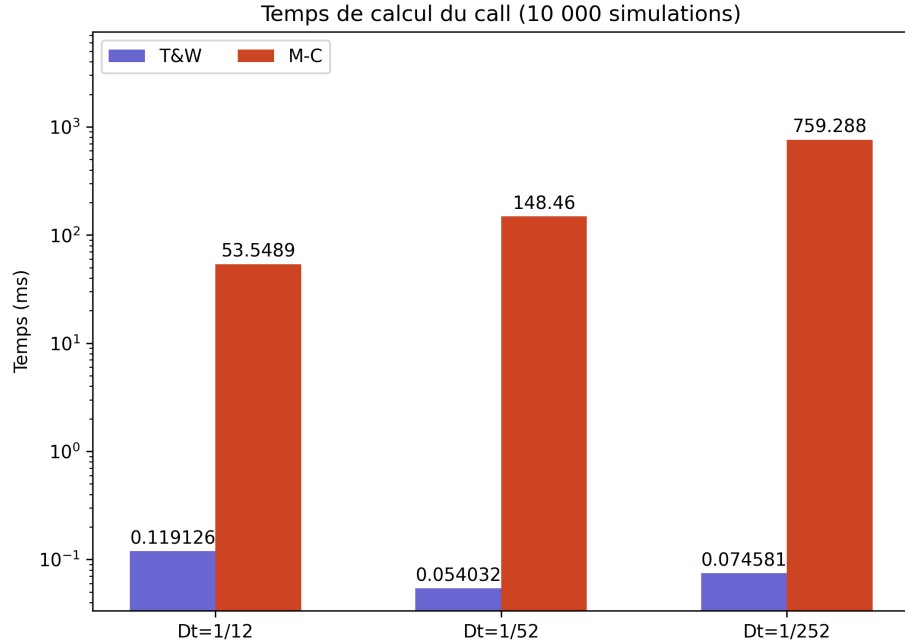


FIGURE 7 – Temps de calcul en fonction de  $\Delta t$ , (Ryzen 5 2600)

L'évolution du temps de calcul de l'option par Monte-Carlo est théoriquement proportionnel à

$\frac{n}{\Delta t}$ , et c'est ce qu'on observe sur ce graphique. Cette méthode est donc très coûteuse. L'approximation de Turnbull&Wakeman est quant à elle en  $\mathcal{O}(1)$  (complexité constante).

## 6.4 Conclusion

Pour conclure, l'approximation  $P^{\Delta t, TW}$  est simple et rapide à calculer, mais sa valeur n'est pertinente que sous certains paramètres. On a ainsi pu observer que l'erreur est importante si  $\sigma$  s'éloigne de 0,3. On constate également une erreur plus faible pour  $\sigma = 0,3$  et  $K$  entre 0,6 et 1,0. Nous remarquons aussi que l'approximation  $P^{\Delta t, TW}$  va sur estimer le prix du call pour  $\sigma > 0,3$ , mais le sous estimer pour  $\sigma < 0,3$ , cette remarque doit être prise en considération car la sous-évaluation d'un call représente une opportunité d'arbitrage.

## 7 Étude de la parité Call-Put

Nous souhaitons étudier la différence de prix entre une option Call ( $\epsilon = 1$ ) et put ( $\epsilon = -1$ ).

$$C - P = e^{-rT} \mathbb{E} \left[ \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N S(i\Delta t) - K \right)_+ \right] - e^{-rT} \mathbb{E} \left[ \left( K - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N S(i\Delta t) \right)_+ \right]$$

On démontre (Annexe E) que :

$$C - P = e^{-rT} \left[ \frac{S_0}{N} \cdot e^{r\Delta t} \cdot \frac{1 - e^{rT}}{1 - e^{r\Delta t}} - K \right]$$

## 8 Méthode de réduction de variance

On peut déduire des questions 15 et 6 une méthode de réduction de variance pour la méthode de calcul des prix de call et put par méthode de Monte Carlo. La question 6 nous a permis de calculer la variance du prix obtenu pour un call ou un put en fonction du strike  $K$ .

On remarque que pour des strikes élevés, la variance du prix du call est très faible alors que celle du put est plus grande. Ceci est dû au fait que le prix du call est très souvent nul. Inversement, pour un  $K$  faible, la variance du put est plus faible que celle du call. Ainsi, comme on peut lier les prix du call et du put analytiquement grâce à la question 15, il suffit pour calculer l'un des deux de se baser sur le prix de l'option qui a la plus faible variance en fonction du strike, puis ensuite de retrouver le prix par la formule obtenue à la question 15.

## 9 Conclusion

Pour conclure, nous avons développé 2 méthodes d'évaluation d'options asiatiques. L'approximation de Turnbull&Wakeman peut être privilégiée si le temps d'exécution est un sujet, mais souffre d'un biais qui doit être pris en compte. La méthode d'évaluation par variable de contrôle permet quant à elle d'évaluer une option asiatique avec une précision arbitraire en contrepartie d'une complexité numérique plus importante.

## A Formule du prix sous Black&Scholes

Pour résoudre cette équation, nous voudrions appliquer la formule d'Itô au processus  $\ln(S_t)$ . Si on pose  $f(x, t) = \ln(x)$  alors la formule d'Itô donnerait :

$$\begin{aligned}
 \ln(S_t) &= \ln(S_0) + \int_0^t \underbrace{\frac{\partial f}{\partial t}(s, S_s)}_{=0} ds + \int_0^t \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(s, S_s)}_{=\frac{1}{S_s}} dS_s + \frac{1}{2} \int_0^t \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, S_s)}_{=\frac{-1}{S_s^2}} \underbrace{d[S]_s}_{S_s^2 \sigma^2} \\
 &= \ln(S_0) + \int_0^t \frac{1}{S_s} S_s (r ds + \sigma dW_s) + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{-1}{S_s^2} \times d\left(\int_0^s [S_u \sigma]^2 du\right)_s \\
 &= \ln(S_0) + \int_0^t \frac{1}{S_s} S_s (r ds + \sigma dW_s) + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{-1}{S_s^2} \times [S_u \sigma]^2 ds \\
 &= \ln(S_0) + \int_0^t \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) ds + \int_0^t \sigma dW_s
 \end{aligned}$$

D'où

$$S_t = S_0 e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t} \quad (10)$$

Cette application n'est pas correcte. En effet pour appliquer la formule d'Itô, il faut démontrer que  $S_t$  existe, est un processus d'Itô, que  $t \mapsto f(x, t)$  est  $C^1$  et  $x \mapsto f(x, t)$  est  $C^2$  ce qui n'est pas le cas en 0 pour  $\ln$ . Nous pouvons quand même démontrer que (1) possède bien une solution de la forme (10).

### A.1 Existence et unicité

Posons  $b : (s, x) \mapsto rx$  et  $a : (s, x) \mapsto \sigma x$ . Alors (1) peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} dS_t = b(t, S_t)dt + a(t, S_t)W_t & t > 0 \\ S_0 \text{ déterministe} & t = 0 \end{cases} \quad (11)$$

Or les fonctions  $a$  et  $b$  sont clairement 1-lipschitziennes et à croissance linéaires, donc cette équation admet une unique solution  $(S_t)_{t>0}$ .

### A.2 Formule

Posons  $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,  $(t, x) \mapsto S_0 e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma x}$ , alors pour  $x, t \in \mathbb{R}^+ : \times \mathbb{R}$

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, x) = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)f(t, x), \quad \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) = \sigma f(t, x), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x) = \sigma^2 f(t, x)$$

**Hypothèses d'application de la formule d'Itô** :  $f$  est clairement  $C^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ , de plus Appliquons la formule d'Itô :

$$dS_t = df(t, W_t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, W_t)dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, W_t)dW_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, W_t)d[W]_t$$

Or  $[W]_t = t$  donc

$$\begin{aligned}
 dS_t &= \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)S_t dt + \sigma W_t dS_t + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t dt \\
 &= rS_t dt + \sigma W_t dS_t
 \end{aligned}$$

Ceci justifie bien la formule (10).

## B Réduction du problème au cas $t_0 = 0$

$$\begin{aligned}
P^0 &= e^{-rT} \mathbb{E} \left[ \left( \epsilon \left( \frac{1}{T-t_0} \int_{t_0}^T S_t dt - K \right) \right)_+ \right] \\
(\text{Séparation des } \int) &= e^{-rT} \mathbb{E} \left[ \left( \epsilon \left( \frac{1}{T-t_0} \left( \int_{t_0}^0 S_t dt + \int_0^T S_t dt \right) - K \right) \right)_+ \right] \\
(\text{Apparition de } \frac{1}{T}) &= e^{-rT} \mathbb{E} \left[ \left( \epsilon \left( \frac{T}{T-t_0} \frac{1}{T} \int_0^T S_t dt - \left( K - \frac{1}{T-t_0} \int_{t_0}^0 S_t dt \right) \times \frac{T-t_0}{T} \frac{T}{T-t_0} \right) \right)_+ \right] \\
(\text{Identification de } \tilde{K}) &= \frac{T}{T-t_0} e^{-rT} \mathbb{E} \left[ \left( \epsilon \left( \frac{1}{T} \int_0^T S_t dt - \underbrace{\left( K - \frac{1}{T-t_0} \int_{t_0}^0 S_t dt \right) \times \frac{T-t_0}{T}}_{\tilde{K}} \right) \right)_+ \right] \\
&= \frac{T}{T-t_0} e^{-rT} \mathbb{E} \left[ \left( \epsilon \left( \frac{1}{T} \int_0^T S_t dt - \tilde{K} \right) \right)_+ \right]
\end{aligned}$$

Donc,

$$P^0(K, t_0, T) = \frac{T}{T-t_0} P^0(\tilde{K}, 0, T) \quad (12)$$

Avec

$$\tilde{K} = \frac{T-t_0}{T} \left( K - \frac{1}{T-t_0} \int_{t_0}^0 S_t dt \right) \quad (13)$$

## C Prix d'une option européenne

Nous nous concentrons sur ce paragraphe sur l'évaluation d'un call européen ( $\epsilon = 1$ ) alors

$$\begin{aligned}
P^{0,TW} &= e^{-rT} \mathbb{E}[(S_A(T) - K)_+] \\
&= e^{-rT} \mathbb{E}[(S_A(T) - K) \mathbb{1}_{\{S_A(T) > K\}}] \\
&= e^{-rT} (\mathbb{E}[S_A(T) \mathbb{1}_{\{S_A(T) > K\}}] - K \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{S_A(T) > K\}}]) \\
&= e^{-rT} (\mathbb{E}[S_A(T) \mathbb{1}_{\{S_A(T) > K\}}] - K \mathbb{P}[S_A(T) > K])
\end{aligned}$$

Nous explicitons la condition  $S_A(T) > K$  en fonction d'une loi normale :

$$\begin{aligned}
S_A(T) > K &\iff S_0 e^{(r_A - \frac{\sigma_A^2}{2})T + \sigma_A W_T} > K \\
&\iff (r_A - \frac{\sigma_A^2}{2})T + \sigma_A W_T > \log\left(\frac{K}{S_0}\right) \\
&\iff \sigma_A W_T > \log\left(\frac{K}{S_0}\right) - (r_A - \frac{\sigma_A^2}{2})T \\
&\iff W_T > \frac{1}{\sigma_A} \left( \log\left(\frac{K}{S_0}\right) - (r_A - \frac{\sigma_A^2}{2})T \right)
\end{aligned}$$

Ici, le mouvement brownien au temps  $T$ ,  $W_T$  est une variable aléatoire gaussienne, donc on peut travailler avec  $W_T = \sqrt{T}G$  où  $G \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , ce qui donne une équivalence en loi :

$$S_A(T) > K \iff G > \frac{1}{\sigma_A \sqrt{T}} \left( \log\left(\frac{K}{S_0}\right) - (r_A - \frac{\sigma_A^2}{2})T \right) := d$$

Le prix  $S_A(T)$  est une transformation mesurable de  $G$  qui est une variable aléatoire gaussienne, par le théorème de transfert, on peut écrire  $\mathbb{E}[S_A(T) \mathbb{1}_{\{S_A(T) > K\}}]$  comme une intégrale :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(S_A(T) \mathbb{1}_{G > d}) &= \int_{x=-\infty}^{+\infty} S_0 e^{(r_A - \frac{\sigma_A^2}{2})T + \sigma_A \sqrt{T}x} \mathbb{1}_{x > d} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\
&= S_0 e^{r_A T} \int_{x=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{(-\frac{\sigma_A^2}{2})T - \frac{x^2}{2} + \sigma_A \sqrt{T}x} \mathbb{1}_{x > d} dx \\
&= S_0 e^{r_A T} \int_{x=d}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{(-\frac{\sigma_A^2}{2})T - \frac{x^2}{2} + \sigma_A \sqrt{T}x} dx
\end{aligned}$$

On reconnait l'identité remarquable

$$(-\frac{\sigma_A^2}{2})T - \frac{x^2}{2} + \sigma_A \sqrt{T}x = -\frac{1}{2}(x - \sigma_A \sqrt{T})^2$$

, par conséquent l'intégrale fait apparaître une loi normale :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(S_A(T) \mathbb{1}_{G > d}) &= S_0 e^{r_A T} \int_{x=d}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x - \sigma_A \sqrt{T})^2} dx \\
&= S_0 e^{r_A T} \int_{x=d - \sigma_A \sqrt{T}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du \\
&= S_0 e^{r_A T} \left( \int_{x=-\infty}^{\sigma_A \sqrt{T} - d} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du \right), \text{ Car la loi normale est symétrique} \\
&= S_0 e^{r_A T} \mathcal{N}(\sigma_A \sqrt{T} - d)
\end{aligned}$$

En notant  $\mathcal{N}(\cdot)$  la fonction de répartition de la loi normale centrée et réduite, telle que  $\mathcal{N}(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$ .

On explicite de la même manière le terme de droite,  $\mathbb{P}[S_A(T) > K] = \mathbb{P}[G > d] = \mathcal{N}(-d)$

Nous pouvons enfin écrire le prix  $P^{0,T,W}$

$$\begin{aligned}
P^{0,TW} &= e^{-rT} \mathbb{E}[(S_A(T) - K)_+] \\
&= e^{-rT} (S_0 e^{r_A T} \mathcal{N}(\sigma_A \sqrt{T} - d) - K \mathcal{N}(-d))
\end{aligned} \tag{14}$$

Pour conclure, le prix de l'option asiatique sous l'approximation de Turnbull & Wakeman est :

$$\begin{cases} P^{0,TW} = e^{-rT} (S_0 e^{r_A T} \mathcal{N}(\sigma_A \sqrt{T} - d) - K \mathcal{N}(-d)) \\ d = \frac{1}{\sigma_A \sqrt{T}} \left( \log\left(\frac{K}{S_0}\right) - (r_A - \frac{\sigma_A^2}{2})T \right) \end{cases} \tag{15}$$

Nous pouvons désormais calculer le prix d'une option asiatique sous cete approximation.

## D Coefficients de la variable de contrôle

$$e^{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln S(i\Delta t)} \stackrel{\text{Loi}}{=} S_0 e^{(r^E - \frac{(\sigma^E)^2}{2})T + \sigma^2 W_T^E}$$

En effet,

$$\begin{aligned}
e^{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln S(i\Delta t)} &= \exp\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln S_0 + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[ \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) i\Delta t + \sigma W_{i\Delta t} \right]\right) \\
&= S_0 \exp\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) i\Delta t + \underbrace{\frac{\sigma}{N} \sum_{i=1}^N W_{i\Delta t}}_{\tilde{G}}\right)
\end{aligned}$$

Or,  $\tilde{G}$  définie comme une somme de mouvement brownien peut être vue comme une gaussienne, en effet :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^N W_{i\Delta t} &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^i (W_{j\Delta t} - W_{(j-1)\Delta t}) = \sum_{j=1}^N \sum_{i=j}^N (W_{j\Delta t} - W_{(j-1)\Delta t}) \\
&= \sum_{j=1}^N (N - j + 1) \underbrace{(W_{j\Delta t} - W_{(j-1)\Delta t})}_{\text{Suit une loi } \mathcal{N}(0, \Delta t)}
\end{aligned}$$

Donc,  $\tilde{G}$  est une somme de loi gaussiennes, donc une gaussienne, on sait déjà que son espérance est nulle, afin de la caractériser il nous manque simplement sa variance :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}ar(\tilde{G}) &= \mathbb{V}ar\left(\sum_{j=1}^N (N - j + 1) (W_{j\Delta t} - W_{(j-1)\Delta t})\right) = \sum_{j=1}^N (N - j + 1)^2 \mathbb{V}ar(W_{j\Delta t} - W_{(j-1)\Delta t}) \\
&= \frac{(N+1)(2N+1)}{6N^2} \Delta t
\end{aligned}$$

Dès lors, on voit que la variable  $e^{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln S(i\Delta t)}$  se décompose en une loi log-normale, avec un drift et un terme stochastique, on peut alors identifier 2 paramètres  $\sigma^E$  et  $r^E$  tels que :

$$e^{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln S(i\Delta t)} \stackrel{\text{Loi}}{=} S_0 e^{(r^E - \frac{(\sigma^E)^2}{2})T + \sigma^2 W_T^E}$$

On montre que :

$$\begin{cases} \sigma^E &= \sigma \sqrt{\frac{(N+1)(2N+1)}{6N^2}} \\ r^E &= \frac{(\sigma^E)^2}{2} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \frac{N+1}{2N} \end{cases} \quad (16)$$

## E Forume de la parité Call-Put

Le but est de calculer la différence call-put de l'option asiatique :

$$C - P = e^{-rT} \mathbb{E} \left[ \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N S(i\Delta t) - K \right)_+ \right] - e^{-rT} \mathbb{E} \left[ \left( K - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N S(i\Delta t) \right)_+ \right]$$

Pour cela, on commence par faire apparaître des indicatrices, ce qui donne, en posant :

$$\Sigma = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N S(i\Delta t)$$

on obtient :

$$C - P = e^{-rT} \mathbb{E} [(\Sigma - K) \mathbf{1}_{\Sigma - K > 0} - (K - \Sigma) (1 - \mathbf{1}_{\Sigma - K > 0})]$$

Ce qui nous donne finalement :

$$C - P = e^{-rT} \mathbb{E}[\Sigma - K]$$

De plus, pour  $i \in \{1, \dots, N\}$ , on a :

$$\mathbb{E}[S(i\Delta t)] = \mathbb{E} \left[ S_0 \cdot e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)i\Delta t + \sigma W_{i\Delta t}} \right]$$

Par linéarité de l'espérance :

$$= S_0 \cdot e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)i\Delta t} \cdot \mathbb{E} [e^{\sigma W_{i\Delta t}}]$$

Or, on a :

$$\mathbb{E} [e^{\sigma W_{i\Delta t}}] = e^{\frac{\sigma^2}{2}i\Delta t}$$

Donc :

$$\mathbb{E}[S(i\Delta t)] = S_0 \cdot e^{r \cdot i\Delta t}$$

En combinant tout cela, on obtient :

$$\mathbb{E}[\Sigma] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbb{E}[S(i\Delta t)] = \frac{S_0}{N} \sum_{i=1}^N e^{r \cdot i\Delta t}$$

La somme est une suite géométrique, donc :

$$\sum_{i=1}^N e^{r \cdot i\Delta t} = e^{r\Delta t} \cdot \frac{1 - e^{rN\Delta t}}{1 - e^{r\Delta t}} = e^{r\Delta t} \cdot \frac{1 - e^{rT}}{1 - e^{r\Delta t}}$$

Finalement, on obtient :

$$C - P = e^{-rT} \left[ \frac{S_0}{N} \cdot e^{r\Delta t} \cdot \frac{1 - e^{rT}}{1 - e^{r\Delta t}} - K \right]$$