Leistungskurs Mathematik Q3 Hessen

Stochastik Skript

SHAMSHER SINGH KALSI

Berufliches Gymnasium — Ferdinand-Braun Schule
Kursleiter: Herr Thorsten Farnungen

22. August 2025

FERDINAND
BRAUN SCHULE
Technische Schulen der Stadt Fulda

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

17.08.2025

Dieses Skript dient als Fortsetzung von der Q2. Hierbei werden nur thematisch theoretische Unterrichtsinhalte notiert, wobei die Aufgaben und Übungen hauptsächlich in Obsidian bearbeitet werden, um den wahnsinnigen Dokumentationsaufwand zu reduzieren.

1.1 Leistungsbewertung und Klausurplanung in der Q3

20.08.2025

Im Verlauf des Schuljahres werden in diesem Kurs drei Klausuren geschrieben. Die zweite Klausur wird als Abiturklausur unter authentischen Bedingungen angesetzt, was eine Bearbeitungszeit von fünf Zeitstunden umfasst. Da der bis zu diesem Zeitpunkt behandelte abiturrelevante Stoff der Q3 ausschließlich die Stochastik abdeckt, wäre eine fünfstündige Prüfung allein zu diesem Thema für die Schülerinnen und Schüler eine unzumutbare Belastung. Aus diesem Grund wird der hilfsmittelfreie Teil dieser Klausur auch Aufgaben aus den Qualifikationsphasen Q1 (Analysis) und Q2 (Analytische Geometrie/Lineare Algebra) beinhalten, um eine angemessene Themenbreite zu gewährleisten. Die erste Klausur ist für den Zeitraum vor den Herbstferien vorgesehen.

1.1.1 Randbemerkungen

Theorem 1.1: Laplace Experiment

Ein Zufallsexperiment mit endlicher Ergebnismenge Ω heißt *Laplace-Experiment*, wenn für jedes Elementarereignis $\omega \in \Omega$ gilt:

$$P(\{\omega\}) = \frac{1}{|\Omega|}.$$

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses $E \subseteq \Omega$ ist dann

$$P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|}.$$

Beispiel 1.1: D

as Werfen eines idealen Würfels: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, jedes Ergebnis hat Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$. Für das Ereignis $E = \{\text{gerade Zahl}\}$ gilt $P(E) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Aufgabe 2.1: Check in Kapitel 1

1. Jan hat 20-mal in eine Lostrommel hineingegriffen und dabei 18 Nieten gezogen.
   - Berechnen Sie die relative Häufigkeit für den Gewinn als Bruch und in Prozent
   - Jana erreichte bei 12 Ziehungen die Gewinnquote 25%. Berechnen Sie die absolute und die relative Häufigkeit.
2. Bei der Bundestagswahl 2013 haben sich 71.5% der 62 Mio. Wahlberechtigten an der Wahl beteiligt. Die Stimmenverteilung für die einzelnen Parteien ist in Fig. 1 Dargstellt.
   - Geben Sie die Anteile der Stimmenverteilung als Bruch und Dezimalzahl an
   - Berechnen Sie, wie groß der Stimmenanteil der einzelnen Parteien bezogen auf alle 62 Mio. Wahlberechtigten ist.
3. Begründen Sie welche Situation ein Laplace-Experiment darstellt
   - Sie fragen einen Lehrer, an welchem Wochentag er sein Auto gewaschen hat
   - Sie ziehen ein Los aus einem Loseimer mit 120 Losen
   - Sie beobachten, ob der nächste Plattfuß an iuhrem Fahrrad vorne oder hinten auftritt
4. Berechnen Sie den Mittelwert der folgenden Zahlen:
   $2,5 \quad 6,3 \quad 1,9 \quad 10,0 \quad 2,8 \quad 5,6 \quad 5,1 \quad 7,8$

Lösung 2.2:

Aufgabe 1

$$h = \frac{H}{n}, \qquad n = 20, \qquad H = 20 - 18 = 2$$
$$h = \frac{2}{20} = \boxed{\frac{1}{10} = 0.1 = 10\%}$$

Jana's relative häufige Gewinnquote Beträgt 25%, sodass 75% $\vee$ $\frac{3}{4}$ Nieten sein müssen. Es gilt;

$$h_n(A) = \frac{H_n(A)}{n},$$

wobei $h_n(A)$ die relative und $H_n(A)$ die absolute Häufigkeit sind.

$$H = h \cdot n$$
$$H = \boxed{0.25 \cdot 12 = 3}$$

Aufgabe 2

Stimmenverteilung

CDU : $34.1\ \% = \frac{34.1}{100} = 0.341$ | **CSU** : $7.4\% = \frac{7.4}{100} = 0.074$ | **SPD** : $25.7\ \% = \frac{25.7}{100} = 0.257$ | **FDP** : $4.8\% = \frac{4{,}8}{100} = 0.048$ | **Die Linke** : $8.6\% = \frac{8.6}{100} = 0.086$ | **Die Grünen** : $8.4\% = \frac{8.4}{100} = 0.084$ | **sonstige** : $10.9\ \% = \frac{10.9}{100} = 0.109$ |

Stimmenanteil

$$\text{Wähler} = 62.000.000 \cdot 0.715 = 44.330.000$$

$$\textbf{CDU} \ : 34.1\ \% = 0.341 \cdot 44.330.000 \approx \boxed{15.112.000}$$

$$\textbf{CSU} \ : 7.4\% = 0.074 \cdot 44.330.000 \approx \boxed{3.280.420}$$

$$\textbf{SPD} \ : 25.7\ \% = 0.257 \cdot 44.330.000 \approx \boxed{11.392.810}$$

$$\textbf{FDP} \ : 4.8\% = 0.048 \cdot 44.330.000 \approx \boxed{2.127.840}$$

$$\textbf{Linke} \ : 8.6\% = 0.086 \cdot 44.330.000 \approx \boxed{3.812.380}$$

$$\textbf{Grünen} \ : 8.4\% = 0.084 \cdot 44.330.000 \approx \boxed{3.723.720}$$

$$\textbf{sonstige} \ : 10.9\ \% = 0.109 \cdot 44.330.000 \approx \boxed{4.831.970}$$

Lösung 2.3:

Aufgabe 3

1. Kein Laplace-Experiment, da der Lehrer nicht mit gleicher Wahrscheinlichkeit an jedem Wochentag sein Auto wäscht; Alltagsroutinen und äußere Zwänge machen die Wahrscheinlichkeiten ungleich.

2. Laplace-Experiment: Jedes der 120 Lose ist gleich wahrscheinlich gezogen zu werden, sofern alle Lose gleich beschaffen und gut gemischt sind. Dass die Gewinnchancen inhaltlich ungleich verteilt sind (1 Gewinnlos, 119 Nieten), widerspricht dem Laplace-Modell nicht, da sich dieses nur auf die Elementarereignisse (jedes einzelne Los) bezieht.

3. Kein sauberes Laplace-Experiment, da das Vorderrad physikalisch häufiger betroffen ist (führt, trifft zuerst Hindernisse, andere Belastung). Nur unter starker Modellannahme „beide Räder gleich gefährdet" könnte man es als Laplace-Experiment ansehen.

Aufgabe 4

- $2 + 5 = 7, \frac{7}{2} = 3,5$
- $6 + 3 = 9, \frac{9}{2} = 4.5$
- $1 + 9 = 10, \frac{10}{2} = 5$
- $10 + 0 = 10, \frac{10}{2} = 5$
- $2 + 8 = 10, \frac{10}{2} = 5$
- $5 + 6 = 11, \frac{11}{2} = 5.5$
- $5 + 1 = 6, \frac{6}{2} = 3$
- $7 + 8 = 15, \frac{15}{2}$

Oder: Um den Mittelwert (das arithmetische Mittel) $\bar{x}$ zu berechnen, werden alle Zahlen summiert und die Summe wird durch die Anzahl der Zahlen geteilt.

$$\bar{x} = \frac{2,5 + 6,3 + 1,9 + 10,0 + 2,8 + 5,6 + 5,1 + 7,8}{8}$$
$$\bar{x} = \frac{42,0}{8}$$
$$\bar{x} = \boxed{5,25}$$

3 Berechnung von Wahrscheinlichkeiten

4 Wahrscheinlichkeitsverteilung

5 Hypothesentest (für binominalverteilte Zufallsgrößen)

6 Prognose- und Konfidenzintervalle (für binomialverteilte Zufallsgrößen)

Theorem 6.1: Quadratische Ergänzung

Sei $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Beispiel 6.1: Numerisches Beispiel

Für $a = 2$, $b = 3$ erhalten wir

$$(2+3)^2 = 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 3 + 3^2 = 25.$$

Aufgabe 6.1: Binomische Formel

Beweise die zweite binomische Formel: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Lösung 6.2: Lösungsskizze

Ausmultiplizieren liefert
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Hinweis

Diese Box ist ein Beispiel für Hinweise, farblich und formal abgesetzt.