Leistungskurs Mathematik Q3 Hessen

Stochastik Skript

Shamsher Singh Kalsi

Berufliches Gymnasium — Ferdinand-Braun Schule
Kursleiter: Herr Thorsten Farnungen

1. September 2025

FERDINAND BRAUN SCHULE
Technische Schulen der Stadt Fulda

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

17.08.2025

Dieses Skript dient als Fortsetzung von der Q2. Hierbei werden nur thematisch theoretische Unterrichtsinhalte notiert, wobei die Aufgaben und Übungen hauptsächlich in Obsidian bearbeitet werden, um den wahnsinnigen Dokumentationsaufwand zu reduzieren.

1.1 Leistungsbewertung und Klausurplanung in der Q3

20.08.2025

Im Verlauf des Schuljahres werden in diesem Kurs drei Klausuren geschrieben. Die zweite Klausur wird als Abiturklausur unter authentischen Bedingungen angesetzt, was eine Bearbeitungszeit von fünf Zeitstunden umfasst. Da der bis zu diesem Zeitpunkt behandelte abiturrelevante Stoff der Q3 ausschließlich die Stochastik abdeckt, wäre eine fünfstündige Prüfung allein zu diesem Thema für die Schülerinnen und Schüler eine unzumutbare Belastung. Aus diesem Grund wird der hilfsmittelfreie Teil dieser Klausur auch Aufgaben aus den Qualifikationsphasen Q1 (Analysis) und Q2 (Analytische Geometrie/Lineare Algebra) beinhalten, um eine angemessene Themenbreite zu gewährleisten. Die erste Klausur ist für den Zeitraum vor den Herbstferien vorgesehen.

1.1.1 Randbemerkungen

Theorem 1.1: Laplace Experiment

Ein Zufallsexperiment mit endlicher Ergebnismenge Ω heißt *Laplace-Experiment*, wenn für jedes Elementarereignis $\omega \in \Omega$ gilt:

$$P(\{\omega\}) = \frac{1}{|\Omega|}.$$

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses $E \subseteq \Omega$ ist dann

$$P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|}.$$

Beispiel 1.1: D

as Werfen eines idealen Würfels: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, jedes Ergebnis hat Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$. Für das Ereignis $E = \{\text{gerade Zahl}\}$ gilt $P(E) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Aufgabe 2.1: Check in Kapitel 1

1. Jan hat 20-mal in eine Lostrommel hineingegriffen und dabei 18 Nieten gezogen.
   - Berechnen Sie die relative Häufigkeit für den Gewinn als Bruch und in Prozent
   - Jana erreichte bei 12 Ziehungen die Gewinnquote 25%. Berechnen Sie die absolute und die relative Häufigkeit.
2. Bei der Bundestagswahl 2013 haben sich 71.5% der 62 Mio. Wahlberechtigten an der Wahl beteiligt. Die Stimmenverteilung für die einzelnen Parteien ist in Fig. 1 Dargstellt.
   - Geben Sie die Anteile der Stimmenverteilung als Bruch und Dezimalzahl an
   - Berechnen Sie, wie groß der Stimmenanteil der einzelnen Parteien bezogen auf alle 62 Mio. Wahlberechtigten ist.
3. Begründen Sie welche Situation ein Laplace-Experiment darstellt
   - Sie fragen einen Lehrer, an welchem Wochentag er sein Auto gewaschen hat
   - Sie ziehen ein Los aus einem Loseimer mit 120 Losen
   - Sie beobachten, ob der nächste Plattfuß an iuhrem Fahrrad vorne oder hinten auftritt
4. Berechnen Sie den Mittelwert der folgenden Zahlen:
   $2,5 \quad 6,3 \quad 1,9 \quad 10,0 \quad 2,8 \quad 5,6 \quad 5,1 \quad 7,8$

Lösung 2.2:

Aufgabe 1

$$h = \frac{H}{n}, \qquad n = 20, \qquad H = 20 - 18 = 2$$
$$h = \frac{2}{20} = \boxed{\frac{1}{10} = 0.1 = 10\%}$$

Jana's relative häufige Gewinnquote Beträgt 25%, sodass 75% $\vee$ $\frac{3}{4}$ Nieten sein müssen. Es gilt;

$$h_n(A) = \frac{H_n(A)}{n},$$

wobei $h_n(A)$ die relative und $H_n(A)$ die absolute Häufigkeit sind.

$$H = h \cdot n$$
$$H = \boxed{0.25 \cdot 12 = 3}$$

Aufgabe 2

Stimmenverteilung

CDU : $34.1\ \% = \frac{34.1}{100} = 0.341$ | **CSU** : $7.4\% = \frac{7.4}{100} = 0.074$ | **SPD** : $25.7\ \% = \frac{25.7}{100} = 0.257$ | **FDP** : $4.8\% = \frac{4,8}{100} = 0.048$ | **Die Linke** : $8.6\% = \frac{8.6}{100} = 0.086$ | **Die Grünen** : $8.4\% = \frac{8.4}{100} = 0.084$ | **sonstige** : $10.9\ \% = \frac{10.9}{100} = 0.109$ |

Stimmenanteil

$$\text{Wähler} = 62.000.000 \cdot 0.715 = 44.330.000$$

$$\textbf{CDU} \ : 34.1\ \% = 0.341 \cdot 44.330.000 \approx \boxed{15.112.000}$$

$$\textbf{CSU} \ : 7.4\% = 0.074 \cdot 44.330.000 \approx \boxed{3.280.420}$$

$$\textbf{SPD} \ : 25.7\ \% = 0.257 \cdot 44.330.000 \approx \boxed{11.392.810}$$

$$\textbf{FDP} \ : 4.8\% = 0.048 \cdot 44.330.000 \approx \boxed{2.127.840}$$

$$\textbf{Linke} \ : 8.6\% = 0.086 \cdot 44.330.000 \approx \boxed{3.812.380}$$

$$\textbf{Grünen} \ : 8.4\% = 0.084 \cdot 44.330.000 \approx \boxed{3.723.720}$$

$$\textbf{sonstige} \ : 10.9\ \% = 0.109 \cdot 44.330.000 \approx \boxed{4.831.970}$$

Lösung 2.3:

Aufgabe 3

1. Kein Laplace-Experiment, da der Lehrer nicht mit gleicher Wahrscheinlichkeit an jedem Wochentag sein Auto wäscht; Alltagsroutinen und äußere Zwänge machen die Wahrscheinlichkeiten ungleich.

2. Laplace-Experiment: Jedes der 120 Lose ist gleich wahrscheinlich gezogen zu werden, sofern alle Lose gleich beschaffen und gut gemischt sind. Dass die Gewinnchancen inhaltlich ungleich verteilt sind (1 Gewinnlos, 119 Nieten), widerspricht dem Laplace-Modell nicht, da sich dieses nur auf die Elementarereignisse (jedes einzelne Los) bezieht.

3. Kein sauberes Laplace-Experiment, da das Vorderrad physikalisch häufiger betroffen ist (führt, trifft zuerst Hindernisse, andere Belastung). Nur unter starker Modellannahme „beide Räder gleich gefährdet“ könnte man es als Laplace-Experiment ansehen.

Aufgabe 4

- $2 + 5 = 7, \frac{7}{2} = 3,5$
- $6 + 3 = 9, \frac{9}{2} = 4.5$
- $1 + 9 = 10, \frac{10}{2} = 5$
- $10 + 0 = 10, \frac{10}{2} = 5$
- $2 + 8 = 10, \frac{10}{2} = 5$
- $5 + 6 = 11, \frac{11}{2} = 5.5$
- $5 + 1 = 6, \frac{6}{2} = 3$
- $7 + 8 = 15, \frac{15}{2}$

Oder: Um den Mittelwert (das arithmetische Mittel) $\bar{x}$ zu berechnen, werden alle Zahlen summiert und die Summe wird durch die Anzahl der Zahlen geteilt.

$$\bar{x} = \frac{2,5 + 6,3 + 1,9 + 10,0 + 2,8 + 5,6 + 5,1 + 7,8}{8}$$
$$\bar{x} = \frac{42,0}{8}$$
$$\bar{x} = \boxed{5,25}$$

Aufgabe 2.4: Bearbeiten Sie die Aufgaben 1 bis 4 von Wdh. Statistik

1. Berechnen Sie den Mittelwert, die Varianz und die Standardabweichung der Liste 2; 0; 5; 6; 3; 8

2. Von einer Lieferung Fahrradspeichen wurde bei einer Stichprobe die Länge der Speichen (in mm) gemessen: 269; 274; 269; 268; 272; 270; 269; 270; 268; 271.

   - Nenne Sie die bei dieser Erhebung die Grundgesamtheit, den Mermalsträger, das untersuchte Merkmal, den Stichprobenumfang und die Merkmalsausprägungen.
   - Berechnen Sie den Mittelwert, die Varianz und die Standardabweichung

3. Die Anzahl der Regentage beträgt im langjährigen Mittel für Amsterdam bzw. Rangun:

   - Stellen Sie die Verteilung der Anzahl der Regentage grafisch dar.
   - Berechnen Sie für beide Messreihen den Mittelwert und die Standartabweichung

4. Gegeben ist die nebenstehende relative Häufgikeitsveteilung.

   - Beschriften Sie die Achsen passend
   - Bestimmen Sie den Mittelwert und die Standardabwichung
   - Untersuchen Sie, welche Werte aus b) sich ändern, wenn alle Säulen gleich hoch sind

Theorem 2.1: Die Bedeutung von Mittelwert, Varianz und Standardabweichung

Mittelwert

Der Mittelwert gibt sozusagen den Durchschnitt gegebener Daten an. Diesen Berechnet man durch das Addieren aller Elemente und dem Teilen von der Anzahl der Elemente.

$$\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Varianz

Die Varianz misst, wie stark die Werte um den Mittelwert streuen. Dazu berechnet man die Abweichungen jedes Wertes vom Mittelwert, quadriert diese (damit Abweichungen nach oben und unten nicht wegfallen) und mittelt sie wieder:

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2$$

Standardabweichung

Die Standardabweichung ist die Wurzel der Varianz. Sie gibt die Streuung in derselben Einheit wie die Daten an (praktischer als die quadrierten Werte der Varianz):

$$s = \sqrt{s^2}$$

Lösung 2.5: Aufgabe 1

1. **Mittelwert**

$$\overline{x} = \frac{2+0+5+6+3+8}{6} = \boxed{\frac{24}{6} = 4}$$

2. **Varianz**

$$\begin{aligned} s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 &= \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n} \\ &= \frac{(2-4)^2 + (0-4)^2 + (5-4)^2 + (6-4)^2 + (3-4)^2 + (8-4)^2}{6} \\ &= \frac{4+16+1+4+1+16}{6} = \boxed{\frac{42}{6} = 7} \end{aligned}$$

3. **Standardabweichung**

$$s = \sqrt{s^2} \rightarrow \boxed{\sqrt{7} \approx 2.65}$$

Lösung 2.6: Aufgabe 2

1. Aufgabe A

Grundgesamtheit:	Alle Fahrradspeichen in der gesamten Lieferung
Merkmalsträger:	Eine einzelne Fahrradspeiche
Merkmal:	Die Länge der Speiche in mm
Stichprobenumfang:	Es wurden 10 Speichen gemessen $\rightarrow n = 10$
Merkmalausprägungen:	269; 274; 269; 268; 272; 270; 269; 270; 268; 271

2. Aufgabe B

Mittelwert

$$\overline{x} = \frac{269 + 274 + 269 + 268 + 272 + 270 + 269 + 270 + 268 + 271}{10} = \boxed{\frac{2700}{10} = 270}$$

Varianz

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \\ &= \frac{(269-270)^2 + (274-270)^2 + (269-270)^2 + (268-270)^2 + (272-270)^2}{10} \\ &\quad + \frac{(270-270)^2 + (269-270)^2 + (270-270)^2 + (268-270)^2 + (271-270)^2}{10} \\ &= \frac{1+16+1+4+4+0+1+0+4+1}{10} \\ &= \boxed{\frac{32}{10} = 3.2} \end{aligned}$$

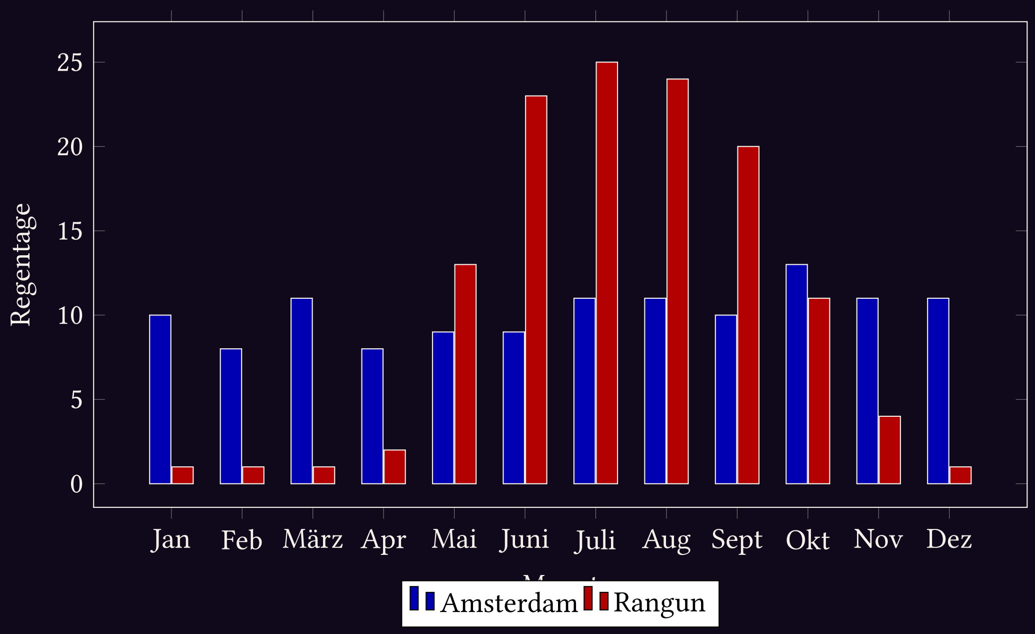
Standardabweichung

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{3.2} \approx \boxed{1.79}$$

Lösung 2.7: Aufgabe 3

2.1 Aufgabe A

Monat	Jan.	Feb.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.
Amsterdam	10	8	11	8	9	9	11	11	10	13	11	11
Rangun	1	1	1	2	13	23	25	24	20	11	4	1



2.2 Aufgabe B

Amsterdam

$$\overline{x}_A = \frac{10+8+11+8+9+9+11+11+10+13+11+11}{12} = \boxed{\frac{122}{12} \approx 10.17}$$

$$s_A^2 = \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{12}(x_i - \overline{x}_A)^2 = \frac{(10-10.17)^2 + (8-10.17)^2 + \cdots + (11-10.17)^2}{12} = \frac{24.67}{12} \approx \boxed{2.06}$$

$$s_A = \sqrt{s_A^2} = \boxed{\sqrt{2.06} \approx 1.43}$$

Rangun

$$\overline{x}_R = \frac{1+1+1+2+13+23+25+24+20+11+4+1}{12} = \boxed{\frac{126}{12} = 10.5}$$

$$s_R^2 = \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{12}(x_i - \overline{x}_R)^2 = \frac{(1-10.5)^2 + (1-10.5)^2 + \cdots + (1-10.5)^2}{12} = \frac{971}{12} \approx \boxed{80.92}$$

$$s_R = \sqrt{s_R^2} = \boxed{\sqrt{80.92} \approx 8.99}$$

Lösung 2.8: Aufgabe 4

1. Achsenbeschriftung

- X-Achse: „Merkmal“ bzw. „Anzahl Ereignisse“
- Y-Achse: „Relative Häufigkeit [%]“
- Skalierung: 0% bis 40% in 10%-Schritten

2. Mittelwert und Standardabweichung

Gegeben:

$$x_i = 0, 1, 2, 3, \qquad f_i = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$$

Mittelwert:

$$\overline{x} = \sum_i x_i \cdot f_i = 0 \cdot 0.1 + 1 \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.3 + 3 \cdot 0.4 = 2.0$$

Varianz:

$$s^2 = \sum_i f_i \cdot (x_i - \overline{x})^2 = 0.1 \cdot (0-2)^2 + 0.2 \cdot (1-2)^2 + 0.3 \cdot (2-2)^2 + 0.4 \cdot (3-2)^2 = 1.0$$

Standardabweichung:

$$s = \sqrt{1.0} = 1.0$$

3. Gleich hohe Säulen

Falls alle $f_i = 0.25$ gilt:

Mittelwert:

$$\overline{x} = 0 \cdot 0.25 + 1 \cdot 0.25 + 2 \cdot 0.25 + 3 \cdot 0.25 = 1.5$$

Varianz:

$$s^2 = 0.25 \cdot (0-1.5)^2 + 0.25 \cdot (1-1.5)^2 + 0.25 \cdot (2-1.5)^2 + 0.25 \cdot (3-1.5)^2 = 1.25$$

Standardabweichung:

$$s = \sqrt{1.25} \approx 1.118$$

3 Berechnung von Wahrscheinlichkeiten

25.08.2025

Theorem 3.1: Ereignis

Mathematisch gesehen ist ein Ereignis E also nichts anderes als eine Teilmenge des Ergebnisraumes $\Omega \,:\, E \subseteq \Omega$

3.1 Boolische Algebra - Elemente der Mengenlehre

Buch Seite 32/33 Übung 4, 5 und 6 / Altes Buch Seite 12

Aufgabe 3.1: Altes Buch Seite 12 Aufgaben 4, 5 und 6

Übung 4 EIn Würfel wird einmal geworfen. Stellen Sie die Ereignisse $F_1 \,:$ "Die Augenzahl ist kleiner als 3ünd $E_2 \,:$ "Die Augenzahl ist ungerade äls Ergebnismengen dar. Bestimmen Sie die Ergebnissmenge des Ereignisses $E_1 \cup E_2$

Übung 5 Aus einer Urne mit 50 gleichartigen Kugeln, die die Nummern 1 bis 50 tragen, wird zufällig eine Kugel gezogen. Stellen Sie die folgenden Ereignisse als Ergebnismengen dar

Übung 6 Stellen Sie die folgenden Eregnisse beim Roulette als Ergebnismengen dar:

Lösung 3.2: Übung 5

- $E_1 = 9, 18, 27, 36, 45$
- $E_2 = 12, 24, 36, 48$
- $E_3 = 23, 46$

$$E_1 \cap E_2 = \{36\}$$
$$E_1 \cup E_2 = \{9, 12, 18, 24, 27, 36, 45, 48\}$$
$$E_2 \cap E_3 = \{\}$$
$$E_1 \cup E_2 \cup E_3 =$$

Aufgabe 3.3: Aufgabe 8 Ergebnismengen

EIn grüner und ein roter Würfel werden gleichzeitig geworfen.

- Geben Sie einen Ergebnisraum an. Schreiben Sie hierzu ein Ergebnis als Paar.
- Geben Sie die Ergebnismenge folgender Ergebnisse an:
  - E_1 : Die Augenzahlen der beiden Würfel sind gleich
  - E_2 : Die Augensumme beträgt 8
  - E_3 : Das Augenzahlprodukt ist durch 8 teilbar
  - E_4 : Die Augenzahlen sind nicht beide gerade
  - E_5 : Das Produkt der Augenzahlen ist größer als 10, aber kleiner als 21
  - E_6 : Die Augenzahlen unterscheiden sich um maximal 3
  - $E_1 \cap E_2$
  - $E_1 \cup E_2$

Lösung 3.4: Aufgabe 8

- $\Omega := E_1 \times E_2$
-

3.2 Absolute und Relative Häufigkeit

3.2.1 Relative Häufigkeit

Aufgabe 3.5: Übungen relative Häufigkeiten

Aufgabe 4

Aufgabe 5

Aufgabe 6

Aufgabe 7

Aufgabe 8

Lösung 3.6: Aufgabe 4

Das Würfeln wurde mithilfe eines Programmcodes simuliert. Dabei ergaben sich die in Abbildung 3.2.1 dargestellten Resultate.

```
   Compiling wuerfel_sim v0.1.0 (/home/chronos/Documents/Nvim/Schule/13BG/Rust/Mathematik/wuerfel_sim)
    Finished `dev` profile [unoptimized + debuginfo] target(s) in 0.33s
     Running `/home/chronos/Documents/Nvim/Schule/13BG/Rust/Mathematik/wuerfel_sim/target/debug/wuerfel_sim 200 10`
Gruppe  Würfe bis  Sechsen     Rel.Freq  Graph
----------------------------------------------------------------------
     1         10        2       20.00%  ########
     2         20        4       20.00%  ########
     3         30        4       13.33%  #####
     4         40        7       17.50%  #######
     5         50        8       16.00%  ######
     6         60       10       16.67%  #######
     7         70       14       20.00%  ########
     8         80       14       17.50%  #######
     9         90       17       18.89%  ########
    10        100       19       19.00%  ########
    11        110       21       19.09%  ########
    12        120       25       20.83%  ########
    13        130       25       19.23%  ########
    14        140       27       19.29%  ########
    15        150       28       18.67%  #######
    16        160       28       17.50%  #######
    17        170       30       17.65%  #######
    18        180       31       17.22%  #######
    19        190       32       16.84%  #######
    20        200       34       17.00%  #######
⋏ Mathematik/wuerfel_sim/src  master ? ❯
```

a

[a] Unfertiger Code zur Vereinfachung

27.08.2025

Theorem 3.2: Satz: Wahrscheinlichkeiten bei Laplace Experimenten

Bei einem Laplace-Experiment sei $\Omega = \{e_1, \dots, e_m\}$ der Ergebnisraum und $E = \{e_{i_1}, \dots, e_{i_k}\}$ ein beliebiges Ereignis: Dann gilt für die Wahrscheinlichkeit deieses Ergebnisses;

$$P(E) = \frac{|E|}{\Omega} = \frac{k}{m} \qquad P(E) = \frac{\text{Anzahl der für E günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl aller möglichen Ergebnisse}}$$

Beispiel 3.1: c

ontent...

Aufgabe 3.7: Aufgaben 9 bis 11

-

Lösung 3.8: Aufgabe 9

Urne 2

Lösung 3.9: Aufgabe 10

1. $\frac{1}{32}$
2. $\frac{8}{32} = \frac{1}{4}$
3. $P_L(E) = \frac{12}{32} \wedge P_H(E) = \frac{8}{32}$

Lösung 3.10: Aufgabe 11

1. $\frac{4}{500}$
2. $\frac{20}{500}$
3. $\frac{480}{500}$
4. 497 lose

Buch Seite 44 / 45 15 - 18

Aufgabe 3.11: Buch Seite 45 Aufgaben 15 bis 18

content...

Lösung 3.12: Aufgabe 15

W1 \ W2	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

$$\Omega = 36$$

Aufgabe 3.13: Übungen - Wahrscheinlichkeitsrechnung

1. Berechnen Sie für die Urliste $\{4; 3; 4; 5; 4\}$ den Mittelwert, die Varianz und die Standardabweichung.

2. Nach einer Statistik der Deutschen Bahn verkehren etwa 95 Prozent der Fernzüge „pünktlich (d.h. mit maximal 5 Minuten Verspätung). Tim fährt 5-mal mit einem Fernzug.

   - Er berechnet die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Zug nicht pünktlich ist, mit der Formel $1 - 0.95^5$. Erklären Sie.
   - Nehmen Sie Stellung zur Annahme: „Die Pünktlichkeit der Züge ist voneinander unabhängig."

3. Wenn man Flügelmuttern auf einer Seite schwarz, auf der anderen weiß markiert, gibt es beim Würfeln drei mögliche Ergebnisse. Heiko hat 50-mal, Simon 200-mal gewürfelt.

   - Notieren Sie sinnvolle Wahrscheinlichkeiten. Erläutern Sie Ihre Gedanken.
   - Fassen Sie die Ergebnisse zusammen und notieren Sie eine bessere Einschätzung

4. Man wirft zwei Würfel. Untersuchen Sie die Ereignisse A und B auf Unabhängigkeit.

   - A: Die Augensumme ist 6. Und B: Die Differenz der Augenzahl ist 0.
   - A: Der erste Würfel zeigt 3. Und B: Die Augensumme ist größer als 5.
   - A: Der erste Würfel zeigt eine Augenzahl unter 3. Und B: Der zweite Würfel zeigt einer Augenzahl über 3.

Ergebnisse / Namen	Schwarz	Weiß	Boden
Heiko	20	24	6
Simon	88	95	17

Lösung 3.14: Aufgabe 1

MIttelwert

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\overline{x} = \frac{4+3+4+5+4}{5} = \boxed{\frac{20}{5} = 4}$$

Varianz

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$

$$s^2 = \frac{(4-4)^2 + (3-4)^2 + (4-4)^2 + (5-4)^2 + (4-4)^2}{5}$$

$$s^2 = \frac{0+1+0+1+0}{5} = \boxed{\frac{2}{5} = 0.4}$$

Standardabweichung

$$s = \sqrt{s^2}$$

$$s = \sqrt{0.4} \approx \boxed{0.632}$$

Lösung 3.15: Aufgabe 2

Erklärung zu $1 - 0{,}95^5$

Wir modellieren jede Fahrt als Bernoulli-Experiment mit der Erfolgswahrscheinlichkeit $p = 0{,}95$ für „pünktlich". Unter der (idealisierenden) Annahme stochastischer Unabhängigkeit ist die Wahrscheinlichkeit, dass *alle* fünf Fahrten pünktlich sind, $0{,}95^5$. Das Gegenereignis lautet „mindestens eine Fahrt ist unpünktlich", also $1 - 0{,}95^5 \approx 1 - 0{,}77378094 \approx 0{,}2262$.

Zur Unabhängigkeits-Annahme

Die Annahme unabhängiger Fahrten ist eine bequeme Modellvereinfachung, aber in der Realität fragil: Systemstörungen, Wetterlagen, Bauarbeiten oder Anschlussabhängigkeiten erzeugen Korrelationen. Fahrten am selben Tag, auf derselben Strecke oder mit engen Umstiegsbeziehungen sind typischerweise positiv korreliert in ihrer Pünktlichkeit. Das Binomialmodell liefert also eine sinnvolle Erstnäherung; streng genommen wäre ein Modell mit latenten „Zuständen" (z. B. normaler Betrieb vs. Störungstag) plausibler, bei dem sich p zwischen Tagen variiert, sodass die Unabhängigkeit nur *bedingt* gilt.

Lösung 3.16: Aufgabe 3

Gedanken zu sinnvollen Wahrscheinlichkeiten

Die Flügelmutter besitzt zwei markierte Flächen (schwarz/weiß), die geometrisch symmetrisch sind; hierfür ist ohne weitere Information $P(\text{Schwarz}) \approx P(\text{Weiß})$ naheliegend. Ein Fall „Boden/Seite" ist physikalisch möglich, aber aufgrund der kleineren stabilen Auflagefläche plausibel seltener als die Flächen. Eine uninformierte Vorabschätzung könnte also in der Größenordnung „je Flächenfarbe ähnlich groß, Boden merklich kleiner" liegen, etwa symbolisch $P_S \approx P_W$ und P_B deutlich darunter, ohne exakte Werte festzulegen.

Schätzungen aus den Daten

Heiko würfelt $n_H = 50$-mal mit $(20, 24, 6)$ für (Schwarz, Weiß, Boden), Simon $n_S = 200$-mal mit $(88, 95, 17)$. Die relativen Häufigkeiten einzeln sind

$$\hat{p}_S^{(H)} = \tfrac{20}{50} = 0{,}40, \quad \hat{p}_W^{(H)} = \tfrac{24}{50} = 0{,}48, \quad \hat{p}_B^{(H)} = \tfrac{6}{50} = 0{,}12,$$

$$\hat{p}_S^{(S)} = \tfrac{88}{200} = 0{,}44, \quad \hat{p}_W^{(S)} = \tfrac{95}{200} = 0{,}475, \quad \hat{p}_B^{(S)} = \tfrac{17}{200} = 0{,}085.$$

Fassen wir die Ergebnisse zusammen ($n = 250$ Gesamtwürfe), erhalten wir

$$\hat{p}_S = \frac{108}{250} = 0{,}432, \qquad \hat{p}_W = \frac{119}{250} = 0{,}476, \qquad \hat{p}_B = \frac{23}{250} = 0{,}092.$$

Diese gepoolte Schätzung ist robuster als die einzelne von Heiko, da n größer ist. Sie bestätigt die Symmetrie zwischen den Flächen näherungsweise und zeigt einen kleineren, aber nicht vernachlässigbaren Anteil für „Boden". Für weitere Präzision könnte man Konfidenzintervalle (z. B. Wilson) angeben; heuristisch liegt der Standardfehler pro Kategorie etwa bei $\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}$, also in einer Größenordnung von zwei bis drei Prozentpunkten für die Flächen und etwa zwei Prozentpunkten für „Boden".

Lösung 3.17: Aufgabe 4

Es gelten 36 gleichwahrscheinliche Ausgänge für zwei faire Würfel. Unabhängigkeit liegt genau dann vor, wenn $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$.

A: Augensumme $= 6$; **B: Differenz** $= 0$

Die Summe 6 tritt in 5 Paaren auf, also $P(A) = \frac{5}{36}$. Die Differenz 0 bedeutet gleiche Augen, also $P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$. Im Schnittpunkt liegt nur $(3,3)$, somit $P(A \cap B) = \frac{1}{36}$. Da

$$P(A)P(B) = \frac{5}{36} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{216} \neq \frac{1}{36},$$

sind A und B *abhängig*.

A: Erster Würfel zeigt 3**; B: Augensumme** > 5

Hier ist $P(A) = \frac{1}{6}$. Für B gilt $P(B) = \frac{26}{36} = \frac{13}{18}$, da die Summen ≤ 5 insgesamt $1+2+3+4 = 10$ Fälle haben. Der Schnitt $A \cap B$ verlangt beim ersten Würfel 3 und beim zweiten eine 3, 4, 5, 6, also 4 von 36: $P(A \cap B) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$. Das Produkt

$$P(A)P(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{13}{18} = \frac{13}{108} \neq \frac{1}{9},$$

also *abhängig*.

A: Erster Würfel < 3**; B: Zweiter Würfel** > 3

Es ist $P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ und $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Der Schnitt umfasst die $2 \cdot 3 = 6$ Paare mit erstem Wurf 1 oder 2 und zweitem Wurf 4, 5, 6, also $P(A \cap B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$. Da

$$P(A)P(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6},$$

sind A und B *unabhängig*.

4 Wahrscheinlichkeitsverteilung

5 Hypothesentest (für binominalverteilte Zufallsgrößen)

6 Prognose- und Konfidenzintervalle (für binomialverteilte Zufallsgrößen)

Theorem 6.1: Quadratische Ergänzung

Sei $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Beispiel 6.1: Numerisches Beispiel

Für $a = 2$, $b = 3$ erhalten wir

$$(2+3)^2 = 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 3 + 3^2 = 25.$$

Aufgabe 6.1: Binomische Formel

Beweise die zweite binomische Formel: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Lösung 6.2: Lösungsskizze

Ausmultiplizieren liefert

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Hinweis

Diese Box ist ein Beispiel für Hinweise, farblich und formal abgesetzt.