Aufgabe 3.27: Buch Seite 64 Aufgaben 1 bis 4

1. **Würfeln mit zwei Würfeln:** Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird beim gleichzeitigen Werfen von zwei Würfeln ...
   - die Summe vier
   - eine Primzahlsumme
   - eine Summe kleiner als 10 gewürfelt?
2. **Würfeln mit drei Würfeln:** Drei Würfel werden geworfen Beträgt die Augensumme 17 oder 18, so gewinnt man einen Preis
   - Geben Sie den Ergebnisraum sowie das Gewinnereignis mittels der Elementarereignisse an
   - Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man bei dem Spiel nicht gewinnt?
3. **Spiel:** Ein Spieler wirft eine Münze. Bei einem Kopfwurf dreht er anschließend einmal Rad A, bei Zahl wird Rad B einmal gedreht. Der EInsatz pro Spiel beträgt 2 Euro . Die gedrehte Zahl auf dem Rad gibt die Auszahlung an.
   - Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, 5 Euro als Auszahlung zu erhalten?
   - Mit welchem durchschnittlichen Gewinn/Verlust pro Spiel hat der Spieler zu rechnen?

   $\Rightarrow$ **Rad A:** {0, 5, 0, 3, 0, 5, 0}

   $\Rightarrow$ **Rad B:** {0, 5, 0,3}
4. **Glücksrad:** Auf einem Glücksrad sind die kleinen Sektoren jeweils halb so groß wie die großen Sektoren. Das Rad wird zweimal gedreht.
   - Geben Sie die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Sektoren an
   - Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Augensumme 2 ist?
   - Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für einen großen Gewinn?
   - Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird ein Gewinn erzielt?

   $\Rightarrow$ **Rad:** {4, 7, 2, 1, 8, 3, 6, 5}

Augensumme:
- 16, 15: großer Gewinn
- 14, 13: kleiner Gewinn

Aufgabe 3.28: Buch Seite 64 Aufgabe 5

5. Clever und Smart würfeln jeweils einmal mit einem Würfel. Clever beginnt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit übertrifft Smart in einem Wurf Clevers Augenzahl? Simulieren Sie diesen Versuch mittels einer Tabelle mit Zufallsziffern für n = 50.

Lösung 3.29:

1. **Würfeln mit zwei Würfeln:** Der Ergebnisraum hat $6 \cdot 6 = 36$ gleichwahrscheinliche Ergebnisse.

   - *Summe 4:* Mögliche Paare: $(1,3),(2,2),(3,1)$. $\Rightarrow$ $P(\text{Summe} = 4) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} \approx 0{,}0833$.
   - *Primzahlsumme:* Primzahlen zwischen 2 und 12 sind $\{2,3,5,7,11\}$. Günstige Ergebnisse:

   $$\begin{aligned} \text{Summe } 2 &: (1,1) \quad (1) \\ \text{Summe } 3 &: (1,2),(2,1) \quad (2) \\ \text{Summe } 5 &: (1,4),(2,3),(3,2),(4,1) \quad (4) \\ \text{Summe } 7 &: (1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1) \quad (6) \\ \text{Summe } 11 &: (5,6),(6,5) \quad (2) \end{aligned}$$

   Insgesamt $1+2+4+6+2 = 15$. $\Rightarrow$ $P(\text{Primzahlsumme}) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12} \approx 0{,}4167$.
   - *Summe kleiner als 10:* Komplementär: Summe ≥ 10 sind $10, 11, 12$.

   $$\#\{10\} = 3, \quad \#\{11\} = 2, \quad \#\{12\} = 1 \quad \Rightarrow 6.$$

   $\Rightarrow P(\text{Summe} < 10) = \frac{36-6}{36} = \frac{30}{36} = \frac{5}{6} \approx 0{,}8333.$

2. **Würfeln mit drei Würfeln:** Ergebnisraum: $6^3 = 216$.

   - Gewinnereignis: Augensumme $= 17$ oder 18.

     - Für 18: Nur $(6,6,6)$, also 1 Möglichkeit. - Für 17: Alle Permutationen von $(6,6,5)$. Anzahl $= 3$.

     $\Rightarrow \#\text{Gewinn} = 4$.
   - Wahrscheinlichkeit für *kein Gewinn*:

   $$P(\text{kein Gewinn}) = 1 - \frac{4}{216} = \frac{212}{216} = \frac{53}{54} \approx 0{,}9815.$$

3. **Spiel mit Münze und Rädern:**

- Wahrscheinlichkeit für 5 Euro Auszahlung:
  - Rad A: $\{0,5,0,3,0,5,0\} \longrightarrow 7$ Felder, davon 2 mal die 5. $P_A(5) = \frac{2}{7}$.
  - Rad B: $\{0,5,0,3\} \longrightarrow 4$ Felder, davon 1 mal die 5. $P_B(5) = \frac{1}{4}$.
  Da die Münze fair ist:
  $$P(5\text{ Euro}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{7} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{7} + \frac{1}{8} = \frac{15}{56} \approx 0{,}268.$$
- Erwartungswert der Auszahlung:
  Rad A: $E_A = \frac{0+5+0+3+0+5+0}{7} = \frac{13}{7} \approx 1{,}857$. Rad B: $E_B = \frac{0+5+0+3}{4} = 2$.
  Erwartungswert des Spiels:
  $$E(X) = \frac{1}{2}\cdot E_A + \frac{1}{2}\cdot E_B = \frac{1}{2}\cdot\frac{13}{7} + \frac{1}{2}\cdot 2 = \frac{13}{14} + 1 = \frac{27}{14} \approx 1{,}929.$$
  Da der Einsatz 2 Euro beträgt, ergibt sich der durchschnittliche Gewinn/Verlust:
  $$\mu = E(X) - 2 \approx -0{,}071.$$
  Also ein kleiner Verlust.

4. **Glücksrad:** Rad: $\{4,7,2,1,8,3,6,5\}$, wobei wir annehmen, dass die Sektoren abwechselnd groß/klein angeordnet sind:

   Große Sektoren: $\{4,2,8,6\}$, Kleine Sektoren: $\{7,1,3,5\}$.

   Damit gilt: $P(\text{groß}) = \frac{1}{6}$, $P(\text{klein}) = \frac{1}{12}$.

   - *Wahrscheinlichkeit für jeden Sektor:*
     $$P(4) = P(2) = P(8) = P(6) = \frac{1}{6}, \quad P(7) = P(1) = P(3) = P(5) = \frac{1}{12}.$$
   - *Augensumme = 2:* Nur möglich durch $(1,1)$. Da 1 ein kleiner Sektor ist:
     $$P((1,1)) = \left(\frac{1}{12}\right)^2 = \frac{1}{144} \approx 0{,}00694.$$

- *Großer Gewinn: Summen 15 oder 16.*

$$\begin{aligned}\text{Summe 15}: \quad & (7,8), (8,7), (6, 9 \text{ nicht möglich}), (4, 11 \text{ nicht möglich}) \\ & \Rightarrow (7,8), (8,7). \\ & P(7,8) = \tfrac{1}{12} \cdot \tfrac{1}{6} = \tfrac{1}{72}, \quad P(8,7) = \tfrac{1}{6} \cdot \tfrac{1}{12} = \tfrac{1}{72}. \\ & \Rightarrow P(\text{Summe 15}) = \tfrac{1}{36}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Summe 16}: \quad & (8,8). \\ & P(8,8) = \left(\tfrac{1}{6}\right)^2 = \tfrac{1}{36}.\end{aligned}$$

$$\Rightarrow P(\text{großer Gewinn}) = \tfrac{1}{36} + \tfrac{1}{36} = \tfrac{1}{18} \approx 0{,}0556.$$

- *Kleiner Gewinn: Summen 13 oder 14.*

$$\begin{aligned}\text{Summe 13}: \quad & (6,7), (7,6), (8,5), (5,8). \\ & P(6,7) = \tfrac{1}{6} \cdot \tfrac{1}{12} = \tfrac{1}{72}, \quad P(7,6) = \tfrac{1}{12} \cdot \tfrac{1}{6} = \tfrac{1}{72}, \\ & P(8,5) = \tfrac{1}{6} \cdot \tfrac{1}{12} = \tfrac{1}{72}, \quad P(5,8) = \tfrac{1}{12} \cdot \tfrac{1}{6} = \tfrac{1}{72}. \\ & \Rightarrow P(\text{Summe 13}) = \tfrac{4}{72} = \tfrac{1}{18}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Summe 14}: \quad & (6,8), (8,6). \\ & P(6,8) = \tfrac{1}{6} \cdot \tfrac{1}{6} = \tfrac{1}{36}, \quad P(8,6) = \tfrac{1}{6} \cdot \tfrac{1}{6} = \tfrac{1}{36}. \\ & \Rightarrow P(\text{Summe 14}) = \tfrac{2}{36} = \tfrac{1}{18}.\end{aligned}$$

$$\Rightarrow P(\text{kleiner Gewinn}) = \tfrac{1}{18} + \tfrac{1}{18} = \tfrac{1}{9} \approx 0{,}1111.$$

- *Wahrscheinlichkeit für irgendeinen Gewinn (klein oder groß):*

$$P(\text{Gewinn}) = P(\text{groß}) + P(\text{klein}) = \tfrac{1}{18} + \tfrac{1}{9} = \tfrac{1}{6} \approx 0{,}1667.$$

Aufgabe 5: Clever und Smart.
Ergebnisraum: (x, y) mit $x, y \in \{1, \dots, 6\}$. Clever: x, Smart: y.
Smart übertrifft Clever, falls $y > x$.

Anzahl günstige Fälle:

$$\sum_{x=1}^{6}(6-x) = 5+4+3+2+1+0 = 15.$$

Gesamt $= 36$.

$$P(\text{Smart gewinnt}) = \tfrac{15}{36} = \tfrac{5}{12} \approx 0{,}417.$$

Simulation mit $n = 50$ Zufallszahlen würde einen ähnlichen Wert liefern.

4 Wahrscheinlichkeitsverteilung

5 Hypothesentest (für binominalverteilte Zufallsgrößen)

6 Prognose- und Konfidenzintervalle (für binomialverteilte Zufallsgrößen)