实验四 线性卷积与循环卷积

一 实验目的

1. 加深理解数字信号处理系统的数值计算本质。
2. 掌握线性卷积的计算机编程方法，利用卷积的方法观察系统响应的时域特性。
3. 掌握循环卷积的计算机编程方法，验证与线性卷积的关系。利用循环卷积的方法观察、分析系统响应的时域特性。

二 实验基础

1. 线性卷积

$$x(n) \longrightarrow \boxed{h(n)} \longrightarrow y(n)$$

离散LTI系统

线性时不变系统（Linear Time-Invariant System, or LTI 系统），系统的单位脉冲响应为 $h(n)$，系统的输入序列为 $x(n)$，输出序列为 $y(n)$，则系统输入、输出之间的关系为：

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m)$$

上式称为**线性卷积**。数字信号处理中，当给定了系统的单位脉冲响应，系统对输入信号的处理过程即实现上式的数值计算。

若序列 $x(n)$ 和 $h(n)$ 长度分别为 L 点和 M 点，则线性卷积结果 $y(n)$ 的长度为 L+M-1。

2. DFT 的时域循环卷积定理

设两个有限长序列 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$，长度分别为 N_1 和 N_2，取 N≥max[N_1, N_2]，定义序列 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 的 N 点循环卷积为：

$$x(n) = x_1(n) \text{Ⓝ} x_2(n) = \left[\sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) x_2((n-m))_N\right] R_N(n)$$

N 点循环卷积运算的矩阵表示式如下：

$$\begin{bmatrix} y_c(0) \\ y_c(1) \\ y_c(2) \\ \vdots \\ y_c(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(0) & x_2(N-1) & x_2(N-2) & \cdots & x_2(1) \\ x_2(1) & x_2(0) & x_2(N-1) & \cdots & x_2(2) \\ x_2(2) & x_2(1) & x_2(0) & \cdots & x_2(3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_2(N-1) & x_2(N-2) & x_2(N-3) & \cdots & x_2(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_1(1) \\ x_1(2) \\ \vdots \\ x_1(N-1) \end{bmatrix}$$

若 $x_1(n) \xleftrightarrow{N点DFT} X_1(k)$ ， $x_2(n) \xleftrightarrow{N点DFT} X_2(k)$，则

$$X(k)=DFT[x(n)]=X_1(k)\cdot X_2(k)$$

此即 DFT 的**时域循环卷积定理**。

3. 循环卷积与线性卷积的关系

设序列 $x(n)$ 为 L 点长，序列 $h(n)$ 为 M 点长，若 $x(n)$ 与 $h(n)$ 进行 N 点的循环卷积得到 $y_c(n)$，两序列的线性卷积结果为 $y_l(n)$，经推导可得二者关系如下：

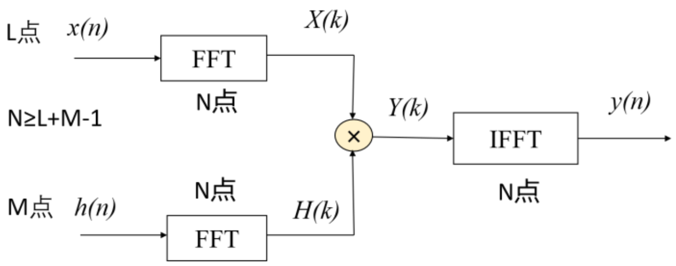
$$y_c(n)=\left[\sum_{i=-\infty}^{\infty}y_l(n+iN)\right]R_N(n)$$

上式表明： $y_c(n)$**等于** $y_l(n)$ **的 N 点周期延拓序列的主值序列**。

当 $N<L+\mathrm{M}-1$时，N 点周期延拓会产生混叠。

当 $N\geq L+M-1$时 $y_c(n)=y_l(n)$。

若 $x(n)$ 与 $h(n)$ 均为有限长序列时，根据 DFT 的时域循环卷积定理，可以通过如下快速卷积结构实现线性卷积运算。



实际应用中，通常需要对输入序列实现实时处理，输入序列长度不定或无限长，当系统的单位脉冲响应为有限长时，需要把输入序列分段与单位脉冲响应进行卷积，分段处理的方法有重叠相加法和重叠保留法。MATLAB 中函数 fftfilt()即采用重叠相加法实现线性卷积运算。

4 相关的 MATLAB 函数

conv(); fft(); ifft();fftfilt()；stem(); figure();

请使用 MATLAB 帮助文档查阅函数的使用说明。

构建的循环卷积运算函数 circonv()如下：

```
function y=circonv(x1,x2)
xn2=[x2(1),fliplr(x2)];
xn2(length(xn2))=[];
C=xn2;
R=x2;
M=toeplitz(C,R);
y=x1*(M);
```

三 实验内容

1. 已知长度为 4 的两个有限长序列

$$x(n)=(n+1)R_4(n) \qquad\qquad h(n)=(4-n)R_4(n)$$

① 利用 MATLAB 的 conv（）函数求线性卷积 $y(n)=x(n)*h(n)$，并绘图。

② 利用 MATLAB 构建的循环卷积函数计算下述 4 种情况下 $x(n)$和$h(n)$ 循环卷积，并绘图。

$$x(n)⑤h(n) \qquad x(n)⑥h(n) \qquad x(n)⑦h(n) \qquad x(n)⑧h(n)$$

③ 调用 fft(),ifft()利用循环卷积定理计算 $x(n)⑧h(n)$，并绘图。

④ 比较线性卷积和循环卷积的结果，分析其关系。

2. 已知 15 阶的 FIR 低通数字滤波器的单位脉冲响应为

h(n)= [-0.014534,0.006316,0.049630 ,0.030960, -0.064914,-0.065690,0.161875,0.432748,

0.432748, 0.161875, -0.065690, -0.064914, 0.030960, 0.049630, 0.006316, -0.014534]

输入序列为 $x(n)=0.9^n+\cos(0.25\pi n)+\sin(0.75\pi n)$，n≥0。

① 请利用快速卷积运算编程计算输入序列经滤波器处理得到输出序列 y(n)，0≤n≤500。需要对输入序列 x(n)分段卷积，采用重叠相加法或者重叠保留法。

提示 A：采用重叠相加法，若快速卷积中采用 128 点的 FFT 运算模块，则输入序列可分段为 113 点子序列，此时子序列与 15 点 h(n)的线性卷积结果为 128 点。相邻前段卷积结果的后 15 点与相邻后段卷积结果的前 15 点需要求和得到对应时间序号上的卷积结果值。

提示 B：采用重叠保留法，若快速卷积中采用 128 点的 FFT 运算模块，则输入序列分段为 128 点子分段，快速卷积结果前 15 点为混叠点，需丢弃，因此序列 x(n)的分段相邻子段之间需要有 15 点的重叠区，且在第一子段前需加 15 点长的 0 值序列。

② 画出序列 x(n)， h(n)和 y(n)。

③ 利用 filter 函数或 fftfilt 函数实现对 x(n)的滤波处理，求得 y(n)，并绘图，检验第一步程序是否正确。

四 实验报告要求

1．实验报告中简述实验目的和实验原理要点。

2．按实验内容要求回答问题，并附实验代码和输出图形。

3．总结实验中用到的 MATLAB 函数及功能。

4．报告中除程序代码和程序输出结果和绘图外，其余部分必须手写。 （统一 A4 纸左侧装订）