实验二　信号、系统及系统响应

一 实验目的

1. 熟悉连续信号与其采样序列的频谱关系，加深对时域采样定理的理解。
2. 掌握序列傅里叶变换的计算机实现方法。
3. 利用序列的傅里叶变换对连续信号、离散信号及系统响应进行频域分析。
4. 深入理解系统的频率响应的物理意义。

二 实验基础

1. 模拟信号的频谱与序列的频谱之间的关系

利用计算机分析模拟信号的频谱，第一步操作即采样。对一个连续信号 $x_a(t)$ 进行理想采样得到样值信号 $\hat{x}_a(t)$ 。

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{t}) = \sum_{\boldsymbol{n}=-\infty}^{\infty} \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{nT})\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{nT})$$

样值信号$\hat{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{t})$的频谱为：

$$\hat{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{j\Omega}) = \frac{1}{\boldsymbol{T}}\sum_{\boldsymbol{k}=-\infty}^{\infty} \boldsymbol{X}_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{j\Omega}-\boldsymbol{jk\Omega_s})$$

上式表明，$\hat{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{j\Omega})$为 $X_a(j\Omega)$ 的周期延拓，其延拓周期为采样角频率（$\Omega_s = 2\pi/T$）。只有满足采样定理时，才不会发生频率混叠失真。将以上公式转换到数字频率域，$\boldsymbol{\Omega T}=\boldsymbol{\omega}$。

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a\left(j\left(\frac{\omega-2\pi k}{T}\right)\right)$$

上式即样值序列$x_a(nT)$的傅里叶变换，频谱函数是关于$\boldsymbol{\omega}$的周期为 2π 的函数式。

为了在数字计算机上观察分析各种序列的频域特性，通常对$X(e^{j\omega})$在$[0,2\pi]$上进行 M 点采样来观察分析。 对长度为 N 的有限长序列 x(n)，有

$$X(k) = X(e^{j\omega_k}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-jn\omega_k}$$

其中 $\omega_k = \frac{2\pi}{M}k,\ \ k = 0,1,\cdots,M-1$。

通常 M 应取得大一些，以便观察谱的细节变化。取模$|X(e^{j\omega_k})|$可绘出幅频特性曲线。

序列的 M 点傅里叶变换由如下 dtft(xn,M)函数实现，请理解其计算过程。该函数为自定义函数,需保存为函数文件放在当前目录中或搜索路径下以备调用,建议与调用该函数的脚本文件放在同一文件夹下。

```
function Xk=dtft(xn,M)
```

```
% xn 为输入序列 M 为频域抽取点数
k=0:M-1;
w=2*pi*k/M;
Xk=xn*exp(-j*[1:length(xn)]'*w);
```

注意：离散序列的时间变量和其频谱的频率变量 w 均无量纲，绘图时观察模拟信号的时域和频域特性时，应恢复其量纲，时间 n*Ts（单位：s），频率 w*Fs（单位：rad/s）或 w*Fs/2pi（单位：Hz）。

2. 离散系统的频率响应

离散系统的频率响应为离散系统的单位脉冲响应的傅里叶变换。

$$\boldsymbol{H}\left(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{j\omega}}\right)=\sum_{\boldsymbol{n}=-\infty}^{\infty} h(\boldsymbol{n})\,\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{j\omega n}}$$

为便于理解系统频率响应的物理意义，我们分析了单频余弦序列$x(n)=A\cos(\omega_0 n+\phi)$作为系统输入产生的稳态输出$y(n)$。

$$y(n)=A\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|\cos\{\omega_0 n+\phi+\varphi(\omega_0)\}$$

当系统输入为正弦序列时，则输出为同频率的正弦序列，系统对输入序列的处理作用即：调整了余弦序列的振幅，调节比例为$\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|$，改变了余弦序列的相位，产生相移为$\varphi(\omega_0)$。

序列的傅里叶反变换

$$x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

表明，任意一般序列，可以分解为不同频率分量的线性和。

输入序列 x(n)通过 LTI 系统产生的输出序列为 y(n)，在频域的输入输出关系为：

$$\boldsymbol{Y}\left(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{j\omega}}\right)=\boldsymbol{X}\left(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{j\omega}}\right)\times\boldsymbol{H}\left(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{j\omega}}\right)$$

系统的频率响应

$$H(e^{j\omega})=|H(e^{j\omega})|\cdot e^{j\varphi(\omega)}$$

描述了系统对输入信号中的不同频率成分的幅度调节和相位调节作用。

借助 MATLAB 的 help 文档，熟悉 conv、filter、freqz、stem、subplot 等函数。复习离散系统的频域表征等相关理论知识，完成实验内容。

三 实验内容

1. 已知信号$x_a(t)=Ae^{-\alpha t}\sin(\Omega_0 t)u(t)$，A=200，$\alpha=75\pi$，$\Omega_0=75\pi$，

（1）理论计算信号$x_a(t)$的频谱函数表达式，并利用 MATLAB 画出信号的时域波形和幅度谱$|X_a(j\Omega)|$。

提示：注意绘图中选取合适的时间变量和频率变量的取值范围和步长。

（2）分别以采样频率 f_s=2000Hz，1000Hz 和 400Hz 对信号$x_a(t)$进行等间隔采样，得到采样序列$x(nT)$，计算三种采样率下所得采样序列的傅里叶变换并分别绘出幅度谱，序列采样时间区间取$0\le t\le 0.1$s。

（3）对各采样频率下得到的采样序列的幅度谱进行归一化计算并作图，观察并分析频谱的周期性、

周期长度以及频谱混叠程度与采样频率f_s的关系。

提示：幅度谱归一化即使幅度谱最大值为 1，可先获取幅度谱最大值，然后所有幅度谱除幅度谱最大值。

2. 已知数字滤波器的系统函数为

$$H(z) = \frac{0.0007289(1+z^{-1})^6}{(1-1.2686z^{-1}+0.7051z^{-2})(1-1.0106z^{-1}+0.3583z^{-2})(1-0.9044z^{-1}+0.2155z^{-2})}$$

(1) $x_1(n)=\cos(0.04\pi n)$，$x_2(n)=\cos(0.24\pi n)$，$x_3(n)=\cos(0.32\pi n)$，编程求三个序列分别作为系统输入时的稳态输出序列$y_1(n)$，$y_2(n)$，$y_3(n)$。取 n=1:100。

(2) 求$x_4(n)=\cos(0.04\pi n)+\cos(0.24\pi n)+\cos(0.32\pi n)$作为系统输入时的输出序列$y_4(n)$。

(3) 对(1)和(2)中得到的四组输入输出序列绘图。计算$y(n)=y_1(n)+y_2(n)+y_3(n)$，比较$y(n)$与$y_4(n)$，可以得出什么结论？

(4) 求系统的频率响应$H(e^{j\omega})$，并画出幅频响应特性和相频响应特性图以及对数幅频特性图（利用 freqz 函数），观察幅频特性图与对数幅频特性图，了解分贝（dB）为单位的衰减量值。

(5) 计算ω分别取$0.04\pi, 0.24\pi$，0.32π时的 $H(e^{j\omega})$值，在幅频响应特性图中做标注。观察各输出序列$y_1(n)$，$y_2(n)$，$y_3(n)$与各输入序列$x_1(n)$，$x_2(n)$，$x_3(n)$的幅度比值，与计算所得$|H(e^{j\omega})|$在对应频率下的取值是否一致，可以得出什么结论？

提示：系统函数分子分母多项式系数可利用 conv 实现多项式乘法运算。

四 实验报告要求

1．实验报告中简述实验目的和实验原理要点。

2．实验内容部分要求给出必要的理论分析依据和计算过程，实验代码，输出图形。

3．总结实验中的主要结论，分析回答给出的问题；总结实验中用到的 MATLAB 函数及功能。

4．报告中除程序代码和程序输出结果和绘图外，其余部分必须手写。（统一 A4 纸左侧装订）