گردآورندگان: حسن ذاکر، محمد مهدوی، کیوان شبانی

تمرین تئوری سری سوم

سوالات تحویلی

مسئله‌ی ۱. تخریب جاده

در کشوری n شهر وجود دارد که این شهرها با m جاده دوطرفه به‌هم وصل شده‌اند. جاده iام دارای ظرفیت ترافیکی c_i است و نگهداری آن برای دولت هزینه هنگفتی در بر دارد. (تضمین می‌شود که بین هر دو شهر حداقل یک مسیر وجود دارد و هزینه نگه‌داری همه جاده‌ها یکسان است.) هزینه‌ی تخریب جاده‌ی iام برابر با d_i است.از آنجایی که دولت با کسری بودجه مواجه است می‌خواهد برخی از جاده‌ها را با کمترین هزینه طوری تخریب کند که هنوز بین همه شهرها مسیر وجود داشته باشد و جاده‌ها بیشترین ظرفیت ترافیکی ممکن را داشته باشند. الگوریتمی از مرتبه زمانی $O(mlog(n))$ برای این کار ارائه دهید.

حل. برای هر جاده مقدار $۱/(Ci \times Di)$ را حساب میکنیم که برابر وزن هر جاده است. سپس جاده‌ها را به ترتیب صعودی وزنشان مرتب می‌کنیم و الگوریتم کروسکال را روی آن اجرا می‌کنیم. درخت پوشای کمینه بدست آمده جاده‌هایی هستند که باید باقی بمانند و بقیه جاده‌ها باید تخریب شوند. ▷

مسئله‌ی ۲. فرار از دالان

مهرسام در دالان‌های زیرزمینی بناناویل گیر افتاده و می‌خواهد از آن‌ها بیرون برود. این دالان‌ها از n اتاق و m راهرو بین آن‌ها تشکیل شده که رفتن از در هر سر راهرو به در دیگر مدت زمانی مشخص طول می‌کشد. از میان این اتاق‌ها تعدادی از اتاق‌ها راهی به بالای زمین دارند و مهرسام می‌تواند با رسیدن به آن‌ها فرار کند. حال پارسا دوست مهرسام که همراه او به دالان‌ها نرفته، از بیرون کنترل بسته و باز کردن درهای راهروها را به دست گرفته و می‌خواهد نگذارد مهرسام خارج شود. او برای این کار می‌تواند در هر زمان که مهرسام درون راهروها نیست یکی از در های اتاق‌ها را ببندد و بقیه درها باز خواهند شد پس وقتی مهرسام در یک اتاق باشد برای خروج از آن از یکی از راهروها نمی‌تواند استفاده کند. یک نقشه فرار برای مهرسام به این صورت است که برای هر یک از اتاق‌ها که راه به بالای زمین ندارند مشخص می‌کند که اگر مهرسام در این اتاق باشد از کدام راهرو برود و اگر این راهرو بسته بود از کدام راهروی دیگر حرکت کند. برای هر نقشه‌ای که با آن مهرسام بدون توجه به انتخاب‌های پارسا برای بستن درها بتواند در زمان متناهی از دالان‌ها خارج شود زمانی وجود دارد که حتما تا آن زمان طبق نقشه مهرسام از دالان‌ها خارج شده باشد. مهرسام می‌خواهد کمترین مقدار ممکن برای این زمان اطمینان از خروج را برای همه نقشه‌های ممکن پیدا کند. الگوریتمی از پیچیدگی زمان $O(m+nlogn)$ ارائه دهید که این کمترین زمان را بیابد یا بگوید که هیچ نقشه فراری که در آن مستقل از انتخاب‌های پارسا مهرسام بتواند فرار کند وجود ندارد.

حل. می‌توان دید که اتاق‌ها و راهروها تشکیل یک گراف می‌دهند. در این گراف در هر لحظه مهرسام در یک راس است و پارسا می‌تواند نگذارد مهرسام از یک یال متصل به آن بگذرد. حال می‌خواهیم برای هر راس کمترین زمانی را پیدا کنیم که با گذر این مقدار با یک نقشه فرار مهرسام بتواند از دالان‌ها خارج شود (به یکی از رئوس خروجی برسد). فرض کنیم برای راس v این مقدار برابر $d[v]$ باشد. اگر $N(v)$ مجموعه همسایه‌های v را نشان دهد اگر مقادیر $[d[u]+t(u,v)|u \in N(v)]$ را، که $t(u,v)$ مدت زمانی است که رفتن از u به v طول می‌کشد، از کوچک به بزرگ مرتب کنیم $d[v]$ دومین مقدار در این مقادیر است زیرا با در نظر گرفتن دو راس با مقدار کوچک‌تر به عنوان راهروهایی که مهرسام از آن‌ها حرکت می‌کند برای این اتاق در نقشه فرار می‌توان در این زمان از فرار مطمئن شد و با بستن راهرو به اتاق با کمترین مقدار پارسا می‌تواند مطمئن باشد مهرسام در زمان کمتری فرار نکند. برای محاسبه این مقادیر مثل الگوریتم dijkstra یک مجموعه S در نظر می‌گیریم که برای اعضای آن مقدار d را می‌دانیم و در ابتدا شامل راس‌های خروجی است. همچنین برای هر راس v دو مقدار $d_۱$ و $d_۲$ در نظر می‌گیریم که دو مقدار کمینه $[d[u]+t(u,v)|u \in N(v), u \in S]$ را نشان می‌دهند و مقدار بیشتر بین این دو $(d_۲)$ یک حد بالا و مقدار موقت برای $d[v]$ است. با اضافه کردن هر راس به S این دو مقدار را برای همسایه‌های آن تغییر می‌دهیم (بین مقدار حاصل از این راس و دو مقدار فعلی دو مقدار کوچک‌تر را ذخیره می‌کنیم). حال اگر این مقادیر موقتی $d[v]$ را در یک هرم نگاه داریم هر بار می‌توانیم راس با مقدار مینیمم را به S اضافه کنیم و $d[v]$ آن همان مقدار موقت می‌شود زیرا اگر برای هر راس، راس با دومین مقدار کمتر را در $[d[u]+t(u,v)|u \in N(v)]$ در نظر بگیریم و با شروع از یک راس خارج از S هر بار به آن راس با دومین مقدار برویم بعد از چند مرحله به رئوس S می‌رسیم (چون رئوس

خروج در S اند) و راس قبل از اولین راس S طبق تعریف مقادیر موقتی d و با توجه به این که d آن از روی یکی از رئوس S محاسبه می‌شود مقدار d بیشتر یا مساوی d موقتی مینیمم بین رئوس خارج از S دارد پس d هر راس خارج از S حداقل برابر این مقدار مینیمم است و برای راسی که مقدار موقتی d آن این مقدار مینیمم است همین مقدار مقدار اصلی d آن است (چون مقدار موقتی d یک حد بالا فقط با استفاده از رئوس S است و طبق این حد پایین نیز هست). پس به این صورت می‌توانیم با یک هرم هر مرحله یک راس به S اضافه کنیم و مقادیر رئوس دیگر را تغییر دهیم تا d برای همه رئوس محاسبه شود و جواب برای اتاق شروع نیز به دست می‌آید. در این الگوریتم اگر از هرم فیبوناچی استفاده کنیم برای هر همسایه هر راس در $O(1)$ مقادیر d_1 و d_2 آن‌ها را تغییر می‌دهیم و در صورت تغییر مقدار بزرگ‌تر با عملیات priority decrease هرم فیبوناچی مقدار آن را کم می‌کنیم و به این صورت در کل در $O(nlogn + m)$ مقادیر d و جواب محاسبه می‌شوند. $\triangleright$

مسئله‌ی ۳. هیپ فیبوناچی

منتقل شده به تمرین ۴

سوالات اضافی

مسئله‌ی ۴. درخت پوشای همگن

یک "درخت پوشای همگن" از گراف وزندار G درخت پوشایی است که وزن سنگین‌ترین یال آن در بین تمام درخت‌های پوشای G کم‌ترین باشد. نشان دهید هر درخت پوشای کمینه یک درخت پوشای همگن است.

حل. برهان خلف می‌زنیم: فرض می‌کنیم که گراف G دارای درخت پوشای کمینه t است که یال e در آن بیشترین وزن را دارد و یک درخت پوشای همگن t' که یال e' در آن سنگین‌ترین یال است. فرض خلف: وزن یال e بزرگتر از یال e' است. حال یال e را به درخت t' اضافه می‌کنیم و در این گراف ایجاد شده دور ایجاد می‌شود چون یال e در این دور ایجاد شده هست و بیشترین وزن را دارد باید طبق خاصیت دور [۱] حذف بشود تا درخت پوشای کمینه این گراف بشود. چون یال e حذف شده است پس فرض اینکه درخت t درخت پوشای کمینه بوده است نقض شده‌است. $\triangleright$

[۱] cycle property

مسئله‌ی ۵. جاده‌های رویایی

احمد در خواب کشور رویاهایش را دیده و حالا از خواب بیدار شده است. کشور رویاهای او از n شهر تشکیل شده که با جاده‌هایی به طول‌های متفاوت هم وصل اند (چون این یک رویاست طول جاده‌ها می‌تواند منفی هم باشد). او حالا که بیدار شده شکل جاده‌های کشور و طولشان را از یاد برده است و تنها برای هر دو شهر i و j یادش است که فاصله‌شان بین دو مقدار m_ij و M_ij بوده است.

الگوریتمی ارائه دهید که در $O(n^۳)$ بگوید کشور با مشخصاتی که او از کشور رویاییش به یاد دارد می‌تواند وجود داشته باشد یا نه.

حل. گرافی در نظر می‌گیریم که در آن بین هر دو راس i وj یالی با وزن M_{ij} باشد. می‌توان دید که اگر فاصله دو راس i و j در این گراف کمتر از m_{ij} باشد گرافی نداریم که در شرایط صدق کند زیرا فاصله دو راس در هر گراف جواب باید حداکثر به اندازه M_{ij} باشد پس در هر گرافی که این شرط را داشته باشد فاصله i و j کمتر از m_{ij} می‌شود. در غیر این صورت نیز خود این گراف جواب مسئله می‌شود چون فاصله هر دو راس بین M_{ij} و m_{ij} خواهد بود. برای پیدا کردن فاصله دو به دو رئوس در این گراف از الگوریتم floyd-warshall استفاده می‌کنیم و فواصل را در$O(n^۳)$ به دست می‌آوریم. ▷

مسئله‌ی ۶. تحلیل سرشکن

منتقل شده به تمرین ۴

موفق باشید :)