



سوالات تحویلی

مسئله ۱. تخریب جاده

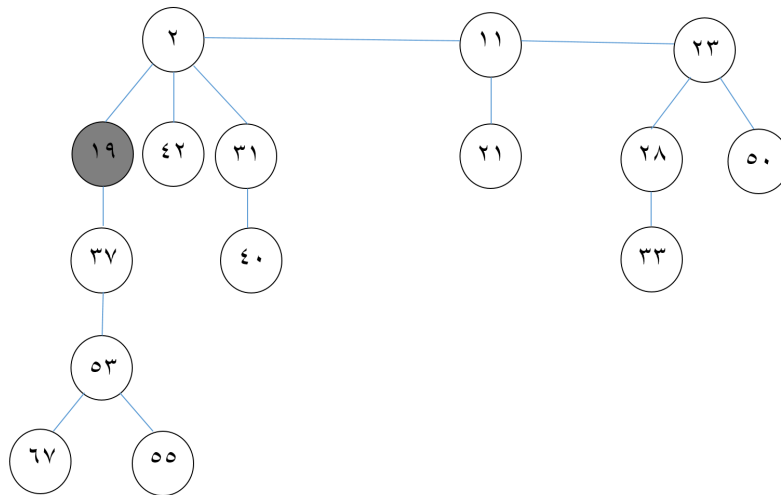
در کشوری n شهر وجود دارد که این شهرها با m جاده دوطرفه به هم وصل شده‌اند. جاده i ام دارای ظرفیت ترافیکی c_i است و نگهداری آن برای دولت هزینه هنگفتی در بر دارد. (تضمین می‌شود که بین هر دو شهر حداقل یک مسیر وجود دارد و هزینه نگهداری همه جاده‌ها یکسان است.) هزینه تخریب جاده i ام برابر با d_i است. از آنجایی که دولت با کسری بودجه مواجه است می‌خواهد برخی از جاده‌ها را با کمترین هزینه طوری تخریب کند که هنوز بین همه شهرها مسیر وجود داشته باشد و جاده‌ها بیشترین ظرفیت ترافیکی ممکن را داشته باشند. الگوریتمی از مرتبه زمانی $O(m \log(n))$ برای این کار ارائه دهید.

مسئله ۲. فرار از دالان

مهرسام در دالان‌های زیرزمینی بناناویل گیر افتاده و می‌خواهد از آن‌ها بیرون برود. این دالان‌ها از n اتاق و m راهرو بین آن‌ها تشکیل شده که رفتن از در هر سر راهرو به در دیگر مدت زمانی مشخص طول می‌کشد. از میان این اتاق‌ها تعدادی از اتاق‌ها راهی به بالای زمین دارند و مهرسام می‌تواند با رسیدن به آن‌ها فرار کند. حال پارسا دوست مهرسام که همراه او به دالان‌ها نرفته، از بیرون کنترل بسته و باز کردن درهای راهروها را به دست گرفته و می‌خواهد نگذارد مهرسام خارج شود. او برای این کار می‌تواند در هر زمان که مهرسام درون راهروها نیست یکی از درهای اتاق‌ها را ببندد و بقیه درها باز خواهند شد پس وقتی مهرسام در یک اتاق باشد برای خروج از آن از یکی از راهروها نمی‌تواند استفاده کند. یک نقشه فرار برای مهرسام به این صورت است که برای هر یک از اتاق‌ها که راه به بالای زمین ندارند مشخص می‌کند که اگر مهرسام در این اتاق باشد از کدام راهرو برود و اگر این راهرو بسته بود از کدام راهروی دیگر حرکت کند. برای هر نقشه‌ای که با آن مهرسام بدون توجه به انتخاب‌های پارسا برای بستن درها بتواند در زمان متناهی از دالان‌ها خارج شود زمانی وجود دارد که حتماً تا آن زمان طبق نقشه مهرسام از دالان‌ها خارج شده باشد. مهرسام می‌خواهد کمترین مقدار ممکن برای این زمان اطمینان از خروج را برای همه نقشه‌های ممکن پیدا کند. الگوریتمی از پیچیدگی زمان $O(m + n \log n)$ ارائه دهید که این کمترین زمان را بیابد یا بگوید که هیچ نقشه فراری که در آن مستقل از انتخاب‌های پارسا مهرسام بتواند فرار کند وجود ندارد.

مسئله ۳. هیپ فیبوناچی

Fibonacci heap زیر را در نظر بگیرید:



- الف) عملیات کاهش کلید را بر روی گره با عدد ۵۵ اعمال کنید و آنرا به ۲۲ کاهش دهید.
- ب) بر روی گراف به دست آمده از حالت قبل عملیات کاهش کلید را بر روی گره با عدد ۶۷ اعمال کنید و آنرا به ۸ کاهش دهید.
- پ) بر روی گراف به دست آمده از حالت قبل عملیات استخراج کمینه را اجرا کنید.

سوالات اضافی

مسئله ۴. درخت پوشای همگن

یک "درخت پوشای همگن" از گراف وزندار G درخت پوشایی است که وزن سنگین‌ترین یال آن در بین تمام درخت‌های پوشای G کم‌ترین باشد. نشان دهید هر درخت پوشای کمینه یک درخت پوشای همگن است.

مسئله ۵. جاده‌های رویایی

احمد در خواب کشور رویاهایش را دیده و حالا از خواب بیدار شده است. کشور رویاهای او از n شهر تشکیل شده که با جاده‌هایی به طول‌های متفاوت هم وصل اند (چون این یک رویاست طول جاده‌ها می‌تواند منفی هم باشد). او حالا که بیدار شده شکل جاده‌های کشور و طولشان را از یاد برده است و تنها برای هر دو شهر i و j یادش است که فاصله‌شان بین دو مقدار m_{ij} و M_{ij} بوده است.

الگوریتمی ارائه دهید که در $O(n^3)$ بگوید کشور با مشخصاتی که او از کشور رویایش به یاد دارد می‌تواند وجود داشته باشد یا نه.

مسئله ۶. تحلیل سرشکن

الگوریتمی با هزینه سرشکن $O(\log(n))$ برای عملیات تغییر کلید (کاهش، افزایش) در Fibonacci heap ارائه و تحلیل زمانی سرشکن را برای حالات مختلف شرح دهید (الگوریتم شما نباید تحلیل سرشکن سایر عملیاتهای Fibonacci heap را تغییر دهد).

موفق باشید (:)