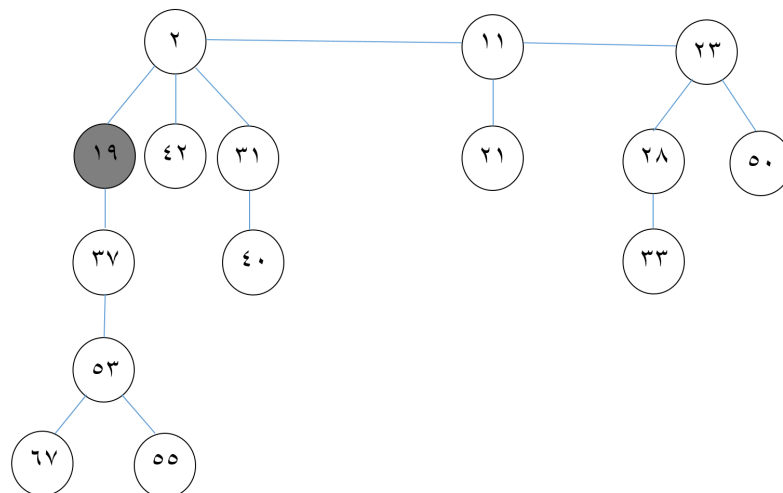




سوالات تحویلی

مسئله ۱. هیپ فیبوناچی

Fibonacci heap زیر را در نظر بگیرید:



- الف) عملیات کاهش کلید را بر روی گره با عدد ۵۵ اعمال کنید و آنرا به ۲۲ کاهش دهید.
- ب) بر روی گراف به دست آمده از حالت قبل عملیات کاهش کلید را بر روی گره با عدد ۶۷ اعمال کنید و آنرا به ۸ کاهش دهید.
- پ) بر روی گراف به دست آمده از حالت قبل عملیات استخراج کمینه را اجرا کنید.

مسئله ۲. کمینه یابی

آرایه ای a شامل n عدد صحیح داده شده است. i و j را نیز به عنوان اندیس دو عنصر متفاوت آرایه در نظر بگیرید. تابع $f(i, j)$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$f(i, j) = g(i, j)^2 + (i - j)^2$$

که در آن تابع $g(i, j)$ از شبه کد زیر به دست می آید:

```

int g(int i, int j) {
    int sum = 0;
    min = (i < j) ? i : j;
    max = (i > j) ? i : j;
    for (k = min + 1; k <= max; k++)
        sum += a[k];
    return sum;
}

```

الگوریتمی از مرتبه زمانی $O(n \log n)$ ارائه دهید تا کمینه‌ی مقدار $f(i, j)$ را به دست آورد.

مسئله‌ی ۳. تناوب

رشته‌ای به طول n داده شده است. تمام اعداد طبیعی را بیابید که این رشته با دوره تناوب k متناوب باشد.

الف) الگوریتمی از مرتبه‌ی $O(n \log n)$ برای این کار ارائه دهید.

ب) الگوریتمی از مرتبه‌ی $O(n)$ برای این کار ارائه دهید.

مسئله‌ی ۴. شاه سرمربی

کاظم پس از سال‌ها ممارست در ورزش والیبال، وظیفه دارد به عنوان سرمربی تیم ملی، تیم را برای حضوری قدرتمند در المپیک توکیو آماده کند. برای این کار او می‌خواهد از بین n والیبالیست، تعدادی را به اردوی تیم ملی دعوت کند. هر یک از این نفرات، میزانی پتانسیل فردی دارند که عددی صحیح و مثبت است. همچنین بعضی از این نفرات قبلاً با هم بازی کرده‌اند و در نتیجه ممکن است بین هر ۲ نفر مقداری هماهنگی موسوم به پتانسیل تیمی وجود داشته باشد که آن هم عددی صحیح و مثبت است. کاظم به کار تیمی بیشتر اعتقاد دارد و معتقد است که اگر تیم خیلی پرستاره باشد و هماهنگی تیمی اعضای آن بالا نباشد، ممکن است تیم دچار حاشیه شود. در نتیجه تمایل دارد زیرمجموعه‌ای از این n نفر را انتخاب کند که اختلاف علامت‌دار مجموع پتانسیل‌های تیمی و مجموع پتانسیل‌های فردی این زیرمجموعه، در بین کل زیرمجموعه‌های ممکن بیشینه باشد. به عبارت دیگر $\sum P_{teamwork} - \sum P_{individual}$ بیشینه شود. اگر تعداد هماهنگی‌های موجود بین n نفر برابر m باشد، الگوریتمی از مرتبه $O((n + 3m)^2(n + m + 2))$ ارائه دهید تا به کاظم در انتخاب این زیرمجموعه کمک کنید. سپس درستی الگوریتم خود را اثبات کنید. (فرض کنید داده‌های مسئله به گونه‌ای نیستند که جواب مجموعه‌ی تهی باشد)

سوالات اضافی

مسئله ۵. جایگشت دوری

الگوریتمی خطی ارائه دهید که به وسیلهی آن بتوان تشخیص داد که دو رشتهی داده شده یک جایگشت دوری از یکدیگر هستند یا نه. (برای مثال وزیر و روزی جایگشت دوری یکدیگرند)

مسئله ۶. تحلیل سرشکن

الگوریتمی با هزینه سرشکن $O(\log(n))$ برای عملیات تغییر کلید (کاهش، افزایش) در هیپ فیبوناچی ارائه و تحلیل زمانی سرشکن را برای حالات مختلف شرح دهید (الگوریتم شما نباید تحلیل سرشکن سایر عملیتهای هیپ فیبوناچی را تغییر دهد).

(موفق باشید :)