



## سوالات تحویلی

### مسئله ۱. برنامه ریزی خطی

الف) برای مساله LP زیر فرم دوگان را پیدا کرده و سپس دوگان را با استفاده از الگوریتم simplex حل کنید.

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & 78x_1 + 36x_2 \\ \text{subject to} \quad & 3x_1 + 4x_2 \geq 5 \\ & 5x_1 + x_2 \geq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

ب) در گراف جهت دار  $G = (V, E)$  می خواهیم مقدار شار  $D$  را از راس  $s \in V$  به راس  $t \in V$  بفرستیم. در این گراف علاوه بر این که هر یال  $(u, v) \in E$  دارای ظرفیت  $C(u, v) > 0$  و هزینه  $f(u, v) > 0$  است، هر راس  $u \in V$  نیز دارای ظرفیت  $C(u) > 0$  و هزینه  $f(u) > 0$  است. مسئله یافتن کمترین هزینه عبور شار  $D$  از راس  $s$  به راس  $t$  را با برنامه ریزی خطی مدل کنید و دوگان آن را به دست آورید.

### مسئله ۲. تقسیم عادلانه

مجموعه ای از اعداد به نام  $S$  داریم. می خواهیم زیرمجموعه ای  $A$  را از  $S$  انتخاب کنیم به گونه ای که

$$\sum_{x \in A} x = \sum_{x \in \bar{A}} x$$

که  $\bar{A} = S - A$ . نشان دهید یافتن چنین زیرمجموعه ای NP complete است.

راهنمایی: Subset Sum را کاهش دهید.

### مسئله ۳. Asteroid Mining

در قرن های آتی و با اتمام منابع معدنی موجود در زمین، به خصوص عناصر زمینی نادر<sup>۱</sup>، انسان ها

<sup>۱</sup> Elements Rare-Earth

ناگزیر به استخراج این منابع از سیارک‌ها و سایر اجرام نزدیک به زمین هستند.<sup>۲</sup> میزان منابع فلزی موجود در یک سیارک نوع S حداکثر ۱۰۰۰ تُن برآورد می‌شود.



در یک پروژه‌ی Asteroid Mining که توسط دانشمندان ایرانی طراحی شده است، سفینه‌هایی با گنجایش ۱۰۰۰ تُن، به کمر بند سیارک‌ها اعزام می‌شوند. هر سفینه می‌تواند به سیارک‌های مختلف سفر کند و به شرطی که ظرفیت کافی داشته باشد، تمام منابع موجود در سیارک را استخراج کند. تعداد سیارک‌های هدف  $n$  است و دانشمندان به دنبال این هستند که کمترین تعداد سفینه را اعزام کنند.

(الف) مسئله‌ی مورد نظر دانشمندان را به صورت یک مسئله‌ی تصمیم‌گیری<sup>۳</sup> بیان کنید.

(ب) ثابت کنید این مسئله NP-Complete است.

(پ) حال، مسئله‌ی بهینه‌سازی را در نظر بگیرید. یک الگوریتم تقریبی حریصانه برای آن ارائه کنید و ضریب تقریب  $(\alpha)$  را به دست آورید.

راهنمایی: مسئله‌ی Bin Packing را جست‌وجو کنید.

## سوالات اضافی

### مسئله‌ی ۴. خوشه ماکسیمال

در یک گراف  $G(V, E)$ ، به مجموعه‌ی  $C \subseteq V$  که تمامی رئوس عضو آن دوه‌دو مجاورند، زیرگراف کامل گفته می‌شود.

در مسئله‌ی Maximal Clique وزن دار، گراف  $G$  داده شده است و می‌خواهیم یک زیرگراف کامل از آن را بیابیم که مجموع وزن اعضای آن، بیشین باشد.

<sup>۲</sup>البته اولین برنامه‌های استخراج از سیارک‌ها برای سال ۲۰۲۳ پیش‌بینی شده است. برای اطلاعات بیشتر، [wikipedia.org/wiki/Asteroid\\_mining](https://wikipedia.org/wiki/Asteroid_mining) را بخوانید.  
<sup>۳</sup>Decision Problem

الف) با استفاده از برنامه‌سازی خطی، یک الگوریتم تقریبی برای حل مسئله‌ی فوق بیابید.  
راهنمایی: مسئله‌ی Maximal Clique قابل تبدیل به مسئله‌ی پوشش رأسی است.  
ب) برای الگوریتم خود، ضریب تقریب  $(\alpha)$  را به دست آورید. هر فرضی که استفاده می‌کنید را اثبات کنید.

موفق باشید :)