برای محاسبه تبدیل فوریه یک تصویر کافی است از فرمول زیر بهره ببریم:

$$F(u,v) = \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)e^{-j2\pi(ux/M+vy/N)}$$

همچنین می‌دانیم عکس ما ۲ در ۲ هســـت برای همین مقدار M و N ما برابر با 2 خواهند بود و در ادامه چون ضریب تبدیل فوریه ما ممکن است حقیقی نباشد در انتها ما اندازه و فاز آن را مشخص می‌کنیم.

$$Magnitude = |F(u,v)| = \sqrt{Re^2(u,v) + Im^2(u,v)}$$

$$Phase = \varphi(u,v) = atan2\big(Im(u,v), Re(u,v)\big)$$

در اینجا ضــرایب فوریه را طبق مدل opencv، فرض می‌کنیم نقطه 0,0 مربوط به بالا چپ اســت. همچنین بازه u,v مابین 0 تا 1 خواهد بود.

$$F(u,v) = \sum_{x=0}^{1} * \sum_{y=0}^{1} f(x,y) * e^{-i2\pi\left(\frac{u*x}{2}+\frac{v*y}{2}\right)}$$
$$= f(x,y) * e^{-i2\pi\left(\frac{u*x}{2}+\frac{v*y}{2}\right)} + f(x,y) * e^{-i2\pi\left(\frac{u*x}{2}+\frac{v*y}{2}\right)} + f(x,y) * e^{-i2\pi\left(\frac{u*x}{2}+\frac{v*y}{2}\right)} + f(x,y) * e^{-i2\pi\left(\frac{u*x}{2}+\frac{v*y}{2}\right)}$$

$$F(u,v) = f(0,0) * 1 + f(0,1) * e^{-i\pi(v)} + f(1,0) * e^{-i\pi(u)} + f(1,1) * e^{-i\pi(v+u)}$$
$$= 2 * 1 + 1 * e^{-i\pi(v)} + 3 * e^{-i\pi(u)} + 4 * e^{-i\pi(v+u)}$$

$$F(u,v) = 2 + e^{-i\pi(v)} + 3e^{-i\pi(u)} + 4e^{-i\pi(v+u)}$$

$$F(0,0) = 2 + e^{-i\pi(0)} + 3e^{-i\pi(0)} + 4e^{-i\pi(0)} = 10$$

$$F(0,1) = 2 + e^{-i\pi(1)} + 3e^{-i\pi(0)} + 4e^{-i\pi(1)} = 5 + 5e^{-i\pi} = 5 - 5 = 0$$

$$F(1,0) = 2 + e^{-i\pi(0)} + 3e^{-i\pi(1)} + 4e^{-i\pi(1)} = 3 + 7e^{-i\pi} = 3 - 7 = -4$$

$$F(1,1) = 2 + e^{-i\pi(1)} + 3e^{-i\pi(1)} + 4e^{-i\pi(2)} = 6 + 4e^{-i\pi} = 6 - 4 = 2$$

$$F(0,0) = 10 , F(0,1) = 0, F(1,0) = -4, F(1,1) = 2$$

2.الف) ماتریس درست شده بعد از اعمال تبدیل فوریه روی آن یک ماتریس متقارن است.

برای بررسی این موضوع کافی به فرمول تبدیل فوریه توجه داشته باشیم.

$$F(u,v) = \sum_{x=0}^{1} * \sum_{y=0}^{1} f(x,y) * e^{-i2\pi\left(\frac{u*x}{2}+\frac{v*y}{2}\right)}$$

اگر فرض کنیم نقطه ما در حالتی که (x,y) = (A,B) باشد و (u,v) = (C,D) باشد، به‌راحتی می‌توانیم ببینیم که ضریب سری فوریه ما برای این نقطه (u,v) = (C,D) دقیقاً همان مقدار برای نقطه (u,v) = (D,C) است :

$$F(u,v) = \sum_{x=0}^{1} * \sum_{y=0}^{1} f(x,y) * e^{-i2\pi\left(\frac{u*x}{2}+\frac{v*y}{2}\right)} = \sum_{x=0}^{1} * \sum_{y=0}^{1} f(x,y) * e^{-i2\pi\left(\frac{y*x}{2}+\frac{v*u}{2}\right)} = F(v,u)$$

پس طبق بالا، مؤلف‌های آزاد ما، اعضای قطری ماتریس ما، به‌علاوه بخش بالا یا بخش پایین ماتریس قطری ما خواهند بود. در این صورت تعداد مؤلفه‌های آزاد ما برابر با $n * \left(\frac{n-1}{2}\right)$ خواهد بود.

ب)در ابتدا نقطه (0,0) در تبدیل فوریه را طبق فرمول نشان می‌دهیم:

$$F(0,0) = \sum_{x=0}^{1} * \sum_{y=0}^{1} f(x,y) * e^{-i2\pi\left(\frac{0*x}{2}+\frac{0*y}{2}\right)} = \sum_{x=0}^{1} * \sum_{y=0}^{1} f(x,y)$$

پس طبق بالا، این ضریب سری فوریه این نقطه، برابر با همه اندازه پیکسل‌های ما خواهد بود و همچنین تبدیل فوریه این نقطه فقط دارای نقاط حقیقی است.

در اکثر پیاده‌سازی‌ها، تصویر فوریه به‌گونه‌ای جابه‌جا می‌شود که مقدار میانگین تصویر $F(0,0)$ در مرکز تصویر نمایش داده می شود. هر چه نقطه تصویر از مرکز دورتر باشد، فرکانس متناظر آن بیشتر است. اصل تصویر در این نقطه قرار دارد و مختویات اصلی تصویر در ان غالب است.

3.پ) به‌طورکلی، فیلتر میانه اجازه می‌دهد تا مقدار زیادی از جزئیات high spatial frequency عبور کند، درحالی‌که در حذف نویز در تصاویری که کمتر از نیمی از پیکسل‌ها در یک محله هموار شده‌اند، بسیار مؤثر باقی می‌ماند. (در نتیجه، فیلتر میانی می‌تواند در حذف نویز از تصاویر خراب شده با نویز گاوسی کمتر مؤثر باشد.)

فیلترهای متوسط و میانه داده‌های اضافی را به روش‌های کاملاً متفاوتی حذف می‌کنند. یک فیلتر میانگین گیر، پیکسل‌ها را طوری عوض می‌کند که اگر نقاط کافی انتخاب شود، نویز با جمع‌کردن به مقدار میانگین صفر خودش (تقریباً) کاهش می‌یابد. از طرف دیگر، یک فیلتر میانه با نادیده‌گرفتن نویز آن را از بین می‌برد و این فیلتر عملکرد خیلی خوبی در نویزهای نمک و فلفل دارد؛ چون نویزهای ما دارای فرکانس‌ها کاملاً متفاوتی نسبت به تصویر اصلی هستند؛ ولی در تصاویری با نویزهای ضرب شونده، استفاده از این فیلتر اصلاً مناسب نیست.

ت) فیلترکردن داده‌های تصـویر یک فرایند اسـتاندارد اسـت که تقریباً در هر سـیسـتم پردازش تصـویر اسـتفاده می‌شود. برای این منظور از فیلترها استفاده می‌شود. آنها با حفظ جزئیات همان نویز را از تصاویر حذف می‌کنند. انتخاب فیلتر به رفتار فیلتر و نوع داده بســتگی دارد. ما از این فیلترهای مشــتق‌گیر برای یافتن لبه‌ها اســتفاده می‌کنیم پس منطقاً برای ما مهم است که نتیجه مشتق ما دارای کمترین نویز ممکن باشد.

برای حذف این نویز در مرحله اول باید سعی کنیم عکس اولیه را در بهترین حالت ممکن تبدیل کنیم و سپس از این مشــتق بگیریم؛ بنابراین برخی از پیش‌پردازش‌ها مانند تار کردن، اســتفاده از آســتانه، یا یکســان‌ســازی هیستوگرام را امتحان کنید و در ادامه بهتر از morphological operator ها استفاده کنیم.

۴. الف) نحوه اسـتفاده از fft برای رفع نویز به این صـورت اسـت که از کل تصـویر تبدیل فوریه می‌گیریم و سـپس یک آرایه ۲ بعدی از ضرایب سری فوریه داریم. نقطه (0,0) در تبدیل فوریه ما دارای بیشترین محتویات تصویر ما است و هر چه از این نقطه دور می‌شویم به فرکانس‌های بالاتری می‌رسیم که در این نقاط، پارت خیلی بزرگی از محتویات ما مربوط به نویز ما اســـت پس طبق این راهبرد، یک بازه N*N را از اطراف نقطه (0,0) بر می‌داریم و باقی ضرایب فوریه را ۰ می‌کنیم.

با این کار با اینکه بخش از محتویات عکس حذف می‌شود؛ ولی عمده نویزهای ما نیز با این کار حذف خواهد شد. حال از باقی ضرایب باقی‌مانده تبدیل فوریه معکوس می‌گیرم تا به‌عکس رفع نویز شده خود برسیم.

این راهبرد برای رفع نویزهای جمع‌شـــونده به کار گرفته می‌شـــود. ازآنجا که نویز این تصـــویر متناوب اســـت، راهبردهای بهتری هم برای رفع نویز این وجود دارد (اسلاید شماره ۷ - صفحه ۱۳)

ب) نسبت سیگنال به نویز پیک (PSNR) نسبت بین حداکثر قدرت ممکن یک تصویر و قدرت نویز مخرب است که بر کیفیت نمایش آن تأثیر می‌گذارد. برای تخمین PSNR یک تصـویر، باید آن تصـویر را با یک تصـویر تمیز ایدئال با حداکثر توان ممکن مقایسه کرد.

$$PSNR = 10log_{10}(\frac{(L-1)^2}{MSE}) = 20log_{10}(\frac{L-1}{RMSE})$$

$$MSE = \frac{1}{mn}\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1}(O(i,j)-D(i,j))^2$$

L : تعداد حداکثر سطوح شدت ممکن

MSE : خطای میانگین مربعات

طبق بالا، هر چه PNSR بزرگ‌تر باشد، یعنی نویز تصویر ما کمتر خواهد بود. با اعمال الگوریتم گفته شد، تصویر نویزدار با PSNR برابر با ۸/۱۲ به تصویر با نویز کمتر با PSNR ای برابر با ۲۵/۴۱ رسیده است.

پ)همان‌طور که در بالا بیان کنیم، نیز این تصویر متناوب است و به همین دلیل جمع‌شونده است.

نویز جمع‌شونده:

- Noisy_image[t] = original_image[t] + noise[t]
- نویز افزایشی، سیگنال ناگهانی ناخواسته‌ای است که به برخی از سیگنال‌های واقعی اضافه می‌شود.
- حذف نویز افزودنی از تصویر کار چندان دشواری نیست؛ زیرا مدل‌های بازیابی تصویر زیادی برای حذف نویز افزودنی موجود است.
- نویز گاوسی بهترین مثال از نویز افزایشی است. این نویز در بسیاری از کاربردها مانند تصویربرداری نوری و تعداد کمی از تصاویر پزشکی مانند سی‌تی‌اسکن و غیره وجود دارد.
- ۶. تأثیر این نویز بر روی تصویر کمتر از نویز ضربی است؛ زیرا در اینجا سیگنال نویز به سیگنال اصلی اضافه می‌شود درحالی‌که در ضرب، نویز چندبرابر می‌شود.
- ۷. دارای الگوی توزیع نرمال است.

نویز ضرب شونده:

- Noisy_image[t] = original_image[t] * noise[t]
- حذف نویز ضربی از تصویر کار بسیار دشواری است؛ زیرا مدل‌های بازیابی تصویر بسیار کمی برای حذف این نوع نویز موجود است؛ بنابراین کار بر روی این نویز برای محققان جدید بسیار چالش‌برانگیزتر و خوب است؛ زیرا آنها دامنه بسیار بیشتری برای کار دارند.
- راه دیگری برای مدیریت این نویز با استفاده از مدل‌های بازیابی تصویر از نویز افزودنی وجود دارد. این روش با تبدیل ماهیت ضربی به افزودنی با استفاده از تبدیل لگاریتمی به دست می‌آید. با استفاده از تبدیل **log**، نویز ضربی به نویز افزایشی تبدیل می‌شود و اکنون می‌توان هر روش فیلتری را برای آن اعمال کرد و بعداً از لاگ معکوس برای به‌دست‌آوردن نتیجه صحیح استفاده می‌شود.
- این نویز تأثیر نامطلوبی بر روی تصویر دارد؛ زیرا سیگنال نویز به سیگنال اصلی چندبرابر می‌شود.
- نویز لکه‌ای بهترین مثال برای نویز ضربی است.
- این نوع نویز عمدتاً در تصاویر رادار و تصاویر اولتراسوند یافت می‌شود.

منابع:

What's The Difference? (traders.com)

Spatial Filters - Median Filter

Noise filtering in Digital Image Processing | by Anisha Swain | Image Vision | Medium