

- در این سوال مقصود از x_2, y_2, y_1, x_1 همان $x_1^n, x_2^n, y_1^n, y_2^n$ است.

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 * \cos \theta - y_1 * \sin \theta \\ x_1 * \sin \theta + y_1 * \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$MSE : cost = \sum (x_2 - (x_1 * \cos \theta - y_1 * \sin \theta))^2 + (y_2 - (x_1 * \sin \theta + y_1 * \cos \theta))^2$$

حال برای بهینه سازی عبارت بالا، نسبت به θ مشتق میگیریم و مقدار مشتق را برابر با 0 لحاظ میکنیم.

$$\frac{d \text{ cost}}{d \theta} = \sum \frac{(x_2 - (x_1 * \cos \theta - y_1 * \sin \theta))^2}{d \theta} + \sum \frac{(y_2 - (x_1 * \sin \theta + y_1 * \cos \theta))^2}{d \theta}$$

$$\begin{aligned} \sum \frac{(x_2 - (x_1 * \cos \theta - y_1 * \sin \theta))^2}{d \theta} \\ = \sum 2 * (x_2 - (x_1 * \cos \theta - y_1 * \sin \theta)) * (0 + x_1 \sin \theta + y_1 \cos \theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum \frac{(y_2 - (x_1 * \sin \theta + y_1 * \cos \theta))^2}{d \theta} \\ = \sum 2 * (y_2 - (x_1 * \sin \theta + y_1 * \cos \theta)) * (0 - x_1 \cos \theta + y_1 \sin \theta) \end{aligned}$$

$$\frac{d \text{ cost}}{d \theta} = 2 * \sum (x_2 - x_1 \cos \theta + y_1 \sin \theta)(x_1 \sin \theta + y_1 \cos \theta) + (y_2 - x_1 \sin \theta - y_1 \cos \theta)(y_1 \sin \theta - x_1 \cos \theta)$$

$$\frac{d \text{ cost}}{d \theta} = 2 * \sum (y_1 y_2 + x_2 x_1) \sin(\theta) + (x_2 y_1 - x_1 y_2) \cos(\theta) = 0$$

$$\sum (y_1 y_2 + x_2 x_1) \sin(\theta) = \sum (-x_2 y_1 + x_1 y_2) \cos(\theta)$$

اگر $\cos(\theta)$ برابر با 0 نباشد :

$$\sum \frac{(y_1 y_2 + x_2 x_1) \sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \sum (-x_2 y_1 + x_1 y_2)$$

$$\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{\sum (-x_2 y_1 + x_1 y_2)}{\sum (y_1 y_2 + x_2 x_1)} \xrightarrow{\text{yields}} \tan \theta = \frac{\sum (-x_2 y_1 + x_1 y_2)}{\sum (y_1 y_2 + x_2 x_1)}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{\sum(-x_2 y_1 + x_1 y_2)}{\sum(y_1 y_2 + x_2 x_1)}$$

اگر $\cos(\theta)$ برابر با 0 باشد :

$$\frac{d \text{ cost}}{d\theta} = (y_1 y_2 + x_2 x_1) \sin(\theta) = (y_1 y_2 + x_2 x_1) \text{ or } (-1 * (y_1 y_2 + x_2 x_1))$$

که در این صورت مقدار بهینه ما دیگر ربطی به θ ندارد و فقط به مقدار پیکسل های تصویر ما مربوط میشود.