Анализ генетического алгоритма (1 + (лямбда, лямбда)) на задаче минимального остовного дерева

Антипов Д.С., Шныткин М.П., matveyshnytkin@gmail.com

2021-04-01

1 Черновик

Рассмотрим фазу остовного дерева.

1.1 Оценки сверху

Зафиксируем l.

1.1.1 Вероятность 2-флип-мутанта

Найдём вероятность того, что на фазе мутации произошла конкретная смена одного ребра на другое, при этом остальные $l-2$ флипов только добавили рёбер к дереву:

$$P_{2-flip,1} = \frac{\binom{m-n}{l-2}}{\binom{m}{l}} = \frac{(m-n)!l!(m-l)!}{(l-2)!(m-n-l+2)!m!} = \frac{(m-n)!l(l-1)(m-l)!}{(m-n-l+2)!m!} \geq$$

$$\frac{(m-n-l+3)^{l-2}l(l-1)}{m^l} = \frac{l(l-1)}{m^2}(\frac{m-n-l+3}{m})^{l-2} =$$

$$\frac{l(l-1)}{m^2}(1-\frac{n+l-3}{m})^{l-2}$$

Т.к. $\forall m \geq 2 : (1-1/m)^m \geq 1/4$, то при $m \geq 2(n+l-3)$ и $m \geq (l-2)(n+l-3)$ выполняется:

$$P_{2-flip,1} \geq \frac{l(l-1)}{m^2}(1-\frac{n+l-3}{m})^{l-2} \geq \frac{l(l-1)}{m^2}\frac{1}{4}$$

1.1.2 Вероятность плохого мутанта

Теперь найдём вероятность мутанта, который будет хуже 2-флип-мутанта и не пройдёт отбор (все l флипов добавляют рёбра):

$$P_{bm,1} = \frac{\binom{m-n+1}{l}}{\binom{m}{l}} = \frac{(m-n+1)!l!(m-l)!}{l!(m-n+1-l)!m!} = \frac{(m-n+1)!(m-l)!}{(m-n+1-l)!m!} \geq$$

$$\frac{(m-n+2-l)^l}{m^l} = (\frac{m-n+2-l}{m})^l = (1-\frac{n+l-2}{m})^l$$

Как уже упоминалось выше $\forall m \geq 2 : (1-1/m)^m \geq 1/4$, и при $m \geq 2(n+l-2)$ и $m \geq l(n+l-2)$ выполняется:

$$P_{bm,1} \geq (1-\frac{n+l-2}{m})^l \geq \frac{1}{4}$$

1.1.3 Вероятность поправить ошибки

1.2 Оценка снизу

Рассмотрим графы с единственным минимальным остовным деревом. В качестве потенциала X выберем число рёбер из MST, не содержащихся в текущем дереве. Рассмотрим последний шаг с $X = 1$, в нём требуется сделать один конкретный флип, чтобы завершить дерево:

$$E[x_t - x_{t+1}|X_t = 1] = \sum_{l=0}^{m} p_l \sum_{\forall \binom{m-2}{l-2} err} p_{flip,err,best} p_{cross,err}$$

Где $p_{flip,err,best}$ - вероятность того, что после этапа мутации нужный флип произошёл при фиксированных $l-2$ ошибочных изменений.

И где $p_{cross,err}$ - вероятность удачного кроссовера, в котором флип остался, но все $l-2$ ошибочных изменения стёрлись.

Мы сразу можем сузить область l:

$$E[x_t - x_{t+1}|X_t = 1] = \sum_{l=2}^{m} p_l \sum_{\forall \binom{m-2}{l-2} err} p_{flip,err,best} p_{cross,err}$$

Т.к. при меньших l флипа одного ребра на другое произойти не может и $p_{flip,err,best} = 0$.

1.2.1 Оценка $p_{cross,err}$

Заметим, что $p_{cross,err}$ не зависит от конкретного распределения ошибок, но зависит только от значения $l-2$:

$$p_{cross,err} = p_{cross,l} = 1 - (1 - \frac{1}{\lambda^2}(1 - \frac{1}{\lambda})^{l-2})^{\lambda} \leq 1 - (1 - \frac{1}{\lambda^2}(\frac{1}{e})^{\frac{l-2}{\lambda}})^{\lambda} \leq$$

$$1 - (1 - \frac{1}{\lambda}(\frac{1}{e})^{\frac{l-2}{\lambda}}) = \frac{1}{\lambda}(\frac{1}{e})^{\frac{l-2}{\lambda}}$$

Первый переход сделан для $\lambda \geq 2$ используя $\forall m \geq 2$ $\frac{1}{e} \geq (1 - \frac{1}{m})^m$.

Второй переход - неравенство Бернулли $(1+x)^r \geq 1 + rx$.

Итог: $p_{cross,err} \leq \frac{1}{\lambda}(\frac{1}{e})^{\frac{l-2}{\lambda}}$.

1.2.2 Оценка суммы $p_{flip,err,best}$

Для фиксированного l оценим

$$\sum_{\forall \binom{m-2}{l-2} err} p_{flip,err,best}$$

Сделаем оценки:

$$p_{flip,err,best} \le p_{flip,err,\lambda} = p_{flip,l,\lambda}$$

Где $p_{flip,err,\lambda}$ - вероятность флипа с ошибками появиться в качестве одного из мутантов. При таком условии мы не учитываем то, что в выборке могут быть кандидаты лучше нашего, следовательно, $p_{flip,err,\lambda} = p_{flip,l,\lambda}$.

В итоге, учитывая то, что $p_{flip,err}$ - вероятность появления мутанта с флипом и конкретной ошибкой $= \frac{(l-1)l}{(m-1)m}\binom{m-2}{l-2}^{-1}$:

$$\sum_{\forall \binom{m-2}{l-2} err} p_{flip,err,best} \le \sum_{\forall \binom{m-2}{l-2} err} p_{flip,l,\lambda} =$$

$$\sum_{\forall \binom{m-2}{l-2} err} 1-(1-\frac{(l-1)l}{(m-1)m}\binom{m-2}{l-2}^{-1})^{\lambda} \le \sum_{\forall \binom{m-2}{l-2} err} 1-(1-\lambda\frac{(l-1)l}{(m-1)m}\binom{m-2}{l-2}^{-1}) \le$$

$$\sum_{\forall \binom{m-2}{l-2} err} \lambda\frac{(l-1)l}{(m-1)m}\binom{m-2}{l-2}^{-1} = \lambda\frac{(l-1)l}{(m-1)m}$$

1.2.3 Getting it all together

Оценим сверху

$$E[x_t - x_{t+1}|X_t = 1] = \sum_{l=0}^{m} p_l \sum_{\forall \binom{m-2}{l-2} err} p_{flip,err,best}\, p_{cross,err}$$

Как мы уже знаем, $p_{cross,err}$ не зависит от err, но зависит только от l, следовательно, вынесем её за сумму:

$$E[x_t - x_{t+1}|X_t = 1] = \sum_{l=0}^{m} p_l \sum_{\forall \binom{m-2}{l-2} err} p_{flip,err,best}\, p_{cross,err} \le$$

$$\sum_{l=0}^{m} p_l \sum_{\forall \binom{m-2}{l-2} err} p_{flip,err,best} \frac{1}{\lambda}(\frac{1}{e})^{\frac{l-2}{\lambda}} \le$$

$$\sum_{l=0}^{m} p_l \frac{1}{\lambda}(\frac{1}{e})^{\frac{l-2}{\lambda}} \sum_{\forall \binom{m-2}{l-2} err} p_{flip,err,best} \le$$

$$\sum_{l=0}^{m} p_l \frac{1}{\lambda}(\frac{1}{e})^{\frac{l-2}{\lambda}} \lambda\frac{(l-1)l}{(m-1)m} =$$

$$\frac{1}{(m-1)m}\sum_{l=0}^{m} p_l (\frac{1}{e})^{\frac{l-2}{\lambda}} (l-1)l$$

Для константного λ функция $f(l) = (\frac{1}{e})^{\frac{l-2}{\lambda}}(l-1)l$ ограничена сверху константой C (если верить вольфраму и здравому математическому смыслу). Сделаем последний шаг:

$$E[x_t - x_{t+1}|X_t = 1] \leq \frac{1}{(m-1)m}\sum_{l=0}^{m} p_l(\frac{1}{e})^{\frac{l-2}{\lambda}}(l-1)l \leq C(\lambda)\frac{1}{(m-1)m}\sum_{l=0}^{m} p_l =$$

$$C(\lambda)\frac{1}{(m-1)m}$$

Тогда из аддитивного дрифта:

$$E[T_1] \geq C(\lambda)^{-1}(m-1)m$$

Для константного $\lambda > 1$, для графов с единственным MST.
ТОЧНЕЕ:

$$E[T_1] \geq \frac{em^2}{\lambda^2}$$