Calcul Différentiel III

STEP, MINES ParisTech

5 janvier 2021 (`#9ddc57e`)

Question 1 (réponses multiples) Soit $f : (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x_1 x_2 \in \mathbb{R}$. On a

☐ A:

$$H_f(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

☐ B: Si $h_1 = (h_{11}, h_{12}) \in \mathbb{R}^2$ et $h_2 = (h_{21}, h_{22}) \in \mathbb{R}^2$,

$$d^2 f(x_1, x_2) \cdot h_1 \cdot h_2 = h_{11} h_{22} - h_{21} h_{12}$$

☐ C: Pour tout $x \in \mathbb{R}^2$

$$\nabla f(x+h) = \nabla f(x) + \frac{1}{2} \langle h, H_f(x) \cdot h \rangle + \varepsilon(h) \|h\|^2$$

où $\varepsilon(h) \to 0$ quand $h \to 0$.

Question 2 Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est deux fois différentiable en $x \in U$ et que $df(x) \cdot h \cdot h$ est connu pour tout $h \in \mathbb{R}^n$, peut-on déterminer $df(x) \cdot h_1 \cdot h_2$ pour tout $h_1, h_2 \in \mathbb{R}^n$?

☐ A : oui,
☐ B : non.

Question 3 La différentielle $d^3 f$ d'ordre 3 d'une fonction $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

☐ A : associe linéairement à tout vecteur h de $\mathbb{R}^2$ une application qui associe linéairement à tout vecteur h de $\mathbb{R}^2$ une application qui associe linéairement à tout vecteur h de $\mathbb{R}^2$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$.

☐ B : associe linéairement à tout point $x \in U$ une application qui associe linéairement à tout vecteur h de $\mathbb{R}^2$ une application qui associe linéairement à tout vecteur h de $\mathbb{R}^2$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$.

☐ C : associe à tout point $x \in U$ une application qui associe linéairement à tout vecteur h de $\mathbb{R}^2$ une application qui associe linéairement à tout vecteur h de $\mathbb{R}^2$ une application qui associe linéairement à tout vecteur h de $\mathbb{R}^2$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$.

Question 4 (réponses multiples) Le tenseur de type $(1, 1, 1)$ défini par $t_{ijk} = 1.0$:

☐ A : est d'ordre 1,
☐ B : est décrit en NumPy par le tableau `np.array([1.0])`,
☐ C : représente l'application linéaire $x \in \mathbb{R} \to y \in \mathbb{R} \to xy \in \mathbb{R}$.

Question 5 La contraction du tenseur $[t_{ijk}]_{ijk}$ de type (m, n, p) et du tenseur de type (p, p) défini par $\delta_{lm} = 1$ si $l = m$ et $\delta_{lm} = 0$ sinon

☐ A : n'est pas définie en général,
☐ B : est le tenseur $[t_{ijk}]_{ijk}$,
☐ C : est le tenseur $[\sum_k t_{ijk}]_{ij}$.

Question 6 Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ est trois fois différentiable, quel est le type du tenseur représentant $d^3 f(x)$?

☐ A : (4, 2, 2, 2),
☐ B : (3, 4, 2),
☐ C : (4, 2, 1).

Question 7 (réponses multiples) Si f est k fois différentiable en x,

☐ A : les dérivées partielles d'ordre k de f en x existent,
☐ B : on a $\partial^k_{i_k \dots i_1} f(x) = d^k f(x) \cdot e_{i_1} \cdot \dots \cdot e_{i_k}$,
☐ C : ces dérivées partielles déterminent $d^k f(x)$ de façon unique.

Question 8 Si $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est deux fois différentiable, combien y'a-t'il au plus de coefficients différents dans le tenseur représentant $d^2 f(x)$?

☐ A : 9,
☐ B : 18,
☐ C : 27.