

# Calcul Intégral II

STEP, MINES ParisTech

5 janvier 2021 (#9ddc57e)

**Question 1 (réponse multiple)** Si les ensembles  $A_k \subset \mathbb{R}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , sont tous mesurables, déterminer quels ensembles dans la liste ci-dessous sont nécessairement mesurables.

- ☐ A: l'ensemble des  $x \in \mathbb{R}$  appartenant (au moins) à l'un des  $A_k$ ,
- ☐ B: l'ensemble des  $x \in \mathbb{R}$  n'appartenant à aucun  $A_k$ ,
- ☐ C: l'ensemble des  $x \in \mathbb{R}$  appartenant exactement à l'un des  $A_k$ .

**Question 2 (réponse multiple)** Une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est nécessairement intégrable si

- ☐ A: elle est mesurable,
- ☐ B: elle est limite de fonctions mesurables,
- ☐ C: elle est mesurable et bornée.

**Question 3 (réponse multiple)** Si la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[$  est intégrable, alors l'ensemble  $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \geq 1\}$  est nécessairement :

- ☐ A: mesurable,
- ☐ B: de longueur finie,
- ☐ C: de longueur nulle,
- ☐ D: négligeable.

**Question 4 (réponses multiple)** Si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sont des fonctions mesurables, lister quelles fonctions dans la liste ci-dessous sont nécessairement mesurables.

- ☐ A:  $f + g$ ,
- ☐ B:  $f \times g$ ,
- ☐ C:  $\max(f, g)$ ,
- ☐ D:  $g \circ f$ .

**Question 5 (réponse multiple)** Si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est intégrable sur tout intervalle  $[-r, r]$  avec  $r \geq 0$  et que

$$\int_{-r}^r f(t) dt \rightarrow A \in \mathbb{R} \text{ quand } r \rightarrow +\infty,$$

alors on peut conclure que  $f$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$  et d'intégrale  $A$

- ☐ A: sans hypothèse supplémentaire,
- ☐ B: si  $|f| \leq g$  où  $g : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[$  est intégrable,
- ☐ C: si

$$\sup_{r \geq 0} \int_{-r}^r |f(t)| dt < +\infty.$$