

Gabriel Stoltz

(à partir de notes de cours d'Alexandre Ern et Eric Cancès)

# Analyse et Calcul Scientifique

16 décembre 2018



---

## Organisation du cours

### Pourquoi un cours d'analyse et de calcul scientifique ?

Si tout se passe bien, vous saurez à la fin de ce cours utiliser à bon escient et dans des cas simples deux méthodes numériques fondamentales pour l'ingénieur : les différences finies pour l'intégration en temps des équations d'évolution, et les éléments finis pour la résolution des problèmes variationnels typiquement rencontrés en mécanique. Vous serez également capables de déterminer si les problèmes à résoudre sont bien posés d'un point de vue théorique (en vérifiant que les conditions d'application des théorèmes d'existence/unicité des solutions sont remplies).

Ce module est un cours d'introduction accessible à toute la promotion, donnant une première idée de la force et des limites des méthodes mathématiques et numériques dans la résolution de problèmes scientifiques concrets. C'est également un cours fondamental, à approfondir, pour les étudiants souhaitant par la suite utiliser, voire développer, des méthodes numériques. Pour aller plus loin, on pourra consulter les ouvrages de la bibliographie (en analyse [1, 6, 9, 8] ou calcul scientifique [2, 3, 4, 5, 7]).

Par ailleurs, vous développerez de manière générale vos compétences de “problem solving” – une attitude qui fait que l'on apprécie tant les étudiants de formation mathématique dans l'industrie...

### Modalités générales

Il est essentiel d'insister sur le fait que les mathématiques appliquées ne sont pas un sport de spectateur ! Il faut pratiquer, par des exercices ou résolutions théoriques ou en effectuant des simulations, et dans tous les cas pousser les raisonnements et/ou les ordinateurs dans leurs derniers retranchements pour vraiment comprendre ce qui est vrai/faux/simulable, etc. Tout a toujours l'air beaucoup trop simple lorsque c'est l'enseignant qui le fait... Alors, à vous de jouer !

Pour vous rendre moteurs, ce cours est enseigné en “pédagogie active” (un mode connu sous le nom de “classe inversée”) : le cours est appris à la maison par les étudiants, et les séances de cours sont réservées à des discussions sur des points techniques fins (discussions lancées à l'initiative des étudiants, s'ils ont préparé des questions), et à la résolution d'exercices en groupes librement composés de 3/4 personnes. Un des intérêts du travail de groupe est de vous pousser à vous expliquer vos raisonnements les uns les autres – selon l'adage que l'on comprend mieux quelque chose quand on l'a expliqué...

Ce cours est valorisé à 3,5 ECTS, ce qui signifie que, selon les normes de la commission européenne, vous devriez travailler en moyenne 85 h sur le semestre pour cet enseignement. Il faut donc compter environ 2 à 3h de travail régulier par semaine pour ce cours, plus quelques révisions spécifiques aux examens. L'idée est qu'un travail sérieux et continu, surtout en début de semestre, vous permettra de limiter les révisions des examens, et vous permettra une meilleure assimilation du matériau présenté.

De manière pratique, en arrivant, vous commencerez par placer les tables dans la bonne configuration (en les remettant en fin de séance). Il n'y a pas de pause officielle mais des pauses “volantes” : c'est à chacun de s'échapper en fonction de ses besoins pour le temps qu'il faut.

## Travail attendu

Tous les documents utilisés et présentés en cours sont sur la page web Educnet dédiée au cours :

<https://educnet.enpc.fr/course/view.php?id=566>

Concrètement, votre travail d'une semaine à l'autre consistera à :

- (1) lire les pages du poly qui seront demandées. Les sections à lire portent sur des notions qui seront mises en oeuvre la semaine suivante. Attention, "lire" veut dire bien *apprendre par coeur* toutes les définitions, comprendre le contenu des résultats (théorèmes, propositions, etc), et avoir un minimum réfléchi à l'articulation desdits résultats. Il vaut mieux prévoir plusieurs (re)lectures du matériau, espacées dans le temps, copieusement annoter le poly, mettre en évidence les résultats importants, refaire les petits calculs qui sont menés, et éventuellement produire des fiches de synthèse à usage personnel ;
- (2) répondre au questionnaire en ligne, qui vous permettra de vous poser des questions et de vérifier si vous avez suffisamment bien compris ce que vous avez lu ;
- (3) voir le corrigé des exercices de la semaine précédente sur le poly mis à jour chaque semaine sur la page web du cours. Cette version corrige notamment les coquilles du poly d'exercices. La corrigé est en particulier l'occasion de comparer votre rédaction à celle que nous proposons. Il est essentiel que vous compreniez parfaitement la résolution des exercices. La version en ligne propose également quelques compléments techniques qui intéresseront ceux qui souhaitent continuer leurs études en mathématiques.

Quelques vidéos de correction d'exercices (les plus importants ou les plus durs) sont mises en ligne chaque semaine. Surveillez la page web du cours...

Nous ferons de temps en temps, en fin de séance et en amphi pour la promo entière, des temps de restructuration permettant de mieux organiser les concepts et idées nouvelles que vous aurez appréhendés lors des séances précédentes.

Il y aura également une heure de type "office hour" (TPA) par semaine, typiquement le vendredi à 15h00. Votre participation est sur la base du volontariat. L'enseignant responsable, Gabriel Stoltz, ou un chargé de petite classe, sera présent pour répondre à vos questions – sur le cours, les exercices, leur corrigé, etc. En particulier, c'est l'occasion de demander de l'aide sur la correction des exercices complémentaires non corrigés ; ou de demander des éclaircissements sur le cours à venir (pour mieux réussir les quizz, cf. ci-dessous). Certaines "office hours" seront dédiées à un support technique pour des rendus de TP informatique. Dans tous les cas, vous êtes vivement encouragés à venir avec des questions préparées.

## Contacter les enseignants

Le mode de contact préféré de loin est le mail, pour tous les chargés de petite classe. La liste des adresses mail des chargés de cours est disponible sur la page web educnet. C'est votre enseignant de petite classe que vous devez contacter pour toute question "technique" sur le cours (éclaircissement sur un exercice, aide aux TPs, etc) et pour signaler vos absences.

Pour des questions plus organisationnelles (relations avec les chargés de cours, réclamation sur l'examen après discussion avec le chargé de cours, etc), vous pouvez contacter l'enseignant responsable, à l'adresse [gabriel.stoltz@enpc.fr](mailto:gabriel.stoltz@enpc.fr). Son bureau est situé au 3eme étage du bâtiment Coriolis (B306). Attention, ce n'est pas à lui qu'il faut signaler vos absences, sauf si bien sûr vous êtes dans son groupe !

## Evaluation

La note finale sera obtenue de la manière suivante :

- examen de mi-parcours : 6 points. Le poly de cours et les notes personnelles sont autorisés. Insistons de suite sur l'importance que nous accordons à la rédaction dans ce cours et donc à l'examen : une réponse n'est correcte que lorsqu'elle est bien rédigée. Rien ne nous insupporte plus qu'une suite d'équations mathématiques sans texte ni marque de raisonnement/progression. Ce n'est pas au correcteur de combler les blancs et vides de la rédaction. C'est à l'étudiant de s'inspirer des rédactions modèles des corrigés écrits mis en ligne chaque semaine. Pas de tentative de bluff, ou de raisonnement "par hasard" (on liste tous les arguments, il y en a bien un qui donne le résultat que souhaite le prof : on ne dégaine pas si on ne tire pas!).

Sont utilisables tels quels à l'examen les résultats du cours (théorèmes, propositions, remarques, etc) ainsi que les exercices obligatoires et leurs corrections – en renvoyant très précisément à des numéros de section, exercice, etc.

- examen final : 6 points. Mêmes documents autorisés que ci-dessus et mêmes commentaires.
- contrôle continu : 8 points. La note du contrôle continu sera obtenue à partir des notes de
  - (i) rendus de deux TPs informatiques réalisés en binôme, avec discussion avec l'enseignant de votre groupe qui vérifiera que les deux membres du binôme ont bien compris tout ce qui avait été fait (ce, afin d'éviter les passagers clandestins...);
  - (ii) un certain nombre de quizz surprises (de l'ordre de 4 à 6), durant 10 minutes, et ayant en tout début de séance, directement après les réponses à vos questions portant sur le cours de la semaine précédente ou sur les pages du poly à lire pour la séance. Ce test pourra comporter des questions ouvertes (du type "donner la définition de..." ou "donner un exemple de..."), ou se présenter sous forme de QCM. Attention, si vous êtes en retard ou absent sans excuse valable,<sup>1</sup> votre temps de composition sera réduit voire vous aurez tout simplement 0.

La moyenne de la note de contrôle continu sera la moyenne des notes des différents travaux. Si vous avez eu deux absences non-justifiées/non-excuses ou plus, nous retirerons 2 points de la note de contrôle continu. Nous vous rappelons par ailleurs que la plus élémentaire politesse consiste à prévenir l'enseignant de votre petite classe à l'avance de vos absences en les justifiant.

## Programme du cours

La première partie du cours (6 séances) se concentre sur la notion de complétude et les espaces de Banach et de Hilbert (en se focalisant sur des exemples importants, par exemple l'espace des fonctions continues et les espaces de Lebesgue). Concernant les méthodes numériques, on considère l'approximation par les méthodes à un pas des équations différentielles ordinaires.

Dans la seconde partie du cours (6 séances), on introduit également les distributions en dimension un d'espace. Cela permet de poser les problèmes variationnels et de les résoudre par le biais du théorème de Lax Milgram. Ce dernier théorème donne également le cadre théorique adéquat pour l'approximation numérique par la méthode des éléments finis ( $\mathbb{P}_1$  en dimension 1).

## Comment ce cours a été ressenti par le passé...

D'une manière générale vos camarades des années précédentes ont globalement apprécié les enseignements en pédagogie active. Les remarques des élèves nous ont conduit à introduire les temps de restructuration, prévus dans le planning ou faits à la demande des élèves en "office hour". Quelques étudiants préféreraient un cours au tableau : l'expérience montre qu'une majorité d'élèves entre mieux dans la compréhension des concepts par le travail en groupe sur les exercices. Les résultats en fin de module sont en moyenne meilleurs avec cette pédagogie.

---

1. Liste non exhaustive des excuses non valables : dire une semaine après que vous étiez malade la semaine précédente (on prévient au plus tôt et on amène un certificat médical ou on me fait parvenir un mail officiel du département de 1A), que votre réveil n'a pas sonné (on envoie un mail dès que ledit réveil sonne), que vous avez raté votre train la veille au soir (on envoie un mail dès la veille au soir), etc.

## VIII Organisation du cours

Les quizz surprise ont pu paraître infantilisants à certains de vos camarades. Nous faisons le choix de les conserver pour vous inciter fortement au travail régulier. Le travail à la maison est nécessaire et, dans cette pédagogie, la lecture du poly doit impérativement précéder le travail en classe. Les quizz répondent d'ailleurs à la demande d'autres élèves qui reconnaissent avoir besoin d'incitations pour réguler leur travail personnel. Je suis toutefois bien conscient qu'il peut sembler assez vain de recracher des définitions que l'on n'a pas forcément bien comprises au moment du quizz... mais il y a justement l'office hour pour venir poser des questions sur les éléments de compréhension de base du cours en cas de problème !

Certaines séances, notamment les deux premières, peuvent sembler plus denses ou comporter plus d'exercices que les autres. J'en suis conscient et je fais au mieux pour équilibrer la charge de travail sur le semestre... Cela dit, là aussi, ces premiers cours en école d'ingénieur sont l'occasion de prendre un peu d'autonomie dans vos apprentissages par rapport à la prépa : au lieu de subir et de vous plaindre, anticipez, réagissez, ajustez – bref, devenez acteur de vos apprentissages !

Par ailleurs, je vous mets en garde sur la règle de dimensionnement suivante : si une séance est bien faite, un tiers des étudiants finiront tout et feront des exercices en plus, un tiers finira tout juste ou sera sur le point de finir, et un tiers ne fera que deux à trois exercices (avec donc un à deux exercices à finir à la maison).

### **Et la première séance... ?**

C'est la pire de toute ! Vous vous trouvez dans un groupe que vous n'avez pas choisi, avec des camarades de niveaux très différents (ô la solitude du PC au milieu de trois MPs...), et avec un cours que vous n'avez pas eu le temps de préparer à l'avance... Accrochez-vous, ça va swinguer, mais la semaine prochaine ça ira mieux !

Champs-sur-Marne, 3 juillet 2018

*Gabriel Stoltz*

## Plan et contenu des séances

La nomenclature est la suivante :

- **Lire sections....** : à faire *avant* la séance en question (pas pendant). Il s'agit de travailler les pages correspondantes en se concentrant sur les définitions et les résultats importants énoncés sous forme de théorème, proposition, etc. Attention, il ne suffit pas de lire ces pages en dilettante, il faut vraiment chercher à mémoriser les définitions, se demander si on a bien compris les résultats énoncés et leurs articulations. Il n'est en revanche bien sûr pas nécessaire de lire les énoncés des exercices. Les sections notées "complément" peuvent également être omises, et les remarques sont moins importantes que le reste du contenu.
- **EO** signifie "exercices obligatoires", ceux à traiter en séance et exigibles à l'examen. Si vous n'avez pas eu le temps de les résoudre en séance, vous devez absolument travailler le corrigé ;
- **EC** signifie "exercices complémentaires", à traiter en séance une fois que vous avez traité tous les exercices obligatoires, ou chez vous pour vous entraîner. Ces exercices sont dans l'ensemble plutôt faciles une fois les exercices obligatoires maîtrisés, et permettent de mieux appréhender les concepts du cours. Ces exercices ne sont pas toujours corrigés ;
- **ES** signifie "exercices supplémentaires", plus difficiles, à traiter à la maison, plutôt pour les étudiants se destinant à faire des mathématiques dans la suite de leur cursus. Ces exercices ne sont pas toujours corrigés.

Séance 1 (10 septembre) Espaces de Banach  
Présentation du contrat pédagogique  
EO : 1.1, 1.2, 1.4, 1.9, 1.14  
EC : 1.5, 1.6, 1.8, 1.10, 1.11, 1.13  
ES : 1.3, 1.7, 1.12

Séance 2 (17 septembre) Espaces de Hilbert  
Lire Chapitre 1 et Sections 2.1, 2.2  
Quizz blanc  
Restructuration (en petits groupes)  
EO : 1.16, 1.19, 2.1, 2.3  
EC : 1.15, 2.2, 2.4  
ES : 1.17, 1.18

Séance 3 (24 septembre) Espaces de Lebesgue  
Lire Section 2.3 et Sections 3.1, 3.2, 3.3, 3.4 et 3.5.1  
EO : 2.5, 2.6, 3.8, 3.9, 3.12  
EC : commencer par 3.2, puis 3.1, 3.4, 3.5, 3.7  
ES : 3.3, 3.6, 3.10, 3.11

Séance 4 (1er octobre) Applications dans les espaces de Banach  
Lire Sections 3.5.2, 3.5.3, 3.6 et 4.1  
Restructuration (amphi commun)  
EO : 3.15, 3.16, 4.1, 4.5  
EC : 3.18 puis 3.5, 3.14, 4.2, 4.4, 4.6  
ES : 3.13, 3.17, 4.3

Séance 5 (8 octobre) Théorème de point fixe  
Lire Sections 4.2, 4.3, 4.4, 5.2.1  
Distribution du sujet d'examen de mi-parcours de l'année passée  
EO : 4.7, 4.10, 4.16, 4.17, 5.1  
EC : 4.8, 4.9, 4.14, 4.18  
ES : 4.11, 4.12, 4.13, 4.15

X      Organisation du cours

Séance 6 (15 octobre) Intégration des équations différentielles ordinaires

Lire Sections 5.3 et 5.4

Restructuration (amphis différenciés)

Distribution des sujets de TPs

EO : 5.2, 5.3, 5.7

EC : 5.4, 5.5

ES : 5.6, 5.8

Examen (5 novembre) Examen de mi-parcours sur les 6 premières séances (2h)

Séance 7 (22 octobre) Distributions (1)

Lire Sections 6.1, 6.2, 6.3.1

EO : 6.1, 6.2, 6.6, 6.8, 6.9, 6.10, 6.14, 6.16, 6.17, 6.18

EC : 6.3, 6.4, 6.12

ES : 6.5, 6.7, 6.11, 6.13, 6.15

Séance 8 (12 novembre) Distributions (2)

Lire Sections 6.3.2, 6.4

Restructuration (amphi commun ou différencié)

EO : 6.22, 6.24, 6.26, 6.29, 6.31 puis 6.20 (difficile)

EC : 6.19, 6.25, 6.27

ES : 6.21, 6.23, 6.28, 6.30, 6.32

Séance 9 (19 novembre) Espaces de Sobolev

Lire Chapitre 7

EO : 7.1, 7.2, 7.6, 7.9, 7.12, 7.14

EC : 7.7, 7.10, 7.11, 7.15, 7.16

ES : 7.3, 7.4, 7.5, 7.8, 7.13

Séance 10 (26 novembre) Formulations variationnelles

Lire Sections 8.1, 8.2.1

Distribution des sujets de TPs

Restructuration (amphi commun ou différencié)

EO : 8.1, 8.4, 8.5 puis 8.3

EC : 8.6, 8.7, 8.9

ES : 8.2, 8.8, 8.10

Séance 11 (3 décembre) Méthode de Galerkin

Lire Chapitre 9 jusqu'au Théorème 9.2 (en Section 9.3.3)

EO : 9.1, 9.2, 9.3, 9.4, 9.5, 9.6, 9.8

ES : 9.7

Séance 12 (10 décembre) Méthode des éléments finis

Lire fin Chapitre 9

Restructuration (en petites classes)

Rendu de partie théorique du TP et auto-correction

Distribution du sujet d'examen final de l'année passée

EO : 9.9, 9.10

ES : 9.11

Examen (7 janvier) Examen final (2h)



---

## Table des matières

---

### Partie I Fondamentaux

---

<b>1</b>	<b>Espaces de Banach</b> .....	3
1.1	Espaces vectoriels normés .....	3
1.1.1	Normes .....	3
1.1.2	Topologie des espaces vectoriels normés .....	7
1.1.3	Équivalence de normes .....	8
1.2	Espaces de Banach .....	10
1.2.1	Suites de Cauchy .....	10
1.2.2	Espaces complets .....	11
1.2.3	Exemples d'espaces de Banach .....	12
1.2.4	Contre-exemples .....	14
1.2.5	Séries normalement convergentes .....	14
<b>2</b>	<b>Espaces de Hilbert</b> .....	17
2.1	Définitions et premières propriétés .....	17
2.1.1	Espaces euclidiens et hermitiens .....	17
2.1.2	Inégalité de Cauchy-Schwarz .....	18
2.1.3	Espaces de Hilbert .....	19
2.2	Théorème de projection orthogonale .....	19
2.3	Bases hilbertiennes .....	23
<b>3</b>	<b>Espaces de Lebesgue</b> .....	25
3.1	Fonctions égales presque partout .....	25
3.2	Espace $L^1$ .....	26
3.2.1	Définition .....	26
3.2.2	Propriétés .....	27
3.3	Espace $L^2$ .....	30
3.4	Espace $L^\infty$ .....	31
3.5	Autres espaces $L^p$ .....	33
3.5.1	Définitions .....	33
3.5.2	Relations entre les espaces $L^p$ .....	35
3.5.3	Espaces $L^p_{\text{loc}}$ .....	36
3.6	Applications : séries de Fourier dans $L^2(\cdot - \pi, \pi)$ .....	37

---

### Partie II Intégration des équations différentielles ordinaires

---

<b>4</b>	<b>Applications continues dans les espaces de Banach</b>	45
4.1	Applications linéaires : définition et premières propriétés	45
4.2	Dualité	49
4.2.1	Dualité dans les espaces de Hilbert : théorème de Riesz	50
4.2.2	Cas des espaces $\ell^p$ (complément)	51
4.2.3	Dualité entre les espaces $L^p$ (complément)	53
4.3	Applications linéaires continues dans les espaces de Banach	54
4.4	Applications non-linéaires : théorème du point fixe de Picard	55
<b>5</b>	<b>Intégration numérique des équations différentielles ordinaires</b>	59
5.1	Motivation : dynamique céleste	59
5.2	Etude du problème continu	61
5.2.1	Existence et unicité locales	61
5.2.2	Existence et unicité globales (complément)	62
5.3	Approximation par les méthodes à un pas	63
5.3.1	Principe de l'approximation	64
5.3.2	Exemples de méthodes numériques	64
5.3.3	Implémentation pratique des schémas implicites (complément)	65
5.4	Analyse d'erreur	66
5.4.1	Erreur de troncature locale	66
5.4.2	Stabilité	70
5.4.3	Convergence	72

---

### Partie III Des distributions à la méthode des éléments finis

---

<b>6</b>	<b>Distributions</b>	77
6.1	Fonctions test	78
6.1.1	Définition des fonctions test	78
6.1.2	Quelques propriétés des fonctions test	79
6.2	Définition des distributions	80
6.2.1	Quelques exemples importants	80
6.2.2	Fonctions localement intégrables	83
6.2.3	Multiplication par une fonction $C^\infty$	85
6.3	Dérivation au sens des distributions	85
6.3.1	Cas général	86
6.3.2	Dérivation en dimension 1	88
6.4	Convergence des distributions	90
6.4.1	Définition	90
6.4.2	Lien avec la convergence presque partout	92
6.4.3	Cas des distributions induites par des fonctions $L^p_{\text{loc}}$ (complément)	93
<b>7</b>	<b>Espaces de Sobolev</b>	95
7.1	Espaces $H^k(\Omega)$	95
7.2	Espace $H^1_0(\Omega)$	97
7.2.1	Définition abstraite	97
7.2.2	Inégalité de Poincaré	99
7.2.3	Caractérisation alternative des espaces $H^1_0(a, b]$	100
7.3	Espace $H^{-1}(\Omega)$	101

<b>8 Formulations faibles</b> .....	105
8.1 Théorème de Lax-Milgram .....	106
8.2 Résolution de problèmes aux limites .....	108
8.2.1 Problème de Poisson (régularisé) .....	108
8.2.2 Advection-diffusion .....	111
8.2.3 Autres exemples .....	112
<b>9 Méthode des éléments finis</b> .....	115
9.1 Motivation : des problèmes issus de la mécanique et de la thermique .....	115
9.1.1 Transferts thermiques .....	116
9.1.2 Équilibre d'une membrane élastique .....	116
9.2 La méthode de Galerkin .....	117
9.2.1 Principe .....	117
9.2.2 Estimation d'erreur .....	118
9.2.3 Système linéaire associé .....	119
9.3 Éléments finis en dimension 1 .....	120
9.3.1 Maillages .....	120
9.3.2 Élément fini de Lagrange $\mathbb{P}_1$ .....	120
9.3.3 Application au problème de Dirichlet (9.1) .....	124

---

## Partie IV Appendice

---

Rappels de théorie de la mesure .....	131
Bibliographie .....	133



## Partie I

---

### Fondamentaux



# Espaces de Banach

---

<b>1.1</b>	<b>Espaces vectoriels normés</b>	<b>3</b>
1.1.1	Normes	3
1.1.2	Topologie des espaces vectoriels normés	7
1.1.3	Équivalence de normes	8
<b>1.2</b>	<b>Espaces de Banach</b>	<b>10</b>
1.2.1	Suites de Cauchy	10
1.2.2	Espaces complets	11
1.2.3	Exemples d'espaces de Banach	12
1.2.4	Contre-exemples	14
1.2.5	Séries normalement convergentes	14

---

Les espaces de Banach sont des espaces vectoriels de dimension finie ou infinie jouissant de propriétés particulières. À travers l'étude des exemples présentés, on retiendra avant tout le fait que certains résultats bien connus en dimension finie ne sont plus valables en dimension infinie, ce qui justifie l'emploi de nouveaux concepts.

## 1.1 Espaces vectoriels normés

Cette section contient essentiellement des rappels sur les normes. Dans un premier temps, nous ne considérerons que deux exemples d'espaces vectoriels de dimension infinie : les espaces  $C^k$  dont les éléments sont des fonctions suffisamment régulières et les espaces  $\ell^p$  (avec  $p$  réel) dont les éléments sont des suites. Notre "collection" d'espaces vectoriels normés de dimension infinie s'enrichira au fil de la lecture de cet ouvrage.

### 1.1.1 Normes

Soit  $\mathbb{K}$  un corps qu'on prendra égal à  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Pour  $x \in \mathbb{K}$ , on notera  $|x|$  sa valeur absolue si  $x \in \mathbb{R}$  et son module si  $x \in \mathbb{C}$ . Par ailleurs, on utilisera l'abréviation  $\mathbb{K}$ -ev pour désigner un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ .

**Définition 1.1.** Soit  $V$  un  $\mathbb{K}$ -ev. Une norme est une application définie sur  $V$  à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$ , notée  $\|\cdot\|_V$ , et satisfaisant les trois propriétés suivantes :

- (i)  $\forall v \in V, \quad \|v\|_V = 0 \iff v = 0,$
- (ii)  $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall v \in V, \quad \|\lambda v\|_V = |\lambda| \|v\|_V,$
- (iii) *inégalité triangulaire* :  $\forall (v, w) \in V \times V, \quad \|v + w\|_V \leq \|v\|_V + \|w\|_V.$

**Exemple 1.1 (Espaces de dimension finie).** Soit un entier  $d \geq 1$ . On considère le  $\mathbb{K}$ -ev  $\mathbb{K}^d$  de dimension finie  $d$ . On pose, pour tout réel  $p$  tel que  $1 \leq p < \infty$ ,

$$\forall v = (v_1, \dots, v_d) \in \mathbb{K}^d, \quad \|v\|_p = \left( \sum_{i=1}^d |v_i|^p \right)^{1/p}, \quad (1.1)$$

et pour  $p = \infty$ ,

$$\forall v = (v_1, \dots, v_d) \in \mathbb{K}^d, \quad \|v\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq d} |v_i|. \quad (1.2)$$

On vérifie facilement que  $\|\cdot\|_p$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , définit une norme sur  $\mathbb{K}^d$ . Le seul point technique consiste à montrer l'inégalité triangulaire, qui est prouvée dans un cas plus général dans l'Exercice 1.4.  $\square$

Présentons à présent deux exemples importants d'espaces vectoriels de dimension infinie.

**Exemple 1.2 (Espaces  $C^k$ ).** Soit  $[a, b]$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $C^0([a, b])$  l'espace vectoriel constitué des fonctions continues sur  $[a, b]$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$ . L'application  $\|\cdot\|_{C^0([a, b])}$  qui à  $f \in C^0([a, b])$  associe

$$\|f\|_{C^0([a, b])} = \sup_{t \in [a, b]} |f(t)|, \quad (1.3)$$

définit une norme sur  $C^0([a, b])$ . Plus généralement, pour un entier  $k \geq 0$ , on note  $C^k([a, b])$  l'espace vectoriel constitué des fonctions  $k$  fois continûment dérivables sur  $[a, b]$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$ . L'application  $\|\cdot\|_{C^k([a, b])}$  qui à  $f \in C^k([a, b])$  associe

$$\|f\|_{C^k([a, b])} = \max_{0 \leq l \leq k} \sup_{t \in [a, b]} |f^{(l)}(t)|, \quad (1.4)$$

définit une norme sur  $C^k([a, b])$ . On définit de manière similaire les espaces  $C^k(\mathbb{R})$  en reprenant la définition (1.4) mais avec un sup pris sur  $t \in \mathbb{R}$ .  $\square$

**Exercice 1.1.** Vérifier que (1.3) définit bien une norme sur  $C^0([a, b])$ .

**Correction.** Les propriétés (i) et (ii) de la Définition 1.1 se vérifient de manière immédiate. Montrons tout de même (ii) pour cette première correction. Pour  $\lambda \neq 0$ , on observe que  $|\lambda f(x)| = |\lambda| |f(x)| \leq |\lambda| \|f\|_{C^0([a, b])}$ . On en déduit que  $\|\lambda f\|_{C^0([a, b])} \leq |\lambda| \|f\|_{C^0([a, b])}$ . On a de même

$$\|f\|_{C^0([a, b])} = \left\| \frac{1}{\lambda} \lambda f \right\|_{C^0([a, b])} \leq \left| \frac{1}{\lambda} \right| \|\lambda f\|_{C^0([a, b])},$$

ce qui donne  $\|\lambda f\|_{C^0([a, b])} \geq |\lambda| \|f\|_{C^0([a, b])}$ . Au final,  $\|\lambda f\|_{C^0([a, b])} = |\lambda| \|f\|_{C^0([a, b])}$  si  $\lambda \neq 0$ . Cette égalité est également vérifiée si  $\lambda = 0$ .

Pour montrer l'inégalité triangulaire, on considère  $f, g \in C^0([a, b])$ . On commence par remarquer que, pour  $x \in [a, b]$ ,

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_{C^0([a, b])} + \|g\|_{C^0([a, b])}.$$

Le membre de droite ne dépendant pas de  $x$ , on obtient bien  $\|f + g\|_{C^0([a, b])} \leq \|f\|_{C^0([a, b])} + \|g\|_{C^0([a, b])}$  en passant au sup en  $x$  à gauche.

**Exercice 1.2.** Vérifier que l'application  $f \mapsto \|f\|_{L^1} = \int_a^b |f(x)| dx$  définit bien une norme sur  $C^0([a, b])$ .



**Correction.** Supposons que  $\|f\|_{L^1} = 0$ . S'il existe  $x_* \in [a, b]$  tel que  $f(x_*) \neq 0$  alors il existe  $\eta > 0$  tel que  $|f(x)| \geq |f(x_*)|/2$  pour tout  $x \in [x_* - \eta, x_* + \eta] \cap [a, b]$ , et donc  $\|f\|_{L^1} \geq \eta |f(x_*)|/2 > 0$ . La contradiction montre que  $f(x) = 0$  pour tout  $x \in [a, b]$ , ce qui montre la propriété (i) de la Définition 1.1. La propriété (ii) est par ailleurs évidente. Il ne reste donc plus qu'à montrer la propriété (iii), qui résulte directement de l'inégalité suivante, pour  $f, g \in C^0([a, b])$  :

$$\|f + g\|_{L^1} = \int_a^b |f(x) + g(x)| dx \leq \int_a^b |f(x)| + |g(x)| dx = \|f\|_{L^1} + \|g\|_{L^1}.$$

**Exercice 1.3.** Vérifier que (1.4) définit bien une norme sur  $C^k([a, b])$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ . Montrer également que l'application  $f \mapsto |f(a)| + \int_a^b |f'(s)| ds$  définit une norme sur  $C^1([a, b])$ .

**Exemple 1.3 (Espaces  $\ell^p$ ).** On considère des espaces de suites  $u = (u_i)_{i \geq 0} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$ . Pour  $1 \leq p \leq \infty$  réel (et pas juste entier), on considère l'ensemble

$$\ell^p = \left\{ u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, \|u\|_{\ell^p} < +\infty \right\},$$

où on a introduit

$$\|u\|_{\ell^p} = \left( \sum_{i \geq 0} |u_i|^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty, \quad (1.5)$$

et

$$\|u\|_{\ell^\infty} = \sup_{i \geq 0} |u_i|. \quad (1.6)$$

On vérifie que  $\ell^p$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et que  $\|\cdot\|_{\ell^p}$  définit bien une norme sur  $\ell^p$  (voir Exercice 1.4).  $\square$

**Exercice 1.4.** L'objet de cet exercice est de montrer que les  $\ell^p$  sont bien des espaces vectoriels normés. Le point technique principal consiste à établir l'inégalité triangulaire, qui est une conséquence directe de l'inégalité de Minkowski :

$$\forall u, v \in \ell^p, 1 \leq p < \infty, \quad \left( \sum_{i=0}^{+\infty} |u_i + v_i|^p \right)^{1/p} \leq \left( \sum_{i=0}^{+\infty} |u_i|^p \right)^{1/p} + \left( \sum_{i=0}^{+\infty} |v_i|^p \right)^{1/p}. \quad (1.7)$$

Noter que cette inégalité est triviale lorsque  $p = 1$ . Sauf mention contraire, on se concentrera donc sur le cas  $1 < p < +\infty$  dans cet exercice.

(1) Montrer que  $\ell^\infty$  est un espace vectoriel et que (1.6) définit une norme. Faire de même pour  $\ell^1$ .  
On se limite donc dans la suite à  $1 < p < +\infty$  ;

(2) Vérifier, sans utiliser (1.7), que  $\ell^p$  est un espace vectoriel ;

(3) Soient  $1 < p, p' \leq \infty$  avec

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1. \quad (1.8)$$

En utilisant la concavité<sup>1</sup> de la fonction  $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(t) = \ln t$ , montrer que pour  $x$  et  $y$  réels positifs, on a l'inégalité de Young

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^{p'}}{p'}. \quad (1.9)$$

1. On rappelle qu'une fonction  $f$  est convexe sur un intervalle (ouvert ou fermé)  $I$  si

$$\forall (x, y) \in I^2, \quad \forall \theta \in [0, 1], \quad f((1 - \theta)x + \theta y) \leq (1 - \theta)f(x) + \theta f(y).$$

(4) Montrer l'inégalité de Hölder (toujours sous la condition (1.8))

$$\forall (u, v) \in \ell^p \times \ell^{p'}, \quad \sum_{i=0}^{+\infty} |u_i v_i| \leq \left( \sum_{i=0}^{+\infty} |u_i|^p \right)^{1/p} \left( \sum_{i=0}^{+\infty} |v_i|^{p'} \right)^{1/p'}. \quad (1.10)$$

*Indication : on appliquera l'inégalité (1.9) à  $x_i = |u_i|/\|u\|_p$  et  $y_i = |v_i|/\|v\|_{p'}$  ;*

(5) Prouver l'inégalité de Minkowski. *Indication : remarquer que  $|u_i + v_i|^p \leq |u_i| |u_i + v_i|^{p-1} + |v_i| |u_i + v_i|^{p-1}$ , et appliquer l'inégalité de Hölder (1.10) aux deux termes du membre de droite de l'inégalité.*

**Correction.** (1) Soient  $u, v \in \ell^\infty$ . Comme  $|u_i + v_i| \leq |u_i| + |v_i| \leq \|u\|_\infty + \|v\|_\infty$ , on a  $\|u + v\|_\infty \leq \|u\|_\infty + \|v\|_\infty$ , ce qui montre que  $u + v \in \ell^\infty$  et prouve également l'inégalité triangulaire pour  $\|\cdot\|_\infty$ . Il est par ailleurs évident que  $\lambda u \in \ell^\infty$  lorsque  $u \in \ell^\infty$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ , ce qui permet de conclure que  $\ell^\infty$  est un espace vectoriel. Enfin, les propriétés (i) et (ii) de la Définition 1.1 sont clairement vérifiées.

Pour  $\ell^1$ , on montre également facilement le résultat.

(2) Pour  $u, v \in \ell^p$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ , on a évidemment  $\lambda u \in \ell^p$  car  $|\lambda u_i| = |\lambda| |u_i|$  et donc  $\|\lambda u\|_{\ell^p} = |\lambda| \|u\|_{\ell^p}$ . Par ailleurs,  $|u_i + v_i|^p \leq (|u_i| + |v_i|)^p \leq 2^p (|u_i|^p + |v_i|^p)$  en distinguant les cas  $|u_i| \leq |v_i|$  et  $|u_i| \geq |v_i|$ . Ceci montre donc que  $\|u + v\|_{\ell^p} \leq 2(\|u\|_{\ell^p}^p + \|v\|_{\ell^p}^p)^{1/p}$ . Ainsi,  $u + v \in \ell^p$ , et on peut conclure que  $\ell^p$  est un espace vectoriel.

(3) On établit le résultat pour  $x, y > 0$ , la preuve étant immédiate si  $x$  ou  $y$  est nul. Par concavité du logarithme,

$$\ln \left( \frac{x^p}{p} + \frac{y^{p'}}{p'} \right) \geq \frac{1}{p} \ln(x^p) + \frac{1}{p'} \ln(y^{p'}) = \ln x + \ln y = \ln(xy).$$

On en déduit (1.9) en passant à l'exponentielle.

(4) On somme (1.9) appliquée à  $x_i = |u_i|/\|u\|_{\ell^p}$  et  $y_i = |v_i|/\|v\|_{\ell^{p'}}$  :

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{|u_i|}{\|u\|_{\ell^p}} \frac{|v_i|}{\|v\|_{\ell^{p'}}} \leq \sum_{i=0}^{+\infty} \left( \frac{|u_i|^p}{p \|u\|_{\ell^p}^p} + \frac{|v_i|^{p'}}{p' \|v\|_{\ell^{p'}}^{p'}} \right) = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

On en déduit que

$$\sum_{i=0}^{+\infty} |u_i v_i| \leq \|u\|_{\ell^p} \|v\|_{\ell^{p'}},$$

qui est bien le résultat recherché.

(5) On considère à présent  $u, v \in \ell^p$ . En suivant l'indication de l'énoncé,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{+\infty} |u_i + v_i|^p &\leq \sum_{i=0}^{+\infty} |u_i| |u_i + v_i|^{p-1} + \sum_{i=0}^{+\infty} |v_i| |u_i + v_i|^{p-1} \\ &\leq \left[ \left( \sum_{i=0}^{+\infty} |u_i|^p \right)^{1/p} + \left( \sum_{i=0}^{+\infty} |v_i|^p \right)^{1/p} \right] \left( \sum_{i=0}^{+\infty} |u_i + v_i|^{(p-1)p'} \right)^{1/p'}. \end{aligned}$$

Graphiquement, cela signifie que la fonction est en dessous de la corde reliant deux points. Si  $f$  est  $C^1$ , la convexité est équivalente au fait que  $f'$  est croissante. Si  $f$  est  $C^2$ , la convexité est équivalente au fait que  $f'' \geq 0$ .

Une fonction  $f$  est concave si  $-f$  est convexe. Ainsi,

$$\forall (x, y) \in I^2, \quad \forall \theta \in [0, 1], \quad f((1 - \theta)x + \theta y) \geq (1 - \theta)f(x) + \theta f(y).$$

Si  $f$  est  $C^1$ , la concavité est équivalente au fait que  $f'$  est décroissante. Si  $f$  est  $C^2$ , la concavité est équivalente au fait que  $f'' \leq 0$ .

Un calcul simple montre que  $p' = p/(p-1)$ . Ainsi,

$$\sum_{i=0}^{+\infty} |u_i + v_i|^p \leq \left[ \left( \sum_{i=0}^{+\infty} |u_i|^p \right)^{1/p} + \left( \sum_{i=0}^{+\infty} |v_i|^p \right)^{1/p} \right] \left( \sum_{i=0}^{+\infty} |u_i + v_i|^p \right)^{1-1/p},$$

ce qui permet de conclure.

Nous introduirons d'autres espaces vectoriels normés de dimension infinie, plus intéressants pour l'analyse des problèmes posés en sciences de l'ingénieur (équations aux dérivées partielles, analyse harmonique, ...) lorsque nous disposerons à la fois des notions d'intégrale de Lebesgue et de distribution.

### 1.1.2 Topologie des espaces vectoriels normés

Cette section rappelle brièvement diverses notions d'analyse vues en premier cycle universitaire.

**Définition 1.2.** Soit  $V$  un  $\mathbb{K}$ -ev normé équipé d'une norme  $\|\cdot\|_V$ . On dit qu'un ensemble  $O \subset V$  est ouvert dans  $V$  si

$$\forall x \in O, \quad \exists r > 0 \text{ tel que } B_x(r) \subset O,$$

où  $B_x(r) = \{y \in V, \|y - x\|_V < r\}$  est la boule ouverte de centre  $x$  et de rayon  $r$ . On dit qu'un ensemble  $F \subset V$  est fermé dans  $V$  si l'ensemble  $V \setminus F$  est ouvert dans  $V$ .

L'ensemble des ouverts de  $V$  selon la définition ci-dessus est appelé la topologie de  $V$  induite par la norme  $\|\cdot\|_V$ . Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on dira simplement qu'un ensemble est ouvert ou fermé, sans préciser "dans  $V$ ".

**Proposition 1.1.** Soit  $V$  un  $\mathbb{K}$ -ev normé équipé d'une norme  $\|\cdot\|_V$ . Soit  $F$  un fermé dans  $V$  et soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  une suite d'éléments de  $F$ . Alors, si  $(u_n)_{n \geq 0}$  converge dans  $V$ , sa limite est dans  $F$ .

*Preuve.* Le complémentaire de  $F$  étant ouvert, la limite de la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  ne peut s'y trouver.  $\square$

**Définition 1.3.** Soit  $V$  un  $\mathbb{K}$ -ev normé équipé d'une norme  $\|\cdot\|_V$  et  $A$  un ensemble inclus dans  $V$ . On définit l'adhérence de l'ensemble  $A$  dans  $V$  et on note  $\overline{A}^V$  l'ensemble des points de  $V$  qui sont limites de points de  $A$ .

**Proposition 1.2.** L'ensemble  $F$  est fermé dans  $V$  si et seulement si  $F = \overline{F}^V$ .

**Exercice 1.5.** Ecrire la preuve de la Proposition 1.2.

**Correction.** Supposons pour commencer que  $F$  est fermé. On a donc  $\overline{F}^V \subset F$  car la limite de toute suite de  $F$  reste dans  $F$  (voir la Proposition 1.1). Comme par ailleurs on a évidemment  $F \subset \overline{F}^V$ , on conclut que  $F = \overline{F}^V$ .

Supposons ensuite que  $F = \overline{F}^V$ . Montrons que  $V \setminus F$  est ouvert. Pour cela, on considère  $x \in V \setminus F$ . On procède par contradiction : s'il n'existe pas  $r > 0$  tel que  $B_x(r) \cap F = \emptyset$ , alors on peut trouver une suite  $x_n \in F$  telle que  $\|x_n - x\|_V \rightarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ . Ceci montre que  $x \in \overline{F}^V$ , ce qui est en contradiction avec  $x \in V \setminus F$ . Il existe donc  $r > 0$  tel que  $B_x(r) \cap F = \emptyset$ , et ainsi  $B_x(r) \subset V \setminus F$ , ce qui montre que  $V \setminus F$  est ouvert.

**Définition 1.4.** On dit qu'un ensemble  $A \subset V$  est dense dans  $V$  si  $\overline{A}^V = V$ .

### 1.1.3 Équivalence de normes

Sur un espace vectoriel, on peut considérer plusieurs normes et il est légitime de se demander si les topologies induites sont les mêmes. Pour cela, nous introduisons la notion d'équivalence de normes.

**Définition 1.5.** Soit  $V$  un  $\mathbb{K}$ -ev. On dit que deux normes  $\|\cdot\|_{V,1}$  et  $\|\cdot\|_{V,2}$  sont équivalentes sur  $V$  s'il existe deux constantes  $c_-, c_+ > 0$  telles que

$$\forall v \in V, \quad c_- \|v\|_{V,2} \leq \|v\|_{V,1} \leq c_+ \|v\|_{V,2}. \quad (1.11)$$

L'importance de la Définition 1.5 provient du fait que si deux normes sont équivalentes, elles induisent la même topologie, au sens suivant.

**Proposition 1.3.** Soit  $V$  un  $\mathbb{K}$ -ev équipé de deux normes équivalentes  $\|\cdot\|_{V,1}$  et  $\|\cdot\|_{V,2}$ . Soit  $O \subset V$ . Alors,  $O$  est ouvert pour  $\|\cdot\|_{V,1}$  si et seulement si  $O$  est ouvert pour  $\|\cdot\|_{V,2}$ .

**Exercice 1.6.** Ecrire la preuve de la Proposition 1.3.

**Proposition 1.4.** Si  $V$  est un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

**Exercice 1.7.** L'objectif de cet exercice est de prouver la Proposition 1.4. Soit  $(e_1, \dots, e_d)$  une base de  $V$ . Pour  $v \in V$ , on note  $(v_1, \dots, v_d)$  les coordonnées de  $v$  dans cette base.

- (1) Vérifier qu'il suffit de montrer que toutes les normes de  $V$  sont équivalentes à la norme  $\|\cdot\|_\infty$  donnée par (1.2) ;
- (2) Soit  $\|\cdot\|_V$  une norme de  $V$ . De l'inégalité triangulaire, déduire qu'il existe une constante  $K > 0$  telle que  $\forall v \in V$ ,  $\|v\|_V \leq K \|v\|_\infty$  ;
- (3) Soit  $B_\infty$  la boule unité (fermée) de  $V$  pour la norme  $\|\cdot\|_\infty$ . Déduire de la question précédente que l'application

$$\begin{aligned} id : (B_\infty, \|\cdot\|_\infty) &\rightarrow (B_\infty, \|\cdot\|_V) \\ v &\mapsto v, \end{aligned}$$

est continue ;

- (4) En utilisant un argument de compacité, montrer qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que  $\forall v \in V$ ,  $\|v\|_\infty \leq C \|v\|_V$ .

**Correction.** (1) Soient deux normes  $\|\cdot\|_{V,1}$  et  $\|\cdot\|_{V,2}$  sur  $V$ , que l'on suppose toutes deux équivalentes à la norme  $\|\cdot\|_\infty$  : il existe  $c_1, c_2 \geq 1$  tels que

$$\frac{1}{c_i} \|v\|_\infty \leq \|v\|_{V,i} \leq c_i \|v\|_\infty \quad (i = 1, 2).$$

On en déduit que  $\|v\|_{V,2} \leq c_2 \|v\|_\infty \leq c_1 c_2 \|v\|_{V,1}$ , ainsi que  $\|v\|_{V,1} \leq c_1 \|v\|_\infty \leq c_1 c_2 \|v\|_{V,2}$ . Ceci montre bien l'équivalence des normes  $\|\cdot\|_{V,1}$  et  $\|\cdot\|_{V,2}$ .

- (2) On écrit  $v = \sum_{i=1}^d v_i e_i$  avec  $(v_1, \dots, v_d) \in \mathbb{K}^d$ . Ainsi,

$$\|v\|_V \leq \sum_{i=1}^d |v_i| \|e_i\|_V \leq \left( \sum_{i=1}^d \|e_i\|_V \right) \|v\|_\infty,$$

ce qui donne le résultat demandé.

- (3) On déduit de la question précédente que  $\|v - w\|_V \leq K \|v - w\|_\infty$ , ce qui donne immédiatement la continuité de l'application introduite.

- (4) On introduit  $S_\infty = \{v \in V \mid \|v\|_\infty = 1\}$ , qui est un ensemble compact de  $(B_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ . L'application introduite à la question précédente atteint donc sa borne inférieure sur  $S_\infty$  : il existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $v_* \in S_\infty$  tels que

$$\alpha = \inf_{v \in S_\infty} \|v\|_V = \|v_*\|_V.$$

Comme  $v_* \neq 0$  (car  $\|v_*\|_\infty = 1$ ), on en déduit que  $\alpha > 0$ . Finalement, pour  $v \neq 0$  quelconque,

$$\left\| \frac{v}{\|v\|_\infty} \right\|_V \geq \alpha,$$

ce qui donne l'inégalité recherchée avec  $C = 1/\alpha$ .

La Proposition 1.4 ne s'étend pas aux espaces vectoriels normés de dimension infinie. Nous présentons quelques contre-exemples.

**Contre-exemple 1.1 (Non-équivalence de normes sur  $C^0$ ).** Sur  $C^0([0, 1])$ , l'application  $f \mapsto \|f\|_{L^1} = \int_0^1 |f(s)| ds$  définit bien une norme (voir Exercice 1.2), mais celle-ci n'est pas équivalente à la norme  $\|\cdot\|_{C^0([0,1])}$ . Plus précisément, on a clairement la majoration  $\|f\|_{L^1} \leq \|f\|_{C^0}$  pour tout  $f \in C^0([0, 1])$ . En revanche, il n'existe pas de constante  $c \in \mathbb{R}_+$  telle que  $\|f\|_{C^0} \leq c \|f\|_{L^1}$ . On peut en effet considérer pour tout  $\varepsilon > 0$ , les fonctions  $f_\varepsilon$  définies par  $f_\varepsilon(t) = 1 - t/\varepsilon$  pour  $t \in [0, \varepsilon]$  et  $f_\varepsilon(t) = 0$  sinon (voir Figure 1.1). Ces fonctions satisfont  $\|f_\varepsilon\|_{C^0} = 1$  alors que  $\|f_\varepsilon\|_{L^1} = \varepsilon/2$ .

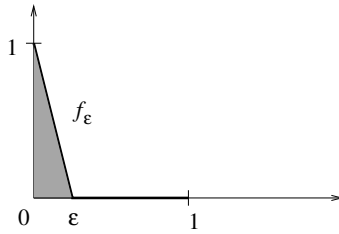


Fig. 1.1. Contre-exemple pour l'équivalence des normes en dimension infinie.

**Contre-exemple 1.2 (Non-équivalence de normes sur  $C^1$ ).** Sur  $C^1([0, 1])$ ,  $\|\cdot\|_{C^0([0,1])}$  définit bien une norme mais qui n'est pas équivalente à la norme  $\|\cdot\|_{C^1([0,1])}$ .

**Exercice 1.8.** Construire un tel contre-exemple.

**Correction.** On peut considérer une suite de fonctions régulières qui converge vers une fonction continue qui n'est pas  $C^1$ . Par exemple, les fonctions  $f_\varepsilon(x) = \sqrt{\varepsilon + x}$  sont telles que  $\|f_\varepsilon\|_{C^0([0,1])} = \sqrt{1 + \varepsilon}$ , alors que  $\|f_\varepsilon\|_{C^1([0,1])} = 1/(2\sqrt{\varepsilon})$ . Il ne peut donc pas exister de constante  $c_+ > 0$  telle que  $\|f\|_{C^1([0,1])} \leq c_+ \|f\|_{C^0([0,1])}$  pour toute fonction  $f \in C^1([0, 1])$ . En revanche, on a bien sûr  $\|f\|_{C^0([0,1])} \leq \|f\|_{C^1([0,1])}$ .

**Contre-exemple 1.3 (Non-équivalence de normes sur  $\ell^1$ ).** Sur  $\ell^1$ , l'application

$$\|\cdot\|_h : u \mapsto \|u\|_h = \sum_{i \geq 0} \frac{|u_i|}{i+1},$$

définit une norme et on a clairement  $\|u\|_h \leq \|u\|_{\ell^1}$  pour tout  $u \in \ell^1$ . En revanche, cette norme n'est pas équivalente à la norme  $\ell^1$ , comme le montre l'exercice suivant.

**Exercice 1.9.** Montrer qu'il n'existe pas de constante  $c > 0$  telle que pour tout  $u \in \ell^1$ , on ait  $\|u\|_{\ell^1} \leq c \|u\|_h$ . On pourra considérer, pour tout entier  $N > 0$ , la suite  $u^N \in \ell^1$  telle que  $u_i^N = 1$  si  $i = N$  et 0 sinon.

**Correction.** Pour la suite indiquée dans l'énoncée, on a  $\|u^N\|_{\ell^1} = 1$ . S'il existait une constante  $c > 0$  telle que  $\|u^N\|_{\ell^1} \leq c \|u^N\|_h$  indépendamment de  $N \geq 1$ , on aurait une inégalité de la forme  $1 \leq c/(N+1)$ , avec  $c$  indépendant de  $N$ , ce qui est absurde.

**Remarque 1.1.** Si  $V$  est un  $\mathbb{K}$ -ev normé et  $F$  un sous-espace de dimension finie, alors  $F$  est nécessairement fermé. Ce n'est plus le cas si  $F$  est de dimension infinie. À titre de contre-exemple, on pourra considérer  $C^1([-1, 1])$  comme sous-espace de  $C^0([-1, 1])$  équipé de la norme  $\|\cdot\|_{C^0}$  et la famille de fonctions  $f_\varepsilon \in C^1([-1, 1])$  définies par (voir Figure 1.2)

$$f_\varepsilon(t) = \begin{cases} |t| & \text{si } |t| \geq \varepsilon, \\ \frac{\varepsilon}{2} \left[ 1 + \left( \frac{t}{\varepsilon} \right)^2 \right] & \text{si } |t| \leq \varepsilon. \end{cases}$$

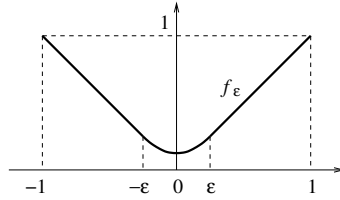


Fig. 1.2. Illustration de la Remarque 1.1.

## 1.2 Espaces de Banach

Cette section introduit la notion de complétude : un espace vectoriel normé est dit complet si toute suite de Cauchy y est convergente. De tels espaces, appelés espaces de Banach, interviendront fréquemment dans la suite de ce cours car ils jouissent de plusieurs propriétés remarquables.

### 1.2.1 Suites de Cauchy

**Définition 1.6.** Soit  $V$  un  $\mathbb{K}$ -ev normé. On dit qu'une suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  d'éléments de  $V$  est de Cauchy si on a la propriété suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \geq 0, \quad \forall n \geq N, \quad \forall p \geq 0, \quad \|u_{n+p} - u_n\|_V \leq \varepsilon. \quad (1.12)$$

Les deux résultats suivants sont des conséquences immédiates de la Définition 1.6.

**Proposition 1.5.** Toute suite convergente est de Cauchy.

**Proposition 1.6.** Toute suite de Cauchy est bornée.

Le résultat suivant montre qu'une suite de Cauchy reste une suite de Cauchy lorsqu'on applique une fonction suffisamment régulière.

**Proposition 1.7.** Soit  $V_1$  et  $V_2$  deux  $\mathbb{K}$ -ev normés et  $(u_n)_{n \geq 0}$  une suite de Cauchy dans  $V_1$ . Soit  $f : V_1 \rightarrow V_2$  une application uniformément continue.<sup>2</sup> Alors, la suite  $(f(u_n))_{n \geq 0}$  est de Cauchy dans  $V_2$ .

**Exercice 1.10.** Prouver ce résultat.

2. On rappelle que cela signifie que pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\eta > 0$  tel que, pour tous  $u, v \in V_1$  vérifiant  $\|u - v\|_{V_1} \leq \eta$ , on a  $\|f(u) - f(v)\| \leq \varepsilon$ .

### 1.2.2 Espaces complets

La réciproque de la Proposition 1.5 n'étant pas vraie d'une façon générale, cela motive la définition suivante.

**Définition 1.7.** Un  $\mathbb{K}$ -ev  $V$  est dit *complet* pour la norme  $\|\cdot\|_V$  si toute suite de Cauchy est convergente dans  $V$ . Un  $\mathbb{K}$ -ev complet pour sa norme est appelé un *espace de Banach*.

Il est important de noter qu'on demande à ce que la suite converge dans l'espace en question (voir les contre-exemples proposés en Section 1.2.4). Le caractère complet d'un espace ne change pas si on modifie la norme par une norme équivalente, ainsi que le montre le résultat suivant.

**Proposition 1.8.** Soit  $V$  un  $\mathbb{K}$ -ev équipé de deux normes équivalentes  $\|\cdot\|_{V,1}$  et  $\|\cdot\|_{V,2}$ . Alors,  $V$  est complet pour la norme  $\|\cdot\|_{V,1}$  si et seulement si il est complet pour la norme  $\|\cdot\|_{V,2}$ .

**Exercice 1.11.** Montrer ce résultat. Noter qu'il suffit de montrer que si  $V$  est complet pour la norme  $\|\cdot\|_{V,1}$ , alors il est complet pour la norme  $\|\cdot\|_{V,2}$ .

**Correction.** Supposons  $V$  complet pour la norme  $\|\cdot\|_{V,1}$ . Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  une suite de Cauchy dans  $V$  pour la norme  $\|\cdot\|_{V,2}$ . De l'inégalité  $\|v\|_{V,1} \leq c_+ \|v\|_{V,2}$ , nous déduisons que  $(u_n)_{n \geq 0}$  est une suite de Cauchy pour la norme  $\|\cdot\|_{V,1}$ . Elle est donc convergente par hypothèse. De l'inégalité  $\|v\|_{V,2} \leq c_- \|v\|_{V,1}$ , nous déduisons qu'elle converge également pour la norme  $\|\cdot\|_{V,2}$ .

L'étude des espaces complets est très simple en dimension finie, puisque nous avons le résultat suivant.

**Proposition 1.9.** Tout  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé de dimension finie est complet.

**Exercice 1.12.** Prouver ce résultat lorsque  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , en admettant que  $\mathbb{R}$  est complet (ce qui est vrai par construction de cet ensemble). Pour ce faire, introduire une suite de Cauchy  $(u_n)_{n \geq 0}$ , et utiliser l'équivalence des normes pour montrer que chacune des composantes  $(u_{n,1}, \dots, u_{n,d})$  de  $u_n$  converge dans  $\mathbb{R}$ .

**Correction.** Considérons un  $\mathbb{R}$ -ev de dimension finie  $d$ . Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  une suite de Cauchy dans cet espace. Notons  $(u_{n,1}, \dots, u_{n,d})$  les composantes de  $u_n$  dans une base donnée. Toutes les normes étant équivalentes en dimension finie d'après la Proposition 1.4, nous pouvons utiliser la norme  $\|\cdot\|_\infty$  et en déduire que pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq d$ , les  $(u_{n,i})_{n \geq 0}$  sont des suites de Cauchy dans  $\mathbb{R}$ . Ces suites sont donc convergentes, et on note  $l_i$  leur limite pour  $1 \leq i \leq d$ . On voit facilement que  $(u_n)_{n \geq 0}$  converge vers  $(l_1, \dots, l_d)$ .

Le cas d'un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel se traite de manière identique grâce au fait que  $\mathbb{C}$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 2.

**Remarque 1.2.** Du fait du résultat précédent, l'expression "espace de Banach" ne s'emploie guère en dimension finie. Elle est plutôt réservée à la dimension infinie où la notion de complétude est plus riche.

**Proposition 1.10.** Soit  $V$  un espace de Banach et  $F$  un sous-espace vectoriel fermé de  $V$ . Alors,  $F$  équipé de la norme induite par  $V$  est un espace de Banach.

**Remarque 1.3.** Notons une fois de plus (voir Remarque 1.1) qu'il est très important que  $F$  soit fermé lorsque cet espace est de dimension infinie. Considérons par exemple l'ensemble  $F$  des polynômes pairs dans  $C^0([-1, 1])$ , qui sont en fait des combinaisons linéaires finies des constantes et des monômes  $x^{2n}$  pour  $n \geq 1$ . Alors  $F$  équipé de la norme  $C^0$  n'est pas un espace de Banach car il n'est pas complet. Sa complétion (ou fermeture) est l'ensemble des fonctions continues paires (i.e. telles que  $f(x) = f(-x)$  pour tout  $x \in [-1, 1]$ ).

**Exercice 1.13.** Prouver la Proposition 1.10.

**Correction.** Toute suite de Cauchy dans  $F$  est de Cauchy dans  $V$  donc convergente dans  $V$ . Comme  $F$  est fermé, la limite est dans  $F$ .

Nous donnons dans les prochaines sous-sections des exemples et contre-exemples d'espaces de Banach.

### 1.2.3 Exemples d'espaces de Banach

**Proposition 1.11.** Pour  $1 \leq p \leq \infty$ , l'espace  $\ell^p$  équipé de la norme  $\|\cdot\|_{\ell^p}$  est un espace de Banach.

**Exercice 1.14.** Prouvons ce résultat lorsque  $1 \leq p < \infty$  en montrant que toute suite de Cauchy est convergente (nous savons déjà que  $\ell^p$  est un espace vectoriel normé par l'Exercice 1.4).

- (1) Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  une suite de Cauchy dans  $\ell^p$ . On note  $u_{n,m}$  la  $m$ -ième composante de l'élément  $u_n \in \ell^p$ . Montrer que pour tout  $m \geq 0$ , la suite  $(u_{n,m})_{n \geq 0}$  est de Cauchy dans  $\mathbb{K}$ , et converge donc vers une limite notée  $l_m$  ;
- (2) On note  $l = (l_m)_{m \geq 0}$  la suite de terme général  $l_m$ . Montrer que  $l \in \ell^p$ . Indication : montrer pour commencer qu'il existe une constante  $C$  telle que pour tout  $n \geq 0$  et pour tout  $I \geq 0$ ,

$$\left( \sum_{i=0}^I |u_{n,i}|^p \right)^{1/p} \leq \|u_n\|_{\ell^p} \leq C;$$

- (3) Montrer que  $(u_n)_{n \geq 0}$  converge vers  $l$  dans  $\ell^p$ . Indication : en se donnant  $\varepsilon > 0$ , montrer qu'il existe  $N \geq 0$  tel que pour  $n \geq N$  et  $q \geq 0$  et pour tout  $I \geq 0$ , on ait

$$\left( \sum_{i=0}^I |u_{n+q,i} - u_{n,i}|^p \right)^{1/p} \leq \|u_{n+q} - u_n\|_{\ell^p} \leq \varepsilon.$$

**Correction.** (1) L'inégalité  $|u_{n+p,m} - u_{n,m}| \leq \|u_{n+p} - u_n\|_{\ell^p}$  montre que la suite  $(u_{n,m})_{n \geq 0}$  est de Cauchy dans  $\mathbb{K}$ , qui est complet. On en déduit donc l'existence d'une limite  $l_m$ .

- (2) On a bien sûr

$$\sum_{i=0}^I |u_{n,i}|^p \leq \sum_{i=0}^{+\infty} |u_{n,i}|^p = \|u_n\|_{\ell^p}^p.$$

Par ailleurs, la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  est de Cauchy, donc bornée par la Proposition 1.6. Il existe donc  $C > 0$  tel que  $\|u_n\|_{\ell^p} \leq C$ . On en déduit la majoration proposée. En faisant tendre  $n$  vers l'infini pour  $I$  fixé, on en déduit que

$$\sum_{i=0}^I |l_i|^p \leq C.$$

On peut ensuite considérer la limite  $I \rightarrow +\infty$ , et en déduire que  $l \in \ell^p$ .

- (3) Soit  $\varepsilon > 0$  fixé. Comme  $(u_n)_{n \geq 0}$  est de Cauchy, il existe  $N \geq 0$  tel que pour  $n \geq N$  et  $q \geq 0$ , on ait  $\|u_{n+q} - u_n\|_{\ell^p} \leq \varepsilon$ . En particulier, pour tout  $I \in \mathbb{N}$ ,

$$\left( \sum_{i=0}^I |u_{n+q,i} - u_{n,i}|^p \right)^{1/p} \leq \|u_{n+q} - u_n\|_{\ell^p} \leq \varepsilon.$$



On peut alors faire tendre  $q$  vers l'infini, et en déduire

$$\left( \sum_{i=0}^I |u_{n,i} - l_i|^p \right)^{1/p} \leq \varepsilon.$$

Comme  $I$  est arbitraire, on peut prendre la limite  $I \rightarrow +\infty$ , ce qui conduit à  $\|u_n - l\|_{\ell^p} \leq \varepsilon$  pour tout  $n \geq N$ . Ceci montre bien la convergence de la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  vers  $l$ .

**Exercice 1.15.** Reprendre l'Exercice 1.14 dans le cas  $p = \infty$ .

**Proposition 1.12.** L'espace  $C^0([a, b])$  équipé de la norme  $\|\cdot\|_{C^0([a, b])}$  est un espace de Banach.

**Exercice 1.16.** Nous allons prouver ce résultat en montrant que toute suite de Cauchy  $(u_n)_{n \geq 0}$  de  $C^0([a, b])$  converge dans  $C^0([a, b])$ . Pour ce faire,

(1) Montrer que pour tout  $x \in [a, b]$ , la suite  $(u_n(x))_{n \geq 0}$  est de Cauchy dans  $\mathbb{R}$ , donc convergente. On note  $u(x)$  sa limite.

(2) Montrer que  $u$  est continue en utilisant l'inégalité triangulaire

$$\forall x, y \in [a, b], \quad |u(y) - u(x)| \leq |u(y) - u_N(y)| + |u_N(y) - u_N(x)| + |u_N(x) - u(x)|,$$

et la continuité de  $u_N$ .

(3) Montrer que  $(u_n)_{n \geq 0}$  converge vers  $u$  dans  $C^0([a, b])$ .

**Correction.** (1) Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  une suite de Cauchy dans  $C^0([a, b])$ , i.e.

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \geq 0, \quad \forall n \geq N, \quad \forall p \geq 0, \quad \|u_{n+p} - u_n\|_{C^0} = \sup_{y \in [a, b]} |u_{n+p}(y) - u_n(y)| \leq \varepsilon. \quad (1.13)$$

En particulier, pour  $x \in [a, b]$  donné,

$$\forall n \geq N, \quad \forall p \geq 0, \quad |u_{n+p}(x) - u_n(x)| \leq \varepsilon.$$

Ceci montre que  $(u_n(x))_{n \geq 0}$  est de Cauchy dans  $\mathbb{R}$  et converge donc vers une limite notée  $u(x)$ .

(2) Montrons que  $u$  est une fonction continue sur  $[a, b]$ . En faisant tendre  $p$  vers l'infini dans (1.13), on obtient

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \geq 0, \quad \forall n \geq N, \quad \sup_{x \in [a, b]} |u(x) - u_n(x)| \leq \varepsilon. \quad (1.14)$$

En particulier, il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que

$$\sup_{z \in [a, b]} |u(z) - u_N(z)| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Soit alors  $x \in [a, b]$  et  $\varepsilon > 0$ . La fonction  $u_N$  étant continue, il existe  $\eta > 0$  tel que  $|u_N(y) - u_N(x)| \leq \varepsilon/3$  si  $|x - y| \leq \eta$ . L'inégalité triangulaire permet de conclure : si  $|x - y| \leq \eta$ , on a

$$|u(y) - u(x)| \leq |u(y) - u_N(y)| + |u_N(y) - u_N(x)| + |u_N(x) - u(x)| \leq \varepsilon.$$

Cela signifie que  $u \in C^0([a, b])$ .

(3) Le résultat se lit immédiatement sur (1.14). La raison pour laquelle on commence par montrer que  $u$  est continue avant d'écrire cette convergence est qu'il est préférable de vérifier que la limite candidate est dans le bon espace de Banach avant de se demander si la convergence a lieu – encore que dans ce cas précis, la distinction n'est pas si claire que cela !

**Exercice 1.17.** L'objectif de cet exercice est de généraliser la Proposition 1.12 dans le cas où l'espace d'arrivée est un espace de Banach plutôt que  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Soit  $E$  un espace de Banach. On note  $F = C^0([a, b]; E)$  l'espace vectoriel des fonctions définies et continues sur  $[a, b]$  à valeurs dans  $E$ . On considère sur  $F$  l'application  $\|\cdot\|_F : F \rightarrow \mathbb{R}$  qui à  $f \in F$  associe  $\|f\|_F = \max_{t \in [a, b]} \|f(t)\|_E$ .

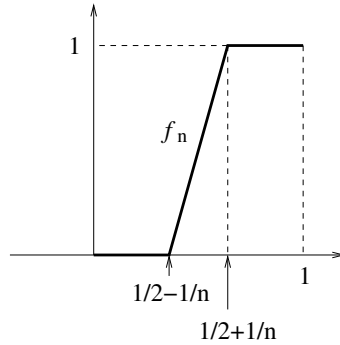
- (1) Vérifier que  $\|\cdot\|_F$  définit bien une norme sur  $F$ .
- (2) En reprenant la preuve de la Proposition 1.12, montrer que  $F$  équipé de la norme  $\|\cdot\|_F$  est un espace de Banach.

### 1.2.4 Contre-exemples

**Contre-exemple 1.4.** L'espace  $C^0([0, 1])$  équipé de la norme  $\|f\|_{L^1} = \int_0^1 |f(s)| ds$  n'est pas un espace de Banach. En effet, considérons la suite de fonctions  $(f_n)_{n \geq 1}$  définie par (voir Figure 1.3)

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \\ \frac{n}{2} \left( t - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \right) & \text{si } \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \leq t \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{n}, \\ 1 & \text{si } \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leq t \leq 1. \end{cases} \quad (1.15)$$

La suite  $(f_n)_{n \geq 1}$  converge en norme  $\|\cdot\|_{L^1}$  vers la fonction  $f_*$  qui vaut 0 si  $0 \leq t \leq 1/2$  et 1 sinon. Elle est donc de Cauchy pour cette norme. Cependant, la fonction  $f_*$  n'appartient pas à  $C^0([0, 1])$ .



**Fig. 1.3.** Graphe de la fonction  $f_n$  définie en (1.15).

**Exercice 1.18.** Soit un réel  $p$  avec  $1 < p < \infty$ . Montrer par un contre-exemple que  $C^0([0, 1])$  équipé de la norme

$$\|f\|_{L^p} = \left( \int_0^1 |f(s)|^p ds \right)^{1/p}$$

n'est pas un espace de Banach.

### 1.2.5 Séries normalement convergentes

Un des intérêts des espaces de Banach est que l'étude de la convergence des séries peut se faire de façon particulièrement simple en étudiant leur convergence normale.

**Définition 1.8.** Soit  $V$  un espace vectoriel normé. Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  une suite d'éléments de  $V$ . On dit que la série de terme général  $u_n$  est normalement convergente si la série  $\sum_{n \geq 0} \|u_n\|_V$  est convergente.

**Théorème 1.1.** *Un espace vectoriel normé  $V$  est un espace de Banach si et seulement si toute série normalement convergente est convergente dans  $V$ .*

**Exercice 1.19.** *Cet exercice a pour objectif de prouver le Théorème 1.1.*

- (1) Montrer qu'une série normalement convergente  $S_n = \sum_{m=0}^n u_m$  est de Cauchy donc converge.  
 (2) Pour la réciproque, on considère une suite de Cauchy  $(u_n)_{n \geq 0}$ . Justifier qu'on peut extraire une suite  $v_n = u_{\varphi(n)}$  telle que

$$\|v_{n+1} - v_n\|_V \leq \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Montrer que  $(v_n)_{n \geq 0}$  converge dans  $V$ . En déduire que  $(u_n)_{n \geq 0}$  converge dans  $V$ .

**Correction.** Supposons que  $V$  est un espace de Banach.

- (1) On constate que  $S_n$  est une suite de Cauchy puisque

$$\|S_{n+p} - S_n\|_V \leq \|u_{n+1}\|_V + \dots + \|u_{n+p}\|_V \leq \sum_{m \geq n+1} \|u_m\|_V \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

L'espace  $V$  étant complet,  $S_n$  est convergente.

- (2) Réciproquement, supposons que toute série normalement convergente soit convergente. Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  une suite de Cauchy. Comme la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  est de Cauchy, il existe  $N_0 \in \mathbb{N}$  tel que

$$\forall p \geq 1, \quad \|u_{N_0+p} - u_{N_0}\|_V \leq \frac{1}{2}. \quad (1.16)$$

On considère ensuite  $N_2 > N_1 > N_0$  tels que

$$\forall q, r \geq 1, \quad \|u_{N_1+q} - u_{N_1}\|_V \leq \frac{1}{4}, \quad \|u_{N_2+r} - u_{N_2}\|_V \leq \frac{1}{8}. \quad (1.17)$$

On choisit  $p = N_1 - N_0$  dans (1.16) et  $q = N_2 - N_1$  dans (1.17), et on introduit  $v_0 = u_{N_0}$ ,  $v_1 = u_{N_1}$  et  $v_2 = u_{N_2}$ . En procédant par récurrence, on extrait une sous-suite  $v_n = u_{\varphi(n)}$  telle que

$$\|v_{n+1} - v_n\|_V \leq \frac{1}{2^{n+1}}.$$

La série de terme général  $v_{n+1} - v_n$  est donc normalement convergente. Comme

$$\mathcal{S}_n = \sum_{m=0}^n (v_{m+1} - v_m) = v_{n+1} - v_0,$$

nous en déduisons que la suite extraite  $(v_n)_{n \geq 0}$  est convergente.

Comme  $(u_n)_{n \geq 0}$  est une suite de Cauchy, il résulte de (1.12) que toute la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  est convergente. Pour prouver ce point, on note  $v^*$  la limite de la suite  $(v_n)_{n \geq 0}$ . Considérons  $\varepsilon > 0$ . Il existe  $K \geq 1$  tel que  $\|v_k - v^*\|_V \leq \varepsilon/2$  lorsque  $k \geq K$ . Par ailleurs, il existe  $N \geq 1$  tel que  $\|u_{n+p} - u_n\|_V \leq \varepsilon/2$  lorsque  $n \geq N$  et  $p \geq 0$ . En rappelant que  $v_k = u_{\varphi(k)}$ , on a par ailleurs

$$\|u_n - v^*\|_V \leq \|u_n - u_{\varphi(\ell)}\|_V + \|v_\ell - v^*\|_V.$$

Pour  $\ell \geq K$ , le choix de  $K$  assure que le second terme est plus petit que  $\varepsilon/2$ . Lorsqu'en plus  $\ell$  est tel que  $\varphi(\ell) \geq N$ , le premier terme est également plus petit que  $\varepsilon/2$  dès que  $n \geq N$ . Ainsi,

$$\forall n \geq N, \quad \|u_n - v^*\|_V \leq \varepsilon,$$

ce qui montre la convergence de  $(u_n)_{n \geq 0}$  vers  $v^*$ .

A titre d'application, on peut considérer la situation suivante : une suite de fonctions continues  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , normalement convergente pour la norme  $\|\cdot\|_{C^0}$ , converge uniformément, donc simplement/ponctuellement.

## Espaces de Hilbert

---

<b>2.1 Définitions et premières propriétés</b>	<b>17</b>
2.1.1 Espaces euclidiens et hermitiens	17
2.1.2 Inégalité de Cauchy-Schwarz	18
2.1.3 Espaces de Hilbert	19
<b>2.2 Théorème de projection orthogonale</b>	<b>19</b>
<b>2.3 Bases hilbertiennes</b>	<b>23</b>

---

Les espaces de Hilbert jouent un rôle fondamental en analyse car ils fournissent un cadre mathématique général pour “faire de la géométrie en dimension infinie”. Dans ce chapitre, ces considérations seront illustrées par plusieurs résultats importants, notamment le théorème de projection orthogonale, le théorème de Riesz et la notion de base hilbertienne.

### 2.1 Définitions et premières propriétés

Dans cette section, nous introduisons la notion de produit scalaire et celle d’espace de Hilbert. Pour plus de clarté, nous distinguons les espaces vectoriels réels et complexes.

#### 2.1.1 Espaces euclidiens et hermitiens

**Définition 2.1 (Espaces euclidiens).** Soit  $V$  un  $\mathbb{R}$ -ev. Un produit scalaire sur  $V$  est une application bilinéaire sur  $V$ , notée  $(\cdot, \cdot)_V : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ , satisfaisant les propriétés suivantes :

- (i) symétrie :  $\forall (v, w) \in V \times V, (v, w)_V = (w, v)_V$  ;
- (ii) positivité :  $\forall v \in V, (v, v)_V \geq 0$  ;
- (iii)  $(v, v)_V = 0 \iff v = 0$ .

Un  $\mathbb{R}$ -ev équipé d’un produit scalaire est appelé un espace euclidien.

Pour les espaces vectoriels complexes, il est utile de rappeler la notion de sesquilinearité à gauche. On dit qu’une application bilinéaire est sesquilinéaire à gauche et linéaire à droite sur  $V$  si

$$\forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2, \forall (v_1, v_2, w) \in V^3, \quad \begin{cases} (\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, w)_V = \bar{\lambda}_1 (v_1, w)_V + \bar{\lambda}_2 (v_2, w)_V, \\ (w, \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2)_V = \lambda_1 (w, v_1)_V + \lambda_2 (w, v_2)_V. \end{cases}$$

La convention que l’on prend ici pour le produit scalaire est quelque peu arbitraire. Elle est toutefois motivée par le fait que l’on souhaite que l’application  $v \mapsto (u, v)_V$  soit une forme linéaire continue (voir Théorème 4.1).

**Définition 2.2 (Espaces hermitiens).** Soit  $V$  un  $\mathbb{C}$ -ev. Un produit scalaire sur  $V$  est une application sesquilinéaire à gauche et linéaire à droite sur  $V$ , notée  $(\cdot, \cdot)_V : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ , possédant les propriétés suivantes :

- (i) hermiticité :  $\forall (v, w) \in V \times V, (v, w)_V = \overline{(w, v)_V}$  ;
- (ii) positivité :  $\forall v \in V, (v, v)_V \geq 0$  ;
- (iii)  $(v, v)_V = 0 \iff v = 0$ .

Un  $\mathbb{C}$ -ev équipé d'un produit scalaire est appelé un espace hermitien.

### 2.1.2 Inégalité de Cauchy-Schwarz

**Proposition 2.1.** Soit  $V$  un  $\mathbb{K}$ -ev et  $(\cdot, \cdot)_V$  un produit scalaire sur  $V$ . L'application  $\|\cdot\|_V : V \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\forall v \in V, \quad \|v\|_V = \sqrt{(v, v)_V}, \quad (2.1)$$

est une norme sur  $V$  appelée norme induite par le produit scalaire. De plus, on a l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\forall v, w \in V, \quad |(v, w)_V| \leq \|v\|_V \|w\|_V. \quad (2.2)$$

**Exercice 2.1.** L'objet de cet exercice est de prouver la Proposition 2.1 pour  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  (le cas  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  se traite de façon analogue). On se limite au cas où  $w \neq 0$  sinon le résultat est trivial.

- (1) Montrer (2.2) en développant  $\left\|v - \frac{(v, w)_V}{\|w\|_V^2} w\right\|_V^2$ . Dans quel cas a-t-on égalité ?
- (2) Vérifier que l'application  $\|\cdot\|_V$  définie par (2.1) est bien une norme. Pour l'inégalité triangulaire, on majorera  $\|v + w\|_V^2$  en utilisant (2.2).

**Correction.** (1) Soit  $(v, w) \in V \times V$ . Supposons  $w \neq 0$  (sinon, l'inégalité (2.2) est triviale). On note tout d'abord que

$$\|v\|_V^2 - \frac{|(v, w)_V|^2}{\|w\|_V^2} = \left\|v - \frac{(v, w)_V}{\|w\|_V^2} w\right\|_V^2 \geq 0.$$

Ceci montre l'inégalité (2.2). De plus, il est clair qu'il y a égalité si et seulement si le second terme est nul, i.e. si et seulement si  $v$  et  $w$  sont colinéaires.

- (2) Les assertions (i) et (ii) de la Définition 1.1 résultent, respectivement, de l'assertion (iii) de la Définition 2.1 et de la bilinéarité (ou sesquilinéarité) du produit scalaire. Enfin, l'inégalité triangulaire se déduit de l'inégalité de Cauchy-Schwarz : pour tout  $(v, w) \in V \times V$ ,

$$\begin{aligned} \|v + w\|_V^2 &= \|v\|_V^2 + 2(v, w)_V + \|w\|_V^2 \\ &\leq \|v\|_V^2 + 2|(v, w)_V| + \|w\|_V^2 \\ &\leq \|v\|_V^2 + 2\|v\|_V \|w\|_V + \|w\|_V^2 = (\|v\|_V + \|w\|_V)^2, \end{aligned}$$

ce qui complète la preuve.

**Remarque 2.1 (Cas  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ).** C'est un bon exercice que d'adapter la preuve ci-dessus au cadre hermitien. Il faut par exemple écrire  $\|v + w\|_V^2 = \|v\|_V^2 + 2 \operatorname{Re} [(v, w)_V] + \|w\|_V^2$  dans ce cas.

### 2.1.3 Espaces de Hilbert

**Définition 2.3.** Un espace de Hilbert est un espace euclidien ou hermitien complet pour la norme induite par le produit scalaire.

**Exemple 2.1 (Dimension finie).** Soit un entier  $d \geq 1$ . On munit  $\mathbb{R}^d$  d'une structure hilbertienne en considérant le produit scalaire euclidien

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^d, \quad (x, y)_{\mathbb{R}^d} = \sum_{i=1}^d x_i y_i.$$

De façon analogue,  $\mathbb{C}^d$  est muni de la structure hilbertienne définie par le produit scalaire canonique

$$\forall x, y \in \mathbb{C}^d, \quad (x, y)_{\mathbb{C}^d} = \sum_{i=1}^d \overline{x_i} y_i.$$

**Exemple 2.2 (Dimension infinie).** On munit l'espace de Banach  $\ell^2$  des suites réelles de carré sommable d'une structure hilbertienne en considérant le produit scalaire

$$\forall u, v \in \ell^2, \quad (u, v)_{\ell^2} = \sum_{i \geq 0} u_i v_i.$$

Lorsque les suites considérées sont complexes, le produit scalaire est

$$\forall u, v \in \ell^2, \quad (u, v)_{\ell^2} = \sum_{i \geq 0} \overline{u_i} v_i.$$

**Exercice 2.2.** Vérifier que  $\ell^2$  muni du produit scalaire ci-dessus est bien un espace de Hilbert.

**Correction.** Le fait que  $\ell^2$  définisse un produit scalaire est immédiat (la propriété (iii) ayant déjà été démontrée à l'Exercice 1.4). La complétude de  $\ell^2$  a quant à elle été prouvée dans l'Exercice 1.14.

Le résultat suivant se prouve comme la Proposition 1.10.

**Proposition 2.2.** Soit  $V$  un espace de Hilbert et  $F$  un sous-espace vectoriel fermé de  $V$ . Alors,  $F$  équipé du produit scalaire induit par  $V$  est un espace de Hilbert.

## 2.2 Théorème de projection orthogonale

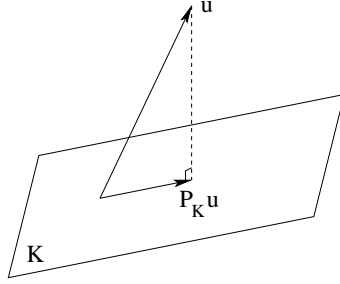
**Théorème 2.1.** Soit  $V$  un espace de Hilbert et  $K$  un sous-espace vectoriel fermé de  $V$ . Pour tout  $u \in V$ , il existe un unique  $v = P_K u \in K$ , appelé projection orthogonale de  $u$  sur  $K$  (voir Figure 2.1), tel que

$$\|P_K u - u\|_V = \inf_{w \in K} \|w - u\|_V. \quad (2.3)$$

L'élément  $P_K u$  est caractérisé par

$$P_K u \in K \quad \text{et} \quad \forall w \in K, \quad (P_K u - u, w)_V = 0. \quad (2.4)$$

Insistons sur le fait que la caractérisation (2.4) est souvent celle qui est la plus utile en pratique. Dans certains cas, elle peut même permettre de calculer  $P_K u$ . Lorsque  $K$  est de dimension finie  $n$ , (2.4) peut s'écrire comme un système de  $n$  équations à  $n$  inconnues.



**Fig. 2.1.** Illustration du théorème de projection orthogonale.

**Exemple 2.3.** Soit  $K$  le sous-espace vectoriel fermé de  $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$  engendré par toutes les suites dont le premier terme est nul et on note  $P_K$  la projection orthogonale de  $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$  sur  $K$ . On vérifie facilement que pour  $u \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ , on a  $P_K u = v$  avec  $v_0 = 0$  et  $v_i = u_i$  pour  $i \geq 1$ .

**Exercice 2.3.** L'objectif de cet exercice est de prouver le Théorème 2.1 dans le cas  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ . On introduit pour ce faire une suite minimisante  $(v_n)_{n \geq 0}$ , i.e., une suite d'éléments  $v_n \in K$  telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n - u\|_V = \inf_{w \in K} \|w - u\|_V.$$

On souhaite prouver que cette suite converge vers la projection orthogonale de  $u$  sur  $K$ .

(1) En développant  $\|s \pm t\|_V^2$ , montrer la formule de la médiane

$$\forall s, t \in V, \quad \frac{1}{2}\|s + t\|_V^2 + \frac{1}{2}\|s - t\|_V^2 = \|s\|_V^2 + \|t\|_V^2.$$

(2) Montrer que  $(v_n)_{n \geq 0}$  est de Cauchy en appliquant la formule de la médiane à  $s = v_n - u$  et  $t = v_{n+p} - u$ .

(3) Montrer qu'il existe une solution de (2.3).

(4) Montrer l'unicité de la solution en s'appuyant sur la formule de la médiane.

(5) Il reste à prouver l'équivalence entre (2.3) et (2.4). Montrer pour commencer que (2.3) entraîne (2.4) en étudiant la fonction  $\varphi(t) = \|P_K u + tw - u\|_V^2$  pour  $w \in K$  et  $t \in \mathbb{R}$  ( $P_K u$  étant la solution de (2.3)).

(6) Montrer finalement que (2.4) entraîne (2.3) en écrivant  $\|u - w\|_V^2 = \|(u - P_K u) + (P_K u - w)\|_V^2$ .

**Correction.** (1) En notant que  $\|s \pm t\|_V^2 = \|s\|_V^2 \pm 2(s, t)_V + \|t\|_V^2$ , on obtient directement la formule demandée.

(2) Comme  $(v_n + v_{n+p})/2 \in K$ , on a

$$\left\| \frac{v_{n+p} + v_n}{2} - u \right\|_V^2 \geq \left[ \inf_{w \in K} \|w - u\|_V \right]^2.$$

Ainsi, par la formule de la médiane,

$$\begin{aligned} \|v_{n+p} - v_n\|_V^2 &= 2 \left( \|v_{n+p} - u\|_V^2 + \|v_n - u\|_V^2 - 2 \left\| \frac{v_{n+p} + v_n}{2} - u \right\|_V^2 \right) \\ &\leq 2 \left( \|v_{n+p} - u\|_V^2 + \|v_n - u\|_V^2 - 2 \left[ \inf_{w \in K} \|w - u\|_V \right]^2 \right), \end{aligned} \quad (2.5)$$

d'où on déduit aisément que la suite  $(v_n)$  est de Cauchy. Pour préciser ce point, fixons  $\varepsilon > 0$ . Il existe  $N_\varepsilon > 0$  tel que



$$\forall m \geq N_\varepsilon, \quad \left[ \inf_{w \in K} \|w - u\|_V \right]^2 \leq \|v_m - u\|_V^2 \leq \left[ \inf_{w \in K} \|w - u\|_V \right]^2 + \frac{\varepsilon}{4}.$$

On voit alors que si  $n \geq N_\varepsilon$  et  $p \geq 0$ , on a  $\|v_{n+p} - v_n\|_V^2 \leq \varepsilon$  par (2.5).

- (3) L'espace  $V$  étant complet,  $v_n$  converge vers un certain élément  $v \in V$ . Comme  $K$  est fermé, on a en fait  $v \in K$ . De plus,

$$\|v - u\|_V = \inf_{w \in K} \|w - u\|_V$$

par continuité de la norme sur  $V$ . Ceci montre l'existence d'une solution pour (2.3).

- (4) L'unicité de la solution de (2.3) découle directement de la formule de la médiane : si  $v_1$  et  $v_2$  sont deux solutions de (2.3), en appliquant la formule de la médiane avec  $s = u - v_1$  et  $t = u - v_2$ , on obtient

$$\frac{1}{2} \|v_1 - v_2\|_V^2 \leq \left[ \inf_{w \in K} \|w - u\|_V \right]^2 - \left\| u - \frac{v_1 + v_2}{2} \right\|_V^2 \leq 0,$$

ce qui implique  $v_1 = v_2$ .

- (5) La fonction  $\varphi(t) = \|P_K u + tw - u\|_V^2 = \|P_K u - u\|_V^2 + 2t(P_K u - u, w)_V + t^2 \|w\|_V^2$  est un polynôme de degré 2 en  $t \in \mathbb{R}$ . De plus,  $\varphi$  est minimale en  $t = 0$  puisque  $P_K u + tw \in K$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . Par conséquent, on a  $\varphi'(0) = 0$ , i.e.,  $(P_K u - u, w)_V = 0$ . L'élément  $w$  étant arbitraire, nous avons prouvé que  $P_K u$  satisfaisait la caractérisation (2.4).
- (6) Si  $P_K u$  est solution de (2.4), pour tout  $w \in K$ , on a

$$\begin{aligned} \|u - w\|_V^2 &= \|(u - P_K u) + (P_K u - w)\|_V^2 \\ &= \|u - P_K u\|_V^2 + 2(u - P_K u, P_K u - w)_V + \|P_K u - w\|_V^2 \\ &= \|u - P_K u\|_V^2 + \|P_K u - w\|_V^2 \\ &\geq \|u - P_K u\|_V^2, \end{aligned}$$

puisque  $P_K u - w \in K$  si bien que  $(u - P_K u, P_K u - w)_V = 0$  par hypothèse. On a donc bien montré que  $P_K u$  était solution de (2.3).

**Remarque 2.2 (Cas  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ).** C'est une fois de plus un bon exercice que d'étendre la preuve ci-dessus au cadre hermitien. On a par exemple, pour la question (5),  $\operatorname{Re}[(P_K u - u, w)_V] = 0$  pour tout  $w \in K$ . En changeant  $w$  en  $iw$  on en déduit que  $\operatorname{Im}[(P_K u - u, w)_V] = 0$ , et donc finalement  $(P_K u - u, w)_V = 0$ .

**Corollaire 2.1.** Montrer que  $P_K(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha P_K u_1 + \beta P_K u_2$  pour tout  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  et  $u_1, u_2 \in V$ . Montrer également que, si  $K \neq \{0\}$ ,

$$\sup_{u \in V \setminus \{0\}} \frac{\|P_K u\|_V}{\|u\|_V} = 1.$$

On verra, avec les notations du Chapitre 4, que cela s'exprime sous la forme  $P_K \in \mathcal{L}(V, K)$  avec  $\|P_K\|_{\mathcal{L}(V, K)} = 1$  si  $K \neq \{0\}$ . On déduit également immédiatement de ce résultat que, pour tout  $u_1, u_2 \in V$ , on a  $\|P_K u_1 - P_K u_2\|_V \leq \|u_1 - u_2\|_V$ .

**Exercice 2.4.** Prouver le Corollaire 2.1, en utilisant la caractérisation (2.4).

**Correction.** La caractérisation (2.4) montre que, pour tout  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  et  $u_1, u_2 \in V$ , on a

$$\forall w \in K, \quad \left( \alpha u_1 + \beta u_2 - (\alpha P_K u_1 + \beta P_K u_2), w \right)_V = 0,$$

par définition de  $P_K u_1$  et  $P_K u_2$  et par linéarité du produit scalaire. Ceci montre que

$$P_K(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha P_K u_1 + \beta P_K u_2.$$

Par ailleurs, comme  $P_K u \in K$ , nous déduisons de la caractérisation (2.4) que  $(u - P_K u, P_K u)_V = 0$  si bien que

$$\|P_K u\|_V^2 = -\|u - P_K u\|_V^2 + \|u\|_V^2 \leq \|u\|_V^2,$$

ce qui montre que

$$\sup_{u \in V \setminus \{0\}} \frac{\|P_K u\|_V}{\|u\|_V} \leq 1.$$

Enfin, si  $K \neq \{0\}$ , on a  $P_K w = w$  pour tout  $w \in K \setminus \{0\}$ , ce qui montre que l'inégalité précédente est en fait une égalité.

**Exercice 2.5.** On considère dans cet exercice le problème d'approximation d'un nuage de points  $(X_i, Y_i)_{i=1, \dots, N}$  par une droite d'équation  $y = a_1 x + a_0$ . On cherche la meilleure droite au sens des moindres carrés, c'est-à-dire que l'on cherche à résoudre le problème suivant :

$$\inf_{(a_0, a_1) \in \mathbb{R}^2} \left\{ \sum_{i=1}^N \left( Y_i - (a_1 X_i + a_0) \right)^2 \right\}.$$

(1) Montrer que ce problème peut s'écrire sous la forme

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|^2,$$

où  $b \in \mathbb{R}^m$ ,  $A$  est une matrice  $m \times n$  et  $\|\cdot\|$  est la norme euclidienne sur  $\mathbb{R}^m$ . Expliciter  $m, n$ , les vecteurs  $x$  et  $b$  ainsi que la matrice  $A$ .

- (2) En utilisant la projection orthogonale de  $\mathbb{R}^m$  sur l'image de  $A$ , montrer que ce problème admet au moins une solution. On introduira pour ce faire l'espace vectoriel  $K = \{Ax, x \in \mathbb{R}^n\} \subset \mathbb{R}^m$ , qu'on montrera être un ensemble fermé.
- (3) En utilisant la caractérisation (2.4), montrer que toute solution  $x_*$  satisfait les équations normales  $A^T A x_* = A^T b$ .

**Correction.** (1) On considère  $x = (a_1, a_0)$ ;  $A$  la matrice dont la première colonne est le vecteur colonne  $(X_i)_{i=1, \dots, N}$ , et alors que toutes les entrées de la seconde colonne sont 1; et  $b$  le vecteur colonne  $(Y_i)_{i=1, \dots, N}$ . On a  $m = N$  et  $n = 2$ .

(2) L'espace vectoriel  $K$  est de dimension finie donc complet donc fermé. On applique ensuite le Théorème 2.1 en voyant  $b$  comme la projection sur  $K$ .

(3) On utilise la caractérisation (2.4) pour le produit scalaire euclidien sur  $\mathbb{R}^m$ , que l'on note  $(\cdot, \cdot)$  :

$$\forall y \in \mathbb{R}^n, \quad (P_K b - b, Ay) = 0.$$

Il existe un unique élément  $c \in K$  tel que  $P_K b = c$ . Par ailleurs, il existe  $x_* \in \mathbb{R}^n$  (pas forcément unique) tel que  $c = Ax_*$ . Comme, pour tout  $y \in \mathbb{R}^n$ ,

$$(P_K b - b, Ay) = (P_K b - b)^T Ay = y^T A^T (P_K b - b) = 0,$$

on obtient finalement  $A^T P_K b = A^T A x_* = A^T b$ .

Remarquons que  $x_*$  est unique lorsque  $A^T A$  est inversible, ce qui est le cas quand  $A$  est de rang  $n$ . Dans le cas de l'approximation par une droite, cela correspond à avoir les points  $X_i$  non tous confondus.

**Remarque 2.3.** Notons que le résultat de la deuxième question n'est pas complètement évident. Par exemple, lorsque

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad x_n = \begin{pmatrix} 0 \\ n \end{pmatrix},$$

on a  $Ax_n = 0$  alors que la suite  $(x_n)$  n'est pas convergente. Il faut donc prendre garde à ce que l'on fait si on souhaite montrer "à la main" le caractère fermé de l'espace.

Une preuve constructive, pour un opérateur  $A \in \mathcal{L}(V, W)$  avec  $V$  de dimension finie (voir le Chapitre 4 pour les notations), est par exemple la suivante : considérons une suite  $(Ax_i)_{i \geq 0}$  qui converge vers  $y \in W$ . On peut décomposer  $x_i$  en  $\tilde{x}_i + \hat{x}_i$  avec  $\tilde{x}_i \in \text{Ker}(A)$  et  $\hat{x}_i \in \text{Ker}(A)^\perp$  borné. En effet,

- pour la décomposition selon  $\text{Ker}(A)$  et  $\text{Ker}(A)^\perp$ , on utilise une projection orthogonale sur le fermé  $\text{Ker}(A)$  ;
- pour montrer que la norme de  $\|\hat{x}_i\|_V$  est bornée, on procède par l'absurde : si  $\hat{x}_i$  n'est pas borné, alors  $Ax_i = A\hat{x}_i$  non plus, ce qui est toutefois en contradiction avec  $Ax_i \rightarrow y$ . Pour prouver que  $A\hat{x}_i$  ne serait pas borné si  $\hat{x}_i$  ne l'était pas, on note que, dans le cas contraire (et quitte à extraire une sous-suite), on a  $A\hat{x}_i/\|\hat{x}_i\|_V \rightarrow 0$ . Or, la suite  $\hat{x}_i/\|\hat{x}_i\|_V$  est de norme 1, et, quitte à extraire à nouveau, on peut supposer que  $\hat{x}_i/\|\hat{x}_i\|_V \rightarrow x_*$ . Par ailleurs,  $x_* \in \text{Ker}(A)^\perp$  (on le voit en passant à la limite dans les égalités  $(\hat{x}_i/\|\hat{x}_i\|_V, z)_V = 0$  pour  $z \in \text{Ker}(A)$  donné). Ainsi, la limite  $x_*$  est telle que  $Ax_* = 0$  et  $x_* \in \text{Ker}(A)^\perp$ , ce qui implique  $x_* = 0$  ; qui est toutefois en contradiction avec le fait que  $x_*$  soit la limite d'éléments de norme 1.

Comme la suite  $(\hat{x}_i)_{i \geq 1}$  est bornée, On extrait ensuite une sous suite  $(X_k)_{k \geq 0} = (\hat{x}_{i_k})_{k \geq 0}$  qui converge vers un élément  $X_* \in V$ . Ceci montre que  $AX_k$  converge vers  $AX_* = y$ , et permet de conclure que  $y \in K$ .

## 2.3 Bases hilbertiennes

La notion de base hilbertienne généralise la notion de base orthonormée en dimension finie.

**Définition 2.4.** Soit  $V$  un espace de Hilbert. On appelle base hilbertienne de  $V$  une suite  $(e_n)_{n \geq 0}$  d'éléments de  $V$  tels que

- (i)  $\|e_n\|_V = 1$  pour tout  $n \geq 0$ , et  $(e_m, e_n)_V = 0$  pour tout  $n \neq m$  ;
- (ii) l'espace vectoriel engendré par la famille  $(e_n)_{n \geq 0}$  est dense dans  $V$ .

Rappelons que la densité de la famille  $(e_n)_{n \geq 0}$  signifie que tout élément  $v \in V$  peut être approché arbitrairement près par une combinaison linéaire finie d'éléments de la base : pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $N_\varepsilon > 0$  et  $(v_1, \dots, v_{N_\varepsilon}) \in \mathbb{K}^{N_\varepsilon}$  tels que

$$\left\| v - \sum_{n=1}^{N_\varepsilon} v_n e_n \right\|_V \leq \varepsilon.$$

**Remarque 2.4.** En dimension infinie, un espace de Hilbert n'admet pas nécessairement de base hilbertienne. Une condition suffisante pour qu'un espace de Hilbert admette une base hilbertienne est que celui-ci soit séparable, i.e. qu'il existe un sous-ensemble  $D \subset V$  dénombrable et dense dans  $V$  (concrètement, ici, on peut considérer le sous-ensemble  $D$  composé des combinaisons linéaires finies des éléments de la base, avec des coefficients rationnels). Tous les espaces de Hilbert rencontrés dans le cadre de ce cours seront séparables, donc admettront une base hilbertienne.

**Exemple 2.4.** Une base hilbertienne de  $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$  est donnée par la famille des suites  $(e_n)_{n \geq 0}$  telles que  $e_{n,m} = \delta_{nm}$  pour tout  $m \geq 0$  (où  $\delta_{nm}$  est le symbole de Kronecker).

**Proposition 2.3.** Soit  $V$  un espace de Hilbert admettant une base hilbertienne  $(e_n)_{n \geq 0}$ . Soit  $u \in V$ . Posons  $u_n = (e_n, u)_V$  pour tout  $n \geq 0$ . Alors, les séries  $\sum_{n \geq 0} u_n e_n$  et  $\sum_{n \geq 0} |u_n|^2$  sont convergentes dans  $V$  et  $\mathbb{R}$  respectivement et on a

$$u = \sum_{n \geq 0} u_n e_n \quad \text{et} \quad \|u\|_V^2 = \sum_{n \geq 0} |u_n|^2, \quad (2.6)$$

la deuxième égalité portant le nom d'égalité de Bessel-Parseval.

Insistons sur le fait que l'on définit bien  $u_n = (e_n, u)_V$  afin d'assurer la linéarité dans le cas hermitien  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .

**Exercice 2.6.** Pour prouver la Proposition 2.3, on introduit, pour tout entier  $n \geq 0$ , l'espace vectoriel  $V_n$  engendré par  $(e_0, \dots, e_n)$ , et on note  $P_n$  la projection orthogonale de  $V$  sur  $V_n$ .

- (1) Montrer que  $P_n u = \sum_{m=0}^n u_m e_m$ .
- (2) Montrer que la série  $\sum_{m \geq 0} |u_m|^2$  est convergente.
- (3) Montrer que la suite  $(P_n u)_{n \geq 0}$  est de Cauchy dans  $V$ . On note  $v$  sa limite.
- (4) Montrer que  $(v - u, e_m)_V = 0$  pour tout  $m \geq 0$ , et en déduire la première égalité dans (2.6). Prouver ensuite la seconde égalité.
- (5) Donner un exemple qui montre que la convergence de la première série dans (2.6) n'est pas normale, et que l'égalité doit donc être interprétée dans  $V$ .

**Correction.** (1) L'expression de  $P_n u$  résulte de la caractérisation (2.4). On a en effet

$$\forall 0 \leq m \leq n, \quad (P_n u - u, e_m) = 0, \quad (2.7)$$

ce qui montre que  $(e_m, P_n u) = u_m$ . Par ailleurs,  $P_n u \in V_n$  et donc  $P_n u$  n'a pas de composante selon les éléments  $e_k$  pour  $k \geq m+1$ .

- (2) On note pour commencer que

$$\|P_n u\|_V^2 = \sum_{m=0}^n |u_m|^2. \quad (2.8)$$

Il résulte du Corollaire 2.1 que  $\|P_n u\|_V^2 \leq \|u\|_V^2$  ce qui montre la convergence de la série demandée.

- (3) La majoration

$$\|P_{n+p} u - P_n u\|_V^2 \leq \sum_{m=n+1}^{n+p} |u_m|^2,$$

montre que la suite  $(P_n u)_{n \geq 0}$  est de Cauchy dans  $V$  et donc converge vers une limite  $v \in V$ .

- (4) En passant à la limite  $n \rightarrow +\infty$  dans (2.7), on obtient  $(v - u, e_m)_V = 0$  pour tout  $m \geq 0$ . La famille  $(e_m)_{m \geq 0}$  étant dense dans  $V$ , il en résulte que  $u = v$ , ce qui donne la première égalité dans (2.6). Pour montrer très précisément ce résultat, on procède de la manière suivante. Soit  $\varepsilon > 0$ . On peut approcher  $u - v$  par une combinaison linéaire finie des  $e_n$ , notée  $w_\varepsilon$ , avec  $\|u - v - w_\varepsilon\|_V \leq \varepsilon$ . On trouve ainsi

$$(v - u, w_\varepsilon)_V = 0 = (v - u, v - u)_V + (v - u, w_\varepsilon - v + u)_V,$$

et donc, par une inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\|u - v\|_V^2 = (v - u, w_\varepsilon - v + u)_V \leq \|u - v\|_V \|u - v - w_\varepsilon\|_V,$$

soit  $\|u - v\|_V \leq \varepsilon$ . Cette inégalité étant vraie pour tout  $\varepsilon > 0$ , on en déduit que  $u - v = 0$ .

Finalement, la seconde égalité dans (2.6) résulte de (2.8) en faisant tendre  $n$  vers l'infini.

- (5) On peut considérer la suite dont les composantes sont  $u_n = 1/n$ .

## Espaces de Lebesgue

---

<b>3.1 Fonctions égales presque partout</b>	<b>25</b>
<b>3.2 Espace <math>L^1</math></b>	<b>26</b>
3.2.1 Définition	26
3.2.2 Propriétés	27
<b>3.3 Espace <math>L^2</math></b>	<b>30</b>
<b>3.4 Espace <math>L^\infty</math></b>	<b>31</b>
<b>3.5 Autres espaces <math>L^p</math></b>	<b>33</b>
3.5.1 Définitions	33
3.5.2 Relations entre les espaces $L^p$	35
3.5.3 Espaces $L^p_{\text{loc}}$	36
<b>3.6 Applications : séries de Fourier dans <math>L^2(-\pi, \pi)</math></b>	<b>37</b>

---

Ce chapitre présente la construction et certaines propriétés des espaces fonctionnels  $L^p$  qui jouent un rôle fondamental en analyse et dans les applications. Nous construisons ici les espaces  $L^p(\Omega)$  où  $\Omega$  est un ouvert (ou plus généralement un borélien) de  $\mathbb{R}^d$  mais la même démarche permet de définir les espaces  $L^p(X, \mathcal{T}, \mu)$  où  $(X, \mathcal{T}, \mu)$  un espace mesuré quelconque. Insistons d'ores et déjà que  $p$  est ici un nombre réel, et pas seulement un entier. Par la suite, on note  $\lambda$  la mesure de Lebesgue. Par défaut, on considérera des fonctions à valeurs réelles (cas  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  avec les notations des chapitres précédents).

Il est utile, pour bien comprendre la construction des espaces de Lebesgue, de réviser le cours de théorie de la mesure. Les outils minimaux pour effectuer les preuves et exercices de ce poly sont rappelés dans l'appendice (Chapitre 10). Le lecteur est très vivement encouragé à relire ces résultats fondamentaux.

On rencontrera également plusieurs fois dans ce chapitre la fonction indicatrice de l'ensemble  $K$  :

$$\chi_K(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in K, \\ 0 & \text{si } x \notin K. \end{cases} \quad (3.1)$$

Cette fonction est mesurable lorsque  $K$  est un Borélien.

### 3.1 Fonctions égales presque partout

On rappelle qu'un ensemble négligeable est un ensemble de mesure nulle.

**Proposition 3.1.** *Soit  $\Omega$  un ouvert (ou plus généralement un borélien) de  $\mathbb{R}^d$ . La relation “ $f = g$  presque partout”, qui se traduit par “l'ensemble  $\{x \in \Omega, f(x) \neq g(x)\}$  est négligeable (pour la mesure de Lebesgue)”, est une relation d'équivalence sur l'ensemble des fonctions mesurables.*

*Preuve.* Notons  $\sim$  la relation d'“égalité presque partout”. Montrons d'abord que  $\sim$  est une relation d'équivalence. Considérons pour cela trois fonctions mesurables  $f$ ,  $g$  et  $h$ . Il est clair que  $f \sim f$  (la relation est réflexive), et il est également évident que si  $f \sim g$  alors  $g \sim f$  (la relation est symétrique).

Supposons maintenant que  $f \sim g$  et  $g \sim h$ . Soit  $A$  et  $B$  deux ensembles négligeables tels que  $\{x \in \Omega, f(x) \neq g(x)\} \subset A$  et  $\{x \in \Omega, g(x) \neq h(x)\} \subset B$ . On voit tout de suite que

$$\{x \in \Omega, f(x) \neq h(x)\} \subset \{x \in \Omega, f(x) \neq g(x)\} \cup \{x \in \Omega, g(x) \neq h(x)\} \subset A \cup B.$$

Comme  $\lambda(A \cup B) \leq \lambda(A) + \lambda(B) = 0$ , on en déduit que l'ensemble  $\{x \in \Omega, f(x) \neq h(x)\}$  est de mesure nulle, ce qui prouve la transitivité de la relation  $\sim$ .  $\square$

Le résultat suivant montre que la relation d'équivalence d'“égalité presque partout” est compatible avec l'intégration.

**Proposition 3.2.** *Soit  $\Omega$  un ouvert (ou plus généralement un borélien) de  $\mathbb{R}^d$ . Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions intégrables égales presque partout. Alors*

$$\int_{\Omega} f = \int_{\Omega} g.$$

*Preuve.* Soit  $A$  négligeable tel que  $\{x \in \Omega, f(x) \neq g(x)\} \subset A$ . On a

$$\left| \int_{\Omega} f - \int_{\Omega} g \right| \leq \int_{\Omega} |f - g| = \int_A |f - g| = 0,$$

cette dernière égalité étant une conséquence de la Proposition 10.1.  $\square$

## 3.2 Espace $L^1$

### 3.2.1 Définition

Notons  $L^1(\Omega)$  l'espace quotient (*i.e.* l'ensemble des classes d'équivalence) de l'ensemble

$$\mathcal{L}^1(\Omega) = \left\{ f \text{ mesurable, } \int_{\Omega} |f| < +\infty \right\},$$

par la relation d'équivalence d'“égalité presque partout”. Soulignons deux points importants :

- (1) Si  $\alpha \in \mathbb{R}$  et si  $f_1$  et  $f_2$  sont deux fonctions de  $\mathcal{L}^1(\Omega)$  égales presque partout, alors  $\alpha f_1$  et  $\alpha f_2$  sont aussi égales presque partout ; si  $f \in L^1(\Omega)$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ , on peut donc définir le produit  $\alpha f \in L^1(\Omega)$  : ce sera la classe d'équivalence du produit de  $\alpha$  par n'importe quel représentant de  $f$ .
- (2) Soit maintenant  $f_1, f_2, g_1, g_2$  dans  $\mathcal{L}^1(\Omega)$  telles que  $f_1 = f_2$  et  $g_1 = g_2$  presque partout. On n'a pas le droit *a priori* de définir  $f_1 + g_1$  ou  $f_2 + g_2$  car une de ces deux fonctions pourrait valoir  $+\infty$  en un point alors que l'autre vaudrait  $-\infty$ . On peut en revanche définir la somme  $f + g$  où  $f$  désigne la classe de  $f_1$  (et de  $f_2$ ) et où  $g$  désigne la classe de  $g_1$  (et de  $g_2$ ). En effet, comme  $f_1$  (resp.  $g_1$ ) est intégrable, on sait que l'ensemble des points où  $f_1$  (resp.  $g_1$ ) est infinie est un ensemble de mesure nulle ; notons-le  $A_1$  (resp.  $B_1$ ). Soit  $\tilde{f}_1$  (resp.  $\tilde{g}_1$ ) la fonction égale à  $f_1$  (resp. à  $g_1$ ) en tout point de  $\Omega \setminus A_1$  (resp.  $\Omega \setminus B_1$ ) et égale à 0 sur  $A_1$  (resp. sur  $B_1$ ). Comme les fonctions  $\tilde{f}_1$  et  $\tilde{g}_1$  sont finies sur tout  $\Omega$ , il n'y a pas d'obstacle à définir leur somme. On peut vérifier que si l'on fait de même avec  $f_2$  et  $g_2$ , on obtiendra  $\tilde{f}_1 + \tilde{g}_1 = \tilde{f}_2 + \tilde{g}_2$  presque partout. La classe de fonctions correspondante sera par définition la somme  $f + g$  dans  $L^1(\Omega)$ .

On vérifie facilement que les opérations de multiplication par un scalaire et d'addition définies ci-dessus confèrent à  $L^1(\Omega)$  une structure d'espace vectoriel.

**Définition 3.1.** On note  $L^1(\Omega)$  l'espace vectoriel obtenu en quotientant l'ensemble  $\mathcal{L}^1(\Omega)$  par la relation d'équivalence d'"égalité presque partout". Pour  $f \in L^1(\Omega)$ , la notation  $\int_{\Omega} f$  désigne l'intégrale de l'une quelconque des fonctions appartenant à la classe de  $f$ .

C'est la Proposition 3.2 qui garantit que pour  $f \in L^1(\Omega)$ ,  $\int_{\Omega} f$  est défini de manière unique. Dans toute la suite, on désignera par la même notation  $(f, g, \dots)$  une fonction et la classe d'équivalence à laquelle cette fonction appartient, et on parlera (par abus de langage) de fonctions pour désigner les éléments de  $L^1(\Omega)$ .

**Exercice 3.1 (Convolution).** La fonction notée  $f \star g$  définie presque partout sur  $\mathbb{R}^d$  par

$$(f \star g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y) dy$$

est appelée la convolée ou encore le produit de convolution de  $f$  et  $g$ . Montrer que la fonction  $f \star g \in L^1(\mathbb{R}^d)$  si  $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ , et que l'on a l'inégalité

$$\|f \star g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}. \quad (3.2)$$

On utilisera les Théorèmes 10.3 et 10.4, en montrant pour commencer que

$$\int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)| |g(x-y)| dx dy = \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1} < +\infty.$$

**Correction.** Posons  $h = f \star g$  et  $F(x, y) = f(y)g(x-y)$ . La fonction  $F$  est mesurable (voir la Remarque 3.1 pour une preuve détaillée). Par ailleurs,

$$\int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |F(x, y)| dx dy = \left( \int_{\mathbb{R}^d} |f| \right) \left( \int_{\mathbb{R}^d} |g| \right) = \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1} < +\infty,$$

en effectuant d'abord l'intégration en  $x$  (avec un changement de variable  $z = x - y$ , voir Théorème 10.4) puis celle en  $y$ . Ceci est légitime en application de la première partie du Théorème 10.3 car on travaille avec des fonctions positives. La seconde partie du théorème de Fubini montre ensuite que  $h(x) = (f \star g)(x)$  est définie presque partout. Par ailleurs, en s'appuyant sur le calcul précédent,

$$\int_{\mathbb{R}^d} |h(x)| dx = \int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y) dy \right| dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)| |g(x-y)| dy dx = \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1},$$

ce qui montre que  $h \in L^1(\mathbb{R}^d)$ , et prouve l'inégalité (3.2).

**Remarque 3.1.** Montrons précisons comment prouver que  $F$  est mesurable. Notons pour commencer que  $h_f : (x, y) \mapsto f(x)$  est mesurable car  $h_f^{-1}(] \alpha, +\infty[) = f^{-1}(] \alpha, +\infty[) \times \mathbb{R}$  est un produit cartésien d'ensembles mesurables. On montre de même que  $h_g : (x, y) \mapsto g(y)$  est mesurable. Ainsi, le produit de ces fonctions  $H : (x, y) \mapsto f(x)g(y)$  est mesurable. On introduit ensuite la transformation linéaire  $T : (x, y) \mapsto (x - y, y)$ , qui est bien mesurable car continue. On note que  $F = H \circ T$ , donc  $F^{-1}(] \alpha, +\infty[) = T^{-1}(E_{\alpha})$  où  $E_{\alpha} = H^{-1}(] \alpha, +\infty[)$  est mesurable, ce qui montre que  $F^{-1}(] \alpha, +\infty[)$  est mesurable.

### 3.2.2 Propriétés

La plus-value fondamentale qu'il y a à quotienter l'ensemble  $\mathcal{L}^1$  par la relation d'équivalence d'"égalité presque partout" est que l'espace quotient  $L^1$  que l'on obtient ainsi est un espace de Banach; on dispose donc pour travailler dans  $L^1$  des outils "géométriques" établis au Chapitre 1.

**Théorème 3.1.** *Muni de la norme définie par*

$$\|f\|_{L^1} = \int_{\Omega} |f|,$$

*l'espace vectoriel  $L^1(\Omega)$  est un espace de Banach.*

**Exercice 3.2.** *L'objectif de cet exercice est de prouver le Théorème 3.1.*

(1) *Montrer que  $\|f\|_{L^1}$  est effectivement une norme sur  $L^1$ . Pour le point (i) de la Définition 1.1, on utilisera l'égalité suivante*

$$\{x \in \Omega, \quad f(x) \neq 0\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} A_k$$

*et on montrera que les ensembles  $A_k = \{x \in \Omega, |f(x)| \geq 1/k\}$  sont de mesure nulle pour tout  $k \in \mathbb{N}$  si  $\|f\|_{L^1} = 0$ .*

(2) *Pour montrer la complétude de  $L^1$ , on va utiliser la caractérisation des espaces de Banach fournie par le Théorème 1.1. Soit  $u_n$  le terme général d'une série normalement convergente :*

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \|u_n\|_{L^1} < +\infty.$$

*On souhaite prouver que la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  converge dans  $L^1$ . On introduit pour ce faire*

$$U_N = \sum_{n=0}^N |u_n|, \quad U_{\infty} = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$

*Montrer que  $\int_{\Omega} U_{\infty} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \|u_n\|_{L^1} < +\infty$  et que  $U_{\infty}$  est finie presque partout.*

(3) *Presque partout, la série de terme général  $u_n(x)$  est ainsi absolument convergente donc convergente ; notons alors  $v(x)$  sa limite et prolongeons la fonction  $v$  par 0 sur l'ensemble négligeable sur lequel  $U_{\infty}$  est infinie. En introduisant*

$$w_N = \left| v - \sum_{n=0}^N u_n \right|,$$

*montrer que  $v \in L^1$  et que  $\sum_{n=0}^N u_n$  tend vers  $v$  dans  $L^1$ .*

**Correction.** (1) Les points (ii) et (iii) de la Définition 1.1 sont faciles à vérifier. Reste le point (i). Pour le montrer, considérons un représentant de  $f$ , encore noté  $f$ , et définissons pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  l'ensemble mesurable  $A_k = \{x \in \Omega, |f(x)| \geq 1/k\}$  ; la fonction étagée  $e_k = 1/k \times \chi_{A_k}$  vérifie  $0 \leq e_k \leq |f|$  (on rappelle que  $\chi_A$  pour  $A$  Borélien est la fonction indicatrice, voir (3.1)). On a donc

$$0 \leq \frac{\lambda(A_k)}{k} = \int_{\Omega} e_k \leq \int_{\Omega} |f| = 0.$$

Donc  $\lambda(A_k) = 0$ . Il en résulte que l'ensemble

$$\{x \in \Omega, \quad f(x) \neq 0\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} A_k$$

est une union dénombrable d'ensembles négligeables, et est donc de mesure nulle. D'où  $f = 0$  dans  $L^1$ .



- (2) La suite  $(U_N)_{N \in \mathbb{N}}$  est une suite croissante de fonctions positives. Il en résulte, par le Théorème 10.1, que

$$\int_{\Omega} U_{\infty} = \int_{\Omega} \lim_{N \rightarrow +\infty} U_N = \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} U_N = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N \|u_n\|_{L^1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \|u_n\|_{L^1} < +\infty.$$

La fonction  $U_{\infty}$  est donc intégrable. On en déduit qu'elle est finie presque partout par la Proposition 10.2.

- (3) L'objectif de cette question est de montrer qu'on peut énoncer une convergence dans  $L^1(\Omega)$ , et pas seulement une convergence simple. On commence par appliquer le théorème de convergence dominée (Théorème 10.2) pour montrer que  $v$  est intégrable. En effet, on a la convergence simple

$$\sum_{n=0}^N u_n(x) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} v(x) \quad \text{presque partout,}$$

et par ailleurs la domination

$$\left| \sum_{n=0}^N u_n(x) \right| \leq U_{\infty}(x) \quad \text{presque partout.}$$

Le théorème de convergence dominée permet de conclure que la limite simple  $v$  est intégrable.

En réunissant les résultats que l'on a établis, on voit ainsi que

$$\begin{cases} w_N(x) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0 & \text{presque partout,} \\ \forall N \in \mathbb{N}, \quad |w_N(x)| \leq 2U_{\infty}(x) & \text{pour presque tout } x \in \Omega. \end{cases}$$

En appliquant à nouveau le théorème de convergence dominée (Théorème 10.2), on obtient

$$\left\| v - \sum_{n=0}^N u_n \right\|_{L^1} = \int_{\Omega} \left| v - \sum_{n=0}^N u_n \right| \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0,$$

ce qui termine la preuve.

Pour identifier concrètement la limite d'une suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dont on sait qu'elle converge en norme  $L^1$ , on pourra utiliser le résultat suivant.

**Théorème 3.2.** Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions de  $L^1(\Omega)$  qui converge dans  $L^1(\Omega)$  vers une fonction  $f$ . La suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  admet alors une sous-suite  $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  qui converge simplement vers  $f$  presque partout dans  $\Omega$ .

**Exemple 3.1.** Montrons sur un exemple qu'il est fondamental de procéder à une extraction pour assurer que la suite extraite converge. On considère pour ce faire la suite de fonctions

$$f_1 = \chi_{[0,1/2]}, \quad f_2 = \chi_{[1/2,1]}, \quad f_3 = \chi_{[0,1/4]}, \quad f_4 = \chi_{[1/4,1/2]}, \quad f_5 = \chi_{[1/2,3/4]}, \dots$$

i.e. des fonctions de la forme  $\chi_{[k/2^n, (k+1)/2^n]}$ . On a évidemment  $f_n \rightarrow 0$  dans  $L^1(\mathbb{R})$ . Cela dit, pour  $x$  et  $N$  fixés, il existe toujours  $M$  tel que  $f_M(x) = 1$ . Ainsi, on n'a pas de convergence simple de toute la suite  $f_n$  vers 0. C'est cependant le cas si on extrait la sous-suite composée des  $\chi_{[0,1/2^n]}$ .

**Exercice 3.3.** Pour prouver le Théorème 3.2, on construit (de la même manière que dans la correction de l'Exercice 1.19) une sous-suite  $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  de la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_{L^1} \leq 2^{-k}$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , et on pose

$$g_k(x) = \sum_{j=1}^k |f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x)|.$$

(1) Montrer que la suite  $(g_k)_{k \geq 0}$  admet une limite simple  $g$ , qui vérifie  $\int_{\Omega} g \leq 1$ .

(2) En déduire qu'il existe un ensemble  $A$  de complémentaire négligeable tel que

$$\forall x \in A, \quad \forall 0 \leq k \leq l, \quad |f_{n_l}(x) - f_{n_k}(x)| \leq g(x) - g_{k-1}(x).$$

(3) Montrer que la suite  $(f_{n_k})_{k \geq 0}$  converge en norme  $L^1$  vers une certaine fonction  $h$ . Conclure.

**Correction.** (1) La suite  $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est mesurable, positive et croissante. Il découle donc du Théorème 10.1 que sa limite simple  $g(x) = \sum_{j=1}^{+\infty} |f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x)|$  vérifie

$$\int_{\Omega} g = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} g_k = \sum_{j=1}^{+\infty} \|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}\|_{L^1} \leq \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{2^j} = 1.$$

(2) On déduit de la Proposition 10.2 que la fonction  $g$  est finie sur un ensemble  $A \subset \Omega$  de complémentaire négligeable. On a alors

$$\forall x \in A, \quad \forall 0 \leq k \leq l, \quad |f_{n_l}(x) - f_{n_k}(x)| \leq \sum_{j=k}^{l-1} |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}| \leq g(x) - g_{k-1}(x).$$

(3) L'inégalité précédente implique que

- (i) pour tout  $x \in A$  la suite  $(f_{n_k}(x))_{k \in \mathbb{N}}$ , qui est de Cauchy, converge vers  $h(x)$  dans  $\mathbb{R}$ ,
- (ii)  $h$ , prolongée par 0 dans  $\Omega \setminus A$ , est mesurable (c'est une limite simple de fonctions mesurables),
- (iii) pour tout  $x \in A$ ,  $|h(x) - f_{n_k}(x)| \leq g(x)$ .

Il résulte donc du théorème de convergence dominée que la sous-suite  $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  converge en norme  $L^1$  vers  $h$ , et donc que  $h = f$ . Finalement, la sous-suite  $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  converge donc presque partout vers  $f$ .

Terminons cette section par une définition importante pour les chapitres suivants. La définition ci-dessous utilise le produit de fonctions  $f \chi_K$ , qui vaut  $f(x)$  si  $x \in K$  et 0 sinon.

**Définition 3.2.** On dit qu'une fonction mesurable  $f$  est localement intégrable sur  $\Omega$  si  $f \chi_K \in L^1(\Omega)$  pour tout compact  $K$  inclus dans  $\Omega$ . On note  $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$  l'espace vectoriel des fonctions localement intégrables.

**Exemple 3.2.** Les fonctions  $x \mapsto e^{|x|}$  et  $x \mapsto |x|^{-1/2}$  sont dans  $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$  mais pas dans  $L^1(\mathbb{R})$ .

### 3.3 Espace $L^2$

En réalisant l'opération de "quotientage" d'égalité presque partout non plus sur l'ensemble des fonctions intégrables mais sur l'ensemble des fonctions de carré intégrable, on obtient un espace vectoriel qu'on peut munir d'une structure hilbertienne. Considérons pour cela l'ensemble

$$\mathcal{L}^2(\Omega) = \left\{ f \text{ mesurable, } \int_{\Omega} |f|^2 < +\infty \right\},$$

des fonctions de carré intégrable.

**Définition 3.3.** On note  $L^2(\Omega)$  l'espace vectoriel obtenu en quotientant l'ensemble  $\mathcal{L}^2(\Omega)$  par la relation d'équivalence d'"égalité presque partout".

En utilisant l'inégalité

$$|fg| \leq \frac{|f|^2 + |g|^2}{2},$$

on voit que si  $f$  et  $g$  sont dans  $L^2$ , alors le produit  $fg$  est dans  $L^1$ ; ceci permet de définir sur  $L^2(\Omega)$  le produit scalaire

$$(f, g)_{L^2} = \int_{\Omega} fg. \quad (3.3)$$

**Remarque 3.2.** Pour des fonctions à valeurs complexes, on définirait (3.3) avec  $\bar{f}$  dans l'intégrale.

La bilinéarité, la symétrie et la positivité de (3.3) sont claires; enfin,  $(f, f)_{L^2} = 0$  si et seulement si  $|f|^2 = 0$  presque partout et donc si et seulement si  $f = 0$  dans  $L^2$ . On a en fait le résultat suivant.

**Théorème 3.3.** Muni du produit scalaire défini par

$$(f, g)_{L^2} = \int_{\Omega} fg$$

l'espace  $L^2(\Omega)$  est un espace de Hilbert.

**Exercice 3.4.** Prouver ce résultat en adaptant la preuve du Théorème 3.1 pour la démonstration de la complétude. On montrera pour commencer que (avec les notations de la preuve du Théorème 3.1)

$$\int_{\Omega} U_N^2 \leq \left( \sum_{n=0}^N \|u_n\|_{L^2} \right)^2.$$

**Correction.** Avec une inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\int_{\Omega} U_N^2 = \int_{\Omega} \left( \sum_{n=0}^N |u_n| \right)^2 = \sum_{n,m=0}^N \int_{\Omega} |u_n| |u_m| \leq \sum_{n,m=0}^N \|u_n\|_{L^2} \|u_m\|_{L^2} = \left( \sum_{n=0}^N \|u_n\|_{L^2} \right)^2.$$

Le reste de la preuve suit celle du Théorème 3.1, en utilisant l'intégrabilité de  $U_\infty^2$  et en appliquant le théorème de convergence dominée à  $w_N^2$ , qui est uniformément majorée par  $4U_\infty^2$ .

Terminons cette section en remarquant que l'inégalité de Cauchy-Schwarz (2.2) prend dans l'espace  $L^2$  la forme suivante : pour tout  $f, g \in L^2(\Omega)$ ,

$$\left| \int_{\Omega} fg \right| \leq \left( \int_{\Omega} |f|^2 \right)^{1/2} \left( \int_{\Omega} |g|^2 \right)^{1/2}. \quad (3.4)$$

### 3.4 Espace $L^\infty$

**Définition 3.4.** On dit qu'une fonction mesurable  $f$  est essentiellement bornée s'il existe un réel positif  $M$  tel que

$$\lambda(\{x \in \Omega, |f(x)| \geq M\}) = 0.$$

On note  $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$  l'ensemble des fonctions essentiellement bornées.

**Définition 3.5.** On note  $L^\infty(\Omega)$  l'espace vectoriel obtenu en quotientant l'ensemble  $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$  par la relation d'équivalence d'"égalité presque partout". On désigne par  $\|\cdot\|_{L^\infty} : L^\infty(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}_+$  l'application définie par

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf \left\{ M \geq 0 \mid \lambda(\{x \in \Omega, |f(x)| \geq M\}) = 0 \right\}. \quad (3.5)$$

Nous allons maintenant vérifier que l'application  $\|\cdot\|_{L^\infty}$  définie ci-dessus induit bien une norme sur l'espace vectoriel  $L^\infty(\Omega)$ . Mieux, cette norme confère à  $L^\infty(\Omega)$  une structure d'espace de Banach. Pour cela, commençons par le lemme suivant.

**Lemme 3.1.** Pour tout  $f \in L^\infty(\Omega)$ , on a

$$|f(x)| \leq \|f\|_{L^\infty} \quad \text{presque partout dans } \Omega.$$

**Exercice 3.5.** Prouver ce résultat en introduisant les ensembles (pour  $n \geq 1$ )

$$A_n = \left\{ x \in \Omega \mid |f(x)| > \|f\|_{L^\infty} + \frac{1}{n} \right\}.$$

**Correction.** On note pour commencer que, par la définition (3.5) de la norme  $L^\infty$ , les ensembles  $A_n$  sont de mesure nulle pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Comme

$$\mathcal{A} = \left\{ x \in \Omega \mid |f(x)| > \|f\|_{L^\infty} \right\} = \bigcup_{n \geq 1} A_n$$

est une union dénombrable d'ensembles de mesure nulle, on peut conclure que  $\mathcal{A}$  est de mesure nulle, ce qui donne le résultat souhaité.

Une conséquence immédiate du lemme 3.1 est le fait que l'application  $\|\cdot\|_{L^\infty}$  définit bien une norme sur  $L^\infty(\Omega)$ . Passons maintenant à la complétude de  $L^\infty(\Omega)$ .

**Théorème 3.4.** Muni de la norme  $\|\cdot\|_{L^\infty}$  définie par (3.5), l'espace vectoriel  $L^\infty(\Omega)$  est un espace de Banach.

**Exercice 3.6.** Prouver ce résultat. On considérera une suite de Cauchy  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dans  $L^\infty(\Omega)$ , et on introduira, pour tout entier  $k \geq 1$ , l'entier  $n_k$  et l'ensemble de mesure nulle  $A_k$  tels que

$$\forall x \in \Omega \setminus A_k, \quad \forall m, n \geq n_k, \quad |f_m(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k}. \quad (3.6)$$

**Correction.** Comme la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est de Cauchy dans  $L^\infty(\Omega)$ , il existe  $n_k \geq 1$  tel que  $\|f_n - f_{n+p}\|_{L^\infty} \leq 1/k$  pour tout  $n \geq n_k$  et  $p \geq 0$ . Au vu du Lemme 3.1, on peut introduire les ensembles

$$B_{n,m} = \left\{ x \in \Omega, |f_n(x) - f_m(x)| > \frac{1}{k} \right\},$$

qui sont de mesure nulle lorsque  $n, m \geq n_k$ . On définit alors

$$A_k = \bigcup_{n, m \geq n_k} B_{n,m},$$

qui est de mesure nulle comme union dénombrable d'ensemble négligeables. Avec cette définition, on a bien (3.6). On considère ensuite

$$\mathcal{A} = \bigcup_{k \geq 1} A_k,$$

qui est lui aussi de mesure nulle. La suite  $(f_n(x))_{n \geq 0}$  est de Cauchy pour tout  $x \in \mathcal{A}$ , et converge donc vers une certaine limite notée  $f(x)$ . Cette fonction, étendue par 0 sur  $\Omega \setminus \mathcal{A}$ , est mesurable comme limite simple de fonctions mesurables. En passant à la limite dans (3.6), on obtient

$$\forall x \in \Omega \setminus \mathcal{A}, \quad \forall n \geq n_k, \quad |f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k}. \quad (3.7)$$

Ceci montre que  $|f(x)| \leq 1 + \|f_{n_1}\|_{L^\infty}$  pour  $x \notin \mathcal{A} \cup E_1$ , où  $E_1 = \{x \in \Omega, |f_{n_1}(x)| > \|f_{n_1}\|_{L^\infty}\}$  est de mesure nulle. Ainsi,  $f \in L^\infty(\Omega)$  avec  $\|f\|_{L^\infty} \leq 1 + \|f_{n_1}\|_{L^\infty}$ . Finalement, (3.7) montre que  $\|f - f_n\|_{L^\infty} \rightarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , ce qui permet de conclure.

## 3.5 Autres espaces $L^p$

### 3.5.1 Définitions

Soit un réel  $p$  tel que  $1 \leq p < +\infty$ . Insistons encore une fois lourdement sur le fait que  $p$  peut ne pas être un entier. On définit l'ensemble  $\mathcal{L}^p(\Omega)$  par

$$\mathcal{L}^p(\Omega) = \left\{ f \text{ mesurable, } \int_{\Omega} |f|^p < +\infty \right\}.$$

**Définition 3.6.** On note  $L^p(\Omega)$  l'espace vectoriel obtenu en quotientant  $\mathcal{L}^p(\Omega)$  par la relation d'équivalence d'"égalité presque partout". On désigne par  $\|\cdot\|_{L^p} : L^p(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}_+$  l'application définie par

$$\|f\|_{L^p} = \left( \int_{\Omega} |f|^p \right)^{1/p}. \quad (3.8)$$

Le fait que  $L^p(\Omega)$  est un espace vectoriel se prouve en observant que

$$|f(x) + g(x)|^p \leq 2^p \max \left\{ |f(x)|^p, |g(x)|^p \right\} \leq 2^p (|f(x)|^p + |g(x)|^p),$$

si bien que  $f \in L^p(\Omega)$  et  $g \in L^p(\Omega)$  implique que  $f + g \in L^p(\Omega)$ .

**Exercice 3.7.** On considère la fonction

$$f(x) = -\frac{1}{x \ln^2(x)}$$

sur  $\Omega = ]0, 1/2[$ . Vérifier que  $f \in L^1(\Omega)$  mais que  $f \notin \bigcup_{p>1} L^p(\Omega)$ .

**Définition 3.7.** Soit un réel  $p$  avec  $1 \leq p \leq +\infty$ . On appelle réel conjugué de  $p$  le réel  $p'$  défini par la relation

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Noter qu'on a  $1 \leq p' \leq +\infty$  et  $(p')' = p$ . Par ailleurs, on a les valeurs particulières  $p' = +\infty$  si  $p = 1$  et  $p' = 1$  si  $p = +\infty$ . Enfin, notons le cas symétrique  $p' = 2$  si  $p = 2$ .

**Théorème 3.5 (Inégalité de Hölder).** Si  $f \in L^p(\Omega)$  et  $g \in L^{p'}(\Omega)$ , alors le produit  $fg$  est dans  $L^1(\Omega)$  et

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}. \quad (3.9)$$

**Exercice 3.8.** Montrer le Théorème 3.5 en commençant par le cas  $p = 1$  et  $p = +\infty$ , ou le cas  $f = 0$  ou  $g = 0$ . Pour le cas général  $1 < p < +\infty$  et  $g, f \neq 0$ , on utilisera l'inégalité de Young (1.9) pour obtenir

$$\frac{|f(x)|}{\|f\|_{L^p}} \frac{|g(x)|}{\|g\|_{L^{p'}}} \leq \frac{1}{p} \left( \frac{|f(x)|}{\|f\|_{L^p}} \right)^p + \frac{1}{p'} \left( \frac{|g(x)|}{\|g\|_{L^{p'}}} \right)^{p'} \quad \text{presque partout.} \quad (3.10)$$

**Correction.** Pour  $p = 1$  et pour  $p = +\infty$ , l'inégalité (3.9) prend la forme suivante : pour  $f \in L^1(\Omega)$  et  $g \in L^\infty(\Omega)$ ,

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^\infty},$$

ce qui est une conséquence immédiate du Lemme 3.1. Considérons maintenant le cas  $1 < p < +\infty$ , et soit  $p'$  le réel conjugué de  $p$ . Soit  $f \in L^p(\Omega)$  et  $g \in L^{p'}(\Omega)$ . Si  $f = 0$  ou  $g = 0$ , l'inégalité de Hölder est évidemment vérifiée. Dans le cas contraire, l'inégalité de Young (1.9) donne (3.10)

pour  $u = \frac{|f(x)|}{\|f\|_{L^p}}$  et  $v = \frac{|g(x)|}{\|g\|_{L^{p'}}$ . En intégrant sur  $\Omega$ , on obtient alors

$$\frac{1}{\|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}} \int_{\Omega} |f| |g| \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,$$

d'où on déduit l'inégalité (3.9).

Notons que l'inégalité de Cauchy-Schwarz (3.4) est un cas particulier de l'inégalité de Hölder (correspondant à  $p = p' = 2$ ). Une conséquence importante de l'inégalité de Hölder est l'inégalité de Minkowski dont découle le fait que l'application  $\|\cdot\|_{L^p}$  définie par (3.8) est une norme sur  $L^p(\Omega)$ .

**Proposition 3.3.** Soit  $f$  et  $g$  dans  $L^p(\Omega)$  pour  $1 < p < +\infty$ . Alors, on a

$$\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}.$$

**Exercice 3.9.** Prouver ce résultat en observant que

$$|f(x) + g(x)|^p \leq |f(x)| |f(x) + g(x)|^{p-1} + |g(x)| |f(x) + g(x)|^{p-1}$$

et que  $|f + g|^{p-1} \in L^{p'}(\Omega)$  où  $p'$  est le réel conjugué de  $p$ , puis utiliser l'inégalité de Hölder.

**Correction.** On commence par noter que  $p' = p/(p-1) \in ]1, +\infty[$ , et que donc  $p'(p-1) = p$ . Ainsi,

$$\int_{\Omega} (|f + g|^{p-1})^{p'} = \int_{\Omega} |f + g|^p \leq 2^p \left( \int_{\Omega} |f|^p + \int_{\Omega} |g|^p \right) < +\infty.$$

Ceci montre que  $|f + g|^{p-1} \in L^{p'}(\Omega)$ . Avec l'inégalité de Hölder,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |f + g|^p &\leq \left( \int_{\Omega} |f|^p \right)^{1/p} \left( \int_{\Omega} (|f + g|^{p-1})^{p'} \right)^{1/p'} + \left( \int_{\Omega} |g|^p \right)^{1/p} \left( \int_{\Omega} (|f + g|^{p-1})^{p'} \right)^{1/p'} \\ &= \left( \int_{\Omega} |f + g|^p \right)^{1-1/p} \left( \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p} \right), \end{aligned}$$

ce qui donne le résultat escompté.

**Exercice 3.10.** Pourquoi ne considère-t-on pas des espaces  $L^p(\Omega)$  pour  $p < 1$  ? (penser à l'inégalité triangulaire...)

**Correction.** On peut montrer dans le cas  $p \in ]0, 1[$  qu'on a en fait on a une inégalité triangulaire inversée :

$$\|f + g\|_{L^p} \geq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}.$$

Plus simplement, on peut montrer que l'inégalité triangulaire n'est pas vraie en considérant par exemple  $f = \chi_{[0,1/2]}$  et  $g = \chi_{[1/2,1]}$  dans  $L^p(\mathbb{R})$ . Dans ce cas,

$$\|f + g\|_{L^p} = 1, \quad \|f\|_{L^p} = \|g\|_{L^p} = 2^{-1/p},$$

ce qui montre que

$$\|f + g\|_{L^p} \geq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p} = 2^{1-1/p}.$$

Cela dit, on peut aussi montrer que l'inégalité triangulaire est satisfaite à une constante multiplicative près :

$$\|f + g\|_{L^p} \geq 2^{1/p-1} (\|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}).$$

Dans ce cas, on parle de quasi-norme.

**Théorème 3.6.** *Equipé de la norme  $\|\cdot\|_{L^p}$ ,  $L^p(\Omega)$  est un espace de Banach.*

**Exercice 3.11.** *Prouver ce résultat en procédant comme dans la preuve de la complétude de  $L^1(\Omega)$ .*

### 3.5.2 Relations entre les espaces $L^p$

L'inégalité de Hölder a également plusieurs conséquences importantes sur les relations d'inclusion entre les divers espaces  $L^p$ . En voici une.

**Proposition 3.4.** *Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  tel que  $\lambda(\Omega) < +\infty$  et  $1 \leq p < q \leq +\infty$ , alors*

$$L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega).$$

Insistons sur le fait que l'inclusion  $L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$  pour  $1 \leq p < q \leq +\infty$  ne vaut que si  $\Omega$  est un ensemble de mesure finie. On pourra garder en tête l'exemple suivant : la fonction constante égale à 1 est dans  $L^\infty(\mathbb{R}^d)$  mais n'est dans aucun  $L^p(\mathbb{R}^d)$  pour  $p < +\infty$ . Plus généralement, la Proposition 3.4 conduit au corollaire suivant.

**Corollaire 3.1.** *Si  $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ , alors  $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ .*

**Exercice 3.12.** *Montrer la Proposition 3.4 en appliquant l'inégalité de Hölder (avec le choix  $g = 1$ ).*

**Correction.** On applique l'inégalité de Hölder avec l'exposant  $\alpha = q/p$  (qui est bien compris entre 1 et  $+\infty$ ). Le réel conjugué est

$$\alpha' = \frac{q}{q-p}.$$

Il vient

$$\|f\|_{L^p}^p = \int_{\Omega} |f|^p \leq \left( \int_{\Omega} |f|^{p\alpha} \right)^{1/\alpha} \left( \int_{\Omega} 1^{\alpha'} \right)^{1/\alpha'} = \|f\|_{L^q}^p \lambda(\Omega)^{(q-p)/q},$$

d'où  $\|f\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^q} \lambda(\Omega)^{(q-p)/(pq)}$ .

**Exercice 3.13.** Montrer que pour tout  $1 \leq p < q \leq +\infty$ , et pour un ensemble  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  borélien quelconque (non-nécessairement borné)

$$L^\infty(\Omega) \cap L^p(\Omega) \subset L^\infty(\Omega) \cap L^q(\Omega).$$

Plus généralement, montrer que pour tout  $1 \leq p < q < r \leq +\infty$ ,

$$L^r(\Omega) \cap L^p(\Omega) \subset L^r(\Omega) \cap L^q(\Omega).$$

On introduira pour ce faire l'unique élément  $\theta \in ]0, 1[$  tel que  $\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{p} + \frac{\theta}{r}$ .

La morale de cet exercice est que l'exposant le plus élevé limite le type de singularités/divergences qui sont permises en un point, alors que l'exposant le plus bas détermine la décroissance nécessaire à l'infini.

**Correction.** Soit  $f \in L^\infty(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ . On a alors

$$\int_{\Omega} |f|^q \leq \|f\|_{L^\infty}^{q-p} \int_{\Omega} |f|^p = \|f\|_{L^\infty}^{q-p} \|f\|_{L^p}^p,$$

ce qui montre que  $f \in L^q(\Omega)$  avec  $\|f\|_{L^q} \leq \|f\|_{L^\infty}^{1-p/q} \|f\|_{L^p}^{p/q}$ . Pour  $f \in L^r(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ , on a, par l'inégalité de Hölder pour les exposants

$$\alpha = \frac{p}{(1-\theta)q}, \quad \alpha' = \frac{r}{\theta q},$$

l'inégalité suivante :

$$\int_{\Omega} |f|^q = \int_{\Omega} |f|^{(1-\theta)q} \cdot |f|^{\theta q} \leq \left( \int_{\Omega} |f|^p \right)^{1/\alpha} \left( \int_{\Omega} |f|^r \right)^{1/\alpha'}.$$

Ceci montre que  $f \in L^q(\Omega)$  avec  $\|f\|_{L^q} \leq \|f\|_{L^p}^\theta \|f\|_{L^r}^{1-\theta}$ .

### 3.5.3 Espaces $L_{\text{loc}}^p$

**Définition 3.8.** Pour  $1 \leq p \leq +\infty$ , on note  $L_{\text{loc}}^p(\Omega)$  l'espace vectoriel des fonctions mesurables  $f$  telles que  $f\chi_K \in L^p(\Omega)$  pour tout compact  $K$  inclus dans  $\Omega$ .

**Exercice 3.14.** On fixe deux entiers  $d, p \geq 1$ . Pour quelles valeurs de  $\alpha \in \mathbb{R}$  a-t-on  $x \mapsto |x|^\alpha \in L_{\text{loc}}^p(\Omega)$  lorsque  $0 \in \Omega$  et  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ?

On introduit la notion de convergence suivante pour les espaces  $L_{\text{loc}}^p(\Omega)$ .

**Définition 3.9.** Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de  $L_{\text{loc}}^p(\Omega)$  et  $f \in L_{\text{loc}}^p(\Omega)$ . On dit que  $(f_n)$  converge vers  $f$  dans  $L_{\text{loc}}^p(\Omega)$  si pour tout compact  $K \subset \Omega$ , la suite  $(f_n|_K)$  converge vers  $f|_K$  dans  $L^p(K)$ .

Le résultat suivant est une conséquence immédiate de la Proposition 3.4.

**Proposition 3.5.** Si  $1 \leq p \leq q \leq +\infty$ , alors  $L_{\text{loc}}^q(\Omega) \subset L_{\text{loc}}^p(\Omega)$ .



### 3.6 Applications : séries de Fourier dans $L^2(\cdot - \pi, \pi)$

Nous allons étudier dans cette section comment décomposer une fonction périodique en une série de Fourier, *i.e.* une somme dénombrable d'exponentielles complexes. Ce type de décomposition est extrêmement utile dans de nombreux contextes, allant du traitement du signal à la résolution numérique d'équations aux dérivées partielles. Ce dernier exemple est d'ailleurs la motivation originelle de l'introduction de ces séries par Joseph Fourier (*Théorie analytique de la chaleur*, 1807). Ce qui suit n'est qu'une (bien brève) introduction à cette théorie.<sup>1</sup> Mentionnons également qu'il existe une théorie de la transformée de Fourier, qui permet de décomposer en fréquences des signaux ou des fonctions qui ne sont pas périodiques.

Pour fixer les idées, on travaille avec des fonctions  $2\pi$ -périodiques, qu'il suffit donc de considérer sur l'intervalle  $]-\pi, \pi[$ . Comme on manipule des fonctions à valeurs complexes, on utilise le produit scalaire hermitien dans  $L^2(\cdot - \pi, \pi, \mathbb{C})$  :

$$(u, v)_{L^2} = \int_{-\pi}^{\pi} \bar{u}v.$$

Pour  $n \in \mathbb{Z}$ , on définit les polynômes trigonométriques élémentaires :

$$e_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx},$$

et les coefficients de Fourier :

$$c_n(u) = (e_n, u)_{L^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} u(x) dx.$$

**Exercice 3.15.** Montrer que  $e_n \in L^2(\cdot - \pi, \pi, \mathbb{C})$  avec  $\|e_n\|_{L^2} = 1$ , et que  $c_n(u)$  est bien défini pour  $u \in L^p(\cdot - \pi, \pi)$  pour tout  $1 \leq p \leq +\infty$ .

**Correction.** On note que  $e_n$  est continue donc mesurable, et  $e_n \in L^\infty(\cdot - \pi, \pi, \mathbb{C}) \subset L^q(\cdot - \pi, \pi, \mathbb{C})$  pour tout  $1 \leq q \leq +\infty$ . On vérifie immédiatement que  $\|e_n\|_{L^2} = 1$ . On a alors, par une inégalité de Hölder et en notant  $q = p/(p-1) \in [1, +\infty]$  l'exposant conjugué de  $p$ ,

$$|c_n(u)| \leq \|e_n\|_{L^q} \|u\|_{L^p} = (2\pi)^{1/q-1/2} \|u\|_{L^p} < +\infty, \quad (3.11)$$

ce qui montre que  $c_n(u)$  est bien défini.

Le résultat principal de cette section est le suivant.

**Théorème 3.7.** La famille  $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  forme une base hilbertienne de  $L^2(\cdot - \pi, \pi, \mathbb{C})$ . En particulier, la série de Fourier converge dans  $L^2(\cdot - \pi, \pi, \mathbb{C})$  et

$$u = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(u) e_n, \quad \|u\|_{L^2}^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(u)|^2,$$

la première égalité ayant lieu dans  $L^2(\cdot - \pi, \pi, \mathbb{C})$ .

La série apparaissant au membre de droite de la première égalité ci-dessus est appelée *série de Fourier* associée à la fonction  $u$ .

**Exercice 3.16.** L'objectif de cet exercice est de prouver le Théorème 3.7.

(i) Montrer que  $(e_m, e_n)_{L^2} = \delta_{nm}$ .

1. On recommande à l'étudiant curieux d'en savoir plus de suivre le cours sur la théorie de Fourier en seconde année.

- (ii) Montrer, en admettant le Théorème 3.8 ci-dessous, que si  $u \in L^2(]-\pi, \pi[, \mathbb{C})$  vérifie  $(e_n, u)_{L^2} = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , alors  $u = 0$ .
- (iii) Montrer que, si  $u \in L^2(]-\pi, \pi[, \mathbb{C})$ , alors  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} (e_n, u) e_n$  converge vers une limite  $v \in L^2(]-\pi, \pi[, \mathbb{C})$ .
- (iv) Montrer que  $c_n(v) = c_n(u)$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  (en utilisant un procédé limite où  $v$  est approché par une somme finie), et conclure.

**Correction.** (i) On calcule

$$(e_n, e_m)_{L^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)x} dx.$$

Si  $n = m$ , alors  $(e_n, e_n)_{L^2} = 1$ . Sinon,

$$(e_m, e_n)_{L^2} = \frac{1}{2\pi i(m-n)} \left[ e^{i(m-n)x} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

- (ii) Comme  $L^2(]-\pi, \pi[, \mathbb{C}) \subset L^1(]-\pi, \pi[, \mathbb{C})$  (voir Proposition 3.4), si  $u$  vérifie  $(e_n, u)_{L^2} = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , alors la fonction  $u$  dans  $L^1$  a tous ses coefficients de Fourier nuls. On en déduit que  $u = 0$  par le Théorème 3.8.
- (iii) On procède comme dans la preuve de la Proposition 2.3. On introduit  $V_N = \text{Vect}(e_{-N}, \dots, e_N)$ . En considérant la projection orthogonale  $P_{V_N} u$  de  $u$  sur  $V_N$ , on voit que

$$\sum_{n=-N}^N |(e_n, u)_{L^2}|^2 = \|P_{V_N} u\|^2 \leq \|u\|_{L^2}^2,$$

et donc la série  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} (e_n, u)_{L^2} e_n$  est de Cauchy dans  $L^2(]-\pi, \pi[, \mathbb{C})$ . Sa limite est donc bien définie car  $L^2(]-\pi, \pi[, \mathbb{C})$  est complet.

- (iv) Notons

$$v_N = \sum_{n=-N}^N c_n(u) e_n.$$

On a  $\|v - v_N\|_{L^2} \rightarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ . On en déduit que  $c_n(v_N) \rightarrow c_n(u)$  par l'inégalité (3.11). Par ailleurs, il est clair que  $c_n(v_N) = c_n(u)$  pour tout  $N \geq n$ . On en déduit donc que  $c_n(v) = c_n(u)$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ; et finalement  $u = v$  par le Théorème 3.8.

*Un résultat d'unicité fondamentale.*

Un ingrédient clé dans la preuve du Théorème 3.7 est le résultat suivant, qui montre que les coefficients de Fourier contiennent toute l'information d'une fonction  $L^1(]-\pi, \pi[, \mathbb{C})$ .

**Théorème 3.8 (Unicité des coefficients de Fourier).** *Si  $u, v \in L^1(]-\pi, \pi[, \mathbb{C})$  ont les mêmes coefficients de Fourier, alors  $u = v$ .*

**Exercice 3.17 (Difficile).** *L'objet de cet exercice est de prouver le Théorème 3.8. On rappelle que les polynômes trigonométriques sont l'ensemble des combinaisons linéaires finies des fonctions  $e_n$ , pour  $n \in \mathbb{Z}$ .*

- (i) Montrer qu'on peut se ramener au cas où  $v = 0$  et  $u$  est à valeurs réelles. On supposera ces hypothèses additionnelles vérifiées dans la suite.
- (ii) Pour  $x_0 \in ]-\pi, \pi[$  et  $\varepsilon > 0$  tel que  $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subset ]-\pi, \pi[$ , montrer que la fonction  $T_n(x) = (1 + \cos(x - x_0) - \cos \varepsilon)^n$  est un polynôme trigonométrique supérieur à 1 sur  $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$

et strictement inférieur à 1 en valeur absolue ailleurs. Montrer également que, si  $u$  a ses coefficients de Fourier nuls, alors

$$\int_{[-\pi, \pi]} T_n(x) u(x) dx = 0.$$

(iii) Montrer que, quand  $u$  est une fonction continue à coefficients de Fourier nuls,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0 - \varepsilon}^{x_0 + \varepsilon} T_n(x) u(x) dx = 0.$$

(iv) En déduire par contradiction le théorème dans le cas où  $u$  est continue.

(v) Calculer les coefficients de Fourier de la fonction  $U(x) = \int_{-\pi}^x u(t) dt$  pour  $u$  une fonction continue. Conclure en admettant la densité des fonctions continues dans  $L^1(]-\pi, \pi[, \mathbb{R})$ .

**Correction.** (i) Quitte à remplacer  $u$  par  $u - v$ , on ne restreint pas la généralité en considérant  $v = 0$ . Supposons le théorème prouvé pour des fonctions à valeurs réelles. Si  $u$  a ses coefficients de Fourier nuls, alors  $\bar{u}$  également, car

$$c_n(\bar{u}) = \overline{c_{-n}(u)}.$$

Les fonctions réelles  $\Re(u) = (u + \bar{u})/2$  et  $\Im(u) = (u - \bar{u})/(2i)$  ont alors leurs coefficients de Fourier nuls, ce qui montre qu'elles sont nulles presque partout, et donc  $u$  aussi.

(ii) L'ensemble des polynômes trigonométriques est stable par addition, translation et multiplication, donc  $T_n$  est un polynôme trigonométrique, et on a, pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,

$$\int_{-\pi}^{\pi} T_n(x) u(x) dx = 0. \quad (3.12)$$

Sur  $]-\pi, \pi[$ , la quantité  $\cos(x - x_0) - \cos \varepsilon$  est positive sur  $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ , et strictement négative ailleurs, et elle est d'autre part toujours strictement supérieure à  $-2$ . Le résultat demandé suit immédiatement.

(iii) Sur  $[-\pi, \pi] \setminus [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ , on a  $|T_n u| \leq |u|$  et  $T_n u$  tend vers 0 ponctuellement. Par un théorème de convergence dominée, on déduit que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[-\pi, \pi] \setminus [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]} T_n(x) u(x) dx = 0,$$

d'où le résultat, au vu de (3.12).

(iv) Supposons  $u$  continue et non-nulle. Alors il existe un intervalle  $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$  de  $]-\pi, \pi[$  où  $|u| \geq \delta > 0$ , et on a donc

$$\int_{x_0 - \varepsilon}^{x_0 + \varepsilon} |T_n(x) u(x)| dx \geq \delta \varepsilon,$$

ce qui contredit le résultat du point (iii).

(v) Soit  $u$  continue. Par intégration par parties,

$$\begin{aligned} c_n(U) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} U(x) e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}in} \left( \int_{-\pi}^{\pi} u(x) e^{-inx} dx - [U(x) e^{-inx}]_{-\pi}^{\pi} \right) \\ &= \frac{1}{in} [c_n(u) - (-1)^n c_0(u)]. \end{aligned}$$

Par densité des fonctions continues dans  $L^1$  et continuité de la forme linéaire  $u \mapsto c_n(u)$  sur  $L^1$ , ce résultat est également valable pour  $u \in L^1(]-\pi, \pi[)$ . En supposant que  $u \in L^1(]-\pi, \pi[)$  a tous ses coefficients de Fourier nuls, alors c'est également le cas pour  $U$ . En appliquant le résultat précédent à la fonction  $U$ , qui est continue car  $u$  est  $L^1$ , on en déduit que  $U$  est nulle, et donc  $u$  aussi.

### Approximation ponctuelle et phénomène de Gibbs.

Nous avons décrit ci-dessus une théorie de la décomposition de fonctions pour la norme  $L^2(]-\pi, \pi[)$ . Cela ne préjuge en rien de la convergence ponctuelle de la série en tout point. Pour obtenir de tels résultats de convergence ponctuelle, il faut renforcer les hypothèses sur la fonction à décomposer, en la supposant par exemple  $C^1$  par morceaux ; sinon on n'a que des résultats de convergence presque partout.

L'exercice suivant donne un exemple de fonction que l'on peut décomposer en séries de Fourier, mais pour lequel on n'a pas la convergence ponctuelle en tout point. Il permet de montrer le genre de situations désagréables qui peuvent se produire...

**Exercice 3.18 (Phénomène de Gibbs).** *L'objectif de cet exercice est d'étudier l'effet d'une discontinuité sur les séries de Fourier, illustré en Figure 3.1. Soit la fonction  $u$  définie sur  $[-\pi, \pi]$  par  $u(x) = -1$  pour  $x < 0$ ,  $u(0) = 0$  et  $u(x) = 1$  quand  $x > 0$ .*

- (i) *Calculer les coefficients de Fourier de  $u$ , et montrer que la série de Fourier partielle à l'ordre  $N$*

$$S_N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{|n| \leq N} c_n(u) e^{inx}$$

*peut se réécrire, pour  $N$  pair (le calcul pour  $N$  impair étant similaire),*

$$S_N(x) = \frac{4}{\pi} \left( \sin(x) + \frac{1}{3} \sin(3x) + \cdots + \frac{1}{N-1} \sin((N-1)x) \right).$$

- (ii) *Calculer  $S_N(0)$ , et  $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(\frac{\pi}{N})$ . On pourra reconnaître une somme de Riemann impliquant la fonction  $\text{sinc}(t) = \sin(t)/t$ , et utiliser*

$$\int_0^\pi \text{sinc}(t) dt = \frac{\pi}{2} (1 + 2\alpha),$$

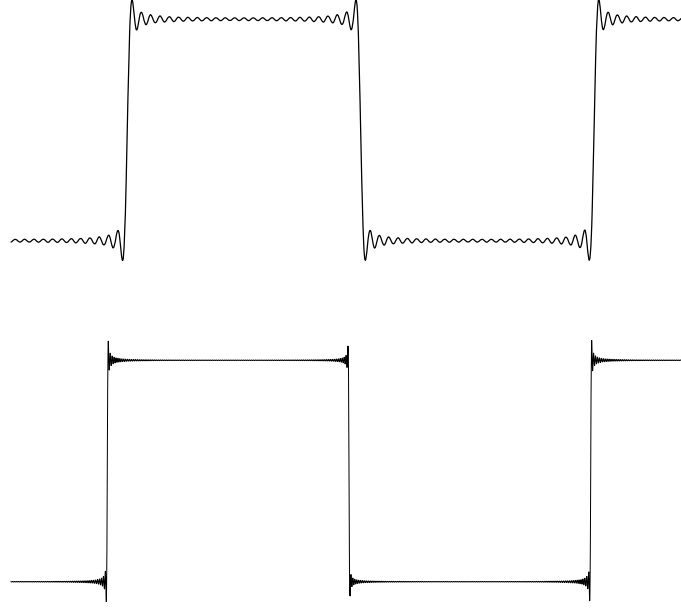
*où  $\alpha \approx 0.09$ .*

- (iii) *En déduire que la série de Fourier de  $u$  ne converge pas uniformément, et interpréter la Figure 3.1.*

**Correction.** (i) On calcule

$$\begin{aligned} c_n(u) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} u(x) e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \int_0^{\pi} e^{-inx} dx - \int_{-\pi}^0 e^{-inx} dx \right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}in} [1 - (-1)^n], \end{aligned}$$

pour  $n \neq 0$ , et 0 pour  $n = 0$ . On vérifie que, comme  $u$  est réelle et impaire, les harmoniques paires sont nuls, et les harmoniques impaires sont appariées via  $c_{-n}(u) = \overline{c_n(u)}$ . En regroupant les termes, on obtient la formule demandée.



**Fig. 3.1.** Série de Fourier de la fonction créneau, avec 50 et 250 harmoniques représentées. Le phénomène de Gibbs est le dépassement de la série de Fourier à un point de discontinuité de  $\alpha \approx 9\%$  de la valeur du saut, qui ne décroît pas en amplitude mais se rapproche du point de discontinuité. Il illustre la convergence simple mais pas uniforme de la série de Fourier d'une fonction avec un saut.

(ii) On a  $S_N(0) = 0$ . On calcule ensuite

$$\begin{aligned} S_N\left(\frac{\pi}{N}\right) &= \frac{4}{\pi} \left( \sin\left(\frac{\pi}{N}\right) + \frac{1}{3} \sin\left(3\frac{\pi}{N}\right) + \cdots + \frac{1}{N-1} \sin\left((N-1)\frac{\pi}{N}\right) \right) \\ &= \frac{4}{N} \left( \text{sinc}\left(\frac{\pi}{N}\right) + \text{sinc}\left(3\frac{\pi}{N}\right) + \cdots + \text{sinc}\left((N-1)\frac{\pi}{N}\right) \right) \end{aligned}$$

Le calcul pour  $N$  impair est similaire. On reconnaît la somme de Riemann de pas  $h = \frac{2\pi}{N}$  de la fonction sinc entre 0 et  $\pi$ . Comme la fonction sinc est continue, on en déduit que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N\left(\frac{\pi}{N}\right) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \text{sinc}(t) dt = 1 + 2\alpha.$$

(iii) La discontinuité en 0 force la série de Fourier partielle  $S_N$  à dépasser sa valeur 1 en  $\pi/N$ . L'amplitude de ce dépassement est égale à  $\alpha$  fois l'amplitude de la discontinuité (ici 2). C'est ce que l'on voit sur la Figure 3.1 : les oscillations se rapprochent certes de la discontinuité, mais l'amplitude des oscillations ne diminue pas (et la série ne converge pas uniformément. Ceci n'est pas en contradiction avec une convergence dans  $L^2$  car la zone de désaccord diminue.



## Intégration des équations différentielles ordinaires





## Applications continues dans les espaces de Banach

---

<b>4.1 Applications linéaires : définition et premières propriétés</b>	<b>45</b>
<b>4.2 Dualité</b>	<b>49</b>
4.2.1 Dualité dans les espaces de Hilbert : théorème de Riesz	50
4.2.2 Cas des espaces $\ell^p$ (complément)	51
4.2.3 Dualité entre les espaces $L^p$ (complément)	53
<b>4.3 Applications linéaires continues dans les espaces de Banach</b>	<b>54</b>
<b>4.4 Applications non-linéaires : théorème du point fixe de Picard</b>	<b>55</b>

---

### 4.1 Applications linéaires : définition et premières propriétés

Dans cette section,  $V$  et  $W$  désignent deux  $\mathbb{K}$ -ev normés équipés respectivement des normes  $\|\cdot\|_V$  et  $\|\cdot\|_W$ . Insistons sur le fait que ces deux espaces peuvent être de dimension infinie tous les deux.

**Proposition 4.1.** *Soit  $A$  une application linéaire de  $V$  dans  $W$ . Les propositions suivantes sont équivalentes :*

- (1)  $A$  est continue.
- (2)  $A$  est continue en 0.
- (3)  $A$  est bornée : il existe une constante  $c \in \mathbb{R}_+$  telle que

$$\forall u \in V, \quad \|Au\|_W \leq c \|u\|_V. \quad (4.1)$$

**Exercice 4.1.** *Nous allons prouver la Proposition 4.1. L'implication (1)  $\implies$  (2) est évidente.*

- (i) Montrer que (3)  $\implies$  (1).
- (ii) Montrer que (2)  $\implies$  (3) en considérant  $\eta u / \|u\|_V$  pour  $\eta > 0$  suffisamment petit.

**Correction.** (i) Soit  $\varepsilon > 0$ . Si  $u, v \in V$  sont tels que  $\|u - v\|_V \leq \varepsilon/c$ , alors  $\|Au - Av\|_W \leq c\|u - v\|_V \leq \varepsilon$ . Ceci montre bien la continuité de  $A$ .

(ii) Si  $A$  est une application linéaire continue en 0, il existe  $\eta > 0$  tel que pour tout  $u \in B(0, \eta)$  (la boule fermée de centre 0 et de rayon  $\eta$ ), on ait

$$\|Au - \underbrace{A0}_{=0}\|_W \leq 1.$$

Soit maintenant  $u \in V$  avec  $u \neq 0$ . L'élément  $v = \eta u / \|u\|_V$  appartient à  $B(0, \eta)$ . Ainsi,  $\|Av\|_W \leq 1$ , ce qui, par linéarité, implique (4.1) avec  $c = 1/\eta$ . Enfin, l'inégalité (4.1) est trivialement satisfaite si  $u = 0$ .

Lorsque l'espace de départ  $V$  est de dimension finie, toutes les applications linéaires sont continues, ainsi que le montre le résultat suivant. Ce n'est plus vrai en revanche si l'espace de départ est de dimension infinie, ainsi que le montrent les (contre)exemples qui suivent.

**Proposition 4.2.** *Soit  $A$  une application linéaire de  $V$  dans  $W$ . Supposons  $V$  de dimension finie. Alors,  $A$  est nécessairement continue.*

**Exercice 4.2.** *Montrer ce résultat.*

**Correction.** Soit  $(e_1, \dots, e_d)$  une base de  $V$ . Pour tout  $u = \sum_{i=1}^d u_i e_i \in V$ , on a

$$\|Au\|_W \leq \sum_{i=1}^d |u_i| \|Ae_i\|_W \leq \left( \sum_{i=1}^d \|Ae_i\|_W \right) \|u\|_\infty,$$

et on conclut en utilisant l'équivalence des normes sur  $V$ .

**Exemple 4.1 (Application linéaire continue en dimension infinie).** L'application qui à  $f \in C^1([a, b])$  associe  $f' \in C^0([a, b])$  est linéaire continue lorsque ces espaces sont équipés des normes  $\|\cdot\|_{C^1([a, b])}$  et  $\|\cdot\|_{C^0([a, b])}$ .

**Contre-exemple 4.1 (Application linéaire non continue en dimension infinie).** L'application de l'Exemple 4.1 n'est pas continue si  $C^1([a, b])$  est équipé de la norme  $|f(a)| + \int_a^b |f'(s)| ds$ .

**Exercice 4.3.** *Prouver cette affirmation en construisant un contre-exemple.*

**Correction.** On peut par exemple considérer  $a = 0$ ,  $b = 1$  et la suite de fonctions  $f_\varepsilon(x) = \sqrt{\varepsilon + x}$ . On a en effet

$$\|f'_\varepsilon\|_{C^0([0, 1])} = \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}, \quad |f_\varepsilon(0)| + \int_0^1 |f'_\varepsilon(s)| ds = f_\varepsilon(1) = \sqrt{1 + \varepsilon}.$$

Si l'application linéaire était continue, il existerait une constante  $C > 0$  telle que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \|f'_\varepsilon\|_{C^0([0, 1])} \leq C \left( |f_\varepsilon(0)| + \int_0^1 |f'_\varepsilon(s)| ds \right) = C\sqrt{1 + \varepsilon},$$

ce qui est manifestement impossible lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

**Remarque 4.1.** De manière générale, d'autres contre-exemples peuvent être construits en considérant deux normes  $\|\cdot\|_{V,1}$  et  $\|\cdot\|_{V,2}$  qui ne sont pas équivalentes. En effet, la continuité de l'injection de  $V$  équipé de  $\|\cdot\|_{V,1}$  dans  $V$  équipé de  $\|\cdot\|_{V,2}$  équivaut à l'existence d'une constante  $c > 0$  telle que  $\|u\|_{V,2} \leq c\|u\|_{V,1}$  pour tout  $u \in V$ .

**Définition 4.1.** L'espace vectoriel des applications linéaires continues de  $V$  dans  $W$  est noté  $\mathcal{L}(V, W)$ .

Lorsque les espaces de départ et d'arrivée sont les mêmes, on note simplement  $\mathcal{L}(V)$  l'espace des applications linéaires continues de  $V$  dans  $V$ .

**Proposition 4.3.** *L'application*

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{\mathcal{L}(V, W)} : \mathcal{L}(V, W) &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ A &\longmapsto \|A\|_{\mathcal{L}(V, W)} = \sup_{u \in V \setminus \{0\}} \frac{\|Au\|_W}{\|u\|_V} \end{aligned}$$

*est une norme sur  $\mathcal{L}(V, W)$ .*

Noter que lorsque  $A$  est bornée, i.e. la condition (4.1) est satisfaite, on a  $\|A\|_{\mathcal{L}(V,W)} \leq c$ .

**Exercice 4.4.** *Prouver ce résultat.*

**Correction.** Si  $\|A\|_{\mathcal{L}(V,W)} = 0$ , alors  $Au = 0$  pour tout  $u \in V$  avec  $u \neq 0$ . Par ailleurs,  $Au = 0$  pour  $u = 0$ . On a donc bien  $A = 0$ .

Soit à présent  $\lambda \in \mathbb{K}$ . On a

$$\|(\lambda A)u\|_W = |\lambda| \|Au\|_W \leq |\lambda| \|A\|_{\mathcal{L}(V,W)} \|u\|_V,$$

d'où on déduit que  $\|\lambda A\|_{\mathcal{L}(V,W)} \leq |\lambda| \|A\|_{\mathcal{L}(V,W)}$ . Pour  $\lambda \neq 0$ , on a ainsi

$$\|A\|_{\mathcal{L}(V,W)} = \left\| \frac{1}{\lambda} \lambda A \right\|_{\mathcal{L}(V,W)} \leq \frac{1}{|\lambda|} \|\lambda A\|_{\mathcal{L}(V,W)},$$

si bien que  $\|\lambda A\|_{\mathcal{L}(V,W)} = |\lambda| \|A\|_{\mathcal{L}(V,W)}$ . L'égalité est par ailleurs trivialement satisfaite si  $\lambda = 0$ .

Enfin, considérons  $A$  et  $B \in \mathcal{L}(V, W)$ . Alors,

$$\|(A+B)u\|_W \leq \|Au\|_W + \|Bu\|_W \leq (\|A\|_{\mathcal{L}(V,W)} + \|B\|_{\mathcal{L}(V,W)}) \|u\|_V,$$

si bien que  $\|A+B\|_{\mathcal{L}(V,W)} \leq \|A\|_{\mathcal{L}(V,W)} + \|B\|_{\mathcal{L}(V,W)}$ .

**Exercice 4.5 (Opérateur intégral sur  $C^0$ ).** On note  $E$  l'espace de Banach  $C^0([a, b])$  équipé de la norme  $\|\cdot\|_{C^0([a, b])}$ . Soit  $k : [a, b]^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue sur  $[a, b]^2$  et  $\rho = \max_{(x, y) \in [a, b]^2} |k(x, y)|$ . Pour  $f \in E$ , on note  $Af$  l'application de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$  définie par

$$Af(x) = \int_a^b k(x, y) f(y) dy.$$

Montrer que  $A$  est une application linéaire continue de  $E$  dans  $E$ . On commencera par montrer que  $Af \in E$  lorsque  $f \in E$ .

**Correction.** Soit  $f \in E$  donnée. On fixe  $\varepsilon > 0$ . Par uniforme continuité de  $k$  sur  $[a, b]^2$  (théorème de Heine), il existe  $\delta > 0$  tel que

$$|y - y'|, |x - x'| \leq \delta \implies |k(x, y) - k(x', y')| \leq \frac{\varepsilon}{(b-a)\|f\|_E}.$$

On a donc en particulier

$$|x - x'| \leq \delta \implies \forall y \in [a, b], \quad |k(x, y) - k(x', y)| \leq \frac{\varepsilon}{(b-a)\|f\|_E}.$$

On en déduit que, si  $|x - x'| \leq \delta$ , alors

$$\begin{aligned} |Af(x) - Af(x')| &= \left| \int_a^b (k(x, y) - k(x', y)) f(y) dy \right| \leq \int_a^b |k(x, y) - k(x', y)| |f(y)| dy \\ &\leq (b-a) \|f\|_E \sup_{y \in [a, b]} |k(x, y) - k(x', y)| \leq \varepsilon, \end{aligned} \quad (4.2)$$

ce qui montre la continuité de la fonction  $Af$ , et donc  $Af \in E$ . Par ailleurs,

$$\|Af\|_E = \sup_{x \in [a, b]} |Af(x)| \leq \int_a^b |k(x, y)| |f(y)| dy \leq \rho(b-a) \|f\|_E, \quad (4.3)$$

ce qui montre que  $A \in \mathcal{L}(E)$  avec  $\|A\| \leq \rho(b-a)$ .

**Exercice 4.6 (Opérateur intégral sur  $L^1$ ).** On considère  $E = L^1([0, 1], \mathbb{R})$ ,  $F = C^0([0, 1], \mathbb{R})$ , et  $k \in C^0([0, 1]^2, \mathbb{R})$ . On considère l'opérateur  $K$  défini par

$$Kf(x) = \int_0^1 k(x, y)f(y) dy.$$

Vérifier que  $Kf \in F$  lorsque  $f \in E$  puis que  $K \in \mathcal{L}(E, F)$ .

**Correction.** Pour montrer que  $K$  est à valeurs dans  $F$ , on pourrait utiliser un théorème de continuité sous le signe intégral (dont il faudrait au préalable vérifier précisément toutes les hypothèses), mais nous préférons donner ici une preuve directe vu la simplicité du cas.

Soit  $f \in E$  donnée. On fixe  $\varepsilon > 0$ . Par uniforme continuité de  $k$  sur  $[0, 1]^2$ , il existe  $\delta > 0$  tel que

$$|x - x'| \leq \delta \Rightarrow |k(x, y) - k(x', y)| \leq \frac{\varepsilon}{\|f\|_{L^1}}.$$

On en déduit que, si  $|x - x'| \leq \delta$ , alors

$$\begin{aligned} |Kf(x) - Kf(x')| &= \left| \int_0^1 (k(x, y) - k(x', y))f(y) dy \right| \leq \int_0^1 |k(x, y) - k(x', y)| |f(y)| dy \\ &\leq \|f\|_{L^1} \sup_{y \in [0, 1]} |k(x, y) - k(x', y)| \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

ce qui montre la continuité de la fonction  $Kf$ , et donc  $Kf \in F$ . Ensuite,

$$\|Kf\|_F = \sup_{x \in [0, 1]} |Kf(x)| \leq \sup_{x \in [0, 1]} \left\{ \int_0^1 |k(x, y)| |f(y)| dy \right\} \leq \|k\|_F \|f\|_{L^1},$$

ce qui montre que  $K \in \mathcal{L}(E, F)$  avec  $\|K\| \leq \|k\|_F$ .

**Exercice 4.7 (Opérateurs de Hilbert–Schmidt).** On considère un opérateur intégral  $K : E \rightarrow E$  avec  $E = L^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$  et

$$Kf(x) = \int_{\mathbb{R}^d} k(x, y)f(y) dy$$

pour une fonction  $k \in L^2(\mathbb{R}^{2d}, \mathbb{C})$  appelée noyau. Montrer que  $K \in \mathcal{L}(E)$  et que

$$\|K\| \leq \|k\|_{L^2} = \left( \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |k(x, y)|^2 dx dy \right)^{1/2}.$$

**Correction.** Une inégalité de Cauchy-Schwarz montre que, pour  $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ,

$$\begin{aligned} \|Kf\|_{L^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^d} k(x, y)f(y) dy \right|^2 dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \left( \int_{\mathbb{R}^d} |k(x, y)|^2 dy \right) \left( \int_{\mathbb{R}^d} |f(z)|^2 dz \right) dx \\ &= \|k\|_{L^2(\mathbb{R}^{2d})}^2 \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2, \end{aligned}$$

ce qui montre que  $K \in \mathcal{L}(E)$  avec  $\|K\| \leq \|k\|_{L^2(\mathbb{R}^{2d})}$ .

**Exercice 4.8.** Soit  $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ . On note  $A$  l'opérateur qui à  $u$  associe la suite  $v = Au$  de terme général  $v_i = (-1)^i u_i$ . Montrer que pour  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $A \in \mathcal{L}(\ell^p, \ell^p)$  et que  $A$  est de norme 1. Reprendre l'exercice avec l'opérateur qui à  $u$  associe la suite  $v = Bu$  de terme général  $v_i = u_{i+1}$ .

**Correction.** On prouve les résultats pour  $1 \leq p < +\infty$ , le cas  $p = +\infty$  se traitant de manière similaire. Pour la première application linéaire,

$$\|Au\|_{\ell^p}^p = \sum_{i=0}^{+\infty} |(-1)^i u_i|^p = \sum_{i=0}^{+\infty} |u_i|^p = \|u\|_{\ell^p}^p.$$

On en déduit immédiatement que  $A \in \mathcal{L}(\ell^p, \ell^p)$  est de norme 1. Pour le second cas, on note que

$$\|Bu\|_{\ell^p}^p = \sum_{i=0}^{+\infty} |u_{i+1}|^p \leq \sum_{i=0}^{+\infty} |u_i|^p = \|u\|_{\ell^p}^p.$$

On en déduit immédiatement que  $A \in \mathcal{L}(\ell^p, \ell^p)$  est de norme inférieure ou égale à 1. Pour montrer que la norme est exactement 1, il suffit de trouver un élément  $u \in \ell^p$  pour lequel  $\|Bu\|_{\ell^p} = \|u\|_{\ell^p}$ . C'est le cas par exemple pour  $u = (0, 1, 0, \dots)$  car  $Bu = (1, 0, \dots)$ .

**Exercice 4.9.** Soit  $\gamma$  un réel non nul. On considère  $C_b^0(\mathbb{R})$ , le sous-espace vectoriel de  $C^0(\mathbb{R})$  composé des fonctions bornées (on vérifiera que c'est bien un espace de Banach). On définit l'opérateur  $A$  qui à  $f \in C_b^0(\mathbb{R})$  associe  $g = Af \in C_b^0(\mathbb{R})$  définie par  $g(t) = f(\gamma t)$  pour  $t \in \mathbb{R}$ . Montrer que  $A \in \mathcal{L}(C_b^0(\mathbb{R}), C_b^0(\mathbb{R}))$  et que  $A$  est de norme 1.

**Correction.** On note que  $C_b^0(\mathbb{R})$  est un sous-espace vectoriel fermé de l'espace de Banach  $C^0(\mathbb{R})$ . C'est donc bien un espace de Banach.

On fixe  $f \in C_b^0(\mathbb{R})$ . Il est clair que  $Af$  appartient à  $C^0(\mathbb{R})$  car c'est la composition de deux applications continues (à savoir  $t \mapsto \gamma t$  et  $f$ ). Par ailleurs,

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |g(t)| = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(\gamma t)| = \sup_{s \in \mathbb{R}} |f(s)|,$$

ce qui montre que  $\|Af\|_{C^0(\mathbb{R})} = \|f\|_{C^0(\mathbb{R})}$ . Ainsi,  $A \in \mathcal{L}(C_b^0(\mathbb{R}), C_b^0(\mathbb{R}))$  est bien de norme 1.

## 4.2 Dualité

Un cas particulier important d'applications linéaires continues entre  $\mathbb{K}$ -ev normés est celui où l'espace d'arrivée est  $W = \mathbb{K}$ .

**Définition 4.2.** Soit  $V$  un  $\mathbb{K}$ -ev normé. L'espace vectoriel  $\mathcal{L}(V, \mathbb{K})$  est appelé l'espace dual de  $V$  et est noté  $V'$ . Un élément  $A \in V'$  est appelé une forme linéaire continue et son action sur un élément  $v \in V$  est notée à l'aide du crochet de dualité<sup>1</sup>  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V', V}$ . L'espace  $V'$  est équipé de la norme canonique

$$\|A\|_{V'} = \sup_{u \in V \setminus \{0\}} \frac{|\langle A, u \rangle_{V', V}|}{\|u\|_V}. \quad (4.4)$$

1. Cette notation, en lieu et place de  $A(u)$ , permet de placer  $A$  et  $u$  sur le même plan, comme dans les produits scalaires, et ce même si  $A$  et  $u$  ne sont pas dans le même espace.

**Exemple 4.2.** Soit  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  et  $c \in [a, b]$ . L'application qui à  $f \in C^0([a, b])$  associe  $f(c)$  est une forme linéaire continue sur  $C^0([a, b])$  de norme 1.

**Exemple 4.3.** L'application qui à  $u \in \ell^p$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , associe  $u_0$  est une forme linéaire continue sur  $\ell^p$  de norme 1.

**Exercice 4.10.** Prouver les assertions des Exemples 4.2 et 4.3.

**Correction.** Pour l'Exemple 4.2, on note que l'application est bien une forme linéaire. Pour voir qu'elle est continue de norme 1, on note que  $|f(c)| \leq \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| = \|f\|_{C^0}$ . Ceci montre que l'application est bornée donc continue, de norme inférieure ou égale à 1. Pour obtenir le cas d'égalité, il suffit de considérer des fonctions constantes.

Pour l'Exemple 4.3, on note également que c'est bien une forme linéaire. Comme  $|u_0| \leq \|u\|_{\ell^p}$ , cette application est bornée, de norme inférieure ou égale à 1. Pour obtenir le cas d'égalité, il suffit de considérer l'élément  $u = (1, 0, \dots)$ .

#### 4.2.1 Dualité dans les espaces de Hilbert : théorème de Riesz

**Théorème 4.1 (Théorème de Riesz).** Soit  $V$  un espace de Hilbert. Étant donné  $\varphi \in V'$ , il existe un unique  $u \in V$  (appelé représentant de  $\varphi$ ) tel que

$$\forall w \in V, \quad \langle \varphi, w \rangle_{V', V} = (u, w)_V.$$

De plus, on a  $\|u\|_V = \|\varphi\|_{V'}$ .

En d'autres termes, l'application de  $V'$  dans  $V$  qui à  $\varphi$  associe  $u$  est un isomorphisme isométrique permettant d'identifier l'espace de Hilbert  $V$  et son dual.

**Exemple 4.4.** La forme linéaire continue sur  $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$  qui à  $v \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$  associe  $v_0$  est représentée par  $u \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$  donné par  $u_0 = 1$  et  $u_i = 0$  pour  $i \geq 1$ .

**Exercice 4.11.** L'objectif de cet exercice est de prouver le Théorème 4.1. Soit  $\varphi \in V'$  et

$$K = \varphi^{-1}(0) = \{w \in V, \langle \varphi, w \rangle_{V', V} = 0\}.$$

L'espace  $K$  est par construction un sous-espace vectoriel fermé de  $V$ . Si  $K = V$ , alors  $\varphi = 0$  et il est clair que  $\varphi = 0$  peut être trivialement représentée par  $u = 0$ . Si  $K \neq V$ , on peut trouver  $v_0 \in V$  avec  $v_0 \notin K$ . On pose alors

$$v_1 = P_K v_0 \quad \text{et} \quad v = \frac{v_1 - v_0}{\|v_1 - v_0\|_V}.$$

- (1) Vérifier que  $\|v\|_V = 1$ ,  $\langle \varphi, v \rangle_{V', V} \neq 0$  et  $(v, w)_V = 0$  pour tout  $w \in K$ .
- (2) Montrer que  $u = \langle \varphi, v \rangle_{V', V} v$  est un représentant de  $\varphi$ . Pour ce faire, décomposer tout élément  $w \in V$  en  $w = \lambda v + z$  avec  $\lambda = \langle \varphi, w \rangle_{V', V} / \langle \varphi, v \rangle_{V', V}$  et  $z \in K$ .
- (3) Montrer l'unicité du représentant.
- (4) Montrer l'égalité des normes  $\|u\|_V = \|\varphi\|_{V'}$  en utilisant la caractérisation (4.4).

**Correction.** (1) Il est clair que  $\|v\|_V = 1$ . On calcule ensuite  $\langle \varphi, v \rangle_{V', V} = -\langle \varphi, v_0 \rangle_{V', V} / \|v_1 - v_0\|_V \neq 0$  car  $v_0 \notin K$ . Enfin,  $(v, w)_V = 0$  pour tout  $w \in K$  par (2.4).

(2) Avec la décomposition proposée, on introduit

$$z = w - \frac{\langle \varphi, w \rangle_{V',V}}{\langle \varphi, v \rangle_{V',V}} v.$$

On voit que  $\langle \varphi, z \rangle_{V',V} = 0$  et donc  $z \in K$ . Par ailleurs,

$$(u, w)_V = \lambda(u, v)_V + (u, z)_V = \frac{\langle \varphi, w \rangle_{V',V}}{\langle \varphi, v \rangle_{V',V}} \langle \varphi, v \rangle_{V',V} (v, v)_V + 0 = \langle \varphi, w \rangle_{V',V}.$$

(3) Si  $u_1$  et  $u_2 \in V$  sont des représentants de  $\varphi$ , on a  $(u_2 - u_1, w)_V = 0$  pour tout  $w \in V$  si bien que  $u_1 = u_2$ .

(4) On a  $\|u\|_V = |\langle \varphi, v \rangle_{V',V}| \leq \|\varphi\|_{V'}$  puisque  $\|v\|_V = 1$ . Par ailleurs, pour tout  $w \in V$ , on a

$$|\langle \varphi, w \rangle_{V',V}| = |(u, w)_V| \leq \|u\|_V \|w\|_V,$$

si bien que  $\|\varphi\|_{V'} \leq \|u\|_V$ .

**Remarque 4.2.** Lorsque plusieurs espaces de Hilbert sont en jeu (si on a deux espaces de Hilbert  $W \subset V$ ), on ne peut pas faire plusieurs identifications en même temps : le représentant  $\varphi$  dépend de l'espace  $V$  considéré, et si on identifie  $V$  et  $V'$ , alors on a en général  $W \neq W'$  (et inversement : si on identifie  $W$  et  $W'$  alors  $V \neq V'$ ).

#### 4.2.2 Cas des espaces $\ell^p$ (complément)

Discutons plus précisément les formes linéaires sur les espaces  $\ell^p$  pour  $1 \leq p \leq +\infty$ . On traite à part le cas  $p = +\infty$ . Soit donc, pour commencer,  $1 \leq p < \infty$  et  $p'$  tels que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,$$

avec  $p' = \infty$  si  $p = 1$ . Soit  $v \in \ell^{p'}$ . Alors, en posant pour tout  $u \in \ell^p$ ,

$$\langle F_v, u \rangle_{(\ell^p)', \ell^p} = \sum_{i \geq 0} u_i v_i, \quad (4.5)$$

on définit une forme linéaire continue sur  $\ell^p$ , i.e.  $F_v \in (\ell^p)'$ . De plus, l'application

$$v \in \ell^{p'} \mapsto F_v \in (\ell^p)',$$

est linéaire, bijective et isométrique. Ce résultat, dont la preuve fait l'objet de l'Exercice 4.12, permet de faire l'identification  $(\ell^p)' = \ell^{p'}$  pour  $1 \leq p < \infty$ .

En revanche, le dual de  $\ell^\infty$  ne coïncide pas avec  $\ell^1$  mais est strictement plus grand<sup>2</sup> que  $\ell^1$ .

**Exercice 4.12.** On introduit l'application ( $F_v$  étant défini par (4.5))

$$\begin{aligned} T : \ell^{p'} &\rightarrow (\ell^p)' \\ v &\mapsto F_v \end{aligned}$$

2. En fait, on peut identifier  $\ell^1$  au dual du  $\mathbb{K}$ -ev des suites de  $\mathbb{K}$  à support fini, cet espace étant strictement inclus dans  $\ell^\infty$ . Voir à ce sujet l'Exercice 4.13.

- (1) On commence par traiter le cas  $1 < p < \infty$ . Montrer que l'application  $T$  est bien définie, i.e. que  $T(v) \in (\ell^p)'$ , avec en fait  $\|T(v)\|_{(\ell^p)'} \leq \|v\|_{\ell^{p'}}$ . Indication : en utilisant l'inégalité de Hölder (1.10), montrer que si  $u \in \ell^p$  et  $v \in \ell^{p'}$ , la série  $\sum_{i \geq 0} u_i v_i$  est absolument convergente ;
- (2) Montrer que l'application  $T$  est linéaire et injective ;
- (3) Montrer que  $\|T(v)\|_{(\ell^p)'} = \|v\|_{\ell^{p'}}$ . Indication : il suffit de montrer que  $\|v\|_{\ell^{p'}} \leq \|T(v)\|_{(\ell^p)'}$ . Pour cela, se donner une suite  $v \in \ell^{p'}$  et considérer la suite  $u$  de terme général  $u_i = |v_i|^{p'-1} \operatorname{sgn}(v_i)$  ;
- (4) Montrer que l'application  $T$  est surjective. Indication : soit  $\varphi \in (\ell^p)'$  donné. Pour tout entier  $i \geq 0$ , poser  $e_i = (\delta_{ij})_{j \geq 0}$  où  $\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker et introduire la suite  $v$  de terme général  $v_i = \varphi(e_i)$ . Montrer que  $v \in \ell^{p'}$  et que  $T(v) = \varphi$  ;
- (5) Reprendre les étapes précédentes dans le cas où  $p = 1$  et  $p' = \infty$ .

**Correction.** (1) L'inégalité de Hölder montre que, pour  $u \in \ell^p$ ,

$$|\langle T(v), u \rangle_{(\ell^p)', \ell^p}| = \left| \sum_{i \geq 0} u_i v_i \right| \leq \sum_{i \geq 0} |u_i v_i| \leq \|u\|_{\ell^p} \|v\|_{\ell^{p'}}. \quad (4.6)$$

Ceci montre que  $T(v) \in (\ell^p)'$  avec  $\|T(v)\|_{(\ell^p)'} \leq \|v\|_{\ell^{p'}}$ .

- (2) L'application  $T$  est clairement linéaire. Pour montrer qu'elle est injective, on considère  $v \in \ell^{p'}$  tel que  $T(v) = 0$ . Pour un entier  $n$  fixé, on évalue ensuite le crochet de dualité contre la suite  $u$  telle que  $u_i = \delta_{i,n}$ . Ainsi,

$$0 = \langle T(v), u \rangle_{(\ell^p)', \ell^p} = v_n.$$

Ceci montre bien que  $v = 0$ .

- (3) On vérifie que la suite proposée dans l'énoncé est bien dans  $\ell^p$  : comme  $p = p'/(p' - 1)$ ,

$$\|u\|_{\ell^p}^p = \sum_{i \geq 0} |v_i|^{p(p'-1)} = \sum_{i \geq 0} |v_i|^{p'} = \|v\|_{\ell^{p'}}^{p'}.$$

On calcule ensuite

$$\langle T(v), u \rangle_{(\ell^p)', \ell^p} = \sum_{i \geq 0} |v_i|^{p'} = \|v\|_{\ell^{p'}}^{p'}.$$

Par ailleurs, en utilisant (4.6) et l'égalité  $\|u\|_{\ell^p} = \|v\|_{\ell^{p'}}^{p'/p} = \|v\|_{\ell^{p'}}^{p'-1}$ , on obtient

$$\|v\|_{\ell^{p'}}^{p'} \leq \|T(v)\|_{(\ell^p)'} \|u\|_{\ell^p} = \|T(v)\|_{(\ell^p)'} \|v\|_{\ell^{p'}}^{p'-1},$$

ce qui donne la majoration demandée.

- (4) On considère la suite  $v$  proposée dans l'énoncé. On fixe  $I \in \mathbb{N}$ . Pour la suite

$$u_I = \sum_{i=1}^I \operatorname{sgn}(v_i) |v_i|^{p'-1} e_i,$$

on a

$$\|u_I\|_{\ell^p}^p = \sum_{i=1}^I |v_i|^{p'},$$

et, en procédant comme à la question précédente,

$$|\varphi(u_I)| = \left| \sum_{i=1}^I \operatorname{sgn}(v_i) |v_i|^{p'-1} \varphi(e_i) \right| = \sum_{i=1}^I |v_i|^{p'} \leq \|\varphi\|_{(\ell^p)'} \|u_I\|_{\ell^p} = \|\varphi\|_{(\ell^p)'} \left( \sum_{i=1}^I |v_i|^{p'} \right)^{p'-1}.$$



On en déduit que, pour tout  $I \in \mathbb{N}$ ,

$$\sum_{i=1}^I |v_i|^{p'} \leq \|\varphi\|_{(\ell^p)'}.$$

On peut ainsi passer à la limite  $I \rightarrow +\infty$  et obtenir  $v \in \ell^{p'}$ . Par ailleurs, on vérifie facilement que  $T(v) = \varphi$ .

**Exercice 4.13.** On note  $c_0$  l'espace vectoriel formé par les suites de nombres (réels ou complexes) qui tendent vers 0. On munit  $c_0$  de la norme définie par

$$\forall u = (u_n)_{n \geq 0} \in c_0, \quad \|u\|_{c_0} = \max_{n \in \mathbb{N}} |u_n|.$$

Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on note  $e^k$  la suite  $(e_n^k)_{n \geq 0} \in c_0$  définie par  $e_n^k = \delta_{kn}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

(1) Soit  $a = (a_n)_{n \geq 0} \in \ell^1$ . Vérifier que l'application linéaire

$$L_a(u) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n u_n$$

définit une forme linéaire continue sur  $c_0$ , puis montrer que

$$\|L_a\|_{c_0'} = \|a\|_{\ell^1}.$$

(2) Soit  $\Lambda \in c_0'$ ,  $\lambda_k = \Lambda(e_k)$  et

$$u^l = \sum_{0 \leq k \leq l, \lambda_k \neq 0} \frac{|\lambda_k|}{\lambda_k} e^k.$$

Montrer que pour tout  $l \in \mathbb{N}$ ,  $u^l \in c_0$ ,  $\|u^l\|_{c_0} = 1$  et

$$\Lambda(u^l) = \sum_{k=1}^l |\lambda_k|.$$

En déduire que  $\lambda = (\lambda_k)_{k \geq 0} \in \ell^1$ .

(3) Montrer que  $\Lambda = L_\lambda$ .

(4) En déduire que  $\ell^1$  s'identifie au dual de  $c_0$ .

Concluons par une remarque utile pour le lecteur averti : l'espace dual de  $\ell^\infty$  est nettement plus délicat à caractériser que l'espace dual de  $c_0 \subset \ell^\infty$ . On sait toutefois que  $(\ell^\infty)' \subset c_0' = \ell^1$ .

### 4.2.3 Dualité entre les espaces $L^p$ (complément)

Nous admettons le résultat suivant (voir référence [1, pages 57 et 61]) :

**Théorème 4.2.** Soit  $1 < p < +\infty$  et  $p'$  le réel conjugué de  $p$ . L'espace vectoriel  $L^{p'}(\Omega)$  s'identifie au dual de l'espace  $L^p(\Omega)$ . Plus précisément, pour toute forme linéaire continue  $\varphi$  sur  $L^p(\Omega)$ , il existe un unique  $u \in L^{p'}(\Omega)$  tel que

$$\forall v \in L^p(\Omega), \quad \langle \varphi, v \rangle_{(L^p)', L^p} = \int_{\Omega} u v.$$

De plus,  $\|u\|_{L^{p'}} = \|\varphi\|_{(L^p)'}$ .

**Remarque 4.3.** On peut également montrer que  $L^\infty(\Omega)$  s'identifie au dual topologique de  $L^1(\Omega)$ . En revanche,  $L^1(\Omega)$  ne s'identifie pas au dual topologique de  $L^\infty(\Omega)$  (ce dual est en fait un espace plus grand).

### 4.3 Applications linéaires continues dans les espaces de Banach

**Théorème 4.3.** Soit  $V$  un espace vectoriel normé et  $W$  un espace de Banach. Alors,  $\mathcal{L}(V, W)$  équipé de la norme  $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(V, W)}$  est un espace de Banach.

**Exercice 4.14.** L'objectif de cet exercice est de prouver le Théorème 4.3. On introduit pour ce faire une suite de Cauchy  $(A_n)_{n \geq 0}$  dans  $\mathcal{L}(V, W)$ .

- (1) La première étape est de construire un opérateur limite candidat. Montrer que pour tout  $u \in V$ , la suite  $(A_n u)_{n \geq 0}$  est de Cauchy dans  $W$ . On notera  $l_u$  sa limite.
- (2) On définit une application  $A$  de  $V$  dans  $W$  qui à  $u \in V$  associe  $Au = l_u \in W$ . Montrer que  $A$  est linéaire et borné.
- (3) Conclure.

**Correction.** (1) Soit  $(A_n)_{n \geq 0}$  une suite de Cauchy dans  $\mathcal{L}(V, W)$ , i.e.,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \geq 0, \quad \forall n \geq N, \quad \forall p \geq 0, \quad \|A_{n+p} - A_n\|_{\mathcal{L}(V, W)} = \sup_{u \in V \setminus \{0\}} \frac{\|A_{n+p}u - A_n u\|_W}{\|u\|_V} \leq \varepsilon.$$

Pour tout  $u \in V$  donné, on a donc

$$\forall n \geq N, \quad \forall p \geq 0, \quad \|A_{n+p}u - A_n u\|_W \leq \varepsilon \|u\|_V.$$

Ceci montre que  $(A_n u)_{n \geq 0}$  est une suite de Cauchy dans  $W$ , qui est complet.

- (2) On montre facilement que  $A$  est linéaire en passant à la limite dans l'égalité  $A_n(u + \lambda v) = A_n u + \lambda A_n v$  pour  $(u, v) \in V^2$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ . En faisant tendre  $p \rightarrow \infty$ , on obtient

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \geq 0, \quad \forall n \geq N, \quad \forall u \in V, \quad \|Au - A_n u\|_W \leq \varepsilon \|u\|_V. \quad (4.7)$$

Pour  $\varepsilon = 1$ , on en déduit en particulier que

$$\forall u \in V, \quad \|Au\|_W \leq \|Au - A_n u\|_W + \|A_n u\|_W \leq (1 + \|A_n\|_{\mathcal{L}(V, W)}) \|u\|_V,$$

ce qui montre que  $A$  est continu.

- (3) L'inégalité (4.7) montre que  $A_n$  tend vers  $A$  dans  $\mathcal{L}(V, W)$ .

Le résultat suivant est une conséquence directe du Théorème 4.3, dans le cas où  $W = \mathbb{K}$  est un espace de dimension finie donc complet.

**Corollaire 4.1.** Soit  $V$  un espace vectoriel normé. Alors, son espace dual  $V'$  est un espace de Banach.

Concluons cette section par un résultat utile pour la suite.

**Proposition 4.4.** Soit  $A$  une application linéaire, définie sur un sous-espace vectoriel  $D$  d'un espace vectoriel normé  $V$ , à valeurs dans un espace de Banach  $W$ . On suppose que  $D$  est dense dans  $V$  et qu'il existe une constante  $C \in \mathbb{R}$  telle que  $\|Av\|_W \leq C\|v\|_V$  pour tout  $v \in D$ . Alors on peut étendre l'application  $A$  de manière unique en un opérateur  $A \in \mathcal{L}(V, W)$ .

**Exemple 4.5.** Illustrons l'intérêt de la proposition précédente sur un exemple concret. On considère une fonction  $g \in C^1([a, b])$ , et on définit l'application linéaire suivante sur  $D = C^2([a, b])$ , vu comme sous-espace vectoriel de  $V = C^1([a, b])$ , et à valeurs dans  $W = \mathbb{R}$  :

$$Af = \int_a^b g f''.$$

Evidemment,  $A$  est continue de  $D$  (muni de la norme  $C^2$ ) vers  $W$ . Mais en fait on peut étendre  $A$  en une application continue de  $C^1$  vers  $W$ . On va montrer pour ce faire qu'il existe  $C > 0$  tel que

$$|Af| \leq C\|f\|_{C^1}.$$

L'idée fondamentale est qu'on va utiliser la régularité de  $g$  pour réduire le nombre de dérivées en  $f$ , en effectuant une intégration par parties : pour tout  $f \in D$ ,

$$\int_a^b g f'' = - \int_a^b g' f' + g(b) f'(b) - g(a) f'(a).$$

Ainsi,

$$|Af| \leq \left( (b-a)\|g\|_{C^1} + 2\|g\|_{C^0} \right) \|f\|_{C^1}.$$

Ceci montre que l'on peut étendre  $A$  en une forme linéaire sur  $C^1$ .

**Exercice 4.15.** Prouver la Proposition 4.4. Pour cela, on procède de manière constructive : on considère  $u \in V \setminus D$ , et on montre comment définir  $Au$  comme limite d'une suite  $(Au_n)$ . En introduisant une suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  d'éléments de  $D$  telle que  $\|u - u_n\|_V \rightarrow 0$  (on justifiera l'existence d'une telle suite), montrer qu'on peut définir  $Au$  de manière unique comme la limite de la suite  $(Au_n)_{n \geq 0}$ .

**Correction.** La suite  $(u_n)$  existe par définition de la densité de  $D$  dans  $V$ . Comme  $A$  est borné, on a

$$\|Au_n - Au_{n+p}\|_W \leq C\|u_n - u_{n+p}\|_V,$$

On en déduit que  $(Au_n)$  est une suite de Cauchy, qui converge donc vers un certain élément  $v \in W$ . On vérifie par ailleurs que  $v$  ne dépend pas de la suite choisie, en considérant deux suites distinctes  $(u_n^1)$  et  $(u_n^2)$  tendant vers  $u$ . En effet,

$$\|Au_n^1 - Au_n^2\|_W \leq C\|u_n^1 - u_n^2\|_V,$$

et le membre de droite tend vers 0 lorsque  $n \rightarrow +\infty$ . Ceci permet de définir une application qui à  $u$  associe la limite  $v$  de la suite  $(Au_n)$ . On vérifie facilement que cette application est linéaire et que  $\|A\|_{\mathcal{L}(V,W)} \leq C$ , ce qui permet de conclure.

## 4.4 Applications non-linéaires : théorème du point fixe de Picard

Nous étudions dans cette section une classe particulière d'applications dans les espaces de Banach : les applications contractantes. Nous allons voir qu'elles ont une propriété remarquable sur les espaces de Banach, celle d'avoir un unique point fixe. Insistons (lourdement) sur le fait que, contrairement aux applications des sections précédentes, les applications que nous considérons dans cette section ne sont pas nécessairement linéaires, ni même affines – voir par exemples les applications introduites dans les Sections 5.2.1 et 5.3.2.

**Définition 4.3.** Soit  $V$  un espace vectoriel normé,  $Z \subset V$  un sous-ensemble de  $V$ , et  $A$  une application de  $Z$  dans  $Z$ . On dit que  $A$  est contractante sur  $Z$  s'il existe un réel  $\alpha < 1$  tel que

$$\forall u, v \in Z, \quad \|Au - Av\|_V \leq \alpha \|u - v\|_V. \quad (4.8)$$

Une application contractante sur  $Z$  est en particulier continue sur  $Z$ . Noter qu'on ne demande pas que  $Z$  soit un sous-espace vectoriel : c'est un sous-ensemble quelconque à ce stade (ni ouvert, ni fermé, etc).

**Théorème 4.4 (Point fixe de Picard).** *Soit  $V$  un espace de Banach,  $Z \subset V$  un sous-ensemble fermé de  $V$ , et  $A$  une application contractante de  $Z$  dans  $Z$ . Alors, l'équation*

$$Au = u,$$

*admet une solution unique  $u_* \in Z$ . Cette solution est appelée le point fixe de  $A$ .*

Commençons par noter que  $A$  doit être une application d'un ensemble dans lui-même car il faut que  $Au$  et  $u$  soient dans le même ensemble. Notons également qu'on peut considérer le cas<sup>3</sup>  $Z = V$  lorsque l'application  $A$  est contractante sur tout l'espace  $V$ . Rappelons enfin que  $Z$  n'est pas a priori un sous-espace vectoriel. Dans les applications pratiques de ce théorème, c'est typiquement une boule centrée sur un élément de l'espace  $V$ .

**Exercice 4.16.** *L'objectif de cet exercice est de prouver le Théorème 4.4.*

- (1) *Le premier pas est de construire une solution possible. Pour ce faire, soit  $u_0 \in Z$  quelconque et  $(u_n)_{n \geq 0}$  la suite de  $Z$  définie par  $u_{n+1} = Au_n$ . Montrer que  $\|u_{n+1} - u_n\|_V \leq \alpha^n \|u_1 - u_0\|_V$  et en déduire que la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  est convergente dans  $Z$ .*
- (2) *On note  $u_* \in Z$  la limite de la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$ . Montrer que  $u_*$  est un point fixe.*
- (3) *Montrer l'unicité en introduisant deux solutions  $u_{*,1}$  et  $u_{*,2}$  dans  $Z$ .*

**Correction.** (1) On constate que

$$\|u_{n+1} - u_n\|_V = \|Au_n - Au_{n-1}\|_V \leq \alpha \|u_n - u_{n-1}\|_V \leq \alpha^n \|u_1 - u_0\|_V,$$

par une récurrence immédiate. On en déduit que la série de terme général  $u_{n+1} - u_n$  est normalement convergente. L'espace  $V$  étant complet, on déduit du Théorème 1.1 que la série de terme général  $u_{n+1} - u_n$  est convergente dans  $V$ , et donc que la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  est convergente dans  $Z$  (qui est fermé).

- (2) En passant à la limite dans la relation  $u_{n+1} = Au_n$ , il vient  $Au_* = u_*$  puisque (4.8) implique la continuité de  $A$ .
- (3) Si on a 2 solutions  $u_{*,1}$  et  $u_{*,2}$  dans  $Z$ , alors

$$\|u_{*,1} - u_{*,2}\|_V = \|Au_{*,1} - Au_{*,2}\|_V \leq \alpha \|u_{*,1} - u_{*,2}\|_V,$$

ce qui montre que  $(1 - \alpha)\|u_{*,1} - u_{*,2}\|_V \leq 0$  et donc  $u_{*,1} = u_{*,2}$ .

**Exercice 4.17.** *On considère l'application définie dans l'Exercice 4.5 et on reprend les notations de cet exercice.*

- (1) *Montrer que si  $\rho(b - a) < 1$ , l'application  $A$  est contractante. On conservera cette hypothèse pour la suite de l'exercice.*
- (2) *Soit  $g$  donnée dans  $E$ . Montrer que l'équation intégrale*

$$h(x) - \int_a^b k(x, y)h(y) dy = g(x), \quad x \in [a, b], \quad (4.9)$$

*a au plus une solution dans  $E$ .*

- (3) *Pour un entier  $n > 0$ , on note  $A^n$  l'application  $A \circ \dots \circ A$  obtenue en composant l'application  $A$   $n$  fois avec elle-même. On utilise la convention  $A^0 = \text{id}$ . Montrer que la série de terme général  $A^n g$  est convergente puis que  $h = \sum_{n \geq 0} A^n g$  définit une solution admissible de l'équation intégrale (4.9).*

3. On se convaincra en effet qu'un espace de Banach est toujours fermé...

- Correction.** (1) La borne (4.3) permet directement de conclure que  $A$  est contractante.
- (2) On reformule l'équation intégrale sous la forme  $h - Ah = g$ , l'égalité ayant lieu dans  $E$ . Soient  $h_1, h_2$  deux solutions de l'équation intégrale (4.9). Alors,  $h_1 - Ah_1 = h_2 - Ah_2$  et donc  $A(h_1 - h_2) = h_1 - h_2$ . Comme  $A$  est contractante, il existe un unique élément tel que  $Au = u$ . Par ailleurs, il est clair que  $u = 0$  est une solution admissible de l'équation  $Au = u$ . On en déduit donc que  $h_1 - h_2 = 0$ , ce qui donne l'unicité de la solution.
- (3) Une récurrence immédiate montre que

$$\|A^n g\|_E \leq (\rho(b-a))^n \|g\|_E.$$

Ceci montre que la série  $\sum_{n \geq 0} A^n g$  est convergente, avec

$$\left\| \sum_{n \geq 0} A^n g \right\|_E \leq \sum_{n \geq 0} \|A^n g\|_E \leq \frac{1}{1 - \rho(b-a)} \|g\|_E.$$

La fonction  $h \in E$  est donc bien définie car  $E$  est un espace de Banach (voir Théorème 1.1). Par ailleurs, en considérant

$$h_N = \sum_{n=0}^N A^n g,$$

on voit que  $h_N - Ah_N = g - A^{N+1}g$  et  $h_N \rightarrow h$  dans  $E$ . En passant à la limite lorsque  $N \rightarrow +\infty$ , on en déduit que  $h$  est solution de (4.9).

**Remarque 4.4.** On pourrait directement montrer l'existence et l'unicité de la solution en considérant l'application  $B : E \rightarrow E$  définie par  $Bf = Af + g$ , dont on vérifie qu'elle est contractante. L'intérêt de l'approche utilisée dans l'exercice précédent est son caractère constructif.

**Exercice 4.18.** Soit  $V$  un espace de Banach et  $A$  une application de  $V$  dans  $V$ . On suppose trouvé un entier  $p > 0$  tel que  $A^p$  soit contractante sur  $V$ . Montrer que  $A$  admet un point fixe unique.

**Correction.** L'application  $A^p$  admet un unique point fixe  $u \in V$  par le Théorème 4.4. On a alors, en composant une fois de plus par  $A$ ,

$$A(A^p u) = Au = A^p(Au).$$

Ceci montre que  $Au$  est également un point fixe de  $A^p$ . Par l'unicité du point fixe de  $A^p$ , on obtient  $Au = u$ , ce qui donne l'existence d'un point fixe pour  $A$ . Pour l'unicité, on note que si  $u_1$  et  $u_2$  sont des points fixes de  $A$ , alors ce sont également des points fixes de  $A^p$ . L'unicité du point fixe de  $A^p$  permet d'établir que  $u_1 = u_2$ , et donne ainsi l'unicité du point fixe de  $A$ .



---

## Intégration numérique des équations différentielles ordinaires

---

<b>5.1</b>	<b>Motivation : dynamique céleste</b>	<b>59</b>
<b>5.2</b>	<b>Etude du problème continu</b>	<b>61</b>
5.2.1	Existence et unicité locales	61
5.2.2	Existence et unicité globales (complément)	62
<b>5.3</b>	<b>Approximation par les méthodes à un pas</b>	<b>63</b>
5.3.1	Principe de l'approximation	64
5.3.2	Exemples de méthodes numériques	64
5.3.3	Implémentation pratique des schémas implicites (complément)	65
<b>5.4</b>	<b>Analyse d'erreur</b>	<b>66</b>
5.4.1	Erreur de troncature locale	66
5.4.2	Stabilité	70
5.4.3	Convergence	72

---

L'objectif de ce chapitre est de présenter quelques méthodes numériques pour approcher des solutions d'équations différentielles ordinaires (EDO), qui sont un problème de Cauchy de la forme suivante :

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0, \quad (5.1)$$

où  $y : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^d$  est une fonction du temps à valeurs vectorielles, et  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  est un champ de vecteurs. On peut réécrire ce problème sous une formulation intégrale, qui peut être plus agréable pour l'étude théorique car elle demande moins d'hypothèses de régularité sur les objets en jeu, et qui est également utile pour proposer des schémas numériques :

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds. \quad (5.2)$$

Cette formulation est équivalente à (5.1) si  $f$  est continue.

Nous commençons par présenter quelques applications en Section 5.1 (et notamment un problème modèle, la dynamique du système solaire). Nous nous tournons ensuite vers l'étude mathématique du problème continu (5.1) en Section 5.2, et discutons en particulier son caractère bien posé. Une fois ceci établi, on peut sereinement se tourner vers l'approximation numérique de (5.1) par le biais des méthodes à un pas, les plus simples (voir Section 5.3). L'analyse de l'erreur ainsi commise est menée en Section 5.4.

### 5.1 Motivation : dynamique céleste

Voici quatre motivations pour étudier l'intégration numérique des EDOs :

- (1) le calcul numérique très précis d'une évolution temporelle : par exemple pour déterminer la trajectoire de la fusée qui va mettre en orbite un satellite, ou de la sonde spatiale qui va passer au ras de Jupiter pour ensuite aller explorer les confins de notre univers, ou de la météorite que l'on voit arriver près de la Terre (nous touchera-t-elle ou non ?). Dans ces cas, on se donne un horizon de temps fini et on cherche à reproduire au mieux la trajectoire du système sur ce temps.
- (2) un résultat en temps long ou la limite en temps d'une évolution, par exemple la convergence vers une trajectoire périodique ou un cycle. Citons par exemple l'équation de Lotka–Volterra, qui est un modèle simplifié de dynamique des populations ; ou l'intégration en temps long de la dynamique Hamiltonienne pour calculer des moyennes microcanoniques en physique statistique, ou en dynamique céleste pour déterminer la stabilité des orbites d'un système planétaire.
- (3) la simulation de problèmes mélangeant plusieurs échelles de temps : un cas frappant est celui de la cinétique chimique entrant dans les modèles de pollution de l'air ou en génie chimique. Certaines transformations dans ces systèmes sont très rapides et/ou oscillantes (constantes de réaction très grandes ou concentrations importantes), alors que d'autres sont très lentes. Une bonne méthode numérique devrait pouvoir traiter toutes ces échelles de temps simultanément, et ne pas caler le pas de temps sur les événements les plus rapides, sans quoi les événements les plus lents ne pourront pas être résolus.
- (4) enfin, les méthodes d'intégration en temps des EDOs constituent une brique fondamentale pour l'intégration en temps d'équations plus compliquées : les équations aux dérivées partielles, où il faut considérer à la fois une discrétisation en espace et en temps ; ou les équations différentielles stochastiques, rencontrées notamment dans le cadre de la finance quantitative ou en physique statistique numérique.

### Un exemple précis : la dynamique céleste

On décrit ici un système qui correspond à la partie « extérieure » du système solaire : on représente Jupiter, Saturne, Uranus, Neptune et Pluton (positions respectives  $q_i \in \mathbb{R}^3$  pour  $i = 1, \dots, 5$ ), et le Soleil auquel on agrège en fait les quatre planètes intérieures que sont Mercure, Vénus, la Terre et Mars (position  $q_0 \in \mathbb{R}^3$ ). L'énergie potentielle du système est

$$V(q) = \sum_{0 \leq i < j \leq N-1} U_{ij}(|q_i - q_j|), \quad U_{ij}(r) = -G \frac{m_i m_j}{r},$$

où  $|\cdot|$  désigne la norme euclidienne dans  $\mathbb{R}^3$ , et  $N = 6$ . Les masses des planètes sont notées  $m_i$ , et  $p_i = m_i v_i$  est leur quantité de mouvement. L'énergie totale du système dans la configuration  $(q, p) \in \mathbb{R}^{6N}$  est donnée par le Hamiltonien

$$H(q, p) = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{p_i^2}{2m_i} + V(q).$$

L'évolution en temps est régie par la dynamique Hamiltonienne

$$\begin{cases} \dot{q}_i(t) = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{p_i(t)}{m_i}, \\ \dot{p}_i(t) = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\nabla_{q_i} V(q(t)). \end{cases} \quad (5.3)$$

Noter que, quitte à introduire l'inconnue  $y = (q, p)$ , on peut récrire cette dynamique sous la forme générale

$$\dot{y}(t) = f(y), \quad f(y) = \begin{pmatrix} \nabla_p H \\ -\nabla_q H \end{pmatrix}. \quad (5.4)$$

Un calcul simple (le faire en exercice) montre que l'énergie du système est constante au cours du temps :  $H(q(t), p(t)) = H(q(0), p(0))$ . Une notion de stabilité pertinente est par exemple la conservation de l'énergie totale en temps long.



## 5.2 Etude du problème continu

### 5.2.1 Existence et unicité locales

On considère une norme  $|\cdot|$  sur  $\mathbb{R}^d$ , et on note  $B(y_0, r) = \{y \in \mathbb{R}^d, |y - y_0| \leq r\}$  la boule fermée de centre  $y_0$  et de rayon  $r$ .

**Théorème 5.1 (Cauchy–Lipschitz).** *Soit  $(t_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$  fixés. On suppose que*

- (i)  $f \in C^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$  ;
- (ii) *il existe  $R, \tau, L > 0$  (dépendants a priori de  $t_0, y_0$ ) tels que*

$$\forall (t, y_1, y_2) \in [t_0 - \tau, t_0 + \tau] \times B(y_0, R)^2, \quad |f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|. \quad (5.5)$$

*Alors il existe un temps  $T > 0$  tel que le problème de Cauchy (5.1) admette une unique solution dans  $C^1([t_0, t_0 + T], \mathbb{R}^d)$ .*

**Remarque 5.1 (Sur la condition (ii) du Théorème 5.1).** *La seconde condition du Théorème 5.1 signifie que  $f$  est localement Lipschitzienne par rapport à la variable d'espace, uniformément en temps au voisinage d'un temps fixé. Notons que cette condition est plus faible que demander que  $f$  soit localement Lipschitzienne en espace-temps. Un exemple est fourni par  $f(t, y) = \theta(t)F(y)$  avec  $F$  localement Lipschitzienne : pour  $\theta(t) = \sqrt{t}$ , on voit que  $f$  n'est pas localement Lipschitzienne en espace-temps, mais satisfait bien (5.5).*

**Remarque 5.2.** *L'unicité de la solution, localement en temps, permet en fait aussi de construire des solutions sur les temps  $t \in ]t_0 - T, t_0]$ . C'est pourquoi nous conservons l'hypothèse (5.5) qui demande le caractère Lipschitz du champ de force pour des temps  $t < t_0$  (ce dont on n'a en fait pas besoin si on ne cherche qu'à assurer le caractère bien posé de la dynamique pour des temps  $t \geq t_0$ ).*

**Exercice 5.1.** *On va prouver le Théorème 5.1. On introduit, pour un réel  $R > 0$  et un temps  $T \in ]0, \tau]$  donnés, le sous-ensemble fermé de  $C^0([t_0, t_0 + T], \mathbb{R}^d)$*

$$\mathcal{B}_{R,T} = \left\{ z \in C^0([t_0, t_0 + T], \mathbb{R}^d) \mid \forall t \in [t_0, t_0 + T], \|z(t) - y_0\| \leq R \right\},$$

*ainsi que l'application  $A : \mathcal{B}_{R,T} \rightarrow C^0([t_0, t_0 + T], \mathbb{R}^d)$  définie par*

$$\forall t \in [t_0, t_0 + T], \quad (Az)(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, z(s)) ds.$$

*Notons que  $y$  est solution de (5.1) sur l'intervalle de temps  $[t_0, t_0 + T]$  si et seulement si  $Ay = y$ . Pour  $R > 0$  donné, on va donc choisir  $T > 0$  suffisamment petit pour que  $A$  soit une contraction sur  $\mathcal{B}_{R,T}$ , ce qui donnera le résultat au vu du Théorème 4.4.*

- (1) *Montrer que si  $z \in \mathcal{B}_{R,T}$ , il existe une constante  $K_{R,T} > 0$  telle que  $|Az(t) - y_0| \leq K_{R,T}T$ . En déduire que  $A$  est bien une application (non-linéaire) de  $\mathcal{B}_{R,T}$  dans lui-même lorsque  $T > 0$  est pris suffisamment petit.*
- (2) *Montrer que  $A$  est une contraction lorsque  $LT < 1$  (où  $L$  est la constante apparaissant dans (5.5)).*
- (3) *Conclure.*

**Correction.** (1) On définit

$$K_{R,T} = \sup \{ |f(\theta, y)|, \theta \in [t_0, t_0 + T], y \in B(y_0, R) \},$$

qui est bien fini car l'ensemble  $[t_0, t_0 + T] \times B(y_0, R)$  est compact et la fonction  $f$  est continue. On a donc, pour  $z \in \mathcal{B}_{R,T}$ ,

$$|Az(t) - y_0| \leq \int_{t_0}^{t_0+T} |f(s, z(s))| ds \leq K_{R,T}T.$$

On note à ce stade que  $K_{R,T_1} \leq K_{R,T_2}$  si  $T_1 \leq T_2$ . On se restreint par la suite à  $T \leq 1$ . Dans ce cas, le choix

$$T \leq \min \left( 1, \frac{R}{K_{R,1}} \right)$$

assure que  $|Az(t) - y_0| \leq R$  pour tout  $t \in [t_0, t_0 + T]$ , et donc  $Az \in \mathcal{B}_{R,T}$ . Ainsi,  $A$  est bien une application (non-linéaire) de  $\mathcal{B}_{R,T}$  dans lui-même.

(2) Pour  $z_1, z_2 \in \mathcal{B}_{R,T}$  donnés, et  $t \in [t_0, t_0 + T]$ ,

$$\begin{aligned} |Az_1(t) - Az_2(t)| &= \left| \int_{t_0}^t f(s, z_1(s)) - f(s, z_2(s)) ds \right| \leq \int_{t_0}^{t_0+T} |f(s, z_1(s)) - f(s, z_2(s))| ds \\ &\leq LT \max_{s \in [t_0, t_0+T]} |z_1(s) - z_2(s)|. \end{aligned}$$

Ceci montre que  $\|Az_1 - Az_2\|_{C^0} \leq LT\|z_1 - z_2\|_{C^0}$ . Ainsi,  $A$  est une contraction sur  $\mathcal{B}_{R,T}$  lorsque  $LT < 1$ .

(3) Au final, on choisit donc par exemple

$$T = \min \left( 1, \tau, \frac{R}{K_{R,1}}, \frac{1}{2L} \right),$$

et on obtient l'existence et l'unicité d'une solution continue sur  $[t_0, t_0 + T]$  avec le Théorème 4.4. Le fait que la solution soit en fait  $C^1$  se lit directement sur la formulation intégrale (5.2).

On peut, de proche en proche, définir une unique solution sur un intervalle de temps maximal  $[0, t_{\max}[$  lorsque le champ de force  $f$  est localement Lipschitzien. Si on n'a pas de solution globale (au sens où  $t_{\max} < +\infty$ ), on montre qu'on a explosion de la solution en temps fini :  $|y(t)| \rightarrow +\infty$  lorsque  $t \rightarrow t_{\max}$ . Par exemple,  $f(t, y) = 1 + y^2$  est continue et localement lipschitzienne en  $y$ ; le problème de Cauchy avec la condition initiale  $y(0) = 0$  admet pour unique solution maximale la fonction  $y(t) = \tan t$ , définie sur l'intervalle ouvert  $] -\pi/2, \pi/2[$ .

**Remarque 5.3.** Le caractère lipschitzien de  $f$  est essentiel pour assurer l'unicité de la solution. Ainsi, pour  $d = 1$  et  $f(u) = \sqrt{u}$ , le problème de Cauchy (5.1) avec  $u_0 = 0$  admet la famille de solutions suivante pour tout  $c > 0$  :

$$u_c(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq c, \\ \frac{1}{4}(t - c)^2 & \text{si } t \geq c. \end{cases}$$

### 5.2.2 Existence et unicité globales (complément)

L'existence et l'unicité de la solution globale ( $t_{\max} = +\infty$ ) sont assurées dans certains cas. On montre ce résultat en assurant que  $|y(t)|$  reste fini si  $t < +\infty$ .

- (i) Le premier cas est celui où  $f(t, \cdot)$  est uniformément Lipschitzienne en  $y$ , avec une constante de Lipschitz  $L(t)$  continue.
- (ii) Le second cas est celui où la croissance de  $f$  est au plus affine :

$$|f(t, y)| \leq c(t) + L(t)|y|,$$

avec des fonctions  $c, L$  localement intégrables. On a en effet, en partant de la formulation intégrale (5.2),

$$|y(t)| \leq |y_0| + \int_0^t (c(s) + L(s)|y(s)|) ds. \quad (5.6)$$

En introduisant

$$M(t) = \int_0^t L(s)|y(s)| ds \geq 0, \quad a(t) = L(t) \left( |y_0| + \int_0^t c(s) ds \right),$$

on peut reformuler (5.6) sous la forme  $\dot{M}(t) \leq a(t) + L(t)M(t)$ , d'où, par le lemme de Gronwall,<sup>1</sup>

$$0 \leq M(t) \leq \int_0^t a(s) \exp \left( \int_s^t L \right) ds.$$

En reportant dans (5.6), on obtient bien une borne supérieure finie pour  $|y(t)|$ .

- (iii) Un dernier cas est celui où il existe une fonction de Lyapounov, c'est-à-dire une fonction  $W \in C^1(\mathbb{R}^d)$  telle que  $W(x) \rightarrow +\infty$  lorsque  $|x| \rightarrow +\infty$ . Comme  $W$  est alors uniformément minorée, on peut lui ajouter une constante de telle manière à ce que  $W \geq 1$ . Enfin, on demande que, pour tout  $t \geq 0$  et  $x \in \mathbb{R}^d$ , on ait

$$f(t, x) \cdot \nabla W(x) \leq cW(x) < +\infty.$$

Dans ce cas, on a alors

$$\frac{d}{dt} [W(y(t))] = f(t, y(t)) \cdot (\nabla W)(y(t)) \leq cW(y(t)),$$

ce qui montre que  $W(y(t)) \leq W(y_0) e^{ct}$ , et assure ainsi que la norme de la solution ne peut pas exploser en temps fini. Cette technique est très utile pour établir l'existence et l'unicité dans le cas où  $f$  n'est pas globalement Lipschitzienne et croît plus que linéairement à l'infini. On peut appliquer cela au système très simple  $\dot{y}(t) = -y(t)^3$  pour lequel  $W(x) = 1 + x^4$  est une fonction de Lyapounov.

### 5.3 Approximation par les méthodes à un pas

On va à présent décrire des méthodes numériques pour approcher la solution de (5.1) sur un intervalle de temps fini  $[0, T]$ . Plus précisément, on va considérer des temps  $t_0 = 0 < t_1 < \dots <$

---

1. Rappelons rapidement le calcul : on note que

$$\frac{d}{dt} \left[ M(t) \exp \left( - \int_0^t L(s) ds \right) \right] = (\dot{M}(t) - L(t)M(t)) \exp \left( - \int_0^t L(s) ds \right) \leq a(t) \exp \left( - \int_0^t L(s) ds \right),$$

d'où, par intégration et en tenant compte du fait que  $M(0) = 0$ ,

$$M(t) \exp \left( - \int_0^t L(s) ds \right) \leq \int_0^t a(s) \exp \left( - \int_0^s L(r) dr \right) ds,$$

ce qui permet de conclure en multipliant les deux membres de l'inégalité par  $\exp \left( \int_0^t L(s) ds \right)$ .

$t_N = T$ , et on va noter  $y^n$  l'approximation numérique de la solution exacte  $y(t_n)$ . Par la suite, on notera  $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$  les incréments de temps strictement positifs. Souvent, on choisira un pas de temps uniforme  $\Delta t > 0$ , auquel cas  $t_n = n\Delta t$ , le nombre total de pas d'intégration étant <sup>2</sup>  $N = T/\Delta t$ .

Pour rester le plus simple possible, nous évoquerons seulement les méthodes à un pas, et non les méthodes multi-pas, bien qu'elles soient en général plus précises à coût de calcul fixé (cependant, leur stabilité demande une attention particulière, voir l'Exercice 5.6 pour une illustration).

### 5.3.1 Principe de l'approximation

La construction des méthodes à un pas repose sur une discrétisation de la formulation intégrale (5.2) sur l'intervalle de temps  $[t_n, t_{n+1}]$  par une règle de quadrature. De manière abstraite, on peut ainsi écrire une relation de récurrence permettant de calculer itérativement la trajectoire numérique

$$y^{n+1} = y^n + \Delta t_n \Phi_{\Delta t_n}(t_n, y^n), \quad (5.7)$$

où  $\Phi_{\Delta t_n}(t_n, y^n)$  est une approximation de

$$\frac{1}{t_{n+1} - t_n} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(s, y(s)) ds.$$

Les méthodes ainsi obtenues sont appelées méthodes de Runge–Kutta. Elles sont décomposées en deux catégories selon qu'elles sont *explicites* (la nouvelle configuration peut être obtenue directement de la précédente) ou *implicites* (pour obtenir la nouvelle configuration, il faut résoudre un problème linéaire ou nonlinéaire en fonction de la dépendance de  $f$  en  $y$ ).

### 5.3.2 Exemples de méthodes numériques

(1) Méthodes explicites :

(i) Euler explicite :  $y^{n+1} = y^n + \Delta t_n f(t_n, y^n)$  ;

(ii) méthode de Heun :  $y^{n+1} = y^n + \frac{\Delta t_n}{2} \left( f(t_n, y^n) + f(t_{n+1}, y^n + \Delta t_n f(t_n, y^n)) \right)$ .

(2) Méthodes implicites :

(i) Euler implicite :  $y^{n+1} = y^n + \Delta t_n f(t_{n+1}, y^{n+1})$  ;

(ii) méthode des trapèzes (ou Crank–Nicolson) :  $y^{n+1} = y^n + \frac{\Delta t_n}{2} \left( f(t_n, y^n) + f(t_{n+1}, y^{n+1}) \right)$  ;

(iii) méthode du point milieu :  $y^{n+1} = y^n + \Delta t_n f\left(\frac{t_n + t_{n+1}}{2}, \frac{y^n + y^{n+1}}{2}\right)$ .

On peut bien sûr construire des méthodes plus compliquées et plus précises, voir par exemple [5] pour des méthodes de Runge–Kutta d'ordre supérieur (explicites ou implicites).

**Remarque 5.4.** Pour les méthodes explicites, on identifie assez simplement la fonction d'incrément  $\Phi_{\Delta t}$  dans (5.7). Pour les schémas implicites, cette tâche est moins facile. Prenons l'exemple du schéma d'Euler implicite : l'application  $\Phi_{\Delta t}$  est définie de manière implicite par la relation

$$\Phi_{\Delta t_n}(t_n, y^n) = f\left(t_n + \Delta t_n, y^n + \Delta t_n \Phi_{\Delta t_n}(t_n, y^n)\right).$$

Comme nous allons le montrer dans le point suivant, on peut s'assurer que  $\Phi_{\Delta t_n}(t_n, y^n)$  est bien définie si  $\Delta t_n$  est assez petit.

---

2. On suppose que ce nombre est entier ; sinon on peut toujours changer un peu le pas de temps pour que ce soit le cas.

### 5.3.3 Implémentation pratique des schémas implicites (complément)

Dans les schémas implicites, il faut résoudre une équation nonlinéaire pour obtenir l'approximation  $y^{n+1}$  partant de  $y^n$ . Il y a donc un surcoût de calcul dans l'utilisation de ces schémas, mais qui vaut souvent le coup car on a une stabilité accrue et on peut utiliser des pas de temps plus grands.

Avant de chercher à résoudre numériquement l'équation donnant  $y^{n+1}$ , il faut déjà garantir que  $y^{n+1}$  existe et est unique ! On peut utiliser pour ce faire le théorème de point-fixe de Picard. Par exemple, le schéma d'Euler implicite  $y^{n+1} = y^n + \Delta t_n f(t_{n+1}, y^{n+1})$  peut se réécrire

$$y^{n+1} = F(y^{n+1}), \quad F(y) = y^n + \Delta t_n f(t_{n+1}, y).$$

On a existence et unicité de  $y^{n+1}$  lorsque la fonction  $f(t_{n+1}, \cdot)$  est globalement Lipschitzienne de constante  $\Lambda_f(t_{n+1})$  :

$$|f(t_{n+1}, y_1) - f(t_{n+1}, y_2)| \leq \Lambda_f(t_{n+1}) |y_1 - y_2|,$$

et que le pas de temps est suffisamment petit pour satisfaire

$$\Delta t_n \Lambda_f(t_{n+1}) < 1. \quad (5.8)$$

En effet, cette propriété implique que l'application  $F$  est contractante sur  $\mathbb{R}^d$  :

$$|F(y_1) - F(y_2)| \leq \Delta t_n \Lambda_f(t_{n+1}) |y_1 - y_2|.$$

On conclut ensuite avec le Théorème 4.4. La condition (5.8) impose donc une borne supérieure sur les pas de temps admissibles.

Le calcul pratique des itérations d'un schéma implicite peut se faire par une méthode numérique s'inspirant de la stratégie de point fixe utilisée pour montrer l'existence et l'unicité de  $y^{n+1}$  : on part d'un premier essai obtenu par une méthode explicite, que l'on affine ensuite par des itérations de point-fixe, d'où le nom de stratégie « prédictor/correcteur ». Illustrons cela pour le schéma d'Euler implicite. On peut partir d'un état obtenu par un schéma d'Euler explicite

$$z^{n+1,0} = y^n + \Delta t_n f(t_n, y^n),$$

et le corriger ensuite par des itérations de point-fixe selon

$$z^{n+1,k+1} = y^n + \Delta t_n f(t_{n+1}, z^{n+1,k}).$$

Ainsi,

$$z^{n+1,k+1} - y^{n+1} = \Delta t_n \left( f(t_{n+1}, z^{n+1,k}) - f(t_{n+1}, y^{n+1}) \right).$$

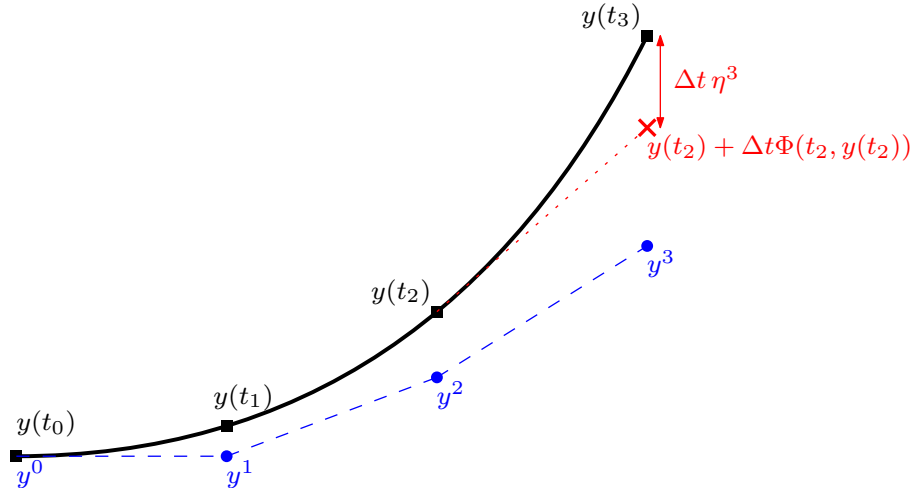
Sous la condition (5.8), on a bien  $z^{n+1,k} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} y^{n+1}$ , avec une erreur  $|z^{n+1,k} - y^{n+1}|$  qui décroît de manière exponentielle. En pratique, on n'effectue qu'un nombre fini d'itérations de point-fixe, en utilisant un critère de convergence tel que

$$|z^{n+1,k+1} - z^{n+1,k}| \leq \varepsilon |z^{n+1,0}|$$

pour une tolérance  $\varepsilon > 0$  donnée (le facteur multiplicatif  $|z^{n+1,0}|$  à droite permet de considérer un critère de convergence indépendant de l'échelle ou unités de la variable  $y$ ). On observe souvent une très bonne convergence dans les itérations de point-fixe, avec des erreurs relatives de l'ordre de  $10^{-8}$  en quelques itérations. Une alternative aux itérations de point-fixe est d'utiliser un algorithme de Newton, qui a une convergence plus rapide, mais qui demande que l'on parte suffisamment près de la solution  $y^{n+1}$ .

## 5.4 Analyse d'erreur

L'objectif de l'analyse d'erreur *a priori* est de donner une estimation de l'erreur commise par la méthode numérique en fonction des paramètres du problème (temps d'intégration, pas de temps, champ de force). L'idée générale est de remarquer qu'à chaque pas de temps on commet une erreur d'intégration locale (erreur de troncature dans la discrétisation de l'intégrale, à laquelle s'ajoutent souvent des erreurs d'arrondi), et que ces erreurs locales s'accumulent. Le contrôle de cette accumulation demande l'introduction d'une notion de stabilité adéquate, alors que les erreurs locales sont liées à une notion de consistance. On peut montrer qu'une méthode numérique stable et consistante est convergente.



**Fig. 5.1.** Trajectoire exacte  $t \mapsto y(t)$  (ligne pleine) vs. trajectoire numérique  $y^0, y^1, y^2, \dots$ . L'objectif est d'estimer la différence entre  $y(t_n)$  et  $y^n$ . L'analyse de cette erreur repose entre autres sur la notion d'erreur de consistance, qui est l'erreur commise sur un pas par la méthode numérique en supposant que le point de départ est sur la trajectoire exacte (terme  $\Delta t \eta^3$  quand on part de  $y(t_2)$  ici).

### 5.4.1 Erreur de troncature locale

L'erreur de troncature locale est l'erreur résiduelle que l'on obtiendrait si on appliquait le schéma numérique à la solution exacte. Elle est donc définie à l'itération  $n$  comme la différence entre la solution exacte à l'itération suivante, à savoir  $y(t_{n+1})$ , et l'approximation numérique obtenue en partant de  $y(t_n)$ , à savoir  $y(t_n) + \Delta t_n \Phi_{\Delta t_n}(t_n, y(t_n))$ , le tout divisé par  $\Delta t_n$ . Ainsi, l'erreur de troncature locale vaut par définition

$$\eta^{n+1} := \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n) - \Delta t_n \Phi_{\Delta t_n}(t_n, y(t_n))}{\Delta t_n}. \quad (5.9)$$

Notons que l'erreur de troncature a la même dimension physique que la dérivée en temps de  $y$ . La normalisation que nous employons dans ce cours permet d'interpréter  $\eta$  comme une erreur par unité de temps. Notons également que l'erreur de consistance est définie le long de la trajectoire exacte, et ne fait pas directement intervenir les itérés  $y^n$  du schéma numérique.

**Définition 5.1 (Consistance).** On note  $\Delta t = \max_{0 \leq n \leq N-1} \Delta t_n$  le pas de temps maximal. On dit qu'une méthode numérique est consistante si

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \max_{1 \leq n \leq N} |\eta^n| \right) = 0, \quad (5.10)$$

et qu'elle est consistante d'ordre  $p$  s'il existe une constante  $C$  telle que, pour tout  $0 \leq n \leq N-1$ ,

$$|\eta^{n+1}| \leq C(\Delta t_n)^p. \quad (5.11)$$

La constante  $C$  dépend en général de la régularité de la solution exacte.

Les preuves de consistance reposent sur des développements de Taylor de la solution exacte, et demandent donc de la régularité sur le champ de force  $f$ . On supposera toujours que le champ de force est aussi régulier que nécessaire par la suite. Notons que la régularité de la solution  $y$  découle de celle du champ de force. En effet, si  $f$  est continue, alors la solution de (5.1) est  $C^1$ . Si  $f$  est  $C^1$ , on voit alors que le membre de droite de (5.1) est  $C^1$  (par composition) et donc que la solution  $y$  est  $C^2$  (par intégration). On peut itérer cet argument et montrer ainsi que  $y \in C^{l+1}$  si  $f \in C^l$ .

**Exemple 5.1.** Le schéma d'Euler explicite est consistant d'ordre 1. L'erreur de troncature s'écrit

$$\eta^{n+1} = \frac{y(t_n + \Delta t_n) - \left(y(t_n) + \Delta t_n f(t_n, y(t_n))\right)}{\Delta t_n}.$$

Or, par application d'une formule de Taylor avec reste intégral autour de  $y(t_n)$ ,

$$\begin{aligned} y(t_n + \Delta t_n) - \left(y(t_n) + \Delta t_n f(t_n, y(t_n))\right) &= \int_0^{\Delta t_n} (\Delta t_n - \theta) y''(t_n + \theta) d\theta \\ &= \Delta t_n^2 \int_0^1 (1-s) y''(t_n + s \Delta t_n) ds. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Par ailleurs, la dérivée seconde  $y''(t)$  peut s'exprimer en fonction des dérivées de  $f$  en dérivant (5.1) par rapport au temps, ce qui donne

$$y''(\tau) = \partial_t f(\tau, y(\tau)) + \partial_y f(\tau, y(\tau)) \cdot f(\tau, y(\tau)). \quad (5.13)$$

Notons que, dans cette expression,  $\partial_y f$  est une matrice de dimension  $d \times d$ , dont la composante  $(i, j)$  est  $\partial_{y_j} f_i$ , où  $f_i$  est la  $i$ -ème composante de  $f$ . Pour le voir, on étudie les variations de  $f_i$  :

$$f_i(y + z) = f_i(y) + \nabla f_i(y) \cdot z + O(\|z\|^2) = f_i(y) + \sum_{j=1}^d \partial_{y_j} f_i(y) z_j + O(\|z\|^2).$$

On peut alors résumer l'égalité ci-dessus sous la forme

$$f(y + z) = f(y) + \partial_y f(y) \cdot z + O(\|z\|^2),$$

où  $\partial_y f(y) \cdot z$  est un produit matrice-vecteur. Pour obtenir (5.13), on utilise finalement une dérivation composée pour la fonction  $g : t \mapsto f(t, y(t))$  :

$$g'(t) = \partial_t f(t, y(t)) + \partial_y f(t, y(t)) \cdot \dot{y}(t).$$

L'égalité (5.13) montre ainsi que  $y''$  est uniformément borné en temps sur tout intervalle de la forme  $[0, T]$  ( $T < +\infty$ ) si la fonction  $f$  et ses dérivées sont continues (la trajectoire restant bornée dans ce cas). On en déduit finalement que

$$|\eta^{n+1}| \leq C \Delta t_n,$$

avec la constante  $C = \frac{1}{2} \sup_{t \in [0, T]} |y''(t)|$ .

**Exercice 5.2 (Etude de consistance pour le schéma de Heun).**

(1) Ecrire le développement limité de la solution exacte en puissances de  $\Delta t$  :

$$y(\Delta t) = y^0 + \Delta t Y_1 + \Delta t^2 Y_2 + O(\Delta t^3),$$

avec des coefficients  $Y_1, Y_2$  que l'on précisera en fonction des valeurs de  $f$  et de ses dérivées au point  $(0, y^0)$ .

(2) Faire de même pour  $y(t_{n+1})$ , dont on donnera l'expression en fonction de  $f$  et de ses dérivées au temps  $t_n$  et au point  $y(t_n)$ .

(3) Montrer finalement que le schéma de Heun

$$y^{n+1} = y^n + \frac{\Delta t}{2} \left( f(t_n, y^n) + f(t_{n+1}, y^n + \Delta t f(t_n, y^n)) \right)$$

est d'ordre 2.

**Correction.** (1) On utilise une formule de Taylor et l'expression suivante pour la dérivée seconde en temps :

$$\ddot{y}(t) = \frac{d}{dt} \left( f(t, y(t)) \right) = \partial_t f(t, y(t)) + \partial_y f(t, y(t)) \dot{y}(t) = \partial_t f(t, y(t)) + \partial_y f(t, y(t)) f(t, y(t)).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} y(\Delta t) &= y^0 + \Delta t \dot{y}(0) + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{y}(0) + O(\Delta t^3) \\ &= y^0 + \Delta t f(0, y^0) + \frac{\Delta t^2}{2} \left( \partial_t f(0, y^0) + \partial_y f(0, y^0) f(0, y^0) \right) + O(\Delta t^3). \end{aligned}$$

(2) On obtient de même

$$\begin{aligned} y(t_{n+1}) &= y(t_n) + \Delta t f(t_n, y(t_n)) \\ &\quad + \frac{\Delta t^2}{2} \left( \partial_t f(t_n, y(t_n)) + \partial_y f(t_n, y(t_n)) f(t_n, y(t_n)) \right) + O(\Delta t^3). \end{aligned} \quad (5.14)$$

(3) On compare la formule donnant  $y(t_{n+1})$  aux développements en puissances de  $\Delta t$  de la solution numérique  $y^{n+1}$ , partant de  $y(t_n)$ . Pour la méthode de Heun,

$$\eta^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} \left( y(t_{n+1}) - y(t_n) - \frac{\Delta t}{2} \left[ f(t_n, y(t_n)) + f(t_{n+1}, y(t_n) + \Delta t f(t_n, y(t_n))) \right] \right).$$

Or,

$$\begin{aligned} f(t_{n+1}, y(t_n) + \Delta t f(t_n, y(t_n))) &= f(t_n, y(t_n)) \\ &\quad + \Delta t \left( \partial_t f(t_n, y(t_n)) + \partial_y f(t_n, y(t_n)) f(t_n, y(t_n)) \right) + O(\Delta t^2). \end{aligned}$$

On en déduit immédiatement que  $\eta^{n+1} = O(\Delta t^2)$  en utilisant (5.14).

**Exercice 5.3.** Montrer que le schéma d'Euler implicite

$$y^{n+1} = y^n + \Delta t f(t_{n+1}, y^{n+1})$$

est d'ordre 1 (on supposera que le pas de temps est suffisamment petit pour que le schéma soit bien défini).



**Correction.** Pour le schéma d'Euler implicite, on peut écrire

$$\eta^{n+1} = \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n) - \Delta t \Phi_{\Delta t}(t_n, y(t_n))}{\Delta t},$$

où l'application  $\Phi_{\Delta t}$  est telle que

$$\Phi_{\Delta t}(s, z) = f(s + \Delta t, x), \quad x = z + \Delta t f(s + \Delta t, x).$$

Ici, on note  $y^{n+1} = y(t_n) + \Delta t \Phi_{\Delta t}(t_n, y(t_n))$ , soit, plus explicitement,  $y^{n+1}$  est la solution de l'équation nonlinéaire

$$y^{n+1} = y(t_n) + \Delta t f(t_{n+1}, y^{n+1}).$$

Ceci signifie que  $\Phi_{\Delta t}(t_n, y(t_n)) = f(t_{n+1}, y^{n+1})$ , et donc

$$\eta^{n+1} = \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n) - \Delta t f(t_{n+1}, y^{n+1})}{\Delta t}.$$

On écrit ensuite que  $y^{n+1} = y(t_n) + O(\Delta t)$  et donc  $f(t_{n+1}, y^{n+1}) = f(t_n, y(t_n)) + O(\Delta t)$ . Ainsi, toujours au vu de (5.14),

$$\eta^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} \left[ y(t_{n+1}) - \left( y(t_n) + \Delta t f(t_n, y(t_n)) + O(\Delta t^2) \right) \right] = O(\Delta t).$$

**Exercice 5.4.** Montrer que la méthode des trapèzes

$$y^{n+1} = y^n + \frac{\Delta t}{2} \left( f(t_n, y^n) + f(t_{n+1}, y^{n+1}) \right)$$

et le schéma du point milieu

$$y^{n+1} = y^n + \Delta t f\left(\frac{t_n + t_{n+1}}{2}, \frac{y^n + y^{n+1}}{2}\right)$$

sont d'ordre 2.

**Correction.** Pour la méthode des trapèzes, l'erreur de consistance locale s'écrit

$$\eta^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} \left( y(t_{n+1}) - y(t_n) - \frac{\Delta t}{2} \left[ f(t_n, y(t_n)) + f(t_{n+1}, y^{n+1}) \right] \right),$$

avec

$$y^{n+1} = y(t_n) + \frac{\Delta t}{2} [f(t_n, y(t_n)) + f(t_{n+1}, y^{n+1})]. \quad (5.15)$$

On commence par noter que  $y^{n+1} = y(t_n) + O(\Delta t)$  par la formule ci-dessus, et donc  $f(t_{n+1}, y^{n+1}) = f(t_n, y(t_n)) + O(\Delta t)$ . En réinjectant ce développement au membre de droite de (5.15), on obtient alors  $y^{n+1} = y(t_n) + \Delta t f(t_n, y(t_n)) + O(\Delta t^2)$  et donc

$$f(t_{n+1}, y^{n+1}) = f(t_n, y(t_n)) + \Delta t \partial_y f(t_n, y(t_n)) \cdot f(t_n, y(t_n)) + O(\Delta t^2).$$

En réinjectant une dernière fois dans (5.15) et en comparant à (5.14), on a ainsi  $\eta^{n+1} = O(\Delta t^2)$ , ce qui montre que le schéma est d'ordre 2.

Pour la méthode du point milieu, l'erreur de consistance locale est

$$\eta^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} \left[ y(t_{n+1}) - y(t_n) - \Delta t f\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, \frac{y(t_n) + y^{n+1}}{2}\right) \right],$$

où  $y^{n+1}$  est définie par l'équation non-linéaire

$$y^{n+1} = y(t_n) + \Delta t f\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, \frac{y(t_n) + y^{n+1}}{2}\right).$$

En utilisant  $y^{n+1} = y(t_n) + \Delta t f(t_n, y(t_n)) + O(\Delta t^2)$  (par un raisonnement similaire à celui effectué pour la méthode des trapèzes, en montrant pour commencer que  $y^{n+1} = y(t_n) + O(\Delta t)$ ), on arrive à

$$\frac{y(t_n) + y^{n+1}}{2} = y(t_n) + \frac{\Delta t}{2} f(t_n, y(t_n)) + O(\Delta t^2),$$

et donc

$$f\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, \frac{y(t_n) + y^{n+1}}{2}\right) = f(t_n, y(t_n)) + \frac{\Delta t}{2} \left( \partial_t f(t_n, y(t_n)) + \partial_y f(t_n, y(t_n)) f(t_n, y(t_n)) \right) + O(\Delta t^2).$$

Ceci permet de conclure que  $\eta^{n+1} = O(\Delta t^2)$  et donc que le schéma du point-milieu est d'ordre 2.

### 5.4.2 Stabilité

La notion de stabilité quantifie la robustesse de l'approximation numérique par rapport à des perturbations. Ces perturbations ont une double influence : à chaque pas, on perturbe un peu la solution calculée (perturbation directe et instantanée) mais, du fait des erreurs aux pas précédents, on calcule du coup le champ de force dans une configuration qui n'est pas tout à fait la bonne (perturbation indirecte et cumulative en temps : plus on avance en temps, et plus on s'écarte a priori de la trajectoire de référence). La stabilité permet de quantifier le fait que la perturbation effective est du même ordre de grandeur que la somme des perturbations instantanées, avec un préfacteur typiquement exponentiel en temps.

Précisons les choses, pour des schémas à pas fixe. On fixe un intervalle de temps  $[0, T]$  et un pas de temps  $\Delta t > 0$  constant pour simplifier, et on note  $N = T/\Delta t$  le nombre d'itérations correspondantes.

**Définition 5.2 (Stabilité).** *On dit qu'une méthode numérique (5.7) est stable s'il existe une constante  $S(T) > 0$  (qui dépend du temps d'intégration  $T = N\Delta t$  mais pas de  $N$  ou de  $\Delta t$  tout seul) telle que, pour toute suites  $y = \{y^n\}_{1 \leq n \leq N}$  et  $z = \{z^n\}_{1 \leq n \leq N}$  partant de la même condition initiale  $z^0 = y^0$  et vérifiant*

$$\begin{cases} y^{n+1} = y^n + \Delta t \Phi_{\Delta t}(t_n, y^n), \\ z^{n+1} = z^n + \Delta t \Phi_{\Delta t}(t_n, z^n) + \Delta t \delta^{n+1}, \end{cases} \quad (5.16)$$

on ait

$$\max_{1 \leq n \leq N} |y^n - z^n| \leq S(T) \Delta t \sum_{n=1}^N |\delta^n|. \quad (5.17)$$

**Remarque 5.5.** *L'extension de la notion de stabilité au cas des pas de temps variables est très simple : la majoration (5.17) devient  $\max_{1 \leq n \leq N} |y^n - z^n| \leq S(T) \sum_{n=1}^N \Delta t_n |\delta^n|$ .*

Intéressons nous à présent à l'obtention de conditions suffisantes de stabilité. Un cas simple est celui où  $\Phi_{\Delta t}$  est uniformément Lipschitzienne en  $y$ , c'est-à-dire qu'il existe  $\Lambda_\Phi > 0$  tel que, pour tout  $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^d$ , on ait

$$|\Phi_{\Delta t}(t, y_1) - \Phi_{\Delta t}(t, y_2)| \leq \Lambda_\Phi |y_1 - y_2|.$$

On peut alors prendre  $S(T) = e^{\Lambda_\Phi T}$ . Cette assertion repose sur l'estimation suivante :

$$|y^{n+1} - z^{n+1}| \leq \Delta t |\delta^{n+1}| + (1 + \Delta t \Lambda_\Phi) |y^n - z^n|,$$

et l'utilisation d'un lemme de Gronwall discret (voir Exercice 5.5) qui fournit l'estimation

$$|y^n - z^n| \leq e^{\Lambda \Phi T} \Delta t \sum_{m=1}^n |\delta^m|.$$

**Exercice 5.5 (Lemme de Gronwall discret).** Montrer que si une suite  $(r_n)_{n \geq 0}$  satisfait la relation de récurrence

$$0 \leq r_{n+1} \leq \delta^{n+1} + (1 + \Delta t \Lambda) r_n,$$

avec  $\delta^i \geq 0$ ,  $\Lambda \geq 0$  et  $r_0 \geq 0$ , alors on a la borne supérieure

$$0 \leq r_n \leq e^{\Lambda n \Delta t} \left( r_0 + \sum_{i=1}^n \delta^i \right).$$

**Correction.** Une récurrence immédiate montre que, pour  $n \geq 1$ ,

$$0 \leq r_n \leq (1 + \Lambda \Delta t)^n r_0 + \delta^n + (1 + \Lambda \Delta t) \delta^{n-1} + \dots + (1 + \Lambda \Delta t)^{n-1} \delta^1.$$

Comme pour  $1 \leq i \leq n$ ,

$$(1 + \Lambda \Delta t)^i \leq (1 + \Lambda \Delta t)^n \leq e^{\Lambda n \Delta t},$$

car  $1 + \Lambda \Delta t \leq e^{\Lambda \Delta t}$ , on obtient directement l'inégalité demandée.

**Remarque 5.6.** Noter que les constantes de stabilité qui apparaissent croissent a priori de manière exponentielle avec le temps. Pour des systèmes ayant des propriétés particulières (par exemple les systèmes linéaires dissipatifs), on peut montrer que les constantes de stabilité restent bornées.

**Exercice 5.6 (Stabilité des méthodes multi-pas).** On considère la méthode à 2 pas suivante (dite de Nyström) dans le cas d'un champ de vecteurs autonome  $f$  et d'un pas de temps  $\Delta t$  fixé :

$$y^{n+1} = y^{n-1} + 2\Delta t f(y^n) = \Psi(y^n, y^{n-1}),$$

avec la condition initiale  $y^0$  fixée et la valeur  $y^1$  obtenue par une méthode à un pas, par exemple la méthode de Heun.

- (1) Calculer l'erreur de consistance  $\eta^{n+1}$  et déterminer l'ordre de consistance.
- (2) On va à présent discuter la stabilité sur un cas concret. On considère l'équation différentielle  $\dot{y}(t) = -y(t)$  et  $y^0 = 1$ . Donner l'expression analytique de  $y^n$  en fonction de  $\Delta t$ , et montrer que la solution numérique est la somme de deux termes : un qui approche bien la solution analytique, et un terme qui diverge en temps long. Conclure.

La morale de cet exercice est que les méthodes multi-pas permettent souvent de gagner facilement en ordre, mais que leur stabilité est en général délicate à assurer – alors que les méthodes à un pas sont en général stables, mais il est plus difficile d'assurer leur montée en ordre.

**Correction.** (1) Pour calculer l'erreur de consistance, on évalue

$$\eta^{n+1} = y(t_n + \Delta t) - y(t_n - \Delta t) - 2\Delta t f(y(t_n)),$$

en se fondant sur le développement

$$y(t_n \pm \Delta t) = y(t_n) \pm \Delta t f(y(t_n)) + \frac{\Delta t^2}{2} \partial_y f \cdot (y(t_n)) + O(\Delta t^3).$$

Ceci donne  $\eta^{n+1} = O(\Delta t^3)$ , ce qui montre que le schéma est d'ordre 2.

- (2) Dans le cas d'une force linéaire, on  $y^{n+1} = y^{n-1} - 2\Delta t y^n$ , avec les valeurs initiales  $y^0 = 1$  et

$$y^1 = y^0 - \frac{\Delta t}{2}(y^0 + (y^0 - \Delta t y^0)) = y^0 \left(1 - \Delta t + \frac{\Delta t^2}{2}\right).$$

Le polynôme associé à la relation de récurrence est  $P(x) = x^2 + 2\Delta t x - 1$ . Ses racines sont  $r_{\pm} = -\Delta t \pm \sqrt{1 + \Delta t^2}$ . On en déduit que la solution  $y^n$  est de la forme

$$y^n = \alpha r_-^n + \beta r_+^n.$$

Un calcul quelque peu fastidieux montre que, en utilisant  $y^0 = 1 = \alpha + \beta$  et  $y^1 = r_+ + \alpha(r_- - r_+)$ , on obtient

$$\alpha = \frac{r_+ - y^1}{r_+ - r_-} = \frac{\sqrt{1 + \Delta t^2} - 1 - \Delta t^2/2}{2\sqrt{1 + \Delta t^2}} \simeq -\frac{\Delta t^4}{16} + O(\Delta t^6),$$

et donc  $\beta = 1 + O(\Delta t^4)$ . Ceci montre que  $y^n \simeq r_+^n \simeq (1 - \Delta t)^n \simeq e^{-n\Delta t}$  est une bonne approximation de la solution seulement si  $\Delta t^4 r_-^n$  reste négligeable. On a en fait un schéma instable à cause de ce terme divergent  $r_-^n$ .

### 5.4.3 Convergence

**Définition 5.3 (Convergence).** Une méthode numérique est convergente si l'erreur globale vérifie

$$\max_{1 \leq n \leq N} |y^n - y(t_n)| \rightarrow 0$$

lorsque  $y^0 = y(t_0)$  et  $\Delta t = \max_{0 \leq n \leq N-1} |t_{n+1} - t_n| \rightarrow 0$ .

Le résultat remarquable est qu'une méthode consistante (*i.e.* pour laquelle les erreurs locales le long de la trajectoire exacte sont petites) et stable (méthode pour laquelle les erreurs ne s'accumulent pas trop) est convergente. Si la méthode est stable, il suffit donc de comprendre ce que sont les erreurs sur un pas de temps pour comprendre comment se comportent les erreurs sur toute la trajectoire.

**Théorème 5.2.** Une méthode stable et consistante est convergente.

La preuve de ce résultat est très simple : on remplace  $z^n$  dans (5.16) par la solution exacte  $y(t_n)$ , ce qui correspond à choisir  $\delta^{n+1} = \eta^{n+1}$ , l'erreur de troncature locale définie en (5.9). On part en revanche de la même condition initiale. La stabilité donne donc

$$\max_{1 \leq n \leq N} |y^n - y(t_n)| \leq S(T) \Delta t \sum_{n=1}^N |\eta^n| \leq S(T) T \max_{1 \leq n \leq N} |\eta^n|. \quad (5.18)$$

Par définition de la consistance, on voit que le membre de droite tend vers zéro avec  $\Delta t$ . De plus, si la méthode numérique est consistante d'ordre  $p$ , alors l'erreur globale est également d'ordre  $\Delta t^p$  puisque

$$\max_{1 \leq n \leq N} |y^n - y(t_n)| \leq S(T) T C \Delta t^p. \quad (5.19)$$

On peut même vérifier numériquement que l'erreur globale se comporte dans beaucoup de situations vraiment en  $C\Delta t^p$  (*i.e.*, la borne supérieure sur l'erreur ne peut pas être améliorée). Des estimations similaires peuvent être obtenues avec des pas de temps variables.

**Exercice 5.7.** *Etudier la convergence du schéma de Heun et du schéma d'Euler implicite lorsque le champ de force  $f$  est uniformément Lipschitzien par rapport à la variable d'espace, avec une constante de Lipschitz indépendante du temps : pour tout  $t \geq 0$ ,*

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq \Lambda_f |y_1 - y_2|.$$

*On commencera par montrer que les méthodes numériques sont uniformément Lipschitziennes (i.e.  $\Phi_{\Delta t}$  est uniformément Lipschitzienne), avec une constante de Lipschitz que l'on déterminera en fonction de  $\Lambda_f$  et  $\Delta t$ .*

**Correction.** La consistance étant donnée par les Exercices 5.2 et 5.3, il suffit de montrer que les méthodes numériques sont stables pour conclure à la convergence. Pour ce faire, il suffit de montrer que les applications  $\Phi_{\Delta t}(t_n, \cdot)$  (définies par  $y^{n+1} = y^n + \Delta t \Phi_{\Delta t}(t_n, y^n)$ ) sont uniformément Lipschitziennes par rapport à la variable d'espace, avec une constante de Lipschitz qui ne dépend pas du temps.

(1) Pour le schéma de Heun,

$$\Phi_{\Delta t}(t, y) = \frac{1}{2} \left( f(t, y) + f(t + \Delta t, y + \Delta t f(t, y)) \right).$$

Or,

$$\begin{aligned} & |f(t + \Delta t, y_1 + \Delta t f(t, y_1)) - f(t + \Delta t, y_2 + \Delta t f(t, y_2))| \\ & \leq \Lambda_f |y_1 + \Delta t f(t, y_1) - (y_2 + \Delta t f(t, y_2))| \\ & \leq \Lambda_f (|y_1 - y_2| + \Delta t |f(t, y_1) - f(t, y_2)|) \\ & \leq \Lambda_f (1 + \Delta t \Lambda_f) |y_1 - y_2|, \end{aligned}$$

et donc

$$|\Phi_{\Delta t}(t, y_1) - \Phi_{\Delta t}(t, y_2)| \leq \Lambda_f \left( 1 + \frac{\Delta t}{2} \Lambda_f \right) |y_1 - y_2|,$$

ce qui montre que  $\Phi_{\Delta t}$  est uniformément Lipschitzienne de constante  $\Lambda_f(1 + \Delta t \Lambda_f/2)$ ;

(2) pour le schéma d'Euler implicite, l'application  $\Phi_{\Delta t}(t, y)$  est définie de manière implicite, pour des pas de temps suffisamment petits, par la relation

$$\Phi_{\Delta t}(t, y) = \frac{z - y}{\Delta t},$$

où la configuration  $z$  est solution de l'équation nonlinéaire

$$z = y + \Delta t f(t + \Delta t, z).$$

On a ainsi

$$\Phi_{\Delta t}(t, y) = f(t + \Delta t, z) = f(t + \Delta t, y + \Delta t \Phi_{\Delta t}(t, y)),$$

et donc

$$\begin{aligned} & |\Phi_{\Delta t}(t, y_1) - \Phi_{\Delta t}(t, y_2)| \leq \Lambda_f |y_1 + \Delta t \Phi_{\Delta t}(t, y_1) - (y_2 + \Delta t \Phi_{\Delta t}(t, y_2))| \\ & \leq \Lambda_f (|y_1 - y_2| + \Delta t |\Phi_{\Delta t}(t, y_1) - \Phi_{\Delta t}(t, y_2)|), \end{aligned}$$

d'où, pour  $\Delta t < 1/\Lambda_f$ ,

$$|\Phi_{\Delta t}(t, y_1) - \Phi_{\Delta t}(t, y_2)| \leq \frac{\Lambda_f}{1 - \Lambda_f \Delta t} |y_1 - y_2|,$$

ce qui montre que  $\Phi_{\Delta t}$  est uniformément Lipschitzienne de constante  $\Lambda_f/(1 - \Lambda_f \Delta t)$ .

Notons que dans le second cas on a une stabilité dite *conditionnelle* dans la mesure où la stabilité n'est garantie que si  $\Delta t$  est assez petit.

**Exercice 5.8 (Influence des erreurs d'arrondi).** Dans les calculs effectués en pratique sur un ordinateur, chaque opération arithmétique est entachée d'erreurs d'arrondi informatiques liées à la représentation machine des nombres. L'objectif de cet exercice est de quantifier l'impact de l'accumulation de ces erreurs par une analyse de stabilité, dans le cas où l'application  $\Phi_{\Delta t}$  est uniformément Lipschitzienne.

- (1) L'erreur d'arrondi globale est définie comme la différence entre la solution numérique idéale  $y^n$  et celle calculée en pratique, notée  $\tilde{y}^n$  dans la suite. Les écarts ont deux origines : les opérations arithmétiques nécessaires à l'évaluation à chaque pas de temps de l'incrément  $\Phi_{\Delta t_n}(t_n, \tilde{y}^n)$  et les opérations arithmétiques liées au calcul de l'itéré suivant. Ainsi, pour une méthode à pas de temps fixes  $\Delta t_n = \Delta t$ , on peut écrire

$$\tilde{y}^{n+1} = \tilde{y}^n + \Delta t \left( \Phi_{\Delta t}(t_n, \tilde{y}^n) + \rho_n \right) + \sigma_n.$$

On suppose que  $|\rho_n| \leq \rho$  et  $|\sigma_n| \leq \sigma$ . Typiquement,  $\sigma$  est de l'ordre de la précision machine<sup>3</sup>  $\varepsilon_{\text{machine}}$  alors que  $\rho \sim \kappa \varepsilon_{\text{machine}}$  pour un certain nombre  $\kappa > 0$  (appelé conditionnement de la méthode numérique). Montrer que si la méthode numérique est stable, alors

$$\max_{1 \leq n \leq N} |\tilde{y}^n - y^n| \leq S \left( \rho + \frac{\sigma}{\Delta t} \right).$$

- (2) L'erreur numérique totale est majorée par la somme de l'erreur d'approximation et de l'erreur d'arrondi :

$$e(\Delta t) = \max_{1 \leq n \leq N} |y(t_n) - y^n| + \max_{1 \leq n \leq N} |\tilde{y}^n - y^n|.$$

En ne retenant que le terme principal de l'erreur d'arrondi et en supposant que l'erreur d'approximation est d'ordre  $C_T \Delta t^p$ , on obtient

$$e(\Delta t) = C_T \Delta t^p + \frac{S\sigma}{\Delta t}.$$

Donner le pas de temps optimal pour lequel l'erreur numérique totale est minimale.

**Correction.** (1) Par définition de la stabilité, il existe une constante  $S > 0$  telle que

$$\max_{1 \leq n \leq N} |\tilde{y}^n - y^n| \leq S \sum_{n=1}^N |\Delta t \rho_n + \sigma_n| \leq S N \max_{1 \leq n \leq N} |\Delta t \rho_n + \sigma_n| \leq S T \left( \frac{\sigma}{\Delta t} + \rho \right),$$

ce qui donne le résultat.

- (2) On voit que  $e(\Delta t) \rightarrow +\infty$  lorsque  $\Delta t \rightarrow 0$  ou  $\Delta t \rightarrow +\infty$ . On calcule

$$e'(\delta) = p C_T \delta^{p-1} - \frac{S\sigma}{\delta^2},$$

d'où on déduit qu'il existe un seul point pas de temps critique (*i.e.*  $e'(\Delta t_{\text{opt}}) = 0$ ), qui est nécessairement associé à un minimum global de l'erreur. Un calcul simple montre que

$$\Delta t_{\text{opt}} = \left( \frac{S\sigma}{p C_T} \right)^{1/(p+1)}.$$

3. Pour estimer l'ordre de grandeur de la précision machine, par exemple pour les opérations effectuées sur votre téléphone portable, on peut calculer  $(4/3 - 1) * 3 - 1$ , qui est de l'ordre de  $10^{-16}$  lorsque les opérations sont effectuées avec le format `double`.

Des distributions à la méthode des éléments finis





## Distributions

---

<b>6.1 Fonctions test</b> .....	<b>78</b>
6.1.1 Définition des fonctions test .....	78
6.1.2 Quelques propriétés des fonctions test .....	79
<b>6.2 Définition des distributions</b> .....	<b>80</b>
6.2.1 Quelques exemples importants .....	80
6.2.2 Fonctions localement intégrables .....	83
6.2.3 Multiplication par une fonction $C^\infty$ .....	85
<b>6.3 Dérivation au sens des distributions</b> .....	<b>85</b>
6.3.1 Cas général .....	86
6.3.2 Dérivation en dimension 1 .....	88
<b>6.4 Convergence des distributions</b> .....	<b>90</b>
6.4.1 Définition .....	90
6.4.2 Lien avec la convergence presque partout .....	92
6.4.3 Cas des distributions induites par des fonctions $L^p_{\text{loc}}$ (complément) ...	93

---

Les espaces fonctionnels que nous avons construits jusqu'à présent, à savoir les espaces  $C^k$  et les espaces  $L^p$ , sont insuffisants pour analyser la plupart des problèmes mathématiques issus des sciences de l'ingénieur, en particulier ceux relevant de la théorie des EDPs. En effet, dans de nombreuses situations, des singularités se développent. On peut toujours formellement effectuer des calculs avec des fonctions singulières ou "généralisées" (comme la masse de Dirac, qui vaut 0 partout sauf en un point où on met une masse infinie), mais cela demande une intuition particulière aigüe, et peut rapidement conduire à des paradoxes ou des conclusions fausses.

La théorie des distributions, introduite par Laurent Schwartz en 1946, permet de généraliser de manière appropriée la notion de fonction et offre un cadre conceptuel unifié particulièrement élégant permettant de construire des espaces fonctionnels adaptés aux singularités qui apparaissent dans les solutions des équations aux dérivées partielles. Qui plus est, les distributions se révèlent à l'usage plus souples à manipuler que les fonctions : toute distribution est dérivable et sa dérivée est encore une distribution, les critères de convergence sont faciles à vérifier, la dérivée de la limite est toujours égale à la limite des dérivées, ...

L'idée fondamentale des distributions est de considérer les objets singuliers comme des formes linéaires agissant contre des fonctions test très régulières, de manière à reporter toutes les opérations requises (par exemple, la dérivation) sur ces fonctions test.

Pour simplifier, on se place dans tout ce chapitre (et dans les suivants) dans le cas où  $\Omega$  désigne un ouvert (borné ou non) de  $\mathbb{R}$ . On peut toutefois aisément généraliser les définitions que nous introduisons au cas où  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  avec  $d \geq 1$ .

## 6.1 Fonctions test

Nous avons dit plus haut qu'une distribution était une forme linéaire continue, plus précisément sur l'espace vectoriel  $\mathcal{D}(\Omega)$  des fonctions  $C^\infty$  à support compact dans  $\Omega$ . Nous définissons tout d'abord précisément cet espace de fonctions test avant de donner la définition rigoureuse de ce qu'est une distribution.

### 6.1.1 Définition des fonctions test

**Définition 6.1.** Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}$  ouvert et  $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  continue. On définit le support de  $\phi$  par

$$\text{Supp}(\phi) = \overline{\{x \in \Omega, \phi(x) \neq 0\}}^\Omega.$$

Précisons que la notation  $\overline{A}^\Omega$  signifie "fermeture de l'ensemble  $A$  dans  $\Omega$ "; c'est donc l'ensemble des points de  $\Omega$  qui sont limites de suites de points de  $A$ . Cet ensemble peut ne pas être fermé. Afin d'éclairer cette définition, donnons quelques exemples.

**Exemple 6.1.** On considère  $\Omega = \mathbb{R}$  et  $\phi(x) = \sin x$ . Dans ce cas,  $\{x \in \mathbb{R}, \phi(x) \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ , et donc

$$\text{Supp}(\phi) = \overline{\{x \in \mathbb{R}, \phi(x) \neq 0\}}^\mathbb{R} = \mathbb{R}.$$

**Exercice 6.1.** Pour  $\Omega = ]-\pi, 2\pi[ \cup ]2\pi, 4\pi[$ , déterminer le support de la fonction

$$\phi(x) = \begin{cases} \sin x & \text{si } x \in ]-\pi, \pi[, \\ 0 & \text{si } x \in [\pi, 2\pi[, \\ x - 2\pi & \text{si } x \in ]2\pi, 4\pi[, \end{cases}$$

Le support est-il compact ?

**Correction.** On trouve

$$\{x \in \Omega, \phi(x) \neq 0\} = ]-\pi, 0[ \cup ]0, \pi[ \cup ]2\pi, 3\pi[ \cup ]3\pi, 4\pi[,$$

et donc

$$\text{Supp}(\phi) = \overline{\{x \in \Omega, \phi(x) \neq 0\}}^\Omega = ]-\pi, \pi[ \cup ]2\pi, 4\pi[.$$

Ce support n'est pas compact. Rappelons en effet à toutes fins utiles que les compacts de  $\mathbb{R}$  sont les fermés bornés. Par exemple, pour  $\Omega = ]0, 1[$ , les intervalles compacts sont nécessairement de la forme  $[a, b]$  avec  $0 < a \leq b < 1$ .

**Exercice 6.2.** Pour  $\Omega = ]-1/2, 3[$ , déterminer le support de la fonction

$$\phi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in ]-1/2, 0], \\ x & \text{si } x \in ]0, 1], \\ 2 - x & \text{si } x \in ]1, 2], \\ 0 & \text{si } x \in ]2, 3[. \end{cases}$$

Le support est-il compact ?

**Correction.** On trouve  $\{x \in \Omega, \phi(x) \neq 0\} = ]0, 2[$ , et donc

$$\text{Supp}(\phi) = \overline{\{x \in \Omega, \phi(x) \neq 0\}}^\Omega = [0, 2].$$

Le support de  $\phi$  est compact.

**Exercice 6.3.** Pour  $\Omega = ]0, 3[$ , déterminer le support de la fonction

$$\phi(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in ]0, 1], \\ 2 - x & \text{si } x \in ]1, 2], \\ 0 & \text{si } x \in ]2, 3[. \end{cases}$$

Le support est-il compact ?

**Correction.** On a  $\{x \in \Omega, \phi(x) \neq 0\} = ]0, 2[$  et donc

$$\text{Supp}(\phi) = \overline{\{x \in \Omega, \phi(x) \neq 0\}}^\Omega = ]0, 2].$$

Le support de  $\phi$  n'est pas compact.

**Exercice 6.4.** Soient  $f$  et  $g$  continues de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

(1) Montrer que

$$\text{Supp}(fg) \subset \text{Supp}(f) \cap \text{Supp}(g)$$

et que l'inclusion peut être stricte.

(2) Montrer que

$$\text{Supp}(f + g) \subset \text{Supp}(f) \cup \text{Supp}(g)$$

et que l'inclusion peut être stricte.

**Définition 6.2.** On note  $\mathcal{D}(\Omega)$  l'espace des fonctions indéfiniment dérivables sur  $\Omega$  (i.e.  $C^\infty$ ) et à support compact. Ces fonctions sont appelées fonctions test dans  $\Omega$ . Pour  $K \subset \Omega$  compact, on note  $\mathcal{D}_K(\Omega)$  l'espace des fonctions test à support dans  $K$ .

### 6.1.2 Quelques propriétés des fonctions test

Nous admettrons le résultat de densité suivant.

**Théorème 6.1.** L'espace  $\mathcal{D}(\Omega)$  est dense dans  $L^p(\Omega)$  pour tout  $1 \leq p < +\infty$ .

**Remarque 6.1.** Bien prendre garde au fait que la valeur  $p = +\infty$  n'est pas permise dans le résultat précédent : l'espace  $\mathcal{D}(\Omega)$  n'est pas dense dans  $L^\infty(\Omega)$ . Par exemple, sur  $\Omega = ]0, 1[$ , soit  $f \in L^\infty(]0, 1[)$  définie par  $f(x) = 1$  presque partout. Alors, pour tout  $\phi \in \mathcal{D}(]0, 1[)$ , on a  $\|f - \phi\|_{L^\infty} \geq 1$ .

Nous aurons aussi besoin, pour certaines preuves, d'employer des fonctions de  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  particulières.

**Lemme 6.1.** Soit  $\Omega$  ouvert de  $\mathbb{R}$  et  $B_a(r) = ]a - r, a + r[$  la boule ouverte<sup>1</sup> de centre  $a \in \Omega$  de rayon  $r > 0$ . Si  $B_a(r) \subset \Omega$ , il existe  $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$  à support dans  $B_a(r)$  vérifiant  $\phi \geq 0$  et  $\int_\Omega \phi = 1$ .

**Exercice 6.5.** Prouver le Lemme 6.1 en construisant explicitement une fonction qui convient. On pourra s'appuyer sur  $\eta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\eta(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{|x|^2 - 1}\right) & \text{pour } |x| < 1, \\ 0 & \text{pour } |x| \geq 1, \end{cases}$$

en se convaincant au préalable que  $\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  avec  $\text{Supp}(\eta) = [-1, 1]$ .

1. Nous formulons le résultat en employant une terminologie a priori inutilement compliquée puisque les boules ouvertes en dimension 1 sont des intervalles ouverts, mais c'est cette formulation en terme de boules qui permet de généraliser le résultat aux dimensions supérieures.

**Correction.** On définit  $\phi_{a,r} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$\forall x \in \Omega, \quad \phi_{a,r}(x) = \frac{1}{Z_r} \eta\left(\frac{x-a}{r/2}\right), \quad Z_r = \frac{r}{2} \int_{\mathbb{R}} \eta.$$

Cette fonction  $\phi_{a,r}$  vérifie les conditions requises. En effet, on a déjà  $\phi_{a,r} \in \mathcal{D}(\Omega)$  avec  $\text{Supp}(\phi_{a,r}) = \overline{B_a(r/2)} \subset B_a(r)$ , et  $\phi_{a,r} \geq 0$ . Par ailleurs,

$$\int_{\Omega} \phi_{a,r} = \frac{1}{Z_r} \int_{\Omega} \eta\left(\frac{x-a}{r/2}\right) dx = \frac{1}{Z_r} \int_{\mathbb{R}} \eta(y) \frac{r}{2} dy = 1,$$

ce qui permet de conclure.

## 6.2 Définition des distributions

**Définition 6.3.** On dit que  $T$  est une distribution dans l'ouvert  $\Omega$  si  $T$  est une forme linéaire sur  $\mathcal{D}(\Omega)$  qui vérifie la propriété de continuité suivante : pour tout compact  $K$  de  $\Omega$ , il existe un entier  $p$  et une constante  $C \in \mathbb{R}_+$  tels que

$$\forall \phi \in \mathcal{D}_K(\Omega), \quad |\langle T, \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}}| \leq C \sup_{x \in K, 0 \leq \alpha \leq p} \left| \frac{d^\alpha \phi}{dx^\alpha}(x) \right|. \quad (6.1)$$

On note  $\mathcal{D}'(\Omega)$  l'espace vectoriel des distributions dans  $\Omega$ .

Insistons sur le fait que la constante  $C$  et l'entier  $p$  dans (6.1) dépendent a priori de  $K$ , et augmentent lorsque le compact devient plus grand – en tout cas, elles ne peuvent pas diminuer. Dans certains cas, ces nombres peuvent rester constants (voir Exercice 6.12).

**Définition 6.4 (Ordre d'une distribution).** Lorsque l'entier  $p$  peut être choisi indépendamment de  $K$  on dit que la distribution  $T$  est d'ordre fini, et la plus petite valeur de  $p$  possible est appelée l'ordre de  $T$ .

Heuristiquement, plus l'ordre d'une distribution est élevé, plus celle-ci est singulière.

### 6.2.1 Quelques exemples importants

Notons déjà que, si  $T_1$  et  $T_2$  sont dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$ , alors la forme linéaire  $T_1 + \lambda T_2$ , définie pour  $\lambda \in \mathbb{K}$  par

$$\langle T_1 + T_2, \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = \langle T_1, \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} + \lambda \langle T_2, \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}}$$

est bien une distribution (on pourra le vérifier). Ainsi,  $\mathcal{D}'(\Omega)$  est un espace vectoriel.

**Exercice 6.6 (Fonctions localement intégrables).** Soit  $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ . On note  $T_f$  (ou tout simplement  $f$ ) la forme linéaire définie par

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \langle T_f, \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = \int_{\Omega} f \phi. \quad (6.2)$$

Montrer que  $T_f$  définit une distribution d'ordre 0.

**Correction.** Soient  $K$  un compact de  $\Omega$  et  $\phi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ . On a

$$|\langle T_f, \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}}| = \left| \int_{\Omega} f \phi \right| \leq \int_{\Omega} |f| |\phi| = \int_K |f| |\phi| \leq \left( \sup_{x \in K} |\phi(x)| \right) \int_K |f|.$$

Ceci montre que la propriété de continuité (6.1) est vérifiée avec  $p = 0$  et  $C = \int_K |f| < +\infty$ .

**Exercice 6.7 (Mesures).** Soit  $\mu$  une mesure borélienne localement bornée (i.e. une mesure  $\mu$  définie sur l'ensemble  $\mathcal{B}(\Omega)$  des boréliens de  $\Omega$  telle que  $\mu(K) < +\infty$  pour tout compact  $K \subset \Omega$ ). On note  $T_\mu$  (ou tout simplement  $\mu$ ) la distribution définie par

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \langle T_\mu, \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = \int_{\Omega} \phi d\mu. \quad (6.3)$$

Montrer que  $T_\mu$  définit une distribution d'ordre 0.

**Correction.** On procède comme à l'Exercice 6.6 : soient  $K$  un compact de  $\Omega$  et  $\phi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ . On a

$$|\langle T_\mu, \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}}| = \left| \int_{\Omega} \phi d\mu \right| \leq \int_K |\phi| d\mu \leq \left( \sup_{x \in K} |\phi(x)| \right) \mu(K).$$

Ceci montre que la propriété de continuité (6.1) est vérifiée avec  $p = 0$  et  $C = \mu(K)$ .

**Exercice 6.8 (Masse de Dirac).** Pour tout  $a \in \mathbb{R}$ , on note  $\delta_a$  la distribution définie par

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad \langle \delta_a, \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = \phi(a). \quad (6.4)$$

Montrer que  $\delta_a$  définit une distribution d'ordre 0.

**Correction.** Soient  $K$  un compact de  $\mathbb{R}$  et  $\phi \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R})$ . Lorsque  $a \in K$ , on a

$$|\langle \delta_a, \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}}| = |\phi(a)| \leq \sup_{x \in K} |\phi(x)|.$$

Lorsque  $a \notin K$ , on a  $|\langle \delta_a, \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}}| = 0$ . On a donc (6.1) dans tous les cas avec  $C = 1$  et  $p = 0$ .

**Exercice 6.9.** Pour tout  $a \in \mathbb{R}$ , on note  $\delta'_a$  la distribution définie par

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad \langle \delta'_a, \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = -\phi'(a). \quad (6.5)$$

Montrer que  $\delta'_a$  définit une distribution d'ordre au plus 1.

**Correction.** Soient  $K$  un compact de  $\mathbb{R}$  et  $\phi \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R})$ . Si  $a \in K$ , on a

$$|\langle \delta'_a, \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}}| = |\phi'(a)| \leq \sup_{x \in K} |\phi'(x)| \leq \sup_{x \in K} \left\{ |\phi(x)|, |\phi'(x)| \right\}.$$

On note ensuite que  $\text{supp}(\phi') \subset \text{supp}(\phi)$ . En effet, considérons  $x \notin \text{supp}(\phi)$ . Alors il existe  $\eta > 0$  tel que  $\phi(y) = 0$  pour tout  $y \in ]x - \eta, x + \eta[$ . En voyant la dérivée en  $x$  comme la limite  $(\phi(x+h) - \phi(x))/h$  avec  $h \neq 0$  assez petit, on en déduit que  $\phi'(x) = 0$ . Ainsi,  $\langle \delta'_a, \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = 0$  si  $a \notin K$ . On a donc dans tous les cas (6.1) avec  $C = 1$  et  $p = 1$ .

**Exercice 6.10 (Valeur principale).** On définit la valeur principale de la fonction  $1/x$  par<sup>2</sup>

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad \left\langle \text{vp} \left( \frac{1}{x} \right), \phi \right\rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx. \quad (6.6)$$

Montrer que  $\text{vp}(1/x)$  définit une distribution d'ordre au plus 1. On vérifiera pour ce faire que, pour  $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ ,

$$\int_{|x| > \varepsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx = \int_{\varepsilon \leq |x| \leq 1} \frac{\phi(x) - \phi(0)}{x} dx + \int_{|x| > 1} \frac{\phi(x)}{x} dx. \quad (6.7)$$

**Correction.** L'égalité (6.7) vient du fait que

$$\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x} dx = - \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x} dx$$

car la fonction  $x \mapsto 1/x$  est impaire. Soient à présent  $K$  un compact de  $\mathbb{R}$  et  $\phi \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R})$ . En introduisant  $R \in \mathbb{R}_+$  tel que  $K \subset [-R, R]$ , on obtient

$$\begin{aligned} \left| \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx \right| &\leq \int_{\varepsilon \leq |x| \leq 1} \frac{|\phi(x) - \phi(0)|}{|x|} dx + \left( \sup_{x \in K} |\phi(x)| \right) \int_{1 \leq |x| \leq R} \frac{1}{|x|} dx \\ &\leq \int_{\varepsilon \leq |x| \leq 1} |\phi'(\theta_x)| dx + (2 \ln R) \sup_{x \in K} |\phi(x)| \\ &\leq 2 \max(1, \ln R) \sup_{x \in K} \left\{ |\phi(x)|, |\phi'(x)| \right\}, \end{aligned}$$

où on a utilisé l'égalité des accroissements finis pour trouver  $\theta_x \in [-1, 1]$  tel que  $\phi(x) - \phi(0) = x\phi'(\theta_x)$ . Alternativement, on pourrait aussi remarquer que, pour  $x \in ]0, 1[$  (une inégalité similaire ayant lieu pour  $x < 0$ ),

$$\left| \frac{\phi(x) - \phi(0)}{x} \right| = \left| \frac{1}{x} \int_0^x \phi'(t) dt \right| \leq \sup_{0 \leq t \leq 1} |\phi'(t)|.$$

On peut ensuite passer à la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ , soit en appliquant un théorème de convergence dominée à la suite de fonctions

$$f_\varepsilon(x) = \frac{\phi(x) - \phi(0)}{x} \chi_{[-1, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, 1]}(x),$$

qui est uniformément majorée par  $g(x) = (\sup_{-1 \leq t \leq 1} |\phi'(t)|) \chi_{[-1, 1]}(x)$ ; soit directement en voyant que la suite des intégrales

$$I_\varepsilon = \int_{\varepsilon \leq |x| \leq 1} \frac{\phi(x) - \phi(0)}{x} dx$$

forme une suite de Cauchy car  $|I_\varepsilon - I_{\varepsilon'}| \leq 2 (\sup_{-1 \leq t \leq 1} |\phi'(t)|) |\varepsilon - \varepsilon'|$ .

Ceci montre que  $\text{vp}(1/x)$  est une distribution d'ordre 1 et que par ailleurs

$$\left\langle \text{vp} \left( \frac{1}{x} \right), \phi \right\rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = \int_{-1}^1 \frac{\phi(x) - \phi(0)}{x} dx + \int_{|x| \geq 1} \frac{\phi(x)}{x} dx. \quad (6.8)$$

<sup>2</sup> Rappelons en effet que  $x \mapsto 1/x$  n'est pas dans  $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$  : il faut donc définir la distribution associée de manière appropriée.

**Exercice 6.11.** On introduit la suite de fonctions test  $\phi_n(x) = \Phi(x) \arctan(nx)$  où  $\Phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  est paire et vaut 1 au voisinage de 0 (une telle fonction existe bien par le Lemme 6.1). En se souvenant des résultats des Exercices 6.9 et 6.10, montrer que  $\delta'_a$  et  $\text{vp}(1/x)$  sont des distributions d'ordre exactement 1.

**Exercice 6.12.** En s'aidant des exemples précédents, construire des distributions d'ordre fini mais pour lesquelles la constante  $C$  dans (6.1) augmente lorsque le compact devient plus grand ; et des distributions d'ordre fini pour lesquelles cette constante n'augmente pas. Construire également des distributions pour lesquelles la constante  $C$  peut être choisie indépendamment du compact  $K$ , mais pas l'entier  $p$ .

### 6.2.2 Fonctions localement intégrables

L'espace des fonctions test est suffisamment riche pour que l'application naturelle  $f \mapsto T_f$  de  $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$  dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$  soit injective. Ce fait très important fait l'objet du théorème suivant.

**Théorème 6.2.** Soit  $f$  et  $g$  dans  $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ . Alors

$$f = g \quad \Leftrightarrow \quad T_f = T_g \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

**Exercice 6.13.** L'objectif de cet exercice est de prouver le Théorème 6.2.

(1) Montrer pour commencer l'implication  $\Rightarrow$ .

Nous allons démontrer la réciproque en nous limitant au cas où  $\Omega = \mathbb{R}$  et où  $f$  et  $g$  sont dans  $L^1(\mathbb{R})$  (ceci pour éviter des complications techniques). Considérons donc  $f$  et  $g$  dans  $L^1(\mathbb{R})$  vérifiant  $T_f = T_g$  et posons  $h = f - g$  ; il s'agit de vérifier que  $h = 0$  presque partout, sachant qu'on a

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad \int_{\Omega} h \phi = 0. \quad (6.9)$$

(2) Soit  $\varepsilon > 0$ . Justifier l'existence de  $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  tel que  $\|h - \psi\|_{L^1} \leq \varepsilon/3$ .

(3) Soit une fonction  $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  positive à support dans la boule unité et d'intégrale égale à 1. On construit la suite de fonctions  $(\chi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie par

$$\chi_n(x) = n\chi(nx).$$

Montrer que  $\psi \star \chi_n(x) \rightarrow \psi(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

(4) Montrer que

$$\|\psi - \psi \star \chi_n\|_{L^1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \quad (6.10)$$

(5) On introduit la suite de fonctions  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie par  $h_n(x) = (h \star \chi_n)(x)$ . Montrer que  $h_n$  est en fait identiquement nulle sur  $\mathbb{R}$ .

(6) Montrer que  $\|h\|_{L^1} \leq \|h - \psi\|_{L^1} + \|\psi - \psi \star \chi_n\|_{L^1} + \|(h - \psi) \star \chi_n\|_{L^1}$ . Conclure.

**Correction.** (1) Le résultat découle directement de la définition (6.2) d'une distribution induite par une fonction localement intégrable.

(2) L'existence de  $\psi$  résulte de la densité de  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  dans  $L^1(\mathbb{R})$  (voir le Théorème 6.1).

(3) Avec le changement de variable  $z = y/n$ ,

$$\psi \star \chi_n(x) = \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}} \psi(x-y) \chi\left(\frac{y}{n}\right) dy = \int_{\mathbb{R}} \psi\left(x - \frac{z}{n}\right) \chi(z) dz$$

Il résulte alors du théorème de convergence dominée (Théorème 10.2) que  $\psi \star \chi_n(x)$  tend vers  $\psi(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$  (on utilise la fonction majorante  $(\sup_{\mathbb{R}} |\phi|) \chi$ , qui est intégrable).

(4) On note pour commencer que

$$\text{Supp}(\psi \star \chi) \subset \text{Supp}(\psi) + \text{Supp}(\chi_n) \subset \text{Supp}(\psi) + \text{Supp}(\chi)$$

est un ensemble borné. Par ailleurs,

$$|\psi \star \chi_n(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}} \psi(x-y) \chi_n(y) dy \right| \leq \|\psi\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}} \chi_n = \|\psi\|_{L^\infty}.$$

En regroupant les résultats précédents, on aboutit à

$$\begin{cases} |\psi - \psi \star \chi_n| \leq 2\|\psi\|_{L^\infty} \mathbf{1}_{\text{Supp}(\psi) + \text{Supp}(\chi)} & \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \\ (\psi - \psi \star \chi_n)(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 & \text{pour tout } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

La convergence (6.10) découle donc à nouveau du théorème de convergence dominée.

(5) Comme pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\chi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ , le résultat découle de (6.9).

(6) L'inégalité demandée provient de l'égalité  $\|h\|_{L^1} = \|h - h \star \chi_n\|_{L^1}$  et de l'inégalité triangulaire (introduire  $\psi$  et  $\psi \star \chi_n$ , en notant que  $h \star \chi_n - \psi \star \chi_n = (h - \psi) \star \chi_n$ ).

En utilisant l'inégalité (3.2) et en notant que  $\|\chi_n\|_{L^1} = 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on obtient

$$\|(h - \psi) \star \chi_n\|_{L^1} \leq \|h - \psi\|_{L^1} \|\chi_n\|_{L^1} \leq \varepsilon/3,$$

On peut donc choisir  $n$  assez grand pour que  $\|\psi - \psi \star \chi_n\|_{L^1} \leq \varepsilon/3$ , ce qui conduit finalement à  $\|h\|_{L^1} \leq \varepsilon$ . Cette majoration étant valable pour tout  $\varepsilon > 0$ , on peut conclure que  $h = 0$  dans  $L^1$ .

On peut donc identifier une fonction de  $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$  et la distribution qui lui est associée et noter  $f$  à la place de  $T_f$ . On peut ainsi reformuler le théorème précédent de la façon suivante, qui est en fait la manière "pratique" de comprendre et d'utiliser en pratique l'identification entre  $f$  et  $T_f$ .

**Théorème 6.3.** Soit  $f$  et  $g$  dans  $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ . Alors

$$f = g \quad \Leftrightarrow \quad f = g \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

On se servira de nombreuses fois de ce résultat par la suite. En fait, une application typique sera la suivante : on montrera, par un raisonnement adéquat, qu'une distribution  $T$  est égale à une fonction  $f \in L^p(\Omega)$ , l'égalité ayant lieu au sens des distributions (*i.e.* en dualité contre des fonctions test). On pourra ainsi écrire  $T = f$ , avec égalité en tant que fonctions de  $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ ; puis, au vu des propriétés d'intégrabilité de la fonction  $f$ , conclure que  $T = f \in L^p(\Omega)$ , l'égalité ayant lieu dans  $L^p(\Omega)$ .

**Remarque 6.2.** On prendra bien garde au fait que si  $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ , on ne peut pas écrire en général que  $\langle T, \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}}$  est égal à  $\int_{\Omega} T \phi$ . Ceci n'est possible que si on a montré au préalable que  $T \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ . Voir l'Exercice 6.14 à ce sujet.

**Exercice 6.14.** Montrer que  $\delta_0 \notin L^2(\mathbb{R})$ . On pourra introduire pour ce faire une fonction  $\chi \in C^\infty$  à support compact, valant 1 en 0; et considérer la suite  $\chi_n(x) = \sqrt{n}\chi(nx)$ .

**Correction.** Supposons que  $\delta_0$  puisse être représentée par une fonction  $f \in L^2(\Omega)$ . Dans ce cas, on aurait, pour toute fonction  $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ ,

$$\phi(0) = \int_{\Omega} f \phi. \quad (6.11)$$

L'idée est qu'on peut modifier  $\phi$  en 0 sans trop changer l'intégrale. En vertu de (6.11), on aurait, avec la suite proposée,



$$\sqrt{n} = \int_{\mathbb{R}} f \chi_n \leq \|f\|_{L^2} \|\chi_n\|_{L^2} = \|f\|_{L^2} \|\chi\|_{L^2},$$

car un changement de variables montre que  $\|\chi_n\|_{L^2} = \|\chi\|_{L^2}$ . Le membre de gauche tend vers l'infini lorsque  $n \rightarrow +\infty$  alors que le membre de droite est borné. La contradiction fournit le résultat voulu.

**Remarque 6.3.** *Attention ! La notion de distribution généralise en un certain sens la notion de fonction mais cela ne veut pas dire que toutes les fonctions sont des distributions. Ainsi, la fonction  $f_\alpha(x) = |x|^\alpha$  définit une distribution sur  $\mathbb{R}$  si et seulement si  $\alpha > -1$  (lorsque  $\alpha \leq -1$ , la fonction  $f_\alpha$  n'est pas  $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ ).*

### 6.2.3 Multiplication par une fonction $C^\infty$

**Proposition 6.1.** *Soit  $f$  une fonction  $C^\infty(\mathbb{R})$  et  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ . La forme linéaire*

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad \langle fT, \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = \langle T, f\phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}}$$

*définit une distribution  $fT \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ .*

**Exercice 6.15.** *Prouver ce résultat (on utilisera la formule de Leibniz).*

**Remarque 6.4.** *Attention ! On ne peut pas multiplier deux distributions. Ainsi la fonction  $f(x) = 1/\sqrt{|x|}$  est dans  $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$  et définit donc une distribution mais il n'en va pas de même pour la fonction  $f^2$  (car  $f^2(x) = 1/|x|$  est une fonction qui n'est pas dans  $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ ). De façon générale, le produit  $T_1 T_2$  pour  $T_1 \in \mathcal{D}'(\Omega)$  et  $T_2 \in \mathcal{D}'(\Omega)$  n'a aucun sens.*

**Exercice 6.16.** *Montrer que  $x \text{vp}(1/x) = 1$  et que  $x \delta_0 = 0$ .*

**Correction.** Il suffit de tester l'égalité contre des fonctions de  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ . Soit donc  $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ . On a, par (6.8),

$$\left\langle x \text{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \phi \right\rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = \left\langle \text{vp}\left(\frac{1}{x}\right), x\phi \right\rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = \int_{-1}^1 \frac{x\phi(x)}{x} dx + \int_{|x| \geq 1} \frac{x\phi(x)}{x} dx = \int_{\mathbb{R}} \phi = \langle 1, \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}},$$

en notant que la fonction constante égale à 1 est bien dans  $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ . Ceci montre que  $x \text{vp}(1/x) = 1$  au sens des distributions. Cette égalité est le pendant, au sens des distributions, de l'égalité  $xg(x) = 1$  pour la fonction  $g(x) = 1/x$ .

Par ailleurs,

$$\langle x \delta_0, \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = \langle \delta_0, x\phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = 0,$$

car la fonction  $x \mapsto x\phi(x)$  vaut 0 en 0. On peut donc conclure que  $x \delta_0 = 0$  au sens des distributions.

## 6.3 Dérivation au sens des distributions

Considérons une fonction  $f \in C^1(\mathbb{R})$ . On a pour une telle fonction la formule d'intégration par parties

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad \int_{\mathbb{R}} \frac{df}{dx} \phi = - \int_{\mathbb{R}} f \frac{d\phi}{dx}.$$

De manière générale, pour  $p \geq 1$  et  $f \in C^p(\mathbb{R})$ ,

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad \int_{\mathbb{R}} \frac{d^p f}{dx^p} \phi = (-1)^p \int_{\mathbb{R}} f \frac{d^p \phi}{dx^p}.$$

On peut, en s'inspirant de ces formules, définir la dérivée de n'importe quelle distribution.

### 6.3.1 Cas général

**Définition 6.5.** Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}$  et  $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ . On définit la dérivée de la distribution  $T$ , que l'on note  $T'$  ou  $dT/dx$ , par la relation

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \langle T', \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = -\langle T, \phi' \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}}.$$

**Exercice 6.17.** Vérifier que  $T'$  définit bien une distribution lorsque  $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$  (autrement dit, qu'elle vérifie la propriété de continuité énoncée dans la Définition 6.3).

**Correction.** Soit  $K$  un compact de  $\Omega$ , et  $\phi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ . Comme  $T$  est une distribution, il existe  $C \in \mathbb{R}_+$  et  $p \in \mathbb{N}$  tels que

$$|\langle T, \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}}| \leq C \sup_{x \in K, 0 \leq \alpha \leq p} \left| \frac{d^\alpha \phi}{dx^\alpha}(x) \right|.$$

Ainsi, en notant que  $\phi' \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ ,

$$|\langle T', \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}}| = |\langle T, \phi' \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}}| \leq C \sup_{x \in K, 1 \leq \alpha \leq p+1} \left| \frac{d^\alpha \phi}{dx^\alpha}(x) \right| \leq C \sup_{x \in K, 0 \leq \alpha \leq p+1} \left| \frac{d^\alpha \phi}{dx^\alpha}(x) \right|.$$

Ceci montre que  $T' \in \mathcal{D}'(\Omega)$ . En fait, les constantes de continuités sont les mêmes pour  $T$  et  $T'$ , mais l'ordre de  $T'$  augmente d'un cran par rapport à celui de  $T$  sur un compact  $K$  donné.

**Exercice 6.18.** On considère la fonction de Heaviside

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Montrer que  $\Theta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  et  $\Theta' = \delta_0$ .

**Correction.** Notons déjà que  $\Theta \in L^\infty(\mathbb{R}) \subset L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$  et donc  $\Theta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ . Par définition de la dérivation au sens des distributions, on a, pour  $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ ,

$$\langle \Theta', \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = -\langle \Theta, \phi' \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = -\int_0^{+\infty} \phi'(x) dx = \phi(0).$$

Ceci montre donc que  $\Theta' = \delta_0$ .

**Exercice 6.19.** Montrer que la fonction  $\ln(|x|)$  définit une distribution dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  et calculer sa dérivée au sens des distributions.

**Correction.** On note pour commencer que la fonction  $f : x \mapsto \ln(|x|)$  est dans  $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$  et donc induit une distribution. On introduit la primitive

$$\Phi(x) = \phi(x) - \phi(0).$$

On fixe ensuite une fonction  $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ . Il existe  $R > 0$  tel que  $\text{supp}(\phi) \subset [-R, R]$ . Ainsi, en utilisant d'abord la dérivation au sens des distributions, puis une intégration par parties (justifiées car les fonctions en jeu sont  $C^1$ ),

$$\langle f', \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = - \int_{-R}^R \ln(|x|) \phi'(x) dx = - [\ln(|x|) \Phi(x)]_{-R}^R + \int_{-R}^R \frac{\Phi(x)}{x} dx.$$

Notons en effet que la dernière intégrale est bien définie car  $\Phi(x)/x$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , et a en particulier une limite finie en 0 (qui est  $\phi'(0)$ ). Par ailleurs,  $[\ln(|x|)\Phi(x)]_{-R}^R = (\ln R)(\Phi(R) - \Phi(-R)) = 0$ . On en déduit donc que

$$\langle f', \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = \int_{-1}^1 \frac{\Phi(x)}{x} dx + \int_{|x| \geq 1} \frac{\phi(x)}{x} dx,$$

ce qui montre que la dérivée de  $f$  est  $\text{vp}(1/x)$  au sens des distributions.

**Exercice 6.20.** Soit  $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$  et  $F(x) = \int_0^x f$ . Montrer que la dérivée de  $F$  au sens des distributions est égale à  $f$ .

**Correction.** Montrons pour commencer que  $F \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$  et donc  $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ . Pour  $K$  compact donné de  $\mathbb{R}$ , il existe  $R > 0$  tel que  $K \subset [-R, R]$ . Ainsi, pour  $x \in K$ ,

$$|F(x)| \leq \int_{-R}^R |f|.$$

Ceci montre que  $F \in L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R})$  donc  $F \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$  (par un calcul direct ou en application de la Proposition 3.5). On a ensuite, pour  $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  et  $L > 0$  tel que  $\text{Supp}(\phi) \subset [-L, L]$ ,

$$\langle F', \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = - \langle F, \phi' \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = - \int_{-L}^L F(x) \phi'(x) dx = - \int_{-L}^L \left( \int_0^x f(y) dy \right) \phi'(x) dx.$$

On distingue ensuite  $x \geq 0$  et  $x \leq 0$ , en introduisant les fonctions de deux variables  $G_+(x, y) = f(y)\phi'(x)\mathbf{1}_{0 \leq y \leq x \leq L}$  et  $G_-(x, y) = f(y)\phi'(x)\mathbf{1}_{-L \leq x \leq y \leq 0}$ . Avec ces notations,

$$\langle F', \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = - \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} G_+(x, y) dy dx - \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} G_-(x, y) dy dx.$$

On souhaite appliquer le théorème de Fubini pour échanger les intégrations en  $x$  et en  $y$  (Noter qu'on ne peut pas faire d'intégration par parties car les fonctions en jeu ne sont pas toutes  $C^1$ ...). Pour ce faire, on vérifie que  $G_+, G_-$  sont intégrables sur  $\mathbb{R}^2$ . Pour  $G_+$ , en application du théorème de Fubini positif,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |G_+(x, y)| dy dx &= \int_{-L}^L |\phi'(x)| \int_0^x |f(y)| dy dx \leq \int_{-L}^L \int_{-L}^L |\phi'(x)| |f(y)| dx dy \\ &\leq 2L \left( \sup_{[-L, L]} |\phi'| \right) \int_{-L}^L |f| < +\infty, \end{aligned}$$

ce qui montre que  $G_+$  est intégrable. On montre de même que  $G_-$  est intégrable. En appliquant le théorème de Fubini (dans sa version générale) à  $G_+$ , on a alors

$$\int_0^L \left( \int_0^x f(y) dy \right) \phi'(x) dx = \int_0^L f(y) \left( \int_y^L \phi'(x) dx \right) = - \int_0^L f(y) \phi(y) dy.$$

On fait de même pour  $x \leq 0$ , ce qui conduit finalement à

$$\langle F', \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = \int_{-L}^L f(y) \phi(y) dy = \int_{\mathbb{R}} f \phi = \langle f, \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}}.$$

Ceci montre que  $F' = f$  au sens des distributions.

### 6.3.2 Dérivation en dimension 1

Dans cette section, nous faisons le lien avec la notion usuelle de dérivation pour les fonctions  $C^1$  puis montrons comment la dérivation au sens des distributions permet de définir la dérivée d'une fonction qui n'est que  $C^1$  par morceaux.

#### Cas des fonctions $C^1$

Soit  $f \in C^1(]a, b[)$ . Les fonctions  $f$  et  $f'$  sont dans  $L^1_{\text{loc}}(]a, b[)$ , donc dans  $\mathcal{D}'(]a, b[)$ , et les distributions engendrées par ces fonctions sont définies comme en (6.2). On a

$$\left\langle \frac{d}{dx} T_f, \phi \right\rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = - \left\langle T_f, \frac{d}{dx} \phi \right\rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = - \int_a^b f \frac{d\phi}{dx} = \int_a^b f' \phi = \langle T_{f'}, \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}},$$

l'avant-dernière égalité provenant d'une intégration par parties (légitime car les fonctions  $f, \phi$  sont de classe  $C^1$ ). On en déduit que

$$\frac{d}{dx} T_f = T_{f'},$$

i.e. la dérivation au sens des distributions coïncide avec la dérivation au sens usuel pour les fonctions de classe  $C^1$ .

#### Cas des fonctions $C^1$ par morceaux

**Définition 6.6.** On dit qu'une fonction  $f$  est de classe  $C^k$  par morceaux sur  $]a, b[$  si pour tout intervalle compact  $[\alpha, \beta] \subset ]a, b[$ , il existe un nombre fini de points  $\alpha = a_0 < a_1 < \dots < a_N < a_{N+1} = \beta$  tels que :

- (i) dans chacun des intervalles  $]a_i, a_{i+1}[$ , la fonction  $f$  est de classe  $C^k$  ;
- (ii)  $f$  et ses dérivées jusqu'à l'ordre  $k$  sont prolongeables par continuité à droite et à gauche en les points  $a_1, \dots, a_N$ .

On notera  $f(a_i + 0)$  la limite à droite de  $f$  en  $a_i$  et  $f(a_i - 0)$  la limite à gauche de  $f$  en  $a_i$ .

Remarquons qu'une fonction de classe  $C^1$  par morceaux sur  $]a, b[$  a un nombre au plus dénombrable de points de discontinuité.<sup>3</sup>

**Exemple 6.2.** Une fonction en escalier est  $C^1$  par morceaux. La fonction  $x \mapsto |x|$  est  $C^1$  par morceaux sur  $\mathbb{R}$ .

**Contre-exemple 6.1.** La fonction  $x \mapsto \tan x$  n'est pas  $C^1$  par morceaux sur  $\mathbb{R}$ . La fonction  $x \mapsto \sqrt{|x|}$  est continue mais n'est pas  $C^1$  par morceaux sur  $\mathbb{R}$ .

**Théorème 6.4.** Soit  $f$  de classe  $C^1$  par morceaux sur  $]a, b[$ . On a, avec les notations de la définition ci-dessus, la formule des sauts suivante :

$$f' = f'_{\text{reg}} + \sum_{i \in \mathcal{I}} [f(c_i + 0) - f(c_i - 0)] \delta_{c_i},$$

où on a noté  $f'$  la dérivée de  $f$  au sens des distributions,  $(c_i)_{i \in \mathcal{I}}$  l'ensemble des points de discontinuité de  $f$  sur  $]a, b[$  (notons que  $\mathcal{I}$  est un ensemble au plus dénombrable dont les seuls points d'accumulation éventuels sont  $a$  et  $b$ ),  $f'_{\text{reg}}$  la fonction continue par morceaux qui est la dérivée (au sens usuel) de  $f$  en dehors des points  $c_i$  et  $\delta_{c_i}$  la masse de Dirac en  $c_i$ .

**Exercice 6.21.** Prouver ce résultat en utilisant une intégration par parties, dans le cas d'une seule singularité  $c$ .

3. Les lecteurs les plus courageux pourront le montrer en exercice.

**Correction.** Comme la fonction  $f$  est  $C^1$  par morceaux, elle est dans  $L^\infty(]a, b[)$  et donc dans  $L^1_{\text{loc}}(]a, b[)$ . On peut alors écrire, pour  $\phi \in \mathcal{D}(]a, b[)$  donnée,

$$\langle f', \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = -\langle f, \phi' \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = -\int_a^b f \phi'.$$

On décompose ensuite l'intégrale en introduisant le point  $c$ , et en effectuant une intégration par parties (qui est permise car les fonctions en jeu sont  $C^1$  sur les intervalles ouverts considérés) :

$$\langle f', \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = -\int_a^c f \phi' - \int_c^b f \phi' = \int_a^c f'_{\text{reg}} \phi - f(c-0)\phi(c) + \int_c^b f'_{\text{reg}} \phi + f(c+0)\phi(c),$$

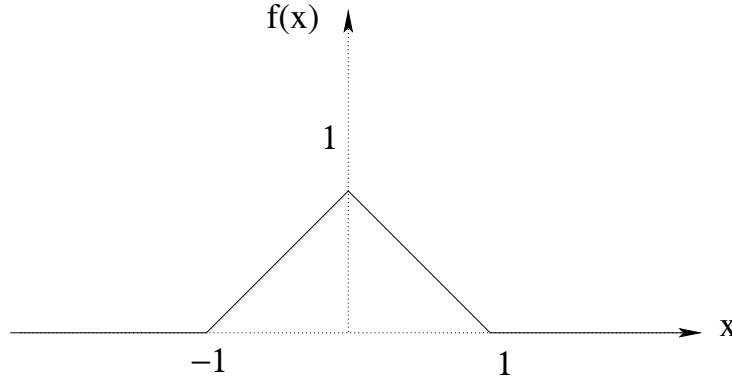
où on a utilisé  $\phi(a) = \phi(b) = 0$ . On obtient ainsi

$$\langle f', \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = \langle f'_{\text{reg}}, \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} + [f(c+0) - f(c-0)] \langle \delta_c, \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}},$$

ce qui est le résultat demandé.

**Exercice 6.22.** Calculer la dérivée et la dérivée seconde au sens des distributions de la fonction “chapeau” définie sur  $\mathbb{R}$  par (voir Figure 6.1)

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1, \\ x+1 & \text{si } -1 < x < 0, \\ 1-x & \text{si } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$



**Fig. 6.1.** Fonction chapeau (voir Exercice 6.22).

**Correction.** La fonction  $f$  est continue et en fait  $C^\infty$  par morceaux. En application de la formule des sauts, sa dérivée au sens des distributions est donc égale à  $f'_{\text{reg}}$ , qui est la fonction  $C^\infty$  par morceaux

$$f'_{\text{reg}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1, \\ 1 & \text{si } -1 < x < 0, \\ -1 & \text{si } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

En appliquant à nouveau la formule des sauts, on voit que  $f'' = \delta_{-1} - 2\delta_0 + \delta_1$ .

**Exercice 6.23.** Montrer que, pour une fonction  $C^2$  par morceaux, on a

$$f'' = f''_{\text{reg}} + \sum_{i=1}^N [f'(a_i + 0) - f'(a_i - 0)] \delta_{a_i} + \sum_{i=1}^N [f(a_i + 0) - f(a_i - 0)] \delta'_{a_i}.$$

## 6.4 Convergence des distributions

### 6.4.1 Définition

**Définition 6.7.** Soit  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de distributions dans  $\Omega$ . On dit qu'une suite  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $T$  dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$  si et seulement si

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \langle T_n, \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \langle T, \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}}.$$

Notons qu'on a évidemment unicité de la limite dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$  : si  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge à la fois vers  $T$  et  $S$  au sens des distributions, alors

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \langle T, \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = \langle S, \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}},$$

ce qui montre que  $T = S$  dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$ .

**Exercice 6.24.** Soit  $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  d'intégrale égale à 1. Posons, pour  $n \geq 1$ ,

$$\chi_n(x) = n\chi(nx).$$

Montrer que  $\chi_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \delta_0$  dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ .

**Correction.** Soit  $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ . Comme  $\chi_n \in L^1(\mathbb{R})$  et donc  $\chi_n \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ , on a

$$\langle \chi_n, \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = \int_{\mathbb{R}} \chi_n(x) \phi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \chi(y) \phi\left(\frac{y}{n}\right) dy.$$

On introduit la suite de fonctions mesurables  $f_n(y) = \chi(y) \phi(y/n)$ . La suite  $(f_n(y))_{n \geq 1}$  converge vers  $\chi(y) \phi(0)$  pour tout  $y \in \mathbb{R}$ . Par ailleurs,  $|f_n| \leq g = \|\phi\|_{L^\infty} |\chi|$ , avec  $g$  mesurable et intégrable. Le théorème de convergence dominée donne

$$\langle \chi_n, \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} \chi(y) \phi(0) dy = \phi(0) \int_{\mathbb{R}} \chi = \phi(0) = \langle \delta_0, \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}}.$$

Ceci montre donc que  $\chi_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \delta_0$  dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ .

**Exercice 6.25.** Montrer que la suite des sommes partielles  $f_N(x) = \sum_{k=0}^N \frac{x^k}{k!}$  est une suite d'éléments de  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  qui converge dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ , et identifier sa limite.

**Correction.** Soit  $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ . Comme  $f_N \in L^1(\mathbb{R})$  et donc  $f_N \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ , on a

$$\langle f_N, \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = \int_{\mathbb{R}} f_N(x) \phi(x) dx.$$

On introduit la suite de fonctions mesurables  $h_N(x) = f_N(x) \phi(x)$ . La suite  $(h_N(x))_{n \geq 1}$  converge vers  $e^x \phi(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Par ailleurs,  $|h_N(x)| \leq g(x) = e^x |\phi(x)|$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , avec  $g$  mesurable et intégrable. Le théorème de convergence dominée montre donc que

$$\langle f_N, \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} e^x \phi(x) dx = \langle e^x, \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}},$$

ce permet de conclure à la convergence  $f_N \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} e^x$  dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ .

L'espace  $\mathcal{D}'(\Omega)$  muni de la topologie définie ci-dessus possède la propriété remarquable que les opérateurs de dérivation y sont continus. On peut reformuler cette phrase un peu pédante de manière plus concrète.

**Proposition 6.2.** *Si la suite  $(T_n)$  tend vers  $T$  dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$ , alors, pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , la suite de distributions  $(d^p T_n / dx^p)$  converge vers  $d^p T / dx^p$  dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$ .*

**Exercice 6.26.** *Prouver la Proposition 6.2.*

**Correction.** Soit  $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ . On a

$$\left\langle \frac{d^p}{dx^p} T_n, \phi \right\rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = (-1)^p \left\langle T_n, \frac{d^p}{dx^p} \phi \right\rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (-1)^p \left\langle T, \frac{d^p}{dx^p} \phi \right\rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = \left\langle \frac{d^p}{dx^p} T, \phi \right\rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}}.$$

Ceci montre que  $d^p T_n / dx^p \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} d^p T / dx^p$  dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$ .

Comme corollaire immédiat, énonçons la proposition suivante.

**Proposition 6.3.** *Soit  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$ . Supposons que la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} T_n$  converge dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$  vers une distribution  $S$ . Alors, pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} d^p T_n / dx^p$  converge dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$  et on a*

$$\frac{d^p}{dx^p} S = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{d^p}{dx^p} T_n.$$

Dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$ , on peut donc dériver sous le signe somme sans se poser de questions. Nous admettrons finalement le résultat suivant.

**Théorème 6.5.** *Soit  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de distributions dans  $\Omega$ . On suppose que pour tout  $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ , la suite  $(\langle T_n, \phi \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers une limite  $l_\phi$ . Alors, l'application  $T$  définie par*

$$\langle T, \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = l_\phi$$

*est une distribution sur  $\Omega$ .*

Ce résultat permet de faire l'économie de la vérification de la continuité de l'application  $T$  (qui est manifestement une forme linéaire sur  $\mathcal{D}'(\Omega)$ ). C'est l'un des résultats qui rend les distributions si faciles à manier.

**Exercice 6.27.** *Montrer que la série  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_n$  converge dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ .*

**Correction.** On introduit

$$T_N = \sum_{n=-N}^N \delta_n.$$

On vérifie facilement que  $T_N$  est une distribution. En effet, soit  $K$  un compact de  $\mathbb{R}$ . Il existe  $N_0 \geq 1$  tel que  $K \subset [-N_0, N_0]$ . Pour tout  $\phi \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R})$ , on a

$$\langle T_N, \phi \rangle_D = \sum_{n=M}^M \phi(n),$$

où  $M = \min(N, N_0)$ . Ainsi,  $|\langle T_N, \phi \rangle_D| \leq (2M + 1) \|\phi\|_{L^\infty}$ , ce qui montre que  $T_N$  est une distribution d'ordre 1. Par ailleurs,

$$\langle T_N, \phi \rangle_D \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=N_0}^{N_0} \phi(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \phi(n).$$

Ceci montre que la suite  $(T_N)_{N \geq 0}$  converge dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  au vu du Théorème 6.5.

**Exercice 6.28.** La série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \delta_{1/n}$  converge-t-elle dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  ? Même question avec  $\mathcal{D}'([0, +\infty[)$ .

#### 6.4.2 Lien avec la convergence presque partout

La convergence presque partout *n'implique pas* la convergence dans  $\mathcal{D}'$  et réciproquement. Ainsi :

- (1) il peut y avoir convergence dans  $\mathcal{D}'$  et pas convergence presque partout ;
- (2) il peut y avoir convergence presque partout et pas convergence dans  $\mathcal{D}'$  ;
- (3) il peut y avoir convergence presque partout et convergence dans  $\mathcal{D}'$  sans que les deux limites soient égales.

Les exercices suivants fournissent des exemples de tels comportements.

**Exercice 6.29.** La suite de fonctions  $f_n(x) = e^{inx}$  ne converge pas presque partout (on l'admettra, ce n'est pas un résultat facile !). Montrer qu'elle converge vers 0 dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ .

**Correction.** Pour  $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  donnée, il existe  $R > 0$  tel que  $\text{Supp}(\phi) \subset [-R, R]$ . Comme  $f_n \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ , on a alors

$$\langle f_n, \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = \int_{\mathbb{R}} \phi(x) e^{inx} dx = \int_{-R}^R \phi(x) e^{inx} dx = \frac{i}{n} \int_{-R}^R \phi'(x) e^{inx} dx,$$

où la dernière égalité résulte d'une intégration par parties. Ainsi,

$$|\langle f_n, \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}}| \leq \frac{2R}{n} \|\phi'\|_{L^\infty} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

ce qui montre que  $f_n \rightarrow 0$  dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ .

**Exercice 6.30.** Montrer que la suite  $f_n(x) = \sum_{k=1}^n \chi_{n^2} \left( x - \frac{1}{k} \right)$  (où  $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  est d'intégrale 1, et  $\chi_\sigma(x) = \sigma \chi(\sigma x)$ ) converge vers 0 presque partout mais ne converge pas dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ .

**Exercice 6.31.** Montrer que la suite  $f_n(x) = (\sigma_n \sqrt{2\pi})^{-1} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_n^2}\right)$  (avec  $\sigma_n \rightarrow 0$ ) converge vers 0 presque partout et converge vers  $\delta_0$  dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ .



**Correction.** La convergence  $f_n \rightarrow \delta_0$  dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  se montre comme dans l'Exercice 6.24. Pour la convergence simple, on voit que si  $x \neq 0$ , alors

$$0 \leq f_n(x) = \frac{1}{x\sqrt{\pi}} F\left(\frac{x}{\sigma_n\sqrt{2}}\right), \quad F(y) = y e^{-y^2}.$$

Il est clair que  $F(y) \rightarrow 0$  lorsque  $|y| \rightarrow +\infty$ , ce qui montre que  $f_n(x) \rightarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$  dans le cas où  $x \neq 0$ .

### 6.4.3 Cas des distributions induites par des fonctions $L^p_{\text{loc}}$ (complément)

**Proposition 6.4.** Soit  $1 \leq p \leq +\infty$ . La convergence dans  $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$  implique la convergence dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$ .

**Exercice 6.32.** Prouver ce résultat. On utilisera l'inégalité de Hölder pour  $1 < p < +\infty$ .

**Correction.** Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions de  $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$  tendant vers  $f$  dans  $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ . Soit  $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ , dont on note le support  $K_\phi$ . En se servant de l'inégalité de Hölder, on obtient pour  $1 < p < +\infty$ ,

$$\begin{aligned} |\langle f_n, \phi \rangle - \langle f, \phi \rangle| &= \left| \int_{\Omega} (f_n - f) \phi \right| \leq \int_{\Omega} |f_n - f| |\phi| \\ &\leq \|\phi\|_{L^\infty} \int_{K_\phi} |f_n - f| \leq \|\phi\|_{L^\infty} \left( \int_{K_\phi} |f_n - f|^p \right)^{1/p} \left( \int_{K_\phi} 1^{p'} \right)^{1/p'} \\ &\leq \|\phi\|_{L^\infty} \|f_n - f\|_{L^p(K_\phi)} |K_\phi|^{1/p'} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

Pour  $p = 1$  ou  $p = +\infty$ , la preuve suit le même chemin mais avec quelques simplifications évidentes laissée au lecteur.



## Espaces de Sobolev

<b>7.1</b>	<b>Espaces <math>H^k(\Omega)</math></b>	<b>95</b>
<b>7.2</b>	<b>Espace <math>H_0^1(\Omega)</math></b>	<b>97</b>
7.2.1	Définition abstraite	97
7.2.2	Inégalité de Poincaré	99
7.2.3	Caractérisation alternative des espaces $H_0^1(\cdot)$	100
<b>7.3</b>	<b>Espace <math>H^{-1}(\Omega)</math></b>	<b>101</b>

Les espaces de Sobolev jouent un rôle central dans la théorie des EDP. Ce sont des sous-espaces de l'espace vectoriel des distributions qui possèdent une structure hilbertienne leur conférant des propriétés supplémentaires issues des théorèmes fondamentaux de l'analyse hilbertienne (inégalité de Cauchy-Schwarz, théorème de projection, théorème de Riesz). Ces propriétés permettront d'obtenir très simplement des résultats puissants sur les EDP. Signalons également que certains espaces de Sobolev s'introduisent de façon naturelle en considérant le modèle physique sous-jacent à une EDP : dans nombre de cas, le plus gros espace fonctionnel permettant de donner un sens mathématique à l'énergie d'un système est précisément un espace de Sobolev.

### 7.1 Espaces $H^k(\Omega)$

**Définition 7.1.** Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}$  et soit  $k$  un entier positif. On note  $H^k(\Omega)$  l'ensemble des fonctions de  $L^2(\Omega)$  dont toutes les dérivées (au sens des distributions) jusqu'à l'ordre  $k$  sont dans  $L^2(\Omega)$  :

$$H^k(\Omega) = \left\{ f \in L^2(\Omega) \mid \forall \alpha \in \{0, \dots, k\}, \quad \frac{d^\alpha f}{dx^\alpha} \in L^2(\Omega) \right\}.$$

Par convention,  $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$ .

**Exercice 7.1.** Pour quels  $k$  les fonctions suivantes appartiennent-elles à l'espace  $H^k(\cdot)$  :  $x \mapsto \sin x$ ,  $x \mapsto |x|$ , la fonction de Heaviside  $x \mapsto \Theta(x)$  définie dans l'Exercice 6.18 ?

**Correction.** On utilise la formule des sauts pour calculer la dérivée au sens des distributions des fonctions en question. Dans le premier cas,  $f_1(x) = \sin x$  est  $C^\infty$  avec  $f_1'(x) = \cos x$ , qui est bornée donc dans  $L^2(\cdot)$ . On voit de même que  $f_1^{(n)}$  est bornée pour tout  $n \geq 0$ . Ceci montre que  $f_1 \in H^k(\cdot)$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

Pour  $f_2(x) = |x|$ , on a  $f_2' = f_{2,\text{reg}}'$  avec  $f_{2,\text{reg}}'(x) = -1$  si  $x < 0$  et  $f_{2,\text{reg}}'(x) = 1$  si  $x > 0$ . Ensuite,  $f_2'' = 2\delta_0 \notin L^2(\cdot)$  par l'Exercice 6.14. Ceci montre que  $f_2 \in H^k(\cdot)$  pour  $k = 0, 1$  mais pas  $k \geq 2$ .

Pour  $f_3(x) = \Theta(x)$ , qui est dans  $L^2(\cdot)$ , on a  $f_3' = \delta_0$ , donc  $f_3 \notin H^k(\cdot)$  pour  $k \geq 1$ .

**Exercice 7.2.** Pour quels entiers  $k$  et paramètres  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$  la fonction  $x^{-\alpha}$  appartient-elle à l'espace  $H^k(]0, 1[)$  ? A l'espace  $H^k(]1, +\infty[)$  ?

**Correction.** Notons déjà que  $f_\alpha \in L^2(]0, 1[)$  si et seulement si  $\alpha < 1/2$ . Dans le cas contraire,  $f_\alpha$  n'est dans aucun des espaces  $H^k(]0, 1[)$ . Par ailleurs, un calcul simple montre que la dérivée  $k$ -ième de  $f_\alpha(x) = x^{-\alpha}$  est

$$f_\alpha^{(k)}(x) = (-1)^k \alpha \dots (\alpha + k - 1) x^{-\alpha-k}.$$

Cette fonction est dans  $L^2(]0, 1[)$  pour  $\alpha + k < 1/2$ . On en déduit que  $f_\alpha \in H^k(]0, 1[)$  pour  $k + \alpha < 1/2$ .

On note également que  $f_\alpha \in L^2(]1, +\infty[)$  si et seulement si  $\alpha > 1/2$ . Dans ce cas, on voit que  $f_\alpha^{(k)} \in L^2(]1, +\infty[)$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ . On en déduit que  $f_\alpha \in H^k(]1, +\infty[)$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$  si  $\alpha > 1/2$ , mais n'appartient à aucun espace  $H^k(]1, +\infty[)$  si  $\alpha \leq 1/2$ .

**Exercice 7.3.** Soit  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b$ , et  $f \in H^1(]a, b[)$ . Montrer que  $|f| \in H^1(]a, b[)$  en établissant au préalable que

$$\frac{d|f|}{dx}(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{|f(x)|} \frac{df}{dx}(x) & \text{si } f(x) \neq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On considérera pour ce faire  $f_\varepsilon(x) = \sqrt{\varepsilon^2 + |f(x)|^2}$ .

En déduire que si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions de  $H^1(]a, b[)$ , les fonctions  $\max(f, g)$  et  $\min(f, g)$  sont dans  $H^1(]a, b[)$ .

**Exercice 7.4.** Soit  $u \in H^1(\Omega)$  et  $\psi \in C^\infty(\Omega)$ . On suppose que  $\psi$  et sa dérivée première sont bornées sur  $\Omega$ . Montrer que le produit  $\psi u$  défini pour presque tout  $x \in \Omega$  par  $(\psi u)(x) = \psi(x)u(x)$  est dans  $H^1(\Omega)$ .

**Exercice 7.5.** Soit  $u \in H^1(\mathbb{R})$  et soit  $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  et telle que  $\Phi(0) = 0$ . Montrer que la fonction  $\Phi \circ u$ , définie pour presque tout  $x \in \mathbb{R}$  par  $(\Phi \circ u)(x) = \Phi(u(x))$ , est dans  $H^1(\mathbb{R})$ . Indication : on utilisera le résultat de l'Exercice 7.10, qui prouve que  $u \in L^\infty(\mathbb{R})$ , pour établir que  $\Phi \circ u$  et  $\Phi' \circ u$  sont dans  $L^\infty(\mathbb{R})$ .

**Théorème 7.1.** L'espace  $H^k(\Omega)$  est un espace vectoriel. Muni du produit scalaire

$$(f, g)_{H^k} = \sum_{0 \leq \alpha \leq k} \int_{\Omega} \frac{d^\alpha f}{dx^\alpha}(x) \frac{d^\alpha g}{dx^\alpha}(x) dx,$$

$H^k(\Omega)$  est un espace de Hilbert. Sa norme est notée  $\|\cdot\|_{H^k}$ .

**Exercice 7.6.** Il est clair que  $H^k(\Omega)$  est un espace vectoriel et que  $(\cdot, \cdot)_{H^k}$  est un produit scalaire sur  $H^k(\Omega)$ . Le point délicat est de vérifier que  $H^k(\Omega)$  est complet pour la norme  $\|\cdot\|_{H^k}$ . Pour ce faire, on va utiliser la complétude de  $L^2(\Omega)$  donnée par le Théorème 3.3. On considère  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de Cauchy de  $H^k(\Omega)$ .

- (1) Montrer que, pour tout  $\alpha = 0, \dots, k$ , les suites  $(d^\alpha f_n / dx^\alpha)$  sont de Cauchy dans  $L^2(\Omega)$ . On notera  $g_\alpha$  leur limite.
- (2) Prouver que la convergence dans  $L^2(\Omega)$  implique la convergence dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$ .
- (3) Montrer que  $g_\alpha = d^\alpha g_0 / dx^\alpha$  au sens des distributions. Conclure.

**Correction.** (1) Comme  $\|f_p - f_q\|_{L^2} \leq \|f_p - f_q\|_{H^k}$ , on voit que  $(f_n)$  est de Cauchy dans  $L^2(\Omega)$ , donc converge dans  $L^2(\Omega)$  vers  $g_0 \in L^2(\Omega)$ . De même, pour tout  $1 \leq \alpha \leq k$ ,

$$\left\| \frac{d^\alpha f_p}{dx^\alpha} - \frac{d^\alpha f_q}{dx^\alpha} \right\|_{L^2} \leq \|f_p - f_q\|_{H^k}.$$

Donc  $(d^\alpha f_n/dx^\alpha)$  converge dans  $L^2$  vers une fonction  $g_\alpha$ .

(2) Soit  $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ , de support compact  $K_\phi$ , et  $(h_n)$  une suite convergeant dans  $L^2(\Omega)$  vers une fonction  $h \in L^2(\Omega)$ . Alors, comme  $h, h_n \in L_{\text{loc}}^1(\Omega)$ , on peut considérer les distributions induites par ces fonctions. Par ailleurs, par une inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|\langle h_n, \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} - \langle h, \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}}| = \left| \int_{\mathbb{R}} (h_n - h) \phi \right| \leq \|h_n - h\|_{L^2} \|\phi\|_{L^2}.$$

On peut ainsi conclure à la convergence de  $h_n$  vers  $h$  au sens des distributions.

(3) Les résultats des questions précédentes montrent que  $f_n \rightarrow g_0$  dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$  et

$$\frac{d^\alpha f_n}{dx^\alpha} \rightarrow g_\alpha \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

De la première assertion, on déduit

$$\frac{d^\alpha f_n}{dx^\alpha} \rightarrow \frac{d^\alpha g_0}{dx^\alpha} \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Par unicité de la limite dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$ , on trouve  $d^\alpha g_0/dx^\alpha = g_\alpha$  au sens des distributions. Comme  $g_\alpha \in L^2(\Omega)$ , on peut conclure que  $d^\alpha g_0/dx^\alpha \in L^2(\Omega)$  et que l'égalité  $d^\alpha g_0/dx^\alpha = g_\alpha$  a lieu dans  $L^2(\Omega)$  (voir le commentaire après le Théorème 6.3). Ceci montre que  $g_0 \in H^k$ . Comme  $d^\alpha f_n/dx^\alpha \rightarrow d^\alpha g_0/dx^\alpha$  dans  $L^2(\Omega)$ , on peut conclure que  $f_n \rightarrow g_0$  dans  $H^k(\Omega)$ .

**Exercice 7.7.** On considère l'espace vectoriel

$$V = \left\{ v \in L^2(\Omega) \mid v'' \in L^2(\Omega) \right\},$$

équipé du produit scalaire  $(v, w)_V = (v, w)_{L^2} + (v'', w'')_{L^2}$ . Montrer que  $V$  est un espace de Hilbert.

**Exercice 7.8.** Soit  $p$  un réel tel que  $1 \leq p \leq +\infty$ . Soit un entier  $k$  positif. On pose

$$W^{k,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \mid \forall 0 \leq \alpha \leq k, \quad \frac{d^\alpha u}{dx^\alpha} \in L^p(\Omega) \right\},$$

les dérivées étant prises au sens des distributions. On équipe cet espace de la norme

$$\|u\|_{W^{k,p}} = \sum_{0 \leq \alpha \leq k} \left\| \frac{d^\alpha u}{dx^\alpha} \right\|_{L^p}.$$

(i) Justifier le fait que l'on puisse considérer les dérivées de  $u$  au sens des distributions.

(ii) Montrer que  $W^{k,p}(\Omega)$  équipé de la norme ci-dessus est un espace de Banach.

## 7.2 Espace $H_0^1(\Omega)$

### 7.2.1 Définition abstraite

On peut toujours approcher des fonctions de  $L^2(\Omega)$  par des fonctions de  $\mathcal{D}(\Omega)$  (au sens de la norme  $L^2(\Omega)$ ). Ceci n'est toutefois pas toujours possible pour des fonctions de  $H^1(\Omega)$ , que l'on

cherche à approcher en norme  $H^1(\Omega)$  : cela dépend si  $\Omega = \mathbb{R}$  ou pas. L'idée est que les fonctions de  $H^1(\Omega)$  ne s'annulent pas nécessairement sur la frontière de  $\Omega$  (penser à la fonction constante égale à 1, sur un domaine  $\Omega = ]0, 1[$ ), alors que les fonctions de  $\mathcal{D}(\Omega)$  s'annulent sur ladite frontière (*i.e.* en 0 et en 1 dans l'exemple précédent).

**Proposition 7.1.** *Si  $\Omega = \mathbb{R}$ , l'espace  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  est dense dans  $H^1(\mathbb{R})$ . En revanche, si  $\Omega \subset \mathbb{R}$  avec  $\Omega \neq \mathbb{R}$ , l'espace  $\mathcal{D}(\Omega)$  n'est pas dense dans  $H^1(\Omega)$ .*

La première assertion, assez technique, se montre par troncature et régularisation. Nous admettons donc ce résultat. Le second résultat est prouvé dans l'exercice suivant, dans le cas simple mais représentatif où  $\Omega = ]0, 1[$ .

**Exercice 7.9.** (1) En notant que, pour tout  $\phi \in \mathcal{D}(]0, 1[)$ , on peut écrire

$$\forall x \in ]0, 1[, \quad \phi(x) = \int_0^x \phi'(t) dt,$$

montrer l'inégalité  $|\phi(x)| \leq \|\phi'\|_{L^2}$ , et en déduire que

$$\|\phi\|_{L^2} \leq \|\phi'\|_{L^2}. \quad (7.1)$$

(2) Trouver une fonction de  $H^1(]0, 1[)$  qui ne satisfait pas cette inégalité. Conclure.

**Correction.** (1) On a, pour tout  $x \in ]0, 1[$ , par une inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|\phi(x)| \leq \int_0^x |\phi'(t)| dt \leq \left( \int_0^x |\phi'(t)|^2 dt \right)^{1/2} \left( \int_0^x 1^2 dt \right)^{1/2} \leq \|\phi'\|_{L^2}.$$

Il en résulte que

$$\|\phi\|_{L^2} = \left( \int_0^1 |\phi(t)|^2 dt \right)^{1/2} \leq \|\phi'\|_{L^2}.$$

On a donc finalement  $\|\phi\|_{L^2} \leq \|\phi'\|_{L^2}$  pour tout  $\phi \in \mathcal{D}(]0, 1[)$ .

(2) La fonction  $f \equiv 1$  sur  $]0, 1[$  ne satisfait pas l'inégalité précédente. Or, il est clair par ailleurs que les applications

$$\begin{array}{ccc} H^1(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & \|u\|_{L^2} \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} H^1(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & \|u'\|_{L^2} \end{array}$$

sont continues. Si  $\mathcal{D}(]0, 1[)$  était dense dans  $H^1(]0, 1[)$ , l'inégalité  $\|\phi\|_{L^2} \leq \|\phi'\|_{L^2}$  resterait donc vraie pour tout  $\phi \in H^1(]0, 1[)$ , et donc en particulier pour la fonction constante. Ceci permet donc de conclure que  $\mathcal{D}(]0, 1[)$  n'est pas dense dans  $H^1(]0, 1[)$ .

**Exercice 7.10.** Soit  $u \in H^1(\mathbb{R})$ . En utilisant la densité de  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  dans  $H^1(\mathbb{R})$ , montrer qu'il existe une constante  $C > 0$  (que l'on précisera) telle que

$$\|u\|_{L^\infty} \leq C \|u\|_{L^2}^{1/2} \|u'\|_{L^2}^{1/2}.$$

On pourra écrire  $u(x)^2$  comme l'intégrale de sa dérivée, en traitant pour commencer le cas  $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ .

Le résultat de non-densité ci-dessus motive la définition suivante.

**Définition 7.2.** On note  $H_0^1(\Omega)$  la fermeture de  $\mathcal{D}(\Omega)$  dans  $H^1(\Omega)$ .

**Remarque 7.1.** La Proposition 7.1 montre que  $H_0^1(\mathbb{R}) = H^1(\mathbb{R})$ , alors que  $H_0^1(\Omega)$  n'est qu'un sous-espace vectoriel de  $H^1(\Omega)$  (strictement inclus dans  $H^1(\Omega)$ ) si  $\Omega \subset \mathbb{R}$  avec  $\Omega \neq \mathbb{R}$ .

**Proposition 7.2.** L'espace  $H_0^1(\Omega)$  est un espace vectoriel. C'est un espace de Hilbert pour le produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_{H^1}$ .

**Exercice 7.11.** Prouver la Proposition 7.2.

**Correction.** Il est clair que  $H_0^1(\Omega)$  est un espace vectoriel (c'est la fermeture d'un espace vectoriel pour une certaine norme). Le produit scalaire de  $H^1(\Omega)$  restreint à  $H_0^1(\Omega)$  définit évidemment un produit scalaire sur  $H_0^1(\Omega)$ . Comme  $H_0^1(\Omega)$  est fermé dans un espace complet, il est complet.

### 7.2.2 Inégalité de Poincaré

Enonçons maintenant un résultat important d'analyse fonctionnelle dont nous aurons besoin par la suite pour l'étude de problèmes variationnels avec conditions de bord de Dirichlet :

**Théorème 7.2 (Inégalité de Poincaré).** Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}$ . Il existe une constante  $C_\Omega$  telle que

$$\forall u \in H_0^1(\Omega), \quad \|u\|_{L^2} \leq C_\Omega \|u'\|_{L^2}.$$

Dans le langage de l'analyse fonctionnelle, on dit que la norme  $L^2$  d'une fonction de  $H_0^1(\Omega)$  ( $\Omega$  borné) est contrôlée par la norme  $L^2$  de son gradient (sa dérivée ici, vu que nous sommes en dimension 1). Insistons lourdement sur le fait qu'un tel contrôle n'est possible que lorsque l'ensemble  $\Omega$  est borné.

**Exercice 7.12.** On va prouver le Théorème 7.2 en se fondant sur l'inégalité de Poincaré (7.1) obtenue sur  $]0, 1[$ . L'ouvert  $\Omega$  étant borné, il existe  $L > 0$  tel que  $\Omega \subset [-L, L]$ . En se ramenant au cas (7.1) par un changement de variable approprié, montrer que

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \|\phi\|_{L^2} \leq 2L \left\| \frac{d\phi}{dx} \right\|_{L^2}. \quad (7.2)$$

Conclure.

**Correction.** Soit  $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$  et  $\phi_L(t) = \phi(-L + 2Lt)$ . Il est clair que  $\phi_L \in \mathcal{D}(]0, 1[)$ . On peut alors appliquer (7.1), ce qui conduit, avec le changement de variable  $x = -L + 2Lt$ ,

$$\int_0^1 |\phi_L(t)|^2 dt = \frac{1}{2L} \int_\Omega |\phi(x)|^2 dx \leq \int_0^1 \left| \frac{d\phi_L}{dt}(t) \right|^2 dt = 4L^2 \int_0^1 |\phi'(-L + 2Lt)|^2 dt = 2L \int_\Omega |\phi'|^2,$$

ce qui donne (7.2). On conclut ensuite comme dans le corrigé de l'Exercice 7.9 : en utilisant la continuité des applications

$$\begin{array}{ccc} H^1(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & \|u\|_{L^2} \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} H^1(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & \|u'\|_{L^2} \end{array}$$

et la densité de  $\mathcal{D}(\Omega)$  dans  $H_0^1(\Omega)$  pour la norme  $H^1$ , on voit que l'inégalité (7.2) reste valable pour tous les éléments de  $H_0^1(\Omega)$ .

Noter que l'on peut aussi directement refaire les manipulations de l'Exercice 7.9. En effet, une inégalité de Cauchy-Schwarz montre pour une fonction  $\phi$  régulière que

$$|\phi(x)| = \left| \int_a^x \phi' \right| \leq \sqrt{2L} \|\phi'\|_{L^2},$$

d'où on déduit

$$\int_{-L}^L |\phi|^2 \leq \left( \int_{-L}^L dx \right) 2L \|\phi'\|_{L^2}^2,$$

et donc (7.2).

**Exercice 7.13 (Inégalité de Hardy sur un intervalle borné).** Soit  $\Omega = ]0, 1[$  et  $u \in H_0^1(\Omega)$ .

Montrer que la fonction  $x \mapsto \frac{u(x)}{x(1-x)}$  est dans  $L^2(\Omega)$  et que

$$\left\| \frac{u(x)}{x(1-x)} \right\|_{L^2} \leq c \|u'\|_{L^2}$$

où  $c$  est une constante indépendante de  $u$ . On commencera par se ramener à une estimation de  $u(x)/x$ . Pour estimer la norme  $L^2$  de cette fonction, on utilisera une intégration par parties.

### 7.2.3 Caractérisation alternative des espaces $H_0^1([a, b])$

En dimension 1, une fonction qui est dans  $H^1([a, b])$  est dans  $C^0([a, b])$ , ainsi que le montre l'exercice suivant.

**Exercice 7.14.** Soit  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b$ . L'objectif de cet exercice est de montrer que toute fonction de  $H^1([a, b])$  admet un représentant continu.

(1) Etablir que  $|v(x_1) - v(x_2)| \leq \sqrt{|x_1 - x_2|} \|v'\|_{L^2}$  lorsque  $v \in C^\infty([a, b])$ .

(2) Montrer que si  $T' = 0$  dans  $\mathcal{D}'([a, b])$ , alors  $T$  peut s'identifier à une fonction constante. On introduira pour ce faire une fonction  $\rho \in \mathcal{D}([a, b])$  telle que  $\int_a^b \rho = 1$ , et on notera que pour toute fonction  $\phi \in \mathcal{D}([a, b])$ , la fonction  $\phi - (\int_a^b \phi) \rho$  admet une primitive dans  $\mathcal{D}([a, b])$ .

(3) Conclure.

**Correction.** (1) On peut écrire

$$v(x) = v(a) + \int_a^x v'(y) dy.$$

On voit ensuite par une inégalité de Cauchy-Schwarz que, pour  $a \leq x_1 \leq x_2 \leq b$ ,

$$|v(x_1) - v(x_2)| \leq \int_{x_1}^{x_2} |v'| \leq \sqrt{x_2 - x_1} \|v'\|_{L^2}. \quad (7.3)$$

(2) Remarquons d'abord qu'une fonction  $\phi \in \mathcal{D}([a, b])$  possède une primitive dans  $\mathcal{D}([a, b])$  si et seulement si  $\int_a^b \phi = 0$ , la primitive étant alors  $\int_a^x \phi$ . On note ensuite que, par construction, la fonction  $\phi - (\int_a^b \phi) \rho$  est d'intégrale nulle. Il existe donc  $\psi \in \mathcal{D}([a, b])$  telle que

$$\psi' = \phi - \left( \int_a^b \phi \right) \rho.$$

Soit maintenant  $T \in \mathcal{D}'([a, b])$  vérifiant  $T' = 0$ . On a

$$\langle T, \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = \left( \int_a^b \phi \right) \langle T, \rho \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} + \langle T, \psi' \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = \left( \int_a^b \phi \right) \langle T, \rho \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} - \langle T', \psi \rangle = \left( \int_a^b \phi \right) \langle T, \rho \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}}.$$

En appelant  $C$  la constante  $\langle T, \rho \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}}$ , on a donc  $T = C$  (cette égalité devant être comprise comme une égalité au sens des distributions, la fonction de droite étant la fonction  $x \mapsto C$  qui est bien  $L_{\text{loc}}^1(\Omega)$ ).



(3) Pour  $u \in H^1(]a, b[)$ , on introduit la fonction

$$U(x) = \int_a^x u'.$$

On montre, comme à la première question, que cette fonction satisfait (7.3) et est donc continue. L'Exercice 6.20 montre que  $(U - u)' = 0$  dans  $\mathcal{D}'(]a, b[)$ . Il existe donc une constante  $c \in \mathbb{R}$  telle que  $u = U + c$ , l'égalité ayant lieu au sens des distributions ; et en fait dans  $L^\infty(]a, b[)$  car  $U + c$  est dans cet espace. Ceci montre que  $u$  peut être représentée par la fonction continue  $U + c$ .

On peut donc définir la valeur  $a$  et en  $b$  d'une fonction de  $H^1(]a, b[)$ . Ceci permet ainsi de caractériser les espaces  $H_0^1(]a, b[)$  de manière plus simple en dimension 1.

**Proposition 7.3 (Définition alternative).** *On a la caractérisation suivante :*

$$H_0^1(]a, b[) = \left\{ u \in H^1(]a, b[), \quad u(a) = u(b) = 0 \right\}.$$

### 7.3 Espace $H^{-1}(\Omega)$

**Définition 7.3.** Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}$ . On note  $H^{-1}(\Omega)$  l'espace vectoriel des distributions  $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$  telles qu'il existe une constante  $C$  pour laquelle

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad |\langle T, \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}}| \leq C \|\phi\|_{H^1}.$$

Il est clair que  $L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$ . En effet, si  $f \in L^2(\Omega)$ , on a

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad |\langle f, \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}}| = \left| \int_{\Omega} f \phi \right| \leq \|f\|_{L^2} \|\phi\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} \|\phi\|_{H^1}.$$

On verra en Proposition 7.4 comment caractériser complètement  $H^{-1}$  comme un espace de dérivées de fonctions  $L^2$ . Enonçons au préalable une propriété qui permet elle-aussi de caractériser  $H^{-1}$ .

**Théorème 7.3.** On peut identifier  $H^{-1}(\Omega)$  au dual de  $H_0^1(\Omega)$ . Par ailleurs, pour  $T \in H^{-1}(\Omega)$ , on peut écrire que

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \langle T, \phi \rangle_{H^{-1}, H_0^1} = \langle T, \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}}. \quad (7.4)$$

Insistons sur le fait que cet énoncé signifie en particulier que toute forme linéaire sur  $\mathcal{D}(\Omega)$ , qui vérifie la propriété de continuité (7.3), peut en fait être étendue à une forme linéaire continue sur  $H_0^1(\Omega)$ .

La preuve utilise une technique de prolongement d'une forme linéaire.

**Théorème 7.4.** Soit  $V$  un  $\mathbb{K}$ -ev normé et  $Z$  un sous-espace vectoriel de  $V$ . Soit  $A \in Z'$  une forme linéaire continue de norme  $\|A\|_{Z'}$ . Alors, il existe  $B \in V'$  qui prolonge  $A$ , i.e.

$$\forall z \in Z, \quad \langle A, z \rangle_{Z', Z} = \langle B, z \rangle_{V', V},$$

et telle que  $\|B\|_{V'} = \|A\|_{Z'}$ .

*Preuve (du Théorème 7.3).* Soit  $T \in H^{-1}(\Omega)$ . L'application linéaire

$$\phi \mapsto \langle T, \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}}$$

est continue sur  $\mathcal{D}(\Omega)$  muni de la norme  $H^1$ . Par conséquent, cette application se prolonge en une forme linéaire continue sur  $H_0^1(\Omega)$  (par le Théorème 7.4 et la Proposition 4.4) notée

$$\phi \mapsto \langle T, \phi \rangle_{H^{-1}, H_0^1},$$

qui vérifie en particulier

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \langle T, \phi \rangle_{H^{-1}, H_0^1} = \langle T, \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}}.$$

De plus, ce prolongement est unique car  $\mathcal{D}(\Omega)$  est dense dans  $H_0^1(\Omega)$  pour la norme de  $H^1$ . On peut donc associer à tout  $T \in H^{-1}(\Omega)$  un élément du dual de  $H_0^1(\Omega)$  (i.e. de l'espace vectoriel des formes linéaires continues sur  $H_0^1(\Omega)$ ). On définit ainsi

$$\begin{aligned} \alpha : H^{-1}(\Omega) &\longrightarrow \left(H_0^1(\Omega)\right)' \\ T &\mapsto \langle T, \cdot \rangle_{H^{-1}, H_0^1}. \end{aligned}$$

Réciproquement, soit  $L \in (H_0^1(\Omega))'$ . Par continuité de la forme linéaire, il existe une constante  $C$  telle que

$$\forall \phi \in H_0^1(\Omega), \quad |L(\phi)| \leq C \|\phi\|_{H^1}.$$

En notant  $L|_{\mathcal{D}(\Omega)}$  la restriction de  $L$  à  $\mathcal{D}(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$ , on définit une forme linéaire sur  $\mathcal{D}(\Omega)$  qui vérifie

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \left| L|_{\mathcal{D}(\Omega)}(\phi) \right| \leq C \|\phi\|_{H^1}.$$

Il reste à vérifier que  $L|_{\mathcal{D}(\Omega)}$  est une distribution (i.e. qu'elle vérifie la propriété de continuité (6.1)). Soit donc  $K$  compact inclus dans  $\Omega$  et  $\phi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ . Il vient

$$\left| L|_{\mathcal{D}(\Omega)}(\phi) \right| \leq C \|\phi\|_{H^1} \leq C \left( \|\phi\|_{L^2}^2 + \|\phi'\|_{L^2}^2 \right)^{1/2}.$$

Or  $\|\phi\|_{L^2} \leq \sqrt{|K|} \|\phi\|_{L^\infty}$  et  $\|\phi'\|_{L^2} \leq \sqrt{|K|} \|\phi'\|_{L^\infty}$ . Ainsi,

$$\left| L|_{\mathcal{D}(\Omega)}(\phi) \right| \leq C' \sup_{\alpha=0,1, x \in K} |\phi^{(\alpha)}(x)|.$$

Donc  $L|_{\mathcal{D}(\Omega)}$  définit une distribution (d'ordre inférieur ou égal à 1). On définit ainsi

$$\begin{aligned} \beta : \left(H_0^1(\Omega)\right)' &\longrightarrow H^{-1}(\Omega) \\ L &\mapsto L|_{\mathcal{D}(\Omega)}. \end{aligned}$$

On vérifie facilement que  $\alpha \circ \beta = I_{(H_0^1(\Omega))'}$  et que  $\beta \circ \alpha = I_{H^{-1}(\Omega)}$ , ce qui permet de conclure.  $\square$

**Proposition 7.4 (Caractérisation des éléments de  $H^{-1}$ ).** *Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}$ . Une distribution  $T$  appartient à  $H^{-1}(\Omega)$  si et seulement si il existe  $f, g \in L^2(\Omega)$  telles que*

$$T = f + \frac{dg}{dx}. \quad (7.5)$$

**Exercice 7.15.** *Montrer que si  $T$  est de la forme (7.5), alors  $T \in H^{-1}(\Omega)$ .*

La réciproque, nettement plus délicate, est admise.

**Correction.** Lorsque  $T$  est de la forme (7.5), on peut écrire, pour  $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ ,

$$\begin{aligned} |\langle T, \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}}| &\leq |\langle f, \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}}| + \left| \left\langle \frac{dg}{dx}, \phi \right\rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} \right| \\ &= |\langle f, \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}}| + \left| \left\langle g, \frac{d\phi}{dx} \right\rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} \right| \leq \|f\|_{L^2} \|\phi\|_{L^2} + \|g\|_{L^2} \left\| \frac{d\phi}{dx} \right\|_{L^2} \\ &\leq \left( \|f\|_{L^2} + \|g\|_{L^2} \right) \|\phi\|_{H^1}. \end{aligned}$$

Par densité, on peut étendre cette majoration à toute fonction  $\phi \in H^1(\Omega)$ , ce qui montre bien que  $T \in H^{-1}(\Omega)$ .

**Remarque 7.2.** Le résultat ci-dessus montre qu'on a les inclusions  $\mathcal{D}(\Omega) \subset H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ . Par ailleurs,  $L^2$  peut être vu comme un “espace pivot” de ces dualités, au sens où, pour  $T \in L^2(\Omega)$  et  $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ ,

$$\langle T, \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = \langle T, \phi \rangle_{H^{-1}, H_0^1} = \langle T, \phi \rangle_{(L^2)', L^2} = (T, \phi)_{L^2} = \int_{\Omega} T \phi.$$

Concluons cette section par un exercice qui montre que les éléments de  $H^{-1}$  ne sont pas des fonctions en général, mais peuvent être des éléments très singuliers.

**Exercice 7.16.** On se place sur  $\Omega \in ]-1, 1[$ . Montrer que  $\delta_0 \in H^{-1}(\Omega)$ .

**Correction.** On peut noter que  $\delta_0$  est, par la formule des sauts, la dérivée au sens des distributions de la fonction  $\mathbf{1}_{x < 0}$ , qui est dans  $L^2(\Omega)$ . On en déduit que  $\delta_0 \in H^{-1}(\Omega)$  au vu de la Proposition 7.4.

Alternativement, on peut noter que, pour  $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ , on a

$$|\langle \delta_0, \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}}| \leq \sup_{x \in \Omega} |\phi(x)| \leq C \|\phi\|_{H^1}$$

au de l'Exercice 7.10 (en fait, une adaptation simple dudit exercice, où on se restreint à  $\Omega$  au lieu de  $\mathbb{R}$ ). Cette propriété de continuité montre bien, par définition, que  $\delta_0 \in H^{-1}(\Omega)$ .



## Formulations faibles

---

<b>8.1</b>	<b>Théorème de Lax-Milgram</b> .....	<b>106</b>
<b>8.2</b>	<b>Résolution de problèmes aux limites</b> .....	<b>108</b>
8.2.1	Problème de Poisson (régularisé) .....	108
8.2.2	Advection-diffusion .....	111
8.2.3	Autres exemples .....	112

---

Ce chapitre est axé sur l'analyse mathématique de *problèmes aux limites elliptiques linéaires*. Le terme *problème aux limites* désigne un problème mathématique composé

- (1) d'une (ou plusieurs) équation(s) aux dérivées partielles,
- (2) de conditions aux bords (ou de conditions asymptotiques à l'infini).

Pour les problèmes dépendant du temps (dont nous ne parlerons pas ici) s'ajoutent des conditions initiales. Le terme *elliptique* désigne une certaine classe d'équations aux dérivées partielles dont l'archétype est l'équation de Poisson  $-\Delta u = f$ . Enfin le qualificatif *linéaire* signifie que la ou les EDPs, ainsi que les conditions aux bords, sont linéaires ou affines.<sup>1</sup>

Dans ce chapitre, nous démontrerons notamment que le problème aux limites sur  $\Omega = ]-R, R[$

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega), \\ u(-R) = u(R) = 0, \end{cases} \quad (8.1)$$

admet, pour  $f$  donnée dans  $H^{-1}(\Omega)$ , une solution  $u$  et une seule dans  $H^1(\Omega)$ , et que cette solution dépend continûment du second membre  $f$ . Ce résultat sera obtenu en deux étapes :

- (1) on associera au problème (8.1) une formulation faible (ou variationnelle) qui lui est équivalente

$$\begin{cases} \text{Chercher } u \in V \text{ tel que} \\ \forall v \in V, \quad a(u, v) = b(v), \end{cases} \quad (8.2)$$

avec  $V = H_0^1(\Omega)$  et

$$a(u, v) = \int_{\Omega} u'v', \quad b(v) = \int_{\Omega} fv.$$

Les problèmes (8.1) et (8.2) sont équivalents en ce sens que toute solution dans  $H^1$  du problème (8.1) est solution du problème (8.2), et vice versa ;

- (2) on montrera à l'aide du *théorème de Lax-Milgram* que le problème variationnel (8.2) admet une solution et une seule.

---

1. Cela exclut par exemple des EDPs telles que  $\Delta(u^2) = 0$  ou des conditions de bord comme  $u(R)^2 = 1$ .

D'autres cas plus compliqués faisant intervenir des opérateurs non symétriques seront également étudiés.

**Remarque 8.1 (Lien avec le cours de mécanique).** *Pour faire le lien avec le cours de mécanique, insistons sur le fait que ce que nous appelons ici “formulation faible” ou “formulation variationnelle” est appelé en mécanique “principe des travaux virtuels”. Les “travaux virtuels” sont en fait des fonctions test, décrivant tout l'espace de Hilbert  $V$ , et utilisées dans la formulation variationnelle (8.2).*

## 8.1 Théorème de Lax-Milgram

**Définition 8.1.** Soit  $V$  un espace de Hilbert et  $a$  une forme bilinéaire sur  $V$ . On dit que  $a$  est continue s'il existe un réel  $\omega \in \mathbb{R}_+$  tel que

$$\forall (u, v) \in V \times V, \quad |a(u, v)| \leq \omega \|u\|_V \|v\|_V.$$

On dit que  $a$  est coercive s'il existe un réel  $\alpha > 0$  tel que

$$\forall u \in V, \quad a(u, u) \geq \alpha \|u\|_V^2.$$

**Théorème 8.1 (Théorème de Lax-Milgram).** Soit  $V$  un espace de Hilbert,  $a$  une forme bilinéaire sur  $V$  continue et coercive et  $b$  une forme linéaire continue sur  $V$ . Alors le problème

$$\begin{cases} \text{Chercher } u \in V \text{ tel que} \\ \forall v \in V, \quad a(u, v) = b(v), \end{cases} \quad (8.3)$$

admet une solution et une seule.

**Exercice 8.1.** L'objectif de cet exercice est de prouver le Théorème 8.1 dans le cas particulier où  $a$  est symétrique, le cas général étant traité dans l'Exercice 8.2. On pose pour cela

$$(u, v)_a = a(u, v).$$

- (1) Montrer que  $(\cdot, \cdot)_a$  est un produit scalaire sur  $V$ , induisant une norme équivalente à  $\|\cdot\|_V$ . En déduire que  $V$  muni du produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_a$  est un espace de Hilbert.
- (2) Obtenir l'existence et l'unicité de  $u$  en utilisant le Théorème de Riesz (Théorème 4.1) pour représenter la forme linéaire  $b(v)$ .

**Correction.** (1) Il est clair que  $(\cdot, \cdot)_a$  est un produit scalaire sur  $V$ . Par ailleurs, les normes  $\|\cdot\|_V$  et  $\|\cdot\|_a$  sont équivalentes; en effet, de la coercivité et de la continuité de la forme bilinéaire  $a$ , nous déduisons que

$$\forall v \in V, \quad \alpha \|v\|_V^2 \leq \|v\|_a^2 = a(v, v) \leq M \|v\|_V^2.$$

L'espace  $V$ , qui est complet pour la norme  $\|\cdot\|_V$ , l'est donc aussi pour la norme  $\|\cdot\|_a$  (voir Proposition 1.8). Ainsi,  $V$  muni du produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_a$  est un espace de Hilbert.

- (2) La forme linéaire  $b$  est continue pour la norme  $\|\cdot\|_V$ : il existe  $B \in \mathbb{R}_+$  tel que

$$\forall v \in V, \quad |b(v)| \leq B \|v\|_V.$$

Comme  $\|v\|_V \leq \alpha^{-1/2} \|v\|_a$ , on a

$$\forall v \in V, \quad |b(v)| \leq \frac{B}{\sqrt{\alpha}} \|v\|_a.$$

D'après le Théorème de Riesz (voir Théorème 4.1), il existe donc un unique élément  $u \in V$  vérifiant

$$\forall v \in V, \quad b(v) = (u, v)_a = a(u, v).$$

Ceci montre l'existence et l'unicité de la solution de (8.3).

**Exercice 8.2.** L'objectif de cet exercice est de donner la preuve du Théorème (8.1) dans le cas où  $a$  n'est pas symétrique. On considère pour cela l'application linéaire continue

$$\begin{aligned}\Phi : V &\longrightarrow V' \\ u &\mapsto \Phi(u) = a(u, \cdot).\end{aligned}$$

Il est clair que  $u$  est solution de (8.3) si et seulement si  $\Phi(u) = b$ . Afin de travailler dans  $V$  et non pas dans  $V'$ , on utilise le Théorème 4.1, qui permet d'identifier un élément  $g \in V'$  et le vecteur  $w = R(g)$  qui le représente :  $g(v) = (w, v)_V$  pour tout  $v \in V$ . On note ainsi  $\Psi(u) = R(\Phi(u))$  l'élément qui représente  $a(u, \cdot)$ . Montrer l'existence et l'unicité de la solution de (8.3) équivaut donc à montrer que  $\Psi$  est bijective.

(1) Montrer que  $\Psi$  est injective.

(2) Montrer que  $E = \text{Im}(\Psi) \subset V$  est fermé. Pour cela, on commencera par montrer que  $\|\Psi(w)\|_V \geq \alpha \|w\|_V$  ; puis on montrera que si  $(b_n) = (\Psi(w_n))$  est une suite de Cauchy de  $E$ , alors  $(w_n)$  est une suite de Cauchy.

(3) Montrer que  $E^\perp = 0$  et en déduire que  $E$  est dense. Conclure.

Dans le cas où la forme bilinéaire est symétrique, on peut proposer une interprétation physiquement intéressante.

**Proposition 8.1 (Interprétation énergétique dans le cas symétrique).** Sous les mêmes hypothèses que celles du Théorème 8.1, et si la forme bilinéaire  $a$  est symétrique, l'unique solution  $u$  de (8.3) est également l'unique solution du problème de minimisation

$$\text{Chercher } u \in V \text{ tel que } J(u) = \inf_{v \in V} J(v), \quad (8.4)$$

où la fonctionnelle  $J(v)$  (dite fonctionnelle d'énergie) est définie par

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - b(v).$$

**Exercice 8.3.** L'objectif de cet exercice est de prouver la Proposition 8.1.

(1) Soit  $u$  solution de (8.3). En développant  $J(u + h)$ , montrer que  $u$  est solution de (8.4).

(2) Réciproquement, on suppose que  $u$  est solution de (8.4). Obtenir (8.3) en remarquant que  $J(u) \leq J(u + \lambda v)$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $v \in V$ .

**Correction.** (1) Soit  $u$  solution de (8.3) et  $v \in V$ . Posons  $h = v - u$ . On a, en développant les formes linéaires et bilinéaires par rapport à  $h$ ,

$$\begin{aligned}J(v) &= J(u + h) = \frac{1}{2}a(u + h, u + h) - b(u + h) \\ &= J(u) + (a(u, h) - b(h)) + \frac{1}{2}a(h, h) \\ &= J(u) + \frac{1}{2}a(h, h) \geq J(u),\end{aligned}$$

ce qui montre que  $u$  est solution de (8.4).

(2) Réciproquement, si  $u$  est solution de (8.4), on a alors, pour tout  $v \in V$  et pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,

$$J(u) \leq J(u + \lambda v) = J(u) + \lambda(a(u, v) - b(v)) + \frac{1}{2}\lambda^2 a(v, v).$$

Ainsi, pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,

$$\lambda(a(u, v) - b(v)) + \frac{1}{2}\lambda^2 a(v, v) \geq 0.$$

Ceci implique que  $a(u, v) = b(v)$  pour tout  $v \in V$  (prendre  $\lambda > 0$  et passer à la limite  $\lambda \rightarrow 0$  ; puis faire de même avec  $\lambda < 0$ ). Finalement,  $u$  est solution de (8.3).

## 8.2 Résolution de problèmes aux limites

Pour résoudre un problème aux limites tel que (8.1), le premier travail à faire est de construire un cadre fonctionnel adapté, c'est-à-dire de préciser un espace fonctionnel  $F$  dans lequel on s'autorise à choisir la donnée  $f$  et un espace fonctionnel  $V$  dans lequel on va chercher la solution  $u$ .

Bien souvent, la physique fournit des modèles sans les espaces fonctionnels qui vont avec ! C'est au mathématicien de trouver les bons espaces, c'est-à-dire ceux pour lesquels on saura dire des choses sur les solutions du problème (existence, unicité, régularité, ...), pour des données  $f$  aussi générales que possible. Un bon cadre fonctionnel doit en principe assurer l'existence et l'unicité d'une solution dans  $V$  pour tout  $f \in F$ .

Ce genre de résultats d'existence et d'unicité n'est pas une simple coquetterie mathématique : c'est un garde-fou important en vue de la simulation numérique – il est inutile de chercher numériquement une solution si celle-ci n'existe pas, et si elle n'est pas unique, il faut obtenir des critères supplémentaires pour sélectionner la solution la plus pertinente...

### 8.2.1 Problème de Poisson (régularisé)

On considère le problème suivant pour  $\lambda \geq 0$ ,  $\Omega = ]-R, R[$  et  $f$  une fonction donnée :

$$\begin{cases} \text{Chercher } u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ vérifiant} \\ -u'' + \lambda u = f \quad \text{dans } \Omega, \\ u(-R) = u(R) = 0. \end{cases} \quad (8.5)$$

Pour “deviner” les espaces fonctionnels appropriés, on commence par effectuer des manipulations *formelles*, qu'il faudra justifier par la suite lors d'un raisonnement complètement rigoureux. Idéalement, ces manipulations formelles ne devraient pas apparaître dans un document “officiel” (copie d'examen, article de recherche, etc) dans lequel on n'écrit que la partie rigoureuse, mais il faut bien exposer ici ce genre de manipulations pour vous faire sentir les opérations à effectuer pour introduire le problème adéquat...

#### Manipulations formelles (idéalement : à ne pas reproduire telles quelles)

On multiplie les deux membres de l'équation  $-\Delta u + \lambda u = f$  par  $v$  (sans se préoccuper de rigueur mathématique) et on intègre sur  $\Omega$ , ce qui donne

$$\int_{\Omega} (-u'' + \lambda u)v = \int_{\Omega} f v.$$

Une intégration par partie donne formellement

$$\int_{\Omega} u' v' + \lambda \int_{\Omega} u v = \int_{\Omega} f v.$$

Pour une donnée  $f$  très régulière, par exemple  $f \in \mathcal{D}(\Omega)$ , les deux termes de l'égalité ont un sens lorsque  $u, v \in H^1(\Omega)$  (et c'est même une condition nécessaire lorsque  $v = u$ ). Comme en outre  $u = 0$  sur  $\partial\Omega = \{-R, R\}$ , un choix approprié consiste à prendre  $V = H_0^1(\Omega)$  (se souvenir de la Proposition 7.3). On voit alors qu'on peut donner un sens formel au membre de droite de l'équation ci-dessus dès que  $f$  est dans le dual de  $H_0^1(\Omega)$ , c'est-à-dire dans  $H^{-1}(\Omega)$ . On choisit donc  $F = H^{-1}(\Omega)$ .

On aboutit ainsi à la formulation mathématique suivante du problème (8.5) : pour  $f \in H^{-1}(\Omega)$  fixée,

$$\begin{cases} \text{Chercher } u \in H_0^1(\Omega) \text{ vérifiant} \\ -u'' + \lambda u = f \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega). \end{cases} \quad (8.6)$$



**Raisonnement rigoureux (idéalement : faire comme si on partait directement de là)**

On montre l'existence et l'unicité de solutions au problème (8.6) en deux temps : (i) on commence par montrer que ce problème est équivalent à un problème formulé sous la forme abstraite (8.3), puis (ii) on montre qu'en application du théorème de Lax-Milgram il existe une unique solution à (8.3).

*Formulation équivalente.*

On introduit  $V = H_0^1(\Omega)$ , ainsi que

$$a(u, v) = \int_{\Omega} u'v' + \lambda \int_{\Omega} uv, \quad b(v) = \langle f, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1}, \quad (8.7)$$

et on considère le problème (8.3) associé à ces données.

**Proposition 8.2.** *Le problème (8.6) est équivalent au problème (8.3) pour  $V = H_0^1(\Omega)$  et  $a, b$  donnés par (8.7).*

**Exercice 8.4.** *L'objectif de cet exercice est de prouver la Proposition 8.2.*

(1) Montrer que (8.3)  $\Rightarrow$  (8.6) en particulierisant l'égalité  $a(u, v) = b(v)$  de (8.3) pour des fonctions  $\phi \in \mathcal{D}(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$ .

Nous allons à présent montrer réciproquement que (8.6)  $\Rightarrow$  (8.3).

(2) Etablir pour commencer que  $a(u, \phi) = b(\phi)$  pour tout  $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ .

(3) Prouver que  $a$  est continue sur  $V \times V$  et  $b$  est continue sur  $V$ .

(4) Utiliser la densité de  $\mathcal{D}(\Omega)$  dans  $V$  et la Proposition 4.4 pour conclure.

**Correction.** (1) Soit  $u$  solution de (8.3). Pour des fonctions  $\phi \in \mathcal{D}(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$ , on a, par (7.4),

$$b(\phi) = \langle f, \phi \rangle_{H^{-1}, H_0^1} = \langle f, \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}}.$$

Par ailleurs,

$$a(u, \phi) = \int_{\Omega} u' \phi' + \lambda \int_{\Omega} u \phi = \langle u', \phi' \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} + \lambda \langle u, \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = \langle -u'' + \lambda u, \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}}.$$

On a ici utilisé que  $u, u' \in L^2(\Omega) \subset L_{\text{loc}}^1(\Omega)$ , ce qui fait que l'on peut réécrire les deux premiers crochets de dualité comme l'intégrale des fonctions en question.

En particulierisant l'égalité  $a(u, v) = b(v)$  de (8.3) à des fonctions  $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ , on obtient donc

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \langle -u'' + \lambda u, \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = \langle f, \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}}, \quad (8.8)$$

soit  $-u'' + \lambda u = f$  dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$ . Ceci permet de conclure que  $u$  est solution de (8.6).

(2) Réciproquement, soit  $u$  solution de (8.6). Soit  $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ . Il suffit de remonter les calculs précédents en partant de (8.8) pour obtenir

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad a(u, \phi) = b(\phi).$$

(3) Le résultat est une conséquence des majorations suivantes :

$$\forall v \in V = H_0^1(\Omega), \quad |b(v)| = |\langle f, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1}| \leq \|f\|_{H^{-1}} \|v\|_{H^1},$$

que l'on obtient en se souvenant de la Définition 4.2 et du Théorème 7.3 ; et

$$\begin{aligned} \forall (u, v) \in V \times V, \quad |a(u, v)| &= \left| \int_{\Omega} u'v' + \lambda \int_{\Omega} uv \right| \leq \left| \int_{\Omega} u'v' \right| + \lambda \left| \int_{\Omega} uv \right| \\ &\leq \|u'\|_{L^2} \|v'\|_{L^2} + \lambda \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \leq (1 + \lambda) \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}. \end{aligned} \quad (8.9)$$

- (4) Il suffit, à ce stade, de montrer que l'égalité  $a(u, \phi) = b(\phi)$ , vraie pour  $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ , a lieu en fait pour tout  $\phi \in V$ . La question précédente montre que  $a(u, \cdot)$  et  $b$  sont des formes linéaires continues sur  $V = H_0^1(\Omega)$ . Par densité de  $\mathcal{D}(\Omega)$  dans  $H_0^1(\Omega)$ , et au vu de la Proposition 4.4, on peut affirmer que

$$\forall v \in V, \quad a(u, v) = b(v),$$

ce qui implique que  $u$  est solution de (8.3).

*Existence et unicité de la solution de la formulation équivalente.*

Pour montrer que le problème (8.3) est bien posé, on applique le théorème de Lax-Milgram, dont on vérifie séquentiellement les hypothèses :

- (i)  $V = H_0^1(\Omega)$  est un espace de Hilbert ;
- (ii)  $b$  est continue sur  $V$  (voir Exercice 8.4) ;
- (iii)  $a$  est bilinéaire et continue sur  $V \times V$  (voir Exercice 8.4).

Il ne reste donc plus qu'à montrer que  $a$  est coercive sur  $V$ , ce qui est souvent le point délicat, et fait l'objet de l'exercice suivant.

**Exercice 8.5.** *On distingue deux cas, selon que  $\lambda > 0$  ou  $\lambda = 0$ .*

- (1) *Montrer que  $a$  est coercive sur  $V$  lorsque  $\lambda > 0$ .*
- (2) *Pour traiter le cas  $\lambda = 0$ , montrer pour commencer qu'il existe une constante  $R > 0$  telle que<sup>2</sup>  $\|v\|_{H^1} \leq R \|v'\|_{L^2}$  pour tout  $v \in V$ . Conclure ensuite à la coercivité de  $a$ .*

**Correction.** (1) Si  $\lambda > 0$ , on a, pour  $u \in V$ ,

$$a(v, v) = \int_{\Omega} |v'|^2 + \lambda \int_{\Omega} |v|^2 \geq \min(1, \lambda) \left( \int_{\Omega} |v'|^2 + \int_{\Omega} |v|^2 \right) = \min(1, \lambda) \|v\|_{H^1}^2,$$

ce qui donne la coercivité.

- (2) Si  $\lambda = 0$ , il faut recourir à une inégalité de Poincaré. Le Théorème 7.2 montre qu'il existe une constante  $C_{\Omega} \in \mathbb{R}_+$  telle que  $\|v\|_{L^2} \leq C_{\Omega} \|v'\|_{L^2}$  pour tout  $v \in V$ . Ceci implique que

$$\|v\|_{H^1}^2 = \|v\|_{L^2}^2 + \|v'\|_{L^2}^2 \leq (1 + C_{\Omega}^2) \|v'\|_{L^2}^2,$$

et donc

$$a(v, v) = \int_{\Omega} |v'|^2 \geq \frac{1}{1 + C_{\Omega}^2} \|v\|_{H^1}^2, \quad (8.10)$$

qui est bien la minoration recherchée.

**Remarque 8.2 (Energie associée).** *Notons que, comme la fonctionnelle  $a$  dans (8.7) est symétrique, on peut ici introduire la fonctionnelle d'énergie  $J$  associée au problème (8.6). En fait,*

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |v'|^2 + \lambda |v|^2 - \langle f, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1}.$$

2. Noter que cela donne l'équivalence des normes  $\|v\|_{H^1}$  et  $\|v'\|_{L^2}$  sur  $H_0^1(\Omega)$  pour  $\Omega$  borné. Insistons une fois de plus sur le fait qu'une telle équivalence n'est possible que lorsque  $\Omega$  est borné, et seulement si les fonctions en question s'annulent au bord.

### 8.2.2 Advection-diffusion

Donnons à présent un second exemple de résolution de problèmes aux limites. On n'écrit pas les manipulations formelles motivant les espaces fonctionnels introduits, mais le lecteur est encouragé à se convaincre que ce sont en effet des espaces "naturels".

Soit  $\Omega = ]-R, R[$ . On considère deux paramètres :  $\lambda \geq 0$  et  $\mu \in \mathbb{R}$ , ainsi qu'un terme source  $f \in H^{-1}(\Omega)$ . On cherche  $u \in H^1(\Omega)$  solution de

$$\begin{cases} -u'' + \mu u' + \lambda u = f & \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega), \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega = \{-R, R\}. \end{cases} \quad (8.11)$$

*Formulation faible du problème (P).*

Introduisons  $V = H_0^1(\Omega)$  et

$$a(u, v) = \int_{\Omega} u'v' + \mu u'v + \lambda uv \quad b(v) = \langle f, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1}, \quad (8.12)$$

et considérons le problème (8.3) associé à ces données.

**Proposition 8.3.** *Le problème (8.11) est équivalent au problème (8.3) pour  $V = H_0^1(\Omega)$  et  $a, b$  donnés par (8.12).*

**Exercice 8.6.** *Prouver ce résultat en s'inspirant de la preuve de la Proposition 8.2.*

**Correction.** La preuve est une simple transcription de la preuve de la Proposition 8.2, la seule différence étant la preuve de la continuité de  $a$  sur  $V \times V$ . On ne détaille donc que ce point. Pour ce faire, on considère  $(u, v) \in V \times V$ , et on écrit

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\leq \left| \int_{\Omega} u'v' \right| + \left| \mu \int_{\Omega} u'v \right| + \left| \lambda \int_{\Omega} uv \right| \\ &\leq \|u'\|_{L^2} \|v'\|_{L^2} + |\mu| \|u'\|_{L^2} \|v\|_{L^2} + \lambda \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \\ &\leq (1 + \lambda + |\mu|) \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}, \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure.

*Existence et unicité de la solution de la formulation faible.*

Montrons qu'on peut appliquer le théorème de Lax-Milgram :

- (i)  $V = H_0^1(\Omega)$  est un espace de Hilbert ;
- (ii)  $b$  est continue sur  $V$  (voir Exercice 8.4) ;
- (iii)  $a$  est bilinéaire sur  $V \times V$ .

Il ne reste donc plus qu'à montrer que  $a$  est continue et coercive sur  $V$ .

**Exercice 8.7.** *Montrer que la forme bilinéaire  $a$  définie en (8.12) est continue et coercive. On remarquera que*

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \int_{\Omega} \phi' \phi = 0.$$

**Correction.** La continuité a été prouvée dans le corrigé de l'Exercice 8.6. Pour la coercivité, on remarque que, pour tout  $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ ,

$$\int_{\Omega} \phi' \phi = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\phi^2)' = \phi^2(R) - \phi^2(-R) = 0.$$

En conséquence, en procédant comme pour (8.10), on obtient

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad a(\phi, \phi) \geq \frac{1}{1 + C_{\Omega}^2} \|\phi\|_{H^1}.$$

Il suffit ensuite d'invoquer la densité de  $\mathcal{D}(\Omega)$  dans  $V$  et la continuité de  $a$  sur  $V \times V$  pour conclure à la coercivité.

*Conclusion.*

Le problème (8.11) est équivalent à (8.3) pour  $V = H_0^1(\Omega)$  et  $a, b$  donnés par (8.12). Ce dernier problème ayant une unique solution par le théorème de Lax-Milgram, le problème (8.11) a donc une solution et une seule.

### 8.2.3 Autres exemples

**Exercice 8.8.** Pour tout  $\alpha$  réel strictement positif, on note  $a_{\alpha}$  la forme bilinéaire sur  $H_0^1(]-1, 1[)$  définie par

$$\forall (u, v) \in H_0^1(]-1, 1[) \times H_0^1(]-1, 1[), \quad a_{\alpha}(u, v) = \alpha \int_{-1}^0 u' v' + \int_0^1 u' v'.$$

On note  $b$  la forme linéaire sur  $H_0^1(]-1, 1[)$  définie par

$$\forall v \in H_0^1(]-1, 1[), \quad b(v) = \int_{-1}^1 v.$$

(1) Montrer que pour tout  $\alpha > 0$ , le problème

$$\begin{cases} \text{Chercher } u \in H_0^1(]-1, 1[) \text{ tel que} \\ \forall v \in H_0^1(]-1, 1[), \quad a_{\alpha}(u, v) = b(v) \end{cases}$$

admet une solution et une seule, que l'on notera  $u_{\alpha}$ .

(2) En introduisant la fonction

$$\eta_{\alpha}(x) = \begin{cases} \alpha & \text{si } x \in ]-1, 0[ \\ 1 & \text{si } x \in ]0, 1[ \end{cases}$$

écrire une EDP dans  $\mathcal{D}'(]-1, 1[)$  dont  $u_{\alpha}$  est solution.

(3) Expliciter  $u_{\alpha}$ . On cherchera  $u_{\alpha}$  sous la forme

$$u_{\alpha}(x) = \begin{cases} a_1(x+1)^2 + b_1(x+1) & \text{si } x \in ]-1, 0[ \\ a_2(x-1)^2 + b_2(x-1) & \text{si } x \in ]0, 1[ \end{cases}$$

où  $a_1, b_1, a_2$  et  $b_2$  sont des coefficients réels à déterminer. On vérifiera aussi que pour  $\alpha = 1$ , la solution est  $(1+x)(1-x)/2$ .

**Exercice 8.9.** Ecrire une formulation faible telle que (8.3) pour chacun des problèmes aux limites suivants. On vérifiera dans chaque cas qu'il y a bien équivalence entre le problème aux limites et la formulation faible et que les hypothèses du théorème de Lax-Milgram sont satisfaites.

(1) Soit  $a \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$  telle que  $\inf_{[0,1]} a = \alpha > 0$  et  $f \in L^2(]0, 1[)$  :

$$\begin{cases} \text{Chercher } u \in H_0^1(]0, 1[) \text{ tel que} \\ -\frac{d}{dx} \left( a(x) \frac{du}{dx}(x) \right) = f(x) \quad \text{sur } ]0, 1[ \end{cases}$$

(2) Soit  $\lambda > 0$  et  $f \in L^2(\mathbb{R})$  :

$$\begin{cases} \text{Chercher } u \in H^1(\mathbb{R}) \text{ tel que} \\ -u''(x) + \lambda u(x) = f(x) \quad \text{sur } \mathbb{R}. \end{cases}$$

**Exercice 8.10.** On considère le problème (8.3) avec  $V = H^2(\mathbb{R})$  et, pour  $f \in L^2(\mathbb{R})$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,

$$a(u, v) = \int_{\mathbb{R}} u'' v'' + \lambda \int_{\mathbb{R}} u' v' + \int_{\mathbb{R}} u v, \quad b(v) = \int_{\mathbb{R}} f v.$$

(1) Montrer que si  $\lambda > 0$ , le problème est bien posé.

(2) Montrer que pour tout  $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ ,

$$\int_{\mathbb{R}} |\phi'|^2 = - \int_{\mathbb{R}} \phi'' \phi,$$

et de là que pour tout  $u \in H^2(\mathbb{R})$ ,

$$\int_{\mathbb{R}^2} |u'|^2 \leq \frac{1}{2} \left( \int_{\mathbb{R}} u^2 + \int_{\mathbb{R}^2} |u''|^2 \right).$$

En déduire que si  $\lambda > -2$ , le problème est bien posé.

(3) Quelle est l'équation aux dérivées partielles satisfaite au sens des distributions par  $u$  ?



## Méthode des éléments finis

---

<b>9.1 Motivation : des problèmes issus de la mécanique et de la thermique</b>	<b>115</b>
9.1.1 Transferts thermiques . . . . .	116
9.1.2 Équilibre d'une membrane élastique . . . . .	116
<b>9.2 La méthode de Galerkin</b> . . . . .	<b>117</b>
9.2.1 Principe . . . . .	117
9.2.2 Estimation d'erreur . . . . .	118
9.2.3 Système linéaire associé . . . . .	119
<b>9.3 Éléments finis en dimension 1</b> . . . . .	<b>120</b>
9.3.1 Maillages . . . . .	120
9.3.2 Élément fini de Lagrange $\mathbb{P}_1$ . . . . .	120
9.3.3 Application au problème de Dirichlet (9.1) . . . . .	124

---

Ce chapitre présente une méthode numérique fondamentale pour approcher des problèmes aux limites tels que ceux présentés au Chapitre 8. On considère, à titre d'exemple, le problème suivant, pour  $\Omega = ]0, R[$  et  $f \in L^2(\Omega)$  donnée,

$$\begin{cases} \text{Chercher } u \in H_0^1(\Omega) \text{ vérifiant} \\ -u'' = f \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega). \end{cases} \quad (9.1)$$

On a montré à la Section 8.2.1 que ce problème se formule de manière équivalente sous la forme faible

$$\begin{cases} \text{Chercher } u \in V = H_0^1(\Omega) \text{ vérifiant} \\ \forall v \in V, \quad a(u, v) = b(v), \end{cases} \quad (9.2)$$

où

$$a(u, v) = \int_{\Omega} u' v', \quad b(v) = \int_{\Omega} f v. \quad (9.3)$$

Insistons sur le fait que  $f$  est prise dans  $L^2(\Omega)$  ici et a donc plus de régularité qu'un élément générique de  $H^{-1}(\Omega)$ . Cette régularité supplémentaire permet d'obtenir des solutions  $u$  plus régulières, et donc plus faciles à calculer numériquement.

On commence par motiver la pertinence physique de problèmes tels que (9.1) en Section 9.1. On donne ensuite en Section 9.2 les grands principes de la méthode de Galerkin, qui est une approximation variationnelle. On finit en présentant en Section 9.3 une classe particulière de méthodes de Galerkin, les éléments finis.

### 9.1 Motivation : des problèmes issus de la mécanique et de la thermique

Le problème (9.1) intervient par exemple dans la modélisation de transferts thermiques et de l'équilibre d'une membrane élastique sous un chargement. La modélisation ci-dessous est réalisée pour des systèmes de dimension  $d \geq 1$ , mais on retrouve bien (9.1) pour  $d = 1$ .

### 9.1.1 Transferts thermiques

Considérons un matériau occupant le volume  $\Omega$ . Celui-ci reçoit en tout point  $x \in \Omega$  une quantité d'énergie  $\widehat{f}(x)$  par unité de volume. En notant  $q(x) = (q_1(x), \dots, q_d(x))$  le vecteur flux de chaleur au point  $x$ , l'équation de conservation de l'énergie s'écrit

$$\nabla \cdot q(x) = \sum_{i=1}^d \frac{\partial q_i}{\partial x_i}(x) = \widehat{f}(x), \quad \forall x \in \Omega.$$

Soit  $u(x)$  la température du matériau au point  $x$ . Le vecteur flux de chaleur peut être relié au gradient de température par la loi de Fourier

$$q(x) = -\kappa \nabla u(x), \quad \forall x \in \Omega,$$

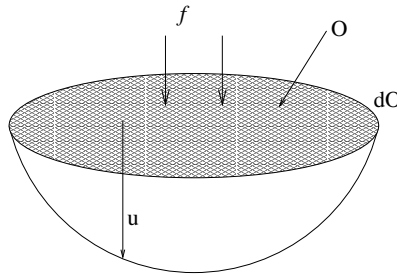
où  $\kappa$  est la conductivité thermique du matériau, supposée constante pour simplifier. En combinant les deux équations ci-dessus, en divisant par  $\kappa$  et en posant  $f(x) := \frac{1}{\kappa} \widehat{f}(x)$ , nous obtenons la première équation de (9.1) puisque  $\nabla \cdot \nabla u = \Delta u$ . Par ailleurs, en supposant la température fixée à une valeur constante  $u_0$  sur  $\partial\Omega$  et quitte à changer  $u$  en  $u - u_0$ , nous obtenons la condition aux limites dans (9.1). D'autres conditions aux limites peuvent être considérées, comme par exemple celle de prescrire la valeur de la composante normale du flux de chaleur  $q$  (et donc la dérivée normale de  $u$ ) sur  $\partial\Omega$ . Dans ce cas, on parle de *conditions aux limites de Neumann*.

### 9.1.2 Équilibre d'une membrane élastique

Soit une membrane plane qui au repos occupe le domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . La membrane est tendue selon un champ de contraintes  $\sigma \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  donné. Appliquons maintenant un chargement  $\widehat{f}$  (force par unité de surface) dans la direction orthogonale au plan de la membrane au repos ;  $\widehat{f}$  est donc ici une fonction à valeurs scalaires. Si ce chargement est suffisamment petit, la déformation de la membrane à l'équilibre résulte en première approximation d'un champ de déplacement dans la direction orthogonale à ce même plan. Ce déplacement peut donc être décrit par une fonction à valeurs scalaires  $u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  (voir la Figure 9.1). Dans le cadre de l'élasticité linéaire (cf. cours de Mécanique), on montre que la fonction  $u$  est régie par l'EDP

$$-\nabla \cdot (\sigma \cdot \nabla u)(x) = \widehat{f}(x), \quad \forall x \in \Omega. \quad (9.4)$$

Lorsque la membrane au repos est tendue de façon uniforme et isotrope, on a  $\sigma = \tau I_2$  où  $\tau \in \mathbb{R}$  est la tension de la membrane et  $I_2$  la matrice identité de  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ . En posant  $f(x) := \frac{1}{\tau} \widehat{f}(x)$ , nous obtenons la première équation de (9.1). Par ailleurs, la condition aux limites résulte du fait que les bords de la membrane sont maintenus fixes, si bien que le déplacement est nul à la frontière.



**Fig. 9.1.** Équilibre d'une membrane élastique.



## 9.2 La méthode de Galerkin

La brique fondamentale sur laquelle est construite la méthode des éléments finis est la méthode de Galerkin.<sup>1</sup> Dans cette section, nous allons en étudier le principe, son caractère optimal en termes d'erreur d'approximation et sa reformulation par le biais d'un système linéaire.

### 9.2.1 Principe

La méthode de Galerkin fournit un moyen simple et élégant d'approcher la solution du problème (9.1), en se fondant sur sa formulation faible équivalente (9.2). Par la suite, nous supposons toujours que les hypothèses du théorème de Lax–Milgram sont satisfaites, si bien que le problème est bien posé.

Le principe de la méthode de Galerkin consiste à remplacer l'espace de dimension infinie  $V$  (dans lequel vit la solution exacte  $u$ ) par un sous-espace de dimension finie  $V_h$  (dans lequel sera cherchée la solution approchée  $u_h$ ). L'espace  $V_h$  est appelé *espace d'approximation*. L'indice  $h$  fait référence à la finesse du maillage qui a servi à construire l'espace  $V_h$  ; son rôle sera précisé dans les sections suivantes. Par la suite, nous ferons l'hypothèse

$$V_h \subset V,$$

et on munira  $V_h$  du produit scalaire défini sur  $V$ . On parle d'*approximation conforme*. On peut également concevoir des méthodes de Galerkin dans un cadre non-conforme, mais cela sort du cadre de ce cours.

On formule le résultat sous une forme générale. On considère un problème formulé de manière faible sous la forme suivante : pour un espace de Hilbert  $V$  donné,

$$\begin{cases} \text{Chercher } u \in V \text{ vérifiant} \\ \forall v \in V, \quad a(u, v) = b(v), \end{cases} \quad (9.5)$$

où  $a$  est bilinéaire, continue, coercive sur  $V$  et  $b$  est une forme linéaire continue sur  $V$ . La version approchée du problème (9.5) consiste ainsi à

$$\begin{cases} \text{Chercher } u_h \in V_h \text{ tel que} \\ a(u_h, v_h) = b(v_h), \quad \forall v_h \in V_h. \end{cases} \quad (9.6)$$

On note dans la suite  $\omega$  la constante de continuité de  $a$  et  $\alpha > 0$  celle de coercivité : pour tout  $u, v \in V$ ,

$$|a(u, v)| \leq \omega \|u\|_V \|v\|_V, \quad a(u, u) \geq \alpha \|u\|_V^2.$$

Noter que  $\omega \geq \alpha$ .

**Proposition 9.1.** *Le problème approché (9.6) admet une et une seule solution.*

**Exercice 9.1.** *Prouver la Proposition 9.1.*

**Correction.** Notons tout d'abord que  $V_h$  est un espace vectoriel de dimension finie, donc complet. Ainsi,  $V_h$  est un espace de Hilbert. La forme bilinéaire  $a$  étant coercive sur  $V$ , elle l'est *a fortiori* sur  $V_h$  puisque  $V_h \subset V$ . On conclut grâce au théorème de Lax–Milgram.

1. Le nom de Boris Grigorievich Galerkin (1871–1945) est parfois écrit Galerkin comme en anglais ; nous suivrons ici l'usage général du français pour les noms russes avec une désinence en -ine.

### 9.2.2 Estimation d'erreur

Notre objectif est maintenant d'estimer l'erreur d'approximation  $e = u - u_h$  dans la norme  $\|\cdot\|_V$ . Commençons par une propriété importante de la méthode de Galerkin.

**Lemme 9.1 (Orthogonalité de Galerkin).** *L'erreur  $e = u - u_h$  est telle que*

$$\forall v_h \in V_h, \quad a(e, v_h) = 0. \quad (9.7)$$

**Exercice 9.2.** *Prouver le Lemme 9.1.*

**Correction.** La vérification est immédiate puisque, de par la propriété de conformité  $V_h \subset V$ , on a  $a(u, v_h) = b(v_h)$  pour tout  $v_h \in V_h$ , d'où par linéarité de  $a$ , l'égalité  $a(u - u_h, v_h) = a(u, v_h) - a(u_h, v_h) = 0$ .

**Lemme 9.2 (Céa).** *On a l'estimation d'erreur*

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{\omega}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V. \quad (9.8)$$

**Exercice 9.3.** *Prouver le Lemme 9.2 en montrant au préalable que  $a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u - v_h)$  pour tout  $v_h \in V_h$ .*

**Correction.** Pour tout  $v_h \in V_h$ ,

$$a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u) = a(u - u_h, u - v_h).$$

En utilisant la coercivité et la continuité de la forme  $a$ , il vient alors

$$\alpha \|u - u_h\|_V^2 \leq \omega \|u - u_h\|_V \|u - v_h\|_V,$$

d'où le résultat annoncé.

Il est essentiel d'observer que l'estimation (9.8) est *optimale*. En effet, puisque la solution approchée est cherchée dans  $V_h$ , on a nécessairement

$$\inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V \leq \|u - u_h\|_V.$$

L'estimation (9.8) montre que l'erreur  $\|u - u_h\|_V$  est également majorée par cette borne inférieure multipliée par un facteur qui ne dépend que de la forme bilinéaire  $a$  (et donc du modèle physique), indépendamment du choix de l'espace d'approximation  $V_h$ . Une autre conséquence importante de l'estimation (9.8) est que la méthode de Galerkin fournit la solution exacte lorsque celle-ci se trouve appartenir à l'espace d'approximation  $V_h$  – de tels miracles peuvent (très rarement) se produire!

### Interprétation géométrique de l'orthogonalité de Galerkin (complément)

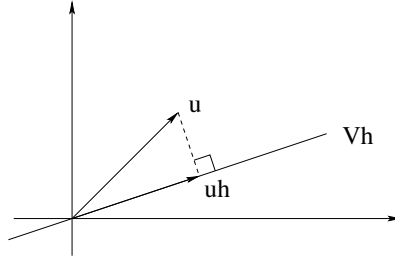
Lorsque la forme bilinéaire  $a$  est symétrique, celle-ci définit un produit scalaire  $a(\cdot, \cdot)$  sur  $V$ , équivalent à la norme  $\|\cdot\|_V$  – voir la preuve du Théorème 8.1. La relation d'orthogonalité (9.7) admet ainsi une interprétation géométrique simple :  $u_h$  est la projection orthogonale sur  $V_h$  de la solution exacte  $u$  par rapport au produit scalaire  $a(\cdot, \cdot)$  (voir Figure 9.2). Observons également que la propriété de symétrie de la forme bilinéaire  $a$  permet d'améliorer l'estimation d'erreur (9.8). En effet, en utilisant la relation de Pythagore, il vient, pour tout  $v_h \in V_h$ ,

$$a(u - u_h, u - u_h) \leq a(u - v_h, u - v_h),$$

ce qui, combiné avec les propriétés de coercivité et continuité de  $a$ , fournit

$$\|u - u_h\|_V \leq \left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^{1/2} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V.$$

On observera que cette estimation est meilleure que (9.8) puisque  $\omega/\alpha \geq 1$ .



**Fig. 9.2.** Interprétation géométrique de la méthode de Galerkin dans  $V = \mathbb{R}^2$ . Noter que l'orthogonalité est celle induite par le produit scalaire associé à la forme bilinéaire  $a$ .

### 9.2.3 Système linéaire associé

L'espace  $V_h$  étant de dimension finie, le problème approché (9.6) se ramène à la résolution d'un système linéaire. En effet, posons  $N = \dim(V_h)$  et soit  $(\varphi_1, \dots, \varphi_N)$  une base de  $V_h$ . On écrit

$$u_h = \sum_{i=1}^N u_i \varphi_i.$$

Le problème (9.6) est équivalent à chercher  $U = (u_1, \dots, u_N) \in \mathbb{R}^N$  tel que

$$\forall 1 \leq i \leq N, \quad \sum_{j=1}^N a(\varphi_j, \varphi_i) u_j = b(\varphi_i).$$

En posant

$$A = (A_{ij})_{1 \leq i, j \leq N} \in \mathbb{R}^{N, N}, \quad A_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i), \quad (9.9)$$

et

$$B = (B_i)_{1 \leq i \leq N} \in \mathbb{R}^N, \quad B_i = b(\varphi_i), \quad (9.10)$$

nous obtenons le système linéaire

$$AU = B. \quad (9.11)$$

La matrice  $A$  s'appelle la *matrice de rigidité* en référence aux problèmes de mécanique où elle a été introduite pour la première fois.

**Remarque 9.1.** *Insistons sur l'ordre des fonctions dans l'élément de matrice  $A_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i)$ , qui est important lorsque la forme bilinéaire  $a$  n'est pas symétrique.*

Les propriétés de la matrice  $A$  sont directement héritées de celles de la forme bilinéaire  $a$ . Nous avons le résultat suivant.

**Proposition 9.2 (Propriétés de la matrice de rigidité).** *Si la forme bilinéaire  $a$  est symétrique, la matrice  $A$  est symétrique. Si la forme bilinéaire  $a$  est coercive, la matrice  $A$  est définie positive.*

**Exercice 9.4.** *Prouver la Proposition 9.2.*

**Correction.** La propriété sur la symétrie de  $A$  est évidente. Montrons celle sur la définie positivité. Soit  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N) \in \mathbb{R}^N$  et posons  $\phi = \sum_{i=1}^N \xi_i \varphi_i$  (noter que  $\phi \in V_h \subset V$ ). Un calcul direct montre que

$$(\xi, A\xi)_{\mathbb{R}^N} = \sum_{i,j=1}^N \xi_i A_{ij} \xi_j = \sum_{i,j=1}^N \xi_i \xi_j a(\varphi_j, \varphi_i) = a\left(\sum_{j=1}^N \xi_j \varphi_j, \sum_{i=1}^N \xi_i \varphi_i\right) = a(\phi, \phi) \geq 0,$$

ce qui montre que  $A$  est positive. Par ailleurs,  $(\xi, A\xi)_{\mathbb{R}^N} = 0$  implique par coercivité  $\phi = 0$ , c'est-à-dire  $\xi = 0$ .

### 9.3 Éléments finis en dimension 1

Dans cette section, on suppose que  $\Omega = ]0, R[$ . En une dimension d'espace, nous notons  $\mathbb{P}_k$  l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à  $k$  :

$$\mathbb{P}_k = \left\{ p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; p(x) = \sum_{l=0}^k \alpha_l x^l; (\alpha_0, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{R}^{k+1} \right\}.$$

L'espace  $\mathbb{P}_k$  est un espace vectoriel de dimension  $(k+1)$ .

#### 9.3.1 Maillages

Un maillage de  $\Omega$  est de la forme

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} = R, \quad (9.12)$$

avec un pas de discrétisation local  $h_i = x_{i+1} - x_i$  pour  $0 \leq i \leq n$ . On caractérise la finesse du maillage par le paramètre

$$h = \max_{0 \leq i \leq n} h_i.$$

Les points  $\{x_i\}_{0 \leq i \leq n+1}$  constituent les *sommets* du maillage et les points  $\{x_i\}_{1 \leq i \leq n}$  les *sommets intérieurs*. On introduit les *éléments* du maillage, ou plus simplement les *mailles* :

$$K_i := [x_i, x_{i+1}] \quad (0 \leq i \leq n).$$

Pour des raisons de simplicité, nous supposons souvent que les sommets du maillage sont régulièrement espacés si bien que pour tout  $0 \leq i \leq n+1$ , on a  $x_i = ih$  avec

$$h = \frac{R}{n+1}.$$

De tels maillages sont dits *uniformes*.

#### 9.3.2 Élément fini de Lagrange $\mathbb{P}_1$

Considérons l'espace fonctionnel de dimension finie constitué des fonctions continues et affines par morceaux sur le maillage (9.12) :

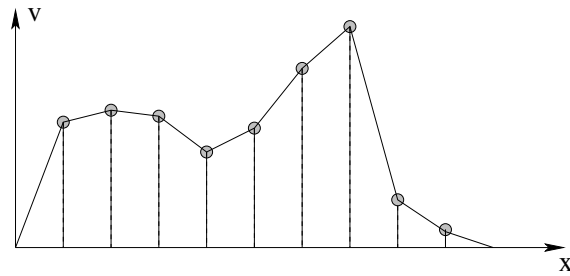
$$V_h^{(1)} = \left\{ v_h \in C^0(\overline{\Omega}); \forall 0 \leq i \leq n, v_h|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_1; v_h(0) = v_h(R) = 0 \right\}. \quad (9.13)$$

Les fonctions de  $V_h^{(1)}$  sont de classe  $C^1$  par morceaux et sont globalement de classe  $C^0$ . On a le résultat de conformité suivant.

**Proposition 9.3 (Conformité).** On a  $V_h^{(1)} \subset H_0^1(\Omega)$ .

**Exercice 9.5.** Prouver la Proposition 9.3.

**Correction.** La formule des sauts (Théorème 6.4) montre que la dérivée au sens des distributions d'une fonction de  $V_h^{(1)}$  s'évalue simplement en considérant la dérivée usuelle sur chaque maille – voir aussi l'Exercice 6.22. Noter que ces dérivées sont constantes maille par maille : elles sont donc de carré sommable sur  $\Omega$ . Par conséquent,  $V_h^{(1)} \subset H^1(\Omega)$ . De plus, les fonctions de  $V_h^{(1)}$  sont nulles au bord, ce qui achève de prouver le résultat.



**Fig. 9.3.** Fonction dans l'espace d'approximation  $V_h^{(1)}$ .

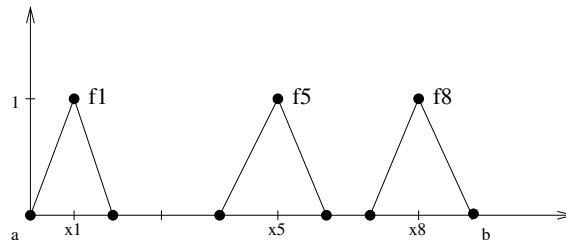
Une fonction dans l'espace d'approximation  $V_h^{(1)}$  est illustrée sur la Figure 9.3. Introduisons les fonctions suivantes :

$$\forall 1 \leq i \leq n, \quad \varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} & \text{si } x \in K_i, \\ \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & \text{si } x \in K_{i-1}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ces fonctions sont illustrées sur la Figure 9.4. Elles sont appelées *fonctions chapeau* en référence à la forme de leur graphe. On observera que, par construction,  $\varphi_i \in V_h^{(1)}$  pour tout  $1 \leq i \leq n$  et que

$$\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad \forall 1 \leq i, j \leq n,$$

où  $\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker.



**Fig. 9.4.** Fonctions chapeau.

**Proposition 9.4 (Base de  $V_h^{(1)}$ ).** La famille  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  constitue une base de l'espace  $V_h^{(1)}$ .

**Exercice 9.6.** *L'objectif de cet exercice est de prouver la Proposition 9.4.*

(1) Montrer que la famille  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  est libre.

(2) Montrer que la famille est génératrice en introduisant, pour un élément  $v_h \in V_h^{(1)}$  donné, la fonction

$$w_h(x) = \sum_{i=1}^n v_h(x_i) \varphi_i(x).$$

**Correction.** (1) Soit  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$  tel que

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i \equiv 0 \quad \text{sur } \Omega.$$

En évaluant cette expression en un sommet intérieur quelconque du maillage  $x_j$  et en utilisant le fait que  $\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}$ , il vient  $\alpha_j = 0$  pour tout  $1 \leq j \leq N$ ; ce qui donne la liberté.

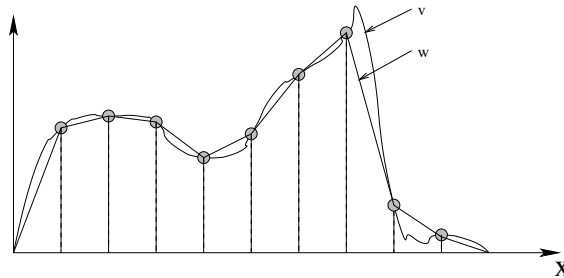
(2) Sur chaque maille, les fonctions  $v_h$  et  $w_h$  sont affines et coïncident en deux points distincts (les extrémités de la maille). Elles coïncident donc sur toute la maille. Par suite,  $v_h = w_h$  sur  $\overline{\Omega}$ , ce qui montre que toute fonction de  $V_h^{(1)}$  peut se décomposer comme somme des fonctions chapeau.

**Corollaire 9.1 (Dimension de  $V_h^{(1)}$ ).** *On a  $\dim(V_h^{(1)}) = n$ .*

Concluons cette section par un résultat d'approximation qui montre que l'espace d'éléments finis que nous avons introduit permet d'approcher des fonctions suffisamment régulières. On introduit pour ce faire l'opérateur d'interpolation

$$\mathcal{I}_h^{(1)} : C^0(\overline{\Omega}) \ni v \mapsto \sum_{i=1}^n v(x_i) \varphi_i \in V_h^{(1)}. \quad (9.14)$$

La fonction  $\mathcal{I}_h^{(1)} v$  est l'unique fonction de  $V_h^{(1)}$  prenant la même valeur que la fonction  $v$  en tous les sommets intérieurs du maillage (voir la Figure 9.5).



**Fig. 9.5.** Exemple d'interpolation d'une fonction  $v \in H_0^1(\Omega)$ .

**Théorème 9.1 (Interpolation).** *Il existe une constante  $c_{\mathcal{I}^{(1)}}$ , indépendante de  $h$ , telle que pour toute fonction  $v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ ,*

$$\|v - \mathcal{I}_h^{(1)} v\|_{H^1} \leq c_{\mathcal{I}^{(1)}} h \|v''\|_{L^2} \quad \text{et} \quad \|v - \mathcal{I}_h^{(1)} v\|_{L^2} \leq c_{\mathcal{I}^{(1)}} h^2 \|v''\|_{L^2}. \quad (9.15)$$

Ce résultat montre qu'en raffinant le maillage (c'est-à-dire en prenant un pas de discrétisation  $h$  de plus en plus petit), nous pouvons approcher toute fonction de  $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$  par une fonction de  $V_h^{(1)}$  avec une plus grande précision et que l'erreur d'interpolation  $v - \mathcal{I}_h^{(1)}v$  tend vers 0 lorsque  $h \rightarrow 0$ . Enfin, cette erreur tend vers zéro à l'ordre 1 en  $h$  pour la norme  $H^1$  et à l'ordre 2 en  $h$  pour la norme  $L^2$ .

**Exercice 9.7.** L'objet de cet exercice est de prouver la seconde inégalité de (9.15) dans le Théorème 9.1. Soit  $v \in H^2(\Omega)$ . On montre, en utilisant l'Exercice 7.14, que  $v \in C^1(\Omega)$  (car  $v' \in C^0(\Omega)$ ).

(1) On considère une maille  $K_i$  et on définit la fonction  $w_i : K_i \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$\forall s \in K_i, \quad w_i(s) = v'(s) - \frac{v(x_{i+1}) - v(x_i)}{x_{i+1} - x_i}.$$

En partant de l'identité  $v(x) - (\mathcal{I}_h^{(1)}v)(x) = \int_{x_i}^x w_i(s) ds$  pour tout  $x \in K_i$ , montrer que

$$\|v - \mathcal{I}_h^{(1)}v\|_{L^2(K_i)} \leq h_i \|w_i\|_{L^2(K_i)}.$$

(2) Montrer que  $w_i$  s'annule en un point de  $K_i$  et en déduire que  $\|w_i\|_{L^2(K_i)} \leq h_i \|w_i'\|_{L^2(K_i)}$ .

(3) Conclure.

**Correction.** (1) On utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz : pour tout  $x \in K_i$ , on a

$$\left| v(x) - (\mathcal{I}_h^{(1)}v)(x) \right| \leq \left( \int_{x_i}^x ds \right)^{1/2} \left( \int_{x_i}^x w_i^2(s) ds \right)^{1/2} \leq h_i^{1/2} \|w_i\|_{L^2(K_i)},$$

d'où

$$\|v - \mathcal{I}_h^{(1)}v\|_{L^2(K_i)} \leq h_i^{1/2} \|v - \mathcal{I}_h^{(1)}v\|_{L^\infty(K_i)} \leq h_i \|w_i\|_{L^2(K_i)}.$$

(2) La fonction  $w_i$  s'annule sur  $K_i$  car les fonctions  $v$  et  $\mathcal{I}_h^{(1)}v$  coïncident aux deux extrémités de  $K_i$ . Le théorème des accroissements finis permet d'affirmer qu'il existe  $\xi_i \in K_i$  tel que  $v'(\xi_i) = (\mathcal{I}_h^{(1)}v)'(\xi_i)$ , c'est-à-dire  $w_i(\xi_i) = 0$ . On en déduit que pour tout  $x \in K_i$ ,

$$w_i(x) = \int_{\xi_i}^x w_i'(s) ds,$$

et en procédant comme ci-dessus, il vient  $\|w_i\|_{L^2(K_i)} \leq h_i \|w_i'\|_{L^2(K_i)}$ .

(3) En observant que  $w_i = (v - \mathcal{I}_h^{(1)}v)'|_{K_i}$  et que  $\|w_i'\|_{L^2(K_i)} = \|v''\|_{L^2(K_i)}$ , on obtient

$$\|(v - \mathcal{I}_h^{(1)}v)'\|_{L^2(K_i)} \leq h_i \|v''\|_{L^2(K_i)}.$$

En élevant cette inégalité au carré et en sommant sur toutes les mailles, il vient

$$\begin{aligned} \|(v - \mathcal{I}_h^{(1)}v)'\|_{L^2}^2 &= \sum_{i=1}^n \|(v - \mathcal{I}_h^{(1)}v)'\|_{L^2(K_i)}^2 = \sum_{i=1}^n h_i^2 \|v''\|_{L^2(K_i)}^2 \\ &\leq \left( \max_{i=1, \dots, n} h_i \right)^2 \sum_{i=1}^n \|v''\|_{L^2(K_i)}^2 = \left( \max_{i=1, \dots, n} h_i \right)^2 \|v''\|_{L^2}^2, \end{aligned}$$

soit

$$\|(v - \mathcal{I}_h^{(1)}v)'\|_{L^2} \leq h \|v''\|_{L^2}.$$

Par ailleurs, en élevant au carré l'estimation obtenue à la question 1 et en sommant sur toutes les mailles, il vient

$$\|v - \mathcal{I}_h^{(1)}v\|_{L^2} \leq h \|(v - \mathcal{I}_h^{(1)}v)'\|_{L^2},$$

d'où la conclusion.

### 9.3.3 Application au problème de Dirichlet (9.1)

Nous revenons à présent au problème particulier (9.1), reformulé sous la forme faible (9.2) avec le choix particulier (9.3) et  $f \in L^2(\Omega)$ . Nous souhaitons donc approcher l'unique fonction  $u \in V = H_0^1(\Omega)$  telle que

$$\forall v \in V, \quad \int_0^R u'v' = \int_0^R f v, \quad (9.16)$$

en utilisant la méthode de Galerkin et l'espace d'approximation  $V_h^{(1)}$  construit ci-dessus.

#### Problème discret et analyse d'erreur

Le problème discret consiste à

$$\begin{cases} \text{Chercher } u_h \in V_h^{(1)} \text{ tel que} \\ \forall v_h \in V_h^{(1)}, \quad \int_0^R u_h'v_h' = \int_0^R f v_h. \end{cases} \quad (9.17)$$

Nous avons vu que ce problème revient à la résolution d'un système linéaire de la forme  $AU = B$ . La matrice de rigidité  $A$  est de taille  $N$ , le nombre de sommets intérieurs du maillage, et son terme générique est donné par

$$A_{ij} = \int_0^R \varphi_i' \varphi_j' \quad (1 \leq i, j \leq N). \quad (9.18)$$

Le membre de droite a pour composantes

$$B_i = \int_0^R f \varphi_i \quad (\forall 1 \leq i \leq N). \quad (9.19)$$

On rappelle que de par la Proposition 9.2, la matrice  $A$  est symétrique définie positive, si bien que le système linéaire  $AU = B$  admet une et une seule solution  $U$ .

**Théorème 9.2 (Estimation d'erreur).** *Soit  $U$  l'unique solution du système linéaire  $AU = B$ . On pose  $u_h = \sum_{i=1}^N U_i \varphi_i$ . Alors, on a l'estimation d'erreur suivante : il existe une constante  $c$ , pouvant dépendre de  $\Omega$  et de  $f$  mais pas de  $h$ , telle que*

$$\|u - u_h\|_{H^1} \leq ch. \quad (9.20)$$

**Exercice 9.8.** *Prouver le Théorème 9.2 en utilisant le lemme de Céa 9.2 et le théorème d'interpolation 9.1.*

**Correction.** On introduit la forme bilinéaire  $a$  sur  $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$  et la forme linéaire  $b$  sur  $H_0^1(\Omega)$  telles que

$$a(v, w) = \int_0^R v'w', \quad b(v) = \int_0^R f v.$$



Les constantes utilisées dans le lemme de Céa 9.2 sont  $\omega = 1$  et  $\alpha = 1/(1 + C_\Omega^2)$  (voir respectivement (8.9) et (8.10)). Pour le théorème d'interpolation, on note au préalable que  $u \in H_0^1(\Omega)$  et  $-u'' = f \in L^2(\Omega)$  (voir (8.6)) impliquent  $u \in H^2(\Omega)$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{H^1} &\leq (1 + C_\Omega^2) \inf_{v_h \in V_h^{(1)}} \|u - v_h\|_{H^1} \leq (1 + C_\Omega^2) \|u - \mathcal{I}_h^{(1)} u\|_{H^1} \\ &\leq (1 + C_\Omega^2) c_{\mathcal{I}^{(1)}} h \|u''\|_{L^2} \leq \{(1 + C_\Omega^2) c_{\mathcal{I}^{(1)}} \|f\|_{L^2}\} h, \end{aligned}$$

ce qui donne (9.20) avec  $c = (1 + C_\Omega^2) c_{\mathcal{I}^{(1)}} \|f\|_{L^2}$ .

L'estimation (9.20) signifie que la convergence de l'approximation fournie par la méthode des éléments finis de Lagrange  $\mathbb{P}_1$  est d'ordre 1 en norme  $H^1$ . En particulier, si le pas du maillage est divisé par deux, il en va de même de l'erreur en norme  $H^1$ .

**Remarque 9.2 (Autres normes).** *Attention, le lemme de Céa ne permet pas d'obtenir directement une estimation d'erreur en norme  $L^2$ . En effet, ce lemme est formulé en utilisant la norme  $\|\cdot\|_V$  pour laquelle la forme bilinéaire  $a$  est coercive et continue, et qui ici coïncide avec la norme  $H^1$ . L'Exercice 9.9 montre comment une estimation d'erreur en norme  $L^2$  peut être obtenue.*

**Exercice 9.9.** *L'estimation (9.20) n'est pas optimale pour la norme  $L^2$ . Le but de cet exercice est de montrer une estimation d'erreur sur  $\|u - u_h\|_{L^2}$  d'ordre 2 en  $h$ . Ce résultat, valable en toute dimension d'espace sous certaines hypothèses, porte le nom de lemme de Aubin–Nitsche.*

(1) On introduit le problème auxiliaire

$$\begin{cases} \text{Trouver } \zeta \in H_0^1(]0, R[) \text{ tel que} \\ \forall v \in H_0^1(]0, R[), \quad \int_0^R \zeta' v' = \int_0^R (u - u_h) v \end{cases} \quad (9.21)$$

où la donnée du problème est l'erreur. Montrer que  $\|u - u_h\|_{L^2(]0, R[)}^2 = \int_0^R (u - u_h)' (\zeta - \mathcal{I}_h^{(1)} \zeta)'$ .

(2) Montrer que  $\zeta'' \in L^2(]0, R[)$  puis que  $\zeta \in H^2(]0, R[)$ .

(3) En déduire que  $\|u - u_h\|_{L^2(]0, R[)} \leq C_{L^2} h^2 \|f\|_{L^2(]0, R[)}$  avec une constante  $C_{L^2}$  que l'on précisera.

**Correction.** (1) On introduit la forme bilinéaire  $a$  sur  $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$  telle que

$$a(v, w) = \int_\Omega v' w'.$$

En prenant  $v = u - u_h$  dans (9.21) (cette fonction étant bien dans  $H_0^1(\Omega)$ ), on constate que

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_\Omega (u - u_h)^2 = \int_\Omega (u - u_h)' \zeta' = a(u - u_h, \zeta).$$

Enfin, comme  $\mathcal{I}_h^{(1)} \zeta \in V_{0h}$ , on déduit de l'orthogonalité de Galerkin que

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}^2 = a(u - u_h, \zeta) = a(u - u_h, \zeta - \mathcal{I}_h^{(1)} \zeta) = \int_\Omega (u - u_h)' (\zeta - \mathcal{I}_h^{(1)} \zeta)'.$$

(2) En particulierisant (9.21) à  $v \in \mathcal{D}(]0, R[)$ , on montre que

$$-\langle \zeta'', v \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = \langle \zeta', v' \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = a(\zeta, v) = \int_0^R (u - u_h) v = \langle u - u_h, v \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}}.$$

On en déduit donc que  $-\zeta'' = u - u_h$  dans  $\mathcal{D}'(]0, R[)$ . Comme  $u - u_h \in L^2(]0, R[)$ , on en déduit que  $\zeta'' \in L^2(]0, R[)$ . Comme par ailleurs  $\zeta \in H^1(]0, R[)$ , on peut conclure que  $\zeta \in H^2(]0, R[)$ .

- (3) En utilisant l'inégalité de Cauchy–Schwarz, et le résultat d'interpolation (ce qui est possible car on a montré au préalable que  $\zeta \in H^2(\Omega)$ ), il vient

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|(u - u_h)'\|_{L^2(\Omega)} \left\| (\zeta - \mathcal{I}_h^{(1)}\zeta)' \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \|(u - u_h)'\|_{L^2(\Omega)} C_{\mathcal{I}} h \|\zeta''\|_{L^2(\Omega)}.$$

Comme  $\|\zeta''\|_{L^2(\Omega)} = \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}$  par la question précédente, on en déduit que

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq C_{\mathcal{I}} h \|(u - u_h)'\|_{L^2(\Omega)}.$$

Enfin, on utilise l'estimation (9.20) pour écrire

$$\|(u - u_h)'\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq C_{H^1} h \|f\|_{L^2(\Omega)},$$

ce qui implique l'estimation annoncée avec la constante  $C_{L^2} = C_{\mathcal{I}} C_{H^1}$ .

### Assemblage de la matrice de rigidité

Examinons maintenant d'un peu plus près la structure de la matrice de rigidité  $A$ . Pour deux indices  $1 \leq i, j \leq N$  tels que  $|i - j| > 1$ , les supports des fonctions chapeau  $\varphi_i$  et  $\varphi_j$  sont *disjoints*. Il en résulte que

$$A_{ij} = 0, \quad |i - j| > 1,$$

si bien que la matrice  $A$  est *tridiagonale* (le symbole  $\bullet$  indique un coefficient *a priori* non-nul) :

$$A = \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & 0 & \dots & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \dots & 0 & \bullet & \bullet \end{pmatrix}.$$

Cette propriété remarquable découle simplement du choix qui a été fait pour le support des fonctions de base  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ . On retiendra qu'en choisissant des fonctions de base ayant un « petit » support, on obtient une matrice de rigidité comprenant « beaucoup » d'éléments nuls. On dit que la matrice de rigidité ainsi obtenue est *creuse*.

**Exercice 9.10.** Calculer les coefficients non-nuls de la matrice  $A$  dans le cas d'un maillage uniforme de pas  $h$ . Vérifier par un calcul direct que la matrice  $A$  ainsi obtenue est bien symétrique définie positive.

**Correction.** Un calcul simple montre que pour tout  $1 \leq i \leq N$ ,

$$\int_0^R \varphi_i' \varphi_i' = \int_{K_{i-1} \cup K_i} \varphi_i' \varphi_i' = \frac{2}{h},$$

et pour tout  $1 \leq i \leq N - 1$ ,

$$\int_0^R \varphi_i' \varphi_{i+1}' = \int_{K_i} \varphi_i' \varphi_{i+1}' = -\frac{1}{h}.$$

En conclusion,

$$A = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad (9.22)$$

ce que nous noterons sous forme compacte

$$A = \frac{1}{h} \text{tridiag}(-1, 2, -1).$$

La matrice  $A$  est clairement symétrique. Son caractère défini positif peut se vérifier directement de manière relativement simple. Déjà, pour tout  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N) \in \mathbb{R}^N$ , il vient

$$h(\xi, A\xi)_{\mathbb{R}^N} = \xi_1^2 + \sum_{i=2}^N (\xi_i - \xi_{i-1})^2 + \xi_N^2 \geq 0.$$

Par ailleurs, le membre de droite est nul si et seulement si  $\xi_1 = \xi_N = 0$  et  $\xi_{i-1} = \xi_i$  pour  $2 \leq i \leq N$ . On en déduit ainsi que  $\xi_i = 0$  pour tout  $1 \leq i \leq N$ .

**Exercice 9.11.** Soit  $B \in \mathbb{R}^N$  le membre de droite du système linéaire  $AU = B$ , où  $A$  est la matrice tridiagonale  $\frac{1}{h} \text{tridiag}(-1, 2, -1)$ .

- (1) Pour un vecteur  $V \in \mathbb{R}^N$ , on note  $V \leq 0$  si  $V_i \leq 0$  pour tout  $1 \leq i \leq N$ . Soit  $V \in \mathbb{R}^N$  tel que  $AV \leq 0$ . Montrer que  $V \leq 0$ .
- (2) En déduire que si la fonction  $f$  du problème (9.1) est telle que  $f \leq 0$  sur  $\Omega$ , alors la solution approchée  $u_h$  est telle que  $u_h \leq 0$  sur  $\Omega$ . Cette propriété porte le nom de principe du maximum discret.
- (3) On note  $\alpha_{ij}$ ,  $1 \leq i, j \leq N$ , les coefficients de la matrice  $A^{-1}$ . Montrer que  $\alpha_{ij} \geq 0$  pour tout  $1 \leq i, j \leq N$ .
- (4) Montrer que pour tout  $1 \leq i \leq N$ ,

$$\sum_{j=1}^N \alpha_{ij} \leq \frac{1}{8h}.$$

Indication : considérer la fonction  $w(x) = \frac{1}{2}x(1-x)$ .

- (5) En déduire que  $\|u_h\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{8}\|f\|_{L^\infty}$ .



## Partie IV

---

## Appendice



## Rappels de théorie de la mesure

Nous rappelons ici les résultats de la théorie de la mesure utilisés dans ce cours. On se place sur un espace mesuré  $(X, \mathcal{T}, \mu)$ .

**Proposition 10.1 (Nullité des intégrales sur des ensembles négligeables).** *Si  $Y$  est un ensemble négligeable, alors toute fonction mesurable  $f$  est intégrable sur  $Y$  et*

$$\int_Y f d\mu = 0.$$

**Proposition 10.2 (Finitude presque partout des fonctions intégrables).** *Soit  $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{T}, \mu)$  une fonction intégrable et  $A = \{x \in X, f(x) = \pm\infty\}$ . L'ensemble  $A$  est de mesure nulle.*

**Théorème 10.1 (Théorème de convergence monotone).** *Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite croissante de fonctions positives mesurables. On note  $f$  la limite simple de la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Alors,*

$$\int_X f d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu.$$

**Théorème 10.2 (Théorème de convergence dominée).** *Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions mesurables et  $g$  une fonction intégrable. On suppose que*

$$\begin{cases} f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x) & \text{presque partout,} \\ \forall n \in \mathbb{N}, |f_n(x)| \leq g(x) & \text{presque partout,} \end{cases}$$

*et que  $f$  est mesurable. Alors  $f$  est intégrable et*

$$\int_X f_n d\mu \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_X f d\mu.$$

**Théorème 10.3 (Théorème de Fubini).** *Soit  $(X_1, \mathcal{T}_1, \mu_1)$  et  $(X_2, \mathcal{T}_2, \mu_2)$  deux espaces mesurés  $\sigma$ -finis et  $f : X_1 \times X_2 \rightarrow \mathbb{R}$  mesurable par rapport à la tribu produit  $\mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2$ . Alors*

*(1) si  $f$  est positive, les fonctions*

$$x_1 \mapsto \int_{X_2} f(x_1, x_2) d\mu_2 \quad \text{et} \quad x_2 \mapsto \int_{X_1} f(x_1, x_2) d\mu_1$$

*sont mesurables et*

$$\int_{X_1 \times X_2} f(x_1, x_2) d(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int_{X_1} \left( \int_{X_2} f(x_1, x_2) d\mu_2 \right) d\mu_1 = \int_{X_2} \left( \int_{X_1} f(x_1, x_2) d\mu_1 \right) d\mu_2 ;$$

(2) si  $f$  est intégrable sur  $X_1 \times X_2$ , les fonctions

$$x_1 \mapsto \int_{X_2} f(x_1, x_2) d\mu_2 \quad \text{et} \quad x_2 \mapsto \int_{X_1} f(x_1, x_2) d\mu_1$$

sont définies presque partout et on a

$$\int_{X_1 \times X_2} f(x_1, x_2) d(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int_{X_1} \left( \int_{X_2} f(x_1, x_2) d\mu_2 \right) d\mu_1 = \int_{X_2} \left( \int_{X_1} f(x_1, x_2) d\mu_1 \right) d\mu_2.$$

**Théorème 10.4.** Soit  $\omega$  et  $\Omega$  deux ouverts de  $\mathbb{R}^d$ ,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction intégrable,  $\Phi : \omega \rightarrow \Omega$  un  $C^1$ -difféomorphisme, et  $J(y)$  le jacobien de  $\Phi$  en  $y \in \omega$ . Alors la fonction  $(f \circ \Phi) |J|$  est une fonction intégrable sur  $\omega$  et

$$\int_{\Omega} f(x) dx = \int_{\omega} f(\Phi(y)) |J(y)| dy.$$

Par ailleurs, l'égalité ci-dessus est toujours vraie si  $f$  est une fonction mesurable positive (dans ce cas, les deux membres peuvent prendre la valeur  $+\infty$ ).



---

## Bibliographie

- [1] H. BRÉZIS, *Analyse fonctionnelle : théorie et applications* (Dunod, 1999).
- [2] J.-P. DEMAILLY, *Analyse numérique et équations différentielles*, Collection Grenoble Sciences (EDP Sciences, 2006).
- [3] A. ERN, *Aide-mémoire des éléments finis*, L'Usine Nouvelle (Dunod, 2005).
- [4] A. ERN ET J.-L. GUERMOND, *Eléments finis : théorie, applications, mise en oeuvre*, volume 36 de *SMAI mathématiques et applications* (Springer, 2002).
- [5] E. HAIRER, C. LUBICH, ET G. WANNER, *Geometric Numerical Integration : Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations*, volume 31 de *Springer Series in Computational Mathematics* (Springer-Verlag, 2006).
- [6] E. LIEB ET M. LOSS, *Analysis*, second ed., volume 14 de *Graduate Studies in Mathematics* (American Mathematical Society, 2001).
- [7] A. QUARTERONI, R. SACCO, ET F. SALERI, *Méthodes numériques. Algorithmes, analyse et applications* (Springer, 2007).
- [8] L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions* (Hermann, 1966).
- [9] LAURENT SCHWARTZ, *Analyse I-IV*, Collection Enseignement des Sciences (Hermann, 1991).