Calcul Intégral IV

STEP, MINES ParisTech

5 janvier 2021 (`#9ddc57e`)

Question 1 (réponses multiples) Soit $X = \mathbb{R}^3$ et $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$, l'ensemble des parties de X. On définit pour tout $X \in \mathcal{A}$ la grandeur $\mu(A)$ comme le diamètre de A :

$$\mu(A) := \mathrm{diam}(A) := \sup\{\|x - y\| \mid (x, y) \in A \times A\} \in [0, +\infty].$$

Est-ce que μ est une mesure sur $(X, \mathcal{A})$?

☐ A : non, car $\mathcal{A}$ n'est pas une tribu,
☐ B : non, car μ n'est pas nulle en 0,
☐ C : non, car μ n'est pas σ-additive,
☐ D : oui.

Question 2 (réponses multiples) Si μ et ν sont des mesures sur le même espace mesurable $(X, \mathcal{A})$, $\alpha \geq 0$ et $f : [0, +\infty] \to [0, +\infty]$ est continue, alors

☐ A : $\mu + \nu$ est une mesure,
☐ B : $\alpha\mu$ est une mesure,
☐ C : $f \circ \mu$ est une mesure.

Question 3 Soit c la mesure de comptage sur $\mathbb{R}$ (muni de la tribu $\mathcal{P}(\mathbb{R})$). Deux fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont égales c-presque partout si et seulement si :

☐ A : f et g sont identiques,
☐ B : f et g diffèrent au plus en un nombre fini de points,
☐ C : la longueur de $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq g(x)\}$ est nulle,
☐ D : f et g sont en fait égales c-presque partout sans condition.

Question 4 La fonction caractéristique de $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ est une fonction étagée

☐ A : oui,
☐ B : non.
☐ C : ça dépend (question ambigüe).

Question 5 Si $\mathcal{A}$ est une tribu de $\mathbb{R}$ et la fonction $h : \mathbb{R} \to [-\infty, +\infty]$ est continue, alors h est $\mathcal{A}$-mesurable

- ☐ A : oui,
- ☐ B : non, pas nécessairement.

Question 6 (réponse multiple) L'intégrale d'une fonction $f : X \to [0, +\infty]$ (positive) mesurable :

- ☐ A : est toujours définie,
- ☐ B : est toujours positive,
- ☐ C : ne peut être infinie que si f prend des valeurs infinies,
- ☐ D : est infinie dès que f prend des valeurs infinies.