

Calcul Intégral III

STEP, MINES ParisTech

5 janvier 2021 (#9ddc57e)

Question 1 Déterminer l'aire des pavés suivants du plan étendu :

Ensemble de $[-\infty, +\infty]^2$	Aire (mesure de Lebesgue)
$[0, 1] \times]-1, 1[$
\mathbb{R}^2
$\{+\infty\} \times [-\infty, +\infty]$

Question 2 (réponse multiple)

Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$ la diagonale principale de \mathbb{R}^2 . Alors

- ☐ A: pour tout $r > 0$, $D \cap [-r, r]^2$ est négligeable,
- ☐ B: l'ensemble D est négligeable,
- ☐ C: l'aire de l'ensemble D est nulle.

Question 3 (réponse multiple) Si $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est mesurable et que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx \right] dy$$

est bien définie, alors

- ☐ A: l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$ est nécessairement définie pour tout $y \in \mathbb{R}$,
- ☐ B: l'intégrale $\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy$ est bien définie,
- ☐ C: l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy \right] dx$ est bien définie,
- ☐ D: si $\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy \right] dx$ est également bien définie, alors les deux intégrales sont égales,

Question 4 (réponse multiple) Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[$ deux fonctions intégrables. Alors,

- ☐ A: la fonction $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto f(x)g(y)$ est mesurable,
- ☐ B: la fonction $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto f(x)g(y)$ est intégrable,
- ☐ C: on a

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x)g(y) dx dy = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(y) dy \right).$$

Question 5 (réponse multiple) Soient $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. L'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y - x) \, dx dy$$

- ☐ A: est définie si f est mesurable et positive,
- ☐ B: est égale à $\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) \, dx dy$ si f est intégrable.