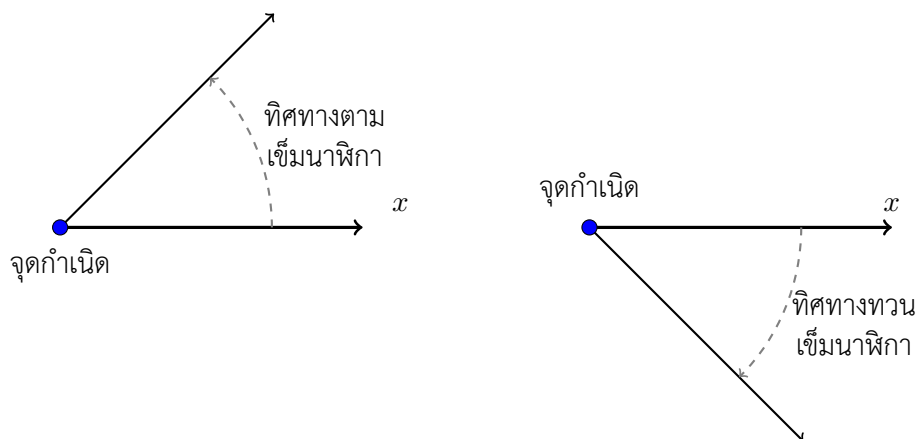


Chapter 1

ตรีโกณมิติ (Trigonometry)

1.1 เรเดียนและองศา (Radian and Degree Measure)

มุม (Angle) คือการรวมกันของรังสีสองเส้นที่แผ่ออกมาจากจุดร่วมกัน ซึ่งเรียกว่า จุดยอด (vertex) ของมุม โดยทั่วไป มุมสามารถสร้างขึ้นได้จากการหมุนรังสีเส้นหนึ่งจากตำแหน่งหนึ่งไปยังอีกตำแหน่งหนึ่ง โดยกวาดไปในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาหรือตามเข็มนาฬิกา เรามักจะใส่ลูกศรโค้งเพื่อระบุทิศทางที่เรากวาดรังสีนั้นออกไป



ในการอ้างอิงถึงมุม ภายใต้ระบบพิกัดฉาก xy ทั่วไป เราให้จุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด (origin) และรังสีเริ่มต้นวางทับกับแกน x ทางบวก หากวัดมุมในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาจากด้านเริ่มต้นไปยังด้านสิ้นสุด จะเรียกมุมนั้นว่า **มุมบวก** (positive angle) แต่หากวัดในทิศทางตามเข็มนาฬิกา จะเรียกมุมนั้นว่า **มุมลบ** (negative angle)

การวัดมุมในตำแหน่งมาตรฐานจะมีจุดเริ่มต้นที่เหมือนกันเสมอ คือการวัดด้านเริ่มต้นไปตามแกน x ทางบวก ส่วนการกำหนดตำแหน่งของด้านสิ้นสุด เราจะต้องคำนวณหา "สัดส่วนของการหมุนหนึ่งรอบ" ที่มุมนั้นกระทำ โดยการนำขนาดของมุมในหน่วยองศา มาหารด้วย 360° ดังนี้

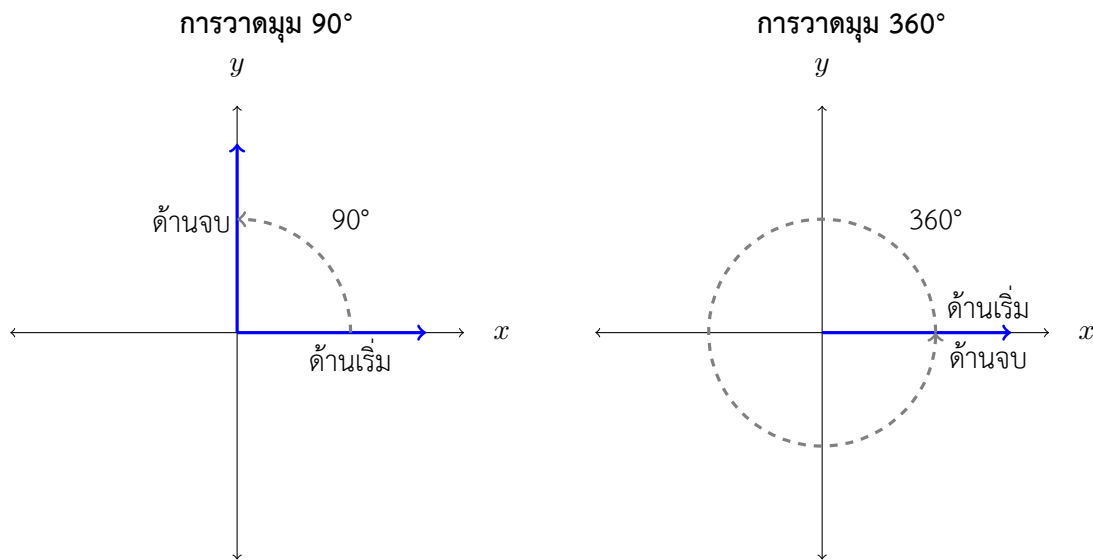
$$\text{สัดส่วนการหมุน} = \frac{\text{ขนาดของมุม}}{360^\circ}$$

ตัวอย่าง 1 1. การวัดมุม 90° เราคำนวณได้ว่า $90^\circ/360^\circ = 1/4$

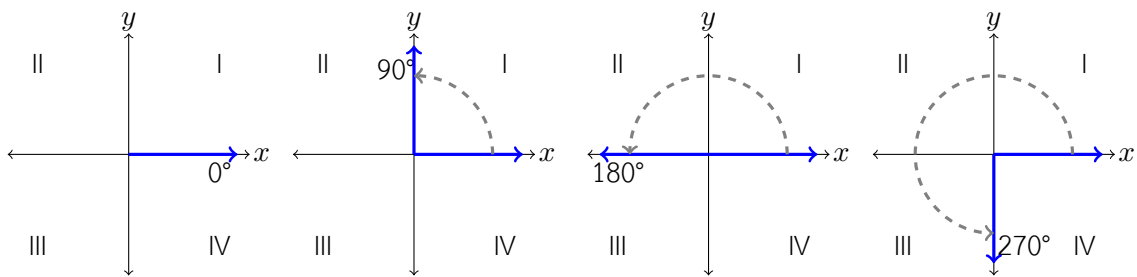
ดังนั้น ด้านสิ้นสุดจะวางด้วยอยู่ที่ตำแหน่ง 1 ใน 4 ของวงกลม โดยหมุนทวนเข็มนาฬิกาไปจากแกน x ทางบวก

2. การวัดมุม 360° เราคำนวณได้ว่า $360^\circ/360^\circ = 1$

นั่นคือ ด้านสิ้นสุดจะหมุนไป 1 รอบเต็ม ของวงกลมในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาจากแกน x ทางบวก ซึ่งในกรณีนี้ ด้านเริ่มต้นและด้านสิ้นสุดจะวางทับซ้อนกันพอดี



เนื่องจากเรานิยามมุมในตำแหน่งมาตรฐานโดยอิงจากด้านสิ้นสุด เราจึงมีมุมชนิดพิเศษที่ด้านสิ้นสุดวางอยู่บนแกนพิกัดพอดี เรียกว่า **มุมจตุภาค** (quadrantal angle) ซึ่งมุมประเภทนี้จะมีขนาดเป็น 0° , 90° , 180° , 270° หรือ 360°



ตัวอย่าง 2 การวาดมุม -135°

เราเริ่มจากการหารขนาดของมุมด้วย 360° จะได้ว่า

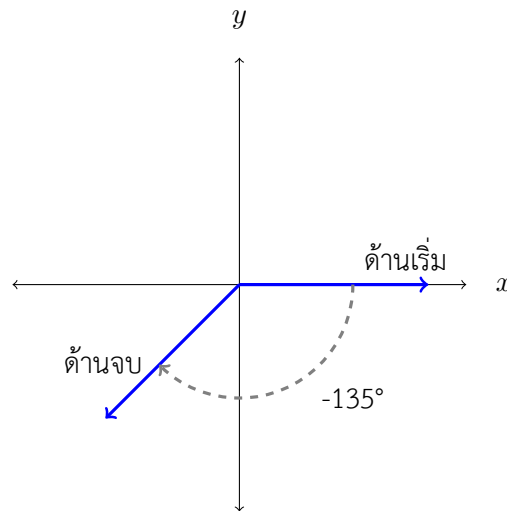
$$\frac{-135^\circ}{360^\circ} = -\frac{3}{8}$$

ในกรณีนี้ เราสามารถแยกส่วนได้เป็น:

$$-\frac{3}{8} = -\frac{3}{2} \left(\frac{1}{4} \right) = -1.5 \left(\frac{1}{4} \right)$$

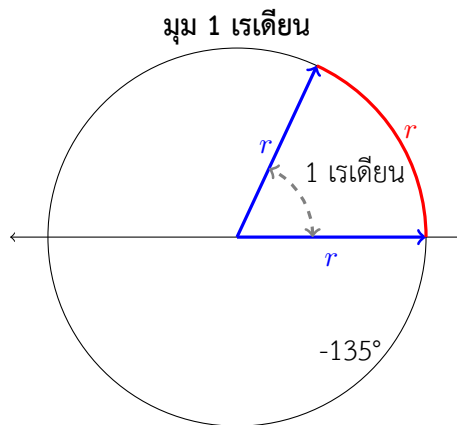
ค่าลบสามในแปด คือ หนึ่งเท่ากับอีกครั้งหนึ่งของ "หนึ่งในสี่รอบ" (หนึ่งควอเตอร์) ในการวาดเราจะลากเส้นโดยการหมุนทวนเข็มนาฬิกาไปเป็นระยะหนึ่งส่วนสี่รอบ (90°) และบวกเพิ่มไปอีกครึ่งหนึ่งของหนึ่งส่วนสี่ (45°) ดังต่อไปนี้

การวาดมุม 360°



การแบ่งวงกลมออกเป็น 360 ส่วนนั้นเป็นการกำหนดขึ้นมาเองโดยมนุษย์ และทำให้เกิดหน่วยวัด "องศา" ที่เรารู้จักกันขึ้นมา เรายังมีอีกหน่วยวัดที่นิยมใช้คือหน่วยเรเดียน (radian)

หนึ่งเรเดียน (One radian) คือ ขนาดของมุมศูนย์กลาง (central angle) ของวงกลมที่กั้นด้วยส่วนโค้งที่มีความยาวเท่ากับรัศมีของวงกลมนั้นพอดี



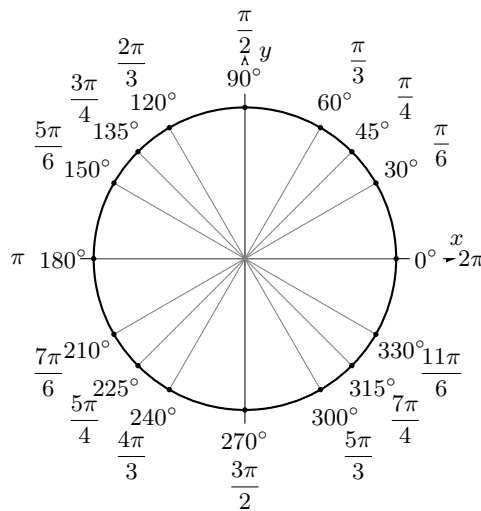
เนื่องจากเส้นรอบวงทั้งหมดเท่ากับ 2π เท่าของรัศมี การหมุนครบหนึ่งรอบวงกลมจึงมีค่าเท่ากับ 2π เรเดียน ดังนั้นเราจึงได้ความสัมพันธ์ดังนี้

$$\begin{aligned} 2\pi \text{ เรเดียน} &= 360^\circ \\ \pi \text{ เรเดียน} &= \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ \\ 1 \text{ เรเดียน} &= \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57.3^\circ \end{aligned}$$

นอกเหนือจากการทราบค่ามุมในหน่วยองศาและเรเดียนของการหมุนครึ่งรอบและเต็มรอบแล้ว ยังมีมุมอื่น ๆ ในหนึ่งรอบวงกลมที่นักศึกษาควรทำความเข้าใจเพราะพบเจอได้บ่อย

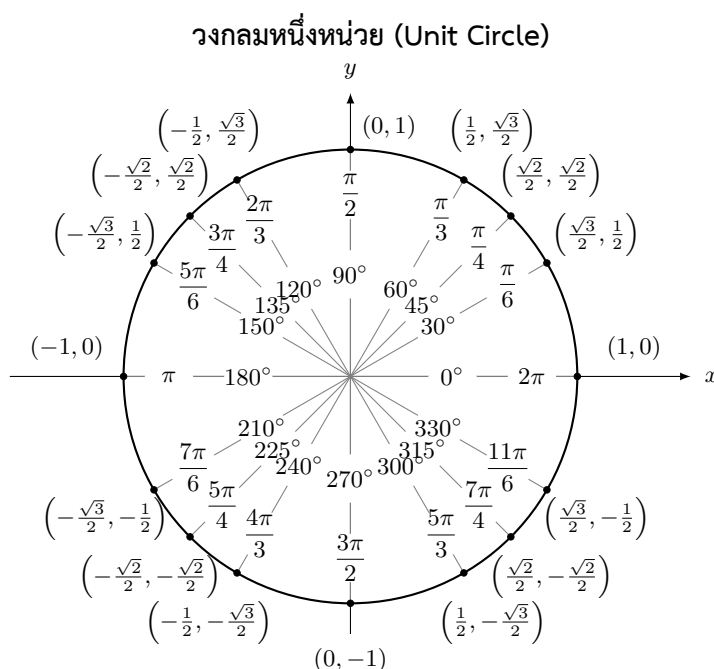
โดยปกติเรามักจะได้พบกับมุมที่เป็นพหุคูณของ 30, 45, 60 และ 90 องศา ค่าเหล่านี้แสดงไว้ในตารางด้านล่าง ซึ่งการจดจำมุมเหล่านี้จะมีประโยชน์อย่างมากในการศึกษาคุณสมบัติต่าง ๆ ของมุมในลำดับถัดไป

องศา (Degrees)	เรเดียน (Radians)	สัดส่วนเมื่อเทียบกับ 1 รอบวงกลม
30°	$\pi/6$	1/12 รอบ
45°	$\pi/4$	1/8 รอบ
60°	$\pi/3$	1/6 รอบ
90°	$\pi/2$	1/4 รอบ
180°	π	1/2 รอบ
270°	$3\pi/2$	3/4 รอบ
360°	2π	1 รอบเต็ม



1.2 ฟังก์ชันตรีโกณมิติและวงกลมหนึ่งหน่วย (Trigonometric Functions: The Unit Circle)

เพื่อนิยามฟังก์ชันตรีโกณมิติ เราจะเริ่มจากการวาด วงกลมหนึ่งหน่วย (unit circle) ซึ่งก็คือวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด (0, 0) และมีรัศมียาว 1 หน่วย มุม θ (ในหน่วยเรเดียน) จะกั้นส่วนโค้งที่มีความยาว s จากสูตรความยาวส่วนโค้ง $s = r\theta$ และเมื่อเราทราบว่าในวงกลมหนึ่งหน่วยนั้น $r = 1$ เราจะพบว่า $s = \theta$ (ความยาวส่วนโค้งจะมีค่าเท่ากับขนาดของมุมในหน่วยเรเดียนพอดี) นิยามของ Sine และ Cosine สำหรับมุม θ ใด ๆ เราสามารถระบุจุดตัดระหว่างด้านสิ้นสุดของมุมกับวงกลมหนึ่งหน่วยได้ด้วยพิกัด (x, y) พิกัด x และ y เหล่านี้จะเป็นค่าผลลัพธ์ (output) ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ $f(\theta) = \cos \theta$ และ $f(\theta) = \sin \theta$ ตามลำดับ ซึ่งหมายความว่า $x = \cos \theta$ และ $y = \sin \theta$



- 1.3 ตรีโกณมิติในสามเหลี่ยมมุมฉาก (Right Triangle Trigonometry)
- 1.4 ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมใด ๆ (Trigonometric Functions of Any Angle)
- 1.5 กราฟของไซน์และโคไซน์ (Graphs of Sine and Cosine Functions)
- 1.6 กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ (Graphs of Other Trigonometric Functions)
- 1.7 ฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน (Inverse Trigonometric Functions)