english

พีชคณิต

(Algebra)

เอกสารประกอบการเรียนการสอน

สำหรับนักศึกษาระดับมหาวิทยาลัย

พ.ศ. 2568

Contents

คำนำ **7**

1 ระบบจำนวนและสมบัติเบื้องต้น **9**

1.1 ระบบจำนวน . . . 9

1.1.1 จำนวนธรรมชาติ . . . 9

1.1.2 จำนวนเต็ม . . . 9

1.1.3 จำนวนตัวเหตุผล . . . 10

1.1.4 จำนวนอตัวเหตุผลและจำนวนจริง . . . 10

1.2 สมบัติของจำนวนจริง . . . 10

1.2.1 สมบัติการสลับที่ . . . 10

1.2.2 สมบัติการเปลี่ยนหมู่ . . . 11

1.2.3 สมบัติการมีเอกลักษณ์ . . . 11

1.2.4 สมบัติการมีสมาชิกผกผัน . . . 11

1.2.5 สมบัติการแจกแจง . . . 12

1.3 ความสัมพันธ์เชิงอันดับ . . . 12

1.4 ค่าสัมบูรณ์ . . . 12

2 พหุนามและการแยกตัวประกอบ **15**

2.1 พหุนามและการดำเนินการ . . . 15

2.1.1 นิยามของพหุนาม . . . 15

2.1.2 การบวกและการลบพหุนาม . . . 15

2.1.3 การคูณพหุนาม . . . 16

2.1.4 การหารพหุนาม . . . 16

2.2 การแยกตัวประกอบ . . . 17

2.2.1 การแยกตัวประกอบร่วม . . . 17

2.2.2 การแยกตัวประกอบโดยจัดกลุ่ม . . . 18

2.2.3 การแยกตัวประกอบพหุนามกำลังสอง . . . 18

2.2.4 สูตรพิเศษในการแยกตัวประกอบ . . . 18

2.2.5 ผลต่างและผลบวกของกำลังที่สูงขึ้น . . . 19

3 สมการและอสมการ **21**

3.1 สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว . . . 21

3.1.1 นิยามและสมบัติ . . . 21

3.1.2 การแก้สมการเชิงเส้น . . . 21

3.2 สมการกำลังสอง . . . 22

3.2.1 นิยามและรูปแบบต่างๆ . . . 22

3.2.2 การแก้สมการกำลังสองโดยการแยกตัวประกอบ . . . 22

3.2.3 การแก้สมการโดยการทำให้เป็นกำลังสองสมบูรณ์ . . . 23

3.2.4 สูตรการแก้สมการกำลังสอง . . . 23

3.2.5 ความสัมพันธ์ระหว่างรากกับสัมประสิทธิ์ . . . 24
3.3 อสมการ . . . 24
3.3.1 อสมการเชิงเส้น . . . 24
3.3.2 อสมการประกอบ . . . 25
3.3.3 อสมการกำลังสอง . . . 25
3.3.4 อสมการค่าสัมบูรณ์ . . . 26

4 ฟังก์ชันและกราฟ 27
4.1 ฟังก์ชัน . . . 27
4.1.1 นิยามของฟังก์ชัน . . . 27
4.1.2 ประเภทของฟังก์ชัน . . . 27
4.1.3 การดำเนินการกับฟังก์ชัน . . . 28
4.1.4 ฟังก์ชันประกอบ . . . 28
4.1.5 ฟังก์ชันผกผัน . . . 28
4.2 กราฟของฟังก์ชัน . . . 29
4.2.1 ระบบพิกัดคาร์ทีเซียน . . . 29
4.2.2 ฟังก์ชันเชิงเส้น . . . 29
4.2.3 ฟังก์ชันกำลังสอง . . . 29
4.2.4 การเลื่อนกราฟ . . . 30
4.3 ฟังก์ชันพิเศษ . . . 30
4.3.1 ฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์ . . . 30
4.3.2 ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและลอการิทึม . . . 31

5 เมทริกซ์และระบบสมการเชิงเส้น 33
5.1 เมทริกซ์ . . . 33
5.1.1 นิยามของเมทริกซ์ . . . 33
5.1.2 การบวกและการลบเมทริกซ์ . . . 33
5.1.3 การคูณเมทริกซ์ด้วยสเกลาร์ . . . 34
5.1.4 การคูณเมทริกซ์ . . . 34
5.1.5 เมทริกซ์ทรานสโพส . . . 34
5.1.6 เมทริกซ์ผกผัน . . . 35
5.2 ระบบสมการเชิงเส้น . . . 35
5.2.1 นิยามและรูปแบบเมทริกซ์ . . . 35
5.2.2 การแก้ระบบสมการโดยการกำจัดแบบเกาส์ . . . 35
5.2.3 การแก้ระบบสมการโดยใช้เมทริกซ์ผกผัน . . . 36

6 ลำดับและอนุกรม 39
6.1 ลำดับ . . . 39
6.1.1 นิยามของลำดับ . . . 39
6.1.2 ลำดับเลขคณิต . . . 39
6.1.3 ลำดับเรขาคณิต . . . 40
6.2 อนุกรม . . . 40
6.2.1 นิยามของอนุกรม . . . 40
6.2.2 อนุกรมเรขาคณิตอนันต์ . . . 41
6.2.3 สัญลักษณ์ซิกมา . . . 41

7 การเหนี่ยวนำเชิงคณิตศาสตร์ 43
7.1 หลักการเหนี่ยวนำเชิงคณิตศาสตร์ 43
7.1.1 หลักการเหนี่ยวนำแบบธรรมดา 43
7.1.2 ตัวอย่างการพิสูจน์โดยเหนี่ยวนำ 43
7.1.3 การเหนี่ยวนำเชิงแข็ง 44

8 ทฤษฎีบททวินาม 47
8.1 ทฤษฎีบททวินามและสัมประสิทธิ์ทวินาม 47
8.1.1 ค่าแฟกทอเรียลและการจัดหมู่ 47
8.1.2 สมบัติของสัมประสิทธิ์ทวินาม 47
8.2 ทฤษฎีบททวินาม 48
8.2.1 การหาพจน์ทั่วไป 48
8.3 แบบฝึกหัดบทที่ 8 49

บรรณานุกรม 51

คำนำ

พีชคณิตเป็นสาขาหนึ่งของคณิตศาสตร์ที่มีความสำคัญอย่างยิ่งต่อการพัฒนาความคิดเชิงนามธรรมและการแก้ปัญหาเชิงตรรกะ เอกสารเล่มนี้จัดทำขึ้นเพื่อเป็นแนวทางในการศึกษาพีชคณิตขั้นพื้นฐานและขั้นสูง โดยมุ่งเน้นให้ผู้เรียนเข้าใจแนวคิดพื้นฐาน สามารถประยุกต์ใช้ทฤษฎีในการแก้ปัญหาได้อย่างมีประสิทธิภาพ

เนื้อหาในเอกสารนี้ประกอบด้วยทฤษฎีที่สำคัญ ตัวอย่างประกอบที่หลากหลาย และแบบฝึกหัดเพื่อฝึกทักษะการคำนวณและการพิสูจน์ ผู้เรียนควรศึกษาอย่างเป็นระบบและฝึกฝนการแก้โจทย์อย่างสม่ำเสมอเพื่อให้เกิดความเข้าใจที่ลึกซึ้ง

หวังเป็นอย่างยิ่งว่าเอกสารเล่มนี้จะเป็นประโยชน์ต่อผู้เรียนและผู้สนใจในการศึกษาพีชคณิต

ผู้เขียน

Chapter 1

ระบบจำนวนและสมบัติเบื้องต้น

1.1 ระบบจำนวน

ในการศึกษาพีชคณิต เราจำเป็นต้องเข้าใจระบบจำนวนต่างๆ ที่เป็นพื้นฐานสำคัญ ระบบจำนวนเหล่านี้มีการพัฒนามาตามลำดับเพื่อให้สามารถแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่ซับซ้อนขึ้นเรื่อยๆ

1.1.1 จำนวนธรรมชาติ

นิยาม 1.1.1. เซตของจำนวนธรรมชาติ (Natural Numbers) แทนด้วยสัญลักษณ์ $\mathbb{N}$ คือ

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

บางตำราจะรวมจำนวน 0 เข้าไปด้วย กล่าวคือ $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$

จำนวนธรรมชาติเป็นจำนวนที่ใช้ในการนับสิ่งของหรือวัตถุต่างๆ ซึ่งเป็นแนวคิดที่เกิดขึ้นตั้งแต่มนุษย์เริ่มต้นมีอารยธรรม การดำเนินการพื้นฐานในเซตของจำนวนธรรมชาติคือ การบวกและการคูณ ซึ่งผลลัพธ์จะอยู่ในเซตเดียวกันเสมอ

ทฤษฎีบท 1.1. สำหรับจำนวนธรรมชาติ $a, b \in \mathbb{N}$ จะได้ว่า $a + b \in \mathbb{N}$ และ $a \cdot b \in \mathbb{N}$

อย่างไรก็ตาม การลบและการหารในเซตของจำนวนธรรมชาติไม่จำเป็นต้องให้ผลลัพธ์ที่เป็นจำนวนธรรมชาติเสมอไป ตัวอย่างเช่น $3 - 5$ ไม่ได้อยู่ในเซต $\mathbb{N}$ ข้อจำกัดนี้นำไปสู่การขยายระบบจำนวนไปเป็นจำนวนเต็ม

1.1.2 จำนวนเต็ม

นิยาม 1.1.2. เซตของจำนวนเต็ม (Integers) แทนด้วยสัญลักษณ์ $\mathbb{Z}$ คือ

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

จำนวนเต็มประกอบด้วยจำนวนธรรมชาติ จำนวนศูนย์ และจำนวนที่เป็นลบของจำนวนธรรมชาติทั้งหมด ในเซตของจำนวนเต็ม การบวก การลบ และการคูณจะให้ผลลัพธ์ที่เป็นจำนวนเต็มเสมอ แต่การหารยังคงมีข้อจำกัดอยู่

ตัวอย่าง 1.1.1. พิจารณาการดำเนินการต่างๆ ในเซต $\mathbb{Z}$:

1. $(-5) + 8 = 3 \in \mathbb{Z}$
2. $7 - 12 = -5 \in \mathbb{Z}$
3. $(-3) \times (-4) = 12 \in \mathbb{Z}$
4. $10 \div 3 = \frac{10}{3} \notin \mathbb{Z}$

สมบัติที่สำคัญของจำนวนเต็มคือการมีสมบัติการสลับที่ การเปลี่ยนหมู่ และการแจกแจงของการบวกและการคูณ ซึ่งเป็นพื้นฐานสำคัญในการศึกษาโครงสร้างพีชคณิตในระดับที่สูงขึ้น

1.1.3 จำนวนตัวเหตุผล

นิยาม 1.1.3. เซตของจำนวนตัวเหตุผล (Rational Numbers) แทนด้วยสัญลักษณ์ $\mathbb{Q}$ คือ

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$$

จำนวนตัวเหตุผลเป็นจำนวนที่สามารถเขียนในรูปเศษส่วนของจำนวนเต็มสองจำนวนได้ โดยที่ตัวหารไม่เท่ากับศูนย์ ในเซตนี้ การบวก การลบ การคูณ และการหารจำนวนที่ไม่ใช่ศูนย์จะให้ผลลัพธ์ที่เป็นจำนวนตัวเหตุผลเสมอ

ตัวอย่าง 1.1.2. ตัวอย่างจำนวนตัวเหตุผล:

- $\frac{3}{4}$ เป็นจำนวนตัวเหตุผล
- $-\frac{7}{2}$ เป็นจำนวนตัวเหตุผล
- $0.75 = \frac{3}{4}$ เป็นจำนวนตัวเหตุผล
- $0.\overline{3} = \frac{1}{3}$ เป็นจำนวนตัวเหตุผล (ทศนิยมซ้ำ)

1.1.4 จำนวนอตัวเหตุผลและจำนวนจริง

นิยาม 1.1.4. จำนวนอตัวเหตุผล (Irrational Numbers) คือจำนวนที่ไม่สามารถเขียนในรูปเศษส่วนของจำนวนเต็มได้

ตัวอย่าง 1.1.3. ตัวอย่างจำนวนอตัวเหตุผลที่สำคัญ:

- $\sqrt{2}$ ซึ่งพิสูจน์แล้วว่าไม่สามารถเขียนในรูปเศษส่วนได้
- $\pi = 3.14159\ldots$ อัตราส่วนระหว่างเส้นรอบวงกับเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม
- $e = 2.71828\ldots$ ฐานของลอการิทึมธรรมชาติ
- $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \ldots$ รากที่สองของจำนวนเฉพาะ

นิยาม 1.1.5. เซตของจำนวนจริง (Real Numbers) แทนด้วยสัญลักษณ์ $\mathbb{R}$ คือสหภาพของเซตจำนวนตัวเหตุผลและจำนวนอตัวเหตุผล กล่าวคือ

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$$

จำนวนจริงสามารถแสดงได้บนเส้นจำนวนซึ่งเป็นเส้นตรงที่ต่อเนื่อง ทุกจุดบนเส้นจำนวนสอดคล้องกับจำนวนจริงหนึ่งจำนวน และจำนวนจริงทุกจำนวนสอดคล้องกับจุดหนึ่งบนเส้นจำนวน

1.2 สมบัติของจำนวนจริง

จำนวนจริงมีสมบัติพื้นฐานที่สำคัญหลายประการ ซึ่งเป็นรากฐานของการดำเนินการทางพีชคณิต เราจะศึกษาสมบัติเหล่านี้อย่างละเอียด

1.2.1 สมบัติการสลับที่

ทฤษฎีบท 1.2 (สมบัติการสลับที่). สำหรับจำนวนจริง $a, b \in \mathbb{R}$ ใดๆ จะได้ว่า

$$a + b = b + a \quad \text{(สมบัติการสลับที่ของการบวก)} \tag{1.1}$$

$$a \cdot b = b \cdot a \quad \text{(สมบัติการสลับที่ของการคูณ)} \tag{1.2}$$

สมบัตินี้บอกเราว่าลำดับของการบวกหรือการคูณไม่มีผลต่อคำตอบ เราสามารถสลับที่ตัวถูกดำเนินการได้โดยผลลัพธ์ยังคงเท่าเดิม

ตัวอย่าง 1.2.1.

1. $5 + 8 = 8 + 5 = 13$
2. $3 \times 7 = 7 \times 3 = 21$
3. $\sqrt{2} + \pi = \pi + \sqrt{2}$

1.2.2 สมบัติการเปลี่ยนหมู่

ทฤษฎีบท 1.3 (สมบัติการเปลี่ยนหมู่). สำหรับจำนวนจริง $a, b, c \in \mathbb{R}$ ใดๆ จะได้ว่า

$$(a+b)+c = a+(b+c) \quad \text{(สมบัติการเปลี่ยนหมู่ของการบวก)} \tag{1.3}$$

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \quad \text{(สมบัติการเปลี่ยนหมู่ของการคูณ)} \tag{1.4}$$

สมบัตินี้แสดงว่าเมื่อมีการดำเนินการหลายครั้ง การจัดกลุ่มตัวเลขแตกต่างกันจะให้ผลลัพธ์เดียวกัน ทำให้เราสามารถละเว้นวงเล็บได้ในบางกรณี

ตัวอย่าง 1.2.2.

1. $(2+3)+4 = 2+(3+4) = 9$
2. $(5 \times 2) \times 3 = 5 \times (2 \times 3) = 30$
3. $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{4} = \frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) = \frac{13}{12}$

1.2.3 สมบัติการมีเอกลักษณ์

นิยาม 1.2.1. จำนวน 0 เรียกว่าเอกลักษณ์ของการบวก (Additive Identity) และจำนวน 1 เรียกว่าเอกลักษณ์ของการคูณ (Multiplicative Identity)

ทฤษฎีบท 1.4. สำหรับจำนวนจริง $a \in \mathbb{R}$ ใดๆ จะได้ว่า

$$a+0 = 0+a = a \tag{1.5}$$

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \tag{1.6}$$

ตัวอย่าง 1.2.3.

1. $15+0 = 15$
2. $(-7)+0 = -7$
3. $\pi \times 1 = \pi$
4. $\frac{3}{4} \times 1 = \frac{3}{4}$

1.2.4 สมบัติการมีสมาชิกผกผัน

นิยาม 1.2.2. สำหรับจำนวนจริง $a \in \mathbb{R}$ จำนวน $-a$ เรียกว่าสมาชิกผกผันของการบวก (Additive Inverse) และสำหรับ $a \neq 0$ จำนวน $\frac{1}{a}$ หรือ a^{-1} เรียกว่าสมาชิกผกผันของการคูณ (Multiplicative Inverse)

ทฤษฎีบท 1.5. สำหรับจำนวนจริง $a \in \mathbb{R}$ ใดๆ จะได้ว่า

$$a+(-a) = (-a)+a = 0 \tag{1.7}$$

$$a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1 \quad \text{(เมื่อ } a \neq 0\text{)} \tag{1.8}$$

ตัวอย่าง 1.2.4.

1. สมาชิกผกผันบวกของ 5 คือ -5 เพราะ $5+(-5) = 0$
2. สมาชิกผกผันคูณของ 4 คือ $\frac{1}{4}$ เพราะ $4 \times \frac{1}{4} = 1$
3. สมาชิกผกผันคูณของ $\frac{2}{3}$ คือ $\frac{3}{2}$ เพราะ $\frac{2}{3} \times \frac{3}{2} = 1$

1.2.5 สมบัติการแจกแจง

ทฤษฎีบท 1.6 (สมบัติการแจกแจง). สำหรับจำนวนจริง $a, b, c \in \mathbb{R}$ ใดๆ จะได้ว่า

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad \text{(การแจกแจงทางซ้าย)} \tag{1.9}$$

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \quad \text{(การแจกแจงทางขวา)} \tag{1.10}$$

สมบัติการแจกแจงเป็นสมบัติที่เชื่อมโยงระหว่างการบวกและการคูณ ซึ่งเป็นเครื่องมือสำคัญในการแก้สมการและการทำให้นิพจน์พีชคณิตเรียบง่ายขึ้น

ตัวอย่าง 1.2.5.

1. $3(4 + 5) = 3 \cdot 4 + 3 \cdot 5 = 12 + 15 = 27$
2. $x(y + z) = xy + xz$
3. $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$ (ใช้สมบัติการแจกแจงสองครั้ง)
4. $2(x - 3) = 2x - 6$

1.3 ความสัมพันธ์เชิงอันดับ

จำนวนจริงมีความสัมพันธ์เชิงอันดับที่สามารถเปรียบเทียบขนาดของจำนวนได้ ซึ่งเป็นคุณสมบัติที่สำคัญในการวิเคราะห์และการแก้อสมการ

นิยาม 1.3.1. สำหรับจำนวนจริง $a, b \in \mathbb{R}$ เราเขียนว่า $a < b$ (อ่านว่า a น้อยกว่า b) ก็ต่อเมื่อ $b - a$ เป็นจำนวนบวก นอกจากนี้ $a \leq b$ หมายความว่า $a < b$ หรือ $a = b$

ทฤษฎีบท 1.7 (สมบัติของความสัมพันธ์เชิงอันดับ). สำหรับจำนวนจริง $a, b, c \in \mathbb{R}$ ใดๆ มีสมบัติดังนี้:

1. สมบัติไตรภาค (Trichotomy): มีความสัมพันธ์เพียงหนึ่งความสัมพันธ์เท่านั้นในบรรดา $a < b$, $a = b$, หรือ $a > b$
2. สมบัติถ่ายทอด (Transitivity): ถ้า $a < b$ และ $b < c$ แล้ว $a < c$
3. การบวก: ถ้า $a < b$ แล้ว $a + c < b + c$
4. การคูณด้วยจำนวนบวก: ถ้า $a < b$ และ $c > 0$ แล้ว $ac < bc$
5. การคูณด้วยจำนวนลบ: ถ้า $a < b$ และ $c < 0$ แล้ว $ac > bc$

ตัวอย่าง 1.3.1. พิจารณาการใช้สมบัติความสัมพันธ์เชิงอันดับ:

1. ถ้า $x + 3 < 7$ แล้วเราสามารถลบ 3 ทั้งสองข้างได้: $x < 4$
2. ถ้า $2x < 10$ และ $2 > 0$ แล้วเราสามารถหารทั้งสองข้างด้วย 2 ได้: $x < 5$
3. ถ้า $-3x < 12$ และ $-3 < 0$ แล้วเราต้องกลับทิศทางของอสมการเมื่อหารด้วย -3: $x > -4$

1.4 ค่าสัมบูรณ์

นิยาม 1.4.1. ค่าสัมบูรณ์ (Absolute Value) ของจำนวนจริง a แทนด้วย $|a|$ นิยามโดย

$$|a| = \begin{cases} a & \text{ถ้า } a \geq 0 \\ -a & \text{ถ้า } a < 0 \end{cases}$$

ค่าสัมบูรณ์แสดงถึงระยะห่างจากจุดศูนย์บนเส้นจำนวน ซึ่งเป็นจำนวนที่ไม่เป็นลบเสมอ และมีการใช้งานอย่างกว้างขวางในคณิตศาสตร์และการประยุกต์ต่างๆ

ทฤษฎีบท 1.8 (สมบัติของค่าสัมบูรณ์). สำหรับจำนวนจริง $a, b \in \mathbb{R}$ ใดๆ มีสมบัติดังนี้:

1. $|a| \geq 0$ และ $|a| = 0$ ก็ต่อเมื่อ $a = 0$
2. $|-a| = |a|$
3. $|ab| = |a| \cdot |b|$
4. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ เมื่อ $b \neq 0$
5. $|a+b| \leq |a| + |b|$ (อสมการสามเหลี่ยม)
6. $||a| - |b|| \leq |a - b|$

ตัวอย่าง 1.4.1. คำนวณค่าสัมบูรณ์:

1. $|5| = 5$
2. $|-7| = 7$
3. $|0| = 0$
4. $|3-8| = |-5| = 5$
5. $|-2| \cdot |6| = 2 \cdot 6 = 12 = |-12|$

ตัวอย่าง 1.4.2. แก้สมการค่าสัมบูรณ์ $|x-2| = 5$

วิธีทำ: สมการนี้แสดงว่าระยะห่างจาก x ถึง 2 บนเส้นจำนวนเท่ากับ 5 ดังนั้น

$$\begin{aligned} x - 2 = 5 \quad &\text{หรือ} \quad x - 2 = -5 \\ x = 7 \quad &\text{หรือ} \quad x = -3 \end{aligned}$$

ดังนั้นคำตอบคือ $x = 7$ หรือ $x = -3$

แบบฝึกหัด 1.1. จงหาค่าของ x ที่สอดคล้องกับแต่ละสมการต่อไปนี้:

1. $|x| = 8$
2. $|x+3| = 7$
3. $|2x-1| = 5$
4. $|x-4| \leq 3$

Chapter 2

พหุนามและการแยกตัวประกอบ

2.1 พหุนามและการดำเนินการ

พหุนามเป็นนิพจน์ทางคณิตศาสตร์ที่มีความสำคัญอย่างยิ่งในพีชคณิต การศึกษาพหุนามและสมบัติต่างๆ ของพหุนามจะช่วยให้เราสามารถแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่ซับซ้อนได้อย่างมีประสิทธิภาพ

2.1.1 นิยามของพหุนาม

นิยาม 2.1.1. พหุนามในตัวแปรเดียว x (Polynomial in one variable) คือนิพจน์ในรูป

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

โดยที่ $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ เป็นจำนวนจริง เรียกว่าสัมประสิทธิ์ (Coefficients) และ n เป็นจำนวนเต็มไม่เป็นลบ ถ้า $a_n \neq 0$ แล้วเรียกว่า n เป็นดีกรี (Degree) ของพหุนาม แทนด้วย deg(P)

ตัวอย่าง 2.1.1. ตัวอย่างพหุนามต่างๆ:

1. $P(x) = 3x^2 + 5x - 7$ เป็นพหุนามดีกรี 2
2. $Q(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 8x + 5$ เป็นพหุนามดีกรี 4
3. $R(x) = 7$ เป็นพหุนามดีกรี 0 (พหุนามคงตัว)
4. $S(x) = -2x^5 + x^3 - 1$ เป็นพหุนามดีกรี 5

หมายเหตุ 2.1.1. พหุนามศูนย์ คือ $P(x) = 0$ มีสัมประสิทธิ์ทุกตัวเป็นศูนย์ และไม่มีการนิยามดีกรีของพหุนามศูนย์ หรือบางตำราอาจกำหนดให้มีดีกรีเป็น $-\infty$

2.1.2 การบวกและการลบพหุนาม

การบวกและการลบพหุนามทำได้โดยการรวมพจน์ที่มีเลขชี้กำลังเท่ากัน กล่าวคือ รวมสัมประสิทธิ์ของพจน์ที่มีตัวแปรและเลขชี้กำลังเดียวกัน

ตัวอย่าง 2.1.2. ให้ $P(x) = 3x^3 + 2x^2 - 5x + 7$ และ $Q(x) = x^3 - 4x^2 + 3x - 2$ จงหา $P(x) + Q(x)$ และ $P(x) - Q(x)$

วิธีทำ:

$$\begin{aligned} P(x) + Q(x) &= (3x^3 + 2x^2 - 5x + 7) + (x^3 - 4x^2 + 3x - 2) \\ &= (3+1)x^3 + (2-4)x^2 + (-5+3)x + (7-2) \\ &= 4x^3 - 2x^2 - 2x + 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(x) - Q(x) &= (3x^3 + 2x^2 - 5x + 7) - (x^3 - 4x^2 + 3x - 2) \\ &= (3-1)x^3 + (2+4)x^2 + (-5-3)x + (7+2) \\ &= 2x^3 + 6x^2 - 8x + 9 \end{aligned}$$

2.1.3 การคูณพหุนาม

การคูณพหุนามทำได้โดยใช้สมบัติการแจกแจง คูณทุกพจน์ในพหุนามแรกกับทุกพจน์ในพหุนามที่สอง แล้วรวมพจน์ที่มีเลขชี้กำลังเท่ากัน

ทฤษฎีบท 2.1. ถ้า $P(x)$ มีดีกรี m และ $Q(x)$ มีดีกรี n แล้ว $P(x) \cdot Q(x)$ มีดีกรี $m + n$

ตัวอย่าง 2.1.3. ให้ $P(x) = 2x^2 + 3x - 1$ และ $Q(x) = x + 4$ จงหา $P(x) \cdot Q(x)$

วิธีทำ:

$$\begin{aligned} P(x) \cdot Q(x) &= (2x^2 + 3x - 1)(x + 4) \\ &= 2x^2(x+4) + 3x(x+4) - 1(x+4) \\ &= 2x^3 + 8x^2 + 3x^2 + 12x - x - 4 \\ &= 2x^3 + 11x^2 + 11x - 4 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 2.1.4. กรณีพิเศษที่สำคัญของการคูณพหุนาม:

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (กำลังสองของผลบวก)
2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ (กำลังสองของผลต่าง)
3. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ (ผลต่างของกำลังสอง)
4. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ (กำลังสามของผลบวก)
5. $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ (กำลังสามของผลต่าง)
6. $(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$ (ผลบวกของกำลังสาม)
7. $(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$ (ผลต่างของกำลังสาม)

2.1.4 การหารพหุนาม

การหารพหุนามเป็นกระบวนการที่คล้ายกับการหารเลขจำนวนเต็ม โดยมีทฤษฎีบทการหารที่เป็นพื้นฐานสำคัญ

ทฤษฎีบท 2.2 (ทฤษฎีบทการหาร). ให้ $P(x)$ และ $D(x)$ เป็นพหุนามโดยที่ $D(x) \neq 0$ จะมีพหุนามเพียงหนึ่งคู่ $Q(x)$ และ $R(x)$ ที่เรียกว่าพหุนามผลหาร (Quotient) และพหุนามเศษเหลือ (Remainder) ตามลำดับ ซึ่งสอดคล้อง

$$P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

โดยที่ $R(x) = 0$ หรือ $\deg(R) < \deg(D)$

ตัวอย่าง 2.1.5. จงหาร $P(x) = 2x^3 + 5x^2 - 3x + 7$ ด้วย $D(x) = x + 2$

วิธีทำ: ใช้การหารยาว (Long Division)

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^2 + x - 5 \\ \hline
x + 2 & 2x^3 + 5x^2 - 3x + 7 \\
 & 2x^3 + 4x^2 \\ \hline
 & x^2 - 3x \\
 & x^2 + 2x \\ \hline
 & -5x + 7 \\
 & -5x - 10 \\ \hline
 & 17
\end{array}
$$

ดังนั้น $Q(x) = 2x^2 + x - 5$ และ $R(x) = 17$
เราสามารถเขียนได้ว่า $2x^3 + 5x^2 - 3x + 7 = (x + 2)(2x^2 + x - 5) + 17$

ทฤษฎีบท 2.3 (ทฤษฎีบทเศษเหลือ (Remainder Theorem)). ถ้า $P(x)$ เป็นพหุนามใดๆ และหาร $P(x)$ ด้วย $(x - a)$ จะได้เศษเหลือเท่ากับ $P(a)$

Proof. จากทฤษฎีบทการหาร เราสามารถเขียนได้ว่า

$$P(x) = (x - a)Q(x) + R$$

โดยที่ R เป็นค่าคงตัว (เพราะเศษเหลือต้องมีดีกรีน้อยกว่าตัวหาร)
แทน $x = a$ ในสมการข้างต้น:

$$P(a) = (a - a)Q(a) + R = 0 \cdot Q(a) + R = R$$

ดังนั้น $R = P(a)$ □

บทแทรก 2.3.1 (ทฤษฎีบทตัวประกอบ (Factor Theorem)). $(x - a)$ เป็นตัวประกอบของ $P(x)$ ก็ต่อเมื่อ $P(a) = 0$

ตัวอย่าง 2.1.6. ตรวจสอบว่า $(x - 2)$ เป็นตัวประกอบของ $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$ หรือไม่
วิธีทำ: คำนวณ $P(2)$

$$
\begin{aligned}
P(2) &= 2^3 - 4(2)^2 + 2 + 6 \\
&= 8 - 16 + 2 + 6 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

เนื่องจาก $P(2) = 0$ ดังนั้น $(x - 2)$ เป็นตัวประกอบของ $P(x)$

2.2 การแยกตัวประกอบ

การแยกตัวประกอบพหุนามเป็นทักษะที่สำคัญในพีชคณิต ซึ่งจะช่วยในการแก้สมการและการทำให้นิพจน์เรียบง่ายขึ้น

2.2.1 การแยกตัวประกอบร่วม

วิธีการแรกในการแยกตัวประกอบคือการหาตัวประกอบร่วมของทุกพจน์

ตัวอย่าง 2.2.1. แยกตัวประกอบของนิพจน์ต่อไปนี้:

1. $6x^3 + 9x^2 - 3x = 3x(2x^2 + 3x - 1)$
2. $4a^2b + 8ab^2 - 12ab = 4ab(a + 2b - 3)$
3. $x^2y^3 + x^3y^2 - x^2y^2 = x^2y^2(y + x - 1)$

2.2.2 การแยกตัวประกอบโดยจัดกลุ่ม

บางครั้งเราสามารถแยกตัวประกอบได้โดยการจัดกลุ่มพจน์ที่เหมาะสม

ตัวอย่าง 2.2.2. แยกตัวประกอบ $ax + ay + bx + by$

วิธีทำ:

$$\begin{aligned} ax + ay + bx + by &= a(x + y) + b(x + y) \\ &= (x + y)(a + b) \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 2.2.3. แยกตัวประกอบ $x^3 + 2x^2 - 3x - 6$

วิธีทำ:

$$\begin{aligned} x^3 + 2x^2 - 3x - 6 &= (x^3 + 2x^2) + (-3x - 6) \\ &= x^2(x + 2) - 3(x + 2) \\ &= (x + 2)(x^2 - 3) \end{aligned}$$

2.2.3 การแยกตัวประกอบพหุนามกำลังสอง

พหุนามกำลังสองในรูป $ax^2 + bx + c$ สามารถแยกตัวประกอบได้หลายวิธี

ทฤษฎีบท 2.4. พหุนามกำลังสอง $ax^2 + bx + c$ (โดยที่ $a \neq 0$) สามารถแยกตัวประกอบได้ในเซตจำนวนจริงก็ต่อเมื่อ ดิสคริมิแนนต์ (Discriminant) $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$

ตัวอย่าง 2.2.4. แยกตัวประกอบ $x^2 + 5x + 6$

วิธีทำ: หาสองจำนวนที่คูณกันได้ 6 และบวกกันได้ 5 นั่นคือ 2 และ 3

$$x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$$

ตัวอย่าง 2.2.5. แยกตัวประกอบ $2x^2 + 7x + 3$

วิธีทำ: หาสองจำนวนที่คูณกันได้ $2 \times 3 = 6$ และบวกกันได้ 7 นั่นคือ 6 และ 1

$$\begin{aligned} 2x^2 + 7x + 3 &= 2x^2 + 6x + x + 3 \\ &= 2x(x + 3) + 1(x + 3) \\ &= (2x + 1)(x + 3) \end{aligned}$$

2.2.4 สูตรพิเศษในการแยกตัวประกอบ

มีสูตรพิเศษหลายแบบที่ใช้ในการแยกตัวประกอบอย่างรวดเร็ว

ทฤษฎีบท 2.5 (สูตรพิเศษ).

1. ผลต่างของกำลังสอง: $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
2. ผลบวกของกำลังสาม: $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
3. ผลต่างของกำลังสาม: $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
4. กำลังสองสมบูรณ์: $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$
5. กำลังสองสมบูรณ์: $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

ตัวอย่าง 2.2.6. แยกตัวประกอบโดยใช้สูตรพิเศษ:

1. $x^2 - 16 = x^2 - 4^2 = (x + 4)(x - 4)$
2. $9x^2 - 25y^2 = (3x)^2 - (5y)^2 = (3x + 5y)(3x - 5y)$
3. $x^3 + 27 = x^3 + 3^3 = (x + 3)(x^2 - 3x + 9)$
4. $8x^3 - 125 = (2x)^3 - 5^3 = (2x - 5)(4x^2 + 10x + 25)$
5. $x^2 + 6x + 9 = x^2 + 2(3)x + 3^2 = (x + 3)^2$

2.2.5 ผลต่างและผลบวกของกำลังที่สูงขึ้น

ทฤษฎีบท 2.6. สำหรับจำนวนเต็มบวก n ใดๆ

1. $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$
2. ถ้า n เป็นเลขคี่ แล้ว $a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \cdots + b^{n-1})$

ตัวอย่าง 2.2.7. แยกตัวประกอบ $x^4 - 16$

วิธีทำ:

$$\begin{aligned} x^4 - 16 &= (x^2)^2 - 4^2 \\ &= (x^2+4)(x^2-4) \\ &= (x^2+4)(x+2)(x-2) \end{aligned}$$

แบบฝึกหัด 2.1. จงแยกตัวประกอบของนิพจน์ต่อไปนี้:

1. $3x^2 - 12$
2. $x^2 - 10x + 25$
3. $4x^2 - 9y^2$
4. $x^3 + 3x^2 - 4x - 12$
5. $6x^2 + 11x - 10$
6. $x^4 - 81$
7. $27x^3 + 8$
8. $x^3 - 6x^2 + 9x$

Chapter 3

สมการและอสมการ

3.1 สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

สมการเชิงเส้นเป็นสมการพื้นฐานที่สำคัญที่สุดในพีชคณิต การแก้สมการเชิงเส้นเป็นทักษะจำเป็นสำหรับการศึกษาคณิตศาสตร์ในระดับที่สูงขึ้น

3.1.1 นิยามและสมบัติ

นิยาม 3.1.1. สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว (Linear Equation in One Variable) คือสมการที่เขียนอยู่ในรูป

$$ax + b = 0$$

โดยที่ a, b เป็นค่าคงตัว และ $a \neq 0$

ทฤษฎีบท 3.1. สมการเชิงเส้น $ax + b = 0$ มีผลเฉลยเพียงหนึ่งคำตอบ คือ $x = -\frac{b}{a}$

3.1.2 การแก้สมการเชิงเส้น

ในการแก้สมการเชิงเส้น เราใช้สมบัติของความเท่ากันเพื่อแยกตัวแปรออกมาด้านเดียว

ทฤษฎีบท 3.2 (สมบัติของความเท่ากัน)**.** ถ้า $a = b$ แล้ว

1. $a + c = b + c$ สำหรับ c ใดๆ
2. $a - c = b - c$ สำหรับ c ใดๆ
3. $ac = bc$ สำหรับ c ใดๆ
4. $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$ สำหรับ $c \neq 0$

ตัวอย่าง 3.1.1. แก้สมการ $3x + 7 = 19$

วิธีทำ:

$$\begin{aligned} 3x + 7 &= 19 \\ 3x + 7 - 7 &= 19 - 7 \quad \text{(ลบ 7 ทั้งสองข้าง)} \\ 3x &= 12 \\ \frac{3x}{3} &= \frac{12}{3} \quad \text{(หารทั้งสองข้างด้วย 3)} \\ x &= 4 \end{aligned}$$

ตรวจสอบ: แทน $x = 4$ ในสมการเดิม $3(4) + 7 = 12 + 7 = 19$ $\square$

ตัวอย่าง 3.1.2. แก้สมการ $\frac{2x-1}{3} + \frac{x+2}{4} = 5$

วิธีทำ: คูณทั้งสองข้างด้วย LCD = 12

$$\begin{aligned} 12 \cdot \left(\frac{2x-1}{3} + \frac{x+2}{4}\right) &= 12 \cdot 5 \\ 4(2x-1) + 3(x+2) &= 60 \\ 8x - 4 + 3x + 6 &= 60 \\ 11x + 2 &= 60 \\ 11x &= 58 \\ x &= \frac{58}{11} \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 3.1.3. แก้สมการ $2(x-3) + 5 = 3(x+1) - x$

วิธีทำ:

$$\begin{aligned} 2(x-3) + 5 &= 3(x+1) - x \\ 2x - 6 + 5 &= 3x + 3 - x \\ 2x - 1 &= 2x + 3 \\ 2x - 2x &= 3 + 1 \\ 0 &= 4 \end{aligned}$$

นี่คือข้อขัดแย้ง ดังนั้นสมการนี้ไม่มีคำตอบ (No Solution)

หมายเหตุ 3.1.1. สมการเชิงเส้นมี 3 กรณีที่เป็นไปได้:

1. มีคำตอบเพียงหนึ่งคำตอบ (Unique Solution)
2. ไม่มีคำตอบ (No Solution) - เกิดขึ้นเมื่อได้ข้อขัดแย้ง
3. มีคำตอบอนันต์ (Infinitely Many Solutions) - เกิดขึ้นเมื่อทั้งสองข้างเท่ากันเสมอ

3.2 สมการกำลังสอง

สมการกำลังสองเป็นสมการที่มีความสำคัญมากในคณิตศาสตร์และการประยุกต์ใช้ในวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมศาสตร์

3.2.1 นิยามและรูปแบบต่างๆ

นิยาม 3.2.1. สมการกำลังสอง (Quadratic Equation) คือสมการที่เขียนอยู่ในรูป

$$ax^2 + bx + c = 0$$

โดยที่ a, b, c เป็นค่าคงตัว และ $a \neq 0$ รูปแบบนี้เรียกว่ารูปมาตรฐาน (Standard Form)

ค่า x ที่ทำให้สมการเป็นจริงเรียกว่ารากของสมการ (Roots) หรือคำตอบของสมการ (Solutions)

3.2.2 การแก้สมการกำลังสองโดยการแยกตัวประกอบ

ถ้าสมการกำลังสองสามารถแยกตัวประกอบได้ เราสามารถหาคำตอบได้โดยใช้หลักการที่ว่า ถ้า $AB = 0$ แล้ว $A = 0$ หรือ $B = 0$

ตัวอย่าง 3.2.1. แก้สมการ $x^2 + 5x + 6 = 0$

วิธีทำ:

$$\begin{aligned} x^2 + 5x + 6 &= 0 \\ (x+2)(x+3) &= 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น $x + 2 = 0$ หรือ $x + 3 = 0$
คำตอบคือ $x = -2$ หรือ $x = -3$

ตัวอย่าง 3.2.2. แก้สมการ $2x^2 - 5x - 3 = 0$

วิธีทำ:

$$\begin{aligned} 2x^2 - 5x - 3 &= 0 \\ (2x+1)(x-3) &= 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น $2x + 1 = 0$ หรือ $x - 3 = 0$
คำตอบคือ $x = -\frac{1}{2}$ หรือ $x = 3$

3.2.3 การแก้สมการโดยการทำให้เป็นกำลังสองสมบูรณ์

วิธีนี้ใช้การเขียนสมการให้อยู่ในรูป $(x + p)^2 = q$ แล้วแก้หาค่า x

ตัวอย่าง 3.2.3. แก้สมการ $x^2 + 6x + 5 = 0$ โดยทำให้เป็นกำลังสองสมบูรณ์

วิธีทำ:

$$\begin{aligned} x^2 + 6x + 5 &= 0 \\ x^2 + 6x &= -5 \\ x^2 + 6x + 9 &= -5 + 9 \quad \text{(บวก } \left(\frac{6}{2}\right)^2 = 9 \text{ ทั้งสองข้าง)} \\ (x+3)^2 &= 4 \\ x + 3 &= \pm 2 \\ x &= -3 + 2 = -1 \quad \text{หรือ} \quad x = -3 - 2 = -5 \end{aligned}$$

3.2.4 สูตรการแก้สมการกำลังสอง

จากวิธีการทำให้เป็นกำลังสองสมบูรณ์ เราได้สูตรทั่วไปสำหรับแก้สมการกำลังสอง

ทฤษฎีบท 3.3 (สูตรกำลังสอง). สมการกำลังสอง $ax^2 + bx + c = 0$ (โดยที่ $a \neq 0$) มีคำตอบคือ

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ค่า $\Delta = b^2 - 4ac$ เรียกว่า ดิสคริมิแนนต์ (Discriminant) ซึ่งบอกลักษณะของคำตอบ:

- ถ้า $\Delta > 0$ สมการมีคำตอบจริงสองคำตอบที่แตกต่างกัน
- ถ้า $\Delta = 0$ สมการมีคำตอบจริงเพียงหนึ่งคำตอบ (รากซ้ำ)
- ถ้า $\Delta < 0$ สมการไม่มีคำตอบจริง (มีคำตอบเป็นจำนวนเชิงซ้อน)

ตัวอย่าง 3.2.4. แก้สมการ $2x^2 + 3x - 5 = 0$ โดยใช้สูตร

วิธีทำ: เทียบกับรูปแบบมาตรฐานได้ $a = 2, b = 3, c = -5$

หาดิสคริมิแนนต์: $\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4(2)(-5) = 9 + 40 = 49$

แทนค่าในสูตร:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{2(2)} \\ &= \frac{-3 \pm 7}{4} \end{aligned}$$

ดังนั้น $x = \frac{-3+7}{4} = 1$ หรือ $x = \frac{-3-7}{4} = -\frac{10}{4} = -\frac{5}{2}$

ตัวอย่าง 3.2.5. แก้สมการ $x^2 - 4x + 4 = 0$

วิธีทำ: เทียบได้ $a = 1, b = -4, c = 4$

$\Delta = (-4)^2 - 4(1)(4) = 16 - 16 = 0$

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-4) \pm \sqrt{0}}{2(1)} \\ &= \frac{4}{2} = 2 \end{aligned}$$

สมการมีคำตอบเพียงหนึ่งคำตอบคือ $x = 2$ (รากซ้ำ)

3.2.5 ความสัมพันธ์ระหว่างรากกับสัมประสิทธิ์

ทฤษฎีบท 3.4 (ทฤษฎีบทของเวียต). ถ้า x_1 และ x_2 เป็นรากของสมการ $ax^2 + bx + c = 0$ แล้ว

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -\frac{b}{a} \quad \text{(ผลบวกของราก)} \\ x_1 \cdot x_2 &= \frac{c}{a} \quad \text{(ผลคูณของราก)} \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 3.2.6. ถ้ารากของสมการ $x^2 - 7x + 12 = 0$ คือ x_1 และ x_2 จงหา $x_1 + x_2$ และ $x_1 \cdot x_2$ โดยไม่ต้องแก้สมการ

วิธีทำ: จากทฤษฎีบทของเวียต เทียบได้ $a = 1, b = -7, c = 12$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -\frac{-7}{1} = 7 \\ x_1 \cdot x_2 &= \frac{12}{1} = 12 \end{aligned}$$

3.3 อสมการ

อสมการเป็นประโยคทางคณิตศาสตร์ที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างนิพจน์สองนิพจน์โดยใช้เครื่องหมาย $<, >, \leq, \geq$

3.3.1 อสมการเชิงเส้น

นิยาม 3.3.1. อสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวคืออสมการในรูป $ax + b < 0, ax + b > 0, ax + b \leq 0$, หรือ $ax + b \geq 0$ โดยที่ $a \neq 0$

ตัวอย่าง 3.3.1. แก้อสมการ $3x - 5 < 7$

วิธีทำ:

$$\begin{aligned} 3x - 5 &< 7 \\ 3x &< 12 \\ x &< 4 \end{aligned}$$

เซตคำตอบคือ $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 4\}$ หรือเขียนในรูปช่วงได้ว่า $(-\infty, 4)$

ตัวอย่าง 3.3.2. แก้อสมการ $-2x + 6 \geq 10$

วิธีทำ:

$$\begin{aligned} -2x + 6 &\geq 10 \\ -2x &\geq 4 \\ x &\leq -2 \quad \text{(กลับทิศทางเมื่อหารหรือคูณด้วยจำนวนลบ)} \end{aligned}$$

เซตคำตอบคือ $(-\infty, -2]$

3.3.2 อสมการประกอบ

อสมการประกอบเป็นอสมการที่รวมเงื่อนไขหลายเงื่อนไขเข้าด้วยกัน

ตัวอย่าง 3.3.3. แก้อสมการ $-3 \leq 2x + 1 < 7$

วิธีทำ:

$$\begin{aligned} -3 \leq 2x + 1 &< 7 \\ -4 \leq 2x &< 6 \quad \text{(ลบ 1 ทุกส่วน)} \\ -2 \leq x &< 3 \quad \text{(หารทุกส่วนด้วย 2)} \end{aligned}$$

เซตคำตอบคือ $[-2, 3)$

3.3.3 อสมการกำลังสอง

การแก้อสมการกำลังสองต้องพิจารณาเครื่องหมายของพหุนามกำลังสองในช่วงต่างๆ

ตัวอย่าง 3.3.4. แก้อสมการ $x^2 - 5x + 6 > 0$

วิธีทำ: แยกตัวประกอบ

$$\begin{aligned} x^2 - 5x + 6 &> 0 \\ (x-2)(x-3) &> 0 \end{aligned}$$

หาจุดวิกฤต: $x = 2$ และ $x = 3$

สร้างตารางเครื่องหมาย:

ช่วง	$x < 2$	$2 < x < 3$	$x > 3$
$(x-2)$	$-$	$+$	$+$
$(x-3)$	$-$	$-$	$+$
$(x-2)(x-3)$	$+$	$-$	$+$

ต้องการ $(x-2)(x-3) > 0$ ดังนั้นคำตอบคือ $x < 2$ หรือ $x > 3$

เขียนในรูปช่วง: $(-\infty, 2) \cup (3, \infty)$

ตัวอย่าง 3.3.5. แก้อสมการ $x^2 + 4x - 5 \leq 0$

วิธีทำ:

$$\begin{aligned} x^2 + 4x - 5 &\leq 0 \\ (x+5)(x-1) &\leq 0 \end{aligned}$$

จุดวิกฤต: $x = -5$ และ $x = 1$

จากการทดสอบเครื่องหมาย ได้ว่า $(x+5)(x-1) \leq 0$ เมื่อ $-5 \leq x \leq 1$

คำตอบคือ $[-5, 1]$

3.3.4 อสมการค่าสัมบูรณ์

อสมการที่มีค่าสัมบูรณ์สามารถแก้ได้โดยใช้นิยามของค่าสัมบูรณ์

ทฤษฎีบท 3.5. สำหรับ $k > 0$:

1. $|x| < k$ ก็ต่อเมื่อ $-k < x < k$
2. $|x| \leq k$ ก็ต่อเมื่อ $-k \leq x \leq k$
3. $|x| > k$ ก็ต่อเมื่อ $x < -k$ หรือ $x > k$
4. $|x| \geq k$ ก็ต่อเมื่อ $x \leq -k$ หรือ $x \geq k$

ตัวอย่าง 3.3.6. แก้อสมการ $|2x - 3| < 5$

วิธีทำ:

$$\begin{aligned} |2x - 3| &< 5 \\ -5 < 2x - 3 &< 5 \\ -2 < 2x &< 8 \\ -1 < x &< 4 \end{aligned}$$

คำตอบคือ $(-1, 4)$

ตัวอย่าง 3.3.7. แก้อสมการ $|x + 2| \geq 3$

วิธีทำ:

$$\begin{aligned} |x+2| &\geq 3 \\ x + 2 \leq -3 \quad &\text{หรือ} \quad x + 2 \geq 3 \\ x \leq -5 \quad &\text{หรือ} \quad x \geq 1 \end{aligned}$$

คำตอบคือ $(-\infty, -5] \cup [1, \infty)$

แบบฝึกหัด 3.1. จงแก้สมการและอสมการต่อไปนี้:

1. $5x - 8 = 3x + 4$
2. $x^2 - 9 = 0$
3. $3x^2 + 7x - 6 = 0$
4. $2x - 7 < 3$
5. $x^2 - x - 6 > 0$
6. $|3x - 1| = 8$
7. $|x - 4| \leq 6$

Chapter 4

ฟังก์ชันและกราฟ

4.1 ฟังก์ชัน

แนวคิดเรื่องฟังก์ชันเป็นหนึ่งในแนวคิดที่สำคัญที่สุดในคณิตศาสตร์ ฟังก์ชันใช้อธิบายความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณต่างๆ และปรากฏในทุกสาขาของวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมศาสตร์

4.1.1 นิยามของฟังก์ชัน

นิยาม 4.1.1. ฟังก์ชัน f จากเซต A ไปยังเซต B คือกฎที่กำหนดให้สมาชิกแต่ละตัวใน A สอดคล้องกับสมาชิกเพียงหนึ่งตัวใน B เขียนแทนด้วย $f : A \to B$

เซต A เรียกว่าโดเมน (Domain) และเซต B เรียกว่าโคโดเมน (Codomain) ของฟังก์ชัน

สำหรับ $x \in A$ ค่าที่ฟังก์ชันกำหนดให้แก่ x เรียกว่าภาพ (Image) ของ x แทนด้วย $f(x)$

นิยาม 4.1.2. เซตของค่าภาพทั้งหมดของฟังก์ชัน f เรียกว่าเรนจ์ (Range) ของ f นั่นคือ

$$\text{Range}(f) = \{f(x) \mid x \in A\}$$

ตัวอย่าง 4.1.1. ให้ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ โดย $f(x) = 2x + 3$

หาค่า $f(1)$, $f(-2)$, และ $f(a+1)$

วิธีทำ:

$$\begin{aligned} f(1) &= 2(1) + 3 = 5 \\ f(-2) &= 2(-2) + 3 = -1 \\ f(a+1) &= 2(a+1) + 3 = 2a + 2 + 3 = 2a + 5 \end{aligned}$$

4.1.2 ประเภทของฟังก์ชัน

นิยาม 4.1.3.

1. ฟังก์ชัน $f : A \to B$ เป็นฟังก์ชันเชิงเดี่ยว (One-to-One หรือ Injective) ถ้า $f(x_1) = f(x_2)$ แล้ว $x_1 = x_2$
2. ฟังก์ชัน $f : A \to B$ เป็นฟังก์ชันทั่วถึง (Onto หรือ Surjective) ถ้าสำหรับทุก $y \in B$ มี $x \in A$ ที่ทำให้ $f(x) = y$
3. ฟังก์ชัน $f : A \to B$ เป็นฟังก์ชันสมนัยสอง (Bijective) ถ้าเป็นทั้งเชิงเดี่ยวและทั่วถึง

ตัวอย่าง 4.1.2. พิจารณาฟังก์ชัน $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ โดย $f(x) = x^2$

ฟังก์ชันนี้ไม่เป็นเชิงเดี่ยว เพราะ $f(2) = f(-2) = 4$ แต่ $2 \neq -2$

ฟังก์ชันนี้ไม่ทั่วถึง เพราะไม่มี $x \in \mathbb{R}$ ใดที่ทำให้ $f(x) = -1$

4.1.3 การดำเนินการกับฟังก์ชัน

ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันจาก $\mathbb{R}$ ไป $\mathbb{R}$ เราสามารถนิยามการดำเนินการได้ดังนี้:

นิยาม 4.1.4.

1. $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ (ผลบวกของฟังก์ชัน)
2. $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$ (ผลต่างของฟังก์ชัน)
3. $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ (ผลคูณของฟังก์ชัน)
4. $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ สำหรับ $g(x) \neq 0$ (ผลหารของฟังก์ชัน)

ตัวอย่าง 4.1.3. ให้ $f(x) = x^2 + 1$ และ $g(x) = 2x - 3$ จงหา $(f+g)(x), (f \cdot g)(x)$
วิธีทำ:

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x) + g(x) = (x^2+1) + (2x-3) = x^2 + 2x - 2\\ (f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x) = (x^2+1)(2x-3)\\ &= 2x^3 - 3x^2 + 2x - 3\end{aligned}$$

4.1.4 ฟังก์ชันประกอบ

นิยาม 4.1.5. ให้ $f : A \to B$ และ $g : B \to C$ ฟังก์ชันประกอบของ g กับ f คือ $g \circ f : A \to C$ นิยามโดย

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

ตัวอย่าง 4.1.4. ให้ $f(x) = x^2$ และ $g(x) = 2x + 1$ จงหา $(g \circ f)(x)$ และ $(f \circ g)(x)$
วิธีทำ:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(x^2) = 2(x^2) + 1 = 2x^2 + 1\\ (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(2x+1) = (2x+1)^2 = 4x^2 + 4x + 1\end{aligned}$$

สังเกตว่า $(g \circ f)(x) \neq (f \circ g)(x)$ แสดงว่าการประกอบฟังก์ชันไม่มีสมบัติการสลับที่

4.1.5 ฟังก์ชันผกผัน

นิยาม 4.1.6. ให้ $f : A \to B$ เป็นฟังก์ชันสมนัยสอง ฟังก์ชันผกผัน (Inverse Function) ของ f แทนด้วย $f^{-1} : B \to A$ นิยามโดย

$$f^{-1}(y) = x \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad f(x) = y$$

ทฤษฎีบท 4.1. ฟังก์ชัน f มีฟังก์ชันผกผันก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันสมนัยสอง

ตัวอย่าง 4.1.5. หาฟังก์ชันผกผันของ $f(x) = 2x + 3$
วิธีทำ: ให้ $y = f(x) = 2x + 3$ แล้วแก้หา x จาก y

$$\begin{aligned}y &= 2x + 3\\ y - 3 &= 2x\\ x &= \frac{y-3}{2}\end{aligned}$$

ดังนั้น $f^{-1}(y) = \frac{y-3}{2}$ หรือ $f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$
ตรวจสอบ: $(f \circ f^{-1})(x) = f\left(\frac{x-3}{2}\right) = 2\left(\frac{x-3}{2}\right) + 3 = x$ □

4.2 กราฟของฟังก์ชัน

การแสดงฟังก์ชันด้วยกราฟช่วยให้เห็นภาพรวมของพฤติกรรมของฟังก์ชันได้ชัดเจนยิ่งขึ้น

4.2.1 ระบบพิกัดคาร์ทีเซียน

กราฟของฟังก์ชัน $y = f(x)$ คือเซตของจุดทั้งหมด (x, y) บนระนาบที่สอดคล้องกับ $y = f(x)$

นิยาม 4.2.1. กราฟของฟังก์ชัน f คือเซต

$$\{(x, f(x)) \mid x \in \text{Domain}(f)\}$$

4.2.2 ฟังก์ชันเชิงเส้น

นิยาม 4.2.2. ฟังก์ชันเชิงเส้น (Linear Function) คือฟังก์ชันในรูป

$$f(x) = mx + b$$

โดยที่ m เรียกว่าความชัน (Slope) และ b เรียกว่าจุดตัดแกน y (y-intercept)

กราฟของฟังก์ชันเชิงเส้นเป็นเส้นตรง:

- ถ้า $m > 0$ เส้นตรงมีความชันบวก (ขึ้น)
- ถ้า $m < 0$ เส้นตรงมีความชันลบ (ลง)
- ถ้า $m = 0$ เส้นตรงขนานกับแกน x (ฟังก์ชันคงตัว)

ตัวอย่าง 4.2.1. วาดกราฟของ $f(x) = 2x - 1$
วิธีทำ: หาจุดสองจุดบนกราฟ

- เมื่อ $x = 0$: $f(0) = -1$ ได้จุด $(0, -1)$
- เมื่อ $x = 1$: $f(1) = 1$ ได้จุด $(1, 1)$

ลากเส้นตรงผ่านสองจุดนี้ได้กราฟของฟังก์ชัน ความชันคือ $m = 2$ (บวก) เส้นตรงจึงลาดขึ้น

4.2.3 ฟังก์ชันกำลังสอง

นิยาม 4.2.3. ฟังก์ชันกำลังสอง (Quadratic Function) คือฟังก์ชันในรูป

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

โดยที่ $a \neq 0$ กราฟของฟังก์ชันกำลังสองเรียกว่าพาราโบลา (Parabola)

สมบัติของพาราโบลา:

- ถ้า $a > 0$ พาราโบลาเปิดขึ้น (มีจุดต่ำสุด)
- ถ้า $a < 0$ พาราโบลาเปิดลง (มีจุดสูงสุด)
- จุดยอด (Vertex) อยู่ที่ $\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$
- แกนสมมาตร (Axis of Symmetry) คือเส้นตรง $x = -\frac{b}{2a}$

ตัวอย่าง 4.2.2. หาจุดยอดและวาดกราฟของ $f(x) = x^2 - 4x + 3$

วิธีทำ: เทียบได้ $a = 1, b = -4, c = 3$

จุดยอดอยู่ที่ $x = -\frac{-4}{2(1)} = 2$

$f(2) = 2^2 - 4(2) + 3 = 4 - 8 + 3 = -1$

ดังนั้นจุดยอดคือ $(2, -1)$

หาจุดตัดแกน x: แก้ $x^2 - 4x + 3 = 0$

$$(x-1)(x-3) = 0$$
$$x = 1 \text{ หรือ } x = 3$$

จุดตัดแกน y: $f(0) = 3$

กราฟเป็นพาราโบลาเปิดขึ้น ผ่านจุด $(0, 3)$, $(1, 0)$, $(3, 0)$ และมีจุดยอดที่ $(2, -1)$

4.2.4 การเลื่อนกราฟ

การเปลี่ยนแปลงรูปแบบของฟังก์ชันจะส่งผลต่อตำแหน่งและรูปร่างของกราฟ

ทฤษฎีบท 4.2 (การเลื่อนกราฟ). ให้ $y = f(x)$ เป็นกราฟเดิม และ $c > 0$ แล้ว:

1. $y = f(x) + c$ เลื่อนกราฟขึ้น c หน่วย
2. $y = f(x) - c$ เลื่อนกราฟลง c หน่วย
3. $y = f(x + c)$ เลื่อนกราฟไปทางซ้าย c หน่วย
4. $y = f(x - c)$ เลื่อนกราฟไปทางขวา c หน่วย
5. $y = -f(x)$ สะท้อนกราฟผ่านแกน x
6. $y = f(-x)$ สะท้อนกราฟผ่านแกน y
7. $y = cf(x)$ ยืดกราฟในแนวดิ่ง (ถ้า $c > 1$) หรือหดกราฟ (ถ้า $0 < c < 1$)

ตัวอย่าง 4.2.3. ถ้ากราฟของ $y = x^2$ คือพาราโบลามาตรฐาน จงอธิบายการเปลี่ยนแปลงกราฟต่อไปนี้:

1. $y = x^2 + 3$ เลื่อนขึ้น 3 หน่วย
2. $y = (x - 2)^2$ เลื่อนไปขวา 2 หน่วย
3. $y = -(x + 1)^2 + 4$ เลื่อนไปซ้าย 1 หน่วย สะท้อนผ่านแกน x แล้วเลื่อนขึ้น 4 หน่วย

4.3 ฟังก์ชันพิเศษ

4.3.1 ฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์

นิยาม 4.3.1. ฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์นิยามโดย

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{ถ้า } x \geq 0 \\ -x & \text{ถ้า } x < 0 \end{cases}$$

กราฟของ $y = |x|$ มีรูปร่างเป็น V โดยมีจุดยอดที่จุดกำเนิด $(0, 0)$

ตัวอย่าง 4.3.1. วาดกราฟของ $f(x) = |x - 2| + 1$

วิธีทำ: กราฟนี้ได้จากการเลื่อนกราฟ $y = |x|$ ไปทางขวา 2 หน่วยและขึ้น 1 หน่วย จุดยอดอยู่ที่ $(2, 1)$

4.3.2 ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและลอการิทึม

นิยาม 4.3.2. ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล (Exponential Function) มีรูปแบบ

$$f(x) = a^x$$

โดยที่ $a > 0$ และ $a \neq 1$

สมบัติของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล:

- $a^0 = 1$ สำหรับทุก $a > 0$
- $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$
- $a^{xy} = (a^x)^y$
- $(ab)^x = a^x b^x$

นิยาม 4.3.3. ฟังก์ชันลอการิทึม (Logarithmic Function) เป็นฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล นิยามโดย

$$y = \log_a x \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad a^y = x$$

โดยที่ $a > 0$, $a \neq 1$, และ $x > 0$

สมบัติของลอการิทึม:

- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a a = 1$
- $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
- $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
- $\log_a(x^n) = n \log_a x$
- $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ (การเปลี่ยนฐาน)

ตัวอย่าง 4.3.2. คำนวณค่าต่อไปนี้:

1. $\log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$
2. $\log_5 125 = \log_5 5^3 = 3$
3. $\log_{10} 0.001 = \log_{10} 10^{-3} = -3$
4. $\log_3(9 \cdot 27) = \log_3 9 + \log_3 27 = 2 + 3 = 5$

แบบฝึกหัด 4.1. จงทำแบบฝึกหัดต่อไปนี้:

1. ให้ $f(x) = 3x - 5$ และ $g(x) = x^2 + 2$ หา $(f \circ g)(x)$ และ $(g \circ f)(x)$
2. หาฟังก์ชันผกผันของ $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$
3. หาจุดยอดและวาดกราฟของ $f(x) = -x^2 + 6x - 5$
4. แก้สมการ $\log_2(x+3) + \log_2(x-3) = 4$
5. แก้สมการ $2^{x+1} = 32$

Chapter 5

เมทริกซ์และระบบสมการเชิงเส้น

5.1 เมทริกซ์

เมทริกซ์เป็นเครื่องมือทางคณิตศาสตร์ที่มีประโยชน์อย่างมากในการแก้ระบบสมการเชิงเส้น การแปลงเชิงเส้น และการประยุกต์ใช้ในหลายสาขาวิชา

5.1.1 นิยามของเมทริกซ์

นิยาม 5.1.1. เมทริกซ์ (Matrix) คือตารางสี่เหลี่ยมของจำนวนที่เรียงเป็นแถวและหน่วย เมทริกซ์ขนาด $m \times n$ มี m แถวและ n หลัก เขียนในรูป

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

โดยที่ a_{ij} คือสมาชิกในแถวที่ i หลักที่ j

ตัวอย่าง 5.1.1. ตัวอย่างเมทริกซ์:

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์ขนาด 2×3
2. $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์ขนาด 3×2
3. $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ขนาด 3×3

5.1.2 การบวกและการลบเมทริกซ์

นิยาม 5.1.2. ให้ A และ B เป็นเมทริกซ์ขนาดเดียวกัน $m \times n$ การบวกและการลบเมทริกซ์ทำได้โดยบวกหรือลบสมาชิกที่อยู่ในตำแหน่งเดียวกัน

$$(A \pm B)_{ij} = A_{ij} \pm B_{ij}$$

ตัวอย่าง 5.1.2. ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 1-5 & 2-6 \\ 3-7 & 4-8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}$$

5.1.3 การคูณเมทริกซ์ด้วยสเกลาร์

นิยาม 5.1.3. การคูณเมทริกซ์ A ด้วยสเกลาร์ c ทำได้โดยคูณทุกสมาชิกของเมทริกซ์ด้วย c

$$(cA)_{ij} = c \cdot A_{ij}$$

ตัวอย่าง 5.1.3. ให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ จงหา $3A$

$$3A = 3\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -9 \\ 3 & 12 \end{bmatrix}$$

5.1.4 การคูณเมทริกซ์

นิยาม 5.1.4. ให้ A เป็นเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ และ B เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times p$ ผลคูณ AB เป็นเมทริกซ์ขนาด $m \times p$ โดยที่

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj}$$

หมายเหตุ 5.1.1. การคูณเมทริกซ์ทำได้ก็ต่อเมื่อจำนวนหลักของเมทริกซ์แรกเท่ากับจำนวนแถวของเมทริกซ์ที่สอง

ตัวอย่าง 5.1.4. ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$ จงหา AB

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1(5)+2(7) & 1(6)+2(8) \\ 3(5)+4(7) & 3(6)+4(8) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

หมายเหตุ 5.1.2. การคูณเมทริกซ์โดยทั่วไปไม่มีสมบัติการสลับที่ กล่าวคือ $AB \neq BA$ แม้ว่าทั้งสองจะนิยามได้

5.1.5 เมทริกซ์ทรานสโพส

นิยาม 5.1.5. ทรานสโพส (Transpose) ของเมทริกซ์ A ขนาด $m \times n$ แทนด้วย A^T เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times m$ ที่ได้จากการสลับแถวและหลัก กล่าวคือ

$$(A^T)_{ij} = A_{ji}$$

ตัวอย่าง 5.1.5. ถ้า $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ แล้ว $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

5.1.6 เมทริกซ์ผกผัน

นิยาม 5.1.6. เมทริกซ์จตุรัส A ขนาด $n \times n$ มีเมทริกซ์ผกผัน (Inverse) แทนด้วย A^{-1} ถ้า

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

โดยที่ I_n เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ขนาด $n \times n$

สำหรับเมทริกซ์ 2×2 มีสูตรการหาเมทริกซ์ผกผันดังนี้:

ทฤษฎีบท 5.1. ถ้า $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ และ $\det(A) = ad - bc \neq 0$ แล้ว

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

ตัวอย่าง 5.1.6. หาเมทริกซ์ผกผันของ $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

วิธีทำ: คำนวณดีเทอร์มิแนนต์: $\det(A) = 2(4) - 3(1) = 8 - 3 = 5 \neq 0$

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

ตรวจสอบ: $AA^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ □

5.2 ระบบสมการเชิงเส้น

5.2.1 นิยามและรูปแบบเมทริกซ์

นิยาม 5.2.1. ระบบสมการเชิงเส้น (System of Linear Equations) ประกอบด้วยสมการเชิงเส้นหลายสมการ เช่น

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

ระบบนี้สามารถเขียนในรูปเมทริกซ์ได้เป็น $AX = B$ โดยที่

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

5.2.2 การแก้ระบบสมการโดยการกำจัดแบบเกาส์

วิธีการกำจัดแบบเกาส์ (Gaussian Elimination) เป็นวิธีการพื้นฐานในการแก้ระบบสมการเชิงเส้น โดยใช้การดำเนินการแถวเบื้องต้นเพื่อแปลงเมทริกซ์เสริม (Augmented Matrix) ให้อยู่ในรูปแบบแถวขั้นบันได (Row Echelon Form)

การดำเนินการแถวเบื้องต้นมี 3 ชนิด:

1. สลับแถวสองแถว

2. คูณแถวหนึ่งด้วยค่าคงตัวที่ไม่เป็นศูนย์

3. บวกแถวหนึ่งด้วยผลคูณของแถวอื่น

ตัวอย่าง 5.2.1. แก้ระบบสมการ

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 9 \\ 2x + 4y + 3z &= 21 \\ 3x + y - z &= 4 \end{aligned}$$

วิธีทำ: เขียนเมทริกซ์เสริม

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 2 & 4 & 3 & 21 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right]$$

$R_2 - 2R_1 \to R_2$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right]$$

$R_3 - 3R_1 \to R_3$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & -4 & -23 \end{array}\right]$$

สลับ R_2 กับ R_3:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & -5 & -4 & -23 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

จากแถวที่ 3: $z = 3$
จากแถวที่ 2: $-5y - 4(3) = -23 \Rightarrow -5y = -11 \Rightarrow y = \frac{11}{5}$
จากแถวที่ 1: $x + 2\left(\frac{11}{5}\right) + 3 = 9 \Rightarrow x = 9 - 3 - \frac{22}{5} = \frac{8}{5}$
ดังนั้นคำตอบคือ $x = \frac{8}{5}, y = \frac{11}{5}, z = 3$

5.2.3 การแก้ระบบสมการโดยใช้เมทริกซ์ผกผัน

ถ้าเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ A มีเมทริกซ์ผกผัน ระบบสมการ $AX = B$ สามารถแก้ได้โดย

$$X = A^{-1}B$$

ตัวอย่าง 5.2.2. แก้ระบบสมการโดยใช้เมทริกซ์ผกผัน

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 8 \\ x + 4y &= 9 \end{aligned}$$

วิธีทำ: เขียนในรูปเมทริกซ์: $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \end{bmatrix}$
หาเมทริกซ์ผกผัน: $\det(A) = 2(4) - 3(1) = 5$

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 32 - 27 \\ -8 + 18 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $x = 1$ และ $y = 2$

แบบฝึกหัด 5.1. จงทำแบบฝึกหัดต่อไปนี้:

1. ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ จงหา AB และ BA

2. หาเมทริกซ์ผกผันของ $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

3. แก้ระบบสมการ

$$\begin{aligned} x + y + z &= 6 \\ 2x - y + 3z &= 14 \\ 3x + 2y - z &= 2 \end{aligned}$$

4. จงตรวจสอบว่าเมทริกซ์ $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ มีเมทริกซ์ผกผันหรือไม่

Chapter 6

ลำดับและอนุกรม

6.1 ลำดับ

ลำดับเป็นแนวคิดพื้นฐานที่สำคัญในคณิตศาสตร์ ซึ่งเกี่ยวข้องกับการเรียงลำดับจำนวนตามกฎเกณฑ์ที่กำหนด

6.1.1 นิยามของลำดับ

นิยาม 6.1.1. ลำดับ (Sequence) คือฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวก โดยทั่วไปเขียนในรูป

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

โดยที่ a_n เรียกว่าพจน์ทั่วไป (General Term) ของลำดับ

ตัวอย่าง 6.1.1. ตัวอย่างลำดับต่างๆ:

1. $\{n\}_{n=1}^{\infty} = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ โดยที่ $a_n = n$
2. $\{2^n\}_{n=1}^{\infty} = 2, 4, 8, 16, 32, \ldots$ โดยที่ $a_n = 2^n$
3. $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ โดยที่ $a_n = \frac{1}{n}$
4. $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty} = -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$ โดยที่ $a_n = (-1)^n$

6.1.2 ลำดับเลขคณิต

นิยาม 6.1.2. ลำดับเลขคณิต (Arithmetic Sequence) คือลำดับที่ผลต่างระหว่างพจน์ติดกันเป็นค่าคงตัว เรียกว่าผลต่างร่วม (Common Difference) แทนด้วย d กล่าวคือ

$$a_{n+1} - a_n = d \quad \text{สำหรับทุก } n$$

พจน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิตคือ

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

ตัวอย่าง 6.1.2. พิจารณาลำดับเลขคณิต $3, 7, 11, 15, 19, \ldots$
พจน์แรก $a_1 = 3$ และผลต่างร่วม $d = 7 - 3 = 4$
พจน์ทั่วไปคือ $a_n = 3 + (n-1)(4) = 3 + 4n - 4 = 4n - 1$
พจน์ที่ 10 คือ $a_{10} = 4(10) - 1 = 39$

ทฤษฎีบท 6.1. ผลบวกของ n พจน์แรกของลำดับเลขคณิต (เรียกว่า S_n) คือ

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

ตัวอย่าง 6.1.3. หาผลบวกของ 20 พจน์แรกของลำดับ $5, 9, 13, 17, \ldots$

วิธีทำ: $a_1 = 5, d = 4, n = 20$

หา a_{20}: $a_{20} = 5 + (20-1)(4) = 5 + 76 = 81$

$$S_{20} = \frac{20}{2}(5+81) = 10(86) = 860$$

6.1.3 ลำดับเรขาคณิต

นิยาม 6.1.3. ลำดับเรขาคณิต (Geometric Sequence) คือลำดับที่อัตราส่วนระหว่างพจน์ติดกันเป็นค่าคงตัว เรียกว่าอัตราส่วนร่วม (Common Ratio) แทนด้วย r กล่าวคือ

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = r \quad \text{สำหรับทุก } n$$

พจน์ทั่วไปของลำดับเรขาคณิตคือ

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

ตัวอย่าง 6.1.4. พิจารณาลำดับเรขาคณิต $2, 6, 18, 54, \ldots$

พจน์แรก $a_1 = 2$ และอัตราส่วนร่วม $r = \frac{6}{2} = 3$

พจน์ทั่วไปคือ $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$

พจน์ที่ 7 คือ $a_7 = 2 \cdot 3^6 = 2 \cdot 729 = 1458$

ทฤษฎีบท 6.2. ผลบวกของ n พจน์แรกของลำดับเรขาคณิตคือ

$$S_n = \begin{cases} \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} = \frac{a_1(r^n-1)}{r-1} & \text{ถ้า } r \neq 1 \\ na_1 & \text{ถ้า } r = 1 \end{cases}$$

ตัวอย่าง 6.1.5. หาผลบวกของ 8 พจน์แรกของลำดับ $1, 2, 4, 8, 16, \ldots$

วิธีทำ: $a_1 = 1, r = 2, n = 8$

$$S_8 = \frac{1(2^8-1)}{2-1} = \frac{256-1}{1} = 255$$

6.2 อนุกรม

6.2.1 นิยามของอนุกรม

นิยาม 6.2.1. อนุกรม (Series) คือผลบวกของพจน์ทั้งหมดในลำดับ เขียนแทนด้วย

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

หรือ

$$\sum_{n=1}^{N} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_N$$

สำหรับอนุกรมจำกัด

6.2.2 อนุกรมเรขาคณิตอนันต์

อนุกรมเรขาคณิตอนันต์มีรูปแบบ

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 r^{n-1} = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \cdots$$

ทฤษฎีบท 6.3. อนุกรมเรขาคณิตอนันต์ลู่เข้า (Convergent) ก็ต่อเมื่อ $|r| < 1$ และมีผลบวกเป็น

$$S = \frac{a_1}{1-r}$$

ตัวอย่าง 6.2.1. หาผลบวกของอนุกรม $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$
วิธีทำ: นี่คืออนุกรมเรขาคณิตโดยที่ $a_1 = \frac{1}{2}$ และ $r = \frac{1}{2}$
เนื่องจาก $|r| = \frac{1}{2} < 1$ อนุกรมลู่เข้า

$$S = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$$

ตัวอย่าง 6.2.2. เขียนทศนิยมซ้ำ $0.\overline{27}$ ในรูปเศษส่วน
วิธีทำ: $0.\overline{27} = 0.272727\ldots = 0.27 + 0.0027 + 0.000027 + \cdots$
นี่คืออนุกรมเรขาคณิตโดยที่ $a_1 = 0.27 = \frac{27}{100}$ และ $r = 0.01 = \frac{1}{100}$

$$S = \frac{\frac{27}{100}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{\frac{27}{100}}{\frac{99}{100}} = \frac{27}{99} = \frac{3}{11}$$

ดังนั้น $0.\overline{27} = \frac{3}{11}$

6.2.3 สัญลักษณ์ซิกมา

สัญลักษณ์ $\sum$ (ซิกมา) ใช้แทนการบวก โดยมีรูปแบบ

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n$$

สมบัติของสัญลักษณ์ซิกมา:

1. $\sum_{i=1}^{n} c = nc$ (โดยที่ c คงตัว)
2. $\sum_{i=1}^{n} ca_i = c\sum_{i=1}^{n} a_i$
3. $\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$

สูตรผลบวกที่สำคัญ:

1. $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$
2. $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
3. $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

ตัวอย่าง 6.2.3. คำนวณ $\sum_{i=1}^{10}(2i+3)$

วิธีทำ:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{10}(2i+3) &= \sum_{i=1}^{10}2i + \sum_{i=1}^{10}3 \\ &= 2\sum_{i=1}^{10}i + 10(3) \\ &= 2\cdot\frac{10(11)}{2} + 30 \\ &= 110 + 30 = 140\end{aligned}$$

แบบฝึกหัด 6.1. จงทำแบบฝึกหัดต่อไปนี้:

1. หาพจน์ที่ 15 ของลำดับเลขคณิต $7, 12, 17, 22, \ldots$
2. หาผลบวกของ 25 พจน์แรกของลำดับเลขคณิต $3, 8, 13, 18, \ldots$
3. หาพจน์ที่ 6 ของลำดับเรขาคณิต $5, 15, 45, 135, \ldots$
4. หาผลบวกของอนุกรมอนันต์ $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \cdots$
5. คำนวณ $\sum_{i=1}^{20}(3i-2)$
6. เขียนทศนิยมซ้ำ $0.\overline{45}$ ในรูปเศษส่วน

Chapter 7

การเหนี่ยวนำเชิงคณิตศาสตร์

7.1 หลักการเหนี่ยวนำเชิงคณิตศาสตร์

การเหนี่ยวนำเชิงคณิตศาสตร์เป็นเทคนิคการพิสูจน์ที่ทรงพลังสำหรับข้อความที่เกี่ยวข้องกับจำนวนเต็มบวก

7.1.1 หลักการเหนี่ยวนำแบบธรรมดา

ทฤษฎีบท 7.1 (หลักการเหนี่ยวนำเชิงคณิตศาสตร์). ให้ $P(n)$ เป็นข้อความที่เกี่ยวข้องกับจำนวนเต็มบวก n ถ้า

1. $P(1)$ เป็นจริง (ขั้นฐาน - Base Case)
2. สำหรับทุก $k \geq 1$ ถ้า $P(k)$ เป็นจริงแล้ว $P(k+1)$ เป็นจริง (ขั้นเหนี่ยวนำ - Inductive Step)

แล้ว $P(n)$ เป็นจริงสำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

สมมติฐานว่า $P(k)$ เป็นจริงในขั้นเหนี่ยวนำเรียกว่า สมมติฐานเหนี่ยวนำ (Inductive Hypothesis)

7.1.2 ตัวอย่างการพิสูจน์โดยเหนี่ยวนำ

ตัวอย่าง 7.1.1. พิสูจน์ว่า $1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ สำหรับทุก $n \geq 1$

พิสูจน์:

ขั้นฐาน: ให้ $n = 1$

$$\text{ซ้ายมือ} = 1, \quad \text{ขวามือ} = \frac{1(2)}{2} = 1$$

ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง

ขั้นเหนี่ยวนำ: สมมติว่า $P(k)$ เป็นจริง กล่าวคือ

$$1+2+3+\cdots+k = \frac{k(k+1)}{2}$$

ต้องพิสูจน์ว่า $P(k+1)$ เป็นจริง กล่าวคือ

$$1+2+3+\cdots+k+(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

พิจารณาซ้ายมือ:

$$\begin{aligned} 1+2+\cdots+k+(k+1) &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \quad \text{(ใช้สมมติฐานเหนี่ยวนำ)} \\ &= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \end{aligned}$$

ซึ่งเท่ากับขวามือของ $P(k+1)$ ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง
ตามหลักการเหนี่ยวนำ $P(n)$ เป็นจริงสำหรับทุก $n \geq 1$ □

ตัวอย่าง 7.1.2. พิสูจน์ว่า $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ สำหรับทุก $n \geq 1$

พิสูจน์:
ขั้นฐาน: ให้ $n = 1$

$$\text{ซ้ายมือ} = 1^2 = 1, \quad \text{ขวามือ} = \frac{1(2)(3)}{6} = 1$$

ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง
ขั้นเหนี่ยวนำ: สมมติว่า $P(k)$ เป็นจริง กล่าวคือ

$$1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

ต้องพิสูจน์ $P(k+1)$:

$$\begin{aligned}
1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \\
&= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} \\
&= \frac{(k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)]}{6} \\
&= \frac{(k+1)(2k^2 + k + 6k + 6)}{6} \\
&= \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \\
&= \frac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6}
\end{aligned}$$

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง ตามหลักการเหนี่ยวนำ $P(n)$ เป็นจริงสำหรับทุก $n \geq 1$ □

ตัวอย่าง 7.1.3. พิสูจน์ว่า $2^n > n$ สำหรับทุก $n \geq 1$

พิสูจน์:
ขั้นฐาน: ให้ $n = 1, 2^1 = 2 > 1$ ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง
ขั้นเหนี่ยวนำ: สมมติว่า $2^k > k$ ต้องพิสูจน์ว่า $2^{k+1} > k+1$
พิจารณา:

$$\begin{aligned}
2^{k+1} &= 2 \cdot 2^k \\
&> 2 \cdot k \quad \text{(จากสมมติฐานเหนี่ยวนำ)} \\
&= k + k \\
&\geq k + 1 \quad \text{(เพราะ } k \geq 1\text{)}
\end{aligned}$$

ดังนั้น $2^{k+1} > k+1$ ตามหลักการเหนี่ยวนำ $P(n)$ เป็นจริงสำหรับทุก $n \geq 1$ □

7.1.3 การเหนี่ยวนำเชิงแข็ง

ทฤษฎีบท 7.2 (การเหนี่ยวนำเชิงแข็ง). ให้ $P(n)$ เป็นข้อความที่เกี่ยวข้องกับจำนวนเต็มบวก n ถ้า

1. $P(1)$ เป็นจริง

2. สำหรับทุก $k \geq 1$ ถ้า $P(1), P(2), \ldots, P(k)$ เป็นจริงทั้งหมดแล้ว $P(k+1)$ เป็นจริง

แล้ว $P(n)$ เป็นจริงสำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

แบบฝึกหัด 7.1. จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้โดยใช้การเหนี่ยวนำเชิงคณิตศาสตร์:

1. $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$ สำหรับทุก $n \geq 1$
2. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$ สำหรับทุก $n \geq 1$
3. $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n+1)$ สำหรับทุก $n \geq 1$
4. $3^n > 2n^2$ สำหรับทุก $n \geq 3$
5. $n! > 2^n$ สำหรับทุก $n \geq 4$

Chapter 8

ทฤษฎีบททวินาม

8.1 ทฤษฎีบททวินามและสัมประสิทธิ์ทวินาม

ทฤษฎีบททวินามเป็นเครื่องมือสำคัญในการกระจายกำลังของผลบวกสองพจน์

8.1.1 ค่าแฟกทอเรียลและการจัดหมู่

นิยาม 8.1.1. แฟกทอเรียล (Factorial) ของจำนวนเต็มไม่เป็นลบ n แทนด้วย $n!$ นิยามโดย

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } n = 0 \\ n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 & \text{ถ้า } n \geq 1 \end{cases}$$

นิยาม 8.1.2. สัมประสิทธิ์ทวินาม (Binomial Coefficient) $\binom{n}{r}$ นิยามโดย

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

โดยที่ $0 \leq r \leq n$

8.1.2 สมบัติของสัมประสิทธิ์ทวินาม

สัมประสิทธิ์ทวินามมีสมบัติที่น่าสนใจและมีประโยชน์ในการคำนวณหลายประการ ดังนี้:

ทฤษฎีบท 8.1. สำหรับจำนวนเต็มบวก n และจำนวนเต็ม r ที่ $0 \leq r \leq n$:

1. สมบัติสมมาตร (Symmetry Property):

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

2. เอกลักษณ์ของปาสกาล (Pascal's Identity):

$$\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1}$$

   สมบัตินี้เป็นที่มาของการสร้างสามเหลี่ยมปาสกาล

3. ผลรวมของสัมประสิทธิ์ทวินาม:

$$\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

ตัวอย่าง 8.1.1. จงแสดงว่า $\binom{8}{3} = \binom{8}{5}$

วิธีทำ: จากนิยาม $\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!5!} = \frac{8\times7\times6}{3\times2\times1} = 56$
และ $\binom{8}{5} = \frac{8!}{5!3!} = \frac{8\times7\times6}{3\times2\times1} = 56$
ดังนั้น $\binom{8}{3} = \binom{8}{5}$ ซึ่งสอดคล้องกับสมบัติสมมาตร

8.2 ทฤษฎีบททวินาม

ทฤษฎีบททวินามให้สูตรสำหรับการกระจาย $(x+y)^n$ ในรูปผลบวกของพจน์ที่มีสัมประสิทธิ์ทวินาม

ทฤษฎีบท 8.2 (ทฤษฎีบททวินาม - Binomial Theorem). ให้ x, y เป็นจำนวนจริง และ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

หรือเขียนกระจายได้เป็น

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{n}y^n$$

ตัวอย่าง 8.2.1. จงกระจาย $(a+2b)^4$ โดยใช้ทฤษฎีบททวินาม

วิธีทำ: ให้ $x = a$ และ $y = 2b$ และ $n = 4$

$$\begin{aligned}
(a+2b)^4 &= \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} a^{4-k}(2b)^k \\
&= \binom{4}{0}a^4 + \binom{4}{1}a^3(2b) + \binom{4}{2}a^2(2b)^2 + \binom{4}{3}a(2b)^3 + \binom{4}{4}(2b)^4 \\
&= 1\cdot a^4 + 4\cdot a^3(2b) + 6\cdot a^2(4b^2) + 4\cdot a(8b^3) + 1\cdot(16b^4) \\
&= a^4 + 8a^3b + 24a^2b^2 + 32ab^3 + 16b^4
\end{aligned}$$

8.2.1 การหาพจน์ทั่วไป

ในบางครั้ง เราไม่ต้องการกระจายทั้งพหุนาม แต่ต้องการหาเพียงสัมประสิทธิ์ของพจน์ใดพจน์หนึ่ง เราสามารถใช้สูตรพจน์ทั่วไป (General Term) ได้

นิยาม 8.2.1. พจน์ที่ $k+1$ ของการกระจาย $(x+y)^n$ คือ

$$T_{k+1} = \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

ตัวอย่าง 8.2.2. จงหาสัมประสิทธิ์ของ x^3y^4 ในการกระจาย $(2x-y)^7$

วิธีทำ: ให้พจน์ทั่วไปคือ $T_{k+1} = \binom{7}{k}(2x)^{7-k}(-y)^k$ เราต้องการพจน์ที่มี y^4 ดังนั้นเลือก $k = 4$

$$\begin{aligned}
T_{4+1} &= \binom{7}{4}(2x)^{7-4}(-y)^4 \\
&= \binom{7}{4}(2x)^3y^4 \\
&= \frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}\cdot 8x^3\cdot y^4 \\
&= 35\cdot 8x^3y^4 \\
&= 280x^3y^4
\end{aligned}$$

ดังนั้น สัมประสิทธิ์คือ 280

8.3 แบบฝึกหัดบทที่ 8

1. จงคำนวณค่าของ $\binom{10}{4}$ และ $\binom{12}{9}$
2. จงกระจาย $(x-3)^5$ โดยใช้ทฤษฎีบททวินาม
3. จงหาสัมประสิทธิ์ของ x^5 ในการกระจาย $(x+2)^8$
4. จงหาพจน์กลางของการกระจาย $(2x+\frac{1}{x})^{10}$
5. จงพิสูจน์โดยใช้ทฤษฎีบททวินามว่า $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=0$

บรรณานุกรม

- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2560). *หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4-6*. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว.
- Larson, R., & Hostetler, R. P. (2007). *College Algebra*. 7th ed. Boston: Houghton Mifflin Company.
- Stewart, J., Redlin, L., & Watson, S. (2015). *Algebra and Trigonometry*. 4th ed. Boston: Cengage Learning.
- Rosen, K. H. (2019). *Discrete Mathematics and Its Applications*. 8th ed. New York: McGraw-Hill Education.