Roll No. ....

NP–24415

IV Semester Examination, 2024

B.Sc.

MATHEMATICS

MSC-4 (Real Analysis)

Time : 2.30 Hours] [Maximum Marks : 80

नोट : **खण्ड 'अ'** में 10 अंकों के 10 वस्तुनिष्ठ प्रश्न और 30 अंकों के 10 लघु उत्तरीय प्रश्न करने अनिवार्य हैं।
खण्ड 'ब' में 8 वर्णनात्मक प्रकार के प्रश्न हैं। **50%** आंतरिक विकल्प के साथ प्रत्येक इकाई से दो, प्रत्येक के लिए 10 अंक, कुल 40 अंक हैं।

Note : *Section* ***'A'*** *is compulsory containing 10 objective type questions of 10 marks and 10 short answer type questions of 30 marks.*
Section 'B' *containing 8 descriptive type questions, two from each Unit with* ***50%*** *internal choice, carrying 10 marks for each, total of 40 marks.*

खण्ड—अ

Section—A

1. निम्नलिखित **वस्तुनिष्ठ** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। **10 × 1 = 10**

Answer the following **objective type** questions.

(i) R के लिए lub अभिगृहीत लिखिए।

Write lub axiom for R.

P.T.O.

(ii) माना कि A, R का कोई उपसमुच्चय है एवं α कोई वास्तविक संख्या है। यदि किसी $\varepsilon > 0$ के लिए A में कोई x का अस्तित्व इस प्रकार है कि :

$\alpha - \varepsilon < x \le \alpha$, बताइये कि α क्या है ?

Let A be a subset of R and α be in R. If for any $\varepsilon > 0$, there exists x in A such that :

$\alpha - \varepsilon < x \le \alpha$. What is alpha here ?

(iii) अनुक्रम $\{S_n\}$ की सीमा लिखिए, जहाँ :

$$S_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n}$$

Write the limit of a sequence $\{S_n\}$ where :

$$S_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n}$$

(iv) अनुक्रम $\{S_n\}$ की सीमा उच्चक व सीमा निम्नक लिखिए, जहाँ : $S_n = 1 + (-1)^n$.

What are limit superior and limit interior of the sequence $\{S_n\}$, where : $S_n = 1 + (-1)^n$.

(v) श्रेणी के लिए कौशी के सिद्धांत को लिखिए।

Write Cauchy's criterion for convergence of a series.

(vi) एक प्रतिबन्ध अभिसारी श्रेणी का उदाहरण दीजिए।

Give an example of a series which is conditionally convergent.

(vii) प्रथम मध्यमान प्रमेय के अनुसार $[a, b]$ में परिभाषित एक सतत फलन $f(x)$ के लिए निम्नलिखित का मान लिखिए :

$$\int_a^b f(x)dx.$$

If a function $f(x)$ is continuous on $[a, b]$, then according as first mean value theorem, write the value of :

$$\int_a^b f(x)dx.$$

(viii) यदि f एक रीमान समाकलनीय फलन है, तब $\int f$ व $\int |f|$ के मध्य संबंध को लिखिए।

If f is Riemann integrable over $[a, b]$ then write relation between $\int f$ and $\int |f|$.

(ix) समुच्चय A का संवरक क्या है, जहाँ :

$$A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\ldots\right\} ?$$

What is closure of the set A, where :

$$A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\ldots\right\} ?$$

(x) समुच्चय A का अंतरंग A° क्या होगा, जहाँ :

$$A = [a, b] ?$$

What will be A° (interior of A), where :

$$A = [a, b] ?$$

2. निम्नलिखित लघु उत्तरीय प्रश्नों के उत्तर दीजिए। **10 × 3 = 30**

Answer the following **short snswer type** questions.

(a) सिद्ध कीजिए कि एक विवृत्त अंतराल (a, b) एक विवृत्त समुच्चय है।

Show that an open interval (a, b) is an open subset of R.

(b) वास्तविक संख्याओं के लिए आर्किमिडियन प्रगुण को लिखिए व सिद्ध कीजिए।

State and prove Archemedean property of real numbers.

(c) अनुक्रम $\{S_n\}$, की सीमा प्राप्त कीजिए, जहाँ :

$$S_n = \left[\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \frac{1}{(n+3)^2} + \ldots \frac{1}{(2n)^2}\right]$$

Find the limit of the sequence $\{S_n\}$, where :

$$S_n = \left[\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \frac{1}{(n+3)^2} + \ldots \frac{1}{(2n)^2}\right]$$

(d) अनुक्रम की सीमा प्राप्त कीजिए जिसका nवाँ पद है :

$$\frac{x^n}{n\,!},\ x > 0$$

Find the limit of the sequence whose n^{th} term is :

$$\frac{x^n}{n\,!},\ x > 0$$

(e) यदि एक श्रेणी Σu_n अभिसारी है, तब दिखाइये कि u_n की सीमा 0 है, जब $n \to \infty$.

If a series Σu_n is convergent, then show that limit of u_n is 0 as $n \to \infty$.

(f) श्रेणी की अभिसारिता का परीक्षण कीजिए जिसका nवाँ पद है : $\left(1+\frac{1}{n}\right)n^2$.

Test the convergence of a series whose n^{th} term is : $\left(1+\frac{1}{n}\right)n^2$

(g) अन्तराल $[a, b]$ में निम्नलिखित फलन के उच्च रीमान समाकल का मान लिखिए :

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ यदि } x \text{ परिमेय है} \\ 2, \text{ यदि } x \text{ अपरिमेय है} \end{cases}$$

Evaluate upper Riemann integral on $[a, b]$ of the function :

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ if } x \text{ is rational} \\ 2, \text{ if } x \text{ is irrational} \end{cases}$$

(h) यदि $f(x)$ अन्तराल $[a, b]$ में परिबद्ध है व फलन के उच्चक व निम्नक M, m हैं, तब किसी विभाजन P के लिए दिखाइये कि :

$$m(b-a) \leq L(p, f) \leq U(p, f) \leq M(b-a)$$

If f is bounded on $[a, b]$ and M, m are supermum and infimum of f on $[a, b]$, then for any partition P of $[a, b]$ show that :

$$m(b-a) \leq L(p, f) \leq U(p, f) \leq M(b-a)$$

(i) विषम समाकल की अभिसारिता का परीक्षण कीजिए :

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^n} dx, \; n > 0$$

Test convergence of the improper integral :

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^n} dx, \; n > 0$$

(j) विषम समाकल की परिभाषा का परीक्षण कीजिए :

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$$

Test for convergence of the improper integral :

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$$

खण्ड—ब

Section—B

नोट : प्रत्येक इकाई से किसी **एक** प्रश्न का उत्तर दीजिए। **4×10=40**

Note : *Attempt any* **one** *question from each Unit.*

इकाई–I

Unit–I

3. (अ) बोल्जानो–वाइस्ट्रॉस प्रमेय को लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

State and prove Bolzano-Weirstrass theorem.

(ब) सिद्ध कीजिए कि परिमेय संख्याओं का समुच्चय Q पूर्ण नहीं है।

Prove that the set of all rational numbers Q is not complete.

4. (अ) सिद्ध कीजिए कि R में विवृत्त समुच्चयों का परिमित सर्वनिष्ठ भी विवृत्त है।

Prove that finite intersection of open subsets of R is an open set.

(ब) सिद्ध कीजिए कि R में एक संवृत्त समुच्चय अपने सभी सीमा बिन्दुओं को रखता है।

Prove that a closed subset of R contains all its limit points.

इकाई–II

Unit–II

5. (अ) अनुक्रमों की अभिसारिता पर सैण्डविच प्रमेय को लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

State and prove Sandwich theorem on convergence of sequences.

(ब) सिद्ध कीजिए कि वास्तविक संख्याओं का प्रत्येक अभिसारी अनुक्रम कौशी है।

Prove that every convergent sequence of real numbers is Cauchy.

6. (अ) सिद्ध कीजिए कि एक एकदिष्ट अनुक्रम जो उपरि परिबद्ध है, अभिसारी होता है।

Show that a monotonic increasing sequence which is bounded above is convergent.

(ब) सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक अभिसारी अनुक्रम परिबद्ध है।

Prove that every convergent sequence is bounded.

इकाई–III

Unit–III

7. (अ) श्रेणी की अभिसारिता का परीक्षण कीजिए जिसका nवाँ पद है :

$$u_n = \frac{n^2-1}{n^2+1}x^n, x>0$$

Test the convergence of the series whose n^{th} term is :

$$u_n = \frac{n^2-1}{n^2+1}x^n, x>0$$

(ब) सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक निरपेक्ष अभिसारी श्रेणी अभिसारी है।

Prove that every absolutely convergent series is convergent.

8. (अ) निम्नलिखित श्रेणी की अभिसारिता का परीक्षण कीजिए :

$$\sum\{(n^3+1)^{1/3}-n\}$$

Test for convergence of the following series :

$$\sum\{(n^3+1)^{1/3}-n\}$$

(ब) श्रेणी की अभिसारिता के लिए परीक्षण कीजिए :

$$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{1+\alpha}{1+\beta}+\frac{(1+\alpha)(2+\alpha)}{(1+\beta)(2+\beta)}+\ldots\ldots(\alpha,\ \beta>0)$$

Test for convergence of the series :

$$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{1+\alpha}{1+\beta}+\frac{(1+\alpha)(2+\alpha)}{(1+\beta)(2+\beta)}+\ldots\ldots(\alpha,\ \beta>0)$$

इकाई–IV

Unit–IV

9. (अ) कलन के आधारभूत प्रमेय को लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

State and prove the fundamental theorem of calculus.

(ब) सिद्ध कीजिए अंतराल $[a, b]$ में परिभाषित एक सतत फलन रीमान समाकलनीय है।

Prove that a continuous function defined on $[a, b]$ is Riemann integrable.

10. सिद्ध कीजिए कि $[a, b]$ में परिभाषित एक परिबद्ध फलन f रीमान समाकलनीय है यदि और केवल यदि प्रत्येक $\varepsilon > 0$ के लिए एक विभाजन P का अस्तित्व इस प्रकार है कि :

$$U(P, f) - L(P, f) < \varepsilon.$$

Prove that a bounded function f defined on $[a, b]$ is Riemann integrable if and only if for any $\varepsilon > 0$, there exists a partition of $[a, b]$ such that

$$U(P, f) - L(P, f) < \varepsilon.$$

✱ ✱ ✱ ✱ ✱ E ✱ ✱ ✱ ✱ ✱