Sajal Parate

Roll No. 2208077

NC—25518

B.Sc. (V Semester) Examination, 2025

MATHEMATICS

MSC-05

(Linear Algebra)

Time : 3 Hours] [Maximum Marks : 80

नोट : खण्ड-अ अनिवार्य है जिसमें **दस** वस्तुनिष्ठ प्रश्न हैं जोकि 10 अंक के हैं तथा **दस** लघु उत्तरीय प्रश्न जिनके 30 अंक हैं। खण्ड-ब में **आठ** वर्णनात्मक प्रकार के प्रश्न 50% आंतरिक विकल्प के साथ हैं, प्रत्येक प्रश्न 10 अंक का है, कुल अंक 40 हैं।

Note : *Section 'A' is compulsory containing 10 objective types questions of 10 marks and 10 short answer type questions of 30 marks. Section 'B' containing 8 descriptive type questions with 50% internal choice, carrying 10 marks for each, total of 40 marks.*

खण्ड 'अ' (Section 'A') **$1 \times 10 = 10$**

1. निम्नलिखित वस्तुनिष्ठ प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

Answer the following objective questions :

P.T.O.

(i) यदि R व C क्रमश: वास्तविक एवं समिश्र राशियों के क्षेत्र को निरूपित करते हैं, तो बताइए C(R), R(C), R(R), C(C) में कौन सदिश समष्टि नहीं बनाता है।

If R & C are field of real and complex numbers then which of this space is not a vector space among C(R), R(C), R(R) and C(C).

(ii) यदि V(F) कोई सदिश समष्टि है तथा W_1 तथा W_2 उसके उपसमष्टि हैं, तो वह शर्त लिखिए, जिससे $W_1 \cup W_2$ भी V(F) का एक उपसमष्टि होगा।

If W_1 and W_2 are subspaces of vector space V(F), then write the condition that $W_1 \cup W_2$ is also a subspace of V(F).

(iii) एक समुच्चय जिसमें केवल एक शून्येत्तर सदिश होगा, वह रैखिकत: .... होगा।

A set which contains only one non-zero vector is linearly ....

(iv) यदि V(F) कोई परिमित विमीय सदिश समष्टि है, जिसका W कोई एक परिमित विमीय उपसमष्टि V है, तब

$$\text{विमा } \frac{V}{W} = ?$$

If V(F) is a finite dimensional vector space and W is a finite dimensional subspace of V then

$$\dim\left(\frac{V}{W}\right) = ?$$

(v) यदि $T : U \to V$ रैखिक प्रतिचित्रण है, तो R(T) (T का परिसर) किस समष्टि का उपसमष्टि होगा ?

If $T : U \to V$ is a linear transformation, then R(T) (Range of T) is a subspace of which space ?

(vi) कोटि-शून्यता प्रमेय का कथन लिखिए।

Write the statement of Rank-Nullity theorem.

(vii) यदि A एक विकर्णीय $n \times n$ वर्ग आव्यूह है, तब $V_n(F)$ में A के n आइगन सदिश रैखिकत: .... होंगे।

If A is a diagonalizable $n \times n$ square matrix, then, n eigenvector of A in $V_n(F)$ are linearly .... ?

(viii) त्रिकोणीय असमिका प्रमेय का कथन लिखिए।

Write the statement of triangular inequality theorem.

(ix) प्रसामान्य लांबिक समुच्चय को परिभाषित कीजिए।

Define orthonormal set.

(x) यदि V(F), x में बहुपदों का एक सदिश समष्टि है, जिसके आंतर गुणनफल $(p, q) = \int_0^1 p(x)\, q(x)\, dx$ से परिभाषित है, जहाँ $p(x) = x + 2$, तब $\| p \|$ का मान ज्ञात कीजिए।

If V(F) is a vector space of polynomials in x, then inner product defined by $(p, q) = \int_0^1 p(x)\, q(x)\, dx$ where $p(x) = x + 2$ then find $\| p \|$.

2. निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए (लघु उत्तरीय प्रश्न)

$3 \times 10 = 30$

Answer the following questions (Short Answer Type Questions) :

(a) यदि W_1 व W_2 सदिश समष्टि V(F) के उपसमष्टि है, तो सिद्ध कीजिए, $W_1 \cap W_2$ भी V(F) का सदिश उपसमष्टि होगा।

If W_1 & W_2 are subspace of vector space V(F) then prove that $W_1 \cap W_2$ is also a subspace of V(F).

(b) जाँच कीजिए कि सदिश $\alpha_1 = (1, 2, 3)$, $\alpha_2 = (1, 0, 1)$ और $\alpha_3 = (0, 1, 0)$ रैखिकत: स्वतन्त्र है या नहीं।

Test for the linear independency of vector $\alpha_1 = (1, 2, 3)$, $\alpha_2 = (1, 0, 1)$ and $\alpha_3 = (0, 1, 0)$.

(c) सिद्ध कीजिए कि सदिश समष्टि V(F) के दो आधारों में अवयवों की संख्या समान होती है।

Prove that the number of elements in two bases of vector space V(F) are same.

(d) दिखाइए कि प्रतिचित्रण $f : V_3(F) \to V_2(F)$ जो $F(a_1, a_2, a_3) = (a_1, a_2)$ से परिभाषित हो, तो $V_3(F)$ आच्छादक $V_2(F)$ की समाकारिता है।

Show that the mapping $f : V_3(F) \to V_2(F)$ is a onto homomorphism if defined by $f(a_1, a_2, a_3) = (a_1, a_2)$

(e) माना कि रैखिक रूपान्तरण $T : V_2(R) \to V_3(R)$ में $T(a, b) = (a + b, a - b, b)$ से परिभाषित है, तो T की शून्य समष्टि एवं परास समष्टि ज्ञात कीजिए।

If $T : V_2(R) \to V_3(R)$ is defined by $T(a, b) = (a + b, a - b, b)$ then find the kernel space and range space of T.

(f) रैखिक प्रतिचित्रण के अभिलाक्षणिक मान एवं अभिलाक्षणिक सदिश को परिभाषित कीजिए।

Define the characteristic values and characteristic vector of any linear transformation.

(g) सिद्ध कीजिए–

$$\| a\alpha \| = | a | \, \| \alpha \|$$

P.T.O.

Prove that :

$$\| a\alpha \| = | a | \, \| \alpha \|$$

(h) यदि V(F), x में बहुपदों का सदिश समष्टि है, जहाँ आन्तर गुणनफल $(p, q) = \int_0^1 p(x)\, q(x)\, dx$ से परिभाषित है। यदि $p(x) = x + 2$, $q(x) = x^2 - 2x - 3$ है, तो (p, q) का मान ज्ञात कीजिए।

If V(F) is a vector space of polynomial in x where (p, q) defined by $\int_0^1 p(x)\, q(x)\, dx$. If $p(x) = x + 2$, $q(x) = x^2 - 2x - 3$, then find (p, q).

(i) $V_4(R)$ के सदिशों $\alpha = (4, 3, 1, -2)$ और $\beta = (-2, 1, 2, 3)$ के मध्य कोण ज्ञात कीजिए।

Find the angle between vectors $\alpha = (4, 3, 1, -2)$ and $\beta = (-2, 1, 2, 3)$ in $V_4(R)$.

(j) बेसल असमिका का कथन लिखिए।

Write the statement of Bessel's inequality.

खण्ड 'ब' (Section 'B') $10 \times 4 = 40$

नोट : प्रत्येक इकाई से एक प्रश्न हल कीजिए।

Attempt *one* question from each unit.

इकाई-I (Unit-I)

3. सिद्ध कीजिए कि सदिश समष्टि V(F) का एक अरिक्त उपसमुच्चय W सदिश उपसमष्टि होगा, यदि और केवल यदि $\forall\, \alpha, \beta \in W$ और $a, b \in F \Rightarrow a\alpha + b\beta \in W$

Prove that for a non-empty set W will be a subspace of vector space V(F) if and only if $\forall\, \alpha, \beta \in W$ and $a, b \in F \Rightarrow a\alpha + b\beta \in W$

अथवा / OR

यदि W_1 व W_2 सदिश समष्टि V(F) के उपसमष्टि हैं, तो सिद्ध कीजिए–

विमा $(W_1 + W_2)$ = विमा W_1 + विमा W_2 – विमा $(W_1 \cap W_2)$

If W_1 and W_2 be the subspace of vector space V(F) then :

$$\dim (W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim (W_1 \cap W_2)$$

इकाई-II (Unit-II)

4. सदिश समष्टि समाकारिता का मूलभूत प्रमेय लिखिए और सिद्ध कीजिए।

State and prove the fundamental theorem of homomorphism of vectors space.

अथवा / OR

कोटि-शून्यता प्रमेय का कथन लिखकर सिद्ध कीजिए।

State and prove the Rank-Nullity theorem.

इकाई-III (Unit-III)

5. दिखाइए कि आव्यूह A विकर्णनीय है, जबकि

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Show that the matrix A is diagonalizable :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

अथवा / OR

(a) सिद्ध कीजिए कि T के निम्न अभिलाक्षणिक मानों के संगत भिन्न-भिन्न शून्येतर अभिलाक्षणिक सदिशों का समुच्चय रैखिकतः स्वतन्त्र होगा।

Prove that the set of different non-zero characteristic vectors corresponding to different characteristic values are linearly independent.

(b) कैली-हैमिल्टन प्रमेय को लिखकर सिद्ध कीजिए।

State and prove Caley-Hemilton theorem.

इकाई-IV (Unit-IV)

6. (i) कॉशी-स्वार्ज असमिका लिखिए व सिद्ध कीजिए।

State and prove Cauchy-Schwarz's Inequality.

(ii) समानान्तर चतुर्भुज का नियम लिखिए व सिद्ध कीजिए।

State and prove parallelogram law.

अथवा / OR

ग्राम-स्मिट के लांबिक प्रक्रम का उपयोग कर $V_3(R)$ के आधार $B = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ से एक प्रसामान्य लांबिक आधार प्राप्त कीजिए, जहाँ

$$\beta_1 = (1, 0, 1), \beta_2 = (1, 0, -1), \beta_3 = (0, 3, 4)$$

Find the orthonormal basis of $B = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ of V_3 (R) by Gram-Schmidt orthogonalization process, where

$$\beta_1 = (1, 0, 1), \beta_2 = (1, 0, -1), \beta_3 = (0, 3, 4)$$

★ ★ ★ ★ ★ E ★ ★ ★ ★ ★