

CC/22107

Roll No.2208077

I Semester Examination, 2022-23

**B.Sc./B.C.A.
MATHEMATICS
(Calculus)**

Time.: 3 Hours]

[Maximum Marks : 80

सामान्य निर्देश : (i) प्रश्न-पत्र खण्ड 'अ', 'ब' एवं 'स' में विभाजित है। (ii) खण्ड 'अ' के सभी प्रश्न अनिवार्य हैं। जिसमें 8 अंक के 8 वस्तुनिष्ठ प्रकार के प्रश्न और 12 अंक के 4 अति लघु उत्तरीय प्रकार के प्रश्न हैं। (iii) खण्ड 'ब' में इकाईवार 4 लघु उत्तरीय प्रकार के प्रश्न आन्तरिक चयन के साथ प्रत्येक 5 अंक का है (iv) खण्ड 'स' में भी इकाईवार 4 दीर्घ उत्तरीय प्रकार के प्रश्न आन्तरिक चयन के साथ प्रत्येक 10 अंक का है।

General Instructions: (i) Question paper divided into Sections 'A', 'B' and 'C'. (ii) Section 'A' is compulsory containing 8 objective type questions of 8 marks. And 4 very short answer type questions of 12 marks. (iii) Section 'B' Unitwise containing 4 short answer type questions with internal choice carrying 5 marks each. (iv) Section 'C' also Unitwise containing 4 long answer type questions with internal choice carrying 10 marks of each.

खण्ड 'अ'

Section 'A'

1. निम्नांकित वस्तुनिष्ठ प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

Answer the following objective type questions :

8 × 1 = 8

P.T.O.

(2)

(i) अनुक्रम क्या है?

What is a Sequence ?

(ii) अपने असांतत्य को परिभाषित कीजिए।

✓ Define removable discontinuity.

(iii) लाइबनिज प्रमेय का कथन लिखिए।

✓ Write statement of Leibnitz's theorem.

(iv) किस प्रतिस्थापन के द्वारा टेलर का प्रमेय मैकलाउरिन प्रमेय में परिवर्तित हो जाता है?

By what substitution Taylor's theorem

✓ reduces to Maclaurin's theorem ?

(v) नैज समीकरण क्या होता है?

✓ What is intrinsic equation ?

(vi) नति परिवर्तन बिन्दु क्या होता है?

What is point of inflexion ?

(vii) समघात फलन क्या होता है?

✓ What is a homogeneous function ?

(viii) स्वतन्त्र चर को परतन्त्र चर में परिवर्तित करते हुये $\frac{d^2y}{dx^2}$ को लिखिए।

Write $\frac{d^2y}{dx^2}$ by changing independent variable into dependent variable.

CC/22107

(3)

2. निम्नांकित अति लघु उत्तरीय प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

Answer the following very short answer type questions : 4 × 3 = 12

(i) यदि x और y के प्रत्येक मान के लिये $f(x+y) = f(x)f(y)$, $f(5) = 2$ और $f'(0) = 3$ तो $f'(5)$ का मान ज्ञात कीजिए।

If for each value of x and y $f(x+y) = f(x)f(y)$, $f(5) = 2$ and $f'(0) = 3$ then find value of $f'(5)$.

(ii) $\cos^4 x$ का n वाँ गुणांक ज्ञात कीजिए।

Find n th differential coefficient of $\cos^4 x$.

✓ (iii) सिद्ध कीजिए कि कैटेनरी $y = c \cosh \frac{x}{c}$ के बिन्दु (x, y) पर वक्रता त्रिज्या $\frac{y^2}{c}$ है?

Prove that radius of curvature at point (x, y) of catenary $y = c \cosh \frac{x}{c}$ is $\frac{y^2}{c}$.

(iv) यदि $u = x^2 + y^2 + z^2$, तो सिद्ध कीजिए :

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = 2u$$

✓ If $u = x^2 + y^2 + z^2$, then prove that :

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = 2u$$

CC/22107

P.T.O.

(4)

खण्ड 'ब'

Section 'B'

3. निम्नांकित लघु उत्तरीय प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

Answer the following short answer type questions : $4 \times 5 = 20$

इकाई-I / Unit-I

(ii) ϵ - δ विधि से सिद्ध कीजिए कि :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x^2 + 8} = 3 \quad x^2 + 9 = 9$$

Using ϵ - δ method, prove that :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x^2 + 8} = 3 \quad x^2 + 9 = 9$$

अथवा / Or

अन्तराल $I \subseteq R$ पर परिभाषित फलन f बिन्दु $c \in I$ पर सतत् होता है। यदि और केवल यदि I के बिन्दुओं को प्रत्येक अनुक्रम $\{c_n\}$ जो c पर अभिसरित होती है के लिये $\lim_{n \rightarrow \infty} f(c_n) = f(c)$ हो।

A function f defined on an interval $I \subseteq R$ is continuous at a point $c \in I$ if and only if for every sequence $\{c_n\}$ of points in I converging to c , we have $\lim_{n \rightarrow \infty} f(c_n) = f(c)$.

CC/22107

(5)

इकाई-II / Unit-II

(iii) $2x^3 + 7x^2 + x - 1$ को $(x - 2)$ की घातों में टेलर प्रमेय से प्रसारित कीजिए।Using Taylor's theorem expand $2x^3 + 7x^2 + x - 1$ in powers of $(x - 2)$.

अथवा / Or

मध्यमान प्रमेय की सहायता से सिद्ध कीजिए कि :

$$1 + x < e^x < 1 + xe^x$$

With the help of mean-value theorem, prove that :

$$1 + x < e^x < 1 + xe^x$$

इकाई-III / Unit-III

(iii) वक्र $y^3 - xy^2 - x^2y + x^3 + x^2 - y^2 - 1 = 0$ की अनन्त स्पर्शियाँ ज्ञात कीजिए।✓ Find asymptotes of the curve $y^3 - xy^2 - x^2y + x^3 + x^2 - y^2 - 1 = 0$.

अथवा / Or

यदि हृदयाभ $r = a(1 + \cos \theta)$ की ध्रुव से जाने वाली जीवा के सिरों पर वक्रता त्रिज्यायें ρ_1, ρ_2 हो तो सिद्ध कीजिए कि $q(\rho_1^2 + \rho_2^2) = 16a^2$

CC/22107

P.T.O.

(6)

If ρ_1, ρ_2 be radii of curvature of the cardioid $r = a(1 + \cos \theta)$ at the extremities of chord passing through pole, then prove that $\rho_1^2 + \rho_2^2 = 16a^2$.

इकाई-IV / Unit-IV

(iv) दर्शाइये कि $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{अन्यथा} \end{cases}$

से परिभाषित फलन $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(0, 0)$ पर सतत् है।

✓ Show that the function $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ defined

by $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$ is

continuous at $(0, 0)$.

अथवा / Or

परवलय $y = x^2$ एवं रेखा $y = x$ के मध्य के क्षेत्रफल पर $\iint_R xy(x + y) dx dy$ का मूल्यांकन कीजिए।

Evaluate $\iint_R xy(x + y) dx dy$ over the areas between the parabola $y = x^2$ and the line $y = x$.

CC/22107

(7)

खण्ड 'स'

Section 'C'

3. निर्माकित दीर्घ उत्तरीय प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

Answer the following long answer type questions : 4 × 10 = 40

इकाई-I / Unit-I

(i) सतत् फलन के लिये बोरेल प्रमेय को लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

✓ State and prove Borel's theorem for continuous function.

अथवा / Or

(a) सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक अवकलनीय फलन सतत् होता है, परन्तु इसका विलोम सत्य नहीं है।

Prove that every differentiable function is continuous, but the converse is not always true.

(b) दर्शाइये कि फलन $f(x) = \begin{cases} x \frac{e^{1/x} - e^{-1/x}}{e^{1/x} + e^{-1/x}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

$x = 0$ पर अवकलनीय नहीं है?

CC/22107

P.T.O.

(8)

Show that the function

$$f(x) = \begin{cases} x \frac{e^{1/x} - e^{-1/x}}{e^{1/x} + e^{-1/x}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}, \text{ is not}$$

differentiable at $x = 0$.

इकाई-II / Unit-II

- (ii) टेलर प्रमेय (शेषफल के लैंग्रेज रूप के साथ) को लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

✓ State and prove Taylor's theorem (with Lagrange's form of remainder).

अथवा / Or

यदि $y = \sin(\mu \sin^{-1} x)$, तो दर्शाइये कि $(1 - x^2)y_{n+2} - (2n + 1)xy_{n+1} - (n^2 - \mu^2)y_n = 0$ और $(y_n)_0$ का मान भी ज्ञात कीजिए।

If $y = \sin(\mu \sin^{-1} x)$, then show that $(1 - x^2)y_{n+2} - (2n + 1)xy_{n+1} - (n^2 - \mu^2)y_n = 0$ and find value of $(y_n)_0$.

इकाई-III / Unit-III

- (iii) निम्नलिखित को समझाइए :

(a) द्विक बिन्दु

(b) नोड

CC/22107

(9)

(c) कस्प

(d) संयुग्मी बिन्दु

(e) मूल बिन्दु पर स्पर्श रेखाएँ

Explain the following :

(a) Double Point

(b) Node

(c) Cusp

(d) Conjugate Point

(e) Tangents at origin

अथवा / Or

✓ वक्र $xy^2 = 4a^2(2a - x)$ का अनुरेखण कीजिए।

Trace the curve $xy^2 = 4a^2(2a - x)$.

इकाई-IV / Unit-IV

- (iv) (a) आइलर प्रमेय को लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

✓ State and prove Euler's theorem.

(b) प्रतिस्थापन $x = \frac{1}{z}$ द्वारा समीकरण

$$x^4 \frac{d^2y}{dx^2} + 2x^3 \frac{dy}{dx} + x^2y = 0 \text{ को रूपान्तरित कीजिए।}$$

CC/22107

P.T.O.

(10)

Transform the equation

$$x^4 \frac{d^2 y}{dx^2} + 2x^3 \frac{dy}{dx} + x^2 y = 0 \quad \text{by the}$$

substitution $x = \frac{1}{z}$.

अथवा / Or

$\iiint_V (x + y + z) dx dy dz$ का मूल्यांकन कीजिए,

जब क्षेत्र V , $(x + y + z) = a$ ($a > 0$), $x = 0$, $y = 0$,
 $z = 0$ द्वारा परिबद्ध हैं?

Evaluate $\iiint_V (x + y + z) dx dy dz$, when the

region V is bounded by $x + y + z = a$ ($a > 0$),
 $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

*****E*****