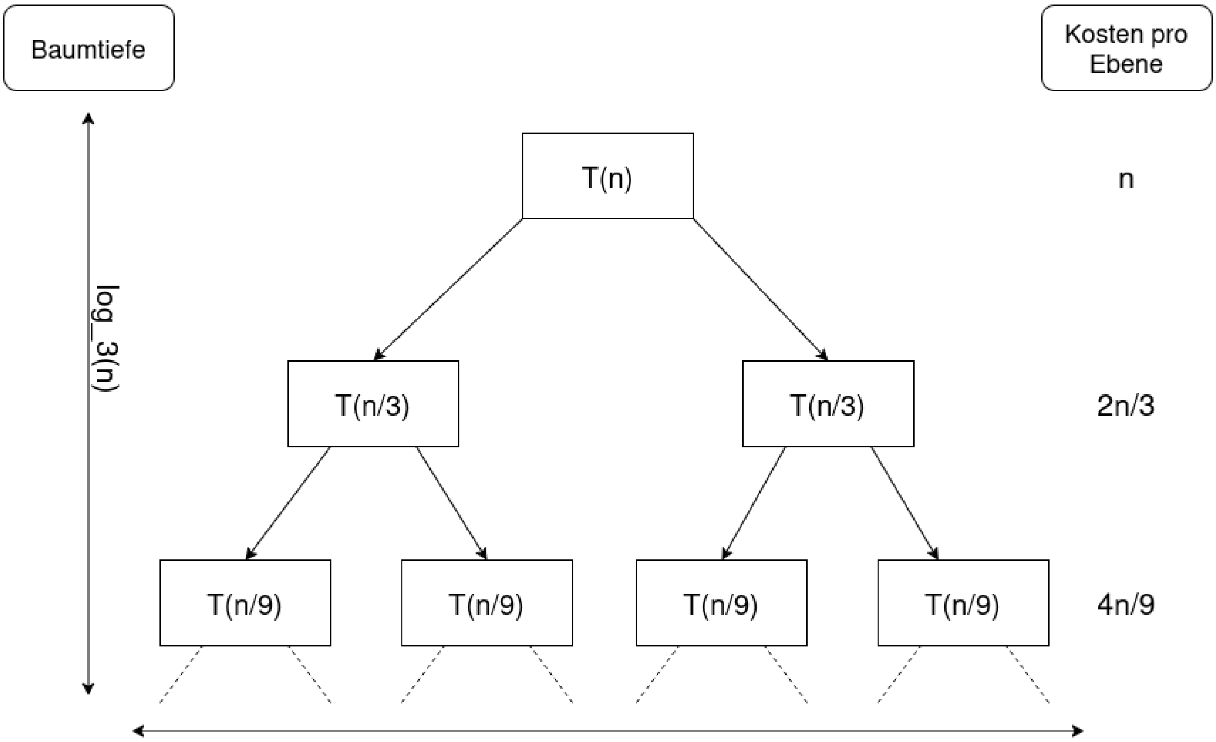
12.3

Zu Beginn haben wir n Pokémons zu sortieren. In jedem Schritt i werden $\frac{i}{3}$ der Pokémon sortiert. Damit verbleiben 2 verbleibende zu sortierende Teilprobleme. Also ergibt sich die Rekursionsgleichung:

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{3}\right)$$

Wir nehmen hier an, dass $T(1) \in \Theta(1)$.

Jetzt wollen wir den Rekursionsbaum anhand der Informationen aufmalen:



$$\text{Anzahl Blätter: } 2^{\log_3(n)} = n^{\log_3(2)}$$

Wenn wir die Gesamtkosten berechnen wollen, dann müssen wir über alle Ebenen die Kosten pro Ebene summieren. Schließlich addieren wir die Kosten für alle Blätter. Das ergibt folgende Gleichung:

$$\left(\sum_{i=0}^{\log_3(n-1)} \left(\frac{2}{3}\right)^i \cdot n\right) + T(0) \cdot n^{\log_3(2)}$$

Mit $T(1) = \Theta(1)$ erhalten wir

$$\left(\sum_{i=0}^{\log_3(n-1)} \left(\frac{2}{3}\right)^i \cdot n\right) + o(n)$$

Jetzt ziehen wir n aus der Summe:

$$n \cdot \left(\sum_{i=0}^{\log_3(n-1)} \left(\frac{2}{3}\right)^i\right) + o(n)$$

Diesen Term können wir abschätzen:

$$n \cdot \left(\sum_{i=0}^{\log_3(n-1)} \left(\frac{2}{3}\right)^i \right) + o(n) < n \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^i \right) + o(n)$$

Jetzt haben wir die geometrische Reihe, welche wir (wie gegeben) abschätzen können:

$$n \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^i \right) + o(n) < n \cdot \left(\frac{1}{1-\frac{2}{3}} \right) + o(n)$$

Damit erhalten wir:

$$n \cdot 3 + o(n)$$

Also gilt insgesamt, dass $T(n) \in O(n)$.