Opg II.1 – 1

$h \sim e$ betyder $\exists g : h = g e g^{-1}$, men
$g e g^{-1} = e \quad \forall g \in G$, dvs $h = e$

Derfor består ækvivalensklassen kun af e selv.

opg 2

$h \sim a$ betyder $\exists g : h = g a g^{-1}$, men
$g a g^{-1} = a \quad \forall g \in G$

Derfor består ækvivalensklassen der indeholder a kun af a selv.

opg 4

De 5 klasser i S_4:

A	$\{I\}$	1
B	$\{(12), (13), (14), (23), (24), (34)\}$	6
C	$\{(12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$	3
D	$\{(123), (132), (124), (142), (134), (143), (234), (243)\}$	8
E	$\{(1234), (1342), (1423), (1324), (1243), (1432)\}$	6
		24

$\chi(g) = \#$ Fixpunkter: $A = 4$, $B = 2$, $C = 0$, $D = 1$, $E = 0$ $\qquad 1 \cdot 4 + 6 \cdot 2 + 8 \cdot 1 = 24$

Vi kan også bruge matrix rep. af S_4 og tage et element fra $A, \dots, E$

opg II.1-4 fortsat

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$I : X_i \to X_i \quad \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} : \quad \mathrm{Tr}\, I = 4$$

$$(12) : \begin{pmatrix} X_1 X_2 X_3 X_4 \\ X_2 X_1 X_3 X_4 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \mathrm{Tr}\,(12) = 2$$

$$(12)(34) : \begin{pmatrix} X_1 X_2 X_3 X_4 \\ X_2 X_1 X_4 X_3 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathrm{Tr}\,(12)(34) = 0$$

$$(123) : \begin{pmatrix} X_1 X_2 X_3 X_4 \\ X_2 X_3 X_1 X_4 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \mathrm{Tr}\,(123) = 1$$

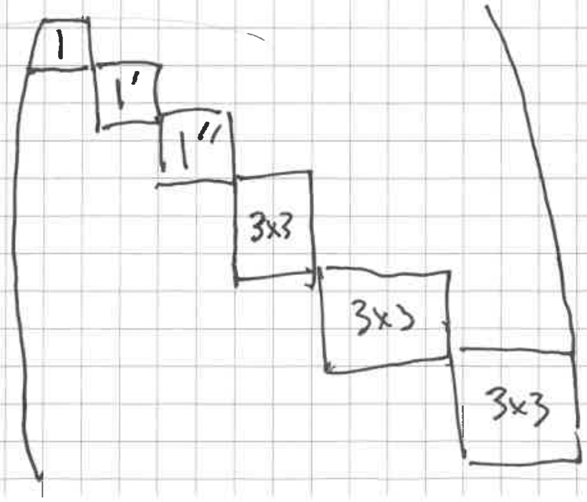
$$(1234) : \begin{pmatrix} X_1 X_2 X_3 X_4 \\ X_2 X_3 X_4 X_1 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} : \mathrm{Tr}\,(1234) = 0.$$

---

opg II.3-1

regular 4 dimensional repr.
MISPRINT: reg. repr of A_4
har dim = 12, def. repr dim 4

Vi ved den regulære rep. har struktur:



for de fire repr: (irreps)
$1, 1', 1'', 3$
(se (15) p. 121)

$n_r = d_r$ for de
irreducible repr.

Opg. II.3 - 1 fortsat.

For den 4-dim. repr. har vi

$$\sum_c n_c \, \chi^{def}(c)^* \, \chi^{def}(c) = N(G) \sum_r n_r^2$$

Fra opg 4: har vi for de 4 A_4-klasser:

I, (12)(34) (3 elementer) (123) (4 element)
(132) (4 elementer)

$$1\cdot 4^2 + 3\cdot 0^2 + 4\cdot 1^2 + 4\cdot 1^2 = 24 = 12\cdot \sum_r n_r^2$$

$\sum_r n_r^2 = 2$ og $\sum_r d_r n_r = d = 4 \Rightarrow$

$r=3: n_r = 1$, men vi kan ikke bestemme om 1, 1' eller 1'' har $n_r = 1$

$$\sum_c n_c \, \chi^{*(r)}(c) \, \chi^{def}(c) = n_r N(G)$$

Lad os tag $r=1$: $\chi^{(r=1)}(c) = 1 \quad \forall c$

$$\sum_c n_c \, \chi^{def}(c) = 1\cdot 4 + 3\cdot 0 + 4\cdot 1 + 4\cdot 1 = 12 = n_{r=1}\cdot 12$$

altså er $n_{r=1} = 1$ $n_{r=3} = 1$:

$$D^{def} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \chi^{def}(c) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \underset{\chi^{(r=1)}(c)}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} + \underset{\chi^{(r=3)}(c)}{\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

opg II.3 - 2

$\hat{x}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \} i$ $\qquad V_{def} = \text{span}\{\hat{x}_i\}$.

I den definerende rep:

$\sigma \in S_n : \quad \hat{x}_i \to \hat{x}_{\sigma(i)}$,

derfor er $\begin{pmatrix} a \\ a \\ \vdots \\ a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a \\ \vdots \\ a \end{pmatrix}$ for alle σ

som derfor er et inv. underrum af V_{def}

Matches sætning fortæller derfor at vi kan vælge basis

$\sigma \sim \begin{pmatrix} \overset{1\times 1}{1} & 0 \\ 0 & \ddots \end{pmatrix} \qquad \forall \sigma \in S_n$.

opg II.3 - 3

Tabel er givet (17) p. 125.

Som nævnt i text: $\sum_{r=1}^{5} d_r^2 = N_{CL} = 24 \Rightarrow$

$N_{RI} = N_{CI} = 5$

$d_r = (1, 1, 2, 3, 3)$

kald $r = (1, \bar{1}, 2, 3, \bar{3})$

opg II.3-3 (fortsat)

Den 4-dim def. repr. har ~~et~~ karakter der aflæses direkte af fixpunkterne, som aflæses af cykelstrukturen:

$$\chi^{def}(c) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi^{def}(I) \\ \chi^{def}((12)(34)) \\ \chi^{def}((123)) \\ \chi^{def}((12)) \\ \chi^{def}((1234)) \end{pmatrix}$$

1 er altid del af D^{def}. udfra.

$$\sum_c n_c \chi^{def}(c) \chi^{def}(c) = N(G) \sum_r n_r^2 :$$

$$1 \cdot 4^2 + 3 \cdot 0^2 + 8 \cdot 1^2 + 6 \cdot 2^2 + 6 \cdot 0^2 = 48 = 24 \cdot \sum_r n_r^2$$

$$\sum_r n_r^2 = 2 \quad \sum_r n_r d_r = 4 \Rightarrow n_1 = 1, \; n_3 = 1$$

(eller $\bar{3}$: vi definerer 3 som den repr. der er i D^{def})

$$\chi^{(def)} = \chi^{(1)} + \chi^{(3)} \Rightarrow \chi^{(3)} = \chi^{(def)} - \chi^{(1)}, \; \chi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\chi^{(3)} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\chi^{(\bar{1})} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \} \text{ lige permut.} \\ \} \text{ ulige} \end{matrix}$$

$D^{(\bar{1})}(\sigma)$: $v \mapsto \mathrm{sign}(\sigma) \cdot v \Rightarrow \chi^{(\bar{1})}(\sigma) = D^{(\bar{1})}(\sigma) = \mathrm{sign}(\sigma)$

Opg III.3-3 fortsat (2)

Vi kender nu:

n_c	1	$\bar{1}$	2	3	$\bar{3}$
1	1	1	2	3	3
3	1	1	x_2	-1	y_2
8	1	1	x_3	0	y_3
6	1	-1	x_4	1	y_4
6	1	-1	x_5	-1	y_5

$$\chi^{(1)} + \chi^{(\bar{1})} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi^{(1)} - \chi^{(\bar{1})} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Disse er begge ortogonale på $\chi^{(2)}$

$$\sum_c n_c \left(\chi^{(1)}_{(c)} + \chi^{(\bar{1})}_{(c)}\right) \chi^{(2)}_{(c)} = 0 \Rightarrow 3x_2 + 8x_3 = -2$$

$$\sum_c n_c \left(\chi^{(1)}_{(c)} - \chi^{(\bar{1})}_{(c)}\right) \chi^{(2)}_{(c)} = 0 \Rightarrow x_4 = -x_5$$

$$\sum_c n_c \, \chi^{(3)}_{(c)} \chi^{(2)}_{(c)} = 0 \Rightarrow -x_2 + 4x_4 = -2$$

$$\sum_c n_c \, \chi^{(2)}_{(c)} \chi^{(2)}_{(c)} = 24 \Rightarrow 3x_2^2 + 8x_3^2 + 12x_4^2 = 20$$

Løsning $x_4 (= -x_5) = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$

På samme måde kan vi finde $\chi^{(\bar{3})}_{(c)}$, men det er lettere at bruge den regulære repræsentation opg II.3-3 ydeligere fortsat (3)

$$\chi^{(reg)} = \chi^{(1)} + \chi^{(\bar{1})} + 2\chi^{(2)} + 3\chi^{(3)} + 3\chi^{(\bar{3})}$$

$\chi^{reg}(e) = 0$ bortset fra $\chi^{reg}(E) = 24$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 3 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

hvoraf vi aflæser: $y_2 = -1$, $y_3 = 0$, $y_4 = -1$, $y_5 = 1$

Alternativt kunne vi bruge

$$\sum_{r=1}^{N(r)} \chi^{*(r)}(C_1)\,\chi^{(r)}(C_2) = \delta_{C_1 C_2} \frac{N_G}{n_{C_1}}$$ for rækkerne.

idet vi kender 1. række:

$$\sum_{r=1}^{N(r)} \chi^{*(r)}(C_1)\,\chi^{(r)}(C_2) = 0 \qquad 1 + 1 + 2x_2 - 3 + 3y_2 = 0$$

$$\sum_{r=1}^{N(r)} \chi^{*(r)}(C_1)\,\chi^{(r)}(C_3) = 0 \qquad 1 + 1 + 2x_3 + 0 + 3y_3 = 0$$

⋮

Man ser at disse ligninger præcis er dem vi får ved at bruge $\chi^{(reg)}$ som ovenfor.

(forstå det!) (brug $\chi^{(r)}(C_1) = d_r$)

opg II.3.-4

Complete table for D_4 ((19) side 127)

Første række og første søjle er som sædvanlig givet hvis vi kender dimensionerne af de irreducible repræsentationer. (Her 1 og 2)
Den fjerde søjle følger fra ligning (18) side 125, som definerer den 2-dimensionale repr.

D_n har følgende præsentation (ligne. (5) side 61)

$$D_n = \langle R, r \mid R^n = I,\ r^2 = I\ ;\ Rr = rR^{-1} \rangle$$

Lad nu $D(g)$ være en 1-dim. rep af D_n :
dvs: $\chi(g) = D(g)$, $D(g)$ er blot et tal $\in \mathbb{C}$.

$r^2 = I \Rightarrow D(r^2) = D(I) = 1$, $D(r^2) = D(r)D(r) \Rightarrow D(r) = \pm 1$

$D(Rr) = D(rR^{-1}) \Rightarrow D(R)D(r) = D(r)\,D(R^{-1}) \Rightarrow$

$D(R) = D(R^{-1}) = \frac{1}{D(R)} \Rightarrow D(R) = \pm 1$. Alle andre elementer er produkter af r og R og derfor gælder for D_n at $D(g) = \pm 1$ når $D(g)$ er 1-dimensional.

Altså $\chi^{\text{1-dim}}(g) = \pm 1$ for D_n.

opg II 3.-4.

De fire 1-taller i anden række i tabellen (19) side 127 følger nu af at $-I = R^2$.

$D(-I) = D(R^2) = D(R)D(R) = 1$ (fordi $D(R) = \pm 1$.

Vi mangler nu at bestemme $a, b, c, \ldots, i$. Da ~~repræsentationerne er 1-dimensionale~~ ved vi at $a, \ldots, i$ er ± 1.

Vi bruger nu:

$$\sum_{c=1}^{5} n_c \chi^{*(r)}(c) \chi^{(s)}(c) = \delta^{rs} N_G, \quad N_G = 8.$$

(a) $1 * 1'$: $1 + 1 + 2(1 \cdot a + 1 \cdot b + 1 \cdot c) = 0$

(b) $1 * 1''$: $1 + 1 + 2(1 \cdot d + 1 \cdot e + 1 \cdot f) = 0$

(c) $1 * 1'''$: $1 + 1 + 2(1 \cdot g + 1 \cdot h + 1 \cdot i) = 0$

Lad os vælge $a = 1$ $\Rightarrow b = c = -1$

(d) $1' * 1''$: $1 + 1 + 2 \cdot (a \cdot d + be + cf) = 0$

(e) $1' * 1''$: $1 + 1 + 2(ag + bh + ci)$

(b) + (d) : $d + e + f = -1 \wedge d - e - f = -1 \Rightarrow d = -1, e = -f$

(c) + (e) : $g + h + i = -1 \wedge g - h - i = -1 \Rightarrow g = -1, h = -i$

(f) $1'' * 1'''$: $1 + 1 + 2(dg + eh + fi) = 0 \Rightarrow eh + fi = -2 \Rightarrow$

$((e, f) = (1, -1) \wedge (h, i) = (-1, 1))$ eller $((e, f) = (-1, 1) \wedge (h, i) = (1, -1))$

Opg II 3. – 4

Man ser at de 2 valg af e,f1 og Ch,c1 blot svarer til en ombytning af 1'' og 1'''.

Et slut er derfor

n_c	$\{c\}$	1	1'	1''	1'''	2
1	I	1	1	1	1	2
1	$R^2 (=-I)$	1	1	1	1	−2
2	R, R^3	1	1	−1	−1	0
2	$r_x\ r_y$	1	−1	1	−1	0
2	d_1, d_2	1	−1	−1	1	0

Et andet slut resultat fås ved at ombytte søjlerne 1'' og 1''' (som nævnt).

Endelig kunne man have startet med $a=-1$; man ville da få en løsning hvor 1' var byttet om med 1'' eller 1''' (igen 2 ~~sø~~ løsninger).