opg. I.11)

Vi skal vise at $Z=\{z_1, \ldots, \ldots\}$ er en subgruppe (den vil blant være abelsk) hvis den er en subgruppe)

$z_i, z_j \in Z \Rightarrow z_i z_j \in Z \quad \wedge \quad z_i \in Z \Rightarrow z_i^{-1} \in Z$

① $(z_i z_j)g = z_i(z_j g) = z_i(g z_j) = (z_i g) z_j = (g z_i) z_j = g(z_i z_j)$

② $z_i g = g z_i \Rightarrow g = z_i^{-1} g z_i \Rightarrow g z_i^{-1} = z_i^{-1} g$

---

opg I.12

afbildningen $g \rightsquigarrow g'g$ er bijektiv:

(1) injektiv: $g'g_1 = g'g_2 \Rightarrow g_1 = g_2$

(2) surjektiv: $g'g_1 = g \Rightarrow g_1 = (g')^{-1} g$.

Derfor er $\sum_{g \in G} f(g'g) = \sum_{g \in G} f(g)$

Det samme med $\sum_{g \in G} f(gg')$ idet også $g \rightsquigarrow gg'$ er bijektiv.

---

opg I.13

I Z_8 er der kun 2 elementer z: $z+z=0$ nemlig $z=0$ og $z=4$

I $Z_2 \otimes Z_4$ er der 4: $(1,0)$, $(0,2)$ og $(0,0)$, $(1,2)$

---

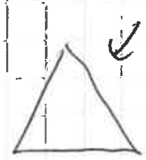
opg I.1-4

Kandidater vi har mødt i teksten:

Z_6 , $Z_2 \otimes Z_3$, D_3 , S_3

Men Z_6 er isomorf med $Z_2 \otimes Z_3$ da 2 og 3 er relative primtal

Det ses let udfra den geometriske betydning af D_3 at D_3 er isomorf med S_3



Vi har da to grupper Z_6 og D_3

Theorem: Hvis p er et primtal er der præcis 2 endelige grupper af orden $2p$: Z_{2p} og D_p.

opg I.2-1

$$(1a)(1b)(1a) = (ab)$$

Læs transpositionerne fra højre til venstre (konvention)

Vi kan også skrive det som:

$$\underset{(1a)}{\begin{pmatrix} a & b & 1 \\ 1 & b & a \end{pmatrix}} \circ \underset{(1b)}{\begin{pmatrix} a & 1 & b \\ a & b & 1 \end{pmatrix}} \circ \underset{(1a)}{\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ a & 1 & b \end{pmatrix}} = \underset{(ba)}{\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 1 & b & a \end{pmatrix}}$$

---

opg I.2-2

Først : $a \neq b \neq c$: $(ac)(cb) = (acb)$

Dernæst : (fra opg 1) : $(ab) = (ca)(cb)(ca)$

$$= (acb)(ca)$$

A_n, $n \geq 3$ består af de lige permutationer og kan skrives som produkt af et lige antal transpositioner

$(ab)(cd)$.

opg. I2-2 fortsat

hvis $b=c$ har vi $(a\,b)(b\,d) = (a\,b\,d)$

hvis $a \neq b \neq c \neq d$:

$(a\,b) = (a\,c\,b)(a\,c)$ og psm $(c\,d) = (a\,c)(d\,a\,c)$

$\Downarrow$

$(a\,b)(c\,d) = (a\,c\,b)(a\,c)(a\,c)(d\,a\,c) = (a\,c\,b)(d\,a\,c)$

Derfor kan alle par af transpositioner erstattes med 3-cykler.

opg I.2-3

Lad σ^u være en ulige permutation af $1, \dots, n$ og σ^l en lige permutation.

$t = (n+1, n+2)$, $e = (n+1)(n+2)$

$\sigma^u \circ t \in A_{n+2}$, $\sigma^l \circ e \in A_{n+2}$

$(\sigma^u_1 \circ t)(\sigma^u_2 \circ t) = (\sigma^u_1 \circ \sigma^u_2) \circ (t^2 = e) \in A_{n+2}$

$(\sigma^u \circ t)(\sigma^l \circ e) = (\sigma^u \circ \sigma^l)(t \circ e = t) \in A_{n+2}$

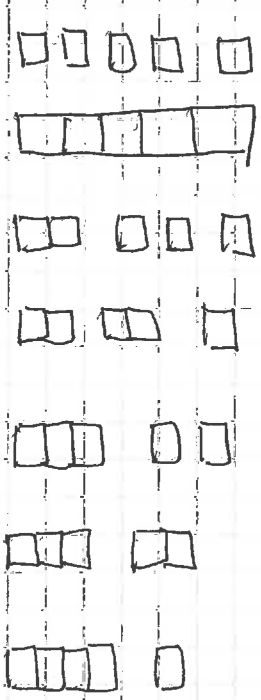
$(\sigma^l_1 \circ e)(\sigma^l_2 \circ e) = (\sigma^l_1 \circ \sigma^l_2) \circ e \in A_{n+2}$

S_3: $\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}(4)(5)$, $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}(45)$, $\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}(45)$

$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}(45)$, $\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}(4)(5)$, $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}(4)(5)$

opg. I.2-6

Partitioner af 5 (cykle struktur)



	1
$\frac{5!}{5}$	24
$\binom{5}{2}$	10
$\binom{5}{2}\binom{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} = \text{symmetri}\right)$	15
$\binom{5}{3} \times \left(2 = \begin{matrix}(1\,2\,3) \\ (1\,3\,2)\end{matrix} = \frac{3!}{3}\right)$	20
$\left(\binom{5}{3} \times 2\right) \times \binom{2}{2}$	20
$\binom{5}{4} \times \left(6 = \frac{4!}{4}\right)$	30
	120

opgave I.2-4

partition af 5 :

$1+1+1+1+1$

$2+1+1+1$, $2+2+1$

$3+1+1$, $3+2$

$4+1$

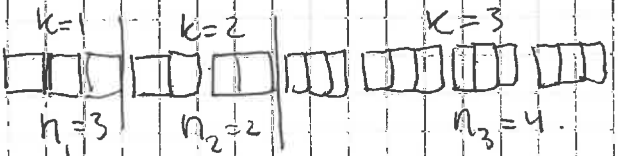
5

---

opg I.2-5

$$N(n_1, \dots, n_j) = \frac{n!}{\prod_{k=1}^{j} \left(k^{n_k} \; n_k!\right)} \quad , \quad \sum_{k=1}^{j} n_k k = n$$

n_k cykler af længde k



$n!$ forskellige permutationer

men en cykler af længde k er repræsenteret k gange : $(a_1 a_2 a_3) = (a_3 a_1 a_2) = (a_2 a_3 a_1)$

Desuden kan vi permutere de n_k cykler af længde k : $k^{n_k} \; n_k!$