Opg I.2 – 7

$Q = \{ 1, -1, i, -i, j, -j, k, -k \}$ ord $G = 8$

rules $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = -ji = k$

og klart med $1, -1$ $jk = -kj = i$

$ki = -ik = j$

Multiplikations tabel ikke nød vendig.

$i^{-1} = -i$, $j^{-1} = -j$, $k^{-1} = -k$

$(-i)^{-1} = i$ $(-j)^{-1} = j$, $(-k)^{-1} = k$

$(ab)c = a(bc)$

$$\left.\begin{array}{l} (ij)k = k^2 = -1 \\ i(jk) = i^2 = -1 \end{array}\right\} \text{ok} \qquad \text{etc} \ldots$$

Opg I.2 – 8

A_4 ikke simpel? Er der invariant undergruppe.

Side 62: $Z_2 \otimes Z_2 = \{ \overset{I}{I}, \overset{A}{(12)(34)}, \overset{B}{(13)(24)}, \overset{C}{(14)(23)} \}$

er undergruppe af A_4 (Se opg I.2-14)

Alle elementer er idempotente : $X^2 = I$

og man tjekke $AB = C$, dvs det er $Z_2 \otimes Z_2$, se diskussion p. 49, men dette er ikke vigtigt i denne sammenhæng.

OPG I.2-8 fortsat.

Er det en invariant undergruppe af A_4?

dvs gælder der:

$H = g^{-1} H g \quad \forall g \in A_4$

$H = \{I, (ab)(cd)\} \quad a,b,c,d \in \{1,2,3,4\}$

A_4 består af

I	1 element
$(ab)(cd)$	3 elementer
(abc)	8 elementer

(ab) ulige (6 elementer), $(abcd)$ ulige (6 elementer)

dvs vi skal vise

$(abc)(ab)(cd)(cba) \in H$

udregn: $(ad)(cb)$ ok

---

opg. 10

$f: G \to G$, $f(g_1 g_2) = f(g_1) f(g_2)$

$\mathrm{Ker} f = \{g \mid f(g) = I\}$

(1) ker f undergruppe: $g_1 \in \mathrm{Ker} f$, $g_2 \in \mathrm{Ker} f$

$f(g_1 g_2) = f(g_1) f(g_2) = I \Rightarrow g_1 g_2 \in \mathrm{Ker} f$

(2) $g \,\mathrm{Ker} f\, g^{-1} = \mathrm{Ker} f \quad \forall g \in G$

$g_0 \in \mathrm{Ker} f$: $f(g g_0 g^{-1}) = f(g) f(g_0) f(g^{-1}) = f(g) f(g^{-1})$

$= f(g g^{-1}) = f(I) = I$.

opg I.2 – 11

$D_n = \langle R, r \mid R^n = I,\ r^2 = I,\ Rr = rR^{-1} \rangle$

$$ab = \begin{cases} R^{n_1} R^{n_2} & \to (ba)^{-1} ab = I \\ R^n r & \to (rR^n)^{-1} R^n r = R^{-n} r^{-1} R^n r \\ r R^n & \to \text{samme} \qquad = R^{-n} r^{-1} r R^{-n} = R^{-2n} \\ r^2 & = I = ba \end{cases}$$

Altså er $(ba)^{-1} ab = R^{2n}$, $n = 0, \dots, n-1$

Som genererer gruppen Z_n hvis n er ulige og $Z_{n/2}$ hvis n er lige.

---

opg I.2 – 12

$fg \sim gf$: $\exists h$: $h fg h^{-1} = gf$

Valg $h = f^{-1}$: $(f^{-1} f g f) = gf$ ok.

Opg I.2 – 13

ord G = lige

$N = \{g \mid g^2 \neq I\}$, $g \in N \Rightarrow g^{-1} \in N \wedge g \neq g^{-1} \Rightarrow$ ord N lige

$M = \{g \mid g^2 = I\}$: ord M = ord G − ord N : <u>lige</u>

$I \in M$. Derfor må M indeholde $g_0 \neq I$.

opg I.2-14

$V \cong Z_2 \otimes Z_2 \simeq \{I, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ → opg. I.2-8

Lad os bruge Cayleyskonstruktionen til at opnå dette.

Vi skriver $Z_2 \otimes Z_2 = \{\underset{g_1}{(0,0)}, \underset{g_2}{(1,0)}, \underset{g_3}{(0,1)}, \underset{g_4}{(1,1)}\}$

Permutationen $\sigma_\alpha(i) \to j = \sigma(i) : g_i \to g_\alpha g_i = g_{\sigma_\alpha(i)}$

(1) $g_1 \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1^2 \\ g_1 g_2 \\ g_1 g_3 \\ g_1 g_4 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} (0,0) \\ (1,0) \\ (0,1) \\ (1,1) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} (0,0)+(0,0) \\ (0,0)+(1,0) \\ (0,0)+(0,1) \\ (0,0)+(1,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (0,0) \\ (1,0) \\ (0,1) \\ (1,1) \end{pmatrix}$

(2) $g_2 \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_2 g_1 \\ g_2^2 \\ g_2 g_3 \\ g_2 g_4 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} (0,0) \\ (1,0) \\ (0,1) \\ (1,1) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} (1,0)+(0,0) \\ (1,0)+(1,0) \\ (1,0)+(0,1) \\ (1,0)+(1,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1,0) \\ (0,0) \\ (1,1) \\ (0,1) \end{pmatrix}$

(1): $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, (2): $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (12)(34)$

PSM fås $g_3 \sim \sigma_3 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (13)(24)$

og $g_4 \sim \sigma_4 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (14)(23)$.

$Z_4 = \{\underset{g_1}{0}, \underset{g_2}{1}, \underset{g_3}{2}, \underset{g_4}{3}\}$

$\overset{g_1}{0} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overset{g_2}{1} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overset{g_3}{2} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overset{g_4}{3} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\sigma_1 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $\sigma_3 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\sigma_4 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Opg I.2-15

$\sigma_g \sim g$, $g \in G$: $\sigma_g : i \to \sigma_g(i)$

$g_i \to g g_i = g_{\sigma(i)}$

$$\sigma_g : \begin{pmatrix} g_1 & \cdots & g_n \\ gg_1 & \cdots & gg_n \end{pmatrix}$$

(a) $g = I \sim \sigma = I$, $g \neq I$: $g g_i \neq g_i \ \forall i$
(+b)
↳ (i spørgsmål (b) skal permutationen også
(være forskellig fra identiteten)

(c) Lad os betragte den cykel der er relateret til element g_i, for en given permutation $\sigma_g \sim g$. $g^k = I$, $g^n \neq I$, $n < k$.

$g_i \to gg_i \to g(gg_i) = g^2 g_i \to g(g^2 g_i) = g^3 g_i$

$\cdots\cdots \to g^k g_i = g_i$

σ_g dekomponeres derfor i disjunkte cykler der alle har længde k

Længden k afh. af g.

opg I.2 – 16

$$\langle a_1, \dots, a_n \mid a_i^2 = I, (a_i a_j)^{n_{ij}} = I, i,j = 1, \dots, n \rangle$$

$$n_{ij} = 2 \Rightarrow (a_i a_j)^2 = I, \Rightarrow a_i a_j = a_j^{-1} a_i^{-1} = a_j a_i$$

da $a_i^2 = I \Rightarrow a_i = a_i^{-1}$

opg I.2 – 17

$\forall h_2 \in H \ \exists h_1 \in H : h_2 = g h_1 g^{-1}$

$gHg^{-1} = H : \forall h_1 \in H \ \exists h_2 \in H : g h_1 g^{-1} = h_2 \Rightarrow$

$g h_1 = h_2 g$

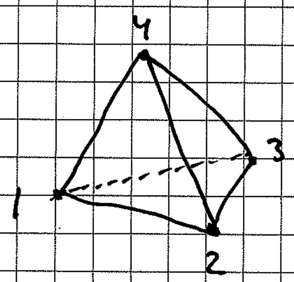
Men dette viser at $gH = Hg$ da denne ligning betyder: $\forall h_1 \in H \ \exists h_2 \in H : g h_1 = h_2 g$.

$\wedge \ \forall h_2 \in H \ \exists h_1 \in H \ h_2 g = g h_1$

opg I.2 – 18

Vi har allerede $A_4 \subset S_4 \subset S_5 \subset S_6$

fra opg. 3



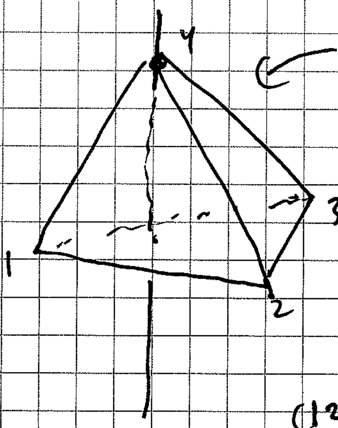
4 hjørner v_i

6 kanter : $\langle v_i v_j \rangle$

Enhver

opg I.2-18 fortsat

A_4 identificeres med følgende 12 rotationer af tetrahedron ind i sig selv



$(123)(4)$, $(132)(4)$

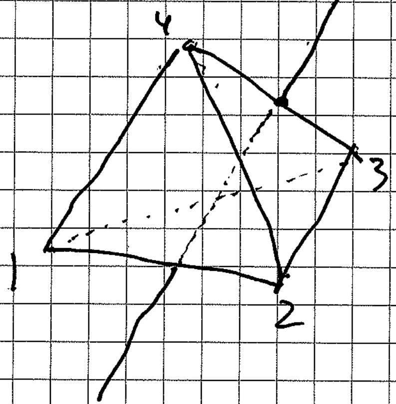
$(134)(2)$ $(143)(2)$

$(142)(3)$ $(124)(3)$ 8

$(243)(1)$ $(234)(1)$

I 1

$(12)(34)$ akse rotation 180°



$(12)(34)$

$(13)(24)$ 3

$(14)(23)$

i alt 12 ~ A_4

Enhver af disse permutationer $v_i \to v_{\sigma(i)}$

$\sigma \in A_4$ definerer en permutation i S_6

ved $\langle v_i v_j \rangle \to \langle v_{\sigma(i)}, v_{\sigma(j)} \rangle$

(hvor $\langle v_i v_j \rangle = \langle v_j v_i \rangle$ betegner en af de 6 kanter)

Denne indlejring af A_4 i S_6 er forskellig fra den i op. 3 fordi for de 8 første rotationer er der ikke to kanter som ved den samme rotation ~~gås~~ 2 gange går over i sig selv i $\sigma_4(\cdot)(\cdot)$ eller $\sigma_4(\cdot\,\cdot)$ ha begge den egenskab

5 6

opg I 2-20

$I: x \curvearrowright I(x) = x$, $A: x \curvearrowright A(x) = \frac{1}{1-x}$, $C: x \curvearrowright C(x) = \frac{1}{x}$

$I^2 = I$, $A^2(x) = A\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{1-\frac{1}{1-x}} = \frac{x-1}{x}$

$A^3(x) = A(A^2(x)) = A\left(\frac{x-1}{x}\right) = \frac{1}{1-\frac{x-1}{x}} = x = Ix$,

$G = \{I, A, A^2\} = Z_3$

$C^2(x) = x = I(x)$,

$AC(x) = A\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{1-\frac{1}{x}} = \frac{x}{x-1} = C\left(\frac{x-1}{x}\right) = CA^2(x)$

$CA(x) = C\left(\frac{1}{1-x}\right) = 1-x$ (ny)

$A^2(x) = A^2\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}} = 1-x = CA(x)$

$CA = A^2C = A^{-1}C$ $(A^3 = I)$

$AC = CA^2 = CA^{-1}$

identisk da $C^2 = 1$
$CA = A^{-1}C \Rightarrow$
$AC = CA^{-1}$

Dvs:

$G = \langle A, C \mid A^3 = I, C^2 = I, AC = CA^{-1} \rangle = D_3$