TRANSISTORS

الجبر العام

الدكتورة شذا الخطيب

كامل المحاضرات 2024

د.شذى الخطيب

- عملي الجبر العام :

*ملاحظة: $\cap$ تقاطع $\wedge$ و

$\cup$ الاجتماع $\vee$ أو

- $A=\{x : x\in R \wedge x^2=1\}=\{-1,+1\}$
- $B=\{x : x\in \mathbb{N} \wedge 12$ أصغر تماماً من x زوجي$\}$

$\Rightarrow B=\{0,2,4,6,8,10\}$

- $C=\{x : x\in \mathbb{R} \wedge x^2=-1\}=\emptyset$
- $D=\{x : x\in \mathbb{C} \wedge x^2=-1\}=\{i\}$
- $E=\{x : x\leq 100 \wedge$ مربع لعدد صحيح $x\}$

$\Rightarrow E=\{0,1,4,9,16,25,36,49,64,81,100\}$

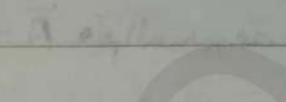
- $F=\{x : x\in Z \wedge x^2\leq 100\}$

$\Rightarrow F=\{-10,-9,\dots,-1,0,+1,+2,\dots,+9,+10\}$

- مثال: U مجموعة جميع الحروف في اللغة الانكليزية الصغيرة ولديناتمثيل فن (Ven).

$A=\{a,u,n,k,r\}$

$B=\{k,r,w,z\}$



$A\cup B=\{a,u,n,k,r,w,z\}$

$A\cap B=\{k,r\}$

$A-B=\{a,u,n\}$

$B-A=\{w,z\}$

- العلاقة بين مجموعة ومجموعة أخرى احتواء أما العلاقة بين مجموعة وعنصر انتماء.
- نضع $\emptyset$ ضمن المجموعة اذا كنا فقط نعد مجموعة أجزاء مجموعة.

Ex: $A=\{a,b,c\}$

$\Rightarrow A=\{\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\},\emptyset\}$

- عكس المجموعة الخالية $\emptyset$ (Thee-pty set) هي المجموعة الشاملة U (The unive(sal)set)

$M=\{\{2,1\},\{3,1\},\{4,5\}\}$

عنصر M / مجموعة جزئية من M

$\{2,1\}\in M$

$\{2,1\}\subseteq M$

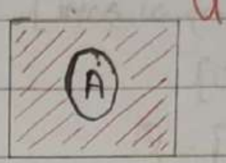
- شرط الاحتواء في المجموعات:

• حيث: $X \neq Y$ $\qquad \forall x \in X \Rightarrow x \in Y \Rightarrow X \subseteq Y$

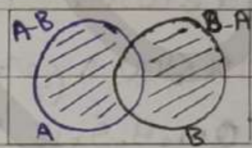
• حيث: $X = Y$ $\qquad x \in X \Rightarrow x \in Y \Rightarrow X \subseteq Y , Y \subseteq X$

$\wedge \ x \in Y \Rightarrow x \in X \Rightarrow X \subseteq Y , Y \subseteq X$

متمم المجموعة A $\quad \bar{A} = U - A$



$$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$$
$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$



- معلومة:

$\overline{(\bar{A})} = A$

$A \cap \bar{A} = \emptyset$

$A \cup \bar{A} = U$

$A \cup U = U$

$A \cap U = A$

$A \cap \emptyset = \emptyset$

$A \cup \emptyset = A$

الخاصية التبديلية:
$A \cap B = B \cap A$
$A \cup B = B \cup A$

خاصية تجميعية:
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

توزيع العمليات على المجموعة:
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

• عدد عناصر A = قدرة المجموعة A $\quad |A|$

الجداء الديكارتي $\quad A \times B = \{(x,y) : x \in A \wedge y \in B\}$

$$|A \times B| = |A| \times |B|$$

$A \times B \neq B \times A$

$$A = \{1,2,3\} \ , B = \{a,b,c\}$$

$$A \times B = \{(1,a),(1,b),(1,c)$$
$$(2,a),(2,b),(2,c)$$
$$(3,a),(3,b),(3,c)\}$$

• كما سبق لكنها مجموعة الثلاثيات: $A \times B \times C$

$$|A \times B \times C| = |A| \times |B| \times |C|$$

- تمرين: أوجد الجداء الديكارتي $A\times B\times C$ حيث:

A) مجموعة خطوط الطيران في سوريا $A=\{S,W\}$

B) مجموعة المدن التي فيها مطار في سوريا $B=\{D,A,L\}$

C) مجموعة مدن الرياض وجدة $C=\{R,J\}$

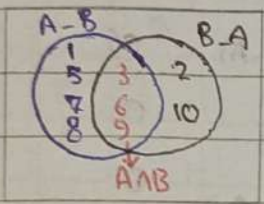
$$A\times B\times C=\{(S,D,R),(S,A,R),(S,L,R),$$
$$(S,D,J),(S,A,J),(S,L,J),$$
$$(W,D,R),(W,A,R),(W,L,R),$$
$$(W,D,J),(W,A,J),(W,L,J)\}$$

- تمرين: لتكن A و B مجموعتين جزئيتين من Z، أوجد A و B حيث:

$A-B=\{1,5,7,8\}$

$B-A=\{2,10\}$

$A\cap B=\{3,6,9\}$



$A=\{1,3,5,6,7,8,9\}$

$B=\{2,3,6,9,10\}$

- تمرين: أثبت أن $A=(A-B)\cup(A\cap B)$ وذلك أياً تكن A و B

ط1:

$L_2=[(A-B)\cup A]\cap[(A-B)\cup B]$

$=[(A\cap\bar{B})\cup A]\cap[(A\cap\bar{B})\cup B]$

$A\cap(A\cup B)$ $=[(A\cup A)\cap(\bar{B}\cup A)]\cap[(A\cup B)\cap(\bar{B}\cup B)]$

A تقاطع A اجتماع B أي مجموعة $=[A\cap(\bar{B}\cup A)]\cap[(A\cup B)\cap U]$

هو A حسب قانون الامتصاص $=A\cap(A\cup B)=A=L_1$ محققة

ط2:

$A=(A-B)\cup(A\cap B)$

$=(A\cap\bar{B})\cup(A\cap B)$

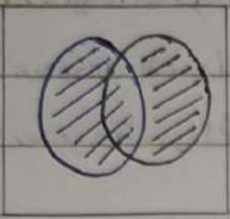
$=A\cap(\bar{B}\cup B)=A\cap U=A$

- أثبت أن $A\cap(B-A)=\emptyset$

$L_1=A\cap(B\cap\bar{A})$

$=\underbrace{(B\cap\bar{A})\cap A}_{\text{خاصة تبديل}}=\underbrace{B\cap(A\cap\bar{A})}_{\text{خاصة تجميعية}}=B\cap\emptyset=\emptyset=L_2$

- أثبت أن $A\cap(B-A)=\varnothing$



$(B\cap\bar{A})\cap A$ حسب الخاصة التبديلية

$B\cap(\bar{A}\cap A)$ حسب الخاصة التجميعية

$B\cap\varnothing=\varnothing$

$\Rightarrow A\cap(B-A)=\varnothing$

- ملاحظة

• احتمال انتماء العنصر للمجموعة هناك احتمالان إما ينتمي أو لا ينتمي أي (2) هناك حالتان لكل عنصر

* اذا كانت لدي أكثر من مجموعة فإنه 2^n حيث (n) هو عدد المجموعات

(يفيد في جدول الحقيقة لاستيفاء جميع الحالات)

A	B	$B-A$	$A\cap(B-A)$	$\varnothing$
1	1	0	0	0
1	0	0	0	0
0	1	1	0	0
0	0	0	0	0

A	B	$A\wedge B$	$A\vee B$	$A-B$
1	1	1	1	0
1	0	0	1	1
0	1	0	1	0
0	0	0	0	0

مجموعة X = مجموعة Y

$\forall x \in X \quad x \in Y \wedge \forall x \in Y \Rightarrow x \in X$

$X \subseteq Y \quad \wedge Y \subseteq X$

• أثبت أن: $(A-B)-C=(A-C)-(B-C)$

A	B	C	A-B	B-C	A-C	(A-C)-(B-C)	(A-B)-C
1	1	1	0	0	0	0	0
1	1	0	0	1	1	0	0
1	0	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

• الحل باستخدام العناصر:

$(A-B)-C=(A-C)-(B-C)$

$L_2=(A-C)-(B-C)=(A\wedge\bar{C})\wedge(\overline{B\cap\bar{C}})$

$=A\wedge[(\bar{C}\wedge\bar{B})\cup(\bar{C}\wedge C)]$

$=A\wedge[(\overline{C\cup B})\cup\emptyset$

$=A\wedge(\overline{B\cup C})=L_1$

$L_1=(A-B)-C=(A\wedge\bar{B})-C$

$=(A\cap\bar{B})\cap\bar{C}=A\cap(\bar{B}\cap\bar{C})$

$=A\cap(\overline{B\cup C})=L_2$

- جبر المنطق

ليست قضية لأنها تحتمل الصح والخطأ حسب قيمة x $\Leftarrow$ $4x=5$

قضية صحيحة $\exists x \in \mathbb{R} : 4x=5$

قضية خاطئة $\forall x \in \mathbb{R} : 4x=5$

قضية خاطئة $\exists x \in \mathbb{N} : 4x=5$

صحيحة $\forall a,b \in \mathbb{R} : (a+b)^2 = a^2+b^2+2a.b$

- القضية: هي جملة أو عبارة تحتمل الصحة أو الخطأ (إما صحيحة أو خاطئة) لا تكون قابلة للصحة أولاً كما المثال السابق في القضية الأولى.

. (سابقاً الأرض كان يعتقد العلماء أنها مسطحة) هي قضية صحيحة.

. أما (الأرض مسطحة) فهي خاطئة في وقتنا الحالي وصحيحة سابقاً.

- نفي القضية p ($\neg p$):

p	$\neg p$
T	F
F	T

- مثال: $p \oplus q$

. يحق لك أكل التفاح أو البرتقال فقط

- مثال عن $p \leftrightarrow q$

. اذا كان ABC مثلث متساوي الساقين رأسه A زاويتي القاعدة متساويتان.

p : ABC مثلث متساوي الساقين

q : زاويتي القاعدة متساويتان

p	q	$p\wedge q$	$p\vee q$	$p\oplus q$	$p\rightarrow q$	$p\leftrightarrow q$
T	T	T	T	F	T	T
T	F	F	T	T	F	F
F	T	F	T	T	T	F
F	F	F	F	F	T	T

- لتكن لدينا القضايا التي تحمل القيم (p: خاطئة / q: صحيحة / r: خاطئة)

حدد قيمة القضية: $(p \vee \neg r) \wedge \neg((q \vee r) \vee \neg(r \vee p))$

$\equiv (F \vee T) \wedge \neg((T \vee F) \vee \neg(F \vee F))$

$\equiv T \wedge \neg(T \vee \neg(F)) \equiv T \wedge \neg(T \vee T)$

$\equiv T \wedge \neg(T) \equiv T \wedge F \equiv F$

- قانون ديمورغان :
$$\neg(p\wedge q)\equiv \neg p\vee \neg q$$
$$\neg(p\vee q)\equiv \neg p\wedge \neg q$$

$$p\to q\equiv \neg p\vee q$$

p	q	$p\to q$	$\neg p$	$\neg p\vee q$
T	T	T	F	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

حدد فيما اذا كانت القضايا التالية متكافئة وذلك أيا تكن قيم القضايا r , q , p.

$P: \neg p\vee(q\wedge\neg r)\equiv(\neg p\vee q)\wedge(\neg p\vee\neg r)$

$Q: p\wedge(\neg q\vee r)$

$$\neg Q\equiv\neg[(p\wedge\neg q)\vee(p\wedge r)]$$
$$\equiv\neg(p\wedge\neg q)\wedge\neg(p\wedge r)$$
$$\equiv(\neg p\vee q)\wedge(\neg p\vee\neg r)$$
$$\equiv P$$
$$\Rightarrow P\neq Q$$

- أثبت أن القضية هي استدلال:

$$Q: [(p\vee q)\wedge r \wedge (r \to \neg q)] \to p$$

وذلك أياً تكن قيم p,q,r.

$$Q \equiv \neg[(p\vee q)\wedge r\wedge(\neg r\vee\neg q)]\vee p$$
$$\equiv [(\neg p\wedge\neg q)\vee\neg r\vee(r\wedge q)]\vee p$$
$$\equiv (\neg p\wedge \neg q)\vee \neg r \vee (r\wedge q)\vee p$$
$$\equiv [(p\underset{T}{\vee}\neg p)\wedge(p\vee\neg q)]\vee[(\neg r\underset{T}{\vee} r)\wedge(\neg r\vee q)]$$
$$\equiv (p\vee\neg q)\vee(\neg r\vee q)$$
$$\equiv (\neg q\underset{T}{\vee} q)\vee p\vee\neg r \equiv T$$

- لتكن لدينا القضايا:

$p: x=3$

$q: x^2=9$

$r: x=-3$

- تحقق فيما اذا كانت القضايا المركبة الآتية صحيحة:

I $(p\vee r)\to q$

$((x=3)\vee(x=-3)) \to (x^2=9)$ صحيحة

II $(p\to q)\wedge(q\to r)$

$((x=3)\to(x^2=9))\wedge((x^2=9)\to(x=-3))$

$T \wedge F \equiv F$

III $q\leftrightarrow(p\vee r)$

$(x^2=9)\leftrightarrow(x=3 \vee x=-3)$ صحيحة

- هل القضية التالية هي استدلال؟

$$Q:(p\wedge q)\vee(\neg p\vee q)$$
$$\equiv[(p\vee\neg p)\wedge(q\vee\neg p)]\vee q$$
$$\equiv[T\wedge(q\vee\neg p)]\vee q$$
$$\equiv(q\vee\neg p)\vee q \equiv q\vee\neg p$$

ليست دائماً صحيحة لأن p و q لا يوجد رابط بينهما.

p: x عدد أولي

q: x عدد زوجي

r: y عدد فردي

- عبّر عن العبارة الآتية باستخدام القضايا السابقة والروابط المنطقية ، ما قيمة هذه القضية؟

- Q: اذا كان x عدد زوجي و y عدد فردي فإن x عدد أولي أو y ليست زوجي.

$$Q: (q \wedge r) \rightarrow (p \vee r)$$
$$\equiv (\neg q \vee \neg r) \vee (p \vee r)$$
$$\equiv \neg q \vee p \vee (\neg r \vee r)$$
$$\equiv \neg q \vee p \vee T$$
$$\equiv T$$

$$\begin{array}{c} p \\ p \to q \\ \hline q \end{array}$$

p	q	$p \to q$	$p \wedge (p \to q)$	$s \to q$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	1

$[p \wedge (p \to q)] \to q$

$\equiv \neg[p \wedge (\neg p \vee q)] \vee q$

$\equiv [\neg p \vee (p \wedge \neg q)] \vee q$

$\equiv [(\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)] \vee q$

$\equiv [\neg p \vee \neg q] \vee q \equiv \neg p \vee (\neg q \vee q) \equiv T$

اثبت صحة:

$$\begin{array}{l} p \to q \\ q \wedge r \\ \hline \therefore p \to r \end{array}$$

طريقة ①:

$$\begin{array}{l} q \wedge r \\ \hline \therefore r \end{array}$$ عن طريق simplification

$$\begin{array}{l} r \\ \hline \therefore \neg p \vee r \equiv p \to r \end{array}$$ عن طريق addition

طريقة ②:

$$\begin{array}{l} q \wedge r \\ \hline \therefore r \end{array}$$ عن طريق Simplification

$$\begin{array}{l} r \\ \hline \therefore \neg q \vee r \equiv q \to r \end{array}$$ عن طريق addition

$$\begin{array}{l} p \to q \\ q \to r \\ \hline \therefore p \to r \end{array}$$

E مجموعة

R علاقة

$f(x)=x^2+2$

$x\in\mathbb{R} \longrightarrow f(x)=x^2+2\in\mathbb{R}$

f هو علاقة على $\mathbb{R}$

- لنعرف العلاقة R على المجموعة $E=\{2,3,7\}$ وفق مايلي:

$$xRy \Leftrightarrow x<y \quad : x,y\in E$$

- بيان العلاقة G:

$$G=\{(2,3),(2,7),(3,7)\}$$ بيان R

- لتكن R علاقة معرفة على مجموعة E:

. الصفة الانعكاسية: نقول إن R تتمتع بالصفة الانعكاسية اذا تحقق:

$$\forall x\in E: xRx$$

. الصفة التناظرية: نقول إن R تناظرية اذا تحقق:

$$\underbrace{\forall x,y\in E; xRy}_{\text{فرض}} \Rightarrow \underbrace{yRx}_{\text{طلب}}$$

. الصفة المتعدية: نقول إن R تتمتع بصفة التعدي اذا تحقق:

$$\forall x,y,z\in E; (\underbrace{xRy \wedge yRz}_{\text{فرض}}) \Rightarrow \underbrace{xRz}_{\text{طلب}}$$

- ملاحظة: بيان أي علاقة هو دائماً مجموعة جزئية من الجداء الديكارتي لـ $E\times E$.

$$E=\{2,3,7\}$$

$$E\times E=\{(2,2),(2,3),(2,7),(3,2),(3,3),(3,7),(7,2),(7,3),(7,7)\}$$

$$xRy \Leftrightarrow x<y \qquad G=\{(2,3),(2,7),(3,7)\}$$

- لنعرف العلاقة R على المجموعة $\mathbb{R}$ وفق مايلي:

$$x,y\in\mathbb{R}; xRy \Leftrightarrow x \mid y$$

x يقسم y

y مضاعف لـ x

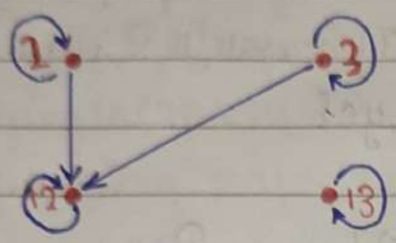
y يقبل القسمة على x

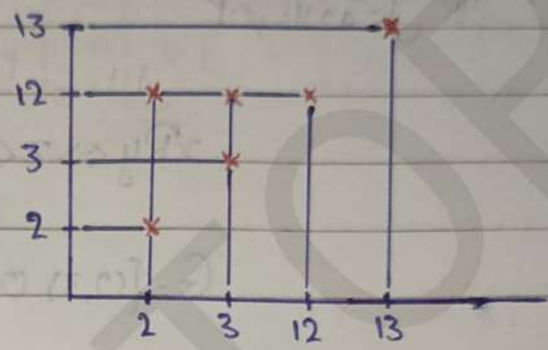
$E = \{2, 3, 12, 13\}$

$xRy \Leftrightarrow x \mid y$

$G = \{(2,2), (2,12), (3,3), (3,12), (12,12), (13,13)\}$

- التمثيل الشبكي للعلاقة :





- لتكن المجموعة $E = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ ولنعرف عليها العلاقة R وفق مايلي :

$(p,q) R (p',q') \Leftrightarrow p.q' = q.p'$

- أثبت أن العلاقة السابقة هي علاقة تكافؤ. (انعكاسية + تناظرية + متعدية)

$x, y \in E : xRy \Leftrightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} x \in E \Leftrightarrow x = (p,q) \\ \\ y \in E \Leftrightarrow y = (p',q') \end{array}\right] \Rightarrow xRy \Leftrightarrow p.q' = q.p'$$

① الانعكاسية :

$\forall x \in E : xRx$

$x \in E \Leftrightarrow x = (p,q)$

$x \overset{?}{R} x \Leftrightarrow (p,q) \overset{?}{R} (p,q)$

$p.q = q.p$

• بما أن الضرب تبديلي في $\mathbb{Z}$ إذن xRx

$\forall x \in E$

② التناظرية :

- مسودة جانبية : (p,q) (p',q')

$yRx \Leftrightarrow p'.q = q'.p$

$$\forall x,y \in E \,;\, xRy \Rightarrow yRx$$

$$x \in E \Leftrightarrow x = (p,q)$$

$$y \in E \Leftrightarrow y = (p',q')$$

$$xRy \Leftrightarrow p.q' = q.p' \Leftrightarrow p'.q = q'.p \Leftrightarrow yRx$$

• بما أن الضرب تبديلي في Z إذن R تناظرية

③ التعدي :

$$\forall (p,q),(p',q'),(p'',q'') \in E \,;$$

$$\left.\begin{matrix} (p,q)R(p',q') \\ \wedge \\ (p',q')R(p'',q'') \end{matrix}\right\} \overset{?}{\Rightarrow} (p,q)R(p'',q'')$$

• من الفرض نستنتج أن :

$$\begin{matrix} p.q' = q.p' \\ \wedge \\ p'q'' = q'.p'' \end{matrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \frac{p'}{q'} = \frac{p}{q} \\ \wedge \\ \frac{p'}{q'} = \frac{p''}{q''} \end{matrix}\right] \Rightarrow \begin{matrix} \frac{p}{q} = \frac{p''}{q''} \\ p.q'' = q.p'' \\ (p.q)R(p'',q'') \end{matrix}$$

• فإذا R متعدية

• وبما أن R انعكاسية وتناظرية ومتعدية اذا R تكافؤ

- صف تكافؤ عنصر a من مجموعة E معرف عليها علاقة تكافؤ R هو :

$$[a] = \{x : x \in E \,;\, aRx\}$$

$$[(1,1)] = \{(x,y) \in E \,;\, (1,1)R(x,y)\}$$

$$(1,1)R(x,y) \Leftrightarrow 1.y = 1.x \Rightarrow x = y$$

$$[(1,1)] = \{(y,y) \,;\, y \in \mathbb{N}^*\}$$

$$= \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),\ldots\ldots\}$$

- صف تكافؤ :

$$[(p,q)] = \{(x,y) \in E \,;\, (x,y)R(p,q)\}$$

$$(x,y)R(p,q) \Leftrightarrow x.q = y.p \Rightarrow x = \frac{y.p}{q}$$

$$[(p,q)] = \left\{\left(\frac{y.p}{q}, y\right) : y \in \mathbb{N}^*\right\}$$

مثال:

$$[(2,3)] = \{(\tfrac{2y}{3}, y);\ y \in \mathbb{N}^*\}$$
$$= \{(\tfrac{2}{3}, 1), (\tfrac{4}{3}, 2), (\tfrac{6}{3}, 3), (\tfrac{8}{3}, 4), \ldots\}$$