



TRANSISTORS

تحليل 1

الدكتور مهند بكر

قسم المتناهيات 2024



انضم إلى مجموعة التلغرام الخاصة بنا
عبر مسح الرمز جانباً أو [اضغط هنا](#)

١- حل:

- البرهان الرياضي: ← الآيات بالشروح
- البرهان المباشر
- نفي الفرض

البرهان المباشر يعمد على البرهان المباشر من أقصى الطرق ولكنه الأصعب حيث تتطاول من الفرض وتناقش منطقياً إلى أن تصل بصحة المطلب تسلسل مباشر.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n < \sqrt{n^2 + 1}$$

تمرين ١: برهن صحة القضية

الحل:

$$n^2 + 1 > n^2$$

$$\sqrt{n^2 + 1} > \sqrt{n^2}$$

$$n < \sqrt{n^2 + 1}$$

لدينا أنه أيًا كان العدد الطبيعي n فإن:
* ملحوظة لم تغير جوهر إثابة البرهان عند
الخط، كنفتأنح الخط التبريري متزامن تمامًا على
مجموعة الأعداد الطبيعية \mathbb{N}

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

تمرين ٢: برهن صحة القضية

الحل:

$$L_1 = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n$$

$$L_1 = n(n-1) + \dots + 3 + 2 + 1$$

ولدينا:
مجموع طرف الطرف

$$2L_1 = (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) + (n+1)$$

$$2L_1 = n(n+1) \Rightarrow L_1 = \frac{n(n+1)}{2} - L_2$$

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1} = a \frac{1-r^n}{1-r}$$

تمرين ٣:

الحل:

$$L_1 = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-2} + ar^{n-1}$$

$$-rL_1 = -ar - ar^2 - ar^3 - \dots - ar^{n-1} - ar^n$$

لدينا:

$$L_1 - rL_1 = a - ar^n$$

$$\Rightarrow L_1(1-r) = a - ar^n \Rightarrow L_1 = a \frac{1-r^n}{1-r}$$

بضم طرف المطرف

[2] طريقة نقص المرضن:

* برهان مباشر اذا كان $x=3$ فإن $2x+5=11$

$$2x = 11 - 5 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3$$

* نقص المرضن اذا كان $x=3$ فإن $2x+5=11$

نفرض جدلاً أن $x \neq 3$

$$\Rightarrow 2x \neq 6 \Rightarrow 2x+5 \neq 11$$

وصلنا بذلك مع المضييات فالمرضن الجدي خاطئ فإن $x=3$

نقص المرضن: نطلق من نفيه المطلوب ونناقش منطقياً حتى يصل إلى نتيجة لا يمكن قبولها

بالتالي يصل إلى صحة المطلوب بشكل غير مباشر

$$A_n \in \mathbb{N}: \sqrt{n^2 + 1} > n$$

$$3n \in \mathbb{N}: \sqrt{n^2 + 1} \leq n$$

نفرض جدلاً أن

$$1 \leq n \leq 5 \quad \text{ما زلنا بونجر}$$

وهذا ينافي فالمرضن الجدي خاطئ والعلاقة الأساسية صحيحة

$$A_n \in \mathbb{N}^*: \frac{1}{n^2} < \frac{3}{n(n+1)}$$

$$3n \in \mathbb{N}^*: \frac{1}{n^2} > \frac{3}{n(n+1)}$$

* برهان 2: برهان أن

نفرض جدلاً أن:

$$\frac{n^2}{3} < n(n+1)$$

$$\Rightarrow 3n^2 < n^2 + n \Rightarrow 2n^2 < n \Rightarrow 2n < 1$$

$$\Rightarrow n < \frac{1}{2}$$

وهذا غير ممكن (وجود عدد طبيعي يختلف المضي واصغر من $\frac{1}{2}$)

*واحد: يتحقق صحة العلاقة

$$4n > 3 \cdot 2n^2 > (n+1)^2$$

$$3n > 3 \cdot 2n^2 > n+1$$

$$\sqrt{2n} < n+1$$

$$\sqrt{2}n < 1$$

$$\Rightarrow n < \frac{1}{\sqrt{2}-1}$$

وَهَذَا تَسْقِفُنَّ وَالظَّرْفُ الْعَدْلِيُّ خَاطِئٌ وَالعَلَاقَةُ الْأَسَاسِيَّةُ مُسْبِبَةٌ

2) من أجل a, b, c ثلاثة أعداد حقيقة فإن

$$a^2 + b^2 + c^2 > ab + ac + bc$$

$$(a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2 > 0$$

$$a^2 - 2ab + b^2 + a^2 - 2ac + c^2 + b^2 - 2bc + c^2 > 0$$

$$\Rightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2ac - 2bc > 0$$

$$a^2 + b^2 + c^2 > ab + ac + bc$$

وَهُوَ الْمُطَلُوبُ.

TRANSISTORS

١١- الاستقراء الرياضي

- بالرغم من أنها أطول الطرق لكنها الأسهل لأنها عبارة عن اتباع خطوات محددة:

١) تثبت صحة المضيّة من أجل أول قيمة للمعدّ الصّيغي (١).

٢) نفترض بأنّ المضيّة صحيحة من أجل قيمة مالمعدّ الصّيغي (n) ولتكن (n).

٣) ثبت صحة العلاقة من أجل القيمة التالية (n+1) أي (n+1).

عندما تكون تلك المضيّة صحيحة من أجل كل الأعداد الصّيغيّة بدءاً من القيمة الأولى (١) لست بالضرورة أن تكون تلك القيمة (٥) أو (١).

- تفريغ ①

$$\forall n \in \mathbb{N} : \sqrt{n^2 + 1} > n$$

• ثبت صحة العلاقة من أجل $n=0$:

$$L_1 = \sqrt{0^2 + 1} = 1$$

$$L_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad L_1 > L_2$$

• نفترض صحة العلاقة من أجل (n):

$$\sqrt{n^2 + 1} > n$$

• ثبت صحة العلاقة من أجل $(n+1)$:

$$\sqrt{(n+1)^2 + 1} > n+1$$

أي لثبت

$$L_1 = \sqrt{(n+1)^2 + 1} > \sqrt{(n+1)^2} = n+1 = L_2$$

• والعلاقة صحيحة من أجل $(n+1)$ وبالتالي حسب الاستقراء الرياضي العلاقة الأساسية محققة من أجل أي عدد طبيعي (n).

- تفريغ ②

$$1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

- أياً كان المعدّ الصّيغي الموجب تماماً:

• ثبت صحة العلاقة من أجل $n=1$:

$$L_1 = 1$$

$$L_2 = \frac{1(2)}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad L_1 = L_2$$

• نفترض صحة العلاقة من أجل (n):

$$1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

نُشِّت صحة العلاقة من أجل $(n+1)$

$$L_1 = 1+2+3+\dots+n+(n+1) \\ = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} - \frac{(n+1)(n+2)}{2} = L_2$$

والملاقة محققة من أجل $(1+1)$ وبالتالي $L_1 = L_2$ الاستقراء الريادي العلاقة الأولى أصلحة محققة من أجل أي عدد طبيعي (n) .

نُشِّت ③

نُشِّت صحة المتميزة من أجل العدد الطبيعي الموجب تماماً:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n(n+1)}{2}^2 = (1+2+3+\dots+n)^2$$

استنادي التمرين السابق أن

$$1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2} \\ \Rightarrow (1+2+3+\dots+n)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \\ 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

نُشِّت صحة العلاقة من أجل $n=1$

$$L_1 = 1^3 = 1 \\ L_2 = \left(\frac{1(2)}{2}\right)^2 = 1 \quad \Rightarrow L_1 = L_2$$

نُفِّرض صحة العلاقة من أجل n :

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n(n+1)}{2}^2$$

نُشِّت صحة العلاقة من أجل $(n+1)$:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}^2$$

$$L_1 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3$$

$$= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3$$

$$= \frac{(n^2(n+1)^2) + 4(n+1)^3}{4} = \frac{(n+1)^2(n^2+4(n+1))}{4}$$

$$= \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}^2 = L_2$$

طلب اضافي

- استناداً من العلاقة المثبتة سابقاً لحساب المجموع:

$$A = 6^3 + 7^3 + \dots + 10^3$$

$$A = 1^3 + 2^3 + \dots + 10^3$$

$$= \left(\frac{10(11)}{2} \right)^2 = 55^2 = 3025$$

لذا:

ولدينا أيضاً:

$$A_2 = 1^3 + 2^3 + \dots + 5^3$$

$$= \left(\frac{5(6)}{2} \right)^2 = 15^2 = 225$$

ومنه:

$$\Rightarrow A - A_1 - A_2 = 3025 - 225 = 2800$$

- تمارين ④:

$$2^n > 2n+1$$

- يرهن صحة العلاقة:

باستخدام الإثبات بالتجزيع

$$n=0 \Rightarrow 2^0 > 2(0)+1 \quad \times$$

$$n=1 \Rightarrow 2^1 > 2(1)+1 \quad \times$$

$$n=2 \Rightarrow 2^2 > 2(2)+1 \quad \times$$

$$n=3 \Rightarrow 2^3 > 2(3)+1 \quad \checkmark$$

فهي صحة المقدمة من أجل $n=3$

$$L_1 = 2^3 - 8$$

$$L_2 = 2(3)+1 = 7$$

$$\Rightarrow L_1 > L_2$$

نفرض صحة العلاقة من أجل n :

$$2^n > 2n+1$$

نثبت صحة العلاقة من أجل $n+1$:

$$2^{n+1} > 2(n+1)+1 = 2n+3$$

$$L_1 = 2^n \cdot 2 > 2(2n+1)$$

$$= 4n+2$$

$$= 2n+2 + \textcircled{2n}$$

$$> 2n+2+1 = 2n+3$$

برقية

تمرين

$$\forall n \in \mathbb{N}: 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n}$$

نثبت صحة العلاقة من أجل $n=0$

$$L_1 = 1$$

$$L_2 = 2 - \frac{1}{2^0} = 2 - 1 = 1 \Rightarrow L_1 = L_2$$

نفرض صحة العلاقة من أجل n

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n}$$

نثبت صحة العلاقة من أجل $n+1$

$$\frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}}{\downarrow} = 2 - \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$2 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{2}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{1}{2^{n+1}} = L_2$$

تمرين

$$n > 0: 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$$

نثبت صحة العلاقة من أجل $n=1$

$$L_1 = 1$$

$$L_2 = 2^1 - 1 = 1 \Rightarrow L_1 = L_2$$

نفرض صحة العلاقة من أجل n

$$1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$$

نثبت صحة العلاقة من أجل $n+1$

$$\frac{1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} + 2^n}{2^n - 1 + 2^n} = 2 \cdot 2^n - 1 = 2^{n+1} - 1$$

(3) تبرير

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

نثبت صحة العلاقة من أجل $n=1$

$$L_1 = \frac{1}{2}$$

$$L_2 = \frac{1}{2} \rightarrow L_1 = L_2$$

نفرض صحة العلاقة من أجل n

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

نثبت صحة العلاقة من أجل $n+1$

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)}{n+2}$$

$$\frac{n}{n+1} \neq \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$-\frac{n(n+2)}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2} = L_2$$

(4) تبرير

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 1+2 \times 2! + 3 \times 3! + \dots + n \times n! = (n+1)! - 1$$

نثبت صحة العلاقة من أجل $n=1$

$$L_1 = 1$$

$$L_2 = (1+1)! - 1 = 2! - 1 = 1 \rightarrow L_1 = L_2$$

نفرض صحة العلاقة من أجل n

$$1+2 \times 2! + 3 \times 3! + \dots + n \times n! = (n+1)! - 1$$

نثبت صحة العلاقة من أجل $n+1$

$$1+2 \times 2! + 3 \times 3! + \dots + n \times n! + (n+1)(n+1)! = (n+2)! - 1$$

$$L_1 = (n+1)! - 1 + (n+1)(n+1)!$$

$$= (n+1)! [n+1 + 1] - 1 = (n+1)! (n+2) - 1$$

$$= (n+2)! - 1$$

المطالبات

للمساللة عدد لا تهانى من الحدود بعضها البعض في قيم هذه الحدود فمثلاً لدينا المساللة الآتية:

$$(1, 2, 4, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32, 35, 38, 41, 44, 47, 50, 53, 56, 59, 62, 65, 68, 71, 74, 77, 80, 83, 86, 89, 92, 95, 98, 101, 104, 107, 110, 113, 116, 119, 122, 125, 128, 131, 134, 137, 140, 143, 146, 149, 152, 155, 158, 161, 164, 167, 170, 173, 176, 179, 182, 185, 188, 191, 194, 197, 199, 202, 205, 208, 211, 214, 217, 220, 223, 226, 229, 232, 235, 238, 241, 244, 247, 250, 253, 256, 259, 262, 265, 268, 271, 274, 277, 280, 283, 286, 289, 292, 295, 298, 301, 304, 307, 310, 313, 316, 319, 322, 325, 328, 331, 334, 337, 340, 343, 346, 349, 352, 355, 358, 361, 364, 367, 370, 373, 376, 379, 382, 385, 388, 391, 394, 397, 399, 402, 405, 408, 411, 414, 417, 420, 423, 426, 429, 432, 435, 438, 441, 444, 447, 450, 453, 456, 459, 462, 465, 468, 471, 474, 477, 480, 483, 486, 489, 492, 495, 498, 501, 504, 507, 510, 513, 516, 519, 522, 525, 528, 531, 534, 537, 540, 543, 546, 549, 552, 555, 558, 561, 564, 567, 570, 573, 576, 579, 582, 585, 588, 591, 594, 597, 599, 602, 605, 608, 611, 614, 617, 620, 623, 626, 629, 632, 635, 638, 641, 644, 647, 650, 653, 656, 659, 662, 665, 668, 671, 674, 677, 680, 683, 686, 689, 692, 695, 698, 701, 704, 707, 710, 713, 716, 719, 722, 725, 728, 731, 734, 737, 740, 743, 746, 749, 752, 755, 758, 761, 764, 767, 770, 773, 776, 779, 782, 785, 788, 791, 794, 797, 799, 802, 805, 808, 811, 814, 817, 820, 823, 826, 829, 832, 835, 838, 841, 844, 847, 850, 853, 856, 859, 862, 865, 868, 871, 874, 877, 880, 883, 886, 889, 892, 895, 898, 901, 904, 907, 910, 913, 916, 919, 922, 925, 928, 931, 934, 937, 940, 943, 946, 949, 952, 955, 958, 961, 964, 967, 970, 973, 976, 979, 982, 985, 988, 991, 994, 997, 999, 1000, 1001, 1002, 1003, 1004, 1005, 1006, 1007, 1008, 1009, 1010, 1011, 1012, 1013, 1014, 1015, 1016, 1017, 1018, 1019, 1020, 1021, 1022, 1023, 1024, 1025, 1026, 1027, 1028, 1029, 1030, 1031, 1032, 1033, 1034, 1035, 1036, 1037, 1038, 1039, 1040, 1041, 1042, 1043, 1044, 1045, 1046, 1047, 1048, 1049, 1050, 1051, 1052, 1053, 1054, 1055, 1056, 1057, 1058, 1059, 1060, 1061, 1062, 1063, 1064, 1065, 1066, 1067, 1068, 1069, 1070, 1071, 1072, 1073, 1074, 1075, 1076, 1077, 1078, 1079, 1080, 1081, 1082, 1083, 1084, 1085, 1086, 1087, 1088, 1089, 1090, 1091, 1092, 1093, 1094, 1095, 1096, 1097, 1098, 1099, 1100, 1101, 1102, 1103, 1104, 1105, 1106, 1107, 1108, 1109, 1110, 1111, 1112, 1113, 1114, 1115, 1116, 1117, 1118, 1119, 1120, 1121, 1122, 1123, 1124, 1125, 1126, 1127, 1128, 1129, 1130, 1131, 1132, 1133, 1134, 1135, 1136, 1137, 1138, 1139, 1140, 1141, 1142, 1143, 1144, 1145, 1146, 1147, 1148, 1149, 1150, 1151, 1152, 1153, 1154, 1155, 1156, 1157, 1158, 1159, 1160, 1161, 1162, 1163, 1164, 1165, 1166, 1167, 1168, 1169, 1170, 1171, 1172, 1173, 1174, 1175, 1176, 1177, 1178, 1179, 1180, 1181, 1182, 1183, 1184, 1185, 1186, 1187, 1188, 1189, 1190, 1191, 1192, 1193, 1194, 1195, 1196, 1197, 1198, 1199, 1200, 1201, 1202, 1203, 1204, 1205, 1206, 1207, 1208, 1209, 12010, 12011, 12012, 12013, 12014, 12015, 12016, 12017, 12018, 12019, 12020, 12021, 12022, 12023, 12024, 12025, 12026, 12027, 12028, 12029, 12030, 12031, 12032, 12033, 12034, 12035, 12036, 12037, 12038, 12039, 12040, 12041, 12042, 12043, 12044, 12045, 12046, 12047, 12048, 12049, 12050, 12051, 12052, 12053, 12054, 12055, 12056, 12057, 12058, 12059, 12060, 12061, 12062, 12063, 12064, 12065, 12066, 12067, 12068, 12069, 12070, 12071, 12072, 12073, 12074, 12075, 12076, 12077, 12078, 12079, 12080, 12081, 12082, 12083, 12084, 12085, 12086, 12087, 12088, 12089, 12090, 12091, 12092, 12093, 12094, 12095, 12096, 12097, 12098, 12099, 120100, 120101, 120102, 120103, 120104, 120105, 120106, 120107, 120108, 120109, 120110, 120111, 120112, 120113, 120114, 120115, 120116, 120117, 120118, 120119, 120120, 120121, 120122, 120123, 120124, 120125, 120126, 120127, 120128, 120129, 120130, 120131, 120132, 120133, 120134, 120135, 120136, 120137, 120138, 120139, 120140, 120141, 120142, 120143, 120144, 120145, 120146, 120147, 120148, 120149, 120150, 120151, 120152, 120153, 120154, 120155, 120156, 120157, 120158, 120159, 120160, 120161, 120162, 120163, 120164, 120165, 120166, 120167, 120168, 120169, 120170, 120171, 120172, 120173, 120174, 120175, 120176, 120177, 120178, 120179, 120180, 120181, 120182, 120183, 120184, 120185, 120186, 120187, 120188, 120189, 120190, 120191, 120192, 120193, 120194, 120195, 120196, 120197, 120198, 120199, 1201000, 1201001, 1201002, 1201003, 1201004, 1201005, 1201006, 1201007, 1201008, 1201009, 12010010, 12010011, 12010012, 12010013, 12010014, 12010015, 12010016, 12010017, 12010018, 12010019, 12010020, 12010021, 12010022, 12010023, 12010024, 12010025, 12010026, 12010027, 12010028, 12010029, 12010030, 12010031, 12010032, 12010033, 12010034, 12010035, 12010036, 12010037, 12010038, 12010039, 12010040, 12010041, 12010042, 12010043, 12010044, 12010045, 12010046, 12010047, 12010048, 12010049, 12010050, 12010051, 12010052, 12010053, 12010054, 12010055, 12010056, 12010057, 12010058, 12010059, 12010060, 12010061, 12010062, 12010063, 12010064, 12010065, 12010066, 12010067, 12010068, 12010069, 12010070, 12010071, 12010072, 12010073, 12010074, 12010075, 12010076, 12010077, 12010078, 12010079, 12010080, 12010081, 12010082, 12010083, 12010084, 12010085, 12010086, 12010087, 12010088, 12010089, 12010090, 12010091, 12010092, 12010093, 12010094, 12010095, 12010096, 12010097, 12010098, 12010099, 120100100, 120100101, 120100102, 120100103, 120100104, 120100105, 120100106, 120100107, 120100108, 120100109, 120100110, 120100111, 120100112, 120100113, 120100114, 120100115, 120100116, 120100117, 120100118, 120100119, 120100120, 120100121, 120100122, 120100123, 120100124, 120100125, 120100126, 120100127, 120100128, 120100129, 120100130, 120100131, 120100132, 120100133, 120100134, 120100135, 120100136, 120100137, 120100138, 120100139, 120100140, 120100141, 120100142, 120100143, 120100144, 120100145, 120100146, 120100147, 120100148, 120100149, 120100150, 120100151, 120100152, 120100153, 120100154, 120100155, 120100156, 120100157, 120100158, 120100159, 120100160, 120100161, 120100162, 120100163, 120100164, 120100165, 120100166, 120100167, 120100168, 120100169, 120100170, 120100171, 120100172, 120100173, 120100174, 120100175, 120100176, 120100177, 120100178, 120100179, 120100180, 120100181, 120100182, 120100183, 120100184, 120100185, 120100186, 120100187, 120100188, 120100189, 120100190, 120100191, 120100192, 120100193, 120100194, 120100195, 120100196, 120100197, 120100198, 120100199, 1201001000, 1201001001, 1201001002, 1201001003, 1201001004, 1201001005, 1201001006, 1201001007, 1201001008, 1201001009, 12010010010, 12010010011, 12010010012, 12010010013, 12010010014, 12010010015, 12010010016, 12010010017, 12010010018, 12010010019, 120100100110, 120100100111, 120100100112, 120100100113, 120100100114, 120100100115, 120100100116, 120100100117, 120100100118, 120100100119, 1201001001100, 1201001001001, 1201001001002, 1201001001003, 1201001001004, 1201001001005, 1201001001006, 1201001001007, 1201001001008, 1201001001009, 12010010010010, 12010010010011, 12010010010012, 12010010010013, 12010010010014, 12010010010015, 12010010010016, 12010010010017, 12010010010018, 12010010010019, 120100100100100, 120100100100101, 120100100100102, 120100100100103, 120100100100104, 120100100100105, 120100100100106, 120100100100107, 120100100100108, 120100100100109, 1201001001001000, 1201001001001001, 1201001001001002, 1201001001001003, 1201001001001004, 1201001001001005, 1201001001001006, 1201001001001007, 1201001001001008, 1201001001001009, 12010010010010010, 12010010010010011, 12010010010010012, 12010010010010013, 12010010010010014, 12010010010010015, 12010010010010016, 12010010010010017, 12010010010010018, 12010010010010019, 120100100100100100, 120100100100100101, 120100100100100102, 120100100100100103, 120100100100100104, 120100100100100105, 120100100100100106, 120100100100100107, 120100100100100108, 120100100100100109, 1201001001001001000, 1201001001001001001, 1201001001001001002, 1201001001001001003, 1201001001001001004, 1201001001001001005, 1201001001001001006, 1201001001001001007, 1201001001001001008, 1201001001001001009, 12010010010010010010, 12010010010010010011, 12010010010010010012, 12010010010010010013, 12010010010010010014, 12010010010010010015, 12010010010010010016, 12010010010010010017, 12010010010010010018, 12010010010010010019, 120100100100100100100, 120100100100100100101, 120100100100100100102, 120100100100100100103, 120100100100100100104, 120100100100100100105, 120100100100100100106, 120100100100100100107, 120100100100100100108, 120100100100100100109, 1201001001001001001000, 1201001001001001001001, 1201001001001001001002, 1201001001001001001003, 1201001001001001001004, 1201001001001001001005, 1201001001001001001006, 1201001001001001001007, 1201001001001001001008, 1201001001001001001009, 12010010010010010010010, 12010010010010010010011, 12010010010010010010012, 12010010010010010010013, 12010010010010010010014, 12010010010010010010015, 12010010010010010010016, 12010010010010010010017, 12010010010010010010018, 12010010010010010010019, 120100100100100100100100, 120100100100100100100101, 120100100100100100100102, 120100100100100100100103, 120100100100100100100104, 120100100100100100100105, 120100100100100100100106, 120100100100100100100107, 120100100100100100100108, 120100100100100100100109, 1201001001001001001001000, 1201001001001001001001001, 1201001001001001001001002, 1201001001001001001001003, 1201001001001001001001004, 1201001001001001001001005, 1201001001001001001001006, 1201001001001001001001007, 1201001001001001001001008, 1201001001001001001001009, 12010010010010010010010010, 12010010010010010010010011, 12010010010010010010010012, 12010010010010010010010013, 12010010010010010010010014, 12010010010010010010010015, 12010010010010010010010016, 12010010010010010010010017, 12010010010010010010010018, 12010010010010010010010019, 120100100100100100100100100, 120100100100100100100100101, 120100100100100100100100102, 120100100100100100100100103, 120100100100100100100100104, 120100100100100100100100105, 120100100100100100100100106, 120100100100100100100100107, 120100100100100100100100108, 120100100100100100100100109, 1201001001001001001001001000, 1201001001001001001001001001, 1201001001001001001001001002, 1201001001001001001001001003, 1201001001001001001001001004, 1201001001001001001001001005, 1201001001001001001001001006, 1201001001001001001001001007, 1201001001001001001001001008, 1201001001001001001001001009, 12010010010010010010010010010, 12010010010010010010010010011, 12010010010010010010010010012, 12010010010010010010010010013, 12010010010010010010010010014, 12010010010010010010010010015, 12010010010010010010010010016, 12010010010010010010010010017, 12010010010010010010010010018, 12010010010010010010010010019, 120100100100100100100100100100, 120100100100100100100100100101, 120100100100100100100100100102, 120100100100100100100100100103, 120100100100100100100100100104, 120100100100100100100100100105, 120100100100100100100100100106, 120100100100100100100100100107, 120100100100100100100100100108, 12010010010010010010010010$$

إن هذه المضيقات ستمع بحسب حدود المتسلسلة واحداً تلو الآخر

$$u_0 = 3 \quad \text{الحد الأول}$$

$$u_1 = u_0^2 - 2 = 3^2 - 2 = 7 \quad \text{الحد الثاني}$$

وهكذا

نوجه اطراد المتسلسلة عبر الراومنات فهذا المتسلسلة
لدلواسة اطراد هذه المتسلسلة \Rightarrow (أ) العبران لأحد طرق:

① مفهوم دراسة اسلادة المترى u_n لها وفهم الحالات الآتية:

$$u_n - u_{n+1} > 0 \quad \Rightarrow \text{متزايدة تماماً}$$

$$u_n - u_{n+1} < 0 \quad \Rightarrow \text{متناقصة تماماً}$$

$$u_n - u_{n+1} = 0 \quad \Rightarrow \text{ناتية}$$

فمثلاً لنذكر دراسة المتسلسلة $u_n = 3^n$ (أ)

$$u_n - u_{n+1} = 3^n - 3^{n+1} = 3^n(1 - 3)$$

$$= 1 \cdot 3^n \cdot 3 - 1 + 3^n$$

$$= -3 < 0 \quad \Rightarrow \text{متناقصة تماماً}$$

② نكتب $f(n) = u_n$ إن أمكن ثم ندرس اطراد المترى f (استثناءً إذا كان التابع f مطرد على المجال $[a, b]$) كانت جهة اطراد المتسلسلة u_n للحصى n هي نفسها جهة اطراد التابع f فمثلاً لدراسة المتسلسلة

$$u_n = f(n) = \frac{2n-1}{n+4} \quad \text{حيث } f \text{ معرفة على } [0, +\infty] \text{ وفق: } f(x) = \frac{2x-1}{x+4}$$

$$f'(x) = \frac{2(x+4) - 2x + 1}{(x+4)^2} = \frac{9}{(x+4)^2} > 0$$

وهي f متزايدة تماماً على $[0, +\infty]$ ومنه u_n متزايدة تماماً.

③ عندما تكون المتسلسلة ذات حدود موجبة تماماً يمكن أن نقاوم من النسبة $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ معاً

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1 \quad \Rightarrow \text{متزايدة تماماً} \quad \text{حيث:}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \quad \Rightarrow \text{متناقصة تماماً}$$

$$U_n = 1 \Rightarrow \text{لما} \rightarrow$$

ممثله لدالة المثلث الآسي:

$$\frac{w_n}{w_{n+1}} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n \left(\frac{2}{3}\right)}{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}} = \frac{2}{3} < 1$$

المتالية متزايدة تماماً.

نفرض في اى حالة عدد طبقي U_n ليكن

$$U_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

ولما U_n أثبتت أن (U_n) متزايدة تماماً.

$$U_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

$$U_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

$$w_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

$$w_{n+1} = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+2}$$

$$w_{n+1} - w_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} + \frac{1-2}{2n+2} = \frac{2n+2-2n-1}{(2n+1)(2n+2)}$$

$$= \frac{1}{(n+1)(2n+2)} > 0$$

ـ (w_n) متزايدة تماماً

ـ نفرض ادراك المتالية ذات الحد العام (a_n)

$$a_n = \frac{n}{n+1}$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+2)(n+1)} = \frac{n^2+2n+1-n^2-2n}{(n+2)(n+1)}$$

$$= \frac{1}{(n+2)(n+1)} > 0 \Rightarrow (a_n) \text{ اصواتية تماماً} \Rightarrow 0$$

-تمرين: ادرس اطراط المتسلسلة

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \\ \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} \\ &= \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} \\ &= \frac{n+2-n-1}{n+1-n} \cdot \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} < 1 \end{aligned}$$

لـ المتسلسلة (a_n) متناقصة تماماً.

$$a_n = \frac{2^n}{n!}$$

-تمرين: ادرس اطراط المتسلسلة

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n+1}$$

$$n=0 \Rightarrow 2 > 1$$

$$n=1 \Rightarrow 1 = 1$$

$$n=2 \Rightarrow \frac{2}{3} < 1$$

$$n=3 \Rightarrow \frac{2}{4} < 1$$

(a_n) متناقصة تماماً "بدعا" من الحد الثالث

TRANSISTORS

المتالية الهندسية	المتالية الحسابية	
$U_{n+1} = U_n \cdot q$	$U_{n+1} = U_n + r$	تعريفه
$\frac{U_{n+1}}{U_n} = q$	$U_{n+1} - U_n = r \in \mathbb{R}$	معيار
$U = U_1 q^{n-p}$	$U = U_p + (n-p)r$	العلاقة بين حدود
$m = j - i + 1$	$m = j - i + 1$	عدد الحدود
$S = a \left(\frac{1 - q^m}{1 - q} \right)$ عدد أعداد أول عدد	$S = m \left(a + \frac{a+l}{2} \right)$ عدد أعداد	مجموع مدار
$b^2 = a \cdot c$	$b = \frac{a+c}{2}$	a, b, c ثلاثة حدود متالية

المتالية الحسابية

(٢٤) مسالحة حسابية عندها الأول (٣) وأساسها (٤)

$$U_1 = 3, 1, 5, 9, 13, \dots$$

$$U_n = U_1 + (n-1)r$$

$$U_4 = U_1 + (4-1) \cdot (4)$$

$$= 1 + (3) \cdot (4) = 13$$

$$S = m \left(a + \frac{a+l}{2} \right) = 3 \left(1 + \frac{1+9}{2} \right) = 15$$

المتالية الهندسية

(٢٥) مسالحة هندسية عندها الأول (٢) وأساسها (٣)

$$2, 6, 18, 54$$

$$U_n = U_1 \cdot q^{n-p}$$

$$U_4 = U_1 \cdot (3)^{4-1} = 6 \cdot (3)^3 = 54$$

$$S = a \left(\frac{1 - q^m}{1 - q} \right) = 2 \left(\frac{1 - 3^m}{1 - 3} \right)$$

$$= 2 \cdot (26) = 52$$

نفرض: متالية حسابية حد ها الأول (5) و أساسها (3)

① ماقيمه الحد السابع U_7

② ماقریب الحد ذو القيمة U_{62}

الحل:

$$U_n = U_1 + (n-1)(3)$$

$$= 5 + (n-1)(3) = 23$$

1]

$$U_n = U_1 + (n-1)(3)$$

2]

$$62 = 5 + (n-1)(3)$$

$$62 = 5 + 3n - 3$$

$$\Rightarrow 3n = 60$$

$$n = 20$$

نفرض: أوحد مجموع الحدود الـ (12) الأولي من متالية حسابية حد ها الأول ③ و أساسها ②

$$S = m \left(\frac{3+27}{2} \right) \Rightarrow S = 168$$

الحل:

$$U_n = U_1 + (n-1)(2)$$

$$= 3 + (n-1)(2) = 25$$

نفرض: أوحد الحد السابع من المتالية الهندسية

1, 2, 4, 8

$$U_n = U_1 \cdot q^{n-1} = 1 \cdot 2^{n-1} = 2^n$$

نفرض: ماقریب الحد الذي قيمته 192 في المتالية الهندسية

3, 6, 12, ...

$$U_n = U_1 \cdot q^{n-1}$$

$$192 = 3(2)^{n-1}$$

$$2^n = 64$$

$$2^n = 2^6 \Rightarrow n-1 = 6$$

$$n = 7$$

المتاليات المحدودة

نقول عن المتالية أنها محدودة من الأعلى إذا وجد عدد حقيقي M بحيث يكون $a_n \leq M$ حيث يكون a_n العدد n باشره أحد الأعلى للمتالية ونقول أن المتالية محدودة من الأدنى إذا وجد عدد حقيقي N بحيث يكون $a_n \geq N$ حيث يكون a_n العدد n الأدنى للمتالية.

نقول عن المتالية (a_n) أنها محدودة إذا وجد عدوان M و m حقيقيان $m \leq a_n \leq M$ حيث a_n ينتمي إلى (a_m, a_M) أي إذا كلتا المتالية محدودة فهي محدودة من الأعلى والأدنى معاً.

$$a_n = n^2 \text{ محدودة من الأدنى } 0 \leq n^2$$

$$a_n = -n^2 \text{ محدودة من الأعلى } 0 \leq -n^2$$

$$a_n = \sin(n) \text{ محدودة } -1 \leq \sin(n) \leq 1$$

$$a_n = (-1)^n \text{ محدودة } -1 \leq (-1)^n \leq 1$$

$$a_n = \frac{1}{n} \text{ محدودة } 0 < \frac{1}{n} \leq 1$$

ćerni

١) متالية هندسية الحد الثاني فيها (6) والحد السابع (192).

٢) أوجد أساس المتالية.

٣) أوجد الحد الأول والعاشر.

٤) أوجد مجموع الحدود السبعة الأولى من متالية هندسية

٥) متالية هندسية مجموع حدتها الأول والثالث (16) ومجموع عدتها الثاني والرابع (22) أوجد كردد الحمسة الأولى.

حل الوظيفة

$$U_2 = 6$$

□ (I)

$$U_7 = 192$$

$$U_m = U_p \cdot q^m$$

$$\Rightarrow U_7 = U_2 \cdot q^{7-2}$$

$$\Rightarrow 192 = 6 \cdot q^5$$

$$\Rightarrow 32 = q^5 \Rightarrow 2^5 = q^5 \Rightarrow q = 2$$

$$U_2 = U_1 \cdot q^1$$

□

$$\Rightarrow U_1 = \frac{U_2}{q} = \frac{6}{2} = 3$$

$$U_{10} = U_7 \cdot q^{10-7}$$

$$\Rightarrow U_{10} = U_7 \cdot q^3 = 192 \times 2^3 = 1536$$

4, 8, 16, ...

□

$$q = 2, U_1 = a = 4, n = 7 - 1 + 1 = 7$$

$$S = a \left(\frac{1 - q^n}{1 - q} \right)$$

$$= 4 \left(\frac{1 - (2)^7}{1 - 2} \right) = 4 \left(\frac{1 - 128}{1 - 2} \right) = 508$$

$$U_1 + U_2 + r = 16$$

$$\Leftarrow U_1 + U_3 = 16$$

□ (III)

$$U_1 + U_1 + r + r = 16$$

$$\Rightarrow \boxed{U_1 + r = 8} \quad \square$$

$$U_1 + r + U_1 + 3r = 22$$

$$\Leftarrow U_2 + U_4 = 22$$

$$2U_1 + 4r = 22$$

$$\Rightarrow \boxed{U_1 + 2r = 11} \quad \square$$

نطرح المعادلتين (II) و (III) نجد: $r = 3$

$$\Rightarrow U_1 = 8 - 3 = 5$$

$$\Rightarrow U_2 = U_1 + r = 5 + 3 = 8$$

$$\Rightarrow U_3 = 8 + 3 = 11$$

$$\Rightarrow U_4 = 11 + 3 = 14$$

$$\Rightarrow U_5 = 14 + 3 = 17$$

ـ تقارب متسلسلة

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$$

ـ نقول عن متسلسلة (أ) أنها متقاربة من العدد ($l \in \mathbb{R}$) إذا وفقط إذا كان ونسمى العدد (النهاية المتسلسلة)

ـ نقول عن المتسلسلة (أ) أنها متباعدة نحو (∞) إذا وفقط إذا $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ ومتباعدة نحو ($-\infty$) عندما

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$$

ـ عندما يكون للمتسلسلتين نهايتين مختلفتين نقول إنه ليس للمتسلسلة نهاية

ـ مثال على تقارب المتسلسلات الآلية

$$\text{1) } a_n = \frac{2n^2 + 3}{n - 1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$$

ـ وهي متباعدة نحو (∞)

$$\text{2) } a_n = \frac{1 + n^2}{2n^2 + 5n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

ـ متقاربة من العدد (0)

$$\text{3) } a_n = \frac{1}{\ln(n)} + 2$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$$

ـ متقاربة من العدد (2)

$$\text{4) } a_n = \sqrt{\frac{4n - 3}{n + 1}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{4} = 2$$

$$\text{5) } U_n = \cos\left(\frac{2n\pi}{3n + 1}\right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos(\pi - \frac{\pi}{3})$$

$$= -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$6) U_n = \sin\left(\frac{1-n\pi}{2n+1}\right)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

$$7) U_n = \frac{2n+(-1)^n}{3n}$$

$$U_n = \frac{2}{3} + \frac{(-1)^n}{3n}$$

$$\frac{-1}{3n} < \frac{(-1)^n}{3n} < \frac{1}{3n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \frac{2}{3} + 0 = \frac{2}{3}$$

$$8) U_n = \frac{n!-2}{n!}$$

$$U_n = 1 - \frac{2}{n!}$$

$$n > 4$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} n! = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 1$$

خواص

1) للمساللة المتقاربة نهاية وحيدة.

2) كل مساللة متقاربة تكون محدودة والعكس غير صحيح بالضرورة فليس كل مساللة محدودة متقاربة.

$U_n = (-1)^n$ محدودة $1 \leq U_n \leq 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 1$

لكلها ليست متقاربة

محدودة لكنها متباينة لأنها تسعى إلى نهايتي مختلفتين

$$1 = (-1)^0$$

$$-1 = (-1)^1$$

3) اذا كانت المساللة متزايدة ومحدودة من الأعلى تكون متقاربة.

4) اذا كانت المساللة متناقصة ومحدودة من الأدنى تكون متقاربة.

- الممتاليات الامتناهية في الصفر:

• نسمى الممتالية (Q) الها لا ممتالية في الصفر اذا كان $\lim_{n \rightarrow +\infty} Q_n = 0$

مثال: أثبت ان الممتالية الامتناهية في الصفر:

$$\boxed{1} U_n = \sqrt{n^2 + n} - n - \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow U_n = \frac{n^2 + n - n^2}{\sqrt{n^2 + n} + n} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{n}{\sqrt{n^2 + n} + n} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{n}{\sqrt{n^2(1 + \frac{1}{n})} + n} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{n}{n\sqrt{1 + \frac{1}{n}}} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{n}{n(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1)} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} - \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

$$\boxed{2} U_n = \frac{\sqrt{n} + 1}{n + 1}$$

$$= \frac{\sqrt{n}(1 + \frac{1}{\sqrt{n}})}{n(1 + \frac{1}{n})}$$

$$= \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}(1 + \frac{1}{n})}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \frac{1 + 0}{+\infty(1 + 0)} = 0$$

- خواص:

- 1) المتالية الثانية (C, C, C, \dots) هي متالية لا متناهية في الصفر اداً و فقط اذا كان $C=0$.
- 2) اذا لم تكن متالية متناهية من محدود المتالية الام المتالية في الصفر او اذا اضفت عدد متساوياً من الاعداد المحدودة ملائتها تبقى لا متناهية في الصفر.
- 3) المتالية الام متناهية في الصفر هي متالية محدودة.
- 4) حاصل جمع متاليتين لا متناهيتين في الصفر هو متالية لا متناهية في الصفر.
- 5) حاصل خد امتاليتين لا متناهية في الصفر و متالية محدودة هو متالية لا متناهية في الصفر.
- 6) خد اعداد من المتاليات الام متناهيات في الصفر هو متالية لا متناهية في الصفر.
- 7) حاصل قسمة متاليتين لا متناهيتين في الصفر ليس بالصورة لا متناهية في الصفر.

* فمثلاً لدین المتاليتين :

$$\frac{1}{n} = a_n \quad (a)$$

$$\frac{1}{2^n} = b_n \quad (b)$$

* فما لا متناهيتين في الصفر.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{2^n}} = 2$$

مثلاً

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = 2$$

* وهي متقاربة من العدد (2) لكونها سمتالية لا متناهية في الصفر

- نعمون: ادرس تقارب المتالية:

$$u_n = \frac{\sin^2 n}{2^n}$$

ن

$$u_n = \left(\frac{\sin^2 n}{2^n} \right)$$

لما متناهية في الصفر
محدودة

لما متناهية في الصفر

$$0 < \frac{\sin^2 n}{2^n} < \frac{1}{2^n}$$

ن

-ذكرت مرسندة ادراكى (2) عدد حقيقة تأسيس المطالبة الهمسية ٩-٢٤ عنى:

$$(\text{متقاربة}) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0 \quad \text{لذلك} -1 < q < 1 \quad \square$$

$$(\text{esclue}) \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \infty \text{ si } k \neq 0 \quad \square$$

١- لس لهابهية

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1 \quad \text{لما كانت } q = 1 \text{ ملحوظة}$$

المنتاليات الـ111 متناهية في الكبر:

وَهُوَ كَا مُتَّالِهِ تَسْعِيْهُ (۲۷)

مکالمہ

٢) ماهل جنابه ممتالبة لامتناهية في الكبر (أ) وممتالبة متقاربة (ب) [ليس ممتالبة لامتناهية في الكبر فهو ممتالبة لامتناهية في الكبر.]

٣) في كانت المتسلسلة (a_n) متسلسلة لامتناهية في الكبر والمتسلسلة (b_n) متسلسلة محددة في المتسلسلات.

(a, b)

$$(a \times b)$$

$$\left(\frac{a}{b} \right), b \neq 0$$

* هي مُتَالِيَّة لـ مُتَالِيَّة من الكِبْرِ.

وظيفة: أنتَ أَنَّ المَسَالَةَ:

لـ $\frac{1-3}{2^n}$ لا متناهية في الكبر.



TRANSISTORS

تحليل 1

الدكتورة شذا الخطيب

قسم التوابع 2024



انضم إلى مجموعة التلغرام الخاصة بنا
عبر مسح الرمز جانباً أو اضغط هنا

- التحليلا:

- التابع هو علاقة تربط بين كل عنصر من المجموعة الأولى (المتنق) لعنصر واحد فقط من المجموعة الثانية (المستقر).

- لتكن المجموعتين $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{5, 6\}$ ولنعرف بيان علاقة بين A و B حيث $R: A \rightarrow B$

$$R = \{(1, 5), (1, 6), (2, 5), (2, 6)\}$$

ليس تابعاً لسبب وجود قيم في المتنق ترتبط بأكثر من عنصر من المستقر أو بسبب وجود قيمة من المتنق لا ترتبط بأية عنصر في المستقر.

- الحل:

نلاحظ أن: $\exists x = 3 \in A, \exists y \in B: x \neq y \wedge (x, y) \in R \Leftrightarrow (1, 5) \in R$

أو مثال آخر:

احتلال الشرط الأول $\exists x = 3 \in A, \exists y \in B: x \neq y \wedge (x, y) \in R \Leftrightarrow (1, 5) \in R$

في كلتا الحالتين العلاقة ليست تابع

لأن المجموعتين عزلتين ومستقر حتى ثبت أنه تابع.

- التابع المتبادر:

- التعريف الرياضي الأول: نقول أن التابع f المعرف من X إلى Y وفق قاعدة ربط (x) إذا وفقط إذا تحقق الشرط:

التعريف الأكتر استخداماً في حل التمارين ↑

- التعريف الرياضي الثاني: نقول عن التابع f المعرف من X إلى Y وفق قاعدة ربط (x) أنه متبادر إذا تتحقق الشرط:

$$f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow x_1 \neq x_2, \forall x_1, x_2 \in X$$

أي يكون التابع متبادر إذا كان كل عنصر من المستقر موصودة لعنصر واحد على الأكتر من المتنق.

- لتكن لدينا الدالة:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow f(x) = 3x + 7$$

- هل f متبادر؟

- الحل:

- طريقة أخرى لحل المقرن

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}; x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow 3x_1 \neq 3x_2 \Rightarrow 3x_1 + 7 \neq 3x_2 + 7 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

تحقق الشرط فالتابع f متبادر

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}; f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow$$

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow 3x_1 + 7 = 3x_2 + 7 \Rightarrow$$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$$

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}; x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

$$f(x_1): x_1 = 2 \Rightarrow f(x_1) = 4$$

ولكن

$$f(x_2): x_2 = -2 \Rightarrow f(x_2) = 4$$

$$\Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

• اخلل الشرط إذن f ليس متبادر.

- طريقة أخرى:

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}; f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$x_1 = -x_2$$

• اخلل الشرط إذن f ليس متبادر.

- النهايات

• نقول أن التابع f هوتابع عامر إذن تتحقق الشرط

$$\forall y \in Y: \exists x \in X: y = f(x)$$

أي يكون التابع عامر إذن كل عنصر من المستقر هو صورة لعنصر واحد على الأقل من المقطع.

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = 27x^3$$

تمرين

$$\forall y \in \mathbb{R}: \exists x \in \mathbb{R}: y = f(x)$$

$$y = f(x) \Rightarrow y = 27x^3$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{y}{27}} \in \mathbb{R}$$

ستعلم في
الجبر
بكلمات
للسنة
الدراسية

• مُشَرَّطُ التَّابِعِ: $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}; f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow 3x_1 + 7 = 3x_2 + 7 \Rightarrow 3x_1 = 3x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$

• المُشَرَّطُ مُحْقَّقٌ إِذْنَ f مُتَبَاعٍ.

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$

لِيَكُنْ $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ، $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

هل f مُتَبَاعٍ؟

الحل:

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}; x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

$$f(x_1): x_1 = 2 \Rightarrow f(x_1) = 4$$

ولِكَنْ

$$f(x_2): x_2 = -2 \Rightarrow f(x_2) = 4$$

$$\Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

• اخْتَلَ السُّرْطُ إِذْنَ f لِيَكُنْ مُتَبَاعٍ.

- حَرْيَقَةُ اُخْرَى:

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}; f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$x_1 = -x_2$$

• اخْتَلَ السُّرْطُ إِذْنَ f لِيَكُنْ مُتَبَاعٍ.

- التَّابِعُ الْمُعَامَرُ:

• نَفْوُلُ أَنَّ التَّابِعَ f هُوَ تابِعٌ عَامِرٌ إِذَا تَحْقَقَ السُّرْطُ.

$$\forall y \in Y: \exists x \in X: y = f(x)$$

• أَيْ يَكُونُ التَّابِعُ عَامِرٌ إِذَا كَانَ كُلُّ عَنْصُرٍ مِنَ الْمُسْتَرِّ X مُوْصَبُورٌ لِعَصْرٍ وَلَدَدٍ عَلَى الْأَكْلِ

مِنَ الْمُنْظَلِقِ.

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = 27x^3$$

- تَمْرِينٌ

$$\forall y \in Y: \exists x \in X: y = f(x)$$

$$y = f(x) \Rightarrow y = 27x^3$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{y}{27}} \in \mathbb{R}$$

شُكْرُ اللَّهِ عَلَيْهِ
وَسُلْطَانُ الْمُحَمَّدِ لِلْكَوَافِرِ

-تمرين الثالث المتباين

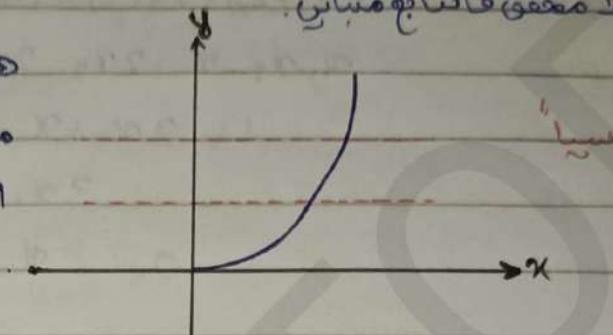
$$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$$

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+ : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

الشرط متحقق فالتابع متباين

هندسياً التابع f متباين حيث أي خط أفقي يرسم من أي قيمة من قيم المستمرة هذا الخط يقطع الخط السالب للتابع نقطة واحدة على الأكثـر.

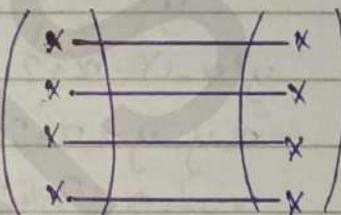


هندسياً

-تقابـل والـتقابـل المـكـسـي

$$f: X \rightarrow Y : x \rightarrow f(x)$$

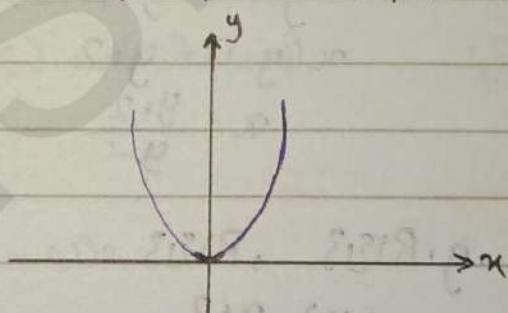
$$f: Y \rightarrow X : y \rightarrow f^{-1}(y)$$



ليكون تقابل

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ : g(x) = x^2$$

$$g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} : g(x) = \sqrt{x}$$



-تمرين:

$$f: \mathbb{R} \setminus \{3\} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow f(x) = \frac{x+2}{x-1}$$

- هل f تقابل؟ في حال ذلك: أوجد تقابلـهـ المـكـسـي
ـعـنـيـرـيـكـوـنـ f تقابلـيـ بـيـحـبـ أـنـ يـكـوـنـ مـتـبـاـيـنـ وـعـاـمـرـ مـعــاـ.
ـأـوـلـاـ أـفـتـيـتـ أـنـ التـابـعـ مـتـبـاـيـنـ

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{3\} : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$f(x_1) = f(x_2)$$

$$\frac{x_1+2}{x_1-1} = \frac{x_2+2}{x_2-1}$$

$$(x_1+2)(x_2-1) = (x_1-1)(x_2+2)$$

$$x_1x_2 - x_1 + 2x_2 - 2 = x_1x_2 + 2x_1 - x_2 - 2$$

$$2x_1 + x_2 = 2x_2 + x_1$$

$$3x_1 = 3x_2$$

$$x_1 = x_2$$

ومنه f متماثل.

ثانياً: نتحقق أن f عاشر.

$$\forall y \in \mathbb{R}: \exists x \in \mathbb{R} \setminus \{3\} : f(x) = y$$

$$y = \frac{x+2}{x-1}$$

$$y(x-1) = x+2$$

$$x \cdot y - y = x + 2$$

$$x \cdot y - x = y + 2$$

$$x(y-1) = y+2$$

$$x = \frac{y+2}{y-1}$$

ومنه f غير عاشر ومنه f ليس متماثل.

- لذرسن التمرين السابق بالشكل

$$g: \mathbb{R} \setminus \{3\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{3\}$$

$$g(x) = \frac{x+2}{x-1}$$

ويمكن تقابلها العكسي
عما وجدناه من f .

$$g: \mathbb{R} \setminus \{3\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{3\}$$

$$g^{-1}(x) = \frac{x+2}{x-1}$$

لخراج التقابل يتبدل كل $y \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$ في قائم العمر

$$\sqrt{\frac{1-x}{2-x}} \quad x \in]-\infty, 1] \cup [2, \infty[$$

$$\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{2-x}} \rightarrow]-\infty, 1]$$

$$D_1 \cap D_2 =]-\infty, 1]$$

$$f(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{1-x}{2-x}}\right)$$

ـ تقرير:

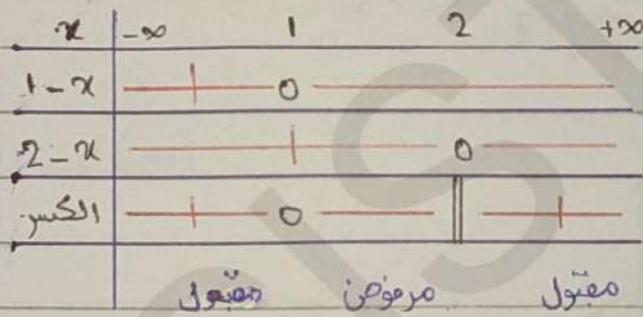
ـ شرط اللواعرية:

$$\sqrt{\frac{1-x}{2-x}} > 0$$

$$1-x=0 \Rightarrow x=1$$

ـ مسْطِحُ الْجِزَرِ:

$$\frac{1-x}{2-x} > 0$$



$$x \in]-\infty, 1] \cup [2, \infty[$$

$$x \in]-\infty, 1] \cup [2, \infty[$$

ـ مسْطِحُ الْجِزَرِ:

ـ شرط اللواعرية:

ـ نَعْوَلُ عَنْ تَابِعِهِ رُوْجِي إِذَا تَحْقَقَ:

$$\text{① } \forall x \in D_f : -x \in D_f$$

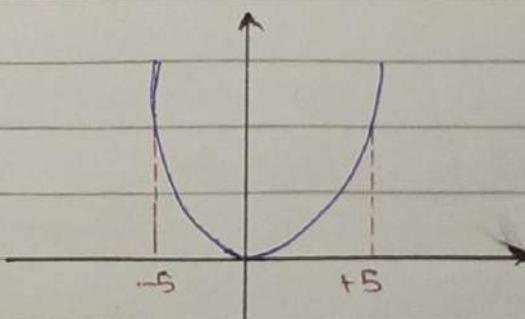
$$\text{② } f(-x) = f(x)$$

متناهٍ بالسُّيَّةِ لِمَحَورِ الرَّاسِبِ

$$f(x) = x^2$$

$$f(-x) = f(x)$$

التَّابِعُ رُوْجِي



نقرس

$$f(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{1-x}{2-x}}\right)$$

• سُرُط اللوغاريتم:

$$\sqrt{\frac{1-x}{2-x}} > 0$$

$$1-x=0 \Rightarrow x=1$$

• سُرُط الحذر:

$$\frac{1-x}{2-x} > 0$$

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$1-x$	+	0		
$2-x$		+	0	
الكسر	+	0		+

مقبول مرموز حذف

$$x \in]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$$

$$x \in]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$$

• سُرُط الحذر:

• سُرُط اللوغاريتم:

نَعْوَلُ عَنْ تَلْيُو أَنَّهُ زُوْجِي إِذَا تَحْقَقَ:

$$\text{① } \forall x \in D_f : -x \in D_f$$

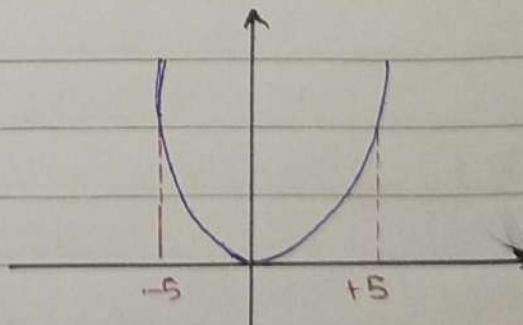
$$\text{② } f(-x) = f(x)$$

متناهٍ بالنسبة لمحور الزراسب

$$f(x) = x^2$$

$$f(-x) = f(x)$$

التابع زوجي



نقول عن تابع f انه فردٍ إذاً أحقٌ!

① $\forall x \in D_f : -x \in D_f$

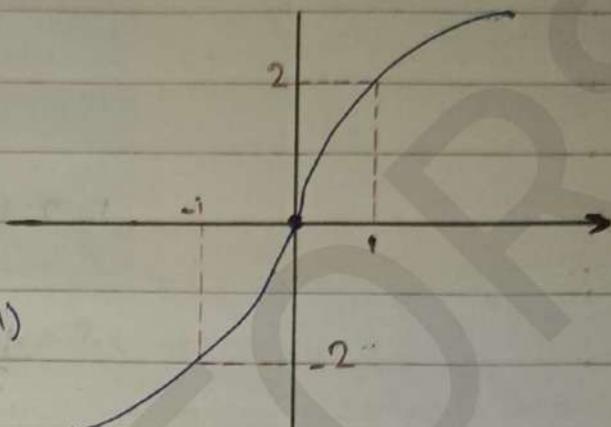
② $f(-x) = -f(x)$

متناقضٌ بالنسبة للمبدأ

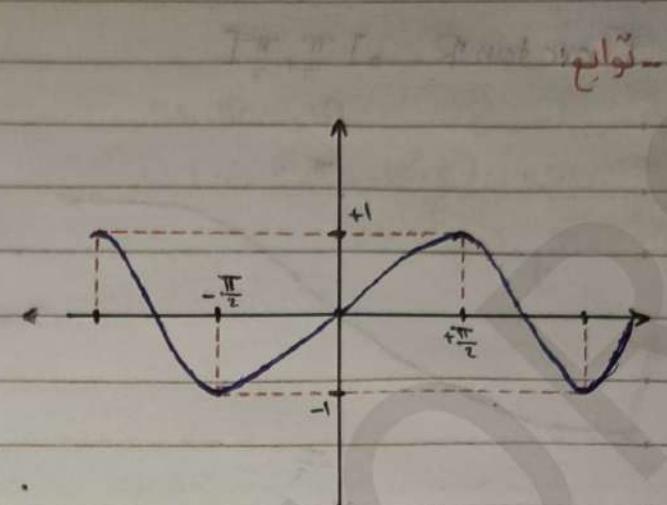
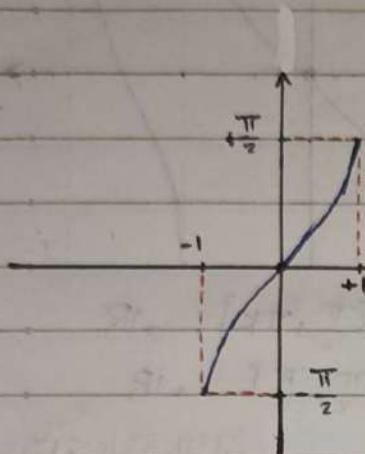
$$f(x) = -f(x)$$

$$f(+1) = +2 \\ f(-1) = -2 \Rightarrow f(+1) = -f(-1)$$

تابعٌ فردٌ



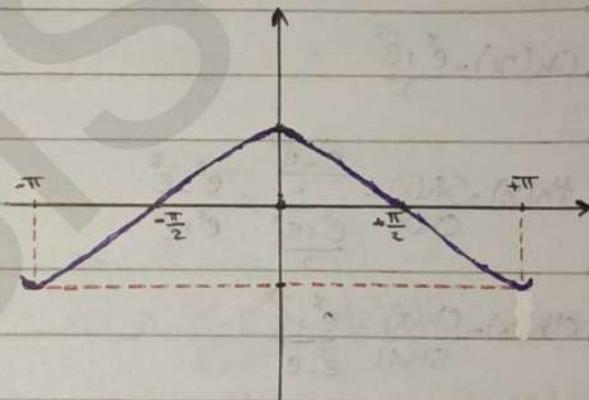
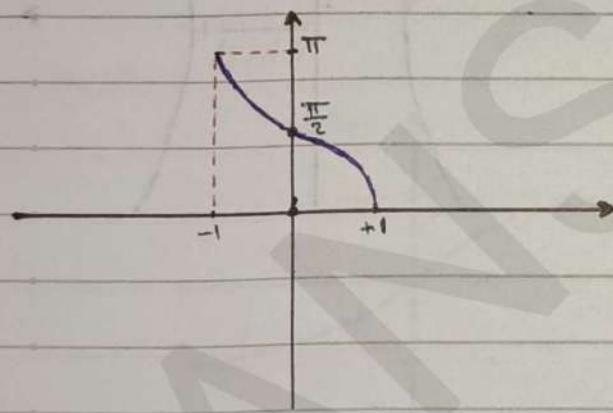
$$\varphi: \arcsin: [-1, +1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$$



$$\sin \varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\varphi: [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, +1]$$

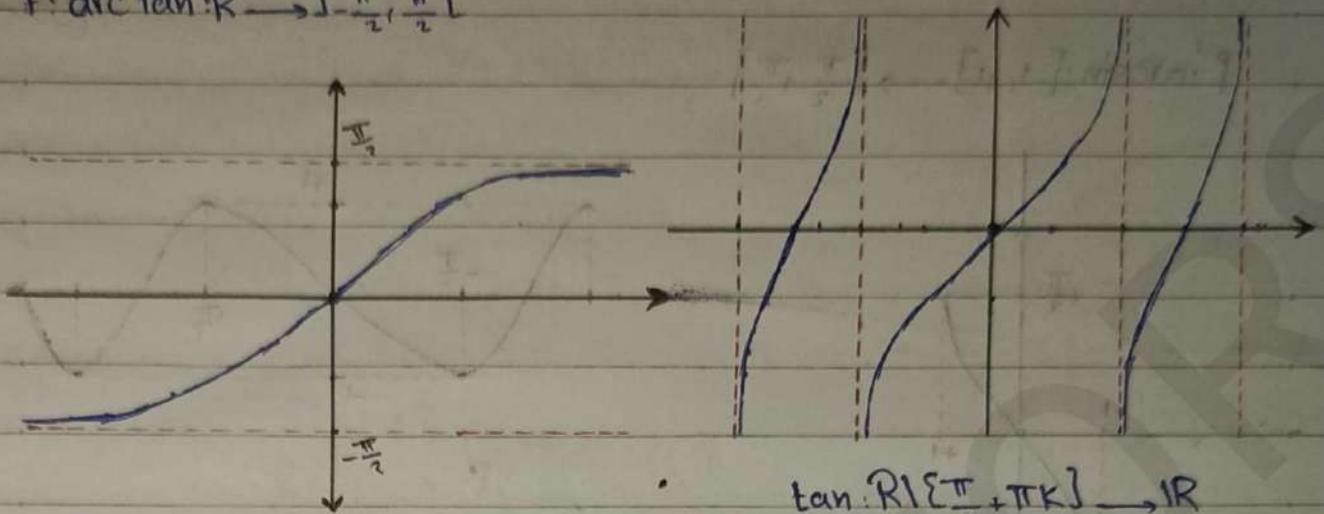
$$\varphi: \arccos: [-1, +1] \rightarrow [0, \pi]$$



$$\cos \varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\varphi: [0, \pi] \rightarrow [-1, +1]$$

$$f: \text{arc tan } R \rightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$



$$\tan: R \setminus \{\frac{\pi}{2} + \pi k\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$:]\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$$

الدوال الخطيّة المثلثيّة:

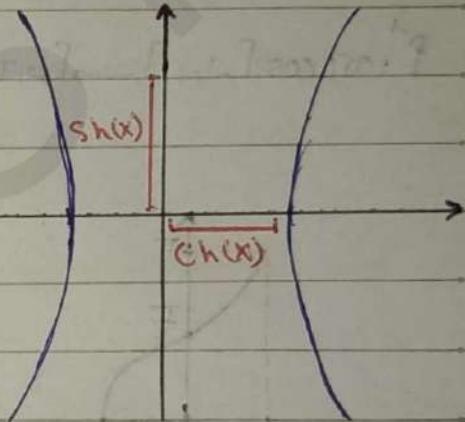
مختصي المقطع الرأسي:

$$\text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

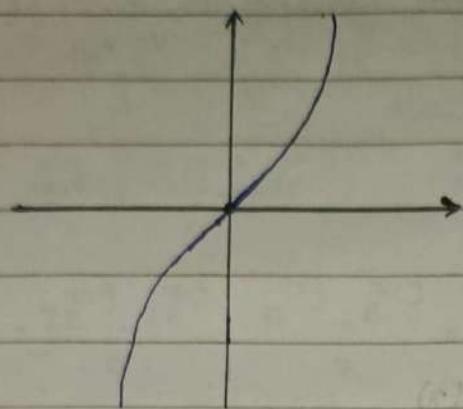
$$\text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\text{th}(x) = \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)} = \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\text{cth}(x) = \frac{\text{ch}(x)}{\text{sh}(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$



$\text{Sh}(x)$:

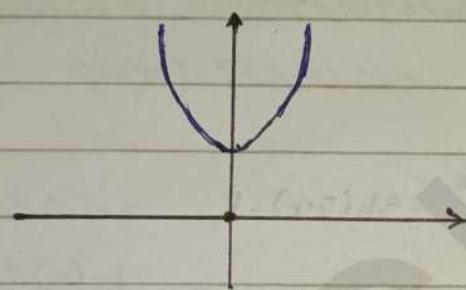


$\text{Sh}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\text{Sh}(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\frac{(e^x - e^{-x})}{2} = -\text{Sh}(x)$$

التابع مزدوج

$\text{Ch}(x)$:

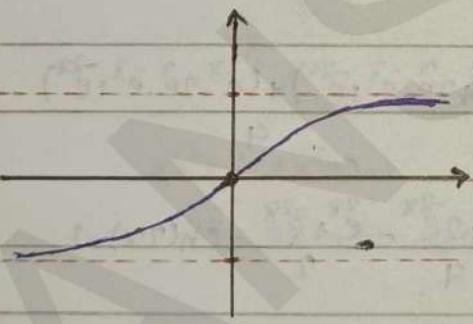


$\text{Ch}: \mathbb{R} \rightarrow [1, +\infty]$

$$\text{Ch}(-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \text{Ch}(x)$$

التابع مزدوج

$\text{th}(x)$:

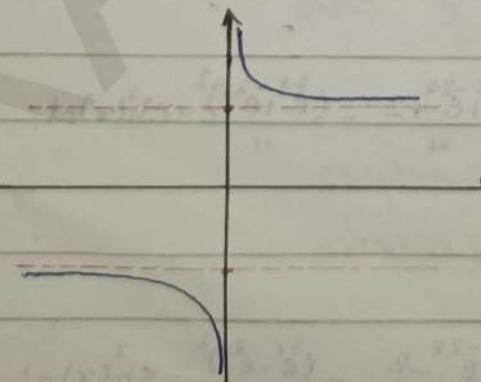


$\text{th}: \mathbb{R} \rightarrow]-1, 1[$

$$\text{th}(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{e^{-x} + e^x} = -\frac{(e^x - e^{-x})}{e^x + e^{-x}} = -\text{th}(x)$$

التابع مزدوج

$\text{cth}(x)$:



$\text{cth}: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$

$$\text{cth}(-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{e^{-x} - e^x} = -\frac{(e^x + e^{-x})}{e^x - e^{-x}} = -\text{cth}(x)$$

التابع مزدوج

$$\textcircled{1} \quad \text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1$$

$$\textcircled{2} \quad \text{sh}(2x) = 2\text{sh}(x) \cdot \text{ch}(x)$$

$$\textcircled{3} \quad \text{ch}(2x) = \text{ch}^2(x) + \text{sh}^2(x)$$

$$\textcircled{4} \quad \text{ch}^2(x) = \frac{\text{ch}(2x) + 1}{2}$$

$$\textcircled{5} \quad \text{sh}^2(x) = \frac{\text{ch}(2x) - 1}{2}$$

$$\textcircled{6} \quad \text{sh}(x+y) = \text{sh}(x) \cdot \text{ch}(y) + \text{sh}(y) \cdot \text{ch}(x)$$

$$\textcircled{7} \quad \text{ch}(x+y) = \text{ch}(x) \cdot \text{ch}(y) + \text{sh}(x) \cdot \text{sh}(y)$$

- اثبات -

$$\textcircled{2} \quad \text{sh}(2x) = 2\text{sh}(x) \cdot \text{ch}(x)$$

$$L_2 = 2\text{sh}(x) \cdot \text{ch}(x) \\ = 2 \cdot \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = \text{sh}(2x) = 1,$$

$$\textcircled{3} \quad \text{ch}(2x) = \text{ch}^2(x) + \text{sh}^2(x)$$

$$L_2 = \text{ch}^2(x) + \text{sh}^2(x) \\ = \frac{(e^x + e^{-x})^2}{4} + \frac{(e^x - e^{-x})^2}{4} = \frac{(e^{2x} + 2e^x \cdot e^{-x} + e^{-2x})}{4} + \frac{(e^{2x} - 2e^x \cdot e^{-x} + e^{-2x})}{4} \\ = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} + e^{-2x} - 2 + e^{2x}}{4} = \frac{2e^{2x} + 2e^{-2x}}{4} = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} = \text{ch}(2x) = 1,$$

$$\textcircled{4} \quad \text{ch}^2(x) = \frac{\text{ch}(2x) + 1}{2}$$

$$L_2 = \frac{\text{ch}(2x) + 1}{2} = \frac{\frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} + 1}{2} = \frac{\frac{e^{2x} - e^{-2x}}{4} + 2}{2} = \frac{(e^x + e^{-x})^2}{4} = \text{ch}^2(x) = 1,$$

$$\textcircled{5} \quad \text{sh}^2(x) = \frac{\text{ch}(2x) - 1}{2}$$

$$L_2 = \frac{\text{ch}(2x) - 1}{2} = \frac{\frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} - 1}{2} = \frac{\frac{e^{2x} - e^{-2x}}{4} - 2}{2} = \frac{(e^x - e^{-x})^2}{4} = \text{sh}^2(x) = 1,$$

$$\textcircled{6} \quad \text{sh}(x+y) = \text{sh}(x) \cdot \text{ch}(y) + \text{sh}(y) \cdot \text{ch}(x)$$

$$\begin{aligned} L_2 &= \text{sh}(x) \cdot \text{ch}(y) + \text{sh}(y) \cdot \text{ch}(x) \\ &= \frac{(e^x - e^{-x})}{2} \cdot \frac{(e^y + e^{-y})}{2} + \frac{(e^y - e^{-y})}{2} \cdot \frac{(e^x + e^{-x})}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{(e^{x+y} + e^{x-y} - e^{-x+y} - e^{-x-y})}{4} + \frac{(e^{x+y} - e^{-x+y} - e^{x-y} - e^{-x+y})}{4} \\ &= \frac{2e^{x+y} - 2e^{x-y}}{4} = \frac{e^{x+y} - e^{x-y}}{2} = \text{sh}(x+y) = L_2 \end{aligned}$$

ملاحظة: $x = y$

$$\Rightarrow \text{sh}(x+x) = \text{sh}(x) \cdot \text{ch}(x) + \text{sh}(x) \cdot \text{ch}(x)$$

$$\text{sh}(2x) = 2 \text{sh}(x) \cdot \text{ch}(x)$$

$$\text{sh}(0) = 0$$

$$\text{ch}(0) = 1$$

$$\text{sh}(\ln(2)) = \frac{e^{\ln(2)} - e^{-\ln(2)}}{2} = \frac{2 - e^{-2}}{2} = \frac{2 - \frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4}$$

نفرض: بفرض $x > 0$ وإذا علمت أن $\text{ch}(x) = \frac{5}{3}$ أو $\text{ch}(x) = \frac{5}{3}$

$$\text{ch}^2(x) \cdot \text{sh}^2(x) = 1$$

$$\frac{25}{9} - \text{sh}^2(x) = 1 \Rightarrow \text{sh}^2(x) = \frac{25-9}{9} = \frac{16}{9} \Rightarrow \text{sh}(x) = \frac{4}{3}$$

نختار الجذر الموجب لأن $x > 0$

$$\Rightarrow \text{th} = \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{3}} = \frac{4}{5}$$

ملاحظة:

① إذا كان $x > 0$ و $\text{th}(x) > 0$ و $\text{cth}(x) > 0$ و $\text{ch}(x) > 0$

② إذا كان $x < 0$ و $\text{th}(x) < 0$ و $\text{cth}(x) < 0$ و $\text{ch}(x) > 0$

③ إذا كان $x = 0$ و $\text{th}(x) = 0$ و $\text{cth}(x) = 0$ و $\text{ch}(x) = 1$

الحادي الشابلي المكسبي للتابع $sh(x)$

$$sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; sh: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$2y = e^x - e^{-x} \Rightarrow e^x - 2y - e^{-x} = 0$$

$$e^x - 2y \cdot e^{-x} - 1 = 0$$

لضرب الطرفين في e^x

باجراء تغير بالمتغير بالشكل :

$$t = e^x \quad t^2 - 2yt - 1 = 0$$

وهي معادلة من الدرجة الثانية بالنسبة لـ t

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4y^2 - 4(1)(-1) = 4(y^2 + 1) > 0$$

$$e^x - t_1 = \frac{2y + 2\sqrt{y^2 + 1}}{2} = y + \sqrt{y^2 + 1} > 0$$

$$e^x - t_2 = \frac{2y - 2\sqrt{y^2 + 1}}{2} = y - \sqrt{y^2 + 1} < 0$$

لأن $y^2 < y^2 + 1$

$$y < \sqrt{y^2 + 1}$$

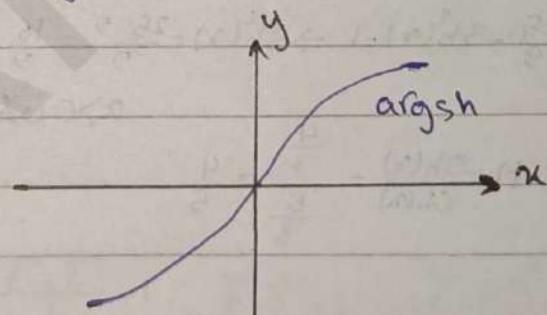
$$y - \sqrt{y^2 + 1} < 0$$

$$e^x = y + \sqrt{y^2 + 1} \Rightarrow x = \ln(y + \sqrt{1+y^2})$$

يصح الشابلي المكسبي للتابع sh بالشكل :

$$\arg sh: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

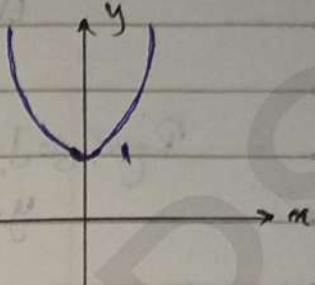
$$\arg sh(x) = \ln(y + \sqrt{1+y^2})$$



أيجاد التقابل المكسي للتابع: $ch(x)$

$$ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}; ch: \mathbb{R} \rightarrow [1, +\infty]$$

نلاحظ أن التابع ليس متباين على جميع \mathbb{R} لذلك نفصل مجموعة التعرق على المجال $[0, +\infty]$ فيكون التابع تقابل على المجال $[0, +\infty]$



$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \Rightarrow 2y = e^x + e^{-x}$$

$$e^x - 2ye^x + 1 = 0$$

نضرب الطرفين في e^x

وهي معادلة من الدرجة الثانية بالنسبة لـ e^x

$$\Delta = 4y^2 - 4(0)(0) - 4(1)(-1) > 0$$

$$\frac{e^x - 2y + 2\sqrt{y^2 - 1}}{2} - y + \sqrt{y^2 - 1} > 0$$

نقبل عين هذه القيمة لتوافق مع المجال $[0, +\infty]$ (مجموعة التعرق)

$$\frac{e^x - 2y - 2\sqrt{y^2 - 1}}{2} - y - \sqrt{y^2 - 1} \text{ مرفوض}$$

$$\begin{aligned} y^2 &> y^2 - 1 \\ y &> \sqrt{y^2 - 1} \\ y - \sqrt{y^2 - 1} &> 0 \end{aligned}$$

$$e^x = y + \sqrt{y^2 - 1}$$

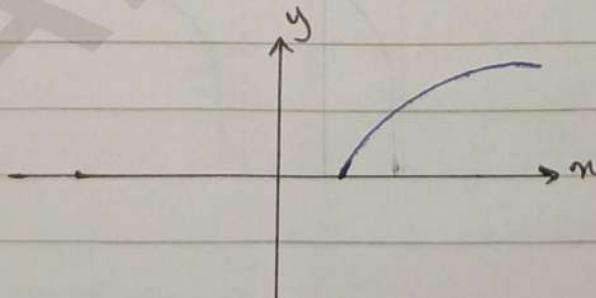
$$\Rightarrow x = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})$$

في حال إذا كانت قيمتا y من ch من $[\frac{1}{2}, +\infty)$

* أدن التقابل المكسي للتابع $ch(x)$ هو:

$$\arg ch: [1, +\infty] \rightarrow [0, +\infty]$$

$$\arg ch(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

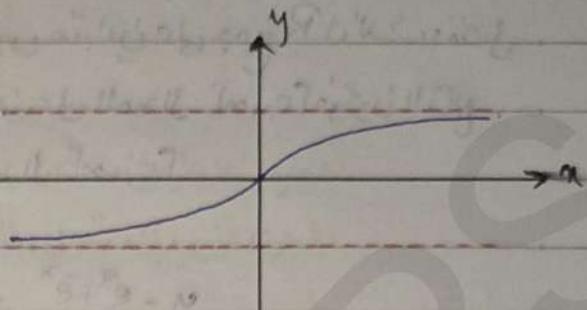


- الجاد المقابل العكسي للتابع $th(x)$:

$$th(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad ; \quad th: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$$

نلاحظ أن التابع $th(x)$ مقابل على جميع \mathbb{R}

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$



$$ye^x + y \cdot e^{-x} - e^x + e^{-x} = 0$$

$$e^x(y-1) + e^{-x}(y+1) = 0$$

نضرب الطرفين في e^x :

$$e^{2x}(y-1) + y+1 = 0 \Rightarrow e^{2x} = \frac{-y-1}{y+1} = \frac{1+y}{1-y}$$

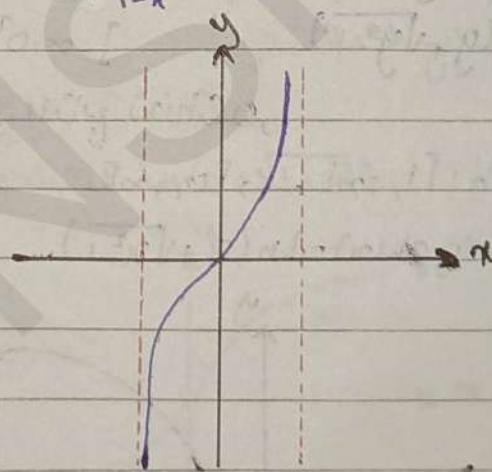
فأخذ الجذر الموجب

$$e^x = \sqrt{\frac{y+1}{1-y}} \Rightarrow x = \ln\left(\sqrt{\frac{y+1}{1-y}}\right)$$

* يصبح المقابل العكسي ل th بالشكل:

$$\arg th: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\arg th(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{x+1}{1-x}}\right)$$

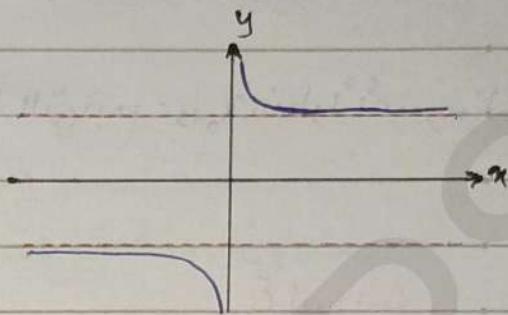


- إيجاد التقابل العكسي للتابع $\text{cth}(x)$:

$$\text{cth}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}; \text{cth}: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-1, 1\}$$

* نلاحظ أن التابع cth هو تقابل على \mathbb{R}^*

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$



$$ye^x - ye^{-x} = e^x + e^{-x}$$

$$ye^x - ye^{-x} - e^x - e^{-x} = 0$$

$$e^x(y-1) - e^{-x}(y+1) = 0$$

$$e^{2x}(y-1) - y-1 = 0$$

$$e^{2x} = \frac{y+1}{y-1}$$

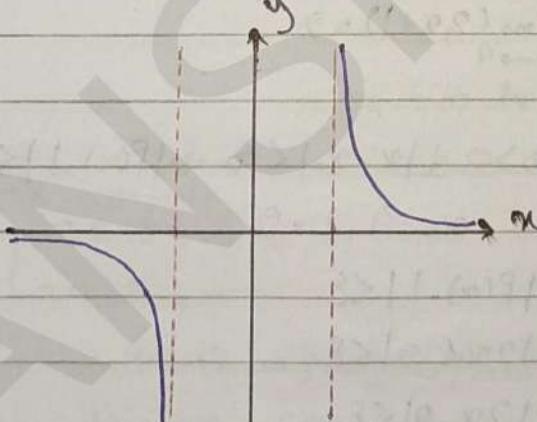
$$e^x = \sqrt{\frac{y+1}{y-1}}$$

لأخذ الجذر الموجب

$$\Rightarrow x = \ln\left(\sqrt{\frac{y+1}{y-1}}\right) \quad * \text{ يصبح التقابل العكسي لـ } \text{cth} \text{ بالشكل:}$$

$$\text{argcth}: \mathbb{R} \cup \{-1, 1\} \rightarrow \mathbb{R}^*$$

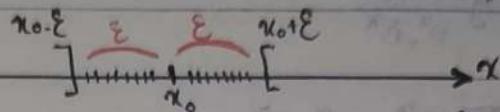
$$\text{argcth}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$



- جوار عدٌ حقيقي ϵ ببساطة كمجموعه الأعداد الحقيقية التي تحيط بهذه النقطة.
- جوار نقطة x_0 هي مجموعة النقاط x من \mathbb{R} التي تبعد عن x_0 مقدار أصغر من ϵ (الثاني 15) و بمعنى $(x-x_0) < \epsilon$ يصرف قطر الجوار.
- جوار نقطة x_0 هو المجال المفتوح الذي يحيي النقاط التي تبعد عن x_0 مقداراً أصغر من ϵ حيث $(x-x_0) < \epsilon$.

ع ايسلون

ك دلت



أي هي مجموعة النقاط x التي:

$$|x-x_0| < \epsilon$$

$$\epsilon < x - x_0 < \epsilon$$

$$x_0 - \epsilon < x < x_0 + \epsilon$$

نقول عن (1) أنواعهانة التابع f عند x_0 إذا تحقق الشرط :

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ such that } |f(x) - L| < \epsilon \text{ whenever } 0 < |x - x_0| < \delta$$

حيث: $\epsilon > 0$

مثال:

باستخدام التعریف بدلاة $(4, \epsilon)$ أثبت أن:

$$\lim_{x \rightarrow 4} (2x+1) = 9$$

لم تتحقق من الشرط :

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ such that } |f(x) - L| < \epsilon \text{ whenever } 0 < |x - 4| < \delta$$

$$|f(x) - L| < \epsilon$$

$$|2x+1 - 9| < \epsilon$$

$$|2x - 8| < \epsilon$$

$$2|x - 4| < \epsilon \Rightarrow |x - 4| < \frac{\epsilon}{2}$$

أي استطعت إيجاد $\delta = \frac{\epsilon}{2}$ تتحقق من حلها الشرط.

باستخدام التعریف بدلاة $(4, \epsilon)$ أثبت أن:

$$\lim_{x \rightarrow 6} (x+6) = 12$$

$$\forall \epsilon > 0 : \exists \delta > 0 ; |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

$$x_0 = 6, L = 12$$

$$|f(x) - L| < \epsilon$$

$$|x + 6 - 12| < \epsilon$$

$$|x - 6| < \epsilon \Rightarrow \delta = \epsilon$$

ما ياسْتَطِعْتُ ايجاد $\epsilon \leq \delta$ تتحقق من اجلها الشرط.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$$

مثال

$$\forall \epsilon > 0 : \exists \delta > 0 ; |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

$$x_0 = 2, L = 4$$

$$|f(x) - L| < \epsilon$$

$$|\frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4| < \epsilon$$

$$|\frac{(x-2)(x+2)}{x-2} - 4| < \epsilon$$

$$|x - 2| < \epsilon \Rightarrow \delta = \epsilon$$

ما ياسْتَطِعْنا ايجاد $\epsilon \leq \delta$ تتحقق من اجلها الشرط.

- النهاية من اليمين: $x \rightarrow a^+$

- النهاية من اليسار: $x \rightarrow a^-$

نقول عن تابع أنه له نهاية اذا كانت

مثال

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$$

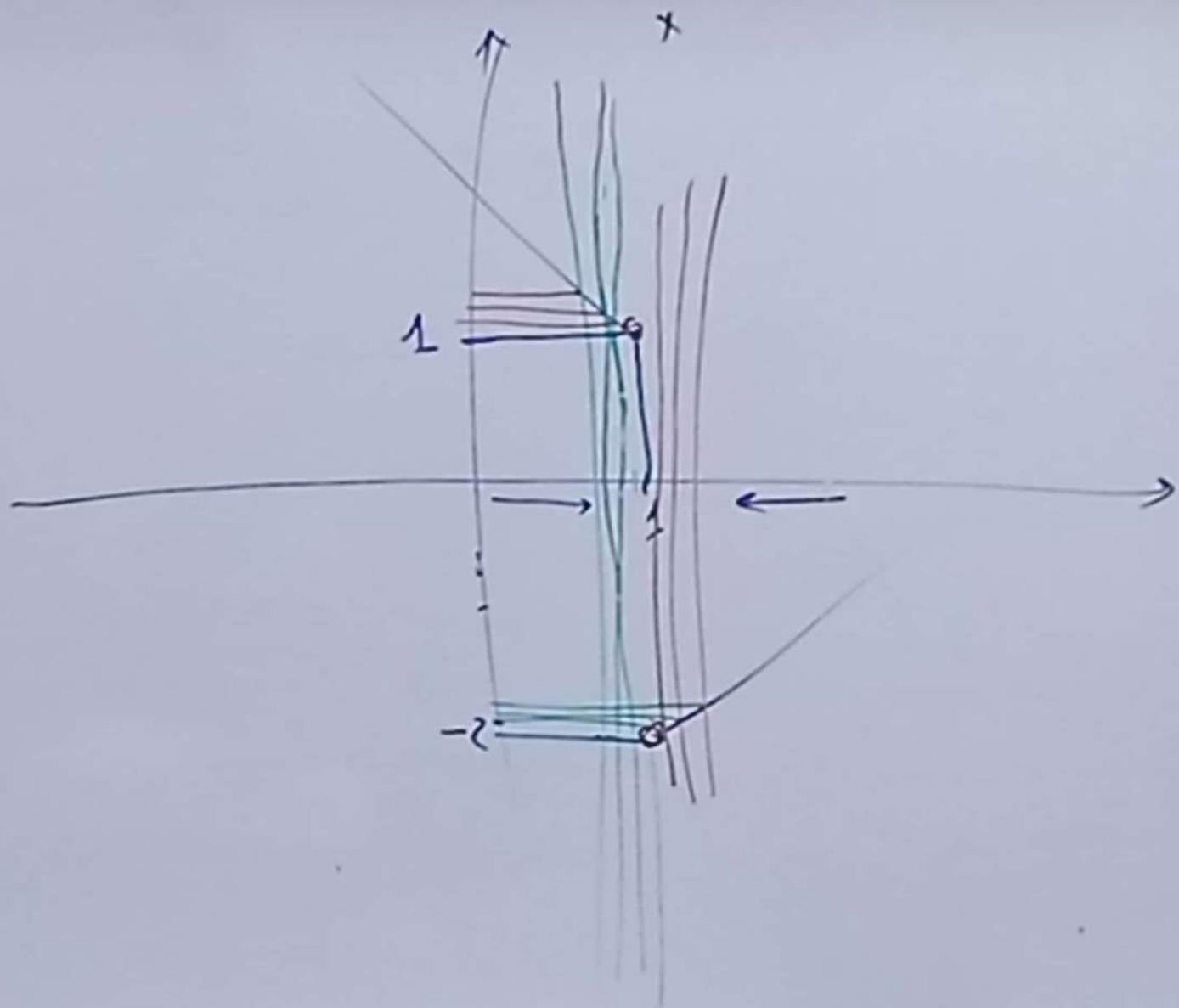
$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & ; x < 1 \\ 3x - 5 & ; x > 1 \end{cases}$$

ما يوحده نهاية التابع من اليمين ومن اليسار عند $(x=1)$.

$$L_1 = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2(1) + 3 = 5$$

$$L_2 = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3(1) - 5 = -2$$

نلاحظ أن $L_1 \neq L_2$ اذ ليس للتابع نهاية عند (1) .



$$|f(x) - f| < \epsilon$$

$$|f(x) - f| < \epsilon \Rightarrow \delta = \epsilon \Rightarrow 0 < \delta = \epsilon < \epsilon$$

- الدوال الامتناهية في الصفر:

*نقول عن الله تعالى إنها الامتنانية في الصياغة عند إدال الحقائق

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = c$$

* يقول عن الدالة f إنها الامتدادية في الكبر بعد π إذا تحقق:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

$$f(x) = x \sin \frac{1}{x} \rightarrow \text{دالة محدودة}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin \frac{1}{x} = 0$$

$u_1 = \text{oldest}$

* مبادلة محددة بدلالة متساوية في الصفر هو دالة لامتناهية في الصفر.

$$\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$$

ـ تكافؤ الدوال الامتناهية في الاصغر

$$g(x) \neq 0 \text{ بشرط } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

زاد الحمق

*عندئذ يقول ابن الدالين هو ومن كتاباته عدد ٢٠ ونكتب و ٢٠

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} = 0 \quad \sin n \approx n$$

- توابع -

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} (f(n))^n = (\lim_{n \rightarrow \infty} f(n))^n}$$

$$\text{.2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{f(a_n)} = \sqrt[n]{\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n)}$$

$$\boxed{3} \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)|$$

$$\boxed{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x-a}{n-a} = n.a$$

$$\text{Ex: } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2} = 5(2)^2 = 12$$

$$; n=3, a=2$$

إذا كان:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$$

فإن:

$$\text{[1]} \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = A + B$$

$$\text{[2]} \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = A \cdot B$$

$$\text{[3]} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} \quad : \quad g(x) \neq 0, B \neq 0$$

نماذج:

$$\text{[1]} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3}{2x^2+3} + \frac{1-2x^2}{4x-8} \right) = +\infty \quad \text{أ.ع.ز}$$

$$f(x) = \frac{x^3(4x-1) + (1-2x^2)(2x^2+3)}{(2x^2+3)(4x-1)}$$

$$= \frac{4x^4 - x^3 + 2x^2 + 3 - 4x^4 - 6x^2}{8x^3 + 2x^2 + 12x - 3}$$

$$= \frac{-x^3 - 4x^2 + 3}{8x^3 + 2x^2 + 12x - 3}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\frac{1}{8}$$

$$\text{[2]} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{2x+5} - \sqrt{x})$$

$$f(x) = \sqrt{x(2+\frac{5}{x})} - \sqrt{x}$$

$$= \sqrt{x} \left(\sqrt{2+\frac{5}{x}} - 1 \right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \cdot (\sqrt{2+0} - 1) = +\infty$$

$$\text{. 3] } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos 8x}{x^2} \right)$$

$$f(x) = \frac{2 \sin^2 4x}{x^2} = 2 \left(\frac{\sin 4x}{x} \right)^2$$

$$= 2 \left(\frac{4 \cdot \sin 4x}{4x} \right)^2 = 16 \cdot 2 \left(\frac{\sin 4x}{4x} \right)^2$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 32(1)^2 = 32$$

$$\text{. 4] } \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{-2x-4}{x^3+2x^2} \right) = \frac{0}{0} \quad \text{L.C.T}$$

$$f(x) = \frac{-2(x+2)}{x^2(x+2)} = \frac{-2}{x^2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{. 5] } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3+5x^2+8x-44}{x^2+5x-14}$$

$$f(x) = \frac{(x-2)(x^2+7x+22)}{(x+7)(x-2)}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{40}{9}$$

$$\begin{array}{r} x^2+7x+22 \\ \hline x-2 \left. \begin{array}{r} x^3+5x^2+8x-44 \\ x^3-2x^2 \\ \hline 7x^2+8x \\ 7x^2-14x \\ \hline 22x-44 \\ 22x-44 \\ \hline 0 \end{array} \right. \end{array}$$

منقول عن دالة f مستمرة عند x_0 إذا كان:

$$f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

ومنقول عن تابع f مستمر على المجال المفتوح (a, b) إذا كان f مستمرة في كل نقطة من نقاط المجال (a, b) .

منقول عن تابع f مستمر على المجال المغلق $[a, b]$ إذا كان f مستمرة على $[a, b]$ وكان:

$$f(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x), \quad f(b) = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$$

$$f(x_0) = 1 \quad \text{عند النقطة } x_0 = 1$$

$$f(1) = 1 - 1 + 1 = 1$$

$$f(x) = \begin{cases} x & x > 1 \\ x+2 & x \leq 1 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 \end{array} \right\} \text{التابع مستمر عند } x = 1$$

منقول عن التابع f مستمر عند قيمة x إذا تحقق الشرط:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0: 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

$$0 < \delta < \epsilon$$

مثال: أثبت باستخدام تعريف الاستمرار لدالة $f(x) = 4x + 2$ أن الدالة:

$$f(x) = 4x + 2$$

$$\text{مستمرة عند } x = x_0$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0: |x - x_0| < \delta$$

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

$$|4x + 2 - 4x_0| < \epsilon$$

$$|4(x - x_0)| < \epsilon$$

$$4|x - x_0| < \epsilon$$

ومن f مستمرة عند x_0

$$|x - x_0| < \frac{\epsilon}{4} \Rightarrow \epsilon > \delta = \frac{\epsilon}{4} > 0$$

① x هي نقطة انقطاع من النوع الأول إذا كان :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = a \\ \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = b \end{array} \right\} \text{ولكن } a \neq b$$

② x نقطة انقطاع من النوع الثاني إذا كانت احدى القيمتين أو كلياهما متساوية

③ x نقطة انقطاع من النوع الثالث :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = a \\ \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = b \end{array} \right\} \text{ولكن } a = b$$

- ادرس استمرار التابع عند $x=0$ وبيان نوع نقطة الانقطاع ثم ارسم التابع ضمن مجموعة العرض

$$\text{④ } f(x) = \frac{|x|}{x}$$

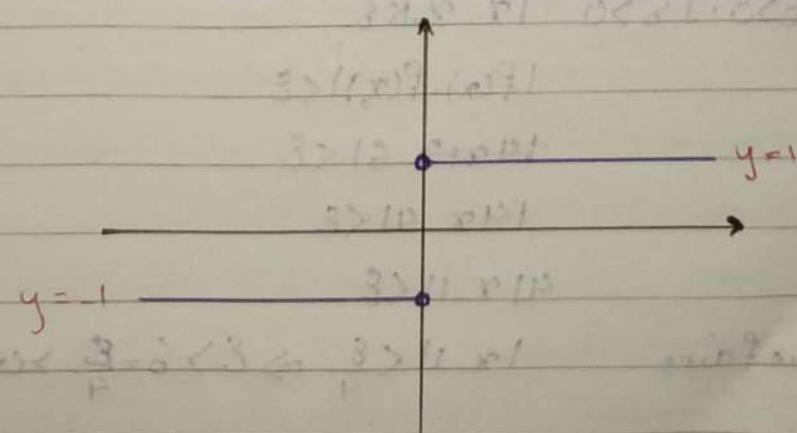
$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} = 1, & x > 0 \\ -\frac{|x|}{x} = -1, & x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$$

هي نقطة انقطاع من النوع الأول

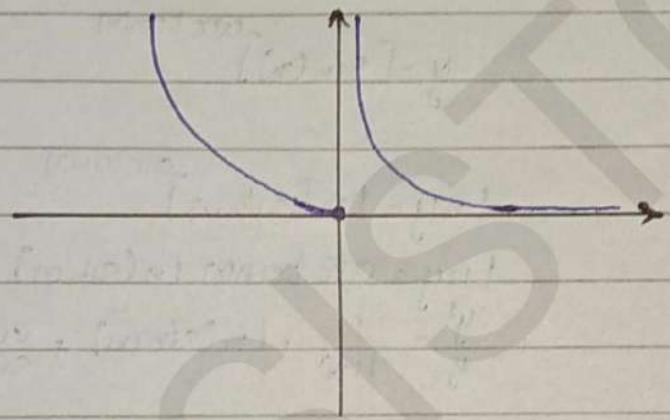


٢) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & : x > 0 \\ x^2 & : x \leq 0 \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = (0)^2 = 0$$

لها أداة $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ \Leftrightarrow هي نقطة افتراض من النوع الثاني.



٣) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1$$

ولكن الناتج غير معرف عند $x=0$
وهي نقطة افتراض من النوع الثالث

٤) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x+2} & , x \neq -2 \\ 0 & , x = -2 \end{cases}$

$$f(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)} = x-2$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -4 = \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = l$$

ولكن $l \neq 0$ وعند $x=-2$ هي نقطة افتراض من النوع الثالث

الاشتقاق تابع اس تابع:

$$y = [g(x)]^{h(x)}$$

نأخذ نوعاً ديت المطوفين:

$$\ln y = h(x) \cdot \ln g(x)$$

مشتق المطوفين:

$$\frac{y'}{y} = f'(x) \cdot \ln(g(x)) + \frac{h(x) \cdot g'(x)}{g(x)}$$

$$y' = y \left[h(x) \cdot \ln(g(x)) + \frac{h(x) \cdot g'(x)}{g(x)} \right]$$

$$y = [\sin(x)]^{\arctan(x)}$$

موحد

$$\ln y = \ln[\sin(x)]^{\arctan(x)}$$

$$\ln y = \arctan(x) \cdot \ln(\sin(x))$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{1+x^2} \cdot \ln(\sin(x)) + \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \arctan(x)$$

$$y' = y \left[\frac{1}{1+x^2} \cdot \ln(\sin(x)) + \cot(x) \cdot \arctan(x) \right]$$

$$y = [\sin(x)]^{\arctan(x)} \cdot \left[\frac{1}{1+x^2} \cdot \ln(\sin(x)) + \cot(x) \cdot \arctan(x) \right]$$

الاشتقاق تابع وسيطي:

$$\begin{cases} y = f(t) \\ u = g(t) \end{cases}$$

$$y' = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt}$$

$$x(t) = \sqrt{t+1}$$

مثال

$$y(t) = \sqrt{3t}$$

$$y' = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{3}{2\sqrt{3t}}}{\frac{1}{2\sqrt{t+1}}} = \frac{3\sqrt{t+1}}{\sqrt{3t}}$$

المفهوم العام لتابع

$$z = f(x, y)$$

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

المشتقة الجزيئية لم بال بالنسبة لـ x المشتق الجزيئي لم بال بالنسبة لـ y

مثال: أوجد المشتق العام لتابع:

$$z = f(x, y) = 2x^2 y$$

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

$$= 4xy dx + 2x^2 dy$$

$$z = e^{\frac{xy}{y}} + \ln \frac{x}{y}$$

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

$$= \left[y \cdot e^{\frac{xy}{y}} + \frac{1}{y} y \right] dx + \left[x \cdot y^{\frac{xy}{y}} + \frac{-x/y^2}{y/x} \right] dy$$

$$= \left[y \cdot e^y + \frac{1}{y} \right] dx + \left[x \cdot y^y - \frac{1}{y} \right] dy$$

قاعدة أوستال:

في حال عندي حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{f(x)}{g(x)}$ أو ∞ ولديه تابع من الشكل $\frac{f(x)}{g(x)}$ اذا كان التابع f و g مسقرين وقابلين للاستقاضة على مجموعة التعريف D .

في الشرطين كالتالي:

1) f, g مسقرين وقابلين للاستقاضة على D .

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f}{g} = \infty$ أو $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f}{g} = 0$ «عندما تسعى لـ x مقدار 0 »

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$$