TRANSISTORS

تحليل 1

تمارين

اشتقاق وتفاضل

التابع الزوجي والفردي

التباين و الغمر و التقابل

تمارين عن الاشتقاق والتفاضل:

- **السؤال الأول:**

- **اختر الإجابة الصحيحة:**

1. إن قيمة المشتق الأول $y' = \frac{dy}{dx}$ للتابع المعطى وسيطيا بالشكل: $x(t) = \sqrt{t+1}$ و $y(t) = \sqrt{3t}$ عند النقطة $t = 3$ هي:

a) 4

b) 2

c) 3

d) جميع الإجابات خاطئة.

2. إن المشتقات الجزئية للتابع $z = f(x, y) = \cos(x, y)$ من المرتبة الأولى بالنسبة للمتحول x والمتحول y على الترتيب هي:

a) $\frac{\partial z}{\partial x} = -x.\sin(x,y), \frac{\partial z}{\partial y} = -y.\sin(x,y)$

b) $\frac{\partial z}{\partial x} = y.\sin(x,y), \frac{\partial z}{\partial y} = x.\sin(x,y)$

c) $\frac{\partial z}{\partial x} = -y.\sin(x,y), \frac{\partial z}{\partial y} = -x.\sin(x,y)$

d) جميع الإجابات خاطئة.

3. إن قيمة المشتق الأول y' عند النقطة $M(1,1)$ للتابع: $2y.x^3 + x.\ln(y) = 5.\cos(y)$

a) $y' |M(1,1) = 19$

b) $y' |M(1,1) = 17$

c) $y' |M(1,1) = 29$

d) جميع الإجابات خاطئة.

4. إن قيمة المشتق الأول y' عند النقطة $M(1,1)$ للتابع: $2y.x^3 + x.\ln(y) = 0$

a) $y' |M(1,1) = -2$

b) $y' |M(1,1) = -3$

c) $y'|M(1,1) = -4$

d) $y'|M(1,1) = -5$

5. التفاضل التام للتابع: $z = f(x, y) = \cos(x, y)$ هو:

a) $\partial z = (-x.\sin(x,y))\partial x + (-y.\sin(x,y))\partial y$

b) $\partial z = (y.\sin(x,y))\partial x + (x.\sin(x,y))\partial y$

c) $\partial z = (-y.\sin(x,y))\partial x + (-x.\sin(x,y))\partial y$

d) جميع الإجابات خاطئة.

6. ليكن التابع $f(x) = e^x.ch(x)$ عندئذ فإن $f'(0) =$:

a) 1

b) 0

c) -1

d) 2

7. لتكن لدينا الدالة $y = \ln(1+x)$ عندئذ فإن المشتق النوني لهذه الدالة (المشتق من المرتبة n) هو $y^{(n)}$

a) $\frac{(-1)^n(n-1)!}{(1+x)^n}$

b) $\frac{(-1)^n(n-1)!}{(1-x)^n}$

c) $\frac{(n)!}{(1+x)^n}$

d) $\frac{(-1)^n(n-1)!}{(1+x)^{(n-1)}}$

❖ **<u>السؤال الثاني:</u>**

- **أوجد التفاضل التام للتابع: $z = f(x, y) = x.y^3 + \ln(x/y) + \arcsin(x^3.y)$ ثم أوجد المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية للتابع بالنسبة للمتحولين x و y.**

❖ ***الحل:***

❖ ***السؤال الأول:***

b .1

- ***طريقة الحل:***

$$X(t) = \sqrt{t+1} = (t+1)^{\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{1}{2} \cdot (t+1)^{-\frac{1}{2}} .1 = \frac{1}{2\sqrt{t+1}}$$

$$y(t) = \sqrt{3t} = (3t)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{1}{2} \cdot (3t)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3 = \frac{3}{2\sqrt{3t}}$$

$$\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{t=3} = \frac{3\sqrt{3+1}}{\sqrt{3.3}} = \frac{3\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{3.2}{3} = 2$$

c .2

- ***طريقة الحل:***

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}[cos(x,y)]$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\,sin(x,y) \cdot \frac{\partial}{\partial x}(x,y) = -\,sin(x,y) \cdot y = -y\,sin(x,y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}[cos(x,y)]$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = -\,sin(x,y)\,\frac{\beta}{\partial y}(x,y) = -\,sin(x,y) \cdot x = -x\,sin(x,y)$$

d .3

a .4

d .5

- ***طريقة الحل:***

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}[cos(x,y)]$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\sin(x,y) \cdot \frac{\partial}{\partial x}(x,y) = -\sin(x,y) \cdot y = -y\sin(x,y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}[\cos(x,y)]$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\sin(x,y) \cdot \frac{\partial}{\partial y}(x,y) = -\sin(x,y)x = -x\sin(x,y)$$

$$\partial z = \frac{\partial z}{\partial x}\partial x + \frac{\partial z}{\partial y}\partial y$$

$$\partial z = (-y\sin(x,y))\partial x + (-x\sin(x,y))\partial y$$

6. a

- ***طريقة الحل:***

$$f(x) = e^x \cdot ch(x)$$

$$f'_{(x)} = (e^x)' \cdot ch(x) + (ch(x))' \,.\, e^x$$

$$f'_{(x)} = e^x \cdot ch(x) + sh(x) \,.\, e^x$$

$$f'_{(x)} = e^x[sh(x) + ch(x)]$$

$$f'_{(0)} = e^0[sh(0) + ch(0)]$$

$$f'_{(0)} = 1 \cdot (0+1) = 1$$

7. a

❖ ***السؤال الثاني:***

- *التفاضل التام:*

$$\partial z = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[xy^3 + ln\left(\frac{x}{y}\right) + arcsin(x^3y)\right]$$

$$= y^3 + \frac{1}{\left(\frac{x}{y}\right)} \cdot \frac{1}{y} + \frac{1}{\sqrt{1-(x^3y)^2}} \cdot 3x^2y$$

$$= y^3 + \frac{1}{x} + \frac{3x^2y}{\sqrt{i-x^6y^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left[xy^3+ln\left(\frac{x}{y}\right)+arc\,sin(x^3y)\right]$$

$$=3xy^2+\frac{1}{\left(\frac{x}{y}\right)}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)+\frac{1}{\sqrt{1-(x^3y)^2}}\cdot x^3$$

$$=3xy^2-\frac{1}{y}+\frac{x^3}{\sqrt{1-x^6y^2}}$$

$$\partial z=\left(y^3+\frac{1}{x}+\frac{3x^2y}{\sqrt{1-x^6y^2}}\right)dx+\left(3xy^2-\frac{1}{y}+\frac{x^3}{\sqrt{1-x^6y^2}}\right)dy$$

- المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية:

$$\partial z''=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(y^3+\frac{1}{x}+\frac{3x^2y}{\sqrt{1-x^6y^2}}\right)$$

$$=0-\frac{1}{x^2}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{3x^2y}{\sqrt{1-x^6y^2}}\right)$$

$$=-\frac{1}{x^2}+\frac{6xy\sqrt{1-x^6y^2}+3x^2y\cdot\frac{6x^5y^2}{2\sqrt{1-x^6y^2}}}{1-x^6y^2}$$

$$=-\frac{1}{x^2}+\frac{6xy\left(1-x^6y^2\right)+9x^7y^3}{(1-x^6y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\partial z''=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial y}\left(3xy^2-\frac{1}{y}+\frac{x^3}{\sqrt{1-n^6y^2}}\right)$$

$$=6xy+\frac{1}{y^2}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^3}{\sqrt{1-x^6y^2}}\right)$$

$$=6xy+\frac{1}{y^2}+\frac{x^3\cdot x^6y}{(1-x^6y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= 6xy + \frac{1}{y^2} + \frac{x^9 y}{(1-x^6y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\partial z'' = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(y^3 + \frac{1}{x} + \frac{3x^2 y}{\sqrt{1-x^6y^2}}\right)$$

$$= 3y^2 + 0 + \frac{3x^2\sqrt{1-x^6y^2} - 3x^2y \cdot \frac{-2x^6y}{2\sqrt{1-x^6y^2}}}{1-x^6y^2}$$

$$= 3y^2 + \frac{3x^2(1-x^6y^2) + 3x^8y^2}{(1-x^6y^2)^{\left(\frac{3}{2}\right)}}$$

تمارين عن التابع الفردي والزوجي:

❖ **التمرين الأول:**

- **حدد إذا كانت التوابع التالية زوجية او فردية:**

a) $f(x) = x^2 + 3$.

b) $g(x) = x^3 - x$.

c) $h(x) = 2x + 1$.

d) $k(x) = \sin(x)$.

e) $m(x) = \cos(x)$.

❖ **التمرين الثاني:**

- **أثبت ان التابع $f(x) = x^4 - 2x^2$ هو تابع زوجي.**

❖ **التمرين الثالث:**

- **إذا كانت $f(x)$ تابع زوجي و$g(x)$ تابع فردي، اجب عن الأسئلة التالية:**

1) ما نوع الدالة التالية$h(x) = f(x) + g(x)$؟

2) ما نوع الدالة التالية $k(x) = f(x) . g(x)$؟

3) ما نوع الدالة التالية $m(x) = f(g(x))$؟

❖ **التمرين الرابع:**

- **أوجد قيمة الثابت a بحيث يكون التابع $f(x) = ax^2 + bx + 1$ زوجي.**

❖ **التمرين الخامس:**

- **اختر الإجابة الصحيحة:**

1) أي من التوابع التالية هو تابع فردي؟

a) $f(x) = x^2$.

b) $f(x) = x^3$.

c) $f(x) = x^2 + 1$.

d) $f(x) = \cos(x)$.

2) أي من التوابع التالية ليس تابع زوجي أو فردي؟

a) $f(x) = x^3$.

b) $f(x) = x^2$.

c) $f(x) = x^3 + x^2$.

d) $f(x) = \sin(x)$.

3) أي من التوابع التالية هو تابع زوجي؟

a) $f(x) = x^5$.

b) $f(x) = x^4$.

c) $f(x) = x^3 + x$.

d) $f(x) = \sin(x)$.

4) أي من التوابع التالية هو تابع زوجي؟

a) $f(x) = x^2 + 5$.

b) $f(x) = x^3 - x$.

c) $f(x) = x^2 + x$.

d) $f(x) = \sin(x)$.

5) أي من التوابع التالية هو تابع فردي؟

a) $f(x) = x^2$.

b) $f(x) = x^3$.

c) $f(x) = x^2 + 1$.

d) $f(x) = \cos(x)$.

6) إذا كان $f(x) = x^3+2x$ و $g(x) = x^2-1$ أوجد نوع التابع $h(x) = f(x) . g(x)$:

1) زوجي.

2) فردي.

3) لا زوجي ولا فردي.

4) زوجي وفردي معا.

<u>بالتوفيق جميعا بدراستكم</u>

❖ **الحل:**

❖ **التمرين الأول:**

a)

$$f(x) = x^2+3$$

$$f(-x) = (-x)^2+3 = x^2+3 = f(x)$$

- إذا التابع زوجي.

b)

$$g(x) = x^3-x$$

$$g(-x) = (-x)^3-(-x) = -x^3+x = -(x^3-x) = -g(x)$$

- إذا التابع فردي.

c)

$$h(x) = 2x+1$$

$$h(-x) = 2(-x) +1 = -2x+1 \neq h(x) \mid -2x+1 \neq -h(x)$$

- إذا التابع ليس فردي او زوجي.

d)

$$k(x) = \sin(x)$$

$$k(-x) = \sin(-x) = -\sin(x) = -k(x)$$

- إذا التابع فردي.

e)

$$m(x) = \cos(x)$$

$$m(-x) = \cos(-x) = \cos(x) = m(x)$$

- إذا التابع زوجي.

❖ **التمرين الثاني:**

$$f(x) = x^4 - 2x^2$$

$$f(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 = x^4 - 2x^2 = f(x)$$

❖ **التمرين الثالث:**

(1

$$h(x) = f(x) + g(x)$$

$$h(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) - g(x) \neq h(x) \mid f(x) - g(x) \neq -h(x)$$

- إذا التابع ليس زوجي ولا فردي.

. (2

$$k(x) = f(x) . g(x)$$

$$k(x) = f(-x) . g(-x) = f(x) . (-g(x)) = -f(x) . g(x) = - k(x)$$

- إذا التابع فردي.

. (3

$$m(x) = f(g(x))$$

$$m(-x) = f(g(-x)) = f(-g(x)) = f(g(x)) = m(x)$$

❖ التمرين الرابع:

- لكي يكون التابع زوجي يجب ان يتحقق الشرط:

$$f(-x) = a(-x)^2 + b(-x) + 1 = ax^2 - bx + 1$$

- نضع $f(-x) = f(x)$

$$ax^2 - bx + 1 = ax^2 + bx +1$$

- نستنتج ان $b = 0$ ومنه نستنتج انه يمكن ان تكون قيمة a تساوي أي عدد حقيقي.

❖ التمرين الخامس:

1) b

2) c

3) b

4) a

5) b

6) b

تمارين عن التباين والغمر والتقابل والتقابل العكسي

- **التمرين 1:** التابع المتباين:
- حدد ما إذا كانت التابع التالي متباين ام لا؟

$$f: R \to R, f(x) = 2x+3$$

- الحل:
- شرط التباين:

$$\forall x_1, x_2 \in R; f(x1) = f(x2) \Longrightarrow x_1 = x_2$$

$$f(x_1) = f(x_2)$$

$$2x_1+3 = 2x_2+3$$

$$x_1 = x_2$$

- إذا الدالة التابع متباين.

- **التمرين 2:** التابع الغامر:
- حدد ما إذا كانت التابع التالي غامر ام لا؟

$$f: R \to R, f(x) = x^3$$

- الحل:
- شرط الغمر:

$$\forall y \in R: \exists x \in R: y = f(x)$$

$$y = f(x)$$

$$y = x^3$$

$$x=\sqrt[3]{y}$$

- بما ان y يمكن ان يكون عدد حقيقي إذا التابع التالي غامر.

- **التمرين 3:** تابع التقابل:
- حدد ما إذا كانت التابع التالي تقابل ام لا؟

$$f: R \rightarrow R,\ f(x) = 4x-5$$

- الحل:
- ليكون التابع تقابل يجب ان يكون متباين وغامر معا.
- شرط التباين:

$$\forall\ x_1, x_2 \in R;\ f(x1) = f(x2) \Longrightarrow x1 = x2$$

$$f(x_1) = f(x_2)$$

$$4x_1-5 = 4x_2-5$$

$$x_1 = x_2$$

- اذن التابع متباين.
- شرط الغمر:

$$\forall y \in R: \exists\ x \in R: y = f(x)$$

$$y = f(x)$$

$$4x-5 = y$$

$$4x = y+5$$

$$x = \frac{y+5}{4}$$

- بما ان y يمكن ان يكون عدد حقيقي فان التابع غامر.
- بما ان التابع متباين وغامر معا فهو تقابل.

- <u>**التمرين 4:**</u> تابع التقابل العكسي:
- اوجد التقابل العكسي للتابع التالي بفرض ان التابع تقابل:

$$f: R \rightarrow R,\ f(x) = 3x+2$$

- الحل:
- لإيجاد التقابل نوجد تابع الغمر حيث:

$$f(x) = y$$
$$3x+2 = y$$
$$3x = y-2$$
$$x = \frac{y-2}{3}$$

- نعوض x مكان كل y في تابع الغمر:

$$f^{-1}: R \to R$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x-2}{3}$$

- **<u>التمرين 5:</u>** تحديد نوع التابع:
- هل هذا التابع تقابل وإذا كان تقابل اوجد التقابل العكسي:

$$f: R \to R, f(x) = x^2$$

- الحل:
- نتحقق من التباين:

$$\forall x_1, x_2 \in R; f(x1) = f(x2) \Longrightarrow x_1 = x_2$$

$$f(x_1) = f(x_2)$$

$$x_1^2 = x_2^2$$

$$x_1 = \pm x_2$$

- ومنه التابع غير متباين إذا التابع ليس تقابل.

- **<u>التمرين 6:</u>**
- ليكن لدينا التابع $f:]\,2,+\infty\,[\to R$ المعرف وفق العلاقة: $f(x) = \ln(x+2)-3$
- المطلوب:

1) هل f متباين.
2) هل f غامر.
3) هل f تقابل؟ وفي حال الإيجاب اوجد تقابله العكسي.

- الحل:

1) نطبق شرط التباين:

$$\forall x_1, x_2 \in R; f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_2 = x_2$$

$$f(x_1) = f(x_2)$$

$$\ln(x_1+2)-3 = \ln(x_2+2)-3$$

- نختصر 3 من الطرفين:

$$Ln(x_1+2) = \ln(x_2+2)$$

- نأخذ e الطرفين:

$$x_1 = x_2$$

- ومنه التابع متباين.

2) نطبق شرط الغمر:

$$\forall y \in R : \exists\, x \in R : y = f(x)$$

$$f(x) = y$$

$$\ln(x+2) - 3 = y$$

$$\ln(x+2) = y+3$$

$$x+2 = e^{y+3}$$

$$x = e^{y+3} - 2$$

- إذا التابع ليس غامر.

3) بما ان التابع ليس غامر إذا التابع ليس تقابل.