TRANSISTORS

تحليل 1

الدكتور مهند بكر

قسم المتتاليات 2024

انضم إلى مجموعة التلغرام الخاصة بنا

عبر مسح الرمز جانباً أو اضغط هنا

- تحليل :

• البرهان الرياضي : ← الاثبات بالتدريج

← البرهان المباشر

← نقض الفرض

① البرهان المباشر : يعد البرهان المباشر من أقصر الطرق ولكنه الأصعب حيث ننطلق من الفرض ونناقش منطقياً إلى أن نصل بصحة للمطلوب بشكل مباشر.

- تمرين 1 : برهن صحة القضية $\forall n \in \mathbb{N} : \sqrt{n^2+1} > n$

- الحل :

• لدينا أنه أياً كان العدد الطبيعي n فإن : $n^2+1 > n^2$

$\sqrt{n^2+1} > \sqrt{n^2}$

* ملاحظة : لم تتغير جهة إشارة التراجح عند الجذر لأنه تابع الجذر التربيعي متزايد تماماً على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$

$\sqrt{n^2+1} > n$ وهذا المطلوب برهانه

- تمرين 2 : برهن صحة القضية $\forall n \in \mathbb{N} \quad 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

- الحل :

$L_1 = 1+2+3+\cdots+(n-1)+n$

• ولدينا : $L_1 = n+(n-1)+\cdots+3+2+1$

• نجمع طرفاً لطرف

$2L_1 = (n+1)+(n+1)+\cdots+(n+1)+(n+1)$

$2L_1 = n(n+1) \rightarrow L_1 = \frac{n(n+1)}{2} = L_2$

- تمرين 3 : $a+ar+ar^2+ar^3+\cdots+ar^{n-1} = a\frac{1-r^n}{1-r}$

- الحل :

• لدينا $L_1 = a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-2}+ar^{n-1}$

$-rL_1 = -ar-ar^2-ar^3-\cdots\cdots-ar^{n-1}-ar^n$

• نجمع طرفاً لطرف $L_1 - rL_1 = a - ar^n$

$$\Rightarrow L_1(1-r) = a - ar^n \Rightarrow L_1 = a\frac{1-r^n}{1-r}$$

2 طريقة نقض الفرض:

* برهان مباشر: اذا كان $2x+5=11$ فإن $x=3$

$$2x = 11-5 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3$$

* نقض الفرض: اذا كان $2x+5=11$ فإن $x=3$

• نفرض جدلاً أن $x \neq 3$

$$\Rightarrow 2x \neq 6 \Rightarrow 2x+5 \neq 11$$

• وصلنا لتناقض مع المعطيات فالفرض الجدلي خاطئ فإن $x=3$

* نقض الفرض: ننطلق من نقيض المطلوب ونناقش منطقياً حتى نصل الى نتيجة لا يمكن قبولها بالتالي نصل الى صحة المطلوب بشكل غير مباشر.

* تمرين 1: $\forall n \in \mathbb{N} : \sqrt{n^2+1} > n$

• نفرض جدلاً أن: $\exists n \in \mathbb{N} : \sqrt{n^2+1} \leq n$

بالتربيع نجد $n^2+1 \leq n^2 \Rightarrow n^2 - n^2 + 1 \leq 0 \Rightarrow 1 \leq 0$

• وهذا تناقض فالفرض الجدلي خاطئ والعلاقة الأساسية صحيحة.

* تمرين 2: برهن أن $\forall n \in \mathbb{N}^* : \frac{1}{n^2} \leq \frac{3}{n(n+1)}$

• نفرض جدلاً أن: $\exists n \in \mathbb{N}^* : \frac{1}{n^2} > \frac{3}{n(n+1)}$

• نقلب المتراجحة $n^2 < \frac{n(n+1)}{3}$

$$\Rightarrow 3n^2 < n^2 + n \Rightarrow 2n^2 < n \Rightarrow 2n < 1$$

$$\Rightarrow n < \frac{1}{2}$$

• وهذا غير ممكن (وجود عدد طبيعي يخالف الصفر وأصغر من $\frac{1}{2}$).

استخدم نقض الفرض

*واجب: برهن صحة العلاقتين:

1. $\forall n \geq 3 : 2n^2 \geq (n+1)^2$

• نفرض جدلاً أن: $\exists n \geq 3 : 2n^2 < (n+1)^2$

• نجذر الطرفين: $\sqrt{2}n < n+1$

$(\sqrt{2}-1)n < 1$

$\Rightarrow n < \frac{1}{\sqrt{2}-1}$

• وهذا تناقض والطرف الجدلي خاطئ والعلاقة الأساسية صحيحة.

نستخدم برهان مباشر

2. من أجل a و b و c ثلاثة أعداد حقيقية فإن:

$$a^2+b^2+c^2 \geq ab+ac+bc$$

• نعلم أن: $(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2 \geq 0$

$$a^2-2ab+b^2+a^2-2ac+c^2+b^2-2bc+c^2 \geq 0$$

$$\div 2 \quad 2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2ac-2bc \geq 0$$

$$a^2+b^2+c^2 \geq ab+ac+bc$$

• وهو المطلوب.

- الاستقراء الرياضي:

- بالرغم من أنها أطول الطرق لكنها الأسهل لأنها عبارة عن اتباع خطوات محددة:

$\boxed{1}$ نثبت صحة القضية من أجل أول قيمة للعدد الطبيعي (n).

$\boxed{2}$ نفرض بأن القضية صحيحة من أجل قيمة ما للعدد الطبيعي (n) ولتكن (K).

$\boxed{3}$ نثبت صحة العلاقة من أجل القيمة التالية لـ (n) أي (n+1).

• عندما تكون تلك القضية صحيحة من أجل كل الأعداد الطبيعية بدءاً من القيمة الأولية لـ (n) ليست بالضرورة أن تكون تلك القيمة (0) أو (1).

- تمرين ①:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \sqrt{n^2+1} > n$$

• نثبت صحة العلاقة من أجل $n=0$:

$$L_1 = \sqrt{0^2+1} = 1$$
$$L_2 = 0 \quad \Rightarrow L_1 > L_2$$

• نفرض صحة العلاقة من أجل (n):

$$\sqrt{n^2+1} > n$$

• نثبت صحة العلاقة من أجل (n+1):

أي لنثبت

$$\sqrt{(n+1)^2+1} > n+1$$

$$L_1 = \sqrt{(n+1)^2+1} > \sqrt{(n+1)^2} = n+1 = L_2$$

• والعلاقة صحيحة من أجل (n+1) وبالتالي حسب الاستقراء الرياضي العلاقة الأساسية محققة من أجل أي عدد طبيعي (n).

- تمرين ②:

$$1+2+3+\text{------}+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

- أياً كان العدد الطبيعي الموجب تماماً:

• نثبت صحة العلاقة من أجل $n=1$:

$$L_1 = 1$$
$$L_2 = \frac{1(2)}{2} = 1 \quad \Rightarrow L_1 = L_2$$

• نفرض صحة العلاقة من أجل (n):

$$1+2+3+\text{------}+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

• نثبت صحة العلاقة من أجل $(n+1)$:

أي لنثبت:
$$1+2+3+\dots+n+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$L_1=\underbrace{1+2+3+\dots+n}+(n+1)$$
$$=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)=\frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}=L_2$$

• والعلاقة محققة من أجل $(n+1)$ وبالتالي حسب الاستقراء الرياضي العلاقة الأساسية محققة من أجل أي عدد طبيعي (n).

- تمرين ③:

- اثبت صحة القضية من أجل العدد الطبيعي الموجب تماماً n:
$$1^3+2^3+3^3+\dots+n^3=(1+2+3+\dots+n)^2=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

• اثبتنا في التمرين السابق أن:
$$1+2+3+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$
$$\Rightarrow (1+2+3+\dots+n)^2=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

• لنثبت:
$$1^3+2^3+3^3+\dots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

• نثبت صحة العلاقة من أجل $n=1$:
$$L_1=1^3=1$$
$$L_2=\left(\frac{1(2)}{2}\right)^2=1 \quad \Rightarrow L_1=L_2$$

• نفرض صحة العلاقة من أجل n:
$$1^3+2^3+3^3+\dots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

• نثبت صحة العلاقة من أجل $(n+1)$:
$$1^3+2^3+3^3+\dots+n^3+(n+1)^3=\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$

$$L_1=\underbrace{1^3+2^3+3^3+\dots+n^3}+(n+1)^3$$
$$=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2+(n+1)^3$$
$$=\frac{n^2(n+1)^2+4(n+1)^3}{4}=\frac{(n+1)^2(n^2+4(n+1))}{4}$$

$$=\frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4}=\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}=\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2=L_2$$

- طلب اضافي:

- استفد من العلاقة المثبتة سابقاً لحساب المجموع:

$$A = 6^3 + 7^3 + \dots + 10^3$$

• لنأخذ:

$$A_1 = 1^3 + 2^3 + \dots + 10^3$$

$$= \left(\frac{10(11)}{2}\right)^2 = 55^2 = 3025$$

• ولدينا أيضاً:

$$A_2 = 1^3 + 2^3 + \dots + 5^3$$

$$= \left(\frac{5(6)}{2}\right)^2 = 15^2 = 225$$

• ومنه:

$$\Rightarrow A = A_1 - A_2 = 3035 - 225 = 2800$$

- تمرين ④:

- برهن صحة العلاقة: $2^n > 2n+1$.

باستخدام الاثبات بالتدريج

$n=0 \Rightarrow 2^0 > 2(0)+1$ ✗

$n=1 \Rightarrow 2^1 > 2(1)+1$ ✗

$n=2 \Rightarrow 2^2 > 2(2)+1$ ✗

$n=3 \Rightarrow 2^3 > 2(3)+1$ ✓

• نثبت صحة القضية من أجل $n=3$:

$L_1 = 2^3 = 8$

$L_2 = 2(3)+1 = 7$

$\Rightarrow L_1 > L_2$

• نفرض صحة العلاقة من أجل n:

$$2^n > 2n+1$$

• نثبت صحة العلاقة من أجل $n+1$:

$$2^{n+1} > 2(n+1)+1 = 2n+3$$

$$L_1 = 2^n \cdot 2 > 2(2n+1)$$

$$= 4n+2$$

$$= 2n+2+2n$$

$$> 2n+2+1 = 2n+3$$

- وظيفة

- تمرين ①:

$\forall n \in IN : 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ---- + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n}$

• نثبت صحة العلاقة من أجل $n=0$

$L_1 = 1$

$L_2 = 2 - \frac{1}{2^0} = 2 - 1 = 1 \Rightarrow L_1 = L_2$

• نفرض صحة العلاقة من أجل n

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ---- + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n}$

• نثبت صحة العلاقة من أجل $n+1$

$\underbrace{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ---- + \frac{1}{2^n}} + \frac{1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{1}{2^{n+1}}$

$\Downarrow$

$2 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{2}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{1}{2^{n+1}} = L_2$

- تمرين ②:

$n > 0 : 1 + 2 + 2^2 + ------- + 2^{n-1} = 2^n - 1$

• نثبت صحة العلاقة من أجل $n=1$

$L_1 = 1$

$L_2 = 2^1 - 1 = 1 \Rightarrow L_1 = L_2$

• نفرض صحة العلاقة من أجل n

$1 + 2 + 2^2 + ---- + 2^{n-1} = 2^n - 1$

• نثبت صحة العلاقة من أجل $n+1$

$\underbrace{1 + 2 + 2^2 + ---- + 2^{n-1}} + 2^n = 2^{n+1} - 1$

$\Downarrow$

$2^n - 1 + 2^n = 2 \cdot 2^n - 1 = 2^{n+1} - 1$

تمرين ③:

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+----+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

• نثبت صحة العلاقة من أجل $n=1$

$L_1=\frac{1}{2}$

$L_2=\frac{1}{2} \Rightarrow L_1=L_2$

• نفرض صحة العلاقة من أجل n

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+---+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

• نثبت صحة العلاقة من أجل $n+1$

$$\underline{\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+----+\frac{1}{n(n+1)}}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{(n+1)}{n+2}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{n}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$=\frac{n(n+2)}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)}=\frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)}=\frac{n+1}{n+2}=L_2$$

تمرين ④:

$\forall n\in\mathbb{N}^*\ ;\ 1+2\times2!+3\times3!+......+n\times n!=(n+1)!-1$

• نثبت صحة العلاقة من أجل $n=1$

$L_1=1$

$L_2=(1+1)!-1=2!-1=1 \Rightarrow L_1=L_2$

• نفرض صحة العلاقة من أجل n

$1+2\times2!+3\times3!+......+n\times n!=(n+1)!-1$

• نثبت صحة العلاقة من أجل $n+1$

$1+2\times2!+3\times3!+......+n\times n!+(n+1)(n+1)!=(n+2)!-1$

$L_1=(n+1)!-1+(n+1)(n+1)!$

$=(n+1)!\,[n+1+1]-1=(n+1)!\,(n+2)-1$

$=(n+2)!-1$

المتتاليات

• المتتالية عدد لانهائي من الحدود بغض النظر عن قيم هذه الحدود فمثلاً لدينا المتتاليات الآتية:

$(-1,1,-1,1,\ldots\ldots)$ * / $(\underset{u_0}{-4},\underset{u_1}{-1},\underset{u_2}{2},\underset{u_3}{5},8,11,\ldots\ldots)$

سنرمز الى المتتالية بالرمز $(u_n)_{n\geq n_0}$ حيث n_0 عدد طبيعي معطى ويمكن أن يتغير من متتالية لأخرى ونسمي u_n الحد المتتالية ذي الدليل n (الحد العام للمتتالية) فمثلاً نمكن أن نرمز للمتتالية السابقة * بالرمز $(u_n)_{n\geq 1}: u_n=(-1)^n$ لأنه بتعويض $n=1$ في الحد العام نجد الحد الأول $u_1=(-1)^1=-1$

وبتعويض $n=2$ في الحد العام نجد الحد الثاني $u_2=(-1)^2=1$

وهكذا.........

تعريف المتتالية:

• يمكن تعريف متتالية باحدى الأساليب الآتية:

(1) بتعريف صريح للحد ذي الدليل (n) أي يعرف الحد ذو الدليل (n) بصيغة تتبع العدد (n) تفيد في حسابه فمثلاً المتتالية: $(u_n)_{n\geq 1}: u_n=\frac{(-1)^n}{n+1}$

• ومنه نمكن ايجاد حدود هذه المتتالية بالحساب المباشر على الشكل الآتي:

$n=1$ الحد الأول $u_1=\frac{(-1)^1}{1+1}=-\frac{1}{2}$

$n=2$ الحد الثاني $u_2=\frac{(-1)^2}{2+1}=\frac{1}{3}$

وهكذا.......

• أو يمكن أن نعطى المتتالية على الشكل $u_n=f(n)$ حيث f مثلاً تابع معرف من $[0,\infty[$ بالشكل $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$ فبهذا الشكل كأنه يقول لك لتكن لدينا المتتالية: $(u_n)_{n\geq 0}: u_n=\sqrt{n^2+n+1}$

وبالتالي الحد الأول $u_0=\sqrt{0+0+1}=1$

(2) تعريف المتتالية بالتدريج: يمكن تعريف المتتالية بالتدريج وذلك بأن نحسب الحد ذي الدليل (n) بدلالة الحدود التي تسبقه فلتعريف المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ بالتدريج يجب أن نعطى الحد الأول ثم نعطى علاقة تسمى علاقة تدريجية تفيد هذه العلاقة في حساب كل حد من حدود المتتالية بدلالة الحدود التي تسبقه فمثلاً لتكن المتتالية: $(u_n)_{n\geq 0}$

$$\begin{cases} u_0=3 \\ u_{n+1}=u_n^2-2 \end{cases}$$

• ان هذه المعطيات تسمح بحساب حدود المتتالية واحداً تلو الآخر:

الحد الأول $u_0=3$

الحد الثاني $u_1=u_0^2-2=3^2-2=7$

وهكذا.........

3 جهة اطراد متتالية: تزايد او تناقص هذه المتتالية

• لدراسة اطراد هذه المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ لدينا ثلاث طرق:

① نقوم بدراسة اشارة الفرق $u_{n+1}-u_n$ ونميز الحالات الآتية:

$u_{n+1}-u_n>0 \Rightarrow$ متزايدة تماماً

$u_{n+1}-u_n<0 \Rightarrow$ متناقصة تماماً

$u_{n+1}-u_n=0 \Rightarrow$ ثابتة

• فمثلاً لتكن لدينا المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}: u_n=1-3n$

$$u_{n+1}-u_n=1-3(n+1)-(1-3n)$$
$$=1-3n-3-1+3n$$
$$=-3<0 \Rightarrow \text{متناقصة تماماً}$$

② نكتب $(u_n)=f(n)$ إن أمكن ثم ندرس اطراد التابع f (اشتقاق) فاذا كان التابع f مطرد على المجال $[n_0,+\infty[$ كانت جهة اطراد المتتالية u_n حيث $n\geq n_0$ هي نفسها جهة اطراد التابع f

فمثلاً لنأخذ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}: u_n=\frac{2n-1}{n+4}$; $u_n=f(n)$

• حيث f معرفاً على $[0,+\infty[$ وفق: $f(x)=\frac{2x-1}{x+4}$

$$f'(x)=\frac{2(x+4)-2x+1}{x+4}=\frac{9}{(x+4)^2}>0$$

• ومنه f متزايدة تماماً على $[0,+\infty[$ ومنه $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة تماماً.

③ عندما تكون المتتالية ذات حدود موجبة تماماً يمكن أن نقارن بين النسبة $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ مع 1 حيث:

$\frac{u_{n+1}}{u_n}>1 \Rightarrow u_n$ متزايدة تماماً

$\frac{u_{n+1}}{u_n}<1 \Rightarrow u_n$ متناقصة تماماً

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 \Rightarrow$ u ثابتة

• مثلا لدينا المثال الآتي:

$(w_n)_{n\geq 0} : w_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n\left(\frac{2}{3}\right)}{\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \frac{2}{3} < 1$$

$\Leftarrow$ المتتالية متناقصة تماما.

- تمرين: من حالة عدد طبيعي $n \geq 1$ ليكن:

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

و $w_n = u_{2n} - u_n$ أثبت أن (w_n) متزايدة تماما.

$$u_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{\underset{n+n}{2n}}$$

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

$$w_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

$$w_{n+1} = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+2}$$

$$w_{n+1} - w_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} + \frac{1-2}{2n+2} = \frac{2n+2-2n-1}{(2n+1)(2n+2)}$$

$$= \frac{1}{(n+1)(2n+2)} > 0$$

$\Leftarrow$ (w_n) متزايدة تماما

- تمرين: ادرس اطراد المتتالية ذات الحد العام $(a_n)_{n\geq 0}$

$$a_n = \frac{n}{n+1}$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+2)(n+1)} = \frac{n^2+2n+1-n^2-2n}{(n+2)(n+1)}$$

$$= \frac{1}{(n+2)(n+1)} > 0 \Rightarrow (a_n) \text{ متزايدة تماما}$$

- تمرين: ادرس اطراد المتتالية $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$$

$$= \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}$$

$$= \frac{n+2-n-1}{n+1-n} \cdot \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} < 1$$

⇐ المتتالية (a_n) متناقصة تماماً.

- تمرين: ادرس اطراد المتتالية $a_n = \frac{2^n}{n!}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n+1}$$

$n=0 \Rightarrow 2 > 1$

$n=1 \Rightarrow 1 = 1$

$n=2 \Rightarrow \frac{2}{3} < 1$

$n=3 \Rightarrow \frac{2}{4} < 1$

(a_n) متناقصة تماماً بدءاً من الحد الثالث

TRANSISTORS

RosRamia

	المتتالية الحسابية	المتتالية الهندسية
تعريف	$U_{n+1}=U_n+r$	$U_{n+1}=U_n\cdot q$
معيار	$U_{n+1}-U_n=r\in R$	$\frac{U_{n+1}}{U_n}=q$
العلاقة بين حدين U_m, U_p	$U_m=U_p+(m-p)r$	$U_m=U_p\cdot q^{m-p}$
عدد الحدود	$m=j-i+1$	$m=j-i+1$
مجموع n حد	$S=\underset{\text{عدد الحدود}}{m}\left(\frac{\overset{\text{أول}}{a}+\overset{\text{آخر}}{l}}{2}\right)$	$S=\underset{\text{أول حد}}{a}\left(\frac{1-q^{\overset{\text{عدد الحدود}}{n}}}{1-q}\right)$
a, b, c ثلاث حدود متوالية	$b=\frac{a+c}{2}$	$b^2=a\cdot c$

- المتتالية الحسابية:

$(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية حدها الأول (-3) وأساسها (r=4)

$U_0 \leftarrow -3, 1, 5, 9, 13, \ldots\ldots$

$$U_m=U_p+(m-p)r$$

$$U_4=U_1+(4-1)\cdot(4)$$

$$=1+(3)(4)=13$$

$$S=m\left(\frac{a+l}{2}\right)=3\left(\frac{1+9}{2}\right)=15$$

- المتتالية الهندسية:

$(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية حدها الأول (2) وأساسها (q=3)

2, 6, 18, 54

$$U_m=U_p\cdot q^{m-p}$$

$$U_3=U_1\cdot(3)^{3-1}=6(3)^2=54$$

$$S=a\left(\frac{1-q^m}{1-q}\right)=2\left(\frac{1-3^3}{1-3}\right)$$

$$=-1(-26)=26$$

TRANSISTORS

- تمرين: متتالية حسابية حدها الأول (5) وأساسها $(r=3)$

① ما قيمة الحد السابع U_7.

② ما ترتيب الحد ذو القيمة (62). U_n

- الحل:

[1]

$$U_7 = U_1 + (7-1)(3)$$
$$= 5 + (6)(3) = 23$$

[2]

$$U_n = U_1 + (n-1)(3)$$
$$62 = 5 + (n-1)(3)$$
$$62 = 5 + 3n - 3$$
$$\Rightarrow 3n = 60$$
$$n = 20$$

- تمرين: أوجد مجموع الحدود الـ (12) الأولى من متتالية حسابية حدها الأول (3) وأساسها (2).

- الحل:

$$S = n\left(\frac{3+25}{2}\right) \Rightarrow S = 168$$
$$U_{12} = U_1 + (12-1)(2)$$
$$= 3 + (11)(2) = 25$$

- تمرين: أوجد الحد السابع من المتتالية الهندسية

$$1, 2, 4, 8$$
$$U_7 = U_1 \cdot q^{7-1} = 1 \cdot (2)^6 = 64$$

- تمرين: ما ترتيب الحد الذي قيمته 192 في المتتالية الهندسية

$$3, 6, 12, \ldots$$
$$U_n = U_1 \cdot q^{n-1}$$
$$192 = 3(2)^{n-1}$$
$$2^{n-1} = 64$$
$$2^{n-1} = 2^6 \Rightarrow n-1 = 6$$
$$n = 7$$

TRANSISTORS

- المتتاليات المحدودة:

• نقول عن المتتالية أنها محدودة من الأعلى اذا وجد عدد حقيقي M بحيث يكون $M \geq a_n$ / $a_n < M$ و $\forall n \in N$ ونسمي العدد M بأنه الحد الأعلى للمتتالية ونقول أن المتتالية محدودة من الأدنى اذا وجد عدد حقيقي N بحيث يكون $N \leq a_n$ / $N < a_n$ و $\forall n \in N$ ونسمي العدد N الحد الأدنى للمتتالية

• نقول عن المتتالية (a_n) أنها محدودة اذا وجد عددان M و m حقيقيان $M \geq a_n \geq m$ حيث $\forall n \in N$ أي اذا قلنا ان المتتالية محدودة فهي محدودة من الأعلى والأدنى معاً.

$U_n = n^2$, $U_n = n$ محدودة من الأدنى $n \geq 0$

$U_n = -n^2$ محدودة من الأعلى $-n^2 \leq 0$

$U_n = \sin(n)$ محدودة $1 \geq U_n \geq -1$

$U_n = (-1)^n$ محدودة $1 \geq (-1)^n \geq -1$

$U_n = \frac{1}{n}$ محدودة $1 \geq \frac{1}{4} > 0$

- تمرين:

(I) متتالية هندسية الحد الثاني فيها (6) والحد السابع (192).

1. أوجد أساس المتتالية.
2. أوجد الحد الأول والعاشر.

(II) أوجد مجموع الحدود السبعة الأولى من متتالية هندسية. $4, 8, 16, \ldots$

(III) متتالية حسابية مجموع حديها الأول والثالث (16) ومجموع حديها الثاني والرابع (22) أوجد الحدود الخمسة الأولى.

حل الوثيقة:

Ⅰ 1

$$U_2 = 6$$

$$U_7 = 192$$

$$U_m = U_p . q^{m-p}$$

$$\Rightarrow U_7 = U_2 . q^{7-2}$$

$$\Rightarrow 192 = 6 . q^{7-2}$$

$$\Rightarrow 32 = q^5 \Rightarrow 2^5 = q^5 \Rightarrow q = 2$$

2

$$U_2 = U_1 . q^{2-1}$$

$$\Rightarrow U_1 = \frac{U_2}{q} = \frac{6}{2} = 3$$

$$U_{10} = U_7\, q^{10-7}$$

$$\Rightarrow U_{10} = U_7 q^3 = 192 \times 2^3 = 1536$$

Ⅱ

$$4, 8, 16, \ldots\ldots$$

$$q = 2 \,,\, U_1 = a = 4 \,,\, n = 7 - 1 + 1 = 7$$

$$S = a\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)$$

$$= 4\left(\frac{1-(2)^7}{1-2}\right) = 4\left(\frac{1-128}{1-2}\right) = 508$$

Ⅲ

$$U_1 + U_2 + r = 16 \qquad \Leftarrow U_1 + U_3 = 16$$

$$U_1 + U_1 + r + r = 16$$

$$\Rightarrow U_1 + r = 8 \text{ ---- } \boxed{1}$$

$$U_1 + r + U_1 + 3r = 22 \qquad \Leftarrow U_2 + U_4 = 22$$

$$2U_1 + 4r = 22$$

$$\Rightarrow U_1 + 2r = 11 \text{ ---- } \boxed{2}$$

• بطرح المعادلتين 2 و1 نجد: $r = 3$

$\Rightarrow U_1 = 8 - 3 = 5$

$\Rightarrow U_2 = U_1 + r = 5 + 3 = 8$

$\Rightarrow U_3 = 8 + 3 = 11$

$\Rightarrow U_4 = 11 + 3 = 14$

$\Rightarrow U_5 = 14 + 3 = 17$

- تقارب متتالية:

• نقول عن متتالية (a_n) أنها متقاربة من العدد $(\ell \in \mathbb{R})$ إذا وفقط إذا كان $\lim_{n \to +\infty} a_n = \ell$

ونسمي العدد (ℓ) نهاية المتتالية.

• نقول عن المتتالية (a_n) أنها متباعدة نحو $(+\infty)$ إذا وفقط إذا $\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$ ومتباعدة نحو $(-\infty)$ عندما

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = -\infty$$

• عندما يكون للمتتاليتين نهايتين مختلفتين نقول إنه ليس للمتتالية نهاية.

- مثال: ادرس تقارب المتتاليات الآتية:

1) $a_n = \dfrac{2n^2+3}{n-1}$

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$$

فهي متباعدة نحو $(+\infty)$

2) $a_n = \dfrac{1+n^2}{2n^3+5n}$

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$$

متقاربة من العدد (0)

3) $a_n = \dfrac{1}{\ln(n)} + 2$

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = 2$$

متقاربة من العدد (2)

4) $a_n = \sqrt{\dfrac{4n-3}{n+1}}$

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \sqrt{4} = 2$$

5) $U_n = \cos\left(\dfrac{2n\pi}{3n+1}\right)$

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

TRANSISTORS

6 $U_n = \sin\left(\frac{1-n\pi}{2n+1}\right)$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \sin\left(\frac{-\pi}{2}\right) = -1$$

7 $U_n = \frac{2n+(-1)^n}{3n}$

$$U_n = \frac{2}{3} + \frac{(-1)^n}{3n}$$

$$\frac{-1}{3n} \leq \frac{(-1)^n}{3n} \leq \frac{1}{3n}$$

$$0$$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \frac{2}{3} + 0 = \frac{2}{3}$$

8 $U_n = \frac{n!-2}{n!}$

$$U_n = 1 - \frac{2}{n!}$$

$$n! > n$$

$$\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} n! = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} U_n = 1$$

خواص:

1 للمتتالية المتقاربة نهاية وحيدة.

2 كل متتالية متقاربة تكون محدودة والعكس غير صحيح بالضرورة فليست كل متتالية محدودة متقاربة.

$$U_n = (-1)^n$$

محدودة $-1 \leq (-1)^n \leq 1 \Rightarrow -1 \leq U_n \leq 1$

لكنها ليست متقاربة

• محدودة لكنها متباعدة لأنها تسعى الى نهايتين مختلفتين

$$(-1)^{\text{زوجي}} = 1$$

$$(-1)^{\text{فردي}} = -1$$

3 اذا كانت المتتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى تكون متقاربة.

4 اذا كانت المتتالية متناقصة ومحدودة من الادنى تكون متقاربة.

TRANSISTORS

- المتتاليات اللامتناهية في الصغر:

• تسمى المتتالية (U_n) انها لامتناهية في الصغر اذا كان $\lim_{n \to +\infty} U_n = 0$

- مثال: أثبت ان المتتالية الآتية لامتناهية في الصغر:

$\boxed{1}$ $U_n = \sqrt{n^2+n} - n - \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow U_n = \frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{n}{\sqrt{n^2(1+\frac{1}{n})}+n} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{n}{|n|\sqrt{1+\frac{1}{n}}+n} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{n}{n(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1)} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} - \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} U_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

$\boxed{2}$ $U_n = \frac{\sqrt{n}+1}{n+1}$

$$= \frac{\sqrt{n}(1+\frac{1}{\sqrt{n}})}{n(1+\frac{1}{n})}$$

$$= \frac{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}(1+\frac{1}{n})}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} U_n = \frac{1+0}{+\infty(1+0)} = 0$$

TRANSISTORS

- خواص:

1. المتتالية الثابتة $(C, C, C, \ldots\ldots)$ هي متتالية لامتناهية في الصغر اذا وفقط اذا كان $C=0$.
2. اذا حذفنا عدداً منتهياً من حدود المتتالية اللامتناهية في الصغر أو اذا اضفنا عدداً منتهياً من الاعداد المحدودة فانها تبقى لامتناهية في الصغر
3. المتتالية اللامتناهية في الصغر هي متتالية محدودة.
4. حاصل جمع متتاليتين لامتناهيتين في الصغر هو متتالية لامتناهية في الصغر.
5. حاصل جداء متتالية لامتناهية في الصغر و متتالية محدودة هو متتالية لامتناهية في الصغر.
6. جداء عدد من المتتاليات اللامتناهيات في الصغر هو متتالية لامتناهية في الصغر.
7. حاصل قسمة متتاليتين لامتناهيتين في الصغر ليس بالضرورة لامتناهية في الصغر.

* فمثلاً لدينا المتتاليتين:

$(a_n): a_n = \frac{1}{n}$

$(b_n): b_n = \frac{1}{2n}$

* هما لامتناهيتين في الصغر.

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0 \;,\; \lim_{n\to+\infty} b_n = 0$$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{2n}} = 2$$

اذن

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = 2$$

* وهي متقاربة من العدد (2) لكنها ليست لامتناهية في الصغر

- تمرين: ادرس تقارب المتتالية:

$$U_n = \frac{\sin^2 n}{2n}$$

ط1:

$$U_n = \underbrace{(\sin^2 n)}_{\text{محدودة}} \underbrace{\left(\frac{1}{2n}\right)}_{\text{لامتناهية في الصغر}}$$

$\Leftarrow$ لامتناهية في الصغر

ط2:

$$\frac{0}{2n} \leq \frac{\sin^2 n}{2n} \leq \frac{1}{2n}$$

$$\to 0 \leftarrow$$

- تذكرة: مبرهنة اذا كان (q) عدداً حقيقياً هو أساس المتتالية الهندسية $u_n = q^n$ عندئذٍ:

1. $-1 < q < 1$ عندها $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ (متقاربة)
2. $1 < q$ عندها $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ (متباعدة)
3. $q \leq -1$ ليس لها نهاية
4. $q = 1$ عندها u_n ثابتة $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$

- المتتاليات اللامتناهية في الكبر:

• هي كل متتالية تسعى نحو $(\mp\infty)$.

- خواص:

1. الشرط اللازم والكافي لأن تكون المتتالية (a_n) لامتناهية في الكبر هو أن تكون المتتالية $\frac{1}{a_n}$ لامتناهية في الصغر.
2. حاصل جداء متتالية لامتناهية في الكبر (a_n) ومتتالية متقاربة (b_n) [ليس متتالية لامتناهية في الصغر
هو متتالية لامتناهية في الكبر.
3. أيا كانت المتتالية (a_n) متتالية لامتناهية في الكبر والمتتالية (b_n) متتالية محدودة فإن المتتاليات:

$$(a_n + b_n)$$
$$(a_n \times b_n)$$
$$\left(\frac{a_n}{b_n}\right) ; b_n \neq 0$$

• هي متتالية لامتناهية في الكبر.

- وظيفة: أثبت أن المتتالية:

1. $u_n = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \dots\dots - \frac{1}{2^n}$ لامتناهية في الصغر.
2. $u_n = \frac{1-3^n}{2^n}$ لامتناهية في الكبر.

TRANSISTORS

TRANSISTORS

تحليل 1

الدكتورة شذا الخطيب

قسم التوابع 2024

انضم إلى مجموعة التلغرام الخاصة بنا

عبر مسح الرمز جانباً أو اضغط هنا

- التحليل:

- التابع: هو علاقة ترتبط بين كل عنصر من المجموعة الأولى (المنطلق) بعنصر واحد فقط من المجموعة الثانية (المستقر).

- لتكن المجموعتين: $B=\{5,6\}$ و $A=\{1,2,3\}$ ولنعرف بيان علاقة بين A و B حيث $R:A \longrightarrow B$

بالشكل: $R_1=\{(1,5),(1,6),(2,5),(2,6)\}$

• ليس تابعاً بسبب وجود قيم في المنطلق ترتبط بأكثر من عنصر من المستقر أو بسبب وجود قيمة من المنطلق لا ترتبط بأية عنصر من المستقر.

- الحل:

• نلاحظ أن: $\exists x=3\in A, \forall y\in B: x \not R y$ اختلال الشرط الأول

$(1,5)\Leftrightarrow 1R5$

• أو بشكل آخر:

$\exists x=1\in A; \exists y=5\in B \wedge \exists y=6\in B: (1R5)\wedge(1R6)$ اختلال الشرط الثاني

• في كلتا الحالتين العلاقة ليست تابع

- لا نسمي المجموعتين منطلق ومستقر حتى نثبت أنه تابع.

- التابع المتباين:

- التعريف الرياضي الأول: نقول أن التابع f المعرف من X إلى Y وفق قاعدة ربط $f(x)$ أنه متباين

إذا تحقق الشرط: $\forall x_1,x_2\in X; f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$

التعريف الأكثر استخداماً في حل التمارين ⇑

- التعريف الرياضي الثاني: نقول عن التابع f المعرف من X إلى Y وفق قاعدة ربط $f(x)$ أنه متباين إذا

تحقق الشرط: $\forall x_1,x_2\in X; x_1\neq x_2 \Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$

- أي يكون التابع متباين إذا كان كل عنصر من المستقر هو صورة لعنصر واحد على الأكثر من المنطلق.

- لتكن لدينا الدالة: $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$

$x\longrightarrow f(x)=3x+7$

- هل f متباين؟

- الحل:

- طريقة أخرى لحل التمرين $f(x)=3x+7$

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} ; x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

$x_1 \neq x_2 \Rightarrow 3x_1 \neq 3x_2$
$\Rightarrow 3x_1+7 \neq 3x_2+7$
$\Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

تحقق الشرط فالتابع f متباين

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} ; f(x_1) = \underset{\text{نفرض}}{f(x_2)} \Rightarrow$

$f(x_1)=f(x_2) \Leftrightarrow 3x_1+7 = 3x_2+7 \Rightarrow$

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad , f(x)=x^2$

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \; ; x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

ولكن

$f(x_1) : x_1 = 2 \Rightarrow f(x_1) = 4$

$f(x_2) : x = -2 \Rightarrow f(x_2) = 4$

$\Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$

• اختل الشرط إذن f ليس متباين.

- طريقة أخرى:

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} ; f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = x_2$

$x_1 = -x_2$

• اختل الشرط إذن f ليس متباين.

- التابع الغامر:

• نقول أن التابع f هو تابع غامر إذا تحقق الشرط:

$\forall y \in Y : \exists x \in X : y = f(x)$

• أي يكون التابع غامر إذا كان كل عنصر من المستقر هو صورة لعنصر واحد على الأقل من المنطلق.

- تمرين:

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = 27x^3$

ملاحظة: نستخدم المثال للنفي وليس للإثبات

$\forall y \in \mathbb{R} : \exists x \in \mathbb{R} : y = f(x)$

$y = f(x) \Rightarrow y = 27x^3$

$x = \frac{\sqrt[3]{y}}{3} \in \mathbb{R}$

RasHemid

- شرط التباين:

$$\forall x_1,x_2 \in \mathbb{R};\ \underbrace{f(x_1)=f(x_2)}_{\text{فرض}} \Rightarrow \underbrace{x_1=x_2}_{\text{طلب}}$$

$$f(x_1)=f(x_2) \Leftrightarrow 3x_1+7=3x_2+7 \Rightarrow 3x_1=3x_2 \Rightarrow x_1=x_2$$

- الشرط محقق إذاً f متباين.

- ليكن لدينا الدالة:

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad , f(x)=x^2$$

- هل f متباين؟

- الحل:

$$\forall x_1,x_2 \in \mathbb{R} \ ; x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

ولكن:

$$f(x_1): x_1=2 \Rightarrow f(x_1)=4$$

$$f(x_2): x=-2 \Rightarrow f(x_2)=4$$

$$\Rightarrow f(x_1)=f(x_2)$$

- اختل الشرط إذن f ليس متباين.

- طريقة أخرى:

$$\forall x_1,x_2 \in \mathbb{R};\ f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$$

$$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1^2=x_2^2 \Rightarrow x_1=x_2$$

$$x_1=-x_2$$

- اختل الشرط إذن f ليس متباين.

- التابع الغامر:

- نقول أن التابع f هو تابع غامر إذا تحقق الشرط:

$$\forall y \in Y: \exists x \in X: y=f(x)$$

- أي يكون التابع غامر إذا كان كل عنصر من المستقر هو صورة لعنصر واحد على الأقل من المنطلق.

- تمرين:

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x)=27x^3$$

ملاحظة: نستخدم المثال للنفي وليس للإثبات.

$$\forall y \in \mathbb{R}: \exists x \in \mathbb{R}: y=f(x)$$

$$y=f(x) \Rightarrow y=27x^3$$

$$x=\frac{\sqrt[3]{y}}{3} \in \mathbb{R}$$

TRANSISTORS

Rashemia

- تمرين للتابع المتباين:

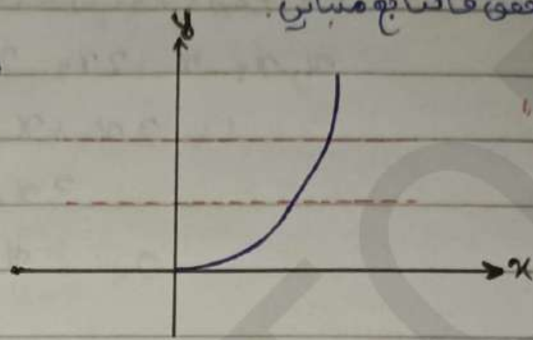
$f: \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R} \quad , f(x) = x^2$

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+ ; f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = x_2$

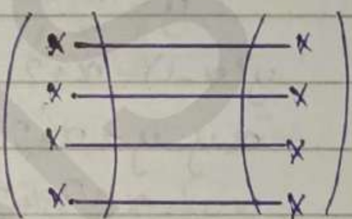
الشرط محقق فالتابع متباين.

هندسياً



هندسياً التابع f متباين حيث أي خط أفقي يرسم من أي قيمة من قيم المستقر هذا الخط يقطع الخط البياني للتابع بنقطة واحدة على الأكثر.

- تقابل والتقابل العكسي:



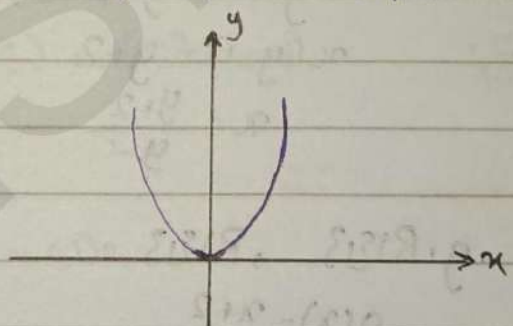
$f: X \longrightarrow Y : x \longrightarrow f(x)$

$f^{-1}: Y \longrightarrow X : x \longrightarrow f^{-1}(x)$

ليكون تقابل

$g: \mathbb{R}^- \longrightarrow \mathbb{R}^+ : g(x) = x^2$

$g: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^- : g(x) = \sqrt{x}$



- تمرين:

$f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto f(x) = \frac{x+2}{x-1}$

- هل f تقابل؟ في حال ذلك، أوجد تقابله العكسي

• متى يكون f تقابل يجب أن يكون متباين وغامر معاً.

• أولاً نثبت أن التابع متباين

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{1\} : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

TRANSLATORS

$$f(x_1)=f(x_2)$$
$$\frac{x_1+2}{x_1-1}=\frac{x_2+2}{x_2-1}$$

$$(x_1+2)(x_2-1)=(x_1-1)(x_2+2)$$
$$\cancel{x_1x_2}-x_1+2x_2\cancel{-2}=\cancel{x_1x_2}+2x_1-x_2\cancel{-2}$$
$$2x_1+x_1=2x_2+x_2$$
$$3x_1=3x_2$$
$$x_1=x_2$$

• ومنه f متباين.

• ثانيا: نتحقق أن f غامر:

$$\forall y\in\mathbb{R}:\exists x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}:f(x)=y$$
$$y=\frac{x+2}{x-1}$$
$$y(x-1)=x+2$$
$$x.y-y=x+2$$
$$x.y-x=y+2$$
$$x(y-1)=y+2$$
$$x=\frac{y+2}{y-1}$$

• ومنه f غير غامر ومنه f ليس تقابلي.

- للدارس التمرين السابق بالشكل

$$g:\mathbb{R}\setminus\{1\}\longrightarrow\mathbb{R}\setminus\{1\}$$
$$g(x)=\frac{x+2}{x-1}$$

• f غامر ومنه f تقابل

• ويكون تقابله العكسي

$$g:\mathbb{R}\setminus\{1\}\longrightarrow\mathbb{R}\setminus\{1\}$$
$$g^{-1}(x)=\frac{x+2}{x-1}$$

لاخراج التقابل العكسي نستبدل كل y بـ x في تابع الغامر

$\sqrt{\frac{1-x}{2-x}}$ $x\in]-\infty,1]\cup]2,\infty[$

$\frac{\sqrt{1-x} \to]-\infty,1]}{\sqrt{2-x} \to]-\infty,2]}$

$D_1\cap D_2=]-\infty,1]$

- تمرين:

$f(x)=\ln\left(\sqrt{\frac{1-x}{2-x}}\right)$

• شرط اللوغاريتم:

$\sqrt{\frac{1-x}{2-x}}>0$

$1-x=0 \Rightarrow x\neq 1$

• شرط الجذر:

$\frac{1-x}{2-x}\geq 0$

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$1-x$		+	0	−		−	
$2-x$		+		+	0	−	
الكسر		+	0	−	‖	+	
		مقبول		مرفوض		مقبول	

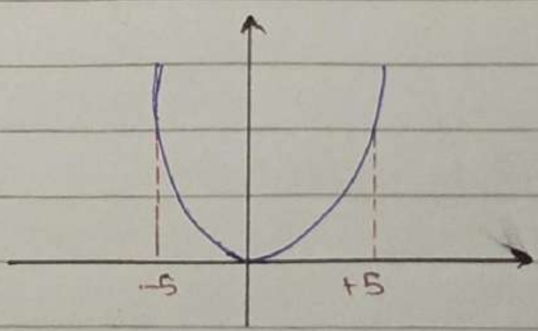
• شرط الجذر: $x\in]-\infty,1]\cup]2,\infty[$

• شرط اللوغاريتم: $x\in]-\infty,1[\cup]2,\infty[$

- نقول عن تابع أنه زوجي إذا تحقق:

① $\forall x\in D_f : -x\in D_f$

② $f(-x)=f(x)$



متناظر بالنسبة لمحور التراتيب

$f(x)=x^2$

$f(-x)=f(x)$

التابع زوجي

- تمرين :

$$f(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{1-x}{2-x}}\right)$$

• شرط اللوغاريتم :

$$\sqrt{\frac{1-x}{2-x}} > 0$$

$$1 - x = 0 \Rightarrow x \neq 1$$

• شرط الجذر :

$$\frac{1-x}{2-x} \geqslant 0$$

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$1-x$		$+$	0	$-$		$-$	
$2-x$		$+$		$+$	0	$-$	
الكسر		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	
		مقبول		مرفوض		مقبول	

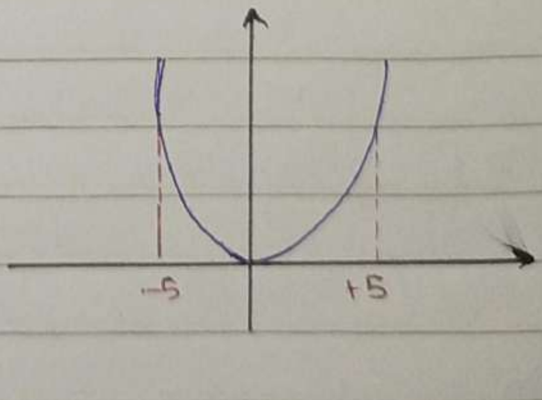
• شرط الجذر : $x \in \left]-\infty, 1\right] \cup \left]2, \infty\right[$

• شرط اللوغاريتم : $x \in \left]-\infty, 1\right[\cup \left]2, \infty\right[$

- نقول عن تابع أنه زوجي اذا تحقق :

① $\forall x \in D_f : -x \in D_f$

② $f(-x) = f(x)$



متناظر بالنسبة لمحور التراتيب

$f(x) = x^2$

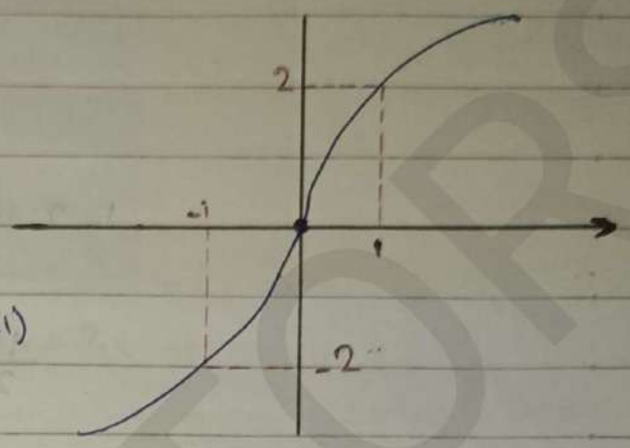
$f(-x) = f(x)$

التابع زوجي

- نقول عن تابع f إنه فردي إذا تحقق:

① $\forall x \in D_f : -x \in D_f$

② $f(-x) = -f(x)$



متناظر بالنسبة للمبدأ

$f(x) = -f(x)$

$f(+1) = +2$

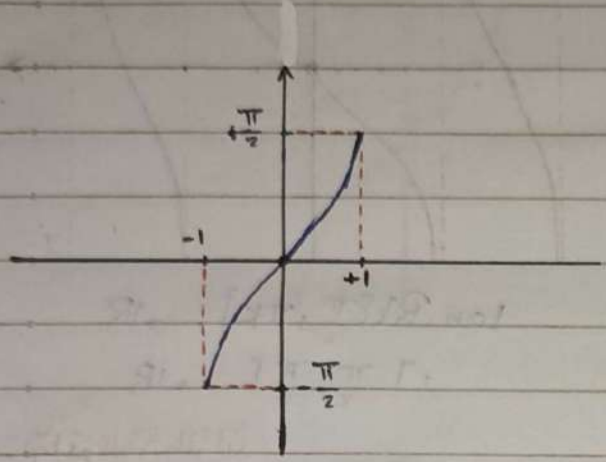
$f(-1) = -2$

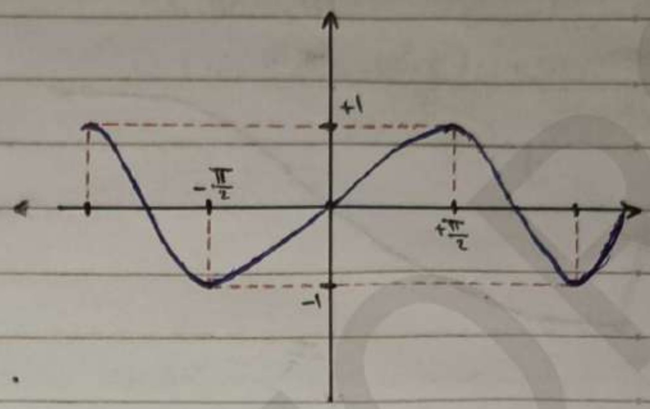
$\Rightarrow f(+1) = -f(-1)$

تابع فردي

توابع:

$f^{-1}: \arcsin: [-1, +1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$

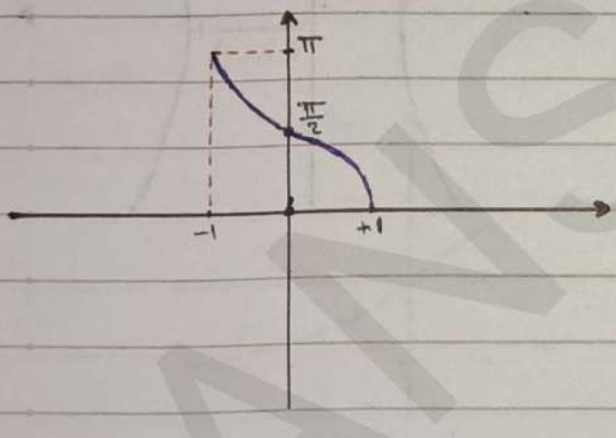


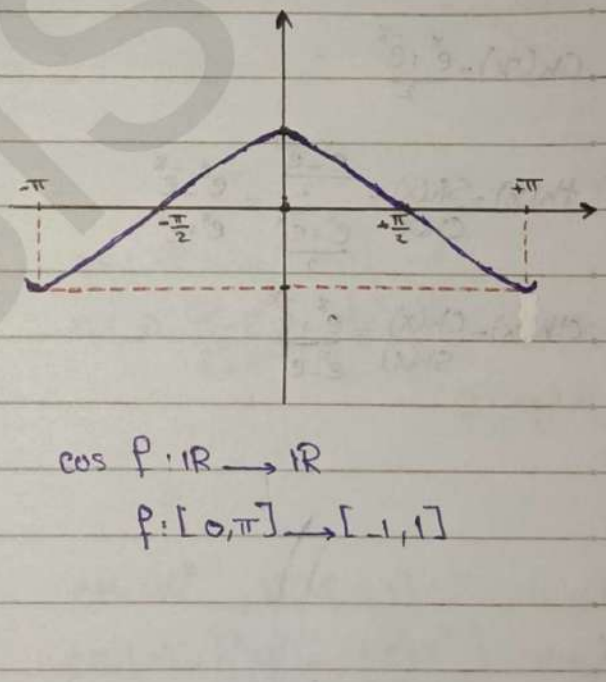


$\sin \; f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$f: [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1, +1]$

$f^{-1}: \arccos: [-1, +1] \longrightarrow [0, \pi]$





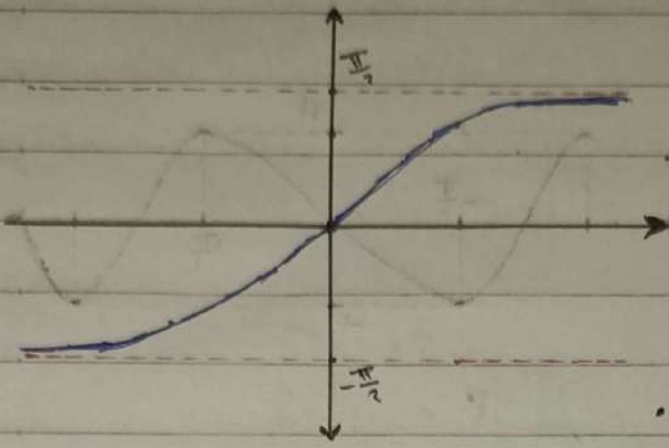
$\cos \; f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

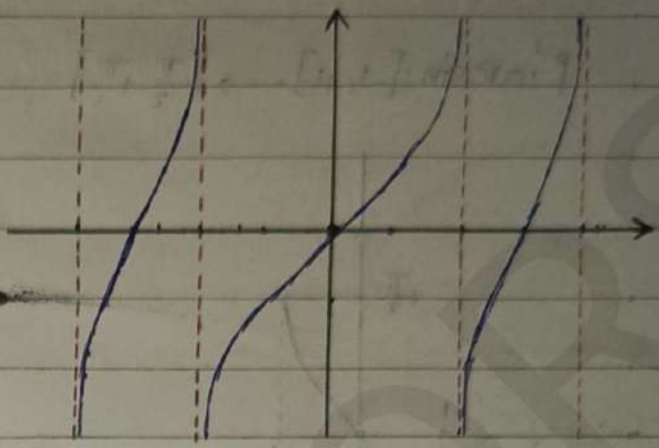
$f: [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$

TRANSISTOR

Rashemia

$f^{-1}: \arctan : \mathbb{R} \longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$





$\tan : \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + \pi k\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$: \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$

- التوابع القطعية الزائدية:

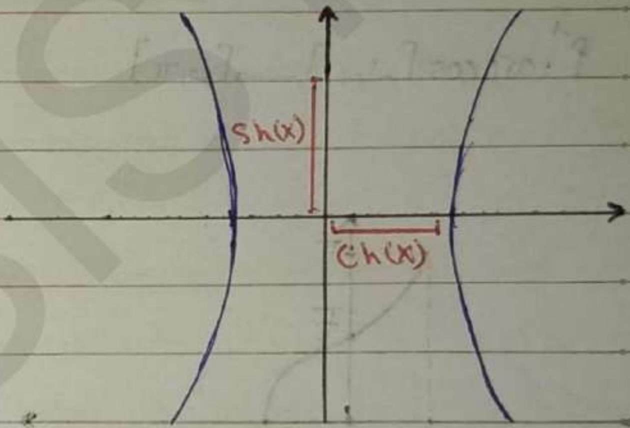
$$Sh(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$

$$Ch(x) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

$$th(x) = \frac{Sh(x)}{Ch(x)} = \frac{\frac{e^{x} - e^{-x}}{2}}{\frac{e^{x} + e^{-x}}{2}} = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$$

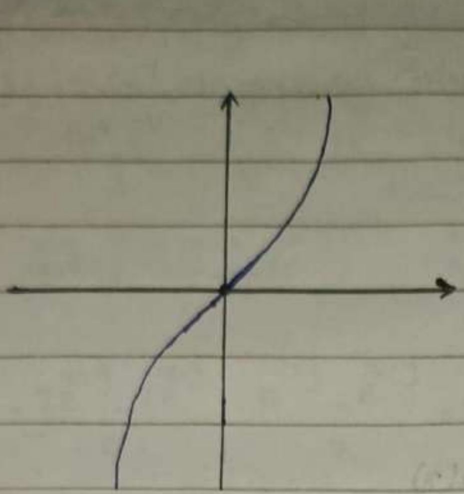
$$cth(x) = \frac{Ch(x)}{Sh(x)} = \frac{e^{x} + e^{-x}}{e^{x} - e^{-x}}$$

- منحني القطع الزائد:



TRANSISTORS

- $Sh(x)$:

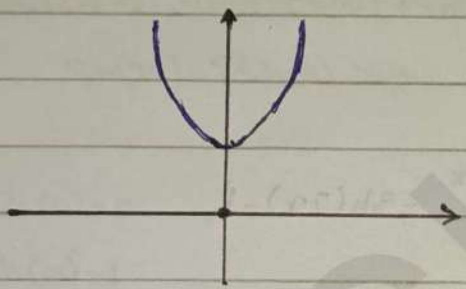


$Sh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$Sh(-x) = \frac{e^{-x} - e^{x}}{2} = \frac{-(e^{x} - e^{-x})}{2} = -Sh(x)$

التابع فردي

- $Ch(x)$:

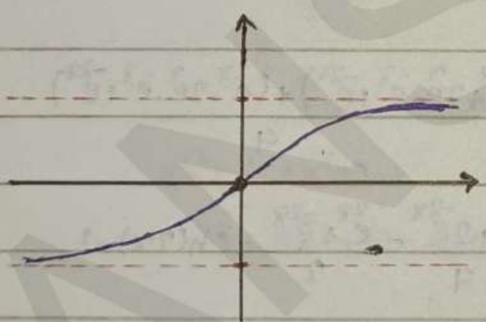


$Ch : \mathbb{R} \to [1, +\infty[$

$Ch(-x) = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} = Ch(x)$

التابع زوجي

- $th(x)$:

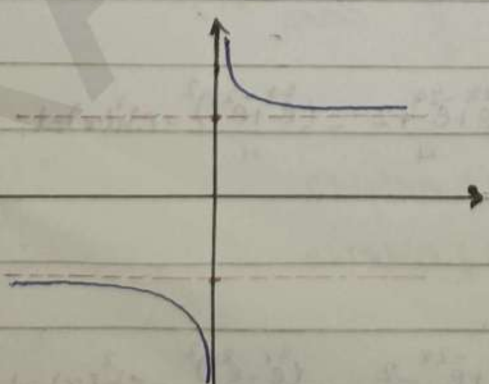


$th : \mathbb{R} \to]-1, 1[$

$th(-x) = \frac{e^{-x} - e^{x}}{e^{-x} + e^{x}} = \frac{-(e^{x} - e^{-x})}{e^{x} + e^{-x}} = -th(x)$

التابع فردي

- $Cth(x)$:



$Cth : \mathbb{R}^{*} \to \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$

$Cth(-x) = \frac{e^{-x} + e^{x}}{e^{-x} - e^{x}} = -\left(\frac{e^{x} + e^{-x}}{e^{x} - e^{-x}}\right) = -Cth$

التابع فردي.

TRANSISTOR

RasRenita

① $ch^2(x) - sh^2(x) = 1$

② $sh(2x) = 2sh(x) \cdot ch(x)$

③ $ch(2x) = ch^2(x) + sh^2(x)$

④ $ch^2(x) = \frac{ch(2x)+1}{2}$

⑤ $sh^2(x) = \frac{ch(2x)-1}{2}$

⑥ $sh(x+y) = sh(x) \cdot ch(y) + sh(y) \cdot ch(x)$

⑦ $ch(x+y) = ch(x) \cdot ch(y) + sh(x) \cdot sh(y)$

- الإثبات

② $sh(2x) = 2sh(x) \cdot ch(x)$

$$L_2 = 2 \cdot sh(x) \cdot ch(x)$$

$$= 2 \cdot \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = sh(2x) = L_1$$

③ $ch(2x) = ch^2(x) + sh^2(x)$

$$L_2 = ch^2(x) + sh^2(x)$$

$$= \frac{(e^{x}+e^{-x})^2}{4} + \frac{(e^{x}-e^{-x})^2}{4} = \frac{(e^{2x} + 2e^{x} \cdot e^{-x} + e^{-2x}) + (e^{2x} - 2e^{x} \cdot e^{-x} + e^{-2x})}{4}$$

$$= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} + e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = \frac{2e^{2x} + 2e^{-2x}}{4} = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} = ch(2x) = L_1$$

④ $ch^2(x) = \frac{ch(2x)+1}{2}$

$$L_2 = \frac{ch(2x)+1}{2} = \frac{\frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2} + 1}{2} = \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{4} = \frac{(e^{x} + e^{-x})^2}{4} = ch^2(x) = L_1$$

⑤ $sh^2(x) = \frac{ch(2x)-1}{2}$

$$L_2 = \frac{ch(2x)-1}{2} = \frac{\frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2} - 1}{2} = \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{4} = \frac{(e^{x} - e^{-x})^2}{4} = sh^2(x) = L_1$$

TRANSISTORS

⑥ $sh(x+y)=sh(x).ch(y)+sh(y).ch(x)$

$$L_2=sh(x).ch(y)+sh(y).ch(x)$$
$$=\frac{(e^{x}-e^{-x})}{2}\cdot\frac{(e^{y}+e^{-y})}{2}+\frac{(e^{y}-e^{-y})}{2}\cdot\frac{(e^{x}+e^{-x})}{2}$$
$$=\frac{(e^{x+y}+e^{x-y}-e^{-x+y}-e^{-x-y})}{4}+\frac{(e^{x+y}+e^{-x+y}-e^{x-y}-e^{-x-y})}{4}$$
$$=\frac{2e^{x+y}-2e^{-x-y}}{4}=\frac{e^{x+y}-e^{-x-y}}{2}=sh(x+y)=L_1$$

- ملاحظة:

• اذا كان $x=y$

$$\Rightarrow sh(x+x)=sh(x).ch(x)+sh(x).ch(x)$$
$$sh(2x)=2sh(x).ch(x)$$

$sh(0)=0$

$ch(0)=1$

$$sh(Ln(2))=\frac{e^{Ln(2)}-e^{-Ln(2)}}{2}=\frac{2-e^{Ln(2^{-1})}}{2}=\frac{2-\frac{1}{2}}{2}=\frac{3}{4}$$

- تمرين: بفرض $x>0$ واذا علمت أن $ch(x)=\frac{5}{3}$ أوجد $th(x)$.

$$ch^2(x)-sh^2(x)=1$$
$$\frac{25}{9}-sh^2(x)=1\Rightarrow sh^2(x)=\frac{25-9}{9}=\frac{16}{9}\Rightarrow sh(x)=\frac{4}{3}$$

نختار الجذر الموجب لأن $x>0$

$$\Rightarrow th=\frac{sh(x)}{ch(x)}=\frac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{3}}=\frac{4}{5}$$

- ملاحظة:

① اذا كان $x>0$ فإن $cth(x)>0$ و $th(x)>0$ و $sh(x)>0$

② اذا كان $x<0$ فإن $cth(x)<0$ و $th(x)<0$ و $sh(x)<0$

③ $ch(x)>0$ دائماً.

- إيجاد التقابل العكسي للتابع $sh(x)$:

$$Sh(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} \quad ; sh : R \longrightarrow R$$

$$y = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$

$$2y = e^{x} - e^{-x} \Rightarrow e^{x} - 2y - e^{-x} = 0$$

نضرب الطرفين بـ e^{x}

$$e^{2x} - 2y.e^{x} - 1 = 0$$

بإجراء تغيير بالمتحول بالشكل : $t = e^{x}$

$$t^2 - 2yt - 1 = 0$$

وهي معادلة من الدرجة الثانية بالنسبة لـ t

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4y^2 - 4(1)(-1) = 4(y^2+1) > 0$$

$$e^{x_1} = t_1 = \frac{2y + 2\sqrt{y^2+1}}{2} = y + \sqrt{y^2+1} > 0$$

$$e^{x_2} = t_2 = \frac{2y - 2\sqrt{y^2+1}}{2} = y - \sqrt{y^2-1} < 0$$

لأن $y^2 < y^2 - 1$

$y < \sqrt{y^2+1}$

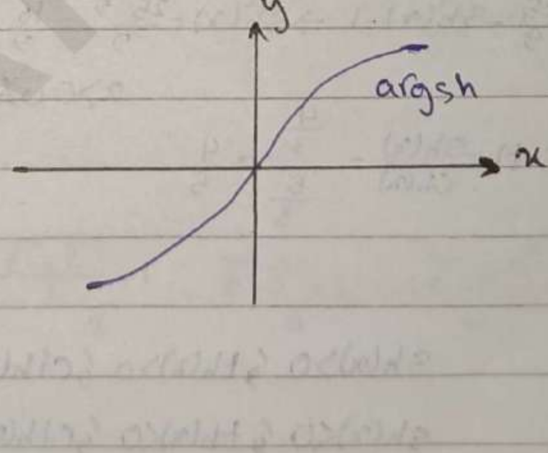
$y - \sqrt{y^2+1} < 0$

$$e^{x} = y + \sqrt{y^2+1} \Rightarrow x = Ln(y + \sqrt{1+y^2})$$

• يصبح التقابل العكسي للتابع sh بالشكل :

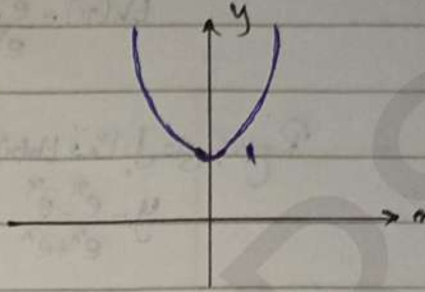
$$argsh : R \longrightarrow R$$

$$argsh(x) = Ln(x + \sqrt{1+x^2})$$



- إيجاد التقابل العكسي للتابع ch:

$ch(x)=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$; $ch:\mathbb{R}\to[1,+\infty[$



نلاحظ أن التابع ليس متباين على جميع $\mathbb{R}$ لذلك نفصل مجموعة التعريف على المجال $[0,+\infty[$ فيكون التابع تقابل على المجال $[0,+\infty[$

$$y=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\Rightarrow 2y=e^{x}+e^{-x}$$

$e^{2x}-2ye^{x}+1=0$ نضرب الطرفين ب e^{x}

وهي معادلة من الدرجة الثانية بالنسبة لـ e^{x}

$\Delta=4y^{2}-4(1)(1)=4(y^{2}-1)>0$ لأن $y\geq 1$

$$e^{x_1}=\frac{2y+2\sqrt{y^{2}-1}}{2}=y+\sqrt{y^{2}-1}>0$$

نقبل فإن هذه القيمة تتوافق مع المجال $[0,+\infty[$ (مجموعة التعريف)

$e^{x_2}=\frac{2y-2\sqrt{y^{2}-1}}{2}=y-\sqrt{y^{2}-1}$ مرفوض

$\boxed{y^{2}>y^{2}-1 \quad y>\sqrt{y^{2}-1} \quad y-\sqrt{y^{2}-1}>0}$

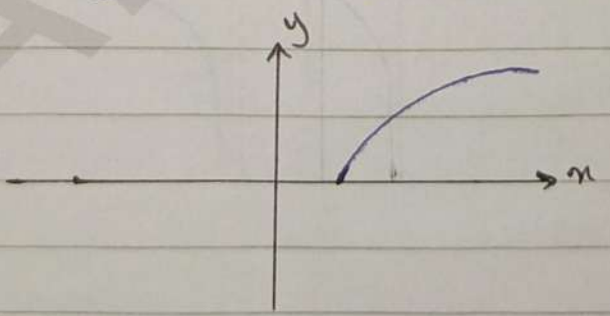
$$e^{x}=y+\sqrt{y^{2}-1}$$

$\Rightarrow x=\ln(y+\sqrt{y^{2}-1})$ في حال إذا كنت عم تدرس ch من $]-\infty,0]$

* إذن التقابل العكسي للتابع $ch(x)$ هو:

$argch:[1,+\infty[\;\to[0,+\infty[$

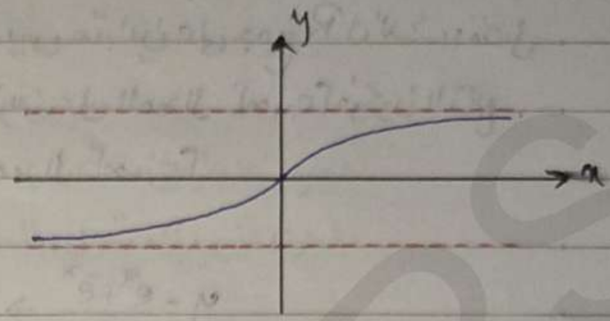
$argch(x)=\ln(x+\sqrt{x^{2}-1})$.



TRANSISTORS

- ايجاد التقابل العكسي للتابع $th(x)$:

$$th(x)=\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}} \quad ; \quad th: \mathbb{R} \longrightarrow]-1,+1[$$



نلاحظ ان التابع $th(x)$ تقابل على جميع $\mathbb{R}$

$$y=\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$$

$$ye^{x}+y.e^{-x}-e^{x}+e^{-x}=0$$

$$e^{x}(y-1)+e^{-x}(y+1)=0$$

نضرب الطرفين ب e^{x} :

$$e^{2x}(y-1)+y+1=0 \Rightarrow e^{2x}=\frac{-y-1}{y-1}=\frac{1+y}{1-y}$$

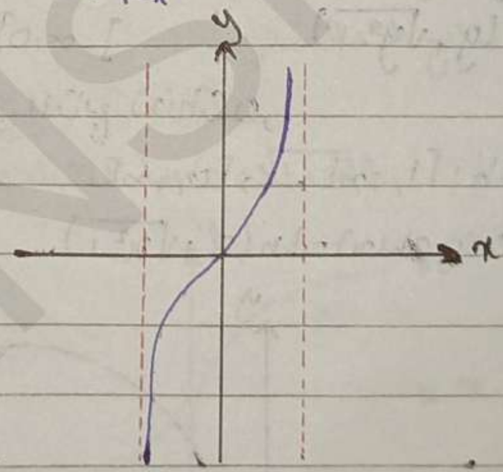
نأخذ الجذر الموجب

$$e^{x}=\sqrt{\frac{y+1}{1-y}} \Rightarrow x=\ln\left(\sqrt{\frac{y+1}{1-y}}\right)$$

* يصبح التقابل العكسي ل th بالشكل :

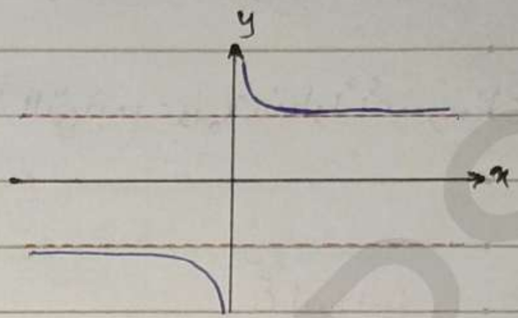
$$\arg th:]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\arg th(x)=\ln\left(\sqrt{\frac{x+1}{1-x}}\right)$$



- ايجاد التقابل العكسي للتابع $cth(x)$:

$$cth(x)=\frac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}}\ ;\ cth: \mathbb{R}^{*} \longrightarrow \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$$



نلاحظ أن التابع cth هو تقابل على $\mathbb{R}^{*}$

$$y=\frac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}}$$

$$ye^{x}-ye^{-x}=e^{x}+e^{-x}$$

$$ye^{x}-ye^{-x}-e^{x}-e^{-x}=0$$

$$e^{x}(y-1)-e^{-x}(y+1)=0$$ نضرب الطرفين بـ e^{x}:

$$e^{2x}(y-1)-y-1=0$$

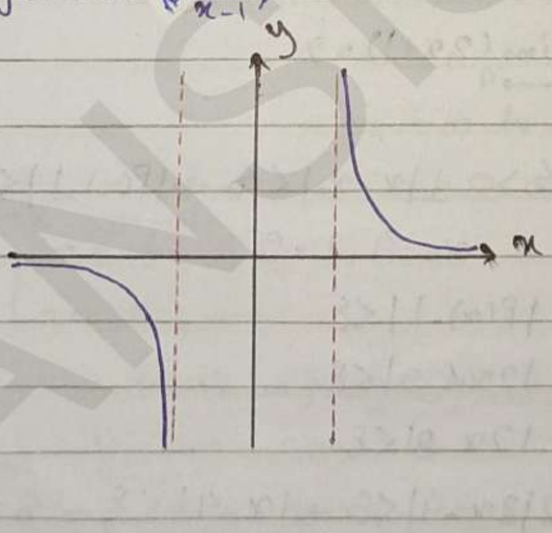
$$e^{2x}=\frac{y+1}{y-1}$$

$$e^{x}=\sqrt{\frac{y+1}{y-1}}$$ نأخذ الجذر الموجب

* يصبح التقابل العكسي لـ cth بالشكل: $\Rightarrow x=\ln\left(\sqrt{\frac{y+1}{y-1}}\right)$

$$argcth: \mathbb{R}\setminus\{-1,1\} \longrightarrow \mathbb{R}^{*}$$

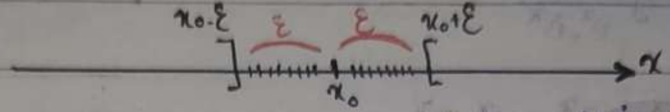
$$argcth(x)=\ln\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\right)$$



• جوار عدد حقيقي x ببساطة هو مجموعة الأعداد الحقيقية التي تحيط بهذه النقطة x_0.

• جوار نقطة x_0 هي مجموعة النقاط x من $\mathbb{R}$ التي تبعد عن x_0 مقدار أصغر من (ε حيث $\varepsilon>0$) و يسمى (ε) نصف قطر الجوار.

• جوار نقطة x_0 هو المجال المفتوح الذي يحوي النقاط التي تبعد عن x_0 مقداراً أصغر من (ε) حيث ($\varepsilon>0$).



ε إبسلون

δ دلتا

• أي هي مجموعة النقاط x التي:

$$|x-x_0|<\varepsilon$$
$$-\varepsilon<x-x_0<\varepsilon$$
$$x_0-\varepsilon<x<x_0+\varepsilon$$

• نقول عن (L) أنها نهاية التابع f عند x_0 إذا تحقق الشرط:

$$\forall\varepsilon>0 : \exists\delta>0 ; |x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$$

- حيث: $0<\delta\le\varepsilon$

- مثال:

• باستخدام التعريف بدلالة (δ, ε) أثبت أن:

$$\lim_{x\to4}(2x+1)=9$$

• لنتحقق من الشرط:

$$\forall\varepsilon>0 : \exists\delta>0 ; |x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$$

$x_0=4 , L=9$

$$|f(x)-L|<\varepsilon$$
$$|2x+1-9|<\varepsilon$$
$$|2x-8|<\varepsilon$$
$$2|x-4|<\varepsilon \Rightarrow |x-4|<\frac{\varepsilon}{2}=\delta$$

• أي استطعت إيجاد $0<\delta=\frac{\varepsilon}{2}\le\varepsilon$ تحقق من أجلها الشرط.

• باستخدام التعريف بدلالة (δ, ε) أثبت أن:

$$\lim_{x\to6}(x+6)=12$$

TRANSISTORS

$$\forall \varepsilon>0 : \exists \delta>0 ; |x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$$

$$x_0=6 , L=12$$

$$|f(x)-L|<\varepsilon$$

$$|x+6-12|<\varepsilon$$

$$|x-6|<\varepsilon \Rightarrow \delta=\varepsilon$$

• أي استطعت ايجاد $0<\delta\leq\varepsilon$ تحقق من أجلها الشرط.

- مثال:
$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}=4$$

$$\forall \varepsilon>0 : \exists \delta>0 ; |x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$$

$$x_0=2 , L=4$$

$$|f(x)-L|<\varepsilon$$

$$\left|\frac{x^2-4}{x-2}-4\right|<\varepsilon$$

$$\left|\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}-4\right|<\varepsilon$$

$$|x-2|<\varepsilon \Rightarrow \delta=\varepsilon$$

• أي استطعنا ايجاد $0<\delta\leq\varepsilon$ تحقق من أجلها الشرط.

- النهاية من اليمين: $x\to a^+ / x\geq a$

- النهاية من اليسار: $x\to a^- / x\leq a$

• نقول عن تابع أنه له نهاية اذا كانت $\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a^-} f(x)$

- مثال:

$$f(x): \begin{cases} -2x+3 ; & x<1 \\ 3x-5 ; & x>1 \end{cases}$$

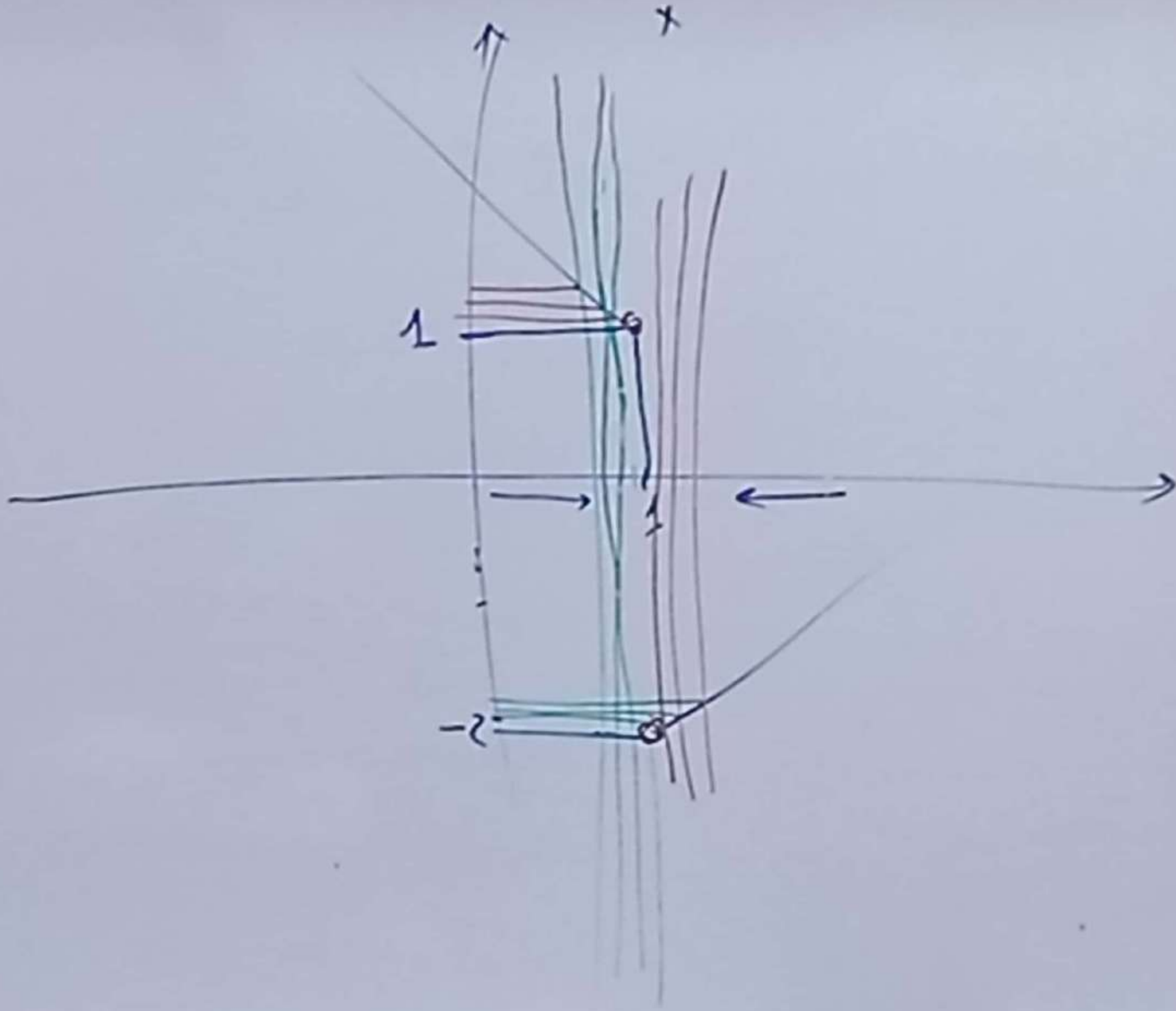
• أوجد نهاية التابع من اليمين ومن اليسار عند $(x=1)$.

$$L_1=\lim_{x\to 1^-} f(x)=-2(1)+3=1$$

$$L_2=\lim_{x\to 1^+} f(x)=+3(1)-5=-2$$

• نلاحظ أن $L_2\neq L_1$ اذا ليس للتابع نهاية عند (1).

TRANSISTORS



$f(x) - \ell| < \varepsilon$

$\ell| < \varepsilon \Rightarrow \delta = \varepsilon \Rightarrow 0 < \delta = \varepsilon \leq \varepsilon$

- الدوال اللامتناهية في الصغر:

* نقول عن الدالة f إنها لامتناهية في الصغر عند x_0 إذا تحقق:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=0$$

* نقول عن الدالة f إنها لامتناهية في الكبر عند x_0 إذا تحقق:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\mp\infty$$

$$f(x)=x\sin\frac{1}{x}$$ ← دالة محدودة

لامتناهية في الصغر

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} x\cdot\sin\frac{1}{x}=0$$

* عندما $x_0=0$

* جداء دالة محدودة بدالة لامتناهية في الصغر هو دالة لامتناهية في الصغر.

$$\lim_{x\to 0} x=0$$

- تكافؤ الدوال اللامتناهية في الصغر:

* إذا تحقق: $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=1$ بشرط $g(x)\neq 0$

* عندئذ نقول إن الدالتين f و g متكافئتان عند x_0 ونكتب $f\underset{x_0}{\sim} g$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad \sin x\underset{0}{\sim} x$$

- قواعد:

1. $\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\right)^n=\left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)^n$

2. $\lim_{x\to x_0}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim_{x\to x_0} f(x)}$

3. $\lim_{x\to x_0}|f(x)|=\left|\lim_{x\to x_0} f(x)\right|$

4. $\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=n\cdot a^{n-1}$

ex: $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x^3-2^3}{x-2}=3(2)^2=12$

$; n=3, a=2$

TRANSCRIPTORS

HasHemia

ـ اذا كان:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \ , \ \lim_{x \to x_0} g(x) = B$$

ـ عندئذٍ:

$\boxed{1}$ $\lim_{x \to x_0} [f(x) \mp g(x)] = A \mp B$

$\boxed{2}$ $\lim_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = A \cdot B$

$\boxed{3}$ $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} \quad : g(x) \neq 0 \ , \ B \neq 0$

ـ تمارين:

$\boxed{1}$ $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^3}{2x^2+3} + \frac{1-2x^2}{4x-1} \right) = +\infty - \infty$ ح.ع.ت

$$f(x) = \frac{x^3(4x-1) + (1-2x^2)(2x^2+3)}{(2x^2+3)(4x-1)}$$

$$= \frac{4x^4 - x^3 + 2x^2 + 3 - 4x^4 - 6x^2}{8x^3 + 2x^2 + 12x - 3}$$

$$= \frac{-x^3 - 4x^2 + 3}{8x^3 + 2x^2 + 12x - 3}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\frac{1}{8}$$

$\boxed{2}$ $\lim (\sqrt{2x+5} - \sqrt{x})$

$$f(x) = \sqrt{x\left(2 + \frac{5}{x}\right)} - \sqrt{x}$$

$$= \sqrt{x} \cdot \left(\sqrt{2 + \frac{5}{x}} - 1 \right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \cdot (\sqrt{2+0} - 1) = +\infty$$

TRANSISTORS

Hashemia

[3] $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1-\cos 8x}{x^2} \right)$

$$f(x) = \frac{2\sin^2 4x}{x^2} = 2\left(\frac{\sin 4x}{x}\right)^2$$

$$= 2\left(\frac{4 \cdot \sin 4x}{4x}\right)^2 = 16 \times 2 \left(\frac{\sin 4x}{4x}\right)^2$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = 32(1)^2 = 32$$

[4] $\lim\limits_{x \to -2} \left(\frac{-2x-4}{x^3+2x^2} \right) = \frac{0}{0}$ ح.ع.ت

$$f(x) = \frac{-2(x+2)}{x^2(x+2)} = \frac{-2}{x^2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to -2} f(x) = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

[5] $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^3+5x^2+8x-44}{x^2+5x-14}$

$$f(x) = \frac{\cancel{(x-2)}(x^2+7x+22)}{(x+7)(x-2)}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 2} f(x) = \frac{40}{9}$$

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2+7x+22 \\ \hline
x-2 & x^3+5x^2+8x-44 \\
 & x^3-2x^2 \\ \hline
 & 7x^2+8x \\
 & 7x^2-14x \\ \hline
 & 22x-44 \\
 & 22x-44 \\ \hline
 & 0
\end{array}$$

TRANSISTORS

• نقول عن دالة أنها مستمرة عند x_0 إذا كان:

$$f(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

• ونقول عن تابع انه مستمر على المجال المفتوح $]a,b[$ إذا كان مستمراً عند كل نقطة من نقاط المجال $]a,b[$

• نقول عن تابع إنه مستمر على المجال المغلق $[a,b]$ إذا كان مستمراً على $]a,b[$ وكان:

$$f(a) = \lim_{x \to a^+} f(x) \quad , \quad f(b) = \lim_{x \to b^-} f(x)$$

- ادرس استمرار التابع $f(x) = |x-1| + 1$ عند النقطة $x_0 = 1$

$$f(1) = |1-1| + 1 = 1$$

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 1 \\ -x+2 & x < 1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 1^+} f(x) = 1 \\ \\ \lim_{x \to 1^-} f(x) = 1 \end{array}\right\}$$ التابع مستمر عند $x_0 = 1$

• نقول عن التابع f مستمر عند قيمة x_0 إذا تحقق الشرط:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

$$0 < \delta \leq \varepsilon$$

- مثال: أثبت باستخدام تعريف الاستمرار بدلالة (ε, δ) أن الدالة:

$$f(x) = 4x + 2$$

مستمرة عند $x_0 = 1$.

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta$$

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

$$|4x + 2 - 6| < \varepsilon$$

$$|4x - 4| < \varepsilon$$

$$4|x - 1| < \varepsilon$$

$$|x - 1| < \frac{\varepsilon}{4} \Rightarrow \varepsilon > \delta = \frac{\varepsilon}{4} > 0$$

ومنه f مستمر عند $x_0 = 1$

① x_0 هي نقطة انقطاع من النوع الأول إذا كان:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=a \\ \\ \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=b\end{array}\right\} \quad a\neq b \text{ ولكن}$$

② x_0 نقطة انقطاع من النوع الثاني إذا كانت احدى النهايتين أو كلتاهما $\mp\infty$

③ x_0 نقطة انقطاع من النوع الثالث:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=a \\ \\ \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=b\end{array}\right\} \quad a=b \text{ ولكن}$$

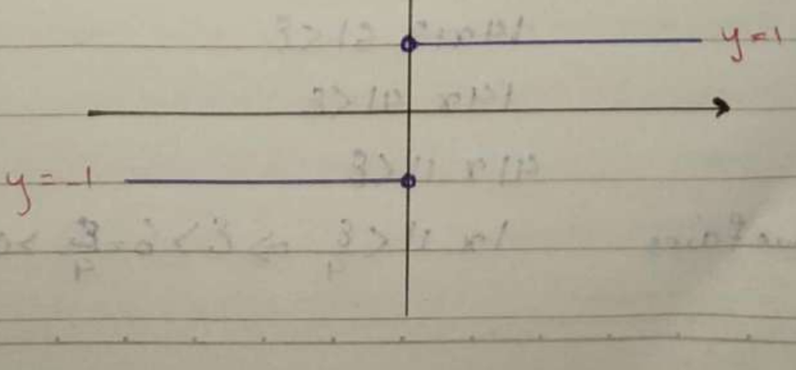
- ادرس استمرار التابع عند $x=0$ وبين نوع نقطة الانقطاع ثم ارسم التابع ضمن مجموعة التعريف:

$\boxed{1}$ $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{+x}{x}=1 & , x>0 \\ \\ \dfrac{-(x)}{x}=-1 & , x<0\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1 \\ \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-1\end{array}\right] \quad \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$$

فهي نقطة انقطاع من النوع الأول



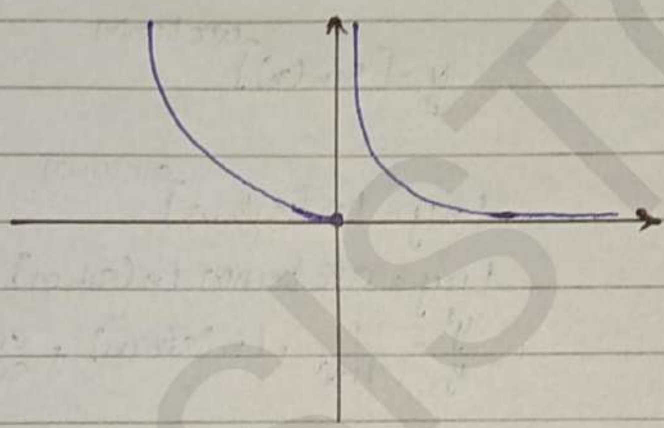
TRANSISTORS

$\boxed{2}$ $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & : x > 0 \\ x^2 & : x \leq 0 \end{cases}$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = (0)^2 = 0$$

بما أن $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \Leftarrow x_0 = 0$ نقطة انقطاع من النوع الثاني.



$\boxed{3}$ $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1$$

ولكن التابع غير معرف عند $x=0$
وهي نقطة انقطاع من النوع الثالث

$\boxed{4}$ $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x+2} & , x \neq -2 \\ 0 & , x = -2 \end{cases}$

$$f(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)} = x-2$$

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = -4 = \lim_{x \to -2^+} f(x) = l$$

ولكن $l \neq f(-2) = 0$ ومنه f غير مستمر عند $x_0 = -2$ وهي نقطة انقطاع من النوع الثالث.

TRANSISTORS

- اشتقاق تابع اس تابع:

$$y = [g(x)]^{h(x)}$$

• نأخذ لوغاريتم الطرفين:

$$\ln y = h(x) . \ln g(x)$$

• نشتق الطرفين:

$$\frac{y'}{y} = h'(x) . \ln(g(x)) + \frac{h(x) . g'(x)}{g(x)}$$

$$y' = y\left[h'(x) . \ln(g(x)) + \frac{h(x) . g'(x)}{g(x)}\right]$$

$$y = [\sin(x)]^{\arctan(x)}$$

- أوجد y':

$$\ln y = \ln[\sin(x)]^{\arctan(x)}$$

$$\ln y = \arctan(x) . \ln(\sin(x))$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{1+x^2} . \ln(\sin(x)) + \frac{\cos x}{\sin x} . \arctan(x)$$

$$y' = y\left[\frac{1}{1+x^2} . \ln(\sin(x)) + \cot(x) . \arctan(x)\right]$$

$$y' = [\sin(x)]^{\arctan(x)} . \left[\frac{1}{1+x^2} . \ln(\sin(x)) + \cot(x) . \arctan(x)\right]$$

- اشتقاق تابع وسيطي:

$$\begin{cases} y = f(t) \\ x = g(t) \end{cases}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

- مثال:

$$x(t) = \sqrt{t+1}$$

$$y(t) = \sqrt{3t}$$

$$y' = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{3}{2\sqrt{3t}}}{\frac{1}{2\sqrt{t+1}}} = \frac{3\sqrt{t+1}}{\sqrt{3t}}$$

وهو مشتق y بالنسبة لـ x

TRANSISTORS

RasRemia

- التفاضل التام لتابع:

$$z = f(x,y)$$

$$dz = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x} dx}_{\text{المشتق الجزئي لـ } f \text{ بالنسبة لـ } x} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y} \cdot dy}_{\text{المشتق الجزئي لـ } f \text{ بالنسبة لـ } y}$$ ← التفاضل التام لـ f

- مثال: أوجد التفاضل التام للتابع:

$$Z = f(x,y) = 2x^2 \cdot y$$

$$dZ = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot dy$$

$$= 4xy \cdot dx + 2x^2 \cdot dy$$

$$Z = e^{xy} + \ln \frac{x}{y}$$

$$dZ = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot dy$$

$$= \left[y \cdot e^{xy} + \frac{1/y}{x/y} \right] dx + \left[x \cdot y^{xy} + \frac{-x/y^2}{x/y} \right] dy$$

$$= \left[y \cdot e^{xy} + \frac{1}{x} \right] dx + \left[x \cdot y^{xy} - \frac{1}{y} \right] dy$$

- قاعدة أوبيتال:

• في حال عندي حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$ أو $\frac{\infty}{\infty}$ ولدينا تابع من الشكل $\frac{f(x)}{g(x)}$

• إذا كان التابعين f و g مستمرين وقابلين للاشتقاق على مجموعة التعريف D.

- أي الشرطين كالآتي:

① f, g مستمرين وقابلين للاشتقاق على D.

② $\lim \frac{f}{g} = \frac{\infty}{\infty}$ أو $\lim \frac{f}{g} = \frac{0}{0}$ «عندما x تسعى لأي مقدار كان»

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

TRANSISTORS