TRANSISTORS

الجبر العام

الدكتورة أسمهان خضور

كامل المحاضرات 2024

انضم إلى مجموعة التلغرام الخاصة بنا

عبر مسح الرمز جانباً أو اضغط هنا

د. أسمهان حفنور

- الجبر العام: The general Algebra

- البحث الأول: sets and logic

- البحث الثاني: Relations

- البحث الثالث: Binary operations قوانين التشكيل

- البحث الرابع: The groups

- البحث الخامس: The fields

- المراجع:

• المحاضرة بالدرجة الأولى

• مراجع يمكننا الاستفادة منها:

رياضيات ① (Rosen) Discrete mathematics

منتظمة ② (Rechard) Discrete mathematics

1 المجموعات: sets

- تعريف المجموعة:

• هي تجمع لمجموعة من الأشياء هذه الأشياء بينها ميزة مشتركة تميزها.

• سندرس البنية المنتظمة الأساسية التي تقوم عليها كل البنى والتي تبنى عليها المجموعة.

• تستخدم المجموعات لتجميع العناصر (الأشياء) مع بعضها وغالباً ما تكون للعناصر في المجموعة ميزات متشابهة كما في المثال التالي:

U ⇐ مجموعة تمثل طلاب الهندسة المعلوماتية في جامعة دمشق

X ⇐ مجموعة تمثل طلاب جامعة دمشق

Aset is an unordered collection of objects ـالمجموعة عبارة عن مجموعة غير مرتبة من الأشياء.

* يرمز للمجموعات بحروف كبيرة.

* الترتيب غير مهم في المجموعة لكن التكرار غير مسموح به.

ملاحظة- إذا كانت المجموعة منتهية يمكن التعبير عنها بذكر الخاصة التي تميز عناصرها.

B= { x | x is an positive even integer }

عدد صحيح زوجي

العناصر

|x| = number of elements in X

The cardinality of X ويدعى قدرة المجموعة X

- إذا كان x عنصراً من المجموعة X نكتب:

$x \in X$ x belong to X

- إذا كان غير موجود:

$x \notin X$ x doesn't belong to X

ex:

$|A| = card(A) = 4$

$3 \in A$ but $6 \notin A$

The empty set يرمز لها بـ Φ

- متى تتساوى مجموعتان X و Y؟

- تعريف: تكون المجموعة X تساوي Y ونكتب $X = Y$

if and only if $\forall x \in X$ then $x \in Y$ and

$\forall x \in Y$ then $x \in X$

ex₁

let $A = \{x \mid x^2 + x - 6 = 0\}$

, $B = \{2, -3\}$

- اثبت أن $A = B$

- الاثبات:

$\forall x$ if $x \in A: x^2+x-6=0$

$\Rightarrow$ either $x=2$ or $x=-3$

وبكلتا الحالتين $x \in B$

$\forall x$ if $x \in B$ — فإما $x=2$ أو $x=-3$

• من أجل $x=2$

$2^2+2-6=0 \Rightarrow x \in A$

• من أجل $x=-3$

$(-3)^2-3-6=0 \Rightarrow x \in A$

• مما سبق نستنتج أن $A=B$

- متى تكون X محتواة في المجموعة Y؟

$\forall x$, if $x \in X$, then $x \in Y$

- نقول أن X محتواة في Y (مجموعة جزئية) فنكتب $X \subseteq Y$

(X is a subset of Y)

ex1:

Let $X=\{1,3\}$

$Y=\{1,2,3,5\}$

$X \subset Y$

ex2:

Let $X=\{x \mid 3x^2-x-2=0\}$, $\mathbb{Z}$ ← مجموعة الأعداد الصحيحة

هل $X \subseteq \mathbb{Z}$ علل اجابتك.

- الحل:

$\forall x$, if $x \in X$ then $x \in \mathbb{Z}$

$x \in 3x^2-x-2=0 \Rightarrow \Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4(3)(-2)=25>0$

لها حلان مختلفان $x_1=1 \in \mathbb{Z}$ $x_2=-\frac{2}{3} \notin \mathbb{Z}$

⇐ $X \nsubseteq \mathbb{Z}$ (X is not subset of Z)

- إذا كانت X مجموعة جزئية من Y ولا تساويها فنقول عن X أنها محتواة بالكامل في Y (proper subset of Y)
ونكتب $x \subseteq Y$

The set of all subsets of a set X denoted by $P(x)$ and called the Power set of X

ex:

let $A = \{a, b, c\}$ Find $|A|, P(A), |P(A)|$

$|A| = 3$

$P(A) = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}, \phi\}$

لا تنساها في كل المجموعات الجزئية

$|P(A)| = card(P(A)) = 8 = 2^3 = 2^{\text{number of elements}}$

- العمليات على المجموعات: operation on sets

let U be the universal set

let $X, Y \subseteq U$

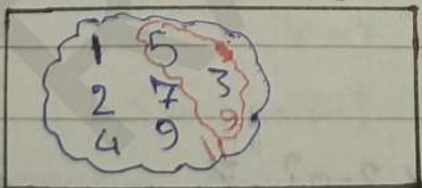
1 الاجتماع : the Union

$X \cup Y = \{x \mid x \in X \text{ or } x \in Y\}$

ex:

$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}$

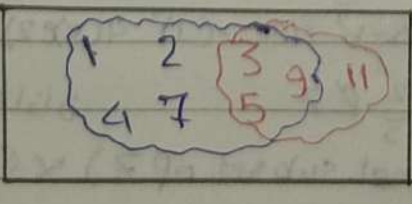
$Y = \{3, 5, 9, 11\}$



$X \cup Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11\}$

2 التقاطع :The intersection

$X \cap Y = \{x \mid x \in X, x \in Y\}$



$X \cap Y = \{3, 5, 9\}$

3 The set $X-Y$:

- called the defference or relative complement consists of all elements (عناصر) in X that are not in Y

$X-Y=\{1,2,4,7\} \neq Y-X=\{\ 11\}$

- ملاحظة: * الفرق عملية ليست تبديلية
  * التقاطع تبديلية
  * الاجتماع تبديلية
  * المجموعتان المنفصلتان تقاطعهما 0 أو $\varnothing$

$U-X$: The complement of X with respect to U

يرمز لها بـ $\bar{X}$ ولكي لا يكون هناك التباس فإننا سنرمز لها بـ X^{c_u}

ex:

$U=\{1,3,4,5,7,9,11\}$

$X=\{3,5,7\}$

$X^{c_u}=\{1,4,9,11\}$.

- Demorgans laws for sets: $\bar{A}\cup\bar{B}=(\overline{A\cap B})$

$\bar{A}\cap\bar{B}=(\overline{A\cup B})$

- الجداء الديكارتي (The cartisian Product of X and Y) يرمز له $X\times Y$ ويعطى بـ:

$X\times Y=\{(x,y)\mid x\in X,\ y\in Y\}$

$|X\times Y|=|X|.|Y|$

ex:

$X=\{1,2\}$

$Y=\{1,3\}$

$X\times Y=\{(1,1),(2,1),(1,3),(2,3)\}$

$Y\times X=\{(1,1),(1,2),(3,1),(3,2)\}$

$|X\times Y|=|X|.|Y|=2\times 2=4$

ـالفرق التناظري: The symmtric difference

ـليكن $A, B \subseteq U$ عندئذٍ فإن الفرق التناظري للمجموعتين A و B هو مجموعة العناصر التي تنتمي لواحدة فقط من المجموعتين A و B ويشار له $A \Delta B$ ويكتب $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$

$$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

ex:

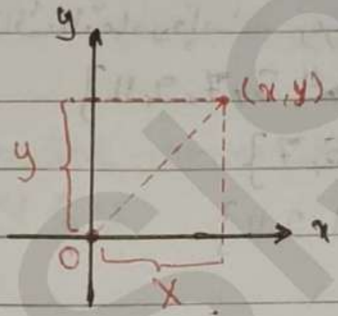
$$A\{1, 3, 5, 7\}$$

$$B\{3, 5, 9, 11\}$$

$$A \Delta B = \{1, 7\} \cup \{9, 11\} = \{1, 7, 9, 11\}$$

ـخواص الفرق التناظري للعملي:

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\}$$



- المنطق: هو دراسة طرق التفكير السليم، إنه يهتم بشكل محدد فيما إذا كان التفكير سليما (صحيحا)، ويركز المنطق على العلاقة بين الجمل في حين يتعارض مع مضمون كل جملة.
- على سبيل المثال:

. All mathematicians like swimming
. Anyone who likes swimming is Algebraists
. There for ALL mathematicians are Algebraists

• من الناحية التكتيكية فإن المنطق لا يساعدنا في تحديد فيما إذا كان أي من الجملتين الأوليتين صحيحة على أية حال فإن المنطق يضمن لنا أن (all mathematicians are Algebraists) صحيحة.

- منطق القضايا: proposional logic

- مقدمة: تعطي قواعد المنطق معنى دقيق للجمل الرياضية وهذه القواعد تستخدم في التمييز بين المناقشات الرياضية الصحيحة وغير الصحيحة والهدف الرئيسي لهذا الموضوع هو تعليم التلميذ كيفية فهم وكيفية بناء المناقشات الرياضية الصحيحة بالإضافة لأهميته في فهم التفكير الرياضي الصحيح فإن للمنطق تطبيقات هائلة في علوم الكمبيوتر وتستخدم هذه القواعد في تصميم دارات الكمبيوتر وبناء برامج الكمبيوتر وفي التحقق من صحة هذه البرامج.

- القضايا: Propositions

.Example:
① Damascus The capital of Syria
② $2+3=5$
③ The only positive integers numbers That divid 7 is 1 and 7 itself

• قضية وقيمة الحقيقة لها T

• 4 - $x+3=7$ ليست قضية لأن صحتها وخطأها يعتمد على قيمة المتغير x فطالما أسند لـ x قيمة محددة تصبح قضية ولها قيمة محددة.

. Rita is a beautiful girl

ليست قضية لأن الجمال نسبي

• تعتبر القضية البنية الأساسية في المنطق.

• Def₁: A proposition is a declarative sentence (that declares a fact) that is either true or false but not both.

• ملاحظة: بالنسبة للجمل التي تتضمن تغيرات الزمن والمكان والضمائر لا تعتبر قضايا إلا إذا افترضنا زمن ومكان وأشخاص محددين. نرمز للقضايا بأحرف صغيرة مثل p, q, s, r ...
يمكن إنتاج قضايا جديدة من القضايا الموجودة لدينا مسبقاً وذلك بدمج قضية أو قضيتين أو أكثر تسمى القضايا الجديدة قضايا مركبة compound propositions وتصاغ من القضايا الموجودة مسبقاً باستخدام الروابط المنطقية.

- logica operators:

1. $\neg$ negation: /أداة النفي/

Def₁: let (p) be a proposition The negation of (p) denated by $(\neg p)$ is the proposition «not p» / The negation of (p) is not the case That (p)

The truth table of negation (p)

p	$\neg p$
T	F
F	T

ex: let p: "today is friday"
$\neg p$: "It is not the case that today is friday".
or $\neg p$: "Today is not Friday".

ex: Find the negation of the proposition:
p: "at least 10 inches of rain fell today in Lattakia".
$\neg p$: "less than 10 inches of rain fell today in Lattakia".

2. The conjunction: العطف

Def₂: let (p) and (q) two proposition the conjunction of (p) and (q) denated by «p and q» is the proposition (p) and (q) and The conjunction is true only when both (p) and (q) are true and false other wise truth table $p \wedge q$

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

ex: Find the conjunction of:
p: today is sunday q: It's raining today
$p \wedge q$: today it is Sunday and It's raining

3. The disjunction: الفصل

Def: let (p) and (q) be two proposition The disjunction of (p) and (q) denated by ($p \vee q$) The disjunction of (p) and (q) is "p or q" and it false only when both (p) and (q) is false and true other wise.

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

ex: find the disjunction of:
p: Today is sunday
q: It is raining today
$p \vee q$: Today is Sunday or it's raining today

إن استخدام الرابط or في المنطق يقابل إحدى الطريقتين التي نستخدم فيها كلمة or في اللغة الانكليزية على سبيل المثال:

- The inclusive or is used in this way "students who have taken calculus or computer science can take this class.

- The exclusive or
- The exclusive or when we say "stud[…] calcules and computer science but [...] this class.

[…] كلا المقررين أو الذين لم يدرسوا أي مقرر لا يستطيعون أن يسجلوا في هذا فقط أولئك الذين درسوا أحد المقررين فقط يستطيعون أن يسجلوا في هذا الدرس.

- Def: let (p and q) be proposition the exclusive (or) denoted by ($p \oplus q$) is the proposition (p or q) but not both and the exclusive (or) is true only when (p or q) is true and False other wise.
- Truth table of the exclusive or:

p	q	$p\oplus q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

ex: p: "$7<9$"
q: "paris is the capital of England"
$p \vee q$ قضية صحيحة

- ملاحظة: معظم لغات البرمجة تعرف or بالمعنى الأشمل

- The conditional preposition and logical equivalences
القضايا الشرطية والتكافؤات المنطقية

ex: The Dean announced that: "If the mathematics department gets additional amound \$60,000, Then it will hire new faculty member.

- تسمى العبارة (1) قضية شرطية (أحادية الجانب) aconditional proposition

- Def: If (p) and (q) two propositions the proposition If (p) then (q) is called a conditional proposition and denoted by $p \to q$

- المنطق 2:

- الاستخدام الخاص لـ or

- The exclusive or

- The exclusive or when we say "students who have taken calcules and computer science but not both can envoll in this class.

هنا يعني أن الطلاب الذين درسوا كلا المقررين أو الذين لم يدرسوا أي مقرر لا يستطيعون أن يسجلوا في هذا، فقط أولئك الذين درسوا أحد المقررين فقط يستطيعون أن يسجلوا في هذا الدرس.

- Def: Let (p and q) be proposition the exclusive (or) denoted by ($p \oplus q$) is the proposition (p or q) but not both and the exclusive (or) is true only when (p or q) is true and False other wise.

- Truth table of the exclusive or:

p	q	$p \oplus q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

ex: p: "$7<9$"
q: "paris is the capital of England"
$p \vee q$ قضية صحيحة

- ملاحظة: معظم لغات البرمجة ترمز or بالمعنى الأشمل

- The conditional preposition and logical equivalences
القضايا الشرطية والتكافؤات المنطقية

ex: The Dean announced that: "If the mathematics department gets additional amound \$60,000, Then it will hire new faculty member.

- تسمى العبارة (1) قضية شرطية (أحادية الجانب) aconditional proposition

- Def: If (p) and (q) two propositions the proposition If (p) then (q) is called a conditional proposition and denoted by $p \rightarrow q$

(p) is called the hypothesis (الفرض) and (q) is called the conclusion and $p \rightarrow q$ is false when (p) is true and (q) is false and true other wise.

- Truth table of ($p \rightarrow q$):

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

ex: let:

p: «The mathematical department gets an additional amount $ 60.000.

q: «it will hire anew faculty member»

- If «p» and «q» both true then عبارة العميد صحيحة
- If «p» is true and «q» is false then عبارة العميد خاطئة
- If «p» is false «q» عبارة العميد صحيحة «بغض النظر إذا كانت صحيحة أو خاطئة

- إن المفهوم الرياضي للجمل الشرطية مستقل عن علاقة الأثر والسبب بين الفرض والنتيجة إذ إن تعريفنا للجمل الشرطية يحدد قيمة الحقيقة لها وهو غير مبني على استخدامها باللغة الانكليزية إن لغة الرياضيات لغة صنعية نحن فقط نوازي مع استخدامها بالانكليزية لنجعلها سهلة الاستخدام والتذكر على سبيل المثال:
- إن التركيب If → then المستخدم في العديد من لغات البرمجة يختلف عن ذلك التركيب المستخدم في المنطق.
- إن معظم لغات البرمجة تحوي عبارات مثل If p then S تعني: (إذا كانت p صحيحة نفذ S). حيث p هي قضية و S جزء من برنامج يطلب تنفيذه (عبارة عن جملة أو أكثر) فعند تنفيذ البرنامج نصادف عبارة كهذه.

- (S) is executed if (p) is true but (S) is not executed if (p) is false.

- ex: what is the value of x after this statement If 2+2=4 then x=x+1

If $x=0$ before this statement is incouted?

- solution: because p: "2+2=4" is true there fore

$x=0+1=1$ after this statement (فإن الاستاد ينفذ)

- The converse, contra positive and inverse:

- نستطيع أن نصوغ قضية جديدة بدءاً من القضية الأصلية.

- لتكن القضية $p \rightarrow q$ عندئذ:

1. The converse of $p \rightarrow q$ is the proposition $q \rightarrow p$.

- أي أن القضية $q \rightarrow p$ تدعى العكس للقضية $p \rightarrow q$ أي بدلنا الفرض الى نتيجة والنتيجة الى فرض.

2. The contra positive of $p \rightarrow q$ is the proposition $\neg q \rightarrow \neg p$.

- أي أن القضية $\neg q \rightarrow \neg p$ تدعى العكس المنفي للقضية $p \rightarrow q$ فهنا عكس القضية الأصلية ثم نفي الفرض والنتيجة.

3. The inverse of $p \rightarrow q$ the proposition $\neg p \rightarrow \neg q$

- أي أن القضية $\neg p \rightarrow \neg q$ هي مقلوب القضية $p \rightarrow q$ فهنا بنفي الفرض ونفي النتيجة

- فقط contra positive والقضية الأصلية لهما نفس القضية أي أنهما متكافئتان منطقياً.

$\neg p$: is False — p: is True

$\neg q$: is True — q: is False $\Rightarrow p \rightarrow q = \neg q \rightarrow \neg p$

- أي أنه لما أن $\neg q \rightarrow \neg p$ خاطئة فإن $p \rightarrow q$ خاطئة.

- عندما تملك قضيتان مركبتان نفس قيمة الحقيقة فإننا نقول أنهما متكافئتان منطقياً.

- ex: What are the contra positive, converse and inverse of the following conditional statment "The home team wins whenever it is raining"

- solution:

- contra positive: "If the home team doesn't win, then it is not raining".
- inverse: "If it isn't raining, then the home team doesn't win".

- converse: "If the home team wins, then it is raining"

- هناك طرق عديدة للتعبير عن الجملة الشرطية $p \to q$ وهي:

"If p then q"

"If p, q"

"p is sufficient for q"

"q if p"

"q when p"

"a necessary condition for p is q"

"p implies q"

"p only if q"

"a sufficient condition for q is p"

"q whenever p"

"q is necessary for p"

"q follows from p"

"q unless ¬p"

- The Biconditional statement: الشرط الثنائي الجانب

- Def: Let (p) and (q) be two proposition.
- The biconditional statement $(p \leftrightarrow q)$ is the proposition (p if and only if q), the biconditional statement is true when both (p) and (q) are true or false, and false other wise.
- Truth table of $(p \leftrightarrow q)$:

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

note: $p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$

And is read: P is necessary and sufficient for q

Theorem: the $(p \to q)$ and its contrapositive $(\neg q \to \neg p)$ are logically equivalent

$$p \to q \equiv \neg q \to \neg p$$

• نستطيع أن نستخدم الروابط المنطقية الآتية: ($\leftrightarrow$ ، $\to$ ، $\vee$ ، $\wedge$ ، $\neg$) لبناء قضايا مركبة معقدة تتضمن أي عدد من القضايا البسيطة ونستخدم جدول الحقيقة لإيجاد قيمة الحقيقة لكل قضية مركبة.

- The propositional Equivalences: القضايا المتكافئة

- مقدمة:

• يوجد نمط هام من الاستخدام في المناقشات الرياضية وهي استبدال جملة بجملة لها نفس قيمة الحقيقة لهذا السبب فإن الطرق التي تنتج قضايا مركبة بنفس قيمة الحقيقة تستخدم بفاعلية في أثناء المناقشات الرياضية.

- تعريف:

• إن القضايا المركبة والتي تكون دوماً صحيحة بغض النظر عن قيمة الحقيقة للقضايا المركبة بداخلها تسمى استدلال (a tautology) والقضايا المركبة التي تكون دوماً خاطئة بغض النظر عن قيمة القضايا بداخلها تدعى تناقض (contradiction) أن القضية المركبة التي ليست استدلالاً ولا تناقضاً تدعى (contingency).

• بإمكاننا أن نبني أمثلة للاستدلال والتناقض مستخدمين قضية واحدة فقط.

- اكتب جدول الحقيقة للقضية $p \wedge \neg p$ ، $p \vee \neg p$

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$	$p \wedge \neg p$
T	F	T	F
F	T	T	F

- قانونا دومورغان Demorgan's laws

$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$

- logical Equivalences:

- تعريف: إن القضايا المركبة التي لها نفس قيمة الحقيقة في كل الحالات الممكنة تدعى قضايا متكافئة منطقياً أي تكون p و q متكافئتان منطقياً إذا وفقط إذا كان $p \leftrightarrow q$ ونكتب:

استدلالاً $p \equiv q \leftarrow$ is a tautology

* $\equiv$ is not a logical operator

• لكن يعني أن $p \leftrightarrow q$ is a tautology القضيتان p و q متكافئتان منطقياً

- Example: Show that $\neg(p \vee q)$ and $\neg p \wedge \neg q$ are logically Equivalent:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p \wedge \neg q$
T	T	F	F	T	F	F
T	F	F	T	T	F	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	T	T	F	T	T

• من العمودين السادس والسابع نجد أن القيم الحقيقية للقضيتين المركبتين $\neg(p \vee q)$ و $\neg p \wedge \neg q$ تتفق من أجل جميع قيم الحقيقة الممكنة للقضايا بداخلها أي $\neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

is a tautology $\Rightarrow \neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$

• إن الجدول (6) يحوي بعض التكافئات المهمة في هذه التكافئات فإن الرمز T يشير الى القضية المركبة والتي هي دوماً صحيحة والرمز F يشير الى القضية المركبة والتي هي دوماً خاطئة.

• والجدول (7) يحوي بعض التكافئات المهمة للقضايا الشرطية الأحادية والثنائية الجانب.

$p \wedge T \equiv p, \; p \vee T \equiv T$

- بناء تكافئات منطقية جديدة:

• إن التكافؤات المنطقية في الجدول (6) بالإضافة الى تكافؤات أخرى تم اثباتها كما في الجدول (7 و 8) يمكن استخدامها لبناء تكافؤات منطقية إضافية وذلك لأنه يمكن استبدال قضية

مركبة بقضية مركبة أخرى مكافئة لها منطقياً بدون تغيير قيمة الحقيقة للقضية الأصلية كما هو موجود في المثال الآتي:

Ex: show that $\neg(p \rightarrow q)$ and $p \wedge \neg q$ are logically Equivalent:

$\neg(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$

$\neg(p \rightarrow q) \equiv \neg(\neg p \vee q) \equiv \neg(\neg p) \wedge \neg q \equiv p \wedge \neg q$

- Argments and rules of Inference:

- Valid arguments in propositional logic:

- لنأخذ المناقشة الآتية والتي هي بالترتيب متتالية من القضايا

"If (you have a current password), then (you can logout the network)"

p ... q

"you have a current password" therefore → قبلها مقدمات أولية

"you can logout the network" بعدها النتيجة

- لنحدد فيما إذا كانت هذه المناقشة صحيحة نرغب بتحديد فيما إذا كانت صحيحة عندما تكون المقدمات صحيحة لننظر الى هذه المناقشة بالصيغة الآتية:

$$p \rightarrow q \qquad \frac{p}{\therefore q}$$

- يمكن اثبات أن العبارة الآتية

$((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q$ → is a tautology

- بشكل خاص عندما تكون كلاً من $p \rightarrow q$, p صحيحتين فلا بد أن تكون q صحيحة.

- نقول أن هذه الصيغة للمناقشة صحيحة لأنه كلما كانت مقدماتها الأولية صحيحة فإن النتيجة يجب أن تكون صحيحة أي بكلمة أخرى اذا كانت المقدمات الأولية صحيحة فإن النتيجة q تنتج عن المقدمات الأولية وهذه المناقشة صحيحة بسبب صيغتها.

- تعريف المناقشة: هي متتالية من القضايا تكتب بالشكل:

$$\begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \\ \hline \therefore q \end{array}$$

or $P_1, P_2, \ldots, P_n / \therefore q$

وتدعى القضايا $p_1, p_2, \ldots, p_n$ مقدمات أولية و q تدعى بالنتيجة.

- ان المناقشة صحيحة بشرط اذا كان $p_1, p_2, \ldots, p_n$ جميعها صحيحة اذا q يجب أن تكون صحيحة والا فالمناقشة مغالطة.
النتيجة

- في المناقشة الصحيحة نقول أن النتيجة تنتج عن المقدمات الأولية ولا نقول أن صحيحة.
- ان المناقشة صحيحة بسبب صيغتها وليس بسبب محتواها.
- يتم اثبات صحة مناقشة باستخدام جدول الحقيقة وعندما يكون عدد القضايا كبيراً نلجأ لاثبات صحتها باستخدام بعض القضايا البسيطة نسبياً والتي تدعى:

قواعد الاستنتاج rules of Inference

- وهذه تعتبر لبنات لبناء صور مناقشة أكثر تعقيداً ويعتبر الاستدلال $(p\wedge(p\to q))\to q$ أساس قواعد الاستنتاج modus ponens وهذا الاستنتاج يكون بصيغة المناقشة الصحيحة التي رأيناها في البداية.

- قد نقول ان المناقشة صحيحة لنتيجة غير صحيحة اذا كانت واحدة أو أكثر من المقدمات الأولية خاطئة كما هو موضح في المثال الآتي:

• حدد فيما اذا كانت المناقشة المعطاة صحيحة وحدد فيما اذا كان يجب أن تكون نتيجتها صحيحة بسبب صحة المناقشة:

If $\underbrace{\sqrt{2} > \frac{3}{2}}_{p}$, Then $(\sqrt{2})^2 > \left(\frac{3}{2}\right)^2 \Rightarrow q$

we know $\sqrt{2} > \frac{3}{2}$ consequently $(\sqrt{2})^2 > \left(\frac{3}{2}\right)^2$

- ان المقدمات الأولية هي $p \to q$ و p ونتيجتها هي q
- ان المناقشة صحيحة لأنها مبنية بصيغة modus ponens

$$\frac{p \qquad p \to q}{\therefore q}$$

- على أي حال واحدة من مقدماتها الأولية خاطئة. $\sqrt{2} > \frac{3}{2}$ بالنتيجة لا نستطيع أن نستخلص أن النتيجة صحيحة.
- علاوة على ذلك، لاحظ أن استنتاج هذه المناقشة خاطئ لأن $2 < \frac{9}{4}$

- table (6) logical Equivalences:

Equivalence	Name	Equivalence	Name
$p \wedge T \equiv p$ $p \vee F \equiv p$	Identity laws	$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$	Associative laws
$p \vee T \equiv T$ $p \wedge F \equiv F$	Domination laws	$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	Distributive laws
$p \vee p \equiv p$ $p \wedge p \equiv p$	Idempotent law	$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$	De Morgan's laws
$\neg(\neg p) \equiv p$	Doublnegation law	$p \vee (p \wedge q) \equiv p$ $p \wedge (p \vee q) \equiv p$	Absorption laws
$p \vee q \equiv q \vee p$ $p \wedge q \equiv q \wedge p$	commutative laws	$p \vee \neg p \equiv T$ $p \wedge \neg p \equiv F$	Negadion laws

- table (7) logical Equivalences involving conditional statements

$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$
$p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$
$p \vee q \equiv \neg p \rightarrow q$
$p \wedge q \equiv \neg(p \rightarrow \neg q)$
$\neg(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$
$(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \equiv p \rightarrow (q \wedge r)$
$(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \equiv (p \vee q) \rightarrow r$
$(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r) \equiv p \rightarrow (q \vee r)$
$(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \rightarrow r$

- table (8) logical Equivalences Involving Biconditionals:

$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
$p \leftrightarrow q \equiv \neg p \leftrightarrow \neg q$
$p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
$\neg(p \leftrightarrow q) \equiv p \leftrightarrow \neg q$

Rules of Inference for propositional logic

232

table 1 Rules of Inference		
Rule of Inference	tautology	Name
p $p \to q$ $\therefore q$	$[p \wedge (p \to q)] \to q$	Modus ponens
$\neg q$ $p \to q$ $\therefore \neg p$	$[\neg q \wedge (p \to q)] \to \neg p$	Modus tollens
$p \to q$ $q \to r$ $\therefore p \to r$	$[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$	Hypothetical syllogism
$p \vee q$ $\neg p$ $\therefore q$	$[(p \vee q) \wedge \neg p] \to q$	Disjunctive syllogism
p $\therefore p \vee q$	$p \to (p \vee q)$	Addition
$p \wedge q$ $\therefore p$	$(p \wedge q) \to p$	simplification
p q $\therefore p \wedge q$	$[(p) \wedge (q)] \to p \wedge q$	Conjunction
$p \vee q$ $\neg p \vee r$ $\therefore q \vee r$	$[(p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)] \to (q \vee r)$	Resolution

- تمرين: حدد فيما اذا كانت المناقشة الآتية صحيحة:

a) $p \to q$

$\neg q$

$\therefore \neg p$

b) $(p \to q) \wedge (r \to s)$.

$p \vee r$

$\therefore q \vee s$

- الاثبات:

b) $(p \vee r) \wedge (p \to q) \wedge (r \to s)$

$p \vee r \equiv \neg p \to r$

$p \to q \equiv \neg q \to \neg p$

$(p \vee r) \wedge (p \to q) \equiv$

$(p \to q) \wedge (p \vee r) \equiv$

$(\neg q \to \neg p) \wedge (\neg p \to r) \equiv \neg q \to r$

$\neg q \to r$

$r \to s$

$\therefore \neg q \to s$

$\neg q \to s \equiv q \vee s$

$(p \vee r) \wedge (p \to q) \wedge (r \to s)$

$p \vee r \equiv r \vee p$

$r \vee p \equiv \neg r \to p$

$(\neg r \to p) \wedge (p \to q) \equiv \neg r \to q$

$\neg r \to q \equiv r \vee q$

$r \to s \equiv \neg r \vee s$

$(\neg r \to q) \wedge (r \to s) \equiv (r \vee q) \wedge (\neg r \vee s)$

$r \vee q$ using Resolution

$\neg r \vee s$

$\therefore q \vee s$

a) $\neg q$

$p \to q$

$\therefore \neg p$

using Modus tollens we conclude

المناقشة صحيحة لأنها مبنية بصيغة Modus tollens

$[(\neg q) \wedge (p \to q)] \to \neg p$

يجب اثباتها (is a tautology)

- Predicates and Quantifiers: القضايا المفتوحة والمكممة

p: «x is an odd integer»

تصبح صحيحة $x = 103$

تصبح خاطئة $x = 8$

- إن منطق القضايا التي تم دراسته لا يعبر بشكل كافي عن أغلب الجمل في الرياضيات وعلوم الكمبيوتر فعلى سبيل المثال لنأخذ الجملة التي تتضمن x.
- نعلم أن القضية هي جملة إما صحيحة أو خاطئة، إن الجملة p في مثالنا لا تمثل قضية لأنه فيما إذا كانت p صحيحة أو خاطئة فإن ذلك يعتمد على قيمة x.
- p ليست قضية عندما تكون قيم المتغير x غير محددة فعلى سبيل المثال عندما $x=103$ فإن p صحيحة وعندما $x=8$ تكون p قضية خاطئة.
- بما أن أغلب الجمل في الرياضيات وعلوم الكمبيوتر تتضمن متغيرات فإننا سنوسع منظومة المنطق لتشمل جمل كهذه أي أننا سنعرف نمط من المنطق أكثر فاعلية و الذي يدعى ب منطق القضايا المفتوحة predicate logic
- وسنرى كيف أن هذا المنطق يمكن أن يستخدم للتعبير عن المعنى في مجال واسع من الجمل في الرياضيات وعلوم الكمبيوتر بطرق تسمح لنا بالتفكير بشكل سليم ونكتشف العلاقات بين الأشياء ولكي نفهم منطق القضايا المفتوحة نحتاج أولاً أن نقدم مفهوم القضية المفتوحة بعد ذلك سنوضح فكرة المكممات.
- إن الجملة p(x) في مثالنا حيث p تشير للقضية المفتوحة «is an odd integer» و x هو المتغير.
- ان الجملة p(x) يقال عنها أنها قيمة القضية التابعية p عند x (propositional function) حالما يتم اسناد قيمة للمتغير x فإن الجملة p(x) تصبح قضية تملك قيمة حقيقة مثلاً:

Ex: let p(x) denote the statement «x is an odd integer»

What are the truth values p(4) and p(1)?

solution: p(4): «4 is an odd integer» False

p(1): «1 is an odd integer» True

- ملاحظة:

- يمكن أن يكون لدينا جمل بأكثر من متغير على سبيل المثال $x=y+3$ بإمكاننا أن نشير لها ب:

$Q(x,y)$: «$x = y+3$» ← جملة قضية مفتوحة

• عندما يتم اسناد قيمة للمتغيرات x,y فإن $Q(x,y)$ تأخذ قيمة حقيقة.

Ex: let $Q(x,y)$: «$x = y+3$» what are the Truth value of $Q(1,2)$

$Q(1,2)$: «$1=2+3$» which is false

- تعريف القضية التابعية:

- Definition:

• let (p) be a statement involving the variable and let (D) be a set we call (p) a propositional function predicate (with respect to D) if for each $x \in D$, $p(x)$ is a proposition, we call (D) the Domain of discours of (p) [p مرجع].

• أي أن D هي الحقل المسموح بها لـ X.

• نستطيع أن نفهم القضية التابعية عندما نعرف صف من القضايا واحدة من أجل كل عنصر في المرجع على سبيل المثال اذا كان (p) قضية تابعية مرجعية مرجعها (Z^+) فإننا نحصل على صف القضايا $p(1), p(2), \ldots\ldots, p(n)$.

Ex:

- هل تمثل «n^2+2n is an odd integer where $D = Z^+$» قضية تابعية.

• من أجل كل قيمة لـ n فإننا نحصل على قضية لذلك فالجملة قضية تابعية.

• إن أغلب الجمل في الرياضيات وعلوم الكمبيوتر تستخدم حدود مثل (For some / For every)

فعلى سبيل المثال لدينا في الرياضيات النظرية الآتية:

«For every traingle (T), the sum of its angles equales 180°»

ولدينا في علوم الكمبيوتر النظرية الآتية:

«For some program (p) the output of (p) is (D) it self»

• سنوسع مفهوم المنطق الذي درسناه سابقاً بحيث نعالج الجمل التي تتضمن For some و For every أي سنعرف الجملة المكممة شمولياً.

- Definition:

• let (p) be a propositional Function with Domain of discourse (D), the statement For every (X), p(x) is said to be a universally quantified statement and symbole ($\forall$) means "For every" Thus the statement

For every (x), p(x) may be writter $\forall x\, p(x)$ and the symbol ($\forall$) called a universal quantifier. مكمم شمولياً

- مثال على ذلك:

• let $p(x)$: «$x+1>x$» what is the truth value of the quantification $\forall x\, p(x)$ where $D=\mathbb{R}$?

- solution:

• بما أن الجملة $p(x)$ «$x+1>x$» صحيحة من أجل كل عدد حقيقي بالتالي فإن الجملة المكممة شمولياً $\forall x\, p(x)$ صحيحة.

- سؤال: متى تكون الجملة المكممة شمولياً صحيحة؟

• ان الجملة المكممة $\forall x\, p(x)$ تكون صحيحة اذا كانت $p(x)$ صحيحة من أجل كل قيمة لـ x من المرجع (D) وتكون خاطئة اذا وجدت قيمة واحدة على الأقل $x \in D$ بحيث تكون لأجلها القضية $p(x)$ خاطئة.

• ان القيمة $x \in D$ والتي تكون لأجلها $p(x)$ خاطئة تدعى a counter example للجملة $\forall x\, p(x)$ كما يوضح المثال الآتي:

Ex: let (Q) be the statement «$x<2$» what is the Truth value of the quatification $\forall x\, p(x)$ where Domain of discurse is $\mathbb{R}$.

solution:

• ان الجملة $Q(x)$ is not true for every $x \in \mathbb{R}$

for example: $x=3$ we have $Q(3)$: «$3<2$» which is false.

that is $x=3$ is a counter example for $\forall x\, Q(x)$

- ملاحظة: عندما يكون بمكن ذكر كل العناصر في المرجع لنقل:

$$x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$$

• فإنه ينتج أن الجملة $\forall x\, p(x)$ هي نفس

$$p(x_1), p(x_2), \ldots\ldots, p(x_n)$$

• وبسبب أن هذا العطف صحيح اذا وفقط اذا عندما تكون جميع القضايا $p(x_1), \ldots\ldots, p(x_n)$ صحيحة وبالتالي الجملة المكممة شمولياً صحيحة اذا كانت جميعها صحيحة.

The existential quantifier — مكمم الوجود

$P(x)$ is true for some $x \in D$

- Definition: let (p) be a propositional function with domain of discourse the statements « there exists, $p(x)$ » is said to be an existentally quantified statement.

* The symbol ($\exists$) means « there exists »
رمز الوجود

* $\exists x, p(x)$ تعني: « there exists x, $p(x)$ »

* $\exists x\ p(x)$ is true إذا كانت $p(x)$ true من أجل قيمة واحدة على الأقل لـ $x \in D$ وتكون خاطئة إذا كانت $p(x)$ خاطئة من أجل كل قيمة $x \in D$.

- Ex: let $p(x)$: « $x>3$ » what is the truth value of existential quantified statement $\exists x\ p(x)$ (where $D=\mathbb{R}$)

- Solution: since for $x=4$: $p(4)$: « $4>3$ » is true therefore $\exists x\ p(x)$ is true.

- Ex: let $Q(x)$: « $x=x+1$ » what is the truth value of $\exists x\ p(x)$ (where $D=\mathbb{R}$)

- Solution: because $Q(x)$ is false for every $x \in D$ therefore $\exists x\ Q(x)$ is false.

* عندما يمكن ترقيم جميع العناصر في المرجع $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ فإن الجملة المكممة وجودياً $\exists x\ p(x)$ هي نفس الفصل $p(x_1) \vee p(x_2) \vee \ldots \vee p(x_n)$ وبسبب أن هذا الفصل صحيح إذا كانت واحدة على الأقل من القضايا $p(x_1), \ldots, p(x_n)$ صحيحة ويكون خاطئ عندما تكون جميعها خاطئة.

- Theorem: Generalized Demorgan's laws for logic:

• إذا كانت (p) قضية تابعية عند x فإن كل زوج من القضايا في (a) و (b) لهما نفس قيمة الحقيقة.
• (either both are false or both are true)

(a) $\neg(\forall x\, p(x)) \equiv \exists x\, \neg p(x)$

(b) $\neg(\exists x\, p(x)) \equiv \forall x\, \neg p(x)$

- Ex: Write the statement (some birds can't fly) symbollically and write negation symbollically and in word.

- solution: $p(x)$: « x flies » — وبالتالي يمكن التعبير عنها بالرموز

$\exists x\, \neg p(x)$

where D: The set of birds

• The negation: $\neg(\exists x\, \neg p(x))$ is equivalent $\forall x\, p(x)$

in word: Every bird can fly.

- Question:

• أثبت أن الجملة المكممة شمولياً صحيحة:

for every real number x, if $x>1$, then $x+1>1$

- الحل: علينا أن نثبت أن الجملة if $x>1$, then $x+1>1$ صحيحة من أجل كل عدد حقيقي x.

• ليكن x أي عدد حقيقي فإما أن يكون $x>1$ أو $x\leq 1$

• إذا كان $x\leq 1$ فإن القضية الشرطية:

if $x>1$, then $x+1>1$ is true

• إذا كان $x>1$ بغض النظر عن قيمة x المحددة فإن $x+1>x$

since $x+1>x$ and $x>1$

• فإننا نستنتج أن النتيجة $x+1>1$ وبالتالي فإن القضية الشرطية If $x>1$, then $x+1>1$ is true

لذلك فالجملة المكممة شمولياً

For every real number x if $x>1$, then $x+1>1$

- Question: وجودية

• أثبت أن الجملة المكممة وجودياً

$\exists x \in \mathbb{R}\ (\frac{1}{x^2+1}>1)$ is false

RasRenia

Relations العلاقات

- مقدمة:

students	courses
Jad	com sci
Rita	history
Mary	com sci
Ahmad	Arts
Mary	Arts

x يدرس y
أو x مرتبط بـ y

- **Definition:** A (binary) Relation R from a set X to a set Y is a subset from the cartisian product $X \times Y$. If $(x,y) \in R$, we write xRy and read (x is related to y). If $X = Y$, we call R a (binary) relation on X.

- A function is a special type of relation. A function from X to Y is a relation from X to Y such that:

1) X is the Domain of f
2) For each $x \in X$ there exists exactly one $y \in Y$ such that $(x,y) \in f$.

• والمثال الثاني يبين أنه من الممكن تعريف العلاقة X عدا العلاقة المعروفة لها

- مثال:

ex_1: let $X = \{2,3,4\}$, $Y = \{3,4,5,6,7\}$

• اذا عرفنا العلاقة R من X إلى Y بالشكل:

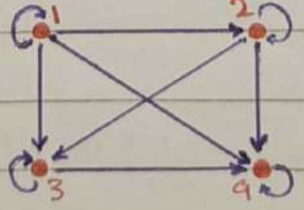
$(x,y) \in R$ if x divides y we get:

$$R = \{(2,4),(2,6),(3,3),(3,6),(4,4)\}$$

ex_2: let R be a relation $X = \{1,2,3,4\}$ defined by $(x,y) \in R$ if $x \le y$, $x,y \in X$ then

$$R = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4),(4,4)\}$$

ويمكن تمثيلها بالمخطط الآتي:



digraph of the relation of Ex_2

- سنتعرف عدت صفات ممكن أن تمتلكها العلاقة.

- صفات العلاقة:

- Definition: A Relation R on a set X is Reflexive (انعكاسية) If $(x,x) \in R$ for every $x \in X$

• واذا وجد عنصر واحد $x \in X$ بحيث $(x,x) \notin R$ فإن R ليست انعكاسية.

• بالعودة الى Ex_2:

• العلاقة R المعرفة: $X = \{1,2,3,4\}$

$(x,y) \in R$ if $x \leq y$, $x,y \in X$ is reflexive $\forall x \in X, (x,x) \in R$

• بشكل خاص: $(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)$

2 الخاصة التناظرية: Symmetric

.تكون العلاقة R المعرفة على المجموعة X تناظرية:

if for all $x, y \in X$ if $(x,y) \in R$, then $(y,x) \in R$

باللغة المكممات: $\forall x \forall y \in X \; [(x,y) \in R] \rightarrow [(y,x) \in R]$

.وتكون غير تناظرية اذا كان:

$\neg[\forall x \forall y \; [(x,y) \in R] \rightarrow [(y,x) \in R]] \equiv$

$\exists x \exists y \; [(x,y) \in R] \wedge [(y,x) \notin R]$

.ففي المثال السابق نجد أن العلاقة "R" غير تناظرية على سبيل المثال بشكل خاص:

$(2,3) \in R \; (2<3) \wedge (3,2) \notin R \; (3 \not< 2$

3 الخاصة التخالفية: Antisymmetric

-Def: A relation (R) on a set (X) is antisymmetric

if for all $(x,y) \in X$ if $(x,y) \in R$ and $(y,x) \in R$, then $(x=y)$

$\forall x \forall y \; [(x,y) \in R \wedge (y,x) \in R] \rightarrow [x=y] \equiv$

$\forall x \forall y \; [x \neq y] \rightarrow [(x,y) \notin R \vee (y,x) \notin R]$

.بالعودة للعلاقة المعرفة في المثال ②:

R on $X = \{1,2,3,4\} : (x,y) \in R : x \leq y$

$x, y \in X$

.وتكون العلاقة R غير تخالفية إذا:

$\neg[\forall x \forall y \; [(x,y) \in R \wedge (y,x) \in R] \rightarrow (x=y)] \equiv$

$\exists x \exists y \; (x,y) \in R \wedge (y,x) \in R \wedge (x \neq y)$

-ex: let $R = \{(a,a), (c,b), (b,c), (d,d)\}$

علاقة معرفة على $X = \{a,b,c,d\}$

.إن R ليست تخالفية لأنه:

$\exists c \exists b : (b,c) \in R \wedge (c,b) \in R$ and $b \neq c$

4 الخاصة المتعدية: transitive

• Def: A Relation (R) on a set (X) is transitive if for all $x, y, z \in X$ if $(x,y) \in R$ and $(y,z) \in R$, then $(x,z) \in R$

$$\forall x \forall y \forall z \, [(x,y) \in R \land (y,z) \in R] \rightarrow [(x,z) \in R]$$

• إن العلاقة R المعرفة على المجموعة $X = \{1,2,3,4\}$ بالشكل $(x,y) \in R : x \leq y, \; x,y \in X$
هي علاقة متعدية لأن:

$$\left.\begin{array}{l} \forall x \forall y \forall z : (x,y) \in R : x \leq y \\ \text{and } (y,z) \in R : y \leq z \end{array}\right] \Rightarrow x \leq z : (x,z) \in R$$

• وتكون R غير متعدية اذا كان:

$$\exists x \exists y \exists z : [(x,y) \in R \land (y,z) \in R] \land [(x,z) \notin R]$$

• Ex:

• لتكن R علاقة معرفة على المجموعة $X = \{a,b,c,d\}$ بالشكل:

$$R = \{(a,a), (c,b), (b,c), (d,d)\} \text{ but } (b,c) \in R \land (c,b) \in R \overset{but}{\land} (b,b) \notin R$$

• إن العلاقات يمكن أن تستخدم لترتيب عناصر المجموعة على سبيل المثال العلاقة R المعرفة على مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة بالشكل:

$$(x,y) \in R : x \leq y , \quad x,y \in Z^+$$

• ترتب الأعداد الصحيحة كما نلاحظ أن R انعكاسية وتخالفية ومتعدية.
• إن علاقات كهذه تسمى علاقات ترتيب جزئي.

• تعريف:
• تكون العلاقة R المعرفة على المجموعة (X) علاقة ترتيب جزئي اذا كانت انعكاسية و تخالفية ومتعدية.

• لتكن R المعرفة على Z^+ بالشكل الآتي: $(x,y) \in R$ if x divides y ما نوعها؟
• هي انعكاسية كل عنصر يقسم نفسه: $\forall x \in Z^+ \; x | x$
• هي تخالفية: $\forall x,y \in Z^+ : (x|y) \land (y|x) \Rightarrow (x=y)$
• هي متعدية: $\forall x,y,z \in Z^+ : (x|y) \land (y|z) \Rightarrow (x|z)$
• مما سبق فهي علاقة ترتيب جزئي.

• إذا كانت R علاقة ترتيب جزئي على X فإننا نكتب $x \preceq y$ نشير بأن $\frac{xRy}{(x,y)\in R}$ ← أو
يسبق

• أي أنه يفسر العلاقة على أنها ترتيب للعناصر في X.

• بفرض أن R علاقة ترتيب جزئي على X إذا كان $x,y\in X$ فإما $x\preceq y$ أو $y\preceq x$ في هذه الحالة نقول عنهما أنهما متقارنان (comparable)

• إذا كان $x,y\in X$ و $x\npreceq y$ و $y\npreceq x$ فنقول عن x,y عنصران غير متقارنان.

• إذا كان كل عنصران في المجموعة X متقارنان فإننا نقول R علاقة ترتيب كلي.

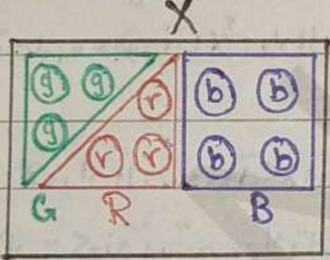
• علاقة ($\le$) المعرفة على Z^+ علاقة ترتيب كلي في حين أن علاقة (|) المعرفة على Z^+ علاقة ترتيب جزئي وليس كل عنصران متقارنان على سبيل المثال $3\nmid 2$ $\wedge$ $2\nmid 3$ في حين أن 3 و 6 متقارنان لأن 3 يقسم 6 $(3|6)$

- علاقة التكافؤ: (Equivalence Relation)

- تعريف:

• نقول عن العلاقة R المعرفة على المجموعة X أنها علاقة تكافؤ إذا كانت انعكاسية وتناظرية ومتعدية.

- مثال:



- اذا كان X مؤلفة من 10 كرات 4 زرقاء و 3 حمراء و 3 خضراء واذا قسمنا الكرات الى مجموعات R، B، G طبقاً للون فإن الأسرة S المكونة من المجموعات R,G,B تشكل تجزئة للمجموعة X

• إن التجزئة يمكن أن تستخدم لتعريف علاقة وإذا كانت S تجزئة للمجموعة X فيمكن أن نعرف xRy لنقصد بها أنه من أجل مجموعة ما $S\in S$ فإن كل من x و y ينتمي الى s اذا لهم نفس اللون فالنسبة للكرات R توصف بالشكل is the same color as

• ان علاقة كهذه انعكاسية وتناظرية ومتعدية.

• ان العلاقة R المعرفة على $X=\{1,2,3,4\}$ بالشكل $x,y\in X$ ، $(x,y)\in R$ if $x\le y$ ليست علاقة تكافؤ لأنها ليست تناظرية على سبيل المثال $(2,3)\in R$ لكن $(3,2)$ لا تنتمي لـ R لكنها انعكاسية ومتعدية.

• لتكن R علاقة تكافؤ على المجموعة X نستطيع أن نجزئ X بتجميع العناصر المرتبطة مع بعضها البعض والعناصر المرتبطة مع بعضها البعض ينظر لها على أنها متكافئة ومنها سوف نأخذ النظرية الآتية:

- Theorem:

• لتكن R علاقة تكافؤ على المجموعة X من أجل كل عنصر من $a \in X$ لتكن: $[a] = \{x \mid x R a\}$ (حيث أن)
أي أن المجموعة $[a]$ هي مجموعة كل العناصر من X المرتبطة بالعنصر a من X عندئذ فإن:

$$S = \{[a] ; a \in X\}$$

تشكل تجزئة لـ X.

• لتكن R علاقة تكافؤ على المجموعة X إن المجموعات $[a]$ المعرفة في النظرية السابقة تسمى صفوف تكافؤ للمجموعة X المعطاة بالعلاقة R.

- Ex:

الجداء الديكارتي لمجموعة الأعداد الطبيعية بنفسها

- نعرف على المجموعة $N \times N$ والتي هي $N \times N = \{(a,b) \mid a,b \in N\}$ علاقة تكافؤ كما يلي: $\forall (a,b),(c,d) \in N \times N : (a,b) R (c,d) \longleftrightarrow a+d = b+c$ أوجد صف تكافؤ

$[(4,3)]$

- الحل:

$$[(4,3)] = \{(a,b) \mid (a,b) R (4,3)\} : a+3 = b+4 \Rightarrow a = b+1$$

$$[(4,3)] = \{(1,0),(2,1),(3,2),(4,3),(5,4),(6,5),(7,6),\dots\}$$

$$[(4,3)] = \{(b+1,b) \mid b \in N\}$$

- Ex:

- أوجد صف تكافؤ $[(2,5)]$.

- الحل:

$$[(2,5)] = \{(a,b) \mid (a,b) R (2,5)\} : a+5 = b+2 \Rightarrow b = a+3$$

$$[(2,5)] = \{(0,3),(1,4),(2,5),(3,6),(4,7),(5,8),(6,9),\dots\}$$

$$[(2,5)] = \{(a,a+3), a \in N\}$$