TRANSISTORS

تحليل 1

أ. عبير الكجك

كامل_القسم عملي

انضم إلى مجموعة التلغرام الخاصة بنا

عبر مسح الرمز جانباً أو اضغط هنا

د. عبير الكحل

- عملي التحليل ①:

- التوابع:

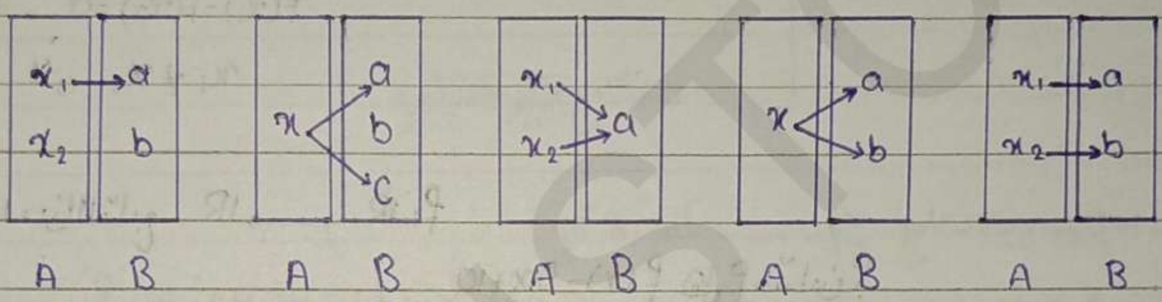
- التابع: علاقة ترتبط بين مجموعتين.

• المجموعة (1) المنطلق

• المجموعة (2) المستقر

• بحيث كل عنصر x من المنطلق يرتبط بعنصر واحد فقط من المستقر

- تطبيق: أي العلاقات التالية تمثل تابع؟

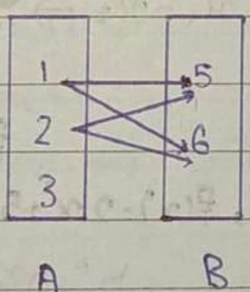


ليس تابع   ليس تابع   تابع   ليس تابع   تابع

- ليكن لدينا: $A=\{1,2,3\}$, $B=\{5,6\}$ ، G بيان التابع:

هل $G_1=\{(1,5),(1,6),(2,5),(2,6)\}$ تابع؟

ليس تابع



- بعض أنواع التوابع:

① التابع المتباين:

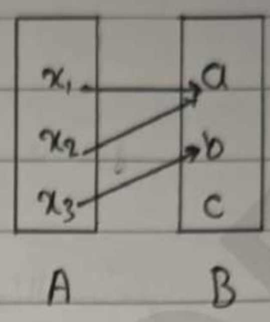
$$f\ x \longrightarrow y$$

$$\forall x_1, x_2 \in X \ ; f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

بشكل مكافئ:

$$\forall x_1, x_2 \in X \ ; x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

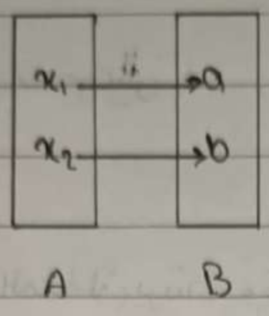
- تطبيقات:



تابع غير متباين

$f(x_1)=f(x_2)=a$

لكن $x_1 \neq x_2$



تابع متباين

- تطبيق:

- ليكن لدينا التابع $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(x)=5x+10$ هل f متباين؟

- حتى يكون التابع متباين يجب تحقق الشرط:

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \;,\; f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$$

- التحقق:

$$f(x_1)=f(x_2)$$

$$5x_1+10=5x_2+10$$

$$x_1=x_2 \Rightarrow$$ f متباين

- تطبيق:

- ليكن لدينا التابع $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x)=2x^2+5$ هل f متباين؟

- حتى يكون التابع متباين يجب تحقق الشرط:

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$$

- التحقق:

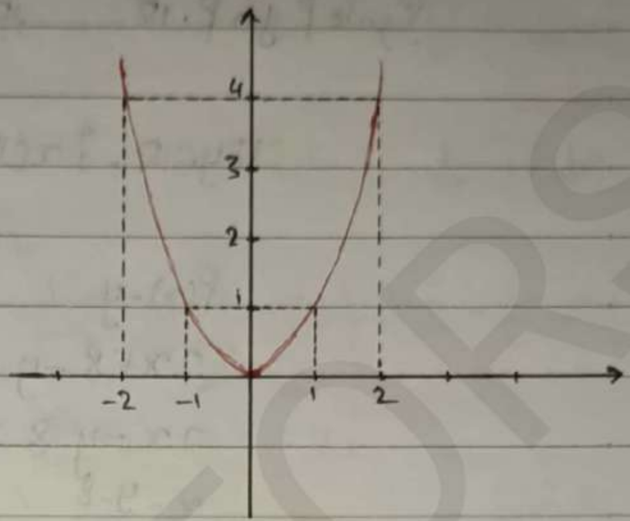
$$f(x_1)=f(x_2)$$

$$2x_1^2+5=2x_2^2+5$$

$$x_1^2=x_2^2$$

$$x_1=\pm x_2 \Rightarrow$$ f غير متباين

- هل المنحني البياني تابع متباين؟



$x_1 = 1$
$x_2 = -1$ $\Rightarrow x_1 \neq x_2$

$f(x_1) = 1$
$f(x_2) = 1$ $\Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$

- تطبيق:

- ليكن لدينا التابع $g\ [-1,\infty[\longrightarrow g$

$g(x)=\sqrt{x+3}$ هل g متباين؟

• حتى يكون g متباين يجب أن نتحقق:

$$\forall x_1, x_2 \in [-3,\infty[\ ,\ g(x_1)=g(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

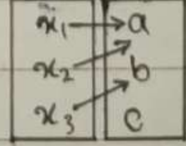
• التحقق:

$$g(x_1)=g(x)$$
$$\sqrt{x_1+3}=\sqrt{x_2+3}$$
$$x+3 = x_2+3$$
$$x_1 = x_2 \Longrightarrow$$ g متباين

② التابع الغامر:

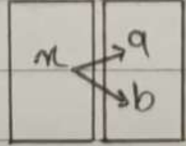
$$f: X \longrightarrow Y$$
$$\forall y \in Y,\ \exists x \in X : f(x)=y$$

تطبيقات:



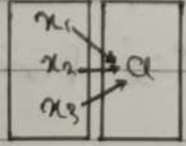
A B

تابع لكن غير غامر



A B

ليس تابع



A B

تابع غامر

- تطبيق:

- ليكن لدينا التابع $f: \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R} ; f(x)=2x+8$ هل f غامر؟

• حتى يكون f غامر يجب أن يتحقق:

$$\forall y\in\mathbb{R} , \exists x\in\mathbb{R}^* : f(x)=y$$

• التحقق:

$$f(x)=y$$
$$2x+8=y$$
$$2x=y-8$$
$$x=\frac{y-8}{2}$$

• نوجد x بدلالة y:

• لنفرض قيم x و y

• لو كانت $y=8$ لكان $x=0$ لكن لم يتحقق الشرط $x=0\notin\mathbb{R}^* \Leftarrow$ f غير غامر.

- أعد حل السؤال السابق لو كان $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$

- تطبيق:

- هل التابع f غامر $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$

$$x\longmapsto f(x)=3x^2+1$$

• حتى يكون f غامر يجب تحقق:

$$\forall y\in\mathbb{R}, \exists x\in\mathbb{R} : f(x)=y$$

• التحقق:

$$f(x)=y$$
$$3x^2+1=y \Rightarrow 3x^2=y-1 \Rightarrow x^2=\frac{y-1}{3}$$
$$\Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{y-1}{3}}$$

• يوجد شرط على قيم y:

$$\frac{y-1}{3}\geqslant 0 \Rightarrow y-1\geqslant 0 \Rightarrow y\geqslant 1 \Rightarrow y\in[1,+\infty[$$

• لم يتحقق f غير غامر.

③ التابع التقابلي:

• نقول عن تابع أنه تقابلي إذا كان متباين وغامر معاً.

- تطبيق:

- هل f تقابلي $f: \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$f(x) = \frac{x-1}{x}$$

• حتى يكون f تقابلي يجب أن يكون متباين وغامر معاً.

أولاً نتحقق من التباين: أي نتحقق من الشرط:

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^* ; f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

• التحقق:

$$f(x_1) = f(x_2)$$

$$\frac{x_1 - 1}{x_1} = \frac{x_2 - 1}{x_2}$$

$$x_1 (x_2 - 1) = x_2 (x_1 - 1)$$

$$\cancel{x_1 . x_2} - x_1 = \cancel{x_1 . x_2} - x_2$$

$x_1 = x_2 \Rightarrow$ f متباين

ثانياً نتحقق من الغمر: أي نتحقق من:

$$\forall y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \exists x \in \mathbb{R}^* : f(x) = y$$

• التحقق:

$$f(x) = y$$

$$\frac{x-1}{x} = y \Rightarrow xy = x - 1$$

$$xy - x = -1$$

$$x(y-1) = -1$$

$x = \frac{-1}{y-1} \Rightarrow$ f غامر

• إذا التابع f تقابلي.

- تمرين ①:

- هل f تقابل $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}\setminus\{1\}$

$$f(x) = \frac{x+4}{4}$$

• حتى يكون f تقابل يجب أن يكون متباين وغامر معا.

أولا نتحقق من التباين أي نتحقق من الشرط:

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^* ; f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$f(x_1) = f(x_2)$$

$$\frac{x_1+4}{4} = \frac{x_2+4}{4}$$

$$x_1 + \cancel{4} = x_2 + 4$$

$x_1 = x_2 \Rightarrow$ f متباين

ثانيا نتحقق من الغمر أي نتحقق من:

$$\forall y \in \mathbb{R}\setminus\{1\}, \exists x \in \mathbb{R}^* : f(x) = y$$

$$f(x) = y$$

$$\frac{x+4}{4} = y$$

$4y = x+4 \Rightarrow x = 4(y-1) \Rightarrow$ f غامر

• ومنه f تقابل.

- تمرين ②:

- هل f تقابل $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}\setminus\{1\}$

$$f(x)=\frac{x+1}{x}$$

• حتى يكون f تقابل يجب أن يكون متباين وغامر معا".

أولا" نتحقق من التباين: أي نتحقق من الشرط:

$$\forall x_1,x_2 \in \mathbb{R}^* ; f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$$

$$f(x_1)=f(x_2)$$

$$\frac{x_1+1}{x_1}=\frac{x_2+1}{x_2}$$

$$x_1(x_2+1)=x_2(x_1+1)$$

$$x_1 \cdot x_2+x_1=x_1 \cdot x_2+x_2$$

$$x_1=x_2 \Rightarrow f \text{ متباين}$$

ثانيا" نتحقق من الغمر: أي نتحقق من الشرط:

$$\forall y \in \mathbb{R}\setminus\{1\}, \exists x \in \mathbb{R}^* : f(x)=y$$

$$f(x)=y$$

$$\frac{x+1}{x}=y$$

$$x+1=x \cdot y$$

$$x \cdot y - x=1$$

$$x(y-1)=1$$

$$x=\frac{1}{y-1} \Rightarrow f \text{ غامر}$$

- ومنه f تقابل.

- التقابل العكسي للتابع:

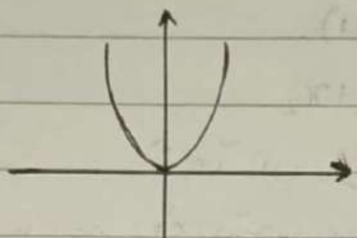
- ليكن لدينا التابع f ،

$$f: X \to Y$$
$$x \to f(x)=y$$

- يكون التابع f تابع عكسي f^{-1} إذا كان f تقابل.
- بشكل عام ليس كل تابع له تابع عكسي و لكن إذا كان f تقابل فيكون له تابع عكسي f^{-1}.
- التقابل العكسي هندسياً:
- نرسم منحني التابع ثم نأخذ مستقيم يوازي $x'x$ و نميز حالتين:

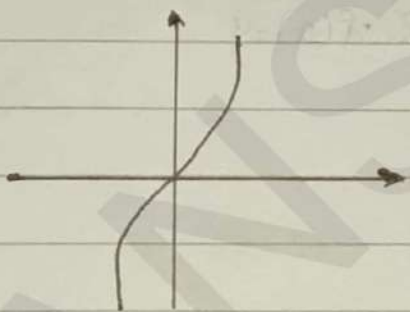
1) إذا قطعه بنقطة ⇐ يكون التابع f تابع عكسي.
2) إذا قطعه بنقطتين ⇐ لا يكون التابع عكسي.

- أمثلة:



$f: R \to R : f(x)=x^2$

ليس له تابع عكسي



$f: R \to R : f(x)=x^3$

له تابع عكسي

- تطبيق:
- ليكن لدينا التابع

$$f: R\setminus\{2\} \to R\setminus\{1\}$$
$$x \to f(x)=\frac{x-3}{x-2}$$

- هل التابع f تقابل وإذا كان كذلك أوجد تقابله العكسي.
- ليكون التابع تقابل يجب أن يكون متباين وغامر معاً.
- أولاً نتحقق من شرط التباين أي:

$$\forall x_1,x_2 \in R\setminus\{2\} ; f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$$

- التحقق:

$$f(x_1)=f(x_2)$$

$$\frac{x_1-3}{x_1-2}=\frac{x_2-3}{x_2-2} \Rightarrow (x_1-3)(x_2-2)=(x_1-2)(x_2-3)$$

$$x_1 . x_2-2x_1-3x_2+6 = x_1 . x_2-3x_1-2x_2+6$$

$\Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow$ f متباين

- ثانياً: نتحقق من شرط الغمر أي:

$\forall y \in R \setminus \{1\} ; \exists x \in R \setminus \{2\} ; f(x) = y$

- التحقق:

$f(x) = y$

$\frac{x-3}{x-2} = y \Rightarrow (x-2)y = x-3$

$x \cdot y - 2y = x - 3$

$x.y - x = 2y - 3$

$x(y-1) = 2y - 3$

$\Rightarrow x = \frac{2y-3}{y-1}$

f غامر

• بما أن f متباين وغامر معاً $\Rightarrow$ يكون f تابع تقابل له تابع عكسي:

$f^{-1} : R \setminus \{1\} \longrightarrow R \setminus \{2\}$

$y \longrightarrow f^{-1}(y) = x = \frac{2y-3}{1-y}$

- تطبيق:

- ليكن لدينا التابع: $f : R \longrightarrow R$

$x \longrightarrow 27x^3$

- هل التابع f تقابل؟ وإذا كان كذلك أوجد تقابله العكسي f^{-1}؟

- أولاً نتحقق من شرط التباين:

$\forall x_1, x_2 \in R ; f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$f(x_1) = f(x_2)$

$27x_1^3 = 27x_2^3$

$x_1 = x_2$

- f متباين

- ثانياً نتحقق من شرط الغمر

$\forall y \in R; \exists x \in R : f(x) = y$

- التحقق:

$f(x) = y \Rightarrow 27x^3 = y$

- نوجد x بدلالة y

$x^3 = \frac{y}{27} \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{y}{27}} = \frac{\sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{27}}$

$\Rightarrow x = \frac{\sqrt[3]{y}}{3}$

- f غامر.

- بما أن التابع f متباين وغامر معاً ⇐ f تقابل وله تقابل عكسي:

$f^{-1} : R \longrightarrow R$

$y \longrightarrow f^{-1}(y) = x = \frac{\sqrt[3]{y}}{3}$

- الاشتقاق:

• التوابع المثلثية:

y	y'
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1+\tan^2 x$
$\cot x$	$\frac{-1}{\sin^2 x} = -(1+\cot^2 x)$

• التعميم

y	y'
$\sin u$	$u'\cos u$
$\cos u$	$-u'.\sin u$
$\tan u$	$\frac{u'}{\cos^2 u} = u'(1+\tan^2 u)$
$\cot u$	$\frac{-u'}{\sin^2 u} = -u'(1+\cot^2 u$

- أوجد مشتق:

$$y = \sqrt{\frac{\sin^8(7x)}{7x}}$$

$$y' = \frac{\frac{8\sin^7(7x).7\cos(7x).(7x) - 7\sin^8(7x)}{(7x)^2}}{2\sqrt{\frac{\sin^8(7x)}{7x}}} =$$

• التوابع العكسية للتوابع المثلثية:

y	y'
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\text{arc}\cot x$	$\frac{-1}{1+x^2}$

• التعميم

y	y'
$\arcsin u$	$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$\arccos u$	$\frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$\arctan u$	$\frac{u'}{1+u^2}$
$\text{arc}\cot u$	$\frac{-u'}{1+u^2}$

- استنتاجات:

نعلم أن:
$\sin^2 y + \cos^2 y = 1$
$\cos^2 y = 1 - \sin^2 y$

① $y = \arcsin x \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$y = \arcsin x$

$x = \sin y$

$1 = y' \cdot \cos y \Rightarrow y' = \frac{1}{\cos y}$

$\Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

② $y = \arccos x \Rightarrow y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

$x = \cos y$

$1 = -y' \cdot \sin y \Rightarrow y' = \frac{-1}{\sin y}$

$\Rightarrow y' = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}$

$\Rightarrow y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

③ $y = \arctan x \Rightarrow y' = \frac{1}{1+x^2}$

$x = \tan y$

$1 = y'(1+\tan^2 y)$

$y' = \frac{1}{1+\tan^2 y} \Rightarrow y' = \frac{1}{1+x^2}$

④ $y = \text{arc}\cot x \Rightarrow y' = \frac{-1}{1+x^2}$

$x = \cot y$

$1 = -y' \cdot (1+\cot^2 y)$

$y' = \frac{-1}{1+\cot^2 y} \Rightarrow y' = \frac{-1}{1+x^2}$

تطبيقات:

1) $y = \arctan(5x)$

$$y' = \frac{3}{1+9x^2}$$

2) $y = \arcsin(5x)$

$$y' = \frac{5}{\sqrt{1-25x^2}}$$

3) $y = \arctan(\ln\sqrt{x})$

$$y' = \frac{(\ln\sqrt{x})'}{1+(\ln\sqrt{x})^2} = \frac{\frac{(\sqrt{x})'}{\sqrt{x}}}{1+(\ln\sqrt{x})^2}$$

$$= \frac{\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}}{1+(\ln\sqrt{x})^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}}{1+(\ln\sqrt{x})^2} = \frac{1}{2x(1+(\ln\sqrt{x})^2)}$$

4) $y = \sqrt[3]{\frac{\arcsin^2 x}{x^2}}$ وظيفة

5) $y = \ln\left(\sqrt{\frac{\arcsin x}{x^2}}\right)$

$$y = \ln\left(\frac{\arcsin x}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\arcsin x}{x^2}\right)$$

$\Rightarrow y' = \ldots\ldots$ وظيفة

6) $y = \left[\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right]^8$

$$y' = 8\left(\arctan\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^7 \cdot \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)'}{1+\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2}$$

$$= 8\left(\arctan\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^7 \cdot \frac{\frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}}{1+\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2} = \ldots\ldots$$

$$y = \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$y = \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

المعمّم

y	y'	y	y'
$\sec u$	$u' . \sec u . \tan u$	$\sec x$	$\sec x . \tan x$
$\csc u$	$-u' . \csc u . \cot u$	$\csc x$	$-\csc . \cot x$

- تطبيق:

$$y = \sec 5x$$

$$y' = 5 . \sec(5x) . \tan(5x)$$

- أصبح لدينا مشتقات جديدة لكل من tan, cot :

$y = \cot x$	$y = \cot u$	$y = \tan x$	$y = \tan u$
$y' = \frac{-1}{\sin^2 x}$	$y' = \frac{-u'}{\sin^2 u}$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$y' = \frac{u'}{\cos^2 u}$
$= -(1 + \cot^2 x)$	$= u'(1 + \cot^2 u)$	$= 1 + \tan^2 x$	$= u'(1 + \tan^2 u)$
$= -\csc^2 x$	$= -u' . \csc^2 u$	$= \sec^2 x$	$= u' . \sec^2 u$

- التوابع القطعية (التوابع الزائدية):

$$\sinh x = \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh x = \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

y	y'	y	y'
$sh\,u$	$u'.ch\,u$	$sh\,x$	$ch\,x$
$ch\,u$	$+u'.sh\,u$	$ch\,x$	$+sh\,x$
$th\,u$	$\frac{u'}{ch^2 u}$	$th\,x$	$\frac{1}{ch^2 x}$
$coth\,u$	$\frac{-u'}{sh^2 u}$	$coth\,x$	$\frac{-1}{sh^2 x}$

- تمارين:

$$y=\arctan\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

$$y'=\frac{\frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2}}{1+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2}=\frac{2}{(x+1)^2\left[1+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2\right]}$$

$$y=\arcsin^6(x^2)$$

$$y'=6\arcsin^5(x^2).\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$$

- القاعدة اللوغاريتمية في الاشتقاق:

. نستخدم هذه القاعدة في الحالات التالية:

1. تابع مرفوع الى متحول.
2. تابع مرفوع الى تابع.
3. متحول مرفوع الى متحول.
4. متحول مرفوع الى تابع.

- القاعدة:

1. نأخذ لوغاريتم الطرفين.
2. نطبق خواص اللوغاريتم إن وجدت.
3. نشتق الطرفين.
4. نعوض y بقيمتها.

1- مثال: "تابع مرفوع الى متحول"

$$y = (\cos x)^x$$
$$\ln y = \ln(\cos x)^x$$
$$\ln y = x . \ln(\cos x)$$
$$\frac{y'}{y} = \ln(\cos x) + \frac{-\sin x}{\cos x} . x$$

$$\frac{y'}{y} = \ln(\cos x) - (\tan x) . x$$
$$y' = y[\ln(\cos x) - x . \tan x]$$
$$y' = (\cos x)^x . [\ln(\cos x) - x . \tan x]$$

2- مثال: "متحول مرفوع الى متحول"

$$y = x^x$$
$$\ln y = \ln X^x$$
$$\ln y = x . \ln X$$
$$\frac{y'}{y} = \ln X + \frac{1}{X} . x$$
$$y' = y[\ln X + 1]$$
$$y' = X^x [\ln X + 1]$$

3- مثال: "متحول مرفوع الى تابع"

$$y = x^{\sin x}$$
$$\ln y = \ln x^{\sin x}$$
$$\ln y = \sin x . \ln x$$
$$\frac{y'}{y} = \cos x . \ln x + \frac{1}{x} . \sin x$$
$$y' = y . \left[\cos x . \ln x + \frac{\sin x}{x}\right]$$
$$y' = x^{\sin x} \left[\cos x . \ln x + \frac{\sin x}{x}\right]$$

4ـ مثال: "تابع مرفوع الى متحول"

$$y = (x.\sin x)^x$$
$$Ln y = Ln(x.\sin x)^x$$
$$Ln y = x.Ln(x.\sin x)$$
$$\frac{y'}{y} = Ln(x \sin x) + \frac{\sin x + x.\cos x}{x.\sin x}.x$$

$$y' = y\left[Ln(x.\sin x) + \frac{\sin x}{\sin x} + \frac{x.\cos x}{\sin x}\right]$$
$$y' = (x.\sin x)^x.\left[Ln(x.\sin x) + 1 + x.\cot x\right]$$

5ـ مثال: "تابع مرفوع الى تابع"

$$y = (\cos x)^{\sin x}$$
$$Ln y = \sin x \cancel{\cos} Ln(\cos x)$$
$$\frac{y'}{y} = \cos x.Ln(\cos x) + \frac{-\sin x}{\cos x}.\sin x$$
$$y' = y[\cos x.Ln(\cos x) - \tan x.\sin x]$$
$$y' = (\cos x)^{\sin x}.[\cos x.Ln(\cos x) - \tan x.\sin x]$$

ـ قاعدة:

y	y'
a^x حيث a هو عدد ثابت	$a^x.Ln(a)$

ـ مثال:

$$y = 3^x$$

الطريقة 1 مباشرة

$$y' = 3^x.Ln(3)$$

الطريقة 2 القاعدة اللوغاريتمية

$$Ln y = Ln(3)^x$$
$$Ln y = x.Ln(3)$$
$$\frac{y'}{y} = Ln(3) + 0$$
$$y' = y.[Ln(3)]$$
$$y' = (3)^x.[Ln(3)]$$

- القاعدة العامة للاشتقاق الجزئي:

$$U = f(x,y)$$

- المشتقات من المرتبة 1:

$$U'_x = \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$U'_y = \frac{\partial f}{\partial y}$$

- المشتقات من المرتبة الثانية:

$$U''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

$$U''_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$U''_{xy} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$U''_{yx} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

$$U = f(x,y,z)$$

- المشتقات من المرتبة 1:

$$U'_x = \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$U'_y = \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$U_z = \frac{\partial f}{\partial z}$$

- المشتقات من المرتبة 2:

$U''_{yz} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)$	$U''_{xz} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)$	$U''_{xy} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$	$U''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$
$U''_{zy} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$	$U''_{zx} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$	$U''_{yx} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$	$U''_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$
			$U''_{zz} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)$

- مثال 1 : أوجد المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى للتابع:

$$U = f(x,y) = 3x + 4yx$$

$$U'_x = \frac{\partial f}{\partial x} = 3 + 4y$$

$$U'_y = \frac{\partial f}{\partial y} = 0 + 4x = 4x$$

- مثال 2 : أوجد المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى والثانية للتابع:

$$f(x,y) = x^2 . y^2 + 2x.y$$

• المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى:

$$U'_x = \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^2 + 2y$$

$$U'_y = \frac{\partial f}{\partial y} = 2yx^2 + 2x$$

• المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية:

$$U''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(2xy^2 + 2y) = 2y^2 + 0 = 2y^2$$

$$U''_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(2yx^2 + 2x) = 2x^2 + 0 = 2x^2$$

$$U''_{xy} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(2yx^2 + 2x) = 4yx + 2$$

$$U''_{yx} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(2xy^2 + 2y) = 4xy + 2$$

- مثال 3 : أوجد المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى للتابع:

$$U = f(x,y,z) = 3x^2y^3z^4 + e^{xyz}$$

$$U'_x = \frac{\partial f}{\partial x} = 6xy^3z^4 + yze^{xyz}$$

$$U'_y = \frac{\partial f}{\partial y} = 9x^2y^2z^4 + xze^{xyz}$$

$$U'_z = \frac{\partial f}{\partial z} = 12x^2y^3z^3 + xye^{xyz}$$

- تعديل قانون على المحاضرة رقم (3):

$$(Chx)' = +sh\,x$$

$$(Chu)' = u'.shu$$

- إثبات أن:

$\boxed{1}$ $(shx)' = \left(\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\right)'$

$$= \frac{e^{x}-(-e^{-x})}{2} = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2} = ch\,x$$

$\boxed{2}$ $(chx)' = \left(\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\right)'$

$$= \frac{e^{x}-e^{-x}}{2} = sh\,x$$

- تتمة تمارين الاشتقاق الجزئي:

- أوجد المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى للتابع:

$$U = f(x,y) = \arctan\left(\frac{x}{y}\right) + e^{2xy}$$

$$U'_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\frac{1}{y}}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} + 2y\,e^{2xy}$$

$$U'_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-\frac{x}{y^2}}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} + 2x.e^{2xy}$$

- أوجد المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى والثانية للتابع:

$$U = f(x,y,z) = 6x^2y^3 + e^{y+z}$$

- المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى:

$$U'_x = \frac{\partial f}{\partial x} = 12xy^3$$

$$U'_y = \frac{\partial f}{\partial y} = 18x^2y^2 + e^{y+z}$$

$$U'_z = \frac{\partial f}{\partial z} = e^{y+z}$$

- المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية:

$$U''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 12y^3$$

$$U''_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 36x^2y + e^{y+z}$$

$$U''_{zz} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = e^{y+z}$$

$$U''_{xy} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 36xy^2$$

$$U''_{yx} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 36xy^2$$

$$U''_{xz} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = 0$$

$$U''_{zx} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 0$$

$$U''_{yz} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = e^{y+z}$$

$$U''_{zy} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = e^{y+z}$$

- المتتاليات والمتسلسلات:

- متتالية حسابية......
- متتالية هندسية......
- متتالية متقاربة ⇐ نهايتها وحيدة.
- " " ⇐ محدودة
- ليس لكل متتالية حد عام مثلاً متتالية الأعداد الأولية

$$2,3,5,7,11,\ldots\ldots$$

- المتتاليات المطردة: $\forall n\in \mathbb{N}$

حالة $a_n>0$ موجبة

- متزايدة: $a_{n+1}-a_n \geq 0 \Leftarrow a_{n+1} \geq a_n$; $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\geq 1$
- متزايدة تماماً: $a_{n+1}-a_n > 0 \Leftarrow a_{n+1} > a_n$; $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}>1$
- متناقصة: $a_{n+1}-a_n \leq 0 \Leftarrow a_{n+1} \leq a_n$; $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\leq 1$
- متناقصة تماماً: $a_{n+1}-a_n < 0 \Leftarrow a_{n+1} < a_n$; $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}<1$

- تطبيق: ادرس اطراد المتتاليات التي حدها العام: $\forall n\in \mathbb{N}$

$\boxed{1}$ $a_n = 1-3n$

$$a_{n+1}-a_n = 1-3(n+1)-(1-3n)$$
$$= \cancel{1}-3n-3-\cancel{1}+3n$$
$$= -3<0$$ متناقصة تماماً

$\boxed{2}$ $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ وظيفة

$\boxed{3}$ $a_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} \cdot \underbrace{\left(\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}\right)}_{\text{مرافق البسط}} \cdot \underbrace{\left(\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right)}_{\text{مرافق المقام}}$$

$$= \frac{n+2-(n+1)}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} \cdot \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{n+1-n}$$

$$= \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} < 1$$

متناقصة تماماً $\forall n\in \mathbb{N}$

4. $a_n = \dfrac{2^n}{n!}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n}$$

$$= \frac{2^n \cdot 2 \cdot n!}{(n+1)n! \cdot 2^n} = \frac{2}{n+1}$$

متناقصة تماماً ابتداءً من : $n=2$

- نهايات شهيرة :

1. $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

2. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{x^n}{n!} = 0$

3. $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n = e^x$

مثلاً $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e^1 = e$

4. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\ln n}{n} = 0$

5. $$\lim_{n \to \infty} a^n = \begin{cases} 1 & : a = 1 \\ \text{النهاية غير معروفة } \left(n \text{ زوجي } +1,\ n \text{ فردي } -1\right) & : a = -1 \\ 0 & : |a| < 1 \quad -1 < a < 1 \\ +\infty & : |a| > 1 \quad -1 > a > 1 \\ \text{النهاية غير معروفة } \left(n \text{ زوجي } +\infty,\ n \text{ فردي } -\infty\right) & . \end{cases}$$

متقاربة عندما $-1 < a \leq 1$ وما عدا ذلك تكون متباعدة

- المتسلسلة: هي المجموع الجبري لعناصر المتتالية

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots\dots + a_n + \dots\dots$$

- المتتالية $\{n\}_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + \dots\dots + n + \dots\dots$$

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots\dots + \frac{1}{n} + \dots\dots$$

متسلسلة توافقية متباعدة

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \dots\dots + \frac{1}{n^2} + \dots\dots$$

- متسلسلة ريمان: من الشكل $\sum \frac{1}{n^p}$ حيث $p \in \mathbb{R}$

$p \leq 1$ متباعدة

$p > 1$ متقاربة

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة $\Leftrightarrow$

$$\exists S \in \mathbb{R} : \lim_{n\to\infty} S_n = S$$

متتالية المجاميع الجزئية

- تذكرة من المحاضرة السابقة:

* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ متسلسلة توافقية متباعدة على الرغم من أن $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

* متسلسلة ريمان من الشكل $\sum \frac{1}{n^p}$ حيث $p \in R$

$p \leq 1 \Leftarrow$ المتسلسلة متباعدة

$p > 1 \Leftarrow$ المتسلسلة متقاربة

* المتسلسلة الهندسية

$|r| < 1 \Leftarrow$ المتسلسلة متقاربة

$|r| \geq 1 \Leftarrow$ المتسلسلة متباعدة

* المعيار الصفري: يحدد التباعد

$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow$ متباعدة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

- تمرين: ادرس تقارب وتباعد المتسلسلات التالية:

$\boxed{1}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n+5}$ $\qquad a_n = \frac{n+1}{2n+5}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{2n+5}\right) = \frac{1}{2} \neq 0$$

- المتسلسلة $\sum_{n=1} \frac{n+1}{2n+5}$ متباعدة حسب المعيار الصفري

$\boxed{2}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right) = 1 \neq 0$$

- المتسلسلة المعطاة متباعدة حسب المعيار الصفري

$\boxed{3}\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

- متسلسلة هندسية

$|r| = \left|\frac{2}{3}\right| < 1 \Rightarrow$ المتسلسلة متقاربة

$\boxed{4}\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$

هندسية $\quad |r| = |-1| \geq 1 \Leftarrow$ متباعدة

$\boxed{5}\ \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}$

متباعدة

$\boxed{6}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2^{n-1})(3^{n-1})}{5^{n-1}}$

هندسية

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{6}{5}\right)^{n-1} \Rightarrow |r| = \left|\frac{6}{5}\right| > 1$$

متباعدة

$\boxed{7}\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n}$

هندسية $\quad |r| = |-1| \geq 1 \Leftarrow$ متباعدة

$\boxed{8}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1}$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right) = \frac{1}{2} \neq 0$$

• المتسلسلة المعطاة متباعدة حسب المعيار الصفري

- معيار المقارنة:

• إذا كانت لدينا متسلسلتان $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ حيث $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$ وكانت $a_n \leq b_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

فإنه إذا كانت:

① $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متقاربة $\Leftarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة

② $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متباعدة $\Leftarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متباعدة

- تطبيق:

$\boxed{1}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{3n-1}$

$$\frac{3}{3n-1} = \frac{3}{3(n-\frac{1}{3})} = \frac{1}{n-\frac{1}{3}}$$

$$n - \frac{1}{3} < n \Rightarrow \frac{1}{n-\frac{1}{3}} > \frac{1}{n}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ متسلسلة توافقية متباعدة $\Leftarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n-\frac{1}{3}}$ متباعدة

$\Leftarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{3n-1}$ متباعدة حسب معيار المقارنة

$\boxed{2}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \cdot n}$

$$2^n \cdot n > 2^n \Rightarrow \frac{1}{2^n \cdot n} < \frac{1}{2^n}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ هندسية $|r|=|\frac{1}{2}|<1$ متقاربة ⇐ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \cdot n}$ متقاربة حسب المعيار المقارنة

$\boxed{3}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2^n}$

$$n^2+2^n > 2^n \Rightarrow \frac{1}{n^2+2^n} < \frac{1}{2^n}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ هندسية $|r|=|\frac{1}{2}|<1$ متقاربة ⇐ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2^n}$ متقاربة حسب معيار المقارنة

$\boxed{4}\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$

$$\ln n < n \Rightarrow \frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ متسلسلة توافقية متباعدة ⇐ $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ متباعدة حسب معيار المقارنة

- معيار دالامبير:

• إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متسلسلة حيث $a_n \geq 0$ وكان $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ فإنه إذا كانت:

① $L<1$ (موجبة) ⇐ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة

② $L>1$ ⇐ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متباعدة

③ $L=1$ ⇐ يفشل المعيار في تحديد نوع المتسلسلة

- تطبيقات:

$$\boxed{1}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{x^n \cdot n \cdot n!}{(n+1) \cdot n! \cdot x^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{n+1} = 0$$

⇐ المتسلسلة المفروضة متقاربة حسب معيار دالامبير

$$\boxed{2}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1} \cdot (n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{2^n \cdot n!}{n^n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1} \cdot (n+1)! \cdot n^n}{(n+1)^{n+1} \cdot 2^n \cdot n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n \cdot 2 \cdot (n+1) \cdot n! \cdot n^n}{(n+1)^n \cdot (n+1) \cdot 2^n \cdot n!}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty} 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$= \lim_{n\to\infty} 2\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n = \frac{2}{e} < 1$$

• المتسلسلة المفروضة متقاربة حسب معيار دالامبير.

$$\boxed{3}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n \cdot n!} = \frac{e}{3} < 1$$

متقاربة حسب دالامبير

$$\boxed{4}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{e^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{e^{n+1}}}{\frac{n!}{e^n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)! \cdot e^n}{e^{n+1} \cdot n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1) n! \cdot e^n}{e^n \cdot e \cdot n!} = \lim \frac{n+1}{e} = \infty > 1$$

⇐ متباعدة حسب معيار دالامبير

$\boxed{5}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!.n!}$

$=4>1$

• متباعدة حسب معيار دالامبير

- معيار الجذر النوني (كوشي):

• إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متسلسلة حيث $a_n \geq 0$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = R$

• فإنه إذا كانت:

$\boxed{1}$ $0 \leq R < 1$ ⇐ المتسلسلة $\sum a_n$ متقاربة

$\boxed{2}$ $R > 1$ ⇐ المتسلسلة $\sum a_n$ متباعدة

$\boxed{3}$ $R = 1$ ⇐ يفشل المعيار في تحديد نوع المتسلسلة

- تطبيقات:

$\boxed{1}\ \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\ln n}\right)^n$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{\ln n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} = 0 < 1$

⇐ $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ متقاربة حسب معيار الجذر النوني.

$\boxed{2}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n^2}}{\sqrt[n]{2^n}}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}\cdot\sqrt[n]{n}}{2} = \frac{(1).(1)}{2} = \frac{1}{2} < 1$

• المتسلسلة متقاربة حسب معيار الجذر النوني.

$\boxed{3}\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1}\right)^n$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$

⇐ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة حسب معيار الجذر النوني

$\boxed{4}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{\ln^n(n+2)}$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3^n}{\ln^n(n+2)}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3}{\ln(n+2)}\right)^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{\ln(n+2)}\right) = 0 < 1$$

$\Leftarrow$ المتسلسلة المعطاة متقاربة حسب معيار الجذر النوني.

$\boxed{5}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{e}{2} > 1$$

$\Leftarrow$ المتسلسلة المعطاة متباعدة حسب معيار الجذر النوني.

$\boxed{6}\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} = e > 1$

. متباعدة حسب معيار الجذر النوني.

- ادرس تقارب أو تباعد المتسلسلات الآتية:

$\boxed{1}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} 2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

• متسلسلة هندسية

$|r| = \left|\frac{1}{3}\right| < 1$ فهي متقاربة

$\boxed{2}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+(-1)^n}}$

• نطبق معيار دالامبير:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2^{n+1+(-1)^{n+1}}}}{\frac{1}{2^{n+(-1)^n}}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+(-1)^n}}{2^{n+1+(-1)^{n+1}}}$$

• نميز حالتين:

① حالة n زوجي: $\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{2^{n+1-\cancel{1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n\cdot 2}{2^n} = 2 > 1 \Rightarrow$ متباعدة

② حالة n فردي: $\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n-1}}{2^{n+1+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n\cdot 2^{-1}}{2^n\cdot 2^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} < 1$

$\Rightarrow$ متقاربة

• يفشل معيار دالامبير في تحديد نوع المتسلسلة لأن النهاية غير موجودة (لها قيمتان أحدهما 2 أكبر من الواحد والأخرى $\frac{1}{8}$ أصغر من الواحد) ⇐ نطبق معيار آخر:

• نطبق معيار كوشي:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^{n+(-1)^n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{2^{n+(-1)^n}}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{\frac{n+(-1)^n}{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{1+\frac{(-1)^n}{n}}} = \frac{1}{2} < 1$$

• فالمتسلسلة متقاربة حسب معيار كوشي (الجذر النوني)

$\boxed{3}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!}{2n!!}$

•نطبق معيار دالامبير:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{[2(n+1)-1]! \cdot 2n!!}{[2(n+1)]!! \cdot (2n-1)!}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)! \cdot 2n!!}{(2n+2)!! \cdot (2n-1)!}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)(2n)(2n-1)! \cdot 2n!!}{(2n+2)(2n)!! \cdot (2n-1)!}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+2n}{2n+2} = \infty > 1$$

•متباعدة حسب معيار دالامبير

$\boxed{4}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^3}$

$$\frac{\sin n}{n^3} < \frac{1}{n^3} < \frac{1}{n^2}$$

•نعلم أن:

$\sum \frac{1}{n^2}$ متسلسلة ريمانية من الشكل $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$

حيث $p=2>1$ وهي متقاربة

$\Leftarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^3}$

متقاربة حسب معيار المقارنة.

- معيار راب:

• لتكن لدينا $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متسلسلة حيث $a_n \geq 0$ وكانت $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = W$

وإذا كانت:

① $W<1 \Leftarrow \sum a_n$ متباعدة

② $W>1 \Leftarrow \sum a_n$ متقاربة

③ $W=1 \Leftarrow$ يفشل المعيار في تحديد نوع المتسلسلة

- تطبيقات:

$\boxed{1}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

* الطريقة (1):

• متسلسلة ريمانية $p=2>1$ فهي متقاربة.

* الطريقة (2):

• باستخدام معيار راب:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{(n+1)^2}} - 1\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\left[\frac{(n+1)^2}{n^2} - 1\right] = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\cancel{n^2}+2n+1-\cancel{n^2}}{n\,n^{\cancel{2}}}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+1}{n}\right) = 2 > 1 \Rightarrow$$

• المتسلسلة متقاربة حسب معيار راب.

$\boxed{2}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n \cdot n! \cdot n!}{(2n)!}$

• نطبق معيار دالامبير:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4^{n+1} \cdot (n+1)! \cdot (n+1)! \cdot (2n)!}{(2n+2)! \cdot 4^n \cdot n! \cdot n!}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{4^n} \cdot 4 \cdot (n+1)\cancel{n!} \cdot (n+1) \cdot \cancel{n!} \cdot \cancel{(2n)!}}{(2n+2)(2n+1) \cdot \cancel{2n!} \cdot \cancel{4^n} \cdot \cancel{n!} \cdot \cancel{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\overset{2}{\cancel{4}}(n+1)\cancel{(n+1)}}{\cancel{2}\cancel{(n+1)}(2n+1)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n+2}{2n+1} = 1$$

• يفشل معيار دالامبير في تحديد نوع المتسلسلة

عكس دالامبير

• نطبق معيار راب:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{2n+1}{2n+2}-1\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{2n+1-2n-2}{2n+2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-n}{2n+2}\right)=-\frac{1}{2}<1$$

• فالمتسلسلة متباعدة حسب معيار راب.

- معيار النسبة:

• إذا كانت لدينا متسلسلتان $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ حيث $b_n\geq 0$ و $a_n\geq 0$ وكانت:

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=C$ فإنه إذا كانت:

① $C>0 \Leftarrow$ المتسلسلتان من نوع واحد (متقاربتان معاً "أو" متباعدتان معاً).

② $C=0 \Leftarrow$ إذا كانت $\sum b_n$ متقاربة $\Leftarrow \sum a_n$ متقاربة.

③ $C=\infty \Leftarrow$ إذا كانت $\sum b_n$ متباعدة $\Leftarrow \sum a_n$ متباعدة.

- تطبيقات:

$\boxed{1}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$

لدينا: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$

لنأخذ: $\sum_{n=1}^{\infty} b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$

وهي متسلسلة توافقية متباعدة

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}=1>0$$

• المتسلسلتان من نوع واحد

$\Leftarrow \sum a_n$ متباعدة

$\boxed{2}\ \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}$

لدينا: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}$

ولنأخذ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

$x = \frac{1}{n} \Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 > 0$$

• المتسلسلتان من نوع واحد

$\Leftarrow$ a_n متباعدة حسب معيار نهاية النسبة.

$\boxed{3}\ \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n!}$

لنأخذ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{1}{n!}$

متقاربة لأنه حسب دالامبير

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)n!} = 0 < 1$$

فهي متقاربة

$\Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$$

$$= \lim \frac{\sin\frac{1}{n!}}{\frac{1}{n!}} = 1 > 0$$

• المتسلسلتان من نوع واحد

$\Leftarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n!}$ متقاربة