Chapitre 6 : FONCTIONS NUMÉRIQUES USUELLES

• Une fonction numérique est définie sur une partie de $\mathbb{R}$ qu'on appelle son **domaine de définition**, et à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).

• On rappelle comment étudier les propriétés de f et les **résumer par le tracé de son graphe**.

• Ce chapitre s'appuie sur des résultats théoriques démontrés ultérieurement.

• On décrit les fonctions « usuelles » : elles permettent de construire les fonctions données par une expression explicite, grâce aux opérations d'addition, multiplication, composition, etc.

Les lettres f, g, h désigneront des fonctions numériques.

I Généralités sur les fonctions numériques

I.1 Domaine de définition, valeurs, antécédents, graphe

DÉFINITION

> *Le* **domaine de définition** *de f est l'ensemble $\mathcal{D}_f$ des réels x tels que $f(x)$ existe.*
>
> *Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(x)$ est une valeur de f, ou prise par f, c'est l'***image de** x **par** f.
>
> *Pour tout y dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) : tout $x \in \mathcal{D}_f$ tel que $f(x) = y$ est un* **antécédent de** y **par** f.
>
> *Pour toute partie A de $\mathbb{R}$, l'***image de** A **par** f *est :* $f(A) = \{f(x)\}_{x \in A}$
> *En particulier :* $\mathrm{Im}(f) = f(\mathcal{D}_f) = f(\mathbb{R})$
>
> *Pour toute partie B de $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) :* $f^{-1}(B) = \{x \in \mathcal{D}_f \mid f(x) \in B\}$ *est l'***image réciproque de** B **par** f, *c'est l'ensemble des antécédents des éléments de B par f.*
>
> *Le graphe de f (à valeurs réelles) est l'ensemble des points $(x, f(x))$ du plan $\mathbb{R}^2$ pour $x \in \mathcal{D}_f$.*

1▶

I.2 Opérations sur les fonctions numériques

On combine deux ou plusieurs fonctions numériques pour en fabriquer une nouvelle :

1) **Somme** $f + g$, définie sur $\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$ par : $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

2) **Produit** fg, définie sur $\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$ par : $(f.g)(x) = f(x).g(x)$

3) **Composition** $g \circ f$, définie par $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ sur la plus grande partie I de $\mathcal{D}_f$ telle que $f(I) \subset \mathcal{D}_g$.

2▶

Inversement,

on décompose f à l'aide d'opérations sur les fonctions simples (usuelles) pour déterminer $\mathcal{D}_f$!

3▶

Pratique 1 :

1. Décomposer jusqu'à des fonctions très simples :

a) $x \mapsto \sin(x+\mathrm{e}^x)\ln(x^2+3|x|)$ b) $\exp\left(\dfrac{\cos(x^2+3)}{\sqrt{3\tan^2(x)+1}}\right)+\ln(x+2)$

2. Quel est le domaine de définition des fonctions précédentes ?

I.3 Transformations affines d'un graphe, invariances

Transformations géométriques affines de base :

1) Le graphe de $x \mapsto f(-x)$ et le symétrique de celui de f par rapport à $(0y)$

2) Le graphe de $x \mapsto -f(x)$ et le symétrique de celui de f par rapport à $(0x)$

symétries

3) Le graphe de $x \mapsto f(x+a)$ et le translaté de celui de f de vecteur $(-a,0)$

4) Le graphe de $x \mapsto f(x)+a$ et le translaté de celui de f de vecteur $(0,a)$

translations

5) Pour $\lambda > 0$, le graphe de $x \mapsto \lambda f(x)$ s'obtient depuis celui de f par dilatation/contraction de rapport λ dans la direction (Oy)

6) Pour $\lambda > 0$, le graphe de $x \mapsto f(\lambda x)$ s'obtient de celui de f par dilatation/contraction de rapport $1/\lambda$ dans la direction (Ox)

dilatations contractions

4▶

Propriétés d'invariances de base :

1) f est **paire** si : $\forall x \in \mathcal{D}_f,\ f(-x)=f(x)$ ($\mathcal{D}_f$ symétrique par rapport à O)	Graphe symétrique par rapport à $(0y)$	Étude sur $\mathcal{D}_f \cap \mathbb{R}_+$
2) f est **impaire** si : $\forall x \in \mathcal{D}_f,\ f(-x)=-f(x)$ ($\mathcal{D}_f$ symétrique par rapport à O)	Graphe symétrique par rapport à l'origine	Étude sur $\mathcal{D}_f \cap \mathbb{R}_+$
3) Pour un a réel : $\forall x \in \mathcal{D}_f,\ f(a-x)=f(x)$ ($\mathcal{D}_f$ symétrique par rapport à $\frac{a}{2}$)	Graphe symétrique par rapport à la droite $x=\frac{a}{2}$	Étude sur $\mathcal{D}_f \cap [\frac{a}{2},+\infty[$
4) Pour un a réel : $\forall x \in \mathcal{D}_f,\ f(a-x)=-f(x)$ ($\mathcal{D}_f$ symétrique par rapport à $\frac{a}{2}$)	Graphe symétrique par rapport au point $(\frac{a}{2},0)$	Étude sur $\mathcal{D}_f \cap [\frac{a}{2},+\infty[$
5) Pour un $T>0$, f est T-**périodique** si : $\forall x \in \mathcal{D}_f,\ f(x+T)=f(x)$ ($\mathcal{D}_f$ invarant par addition de T)	Graphe invariant par translation de vecteur $(T,0)$	Étude sur $\mathcal{D}_f \cap B$ B intervalle de longueur T

⚠ Il faut répertorier ces invariances pour tracer le graphe de f :
∗ cela permet de réduire le domaine d'étude, et on complète le graphe par les transformations géométriques correspondantes
∗ en oublier pose question : le graphe en apparence possède des propriétés géométriques que l'on n'a pas établies...

5▶

I.4 Compléments sur les fonctions périodiques

Définition

Soit T un réel.

f est T-périodique, ou encore T est une période de f, si : $\forall x \in \mathcal{D}_f,\ f(x+T) = f(x)$

f est périodique s'il existe $T > 0$ tel que f soit T-périodique.

Proposition

Une fonction périodique admet une infinité de périodes, leur ensemble forme un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.

Si f et g sont T-périodiques, alors $f+g$, fg et f/g le sont aussi.

Soit $\lambda > 0$. Si f est T-périodique, alors $x \mapsto f(\lambda x)$ est $\dfrac{T}{\lambda}$-périodique.

6▶

Pratique 2 :

Domaine de définition, domaine d'étude et transformations géométriques permettant de tracer le graphe de :

1. $x \mapsto \sin(x)$ **2.** $x \mapsto \sin^2(x)\cos(3x)$ **3.** $x \mapsto \tan(x)(1+\cos^2(x))$

I.5 Monotonie : rappels et compléments

Définition

f est **croissante** *si :* $\forall (x,y) \in \mathcal{D}_f^2,\quad x \leqslant y \Longrightarrow f(x) \leqslant f(y)$

f est **décroissante** *si :* $\forall (x,y) \in \mathcal{D}_f^2,\quad x \leqslant y \Longrightarrow f(x) \geqslant f(y)$

f est **monotone** *si f est croissante ou si f est décroissante.*

On obtient les définitions de stricte croissance, stricte décroissance et stricte monotonie en remplaçant toutes les inégalités par les inégalités strictes correspondantes.

Vous devez connaître et utiliser les deux théorèmes suivants que l'on démontrera plus tard :

Théorème de la limite monotone :

Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur $]a,b[$ avec $a < b$. On suppose f monotone.

Alors f admet des limites (finies ou pas) en a et en b, et $f(]a,b[) \subset \left] \lim\limits_{x\to a^+} f(x), \lim\limits_{x\to b^-} f(x) \right[$, l'ordre des bornes dépendant du sens de monotonie de f.

Théorème de l'homéomorphisme :

Soit f continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs réelles.
Alors f est injective si, et seulement si, f est strictement monotone.

Dans ce cas, f est bijective de I sur $f(I)$, sa réciproque f^{-1} est continue (on dit que f est un homéomorphisme), les intervalles I et $f(I)$ sont de même nature, et les bornes de $f(I)$ sont les limites de f aux extrémités de I.

7▶

PROPOSITION

Soit f bijective de $\mathcal{D}_f$ sur $f(\mathcal{D}_f)$.
Alors le graphe de f^{-1} se déduit de celui de f par symétrie par rapport à la droite $y = x$.

8▶

I.6 Dérivation : rappels et compléments

Les intervalles de $\mathbb{R}$ utilisés (comme I) sont supposés non vides et non réduits à un point.
En général, f est une fonction de I vers $\mathbb{R}$.

DÉFINITION

$*$ f est dérivable en $a \in I$ si le taux de variations $T_a : x \mapsto \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ défini sur $I \setminus \{a\}$ admet une limite finie en a, noté alors $f'(a)$, et qui est appelé le nombre dérivé de f en a.

$*$ Dans ce cas, le graphe de f admet pour tangente en a la droite d'équation :

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

Cette droite est celle qui passe par le point $(a, f(a))$ et dont le coefficient directeur est $f'(a)$.

$*$ On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point de I.
Dans ce cas, $f' : x \mapsto f'(x)$ est la fonction dérivée de f, notée aussi $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$.

9▶

Vous devez connaître et utiliser les théorèmes suivants que l'on démontrera plus tard :

THÉORÈME

Toute fonction dérivable est continue. La réciproque est fausse.

THÉORÈME D'OPÉRATIONS SUR LES FONCTIONS DÉRIVABLES EN a :

a) Une somme $f + g$ de fonctions f et g dérivables en a est dérivable en a, et

$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$$

b) Le produit d'une fonction dérivable en a par un scalaire λ est dérivable en a, et :

$$(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$$

c) Un produit fg de fonctions f et g dérivables en a est dérivable en a, et

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

d) La composée $g \circ f$ d'une fonction f dérivable en a et d'une fonction g dérivable en $f(a)$ est dérivable en a, et :

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)).f'(a)$$

e) Le quotient f/g de deux fonctions f et g dérivables en a, g ne s'annulant pas en a, est dérivable, et :

$$(\frac{f}{g})'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$$

f) La réciproque d'une fonction f continue, bijective et dérivable en a, telle que $f'(a) \neq 0$, est dérivable en $b = f(a)$, et :

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$$

Schématiquement : pour f et g dérivables, λ scalaire, et **aux points où les expressions ont un sens** :

$*$ $f+g$ est dérivable et	$(f+g)' = f' + g'$
$*$ λf est dérivable et	$(\lambda f)' = \lambda f'$
$*$ fg est dérivable et	$(fg)' = f'g + fg'$
$*$ $\dfrac{f}{g}$ est dérivable et	$(\dfrac{f}{g})' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$
$*$ $g \circ f$ est dérivable et	$(g \circ f)' = (g' \circ f).f'$
$*$ f^{-1} est dérivable et	$(f^{-1})' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$

10▸

Pratique 3 :

Domaine de définition, de dérivabilité et dérivée de : $x \mapsto x^2 \cos(2x) + \mathrm{e}^{\sin(5x)/(2x-1)}$

Théorème de prolongement du caractère C^1 :

Soit f une fonction numérique continue sur $[a,b]$ et de classe C^1 sur $]a,b]$.

Si f' admet une limite finie l en a, alors f est C^1 sur $[a,b]$ et $f'(a) = l$.

Si $f'(a)$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ en a, alors f n'est pas dérivable en a et la tangente au graphe en $(a, f(a))$ est verticale.

11▸

Dérivées d'ordres supérieurs : on pose $f^{(0)} = f$, puis, si c'est possible, successivement pour $k \in \mathbb{N}^*$, $f^{(k)} = (f^{(k-1)})'$. Pour k donné, $f^{(k)}$ est la dérivée k-ième (ou d'ordre k) de f, et on dit que f est dérivable k fois. On note aussi f', f'', et f''' plutôt que $f^{(1)}$, $f^{(2)}$ et $f^{(3)}$.

Les propriétés établies sur les fonctions dérivées s'adaptent aux dérivées supérieures.

I.7 Dérivation, monotonie et extrema

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et dérivable sur l'intérieur $\overset{\circ}{I}$ de I.

* *f est constante sur I si, et seulement si, $f' = 0$ sur $\overset{\circ}{I}$.*
* *f est croissante sur I si, et seulement si, $f' \geqslant 0$ sur $\overset{\circ}{I}$.*
* *f est décroissante sur I si, et seulement si, $f' \leqslant 0$ sur $\overset{\circ}{I}$.*
* *f est strictement croissante sur I si, et seulement si,*
  ($f' \geqslant 0$ sur $\overset{\circ}{I}$ et I ne contient pas d'intervalle non réduit à un point où $f' = 0$).
* *f est strictement décroissante sur I si, et seulement si,*
  ($f' \leqslant 0$ sur $\overset{\circ}{I}$ et I ne contient pas d'intervalle non réduit à un point où $f' = 0$).

12▸

Que se passe-t-il aux points de I où f' s'annule ?

Théorème

> *Soit f une fonction dérivable sur $I = (a, b)$.*
>
> *$*$ Si c est un point intérieur de I et que f admet un extremum en c, alors $f'(c) = 0$ (c est un point critique de f).*
>
> *$*$ La réciproque est fausse : $f'(c) = 0$ n'implique pas que f admette un extremum en c.*
>
> *$*$ Par ailleurs, si a (ou b) appartient à I, f peut admettre un extremum en a (ou b) sans que f' ne soit nulle en ce point.*

13▶

Que se passe-t-il aux points de I où f'' s'annule ?

Définition

> *Si f'' est définie et change de signe en un point intérieur x_0 à I, ou encore que f' admet un extremum en x_0, on dit que x_0 est un point d'inflexion pour f.*
> *Géométriquement, la concavité du graphe de f change de sens au point d'abscisse x_0.*

14▶

I.8 Variations

Avant la construction du graphe de f, on dessine son tableau des variations : il schématise notamment les intervalles de monotonie constituant le domaine d'étude.
On indique aussi les extrema, les limites et valeurs aux points y figurant.

15▶

I.9 Branches infinies

On termine l'étude de f par celle des branches infinies.

$*$ Si $f(x)$ tend vers $\pm\infty$ quand x tend vers $x_0 \in \overline{I}$, le graphe admet une **asymptote verticale** d'équation $x = x_0$.

$*$ Si $f(x)$ tend vers une limite l finie quand x tend vers $+\infty$ (ou $-\infty$), le graphe admet une **asymptote horizontale** d'équation $y = l$.

$*$ Si $f(x)$ tend vers ∞ quand x tend vers $+\infty$, on étudie $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ quand $x \to +\infty$:

- si $\dfrac{f(x)}{x}$ tend vers 0, le graphe admet une **branche parabolique dans la direction** $(0x)$ **(horizontale)**
- si $\dfrac{f(x)}{x}$ tend vers l'infini, le graphe admet une **branche parabolique dans la direction** $(0y)$ **(verticale)**
- si $\dfrac{f(x)}{x}$ tend vers a fini, on étudie $x \mapsto f(x) - ax$:
  - si $f(x) - ax$ tend vers b fini quand x tend vers $+\infty$, $y = ax + b$ est **asymptote oblique**
  - si $f(x) - ax$ tend vers ∞, le graphe admet une **branche parabolique dans la direction** $y = ax$

Même terminologie quand x tend vers $-\infty$.

16▶

II Les fonctions usuelles réelles

II.1 Fonctions affines

Définition

Fonction affine : toute fonction de type $x \mapsto ax+b$ avec a et b deux réels.

Le graphe de $f : x \mapsto ax+b$ définie sur $\mathbb{R}$ est la droite de coefficient directeur a (dirigée par le vecteur de coordonnées $(1,a)$) et d'ordonnée à l'origine b.

Pour tout x et x_0 réels, $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$: le graphe de f est sa propre tangente en tout point !

⚠ Pour $x_1 \neq x_2$, la droite passant par les points $(x_1, f(x_1))$ et $(x_2, f(x_2))$ a pour équation :

$$y = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1)$$

17▶

Pratique 4 :

Tracer les droites d'équation : a) $y = 2x+1$ b) $y = -2x+1$ c) $x = 2$ d) $y = -2$

II.2 Fonctions polynomiales

Définition

Fonction polynomiale : toute fonction de type $x \mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ définie sur $\mathbb{R}$, où les a_i sont des réels et n un naturel (son degré si $a_n \neq 0$).

Fonction rationnelle : toute fonction quotient de deux fonctions polynomiales.

18▶

Pour étudier la limite en ∞ : on factorise numérateur et dénominateur par le terme prépondérant (de plus grand exposant)

II.3 Fonctions racines

Soit n un entier tel que $n \geqslant 2$.

Définition

$*$ *Si n pair, l'application $x \mapsto x^n$ est bijective strictement croissante de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$; sa fonction réciproque est appelée fonction racine n-ième et notée : $x \mapsto \sqrt[n]{x}$*

$*$ *Si n est impair, l'application $x \mapsto x^n$ est bijective strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$; sa fonction réciproque est appelée fonction racine n-ième et notée : $x \mapsto \sqrt[n]{x}$*

Remarques :

a) Pour $x \geqslant 0$, on note aussi $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$

b) Le graphe de $\sqrt[n]{}$ se déduit de celui de $x \mapsto x^n$ par symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$.

PROPOSITION

$\sqrt[n]{\ }$ est continue, strictement croissante et dérivable sur son domaine sauf en 0, de dérivée :

$$x \mapsto \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}}$$

19▶

Pratique 5 :

Tracer les graphes de $x \mapsto x^4$ et $x \mapsto \sqrt[4]{x}$.

PROPOSITION

Soit p et q deux naturels, $p \geqslant 2$, $q \geqslant 2$, et x et y réels tels que ce qui suit ait un sens :

$*$ $\sqrt[p]{xy} = \sqrt[p]{x}\sqrt[p]{y}$ $\quad$ $*$ $\sqrt[p]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[p]{x}}{\sqrt[p]{y}}$ $\quad$ $*$ $\sqrt[q]{\sqrt[p]{x}} = \sqrt[pq]{x}$ $\quad$ $*$ $\sqrt[q]{x^p} = (\sqrt[q]{x})^p$

$*$ **Régle de croissances comparées** *:* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[p]{x}}{x} = 0.$

(On dit que $\sqrt[n]{\ }$ est négligeable devant $x \mapsto x$ au voisinage de $+\infty$.)

20▶

DÉFINITION

(Puissance rationnelle) Soit $r = \frac{p}{q}$ un rationnel avec $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$.

Pour $x > 0$, on pose : $x^r = x^{p/q} = \sqrt[q]{x^p}$

21▶

II.4 Fonctions logarithmes

On admet le théorème suivant :

THÉORÈME FONDAMENTAL DE L'ANALYSE :

Toute fonction continue $f : I \to \mathbb{R}$ admet des primitives, et deux primitives sur l'intervalle I diffèrent d'une constante.

Pour $a \in I$ quelconque, ces primitives sont définies sur I par : $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + cste$.

DÉFINITION

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Son unique primitive qui s'annule en 1 est appelée logarithme népérien et notée $\ln$:

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(x) = \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

$\ln$ *est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$*

Proposition

$\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est un morphisme de groupes, c'est-à-dire :

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \qquad \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$$

En particulier, pour $x > 0$, $y > 0$ et $n \in \mathbb{Z}$:

$$\ln(\tfrac{x}{y}) = \ln(x) - \ln(y) \qquad \text{et} \qquad \ln(x^n) = n\ln(x)$$

22▶

Proposition

$\ln$ est une bijection strictement croissante qui tend vers $+\infty$ en $+\infty$, et vers $-\infty$ en 0^+.
En particulier, il existe un unique réel noté e, tel que $\ln(\mathrm{e}) = 1$, appelé base du logarithme népérien. ($\mathrm{e} = 2,718...$)

Régle de croissances comparées : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ *et* $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$

($\ln$ est négligeable devant $x \mapsto x$ au voisinage de $+\infty$ et devant $1/x$ en 0^+.)

23▶

Définition

Soit $a > 0$, $a \neq 1$. On appelle fonction logarithme de base a : $\left|\begin{array}{rcl} \log_a : \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)} \end{array}\right.$

En particulier si $a = 10$, $\log_{10}$ est la fonction logarithme décimal $\log$.

Le graphe de $\log_a$ se déduit de celui de ln par dilatation/contraction et symétrie.

Propriétés

∗ Pour tout x et y dans $\mathbb{R}_+^*$ et n entier relatif :
$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y) \qquad \log_a(\frac{x}{y}) = \log_a(x) - \log_a(y) \qquad \log_a(x^n) = n\log_a(x)$

∗ $\log_a(a) = 1$ et $\log_a(1) = 0$

∗ $\log_a$ est décroissante si, et seulement si, $0 < a < 1$, croissante sinon.

∗ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\log_a(x)}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} x\log_a(x) = 0$

∗ Formule de changement de base : $\log_b = \log_b(a)\log_a$

24▶

II.5 Fonction exponentielle

Définition

$\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est une bijection dérivable et strictement croissante.
Sa réciproque est appelée fonction exponentielle et notée $\exp$.

Proposition

∗ $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ est une bijection strictement croissante, dérivable de dérivée elle-même.

∗ $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$

∗ $\exp$ est un morphisme de groupes : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$

∗ $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp(-x) = 1/\exp(x)$

∗ $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\exp(nx) = (\exp(x))^n$

*∗ **Régles de croissances comparées** : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\exp(x)}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x\exp(x) = 0$*

25▶

II.6 Fonctions puissances (réelles)

Définition

Soit a un réel.
La fonction p_a (puissance a) est définie de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ par : $x \mapsto x^a = \exp(a\ln(x))$
Cette fonction coïncide pour a rationnel avec la fonction puissance rationnelle déjà vue.
En particulier : $\forall a \in \mathbb{R}$, $\exp(a) = \mathrm{e}^a$

Remarque :

∗ Si a est un rationnel r, on retrouve la définition de $x \mapsto x^r$. Si $r = 1/p$, on retrouve $\sqrt[p]{\ }$.

∗ Toujours revenir à $a^b = \exp(b\ln(a))$ lorsque b est réel, a^b n'étant qu'une notation.

Proposition

Soit x et y des réels strictements positifs, a et b des réels. Alors :

∗ $x^a y^a = (xy)^a \quad x^a x^b = x^{a+b} \quad (x^a)^b = x^{ab} \quad 1^a = 1 \quad x^0 = 1 \quad \ln(x^a) = a\ln(x)$

∗ p_a est dérivable de dérivée ap_{a-1} : $p_a'(x) = ax^{a-1}$

∗ p_a est strictement croissante si $a > 0$, strictement décroissante si $a < 0$, et constante de valeur 1 si $a = 0$.

26▶

Les régles de croissances comparées qui suivent englobent les précédentes et sont fondamentales :

Règles de croissances comparées : Pour a et b réels strictement positifs :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln(x))^a}{x^b} = 0 \qquad \lim_{x\to 0^+} x^a|\ln(x)|^b = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{ax}}{x^b} = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{ax}|x|^b = 0$$

27▶

Pratique 6 :

Tracer le graphe de : $x \mapsto x^x$

II.7 Fonctions trigonométriques circulaires et leurs réciproques

Les fonctions sin, cos et tan sont à revoir dans le chapitre des nombres complexes et le formulaire de trigonométrie circulaire.

28▶

Proposition

- $*$ sin *est indéfiniment dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et de dérivée* cos *:*
  $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin'(x) = \cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ *et pour* n *naturel :* $\sin^{(n)}(x) = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$
- $*$ cos *est indéfiniment dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et de dérivée* $-\sin$ *:*
  $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos'(x) = -\sin(x) = \cos(x + \frac{\pi}{2})$ *et pour* n *naturel :* $\cos^{(n)}(x) = \cos(x + n\frac{\pi}{2})$
- $*$ tan *est indéfiniment dérivable sur son domaine et :* $\tan' = 1 + \tan^2 = \dfrac{1}{\cos^2}$

29▶

Définition

$*$ *La fonction* sin *induit une bijection dérivable et strictement croissante de* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *sur* $[-1, 1]$.
La bijection réciproque est appelée $\boxed{\textit{arc sinus}}$ *et notée* $\mathrm{Arcsin} : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
Elle est continue et strictement croissante, et dérivable sur $]-1, 1[$ *de dérivée :* $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

$*$ *La fonction* cos *induit une bijection dérivable et strictement décroissante de* $[0, \pi]$ *sur* $[-1, 1]$.
La bijection réciproque est appelée $\boxed{\textit{arc cosinus}}$ *et notée* $\mathrm{Arccos} : [-1, 1] \to [0, \pi]$
Elle est continue, strictement décroissante, dérivable sur $]-1, 1[$ *de dérivée :* $x \mapsto -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

$*$ *La fonction* tan *induit une bijection dérivable et strictement croissante de* $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ *sur* $\mathbb{R}$.
La bijection réciproque est appelée $\boxed{\textit{arc tangente}}$ *et notée* $\mathrm{Arctan} : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$
Elle est continue, strictement croissante, dérivable sur $\mathbb{R}$ *de dérivée :* $x \mapsto \dfrac{1}{1 + x^2}$

30▶

Propriétés

1) Pour $x \in [-1, 1]$:
   $\mathrm{Arcsin}\, x$ est l'unique élément de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ dont le sinus est x,
   $\mathrm{Arccos}\, x$ est l'unique élément de $[0, \pi]$ dont le cosinus est x.
2) Pour x réel, $\mathrm{Arctan}\, x$ est l'unique élément de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ dont la tangente est x.
3) Pour tout $x \in [-1, 1]$: $\sin(\mathrm{Arcsin}(x)) = x$ et $\cos(\mathrm{Arccos}(x)) = x$.
   Pour tout x réel : $\tan(\mathrm{Arctan}(x)) = x$.
4) En revanche : $\mathrm{Arcsin}(\sin(x)) = x$ est vrai seulement pour $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\mathrm{Arccos}(\cos(x)) = x$ pour $x \in [0, \pi]$, $\mathrm{Arctan}(\tan(x)) = x$ pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
   On se ramène à ces situations en utilisant les périodicités pour résoudre les autres cas.
5) Arcsin et Arctan sont impaires.
6) $\forall x \in [-1, 1]$, $\mathrm{Arcsin}\, x + \mathrm{Arccos}\, x = \frac{\pi}{2}$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\mathrm{Arctan}\, x + \mathrm{Arctan}(\frac{1}{x}) = \mathrm{sgn}(x)\frac{\pi}{2}$

31▶

Pratique 7 :

1. Calculer l'arc sinus et l'arc cosinus de 0, $\pm 1/2$, $\pm\sqrt{2}/2$, $\pm\sqrt{3}/2$, ± 1.

2. Calculer l'arc tangente de 0, ± 1, $\sqrt{3}$, $-1/\sqrt{3}$.

3. Calculer $\operatorname{Arcsin}(\sin(\frac{21\pi}{5}))$, $\operatorname{Arccos}(\cos(\frac{7\pi}{4}))$ et $\operatorname{Arctan}(\tan(\frac{8\pi}{3}))$.

4. Simplifier $\cos(\operatorname{Arcsin} x)$ et $\sin(\operatorname{Arccos} x)$ pour $x \in [-1, 1]$.

5. Simplifier $\cos(\operatorname{Arctan} x)$ et $\sin(\operatorname{Arctan} x)$ pour x réel.

II.8 Fonctions trigonométriques hyperboliques

DÉFINITION

$*$ *Fonction* **cosinus hyperbolique** *:* $\begin{array}{|rcl} \operatorname{ch} : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \end{array}$

$*$ *Fonction* **sinus hyperbolique** *:* $\begin{array}{|rcl} \operatorname{sh} : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \end{array}$

$*$ *Fonction* **tangente hyperbolique** *:* $\begin{array}{|rcl} \operatorname{th} : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \end{array}$

On note aussi $\operatorname{coth} = 1/\operatorname{th}$.

32▶

PROPRIÉTÉS

1) ch et sh sont respectivement les parties paires et impaires de l'exponentielle.
En particulier $\exp = \operatorname{ch} + \operatorname{sh}$.

2) $\forall x \in \mathbb{R}$: $\boxed{\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1.}$ En particulier $\operatorname{ch}(0) = 1$ et $\operatorname{sh}(0) = 0$.

3) ch, sh et th sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et : $\operatorname{sh}' = \operatorname{ch}$, $\operatorname{ch}' = \operatorname{sh}$, $\operatorname{th}' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2} = 1 - \operatorname{th}^2$.

4) ch est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$; sh et th sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}$.

5) L'hyperbole d'équation cartésienne : $x^2 - y^2 = 1$ se paramètre par : $\begin{cases} x = \pm\operatorname{ch}(t) \\ y = \operatorname{sh}(t) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$.

6) **Régles de croissances comparées** :

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\operatorname{ch} x}{x} = -\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{\operatorname{sh} x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\operatorname{ch} x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\operatorname{sh} x}{x} = +\infty.$$

33▶

Remarques :

Formellement, pour x réel, on a $\cos(x) = \operatorname{ch}(ix)$ et $\operatorname{ch}(x) = \cos(ix)$, $\sin(x) = -i\operatorname{sh}(ix)$ et $\operatorname{sh}(x) = -i\sin(ix)$, ce qui permet de retrouver les formules trigonométriques hyperboliques depuis les formules trigonométriques circulaires, souvent identiques à quelques signes près...
Par exemple : $\operatorname{ch}(x + y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$ et $\operatorname{sh}(x + y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y$.

Pratique 8 :

Tracer les graphes de $x \mapsto \operatorname{ch}(2x)$, $x \mapsto 2\operatorname{sh}(x)$ et $x \mapsto 3\operatorname{th}(2x)$.

II.9 La fonction exponentielle complexe

Rappel : pour tout complexe z écrit $z = a + \mathrm{i}b$ sous forme algébrique :

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^a\mathrm{e}^{\mathrm{i}b} = \mathrm{e}^a(\cos(b) + \mathrm{i}\sin(b))$$

Définition

> *Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs complexes.*
>
> *On dit que f est dérivable sur I si ses fonctions parties réelles et imaginaires le sont.*
> *On pose alors : $f' = (\Re\mathrm{e}(f))' + \mathrm{i}(\Im\mathrm{m}(f))'$.*

On vérifie alors aisément que les théorèmes d'opérations sur les fonctions dérivables vues en I.6 se généralisent lorsqu'ils ont un sens : une combinaison linéaire, un produit, un quotient de fonctions dérivables à valeurs complexes est dérivable, avec les mêmes régles de calculs.

En particulier :

Proposition

> *Soit φ une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs complexes, alors $x \mapsto \mathrm{e}^{\varphi(x)}$ est dérivable sur I et de dérivée $x \mapsto \varphi'(x)\mathrm{e}^{\varphi(x)}$.*
>
> *En particulier, pour $a \in \mathbb{C}$, la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $x \mapsto a\mathrm{e}^{ax}$.*

34▶

Pratique 9 :

Calculer la dérivée de : $x \mapsto \mathrm{e}^{x+\mathrm{i}x^2}$.

SAVOIR...

(1) *... faire l'étude d'une fonction numérique en vue de tracer son graphe : recherche du domaine de définition, du domaine d'étude après avoir répertorié les propriétés de périodicité, symétries et parité, tableau de variations avec intervalles de monotonies et extrema, limites aux bornes et asymptotes*

(2) *... les définitions, propriétés, dérivées et graphes des fonctions usuelles*

(3) *... utiliser fonctions et fonctions réciproques sans erreur (sin(Arsin), Arcin(sin), etc.)*

(4) *... les règles de croissances comparées ! !*

(5) *... résoudre le problème d'une forme indéterminée par une des trois pistes suivantes :*

a) Factoriser partout où c'est possible les termes prépondérants

b) Faire apparaître le taux de variation d'une fonction en un point et faire le lien avec une dérivée connue

c) Relier la difficulté à une règle de croissances comparées (mélange ln, exp, polynôme)