Chapitre 18 : APPLICATIONS LINÉAIRES - MATRICES

Dans tout ce chapitre, sauf précision, $(E, +, .)$, $(F, +, .)$ et $(G, +, .)$ désignent des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et I est un ensemble.

I Qu'est-ce qu'une application linéaire ?

Définition

Une application u de E vers F est **linéaire** *si :*

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ u(\lambda x + \mu y) = \lambda.u(x) + \mu.u(y)$$

On dit aussi que u est un **morphisme d'espaces vectoriels***.*

L'ensemble de ces applications linéaires est noté $\mathcal{L}(E, F)$.

Un **isomorphisme** *entre E et F est une application linéaire de E vers F bijective.*

Quand $E = F$, on note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans E, appelées aussi **endomorphismes** *de E.*

Un endomorphisme bijectif est un **automorphisme***. Leur ensemble est noté $GL(E)$.*

Quand $F = \mathbb{K}$, on note $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ l'ensemble des **formes linéaires** *sur E.*

1▶

Proposition : Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $u(0_E) = 0_F$.

2▶

Théorème

Une application linéaire est déterminée par les images des éléments d'une base de E.

3▶

II Représentation matricielle

II.1 Lien endomorphisme-matrice

Dans ce paragraphe : E et F sont de dimensions finies respectives p et q, et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

$(e) = (e_1, \ldots, e_p)$ désigne une base de E et $(f) = (f_1, \ldots, f_q)$ une base de F.

4▶

Définition

La matrice associée à la famille finie $(u(e_1), \dots, u(e_p))$ relativement à la base (f) s'appelle **matrice représentative de** u *entre les bases* (e) *et* (f).

On la note : $\mathrm{Mat}_{(e),(f)}(u)$

Cette matrice $M = [m_{i,j}]_{\substack{1\leqslant i\leqslant q\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ *comporte* q *lignes et* p *colonnes.*

Sa colonne d'indice j *est formée des coordonnées de* $u(e_j)$ *exprimé dans la base* (f).

On a donc pour tout $j \in [\![1,p]\!]$: $u(e_j) = \sum_{i=1}^{q} m_{i,j} f_i$

Mécaniquement, on obtient les coordonnées de $y = u(x)$ *sur* (f) *à partir celles de* x *sur* (e) :

on pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ *le vecteur de* $\mathbb{K}^p$ *des coordonnées de* x *dans* (e) : $x = \sum_{j=1}^{p} x_j e_j$,

on pose $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_q \end{pmatrix}$ *le vecteur de* $\mathbb{K}^q$ *des coordonnées de* $y = u(x)$ *dans* (f) : $y = \sum_{i=1}^{q} y_i f_i$,

alors $Y = MX$ *se calcule en « multipliant » la ligne* i *de* M *par la colonne* X

pour donner, pour $i \in [\![1,q]\!]$: $y_i = \sum_{j=1}^{p} m_{i,j} x_j$

L'ensemble de ces matrices à q *lignes et* p *colonnes est noté* $\mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$.

5▶

Pratique 1 :

1. Donner la matrice représentative de l'identité puis d'une homothétie de $\mathbb{K}^p$ sur une base. Que remarque-t-on ?

2. Donner la matrice représentative sur la base (e) de E de la forme coordonnée relativement au i-ème vecteur de la base (e) de E (on munit toujours $\mathbb{K}$ de la base (1)).

3. Quelle est l'application linéaire représentée sur la base canonique de $\mathbb{R}^2$ par $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$?

4. Donner la matrice représentative sur la base canonique de l'endomorphisme dérivation de l'ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degrés inférieurs ou égaux à n (naturel).
Faire de même pour la dérivation vue de $\mathbb{K}_n[X]$ dans $\mathbb{K}_{n-1}[X]$, toujours entre les deux bases canoniques de ces espaces.

II.2 Restriction, corestriction, endomorphisme induit

Proposition

Les applications de restrictions et de corestrictions à des sous-espaces vectoriels transforment, quand elles sont définies, une application linéaire en une autre, et sont des opérations linéaires.

6▶

THÉORÈME

Une application linéaire est déterminée par ses restrictions aux termes d'une décomposition en somme directe de l'espace de départ.

7▶

III Opérations

THÉORÈME

* $(\mathcal{L}(E,F),+,.)$ *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$.

ce qui signifie que sommer deux applications linéaires ou multiplier une application linéaire par un scalaire donne encore une application linéaire.

* *La composée (si possible) de deux applications linéaires est une application linéaire.*
* $(\mathcal{L}(E),+,.,\circ)$ *est une algèbre sur* $\mathbb{K}$.

8▶

DÉFINITION

* *On munit* $\mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ *des opérations suivantes :*

  addition : $(M+N)_{i,j} = M_{i,j} + N_{i,j}$

  multiplication par un scalaire : $(\lambda.M)_{i,j} = \lambda M_{i,j}$

  où M *et* N *sont deux matrices de* $\mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$
* **Le produit** $N \times M$ *de* $N \in \mathcal{M}_{r,q}(\mathbb{K})$ *et de* $M \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ *est défini par :*

$$\boxed{(N \times M)_{i,j} = \sum_{k=1}^{q} N_{i,k}M_{k,j}, \quad \text{pour } i \in [\![1,r]\!] \text{ et } j \in [\![1,p]\!]}$$

9▶

PROPOSITION

* *Soit* $u \in \mathcal{L}(E,F)$, $v \in \mathcal{L}(E,F)$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$, *et soit* (e) *une base de* E *et* (f) *une base de* F.

On pose $M = \mathrm{Mat}_{(e),(f)}(u)$ *et* $N = \mathrm{Mat}_{(e),(f)}(v)$. *Alors*

$$\mathrm{Mat}_{(e),(f)}(u+v) = M+N \quad \text{et} \quad \mathrm{Mat}_{(e),(f)}(\lambda u) = \lambda\,\mathrm{Mat}_{(e),(f)}(u)$$

* *Soit* $u \in \mathcal{L}(E,F)$ *et* $v \in \mathcal{L}(F,G)$, *soit* (e), (f) *et* (g) *des bases respectives de* E, F *et* G.

On pose $M = \mathrm{Mat}_{(e),(f)}(u)$ *et* $N = \mathrm{Mat}_{(f),(g)}(v)$. *Alors*

$$\mathrm{Mat}_{(e),(g)}(v \circ u) = NM$$

En particulier, si $\dim E = p$ *et* $\dim F = q$ *:*

$u \mapsto \mathrm{Mat}_{(e),(f)}(u)$ *est un isomorphisme entre* $(\mathcal{L}(E,F),+,.)$ *et* $(\mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K}),+,.)$, *et*

$u \mapsto \mathrm{Mat}_{(e)}(u)$ *est un isomorphisme d'algèbres entre* $(\mathcal{L}(E),+,.,\circ)$ *et* $(\mathcal{M}_p(\mathbb{K}),+,.,\times)$.

⚠ Attention aux correspondances des bases ! !

La multiplication, comme la composition, n'est pas commutative !

L'équation $v \circ u = 0$ n'implique pas v ou u nulle, mais équivaut à $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} v$!

L'équation $NM = 0$ n'implique pas M ou N nulle, mais équivaut à $\operatorname{Im} M \subset \operatorname{Ker} N$!

10▶

> **Pratique 2** :
>
> **1.** Calculer M^2 puis M^n pour n naturel avec $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
>
> **2.** Obtenir la solution rapidement en écrivant $M = \mathrm{I}_2 + J$ et en calculant J^2.

Outils supplémentaires :

1) **La transposition** : si $M \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K}) = [m_{i,j}]$, on pose ${}^{\mathrm{t}}M = [m_{j,i}]$ qui appartient à $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

Pour tout couple de matrices (A, B) de produit AB carrée, $\boxed{{}^{\mathrm{t}}(AB) = {}^{\mathrm{t}}B\,{}^{\mathrm{t}}A}$

2) **Le produit « par blocs »** : Soit $M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)$ et $N = \left(\begin{array}{c|c} E & F \\ \hline G & H \end{array}\right)$, où

$A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,s}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{r,q}(\mathbb{K})$, $D \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{K})$, $E \in \mathcal{M}_{q,t}(\mathbb{K})$, $F \in \mathcal{M}_{q,u}(\mathbb{K})$, $G \in \mathcal{M}_{s,t}(\mathbb{K})$ et $H \in \mathcal{M}_{s,u}(\mathbb{K})$.

Le produit MN se calcule « naturellement » : $MN = \left(\begin{array}{c|c} AE + BG & AF + BH \\ \hline CE + DG & CF + DH \end{array}\right)$

Ceci se généralise à tout découpage par blocs compatibles (l'écriture naturelle a un sens).

11▶

> **Pratique 3** :
>
> Montrer par récurrence sur la taille de la matrice, et en utilisant des écritures par blocs, que le produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure.

Qu'en est-il des applications linéaires bijectives et de l'inversion ?

Théorème

Soit u un isomorphisme de E vers F. Alors $\boxed{u^{-1} \text{ est linéaire}}$ (et bijective).

Si E et F sont de dimensions finies et si $M = \operatorname{Mat}_{(e),(f)}(u)$,

alors M est inversible et $\boxed{\operatorname{Mat}_{(f),(e)}(u^{-1}) = M^{-1}}$.

En particulier $(\mathrm{GL}(E), \circ)$ est un groupe, appelé **groupe linéaire de** E*, ou groupe des automorphismes de E.*

12▶

Théorème

* $*$ *Une matrice triangulaire est inversible si, et seulement si, ses éléments diagonaux sont tous non nuls.*

* $*$ *L'inverse d'une matrice diagonale inversible est diagonale. Ses éléments diagonaux sont terme à terme les inverses de ceux de la matrice de départ.*

* $*$ *L'inverse d'une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure) inversible est triangulaire supérieure (resp. inférieure). Ses éléments diagonaux sont terme à terme les inverses de ceux de la matrice de départ.*

* $*$ *La transposée d'une matrice inversible M est inversible, et :* $({}^{\mathrm{t}}M)^{-1} = {}^{\mathrm{t}}(M^{-1})$

13▸

IV Les endomorphismes incontournables

$(E, +, .)$ est un espace vectoriel sur lequel agissent les endomorphismes qui suivent.

IV.1 Homothéties

Définition

L'homothétie vectorielle de rapport $\lambda \in \mathbb{K}$ est l'endomorphisme de E : $x \mapsto \lambda x$

Si E est de dimension p finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ est l'homothétie de rapport λ si, et seulement si, sa matrice représentative sur une base quelconque de E est la matrice diagonale $\lambda\,\mathrm{I}_p$.

14▸

Proposition

L'ensemble des homothéties de rapports non nuls, muni de la composition, forme un sous-groupe de $(GL(E), \circ)$.

15▸

IV.2 Projections

Théorème Définition :

On suppose $E = E_1 \oplus E_2$, donc tout vecteur x de E s'écrit de manière unique sous la forme

$$x = x_1 + x_2, \quad \text{avec } (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$$

La **projection vectorielle (ou projecteur)** *sur E_1 parallèlement à E_2 est l'endomorphisme*

$$\left| \begin{array}{rcl} p \;:\; E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x_1 \end{array} \right.$$

On a alors les propriétés suivantes :

a) p est **idempotent** *: $p \circ p = p$*

b) $E = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p$, et pour tout $x \in E$: $x = p(x) + (x - p(x))$
où $p(x) \in \operatorname{Im} p = E_1$ et $x - p(x) \in \operatorname{Ker} p = E_2$

c) $\operatorname{Im} p = \{x \in E \mid p(x) = x\} = \operatorname{Ker}(p - \mathrm{Id}_E)$

Inversement, les endomorphismes idempotents de E sont exactement les projecteurs de E.

16▶

Projecteurs et sommes directes :

Supposons $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$. En notant p_i le projecteur sur E_i parallèlement à $\bigoplus_{\substack{j\neq i\\ j=1}}^{p} E_j$, on a

a) $\forall x \in E,\ x = \sum_{i=1}^{p} p_i(x)$ b) $p_i \circ p_j = \delta_{i,j}\, p_i$ c) $\sum_{i=1}^{p} p_i = \mathrm{Id}_E$

17▶

> **Pratique 4** :
>
> **1.** Dans $\mathbb{R}^2$ muni de la base canonique (i, j), donner les deux matrices relativement aux deux bases (i, j) et $(i + j, i - j)$ des deux projecteurs associés à la décomposition
>
> $$\mathbb{R}^2 = \mathrm{Vect}(i + j) \oplus \mathrm{Vect}(i - j)$$
>
> **2.** On se place dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer que l'application p qui à f associe sa partie paire est une projection. Comment agit la projection $\mathrm{Id} - p$?

IV.3 Symétries

Théorème Définition :

On suppose $E = E_1 \oplus E_2$, donc tout vecteur x de E s'écrit de manière unique sous la forme

$$x = x_1 + x_2, \quad \textit{avec } (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$$

La **symétrie** *vectorielle par rapport à E_1 et parallèlement à E_2 est l'endomorphisme*

$$s\ :\ x \mapsto x_1 - x_2$$

On a alors les propriétés suivantes :

a) s est une **involution** *: $s \circ s = \mathrm{Id}_E$*

b) $E = Inv(s) \oplus Opp(s)$ et pour tout $x \in E$: $x = \frac{1}{2}(x + s(x)) + \frac{1}{2}(x - s(x))$, où

c) $Inv(s) = E_1 = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E) = \{x \in E \mid s(x) = x\}$
et $Opp(s) = E_2 = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E) = \{x \in E \mid s(x) = -x\}$

Inversement, les involutions de E sont exactement les symétries vectorielles de E.

18▶

Proposition

Symétries et projections vectorielles de E sont associées via les relations :

$$s = 2p - \mathrm{Id}_E \qquad \textit{ou} \qquad p = \frac{1}{2}(s + \mathrm{Id}_E)$$

avec : $Inv(s) = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Im}\, p$ et $Opp(s) = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Ker}\, p$

19▶

Pratique 5 :

Vérifier que la transposition définit une symétrie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Donner sa base (éléments invariants) et sa direction (éléments changés en leurs opposés), ainsi que leurs dimensions.

IV.4 Endomorphismes nilpotents

DÉFINITION

> *$u \in \mathcal{L}(E)$ est un endomorphisme nilpotent s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$.*
>
> *La plus petite puissance annulant u s'appelle l'indice de u.*

20▶

Pratique 6 :

Quel est l'indice de nilpotence de l'endomorphisme nul ? De la dérivation sur $\mathbb{K}_n[X]$?

PROPOSITION

> *L'indice d'un endomorphisme nilpotent u de E est inférieur ou égal à la dimension de E.*
>
> *En particulier, si E est de dimension p finie : $u^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$*

21▶

Pratique 7 :

Retrouver ce résultat par récurrence matricielle dans le cadre de la dimension finie.

V Applications linéaires et sous-espaces vectoriels

V.1 Image d'un sous-espace vectoriel

DÉFINITION

> *L'image directe par une application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ de tout sous-espace vectoriel de E est un sous-espace vectoriel de F.*
>
> *En particulier, on note : $\boxed{\operatorname{Im} u = u(E)}$, qui est un sous-espace vectoriel de F.*
>
> *L'image directe par une matrice M de $\mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ de tout sous-espace vectoriel E_1 de $\mathbb{K}^p$ est par définition $u(E_1)$ où $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^q)$ est canoniquement associé à M. On la note $ME_1 = u(E_1)$.*
>
> *En particulier, $\boxed{\operatorname{Im} M = M\mathbb{K}^p = \{MX \mid X \in \mathbb{K}^p\}}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^q$.*

PROPOSITION

> *Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$, pour toute partie X de E on a $u(\operatorname{Vect}(X)) = \operatorname{Vect}(u(X))$.*
>
> *En particulier, si $(e_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice d'un sous-espace vectoriel E_1 de E, alors $(u(e_i))_{i\in I}$ est une famille génératrice de $u(E_1)$.*
>
> *Notamment : $\operatorname{Im}(u)$ est généré par l'image par u de toute famille génératrice de E.*
>
> *Si $M \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$, alors $\operatorname{Im} M = \operatorname{Vect}(C_1, \ldots, C_p)$ où les C_i sont les vecteurs colonnes de M.*

22▶

Pratique 8 :

1. Donner $\mathrm{Im}(u)$, où $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ est représenté sur la base canonique par $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

2. Donner $\mathrm{Im}\, u$ lorsque u est une homothétie, un projecteur, une symétrie.

PROPOSITION

$u \in \mathcal{L}(E, F)$ est surjective si, et seulement si, u vérifie une des conditions équivalentes :

1) $\mathrm{Im}\, u = F$

2) u transforme toutes les familles génératrices $(e_i)_{i \in I}$ de E en des familles $(u(e_i))_{i\in \mathrm{i}}$ génératrices de F

3) il existe une famille génératrice de E transformée par u en une famille génératrice de F

4) si F est de dimension finie : $\dim \mathrm{Im}\, u = \dim F$

23▶

V.2 Image réciproque d'un sous-espace vectoriel

24▶

DÉFINITION

L'image réciproque par une application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ de tout sous-espace vectoriel de F est un sous-espace vectoriel de E.

En particulier, on note : $\boxed{\mathrm{Ker}\, u = u^{-1}(\{0_F\})}$ *, qui est un sous-espace vectoriel de E.*

L'image réciproque par une matrice M de $\mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ de tout sous-espace vectoriel F_1 de $\mathbb{K}^p$ est par définition $u^{-1}(F_1)$ où $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^q)$ est canoniquement associé à M.
On le note $M^{-1}F_1 = u^{-1}(F_1) = \{\, X \in \mathbb{K}^p \mid MX \in F_1 \,\}$.

En particulier, $\boxed{\mathrm{Ker}\, M = \{\, X \in \mathbb{K}^p \mid MX = 0_{\mathbb{K}^q} \,\}}$ *est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$.*

25▶

PROPOSITION

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors u est injective si, et seulement si, une des conditions suivantes équivalentes est réalisée :

1) $\mathrm{Ker}\, u = \{0_E\}$

2) u transforme toutes les familles libres $(e_i)_{i \in I}$ en familles libres $(u(e_i))_{i \in I}$ de F.

26▶

Pratique 9 :

1. Donner $\mathrm{Ker}(u)$, où $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ est représenté sur la base canonique par $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

2. Donner $\mathrm{Ker}\, u$ lorsque u est une homothétie, un projecteur, une symétrie.

3. Quel lien remarquez-vous entre $\mathrm{Ker}\, u$ et $\mathrm{Im}\, u$ dans les exemples précédents ?

V.3 Injectivité, surjectivité, bijectivité, et familles de vecteurs

On résume et on complète les propriétés liant applications linéaires et familles de vecteurs.

Théorème

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

- *u surjective transforme toute famille génératrice de E en une famille génératrice de F.*
  u injective transforme toute famille libre de E en une famille libre de F.
  u bijective transforme toute base de E en une base de F.
- *Si u transforme une famille génératrice de E en une famille génératrice de F, alors u est surjective.*
  Si u transforme une base de E en une famille libre de F, alors u est injective.
  Si u transforme une base de E en une base de F, alors u est bijective.
- *On suppose E et F de dimensions finies.*
  S'il existe une injection de E vers F, alors $\dim E \leqslant \dim F$.
  S'il existe une surjection de E vers F, alors $\dim E \geqslant \dim F$.
  S'il existe une bijection de E vers F, alors $\dim E = \dim F$.

  Réciproquement, deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ de même dimension sont isomorphes.
  En particulier, tout espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension p non nulle est isomorphe à $\mathbb{K}^p$.

27▶

Théorème

Si E et F sont de dimensions finies, $\mathcal{L}(E, F)$ l'est aussi et : $\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim(E)\dim(F)$

En particulier : $\dim E^* = \dim \mathcal{L}(E, \mathbb{K}) = \dim E$

28▶

V.4 Rang d'une application linéaire

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, les espaces vectoriels E et F n'étant pas nécessairement de dimension finies.

Théorème Définition :

Le rang de *u est la dimension de $\operatorname{Im} u$, noté $\operatorname{rg}(u)$ (si elle est définie).*

Si $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in I}$ est une base de E, le rang de u est le rang de la famille $(u(e_i))_{i \in I}$.

Si E est de dimension finie, alors u est de rang fini et $\operatorname{rg}(u) \leqslant \dim(E)$, avec égalité si, et seulement si, u est injective.

Si F est de dimension finie, alors u est de rang fini et $\operatorname{rg}(u) \leqslant \dim(F)$, avec égalité si, et seulement si, u est surjective.

Si E et F sont de dimensions finies, alors le rang de u est le rang d'une matrice représentative de u, c'est-à-dire de la famille finie de ses vecteurs colonnes, et $\operatorname{rg}(u) \leqslant \operatorname{Min}(\dim(E), \dim(F))$.

29▶

Corollaire

Si E et F sont de mêmes dimensions finies, en particulier si $E = F$, alors

u est injective si, et seulement si, u est surjective si, et seulement si, u est bijective.

Dans ce cas, le rang de u est égal à la dimension de l'espace E.

30▶

Pratique 10 :

1. Donner les homothéties, projecteurs, symétries, endomorphismes nilpotents qui sont bijectifs.

2. Soit u un endomorphisme nilpotent. Montrer que $\mathrm{Id}_E - u$ est inversible (remarquer que $\mathrm{Id}_E = \mathrm{Id}_E - u^s$ où s est l'indice de u).

Proposition

- *Soit u et v deux morphismes. Si $v \circ u$ est défini, alors :* $\mathrm{rg}(v \circ u) \leqslant \mathrm{Min}(\mathrm{rg}(u), \mathrm{rg}(v))$

Si u est bijective, alors : $\mathrm{rg}(v \circ u) = \mathrm{rg}(v)$

Si v est bijective, alors : $\mathrm{rg}(v \circ u) = \mathrm{rg}(u)$

- *Soit M et N deux matrices telles que MN soit défini. Alors :* $\mathrm{rg}(MN) \leqslant \mathrm{Min}(\mathrm{rg}(M), \mathrm{rg}(N))$

Si M est inversible, alors : $\mathrm{rg}(MN) = \mathrm{rg}(N)$

Si N est inversible, alors : $\mathrm{rg}(MN) = \mathrm{rg}(M)$

31▶

Pratique 11 :

Donner, sans calcul matriciel, le rang de :

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ **2.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

V.5 Le théorème du rang

Comment construire « naturellement » un isomorphisme à partir d'un morphisme ?

Théorème fondamental :

$u \in \mathcal{L}(E, F)$ induit un isomorphisme de tout supplémentaire E_1 de $\mathrm{Ker}\, u$ dans E sur $\mathrm{Im}\, u$ (c'est $u_{|_{E_1}^{\mathrm{Im}\, u}}$).

32▶

Théorème du rang :

Si E est de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E, F)$, alors : $\dim E = \dim \mathrm{Ker}\, u + \mathrm{rg}(u)$

33▶

Pratique 12 :

Quel est le rang du morphisme $P \mapsto P(X+1) - P(X)$ défini de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$?

V.6 Calcul pratique du rang (rappels), inversion pratique d'une matrice

$*$ **Matrices élémentaires** de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$: $E_{i,j} = [\delta_{k,i}\delta_{l,j}]_{1 \leqslant k \leqslant p, 1 \leqslant l \leqslant q} = \begin{array}{cc} & j \downarrow \\ & \begin{pmatrix} (0) & & (0) \\ & 1 & \\ (0) & & (0) \end{pmatrix} \end{array} \leftarrow i$

$*$ Calcul de base : $\boxed{E_{i,j}E_{k,l} = \delta_{j,k}E_{i,l}}$

$*$ $E_{i,j}.M = E_{i,j}.\begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (0) \\ L_j \\ (0) \end{bmatrix} \leftarrow i,$ $\qquad M.E_{i,j} = [C_1 \dots C_p].E_{i,j} = \begin{array}{c} [(0)\ C_i\ (0)] \\ \uparrow j \end{array},$

et donc $\boxed{E_{i,j}.M.E_{k,l} = m_{j,k}.E_{i,l}}$

34▶

$*$ **Opérations élémentaires** sur les lignes (ou colonnes) et opérations matricielles associées :

(1) $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$ pour $i \neq j$ et α scalaire **(transvection)**
(2) $L_i \leftarrow \alpha L_i$ pour α non nul **(dilatation)**
(3) $L_i \leftrightarrow L_j$ pour $i \neq j$ **(transposition)**

Ces transformations conservent le rang : on ne change pas le rang d'un système de vecteurs en les permutant ou en remplaçant un vecteur par :

$\rightarrow$ un multiple non nul de lui-même,

$\rightarrow$ lui-même plus une combinaison linéaire des autres.

35▶

$*$ **Applications** :

Recherche du rang (systèmes de vecteurs, matrice, application linéaire)

Méthode du pivot de Gauss-Jordan

Recherche de l'inverse d'une matrice inversible par opérations élémentaires sur les lignes

36▶

Pratique 13 :

1. Calculer l'inverse de $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Retrouver l'inverse de $\mathrm{Id}_E - u$ quand u est un endomorphisme nilpotent d'indice $p = \dim E$.

V.7 Caractérisations par le rang

∗ **Caractérisation des morphismes et des matrices de rang** r :

∗ $u \in \mathcal{L}(E,F)$ est de rang r si, et seulement si, il existe une base (e) de E et une base (f) de F telles que : $\mathrm{Mat}_{(e),(f)}(u) = J_r = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_r & (\mathbf{0}) \\ \hline (\mathbf{0}) & (\mathbf{0}) \end{array}\right)$

∗ $M \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ est de rang r si, et seulement si, M est équivalente à : $J_r = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_r & (\mathbf{0}) \\ \hline (\mathbf{0}) & (\mathbf{0}) \end{array}\right)$

37▶

∗ **Caractérisation des morphismes et des matrices de rang** 1 :

∗ Une forme linéaire, ou une matrice ligne, ou colonne, est de rang 1 si, et seulement si, elle est non nulle.

∗ $u \in \mathcal{L}(E,F)$ est de rang 1 si, et seulement si, il existe $y \in F$ non nul et une forme linéaire non nulle f sur E tels que $u = f.y$ (au sens : $\forall x \in E$, $u(x) = f(x).y$)

∗ $M \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ est de rang 1 si, et seulement si, il existe $U \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{K})$ et $V \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, non nuls, tels que $M = U\,{}^{\mathrm{t}}V$.

⚠ Si $q = p$, $U\,{}^{\mathrm{t}}V \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ alors que ${}^{\mathrm{t}}VU \in \mathcal{M}_1(\mathbb{K})$ s'apparente à un scalaire.

38▶

V.8 Relecture de la résolution d'un système linéaire

Résoudre le système linéaire : $AX = B$ avec $A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathbb{K}^q$, d'inconnue $X \in \mathbb{K}^p$,

c'est aussi résoudre l'équation : $u(x) = b$ d'inconnue $x \in \mathbb{K}^p$,
avec $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^q)$ représentée par A sur les bases canoniques (e) de $\mathbb{K}^p$ et f de $\mathbb{K}^q$, x par X sur (e) et b par B sur (f).

Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions.

∗ Si $b \notin \mathrm{Im}\, f$, $\mathcal{S} = \varnothing$.
∗ Si $b \in \mathrm{Im}\, f$, soit x_0 tel que $f(x_0) = b$; alors $\mathcal{S} = x_0 + \mathrm{Ker}\, f$ est le sous-espace affine de $\mathbb{K}^p$ passant par x_0 et de direction $\mathrm{Ker}\, f$.
Si de plus $\mathbb{K}^p = \mathrm{Ker}\, f \oplus E_1$, il existe un unique $x_0 \in E_1$ tel que $\mathcal{S} = x_0 + \mathrm{Ker}\, f$.

39▶

VI Changements de bases - Équivalence - Similitude

Les espaces vectoriels considérés sont de dimensions finies dans ce paragraphe.

VI.1 Changements de bases, calcul matriciel

Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$, (e) et (e') bases de E, (f) et (f') de F,

$M = \mathrm{Mat}_{(e),(f)}(u)$ et $M' = \mathrm{Mat}_{(e'),(f')}(u)$.

Comment passer de M à M' par une formule ?

Théorème Définition :

On note $P = P_{(e)}^{(e')} = \text{Mat}_{(e'),(e)}(\text{Id}_E)$ la **matrice de passage** *de la base (e) à la base (e') de E, obtenue en plaçant en colonne j le vecteur e'_j exprimé dans (e).*

Soit de même $Q = Q_{(f)}^{(f')} = \text{Mat}_{(f'),(f)}(\text{Id}_F)$ la matrice de passage de (f) à (f').

Alors : $\boxed{M' = Q^{-1}MP}$

Corollaire

Si $u \in \mathcal{L}(E)$, si $M = \text{Mat}_{(e)}(u)$ et $M' = \text{Mat}_{(e')}(u)$,

en posant $P = P_{(e)}^{(e')}$ on a : $\boxed{M' = P^{-1}MP}$

Théorème (Changement de coordonnées d'un vecteur) :

Soit $x \in E$, représenté par le vecteur (ou matrice colonne) X de ses coordonnées sur la base (e), et par X' sur (e').

En posant $P = P_{(e)}^{(e')}$ on a : $\boxed{X = PX'}$

40▸

⚠ $M' = Q^{-1}MP$ mais $X = PX'$! Attention à ce que donnent les formules !

Pratique 14 :

Soit u représenté sur la base canonique de $\mathbb{R}^3$ par la matrice M.
On suppose qu'il existe trois vecteurs non nuls vérifiant : $u(e_1) = e_1$, $u(e_2) = 2e_2$ et $u(e_3) = 3e_3$.
Montrer que (e_1, e_2, e_3) forme une base de $\mathbb{R}^3$ et donner la matrice M' représentative de u sur cette base.
On suppose : $e_1 = (1, -1, 0)$, $e_2 = (1, 1, 0)$ et $e_3 = (1, 2, 1)$. Donner la relation liant M et M'.

VI.2 Matrices équivalentes - matrices semblables

Définition

$*$ *Deux matrices M et N de $\mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ sont équivalentes s'il existe deux matrices inversibles $P \in \text{GL}_p(\mathbb{K})$ et $Q \in \text{GL}_q(\mathbb{K})$ telles que $N = QMP$.*

$*$ *Deux matrices carrées M et N de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ sont semblables s'il existe une matrice inversible $P \in \text{GL}_p(\mathbb{K})$ telle que $N = P^{-1}MP$.*

Proposition

$*$ *Deux matrices sont équivalentes si, et seulement si, elles représentent un même* **morphisme** *sur* **quatre bases** *(deux couples de bases formés chacun d'une base de l'espace de départ et d'une base de l'espace d'arrivée).*

$*$ *Deux matrices carrées sont semblables si, et seulement si, elles représentent un même* **endomorphisme** *sur* **deux bases** *(une base de l'espace de départ et une base de l'espace d'arrivée).*

$*$ *Deux matrices semblables sont équivalentes, la réciproque est fausse.*

41▸

THÉORÈME

$*$ $M \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ *est de rang r si, et seulement si, elle est équivalente à*

$$J_r = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_r & \mathbf{0_{r,p-r}} \\ \hline \mathbf{0_{q-r,r}} & \mathbf{0_{q-r,p-r}} \end{array}\right)$$

$*$ $f \in \mathcal{L}(E,F)$ *est de rang r si, et seulement si, il existe une base $\mathcal{B}$ de E et une base de $\mathcal{C}$ de F telles que* $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = J_r = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_r & (\mathbf{0}) \\ \hline (\mathbf{0}) & (\mathbf{0}) \end{array}\right)$.

En particulier, toute matrice a même rang que sa transposée.

$*$ $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ *est de rang p si, et seulement si, elle vérifie une des propriétés équivalentes :*

- elle est inversible

- son noyau est réduit à la matrice colonne nulle

- son image est $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$

- elle est équivalente à la matrice identité.

42▶

Il existe de nombreux «invariants de similitude» : rang, trace, déterminant, ensemble des valeurs propres... mais pas d'autre caractérisation simple.

43▶

VII Formes linéaires - Hyperplans - Équations cartésiennes

VII.1 Définitions et liens

DÉFINITION

(a) $E^* = \mathcal{L}(E,\mathbb{K})$ *est l'espace vectoriel des formes linéaires sur E.*

(b) Un hyperplan de E est un sous-espace vectoriel de E de codimension 1, c'est-à-dire admettant un supplémentaire dans E de dimension 1.

Si $\dim E = p$, alors $\dim E^* = p$ et H est un hyperplan de E si, et seulement si, $\dim H = p - 1$.

44▶

PROPOSITION

Soit H un hyperplan de E et x un élément de E.

Alors $E = H \oplus \mathrm{Vect}(x)$ si, et seulement si, $x \notin H$.

45▶

THÉORÈME

Un hyperplan de E est le noyau d'une forme linéaire sur E non nulle, et réciproquement.

46▶

VII.2 Équations cartésiennes d'un hyperplan

Théorème Définition :

Si $H = \operatorname{Ker}\varphi$ est un hyperplan de E avec $\varphi \in E^*$, une forme linéaire ψ sur E s'annule sur H si, et seulement si, il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $\psi = \alpha\varphi$ (φ et ψ sont proportionnelles).

$\varphi(x) = 0$ est donc « une » équation cartésienne de H, les autres lui sont proportionnelles.

47▶

Pratique 15 :

1. Donner deux exemples d'équation cartésienne du plan $\operatorname{Vect}((1,0,1),(1,1,0))$ de $\mathbb{R}^3$.

2. Donner une forme linéaire de noyau l'hyperplan de $\mathbb{R}^2$ d'équation $x - 3y = 0$.

VII.3 Équations cartésiennes d'un sous-espace vectoriel

On suppose ici que E est de dimension finie p.

Théorème

La dimension de l'intersection de q hyperplans de E est supérieure ou égale à $p - q$.

Il y a égalité si, et seulement si, q formes linéaires définissant q équations cartésiennes des q hyperplans sont linéairement indépendantes (forment un système de rang q).

48▶

Théorème

Inversement, tout sous-espace vectoriel de E de dimension q est l'intersection de $p - q$ hyperplans qui sont les noyaux de $p - q$ formes linéaires linéairement indépendantes ; il admet donc un système de $p - q$ équations cartésiennes associées à $p - q$ formes linéaires linéairement indépendantes.

49▶

Pratique 16 :

Sans calcul, quelle est la dimension du sous-espace affine de $\mathbb{R}^3$ d'équations :

1. $x - y = 0$ **2.** $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y - z = 1 \\ x - 2y - 2z = 0 \end{cases}$

VII.4 Trace d'une matrice carrée, d'un endomorphisme

Définition

La trace d'une matrice carrée est la somme de ses coefficients diagonaux :

$$\operatorname{Tr}(M) = \sum_{i=1}^{p} m_{i,i} \text{ pour } M = [m_{i,j}] \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}).$$

Propriétés

(a) L'application trace est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

(b) Si $(A, B) \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

(c) Une matrice carrée et sa transposée ont même trace.

(d) Deux matrices semblables ont même trace.

50▶

Définition

La trace d'un endomorphisme sur un espace vectoriel E de dimension finie est la trace d'une matrice le représentant sur une base de E.

51▶

Proposition

La trace d'un projecteur d'un espace vectoriel de dimension finie est égale à son rang.

52▶

VIII Compléments : Réduction d'un endomorphisme

Ceci est au programme de deuxième année, sujet principal de la partie « algèbre linéaire ».

Une approche succincte permet de mieux comprendre vers quoi tendent un certain nombre d'exercices posés dès cette année.

VIII.1 Position du problème

On suppose E de dimension finie p.

Remarque basique : les matrices diagonales donnent des interprétations géométriques et des calculs matriciels simplifiés (puissances, recherche du commutant).

Question : tout endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est-il représentable sur une base bien choisie par une matrice diagonale (on dit : u **est-il diagonalisable** ?)

Réponses partielles :

→ affirmative pour les homothéties, projections et symétries comme déjà vu

→ négative pour les endomorphismes nilpotents non nuls : une matrice diagonale nilpotente est forcément nulle... Mais on a montré par exemple que pour un nilpotent d'indice p une représentation par une matrice triangulaire supérieure est possible ; est-ce généralisable et si oui comment ? Oublions cette question qui emmènerait vraiment trop loin et laissons un peu de suspense pour l'an prochain...

→ pour plusieurs endomorphismes diagonalisables donnés, il n'y pas de raison de pouvoir les « diagonaliser » tous sur une même base, les calculs ne sont alors pas forcément beaucoup plus simples. Les situations où la diagonalisation simultanée est possible sont liées au fait que ces endomorphismes commutent entre eux. D'où les questions récurrentes de recherche de commutant (faire le lien aussi avec la formule du binôme de Newton).

VIII.2 Analyse du problème

Supposons $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable : il existe une base $(e_1, \dots, e_p)$ de E sur laquelle

$$\mathrm{Mat}_{(e)}(u) = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & (0) & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & (0) & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_p \end{pmatrix}$$

Peut-on « prévoir » ce que doivent être les coefficients diagonaux λ_i ?

a) Matriciellement :

→ l'ordre des λ_i n'implique pas de condition puisqu'il ne correspond qu'à un changement de l'ordre des vecteurs de la base (e)

→ les λ_i sont les seuls scalaires tels que $u - \lambda_i \,\mathrm{Id}_E$ ne soit pas inversible

→ le nombre de fois où une valeur donnée λ apparaît sur la diagonale est égal à $p - \mathrm{rg}(M - \lambda\,\mathrm{I}_p) = p - \mathrm{rg}(u - \lambda\,\mathrm{Id}_E)$.

b) Géométriquement :

→ l'espace apparaît comme la somme directe de p droites stables par u, ou encore sur lesquelles u induit une homothétie : $E = \bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{Vect}(e_i)$ et $u(e_i) = \lambda_i e_i$.

→ en permutant les vecteurs de (e) on peut se ramener à $M = \mathrm{diag}(\mu_1\,\mathrm{I}_1, \dots, \mu_k\,\mathrm{I}_k)$ avec $\{\mu_1; \dots; \mu_k\} = \{\lambda_1; \dots; \lambda_p\}$ et où les μ_i sont distincts deux à deux ; l'espace apparaît comme une somme directe de sous-espaces stables par u, sur lesquels u induit des homothéties de rapports distincts : $E = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{Ker}(u - \mu_i\,\mathrm{Id}_E)$.

> Ces conditions liées au rang ne dépendent pas du choix de la représentation matricielle de u, ce qui permet de travailler sur une représentation matricielle de u sur une base quelconque !

VIII.3 Synthèse et méthodes

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, donné par sa matrice représentative M sur une base de E.

a) On cherche les scalaires λ tels que $u - \lambda\,\mathrm{Id}_E$ (ou $M - \lambda\,\mathrm{I}_p$) ne soit pas inversible. Pour cela :

i) On pose formellement le système $(M - \lambda\,\mathrm{I}_p)X = 0$ auquel on applique la méthode de Gauss-Jordan pour se ramener à un système équivalent « diagonal ».

ii) On obtient via les « pivots » les valeurs de λ pour lesquelles ce système n'est pas de Cramer.

On appelle **valeurs propres de u ou de M** ces valeurs, ce sont les scalaires λ tels que $u - \lambda\,\mathrm{Id}_E$ n'est pas injectif, ou pas bijectif, ou encore $M - \lambda\,\mathrm{I}_p$ n'est pas inversible.

b) L'intérêt de la résolution du système précédent, par rapport à une recherche simple du rang par opérations élémentaires, est qu'on obtient pour chaque valeur propre λ les équations de l'ensemble des solutions X_λ de $(M - \lambda\,\mathrm{I}_p)X_\lambda = 0$, c'est-à-dire du **sous-espace propre** $E_\lambda(u) = \mathrm{Ker}(u - \lambda\,\mathrm{Id}_E)$ (ou $E_\lambda(M) = \mathrm{Ker}(M - \lambda\,\mathrm{I}_p)$) de u (ou de M) associé à la valeur propre λ de u (ou de M).

c1) Si la somme des dimensions des $E_\lambda(u)$ distincts n'est pas égale à p, c'est que u (et M) n'est pas diagonalisable, d'après l'analyse.
C'est le cas par exemple si u n'admet pas de valeur propre...

c2) Si la somme des dimensions des $E_\lambda(u)$ distincts est égale à p, alors u est diagonalisable, car on peut vérifier que des sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont forcément en somme directe.
C'est le cas notamment si u admet p valeurs propres distinctes deux à deux...

Diagonaliser u, c'est donner une base $(v_1, \ldots, v_p)$ de E formée de vecteurs propres pour u.

$\to$ Dans le cas c2), en notant μ_1, ..., μ_k les valeurs propres distinctes deux à deux de u, on réunit des bases des sous-espaces propres $E_u(\mu_i)$ pour obtenir une telle base, sur laquelle u est alors représenté par la matrice diagonale $\mathrm{diag}(\mu_1 \mathrm{I}_1, \ldots, \mu_k \mathrm{I}_k)$.

53►

SAVOIR...

(1) *... qu'une application linéaire $u : E \to F$ est complètement déterminée par la donnée des images par u des vecteurs d'une base de E, ainsi que par ses restrictions aux termes d'une décomposition de E en somme directe*

2) *... interpréter et écrire la matrice d'un morphisme entre deux bases, d'un endomorphisme sur une base*

3) *... parfaitement effectuer des calculs matriciels, y compris « par blocs »*

4) *... déterminer le noyau* $\mathrm{Ker}\, u$ *et l'image* $\mathrm{Im}\, u$ *d'une application linéaire u donnée par sa matrice sur une ou deux bases*

5) *... reconnaître et utiliser les endomorphismes incontournables (homothétie, projections, symétries, nilpotents)*

6) *... calculer le rang d'une matrice, et connaître les caractérisations des matrices de rang* 1 *et de rang r*

7) *... effectuer un changement de base, connaître les formules de passage*

8) *... la différence entre matrices semblables et matrices équivalentes*

9) *... traiter ou déterminer un système d'équations linéaires pour un sous-espace vectoriel*

THÉORÈMES et PROPOSITIONS...	**... OUTILS pour ...**
Détermination d'un endomorphisme par les images des éléments d'une base ou par ses restrictions aux termes d'une décomposition de l'espace en somme directe	*Représentation matricielle, calculs simplifiés*
Théorèmes de calculs matriciels	*Liens calculs sur les morphismes et sur les matrices*
Théorèmes d'inversibilité pour matrices triangulaires	*Inversibilité des matrices triangulaires*
Théorèmes de caractérisations pour les endomorphismes incontournables,	*Calculs avec homothéties, projections symétries, nilpotents*
Proposition pour image directe ou réciproque de s.e.v.	*Calculs de noyaux et d'images*
Théorème liant injectivité, surjectivité, bijectivité et familles de vecteurs	*liberté, caractère générateur, basique d'images de vecteurs*
Théorème du calcul de $\dim \mathcal{L}(E, F)$	*Calculs de dimensions divers*
Théorèmes de calculs du rang (majorations, composées, produits)	*Calculs de rangs de composées ou produits*
Théorème fondamental	*Construction d'isomorphisme*
Théorème du rang	*Calculs de dimensions à partir de noyaux et de rangs*
Théorèmes de caractérisation des morphismes ou matrices de rang r, de rang 1	*Représentations simples liées au rang*
Théorèmes de changements de bases	*Formules de passages en changements de bases*
Théorèmes d'interprétation d'équivalence/similarité	*Invariants par changement de base(s)*
Théorème liant hyperplans et formes linéaires	*Équations cartésiennes/formes linéaires*
Théorème de représentation des sous-espaces affines par équations cartésiennes	*Interprétation des systèmes d'équations*
Trace d'un projecteur	*Calcul simplifié du rang d'un projecteur*