▶ ▶ 4 : ENSEMBLES DE NOMBRES

1▶

$*$ Compatibilités de $\leqslant$ avec $+$ et $\times$: pour tous a, b et c naturels tels que $a \leqslant b$ on a $a+c \leqslant b+c$ et $ac \leqslant bc$.

$*$ On reverra les lois de composition plus en détails ultérieurement.

$*$ On admet qu'à bijection croissante près (autrement dit à changements de "noms" près respectant l'ordre des éléments), il existe un unique ensemble totalement ordonné et vérifiant les propriétés a, b et c (appelées "axiomes de Péano"), et cet ensemble est $\mathbb{N}$.

$*$ Le plus petit élément de $\mathbb{N}$, noté 0, est l'élément neutre pour $+$: pour tout n naturel, $n+0 = 0+n = n$.
En revanche, il manque à chaque naturel n (sauf 0) un symétrique m tel que $n+m = m+n = 0$.
On va "agrandir" $\mathbb{N}$ de ce point de vue, et créer $\mathbb{Z}$...

2▶

$*$ On prolonge la relation d'ordre de $\mathbb{N}$ comme suit : si $a \notin \mathbb{N}$, alors $a < 0$, et si $b \geqslant 0$, alors $a < 0 \leqslant b$; enfin si a et b sont négatifs, alors $a \leqslant b$ si $-b \leqslant -a$.
Les autres propriétés se déduisent alors de celles sur $\mathbb{N}$.

⚠ Attention à la "compatibilité" de $\leqslant$ avec la multiplication :
Si $a \leqslant b$ <u>et $c \geqslant 0$</u>, alors $ac \leqslant bc$. Si $c < 0$, c'est $bc \leqslant ac$ qui est juste !

$*$ Soit a, b et c des entiers relatifs quelconques.
Associativités : $(a+b)+c = a+(b+c)$ pour $+$, et $(ab)c = a(bc)$ pour la multiplication.
Commutativités : $a+b = b+a$ pour $+$, et $ab = ba$ pour la multiplication.
1 est l'élément neutre pour $\times$: pour tout a dans $\mathbb{Z}$, $a \times 1 = 1 \times a = a$.
Distributivité de $\times$ par rapport à $+$: $(a+b)c = ac+bc$

$*$ Relativement à la multiplication, 1 et -1 ont un inverse (eux-mêmes), mais ce sont les seuls.
On va "agrandir" $\mathbb{Z}$ de ce point de vue et créer $\mathbb{Q}$...

3▶

$*$ Rigoureusement, il y a beaucoup à faire pour arriver à ce résultat ! En effet, un rationnel admet plusieurs écritures ou représentations, il faut donc vérifier par exemple que les résultats donnés par les opérations ($\frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{ps+qr}{qs}$ et $\frac{p}{q} \times \frac{r}{s} = \frac{pr}{qs}$) ne dépendent pas de ces choix de représentations.

$*$ Dire que $\mathbb{Q}$ contient $\mathbb{Z}$ est un raccourci : $\mathbb{Z}$ est identifié aux fractions de dénominateur 1.

$*$ Noter que $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \times)$ forme un groupe commutatif !

$*$ Que manque-t-il ? Par exemple, il n'existe pas de rationnel $x = \frac{p}{q}$ tel que $x^2 = 2$, sans quoi on obtiendrait $p^2 = 2q^2$ avec un nombre pair de 2 à gauche et impair à droite dans les décompositions premières. Autrement dit, $\sqrt{2}$ (défini de manière abstraite...) n'est pas rationnel.
On va "agrandir" $\mathbb{Q}$ de ce point de vue et créer $\mathbb{R}$...

4▶

$*$ Un sous-anneau d'un anneau $(E, +, \times)$ est une partie A de E qui, muni des lois de l'anneau, possède une structure d'anneau. Cela nécessite que les calculs effectués à partir d'éléments de la partie A aient pour résultats des élements de A (stabilité par $+$ et par $\times$). Par convention, on impose en plus que l'élément neutre pour la deuxième loi appartienne aussi à A.

$*$ Par exemple, l'écriture décimale du nombre décimal $\frac{175}{10^2}$ est 1.75, on dit qu'elle est finie.
Les rationnels ne sont pas tous des décimaux, comme par exemple $1/3$ dont le *développement décimal* (infini) est 0.3333.... On reviendra sur les développements décimaux des rationnels et même des réels en fin d'année.

$*$ Si on choisit p premier plutôt que 10, on parle de l'ensemble des entiers p-adiques, de la forme a/p^n pour $a \in \mathbb{Z}$ et n naturel. Par exemple : $1/3 = 0.1$ en écriture tri-adique.

5▶

⚠ Attention à la compatibilité avec $\leqslant$, même principe que dans $\mathbb{Z}$!

$*$ Pour parler très rapidement, on obtient $\mathbb{R}$ en "ajoutant" à $\mathbb{Q}$ les limites de ses suites monotones de rationnels, ou encore les bornes supérieures de ses ensembles non vides et majorés.

Par exemple, la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout n naturel, par $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + 2}{2u_n}$ est une suite de rationnels décroissante et minorée par 1. Elle converge dans $\mathbb{R}$ vers un l positif tel que $l^2 = 2$, on note alors $l = \sqrt{2}$. De même, l'ensemble de rationnels $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leqslant 2\}$ est non vide et majoré par 2, de borne supérieure $\sqrt{2}$, nous allons y revenir.

$*$ Il manque encore des solutions d'équations longtemps considérées comme insensées, comme : $x^2 = -1$
On va, dans le prochain chapitre, "agrandir" $\mathbb{R}$ de ce point de vue et créer $\mathbb{C}$...

6▶

$*$ Toutes ces propriétés s'obtiennent via les compatibilités de la relation d'ordre par rapport aux lois.

$*$ $ab \geqslant 0$ s'interprète par : a et b ont même signe. Ainsi, un carré de réel est toujours positif.

7▶

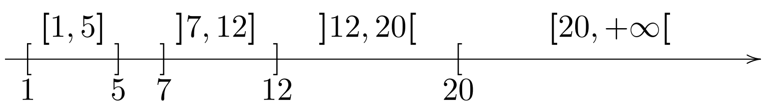
$*$ Un intervalle I ouvert est **voisinage de chacun de ses points** : si $c \in I$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]c - \varepsilon, c + \varepsilon[\subset I$.
En quelque sorte, aucun de ses éléments ne "ferme" I, comme le ferait 1 pour $]0, 1]$.

$*$ Toute suite convergente d'un intervalle I fermé a sa limite dans I. En ce sens, on comprend mieux l'adjectif "fermé".

Pratique 1 :

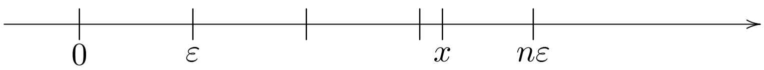
1.

On utilise des crochets ouverts ou fermés



2. Les intervalles majorés sont ceux dont l'écriture ne comporte pas $+\infty$, les minorés ceux dont l'écriture n'utilise pas $-\infty$, les bornés sont ceux qui sont minorés et majorés.
Les intervalles qui admettent un minimum sont ceux écrits avec un crochet fermant à gauche, ceux qui admettent un maximum sont ceux écrits avec un crochet fermant à droite.

8▶

$*$ 

$*$ *Preuve du théorème* : Si $x = 0$, $n = 0$ convient.
Sinon, $x > 0$, et soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des naturels p tels que $p\varepsilon < x$. Cette partie $\mathcal{P}$ de $\mathbb{N}$ est non vide (elle contient 0) et majorée, elle admet donc un plus grand élément, qu'on peut noter n_0. Alors $n = n_0 + 1$ est un naturel tel que $n\varepsilon \geqslant x$. $\square$

$*$ La même preuve convient pour $\mathbb{Q}$ qui est aussi archimédien.

9▶

$*$ Une distance d sur E est une application qui à un couple de points de E associe une valeur réelle positive et qui vérifie les propriétés de symétrie, de séparation, et l'inégalité triangulaire.
Il n'y a pas que la valeur absolue comme distance sur $\mathbb{R}$. Par exemple, $(x, y) \mapsto 2|x - y|$ convient ...

$*$ On vérifie aisément les propriétés 1, 2, 3 et 6.

$*$ *Preuve de l'inégalité triangulaire* : les deux membres étant positifs, l'inégalité à démontrer est équivalente à celle obtenue par passage aux carrés.
Or : $|x + y|^2 = (x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy \leqslant x^2 + y^2 + 2|x||y| = (|x| + |y|)^2$, d'où le résultat. Il y a égalité si, et seulement si, $xy = |x||y|$, c'est-à-dire si, et seulement si, x et y sont de même signe. $\square$

$*$ *Preuve de la deuxième inégalité triangulaire* : D'une part $|x| = |(x+y)-y| \leqslant |x+y| + |y|$, d'autre part $|y| = |(y+x)-x| \leqslant |x+y| + |x|$. On en déduit $|x| - |y| \leqslant |x+y|$ et $|y| - |x| \leqslant |x+y|$, d'où le résultat. En changeant y en $-y$ on obtient l'écriture avec $\pm$. $\square$

$*$ Par récurrence simple, on généralise l'inégalité triangulaire (et le cas d'égalité) aux cas de n points réels x_i : $|\sum_{i=1}^{n} x_i| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ avec égalité si, et seulement si, les x_i sont tous de même signe.

Pratique 2 :

1. $*$ Si $a \geqslant 0$, $|a| = a$; si $a \leqslant 0$, $|a| = -a$ donc $|a|^2 = (-a)^2 = a^2$.
$*$ $\sqrt{a^2}$ est le réel positif de carré a^2, donc c'est $|a|$ (compte tenu de l'égalité précédente).
$*$ Si $a \geqslant 0$, $a \leqslant b \iff -b \leqslant a \leqslant b$ puisque $-b \leqslant 0$. Si $a \leqslant 0$, $-a \leqslant b \iff a \geqslant -b \iff -b \leqslant a \leqslant b$ puisque $b \geqslant 0$.
$*$ Si $a \leqslant b$, $|a-b| = b-a$, et si $a \geqslant b$, alors $|a-b| = a-b$, ce qui donne les résultats pour $\max(a,b)$ et pour $\min(a,b)$.

2. $|a-b| \leqslant r$ équivaut à $-r \leqslant a-b \leqslant r$ comme déjà vu, d'où le résultat, ce qui donne les descriptions d'intervalles qui suivent.
Ainsi, $]a,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid |x - \frac{a+b}{2}| < \frac{|b-a|}{2}\}$ (ce qu'on adapte à $[a,b]$ avec des inégalités larges).

3. Le sens direct est immédiat. Montrons le sens réciproque par contraposée, en supposant x non nul, donc $|x| > 0$. Il suffit alors de choisir $\varepsilon = |x|/2$.

4. Preuve par récurrence sur n, sans difficulté, à partir du cas $n = 2$ vu en cours (cas $n = 1$ immédiat).

5. Utiliser la généralisation de l'inégalité triangulaire au cas de n points puis que les valeurs prises par cos sont entre -1 et 1.

10▶

$*$ On démontrera plus tard l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
Pour la retrouver, pensez qu'elle se traduit par la chose suivante :

la valeur absolue du produit scalaire est inférieure au produit des normes !!

Par exemple avec $n = 2$, si vous choisissez les deux vecteurs $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, alors

$|(u \mid v)| = |x_1 y_1 + x_2 y_2|$ alors que $\|u\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ et $\|v\| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$....
Il n'y aura qu'un pas à généraliser cela avec des vecteurs à n composantes....

$*$ Y penser !!! Quand une inégalité résiste, CS est tapi dans l'ombre...

Pratique 3 :

1. Par compatibilité avec l'addition : $-1 \leqslant a+b \leqslant 3$. Utilisons la compatibilité avec la multiplication : pour $c \in [0,3]$, il vient $-3 \leqslant (a+b)c \leqslant 9$, et pour $c \in [-1,0]$ il vient : $-3 \leqslant (a+b)c \leqslant 1$.
Finalement : $-3 \leqslant (a+b)c \leqslant 9$.

2. Comme $x \geqslant 1$, $x^3 \geqslant x$ donc $x^3 - x \geqslant 0$. Comme $x^2 + 1 \geqslant 0$, on a $0 \leqslant \frac{x^3 - x}{x^2+1}$.
D'une part $x^2 + 1 \geqslant 1 + 1 = 2$ et d'autre part $x^3 - x \leqslant 8 - 1 = 7$, d'où l'inégalité de droite voulue.

3. $f : x \mapsto x(1-x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $x \mapsto 1 - 2x$. La fonction f est donc croissante sur $]-\infty, 1/2]$ et décroissante sur $[1/2, +\infty[$, donc f atteint son maximum en $x = 1/2$ avec $f(1/2) = 1/4$.

4. C'est un exemple d'utilisation de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
Autre méthode : l'inégalité, reliant deux quantités positives, est équivalente à celle entre leurs carrés, elle-même équivalente à $a^2 + b^2 - 2ab \geqslant 0$, ce qui est vrai (identité remarquable).

5. Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz ! Puis $\sum_{i=1}^{n} \cos^2(\theta_i) \leqslant n$...

11▶

$*$ On peut alors prolonger naturellement $+$ et $\times$, sans toutefois définir $(-\infty)+(+\infty)$ ni $0\times(\pm\infty)$.

$*$ Ces écritures permettront simplement d'écrire de façon plus confortable certaines propriétés (limites, suites, définitions...).

12▶

$*$ Ainsi, pour montrer que $\alpha = \operatorname{Sup} A$, on montre que :

a) $\forall x \in A,\ x \leqslant \alpha$ (α est un majorant de A)

b) $\forall y \in E,\ \forall x \in A,\ x \leqslant y \Longrightarrow \alpha \leqslant y$ (α est le plus petit des majorants de A)

$*$ De même, pour montrer que $\beta = \operatorname{Inf} A$, on montre que :

a) $\forall x \in A,\ x \geqslant \beta$ (β est un minorant de A)

b) $\forall y \in E,\ \forall x \in A,\ y \leqslant x \Longrightarrow \beta \geqslant y$ (β est le plus grand des minorants de A)

13▶

$*$ Cette propriété est fondamentale au sens où elle est la base de la construction de $\mathbb{R}$.

$*$ Par exemple, l'ensemble E des éléments positifs et de carré inférieur strictement à 2 est non vide et majoré par 2, donc admet une borne supérieure M dans $\mathbb{R}$ (mais pas dans $\mathbb{Q}$...). Vérifions que $M^2 = 2$, et on posera alors $M = \sqrt{2}$.
Pour tout $\varepsilon > 0$, $M - \varepsilon$ n'est pas un majorant de E, donc il existe $x_\varepsilon \in E$ tel que $M - \varepsilon \leqslant x_\varepsilon$, d'où $(M-\varepsilon)^2 \leqslant x_\varepsilon^2$, ce qui donne $M^2 - 2\varepsilon M + \varepsilon^2 < 2$. En faisant tendre ε vers 0, on obtient $M^2 \leqslant 2$.
De même, pour tout $\varepsilon > 0$, $(M+\varepsilon)^2 > 2$ sinon $(M+\varepsilon/2)^2 < 2$ et M n'est donc pas un majorant de E. On a alors $M^2 + 2\varepsilon M + \varepsilon^2 > 2$, et en faisant tendre ε vers 0 on obtient $M^2 \geqslant 2$.

Pratique 4 :

1. $\operatorname{Sup} I = b$ et $\operatorname{Inf} I = a = \operatorname{Min} I$. L'intervalle I n'a pas de maximum.

2. Par définition d'un majorant et d'un minorant, comme $\operatorname{Inf} A$ et $\operatorname{Sup} A$ existent puisque A est bornée, il vient pour tout (ou un) x dans A : $\operatorname{Inf} A \leqslant x \leqslant \operatorname{Sup} A$, d'où le résultat.
L'égalité ne peut avoir lieu que si cette dernière en est une pour tout élément x de A ; nécessairement tout élément x de A est égal à $\operatorname{Inf} A = \operatorname{Sup} A$, et A est alors un singleton.

3. Pour tout t réel, $t^2 - 1 \leqslant t^2 + 1$ et $t^2 + 1 > 0$, donc $\dfrac{t^2-1}{1+t^2} \leqslant 1$. La partie A est non vide (clair) et majorée par 1, donc admet une borne supérieure, inférieure à 1 comme plus petit majorant.
Pour tout t réel, $\dfrac{t^2-1}{t^2+1} \geqslant -1$ équivaut à $2t^2 \geqslant 0$ toujours vrai, donc A est minorée par -1, non vide, donc admet une borne inférieure, qui, comme plus grand minorant de A, vérifie $\operatorname{Inf} A \geqslant -1$. Comme enfin on obtient -1 pour la valeur $t = 0$, ce minorant est dans A et c'est donc $\operatorname{Min} A$.

14▶

$*$ *Preuve pour la caractérisation en ε* : On récrit que $b = \operatorname{Sup} A$ parce que b est un majorant et que c'est le plus petit, c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$, $b - \varepsilon$ ne majore pas A.
Même chose pour $b = \operatorname{Inf} A$. $\square$

$*$ *Preuve pour la caractérisation séquentielle* : Montrons l'équivalence entre les deux caractérisations pour le cas : b borne supérieure de A.
La condition "b majorant" est présente littéralement dans les deux caractérisations. Voyons les deuxièmes conditions.

Supposons : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A,\ b - \varepsilon < a \leqslant b$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, choisissons $\varepsilon = 1/n$, on obtient un élément a_n de A tel que $b - 1/n < a_n \leqslant b$. On a ainsi construit une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de A et qui converge vers b.

Réciproquement, supposons qu'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de A et qui converge vers b. On a donc, pour tout n naturel non nul, que $a_n \leqslant b$. Comme de plus $(b - a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que la distance de a_{n_0} à b soit inférieure à ε, soit : $b - \varepsilon < a_{n_0} < b + \varepsilon$, et finalement : $b - \varepsilon < a_{n_0} \leqslant b$. $\square$

Pratique 5 :

1. On a déjà vu que 1 est un majorant de A. Or la suite $\left(\dfrac{n^2-1}{1+n^2}\right)$ est une suite d'éléments de A qui converge vers 1, car : $\dfrac{n^2-1}{1+n^2} = \dfrac{1-1/n^2}{1+1/n^2}$
D'après la caractérisation séquentielle de la borne supérieure, $\operatorname{Sup} A = 1$.
En revanche, aucun t réel ne réalise : $\dfrac{t^2-1}{1+t^2} = 1$ puisque cela conduit à $1 = -1$.
Donc A n'a pas de maximum.

2. D'une part A et B sont non vides et majorées, donc $\operatorname{Sup} A$ et $\operatorname{Sup} B$ existent.
Pour tout a de A et b de B : $a + b \leqslant \operatorname{Sup} A + \operatorname{Sup} B$, ce qui donne $A + B$ majoré, non vide, donc $\operatorname{Sup}(A+B)$ existe et $\operatorname{Sup}(A+B) \leqslant \operatorname{Sup} A + \operatorname{Sup} B$.
Enfin, d'après la caractérisation séquentielle de la borne supérieure, il existe une suite (a_n) de points de A qui converge vers $\operatorname{Sup} A$, et une suite (b_n) de points de B qui converge vers $\operatorname{Sup} B$. Comme la suite $(a_n + b_n)$ est une suite de points de $A + B$ qui converge vers $\operatorname{Sup} A + \operatorname{Sup} B$, il vient, toujours par la caractérisation séquentielle de la borne supérieure, que $\operatorname{Sup}(A+B) = \operatorname{Sup} A + \operatorname{Sup} B$.

3. Pour tout m et tout n naturels non nuls, on a : $0 < \dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n} \leqslant 2$.
Comme le choix de $m = n = 1$ donne le majorant 2, on a $\operatorname{Sup} A = \operatorname{Max} A = 2$.
0 est un minorant, donc $\operatorname{Inf} A$ existe et est positif. Or la suite $(\frac{1}{n} + \frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de points de A qui converge vers 0. Par la caractérisation séquentielle de la borne inférieure, on a $\operatorname{Inf} A = 0$, et enfin A n'admet pas d'élément minimum.

15▶

∗ *Preuve* : Le cas d'un intervalle vide ou d'un convexe vide est simple.

La sens réciproque et clair. En effet, un intervalle I non vide de $\mathbb{R}$ peut se décrire sous la forme (c, d) avec $c \leqslant d$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, c pouvant être $-\infty$, d pouvant être $+\infty$, les parenthèses étant ouvertes ou fermantes. Si $c \leqslant a \leqslant b \leqslant d$ avec a et b réels dans I, on a bien tout point de $[a, b]$ dans I par définition.

Soit maintenant C un convexe non vide de $\mathbb{R}$. C admet une borne supérieure d dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, et d est son maximum si d est réel et appartient à C. De même on définit c comme sa borne inférieure dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. On a donc $C = (c, d)$ où suivant les cas les parenthèses sont ouvrantes ou fermantes, à condition de montrer que tout u de $]c, d[$ appartient à C.
Soit donc $u \in \,]c, d[$. Comme $u < d$, u n'est pas majorant de C, donc il existe $b \in \,]c, d[$ tel que $b \in C$, et de même il existe $a \in \,]c, u[$ tel que $a \in C$. Par hypothèse, $[a, b] \subset C$, donc $u \in C$, et on peut donc conclure que $C = (c, d)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$. □

∗ Remarquer que : $[a, b] = \{\, ta + (1-t)b \mid t \in [0, 1] \,\}$. On dit que $[a, b]$ est l'ensemble des **barycentres** à coefficients positifs (t et $1 - t$ de somme 1) des points a et b.
Plus généralement, un convexe (de $\mathbb{R}^2$ par exemple) est une partie qui contient tous les barycentres à coefficients positifs de ses points.

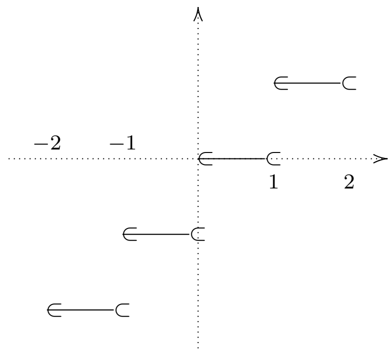
16▶

$\mathbb{Z}$ n'est pas minoré, ce qui assure la non vacuité de la partie considérée.

Pratique 6 :

1.

Graphe de la fonction partie entière :



2. Pour tout x réel : $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$. On en déduit (1) : $-\lfloor x \rfloor - 1 < -x \leqslant -\lfloor x \rfloor$, avec les termes à gauche et à droite dans $\mathbb{Z}$. Le seul problème tient dans les inégalités strictes et larges...
Si $x \in \mathbb{Z}$, alors $\lfloor x \rfloor = x$ donc $-\lfloor x \rfloor = -x$ donc $\lfloor -x \rfloor = -\lfloor x \rfloor$.
Sinon, les inégalités étant toutes strictes dans (1), on obtient : $\lfloor -x \rfloor = -\lfloor x \rfloor - 1$

3. Pour tout réel x, de $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$ on déduit : $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$

17▶

∗ *Preuve* : On utilise : $\lfloor 10^n x \rfloor \leqslant 10^n x < \lfloor 10^n x \rfloor + 1$ et on divise par 10^n pour obtenir le premier encadrement, le deuxième étant alors immédiat.

Enfin : $0 < d_n^+ - x \leqslant d_n^+ - d_n^-$ donne le troisième. □

∗ Les deux suites (d_n^-) et (d_n^+) sont donc adjacentes et de limite x.

∗ Les décimaux sont caractérisés par le fait que ces deux suites qu'ils définissent sont stationnaires.

18▶

∗ La phrase "$\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$" traduit le résultat du théorème, dont les deux assertions sont équivalentes.

∗ *Preuve* : Pour x réel donné, il suffit de remarquer que les suites (d_n^+) et (d_n^-) sont à valeurs décimales donc rationnelles et convergent vers x pour obtenir la deuxième assertion du théorème.
Si maintenant x et y sont deux réels distincts tels que $x < y$, la suite (d_n^+) associée à x est une suite de rationnels qui converge par valeurs strictement supérieures vers x en décroissant. Pour n assez grand, ses termes, rationnels, sont compris strictement entre x et y. □

∗ Pour la dernière partie, on peut aussi utiliser que $\mathbb{R}$ est archimédien : il existe un naturel n tel que $x < n\varepsilon < y$ où on aura choisi $\varepsilon = 1/q$ avec q naturel tel que $q > 1/(y-x)$.

19▶

Preuve : Pour x réel donné, $x - \sqrt{2}$ est réel, limite d'une suite (q_n) de rationnels par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. La suite d'irrationnels $(q_n + \sqrt{2})$ converge alors vers x.
Si maintenant x et y sont deux réels distincts tels que $x < y$, on adapte la preuve précédente en utilisant que $x - \sqrt{2} < y - \sqrt{2}$. □

∗ On peut aussi utiliser que $\mathbb{R}$ est archimédien : il existe un naturel n tel que $x < n\varepsilon < y$ où on aura choisi $\varepsilon = \sqrt{2}/q$ avec q naturel tel que $q > \sqrt{2}/(y-x)$.

Pratique 7 :

Analyse :

Avec $x = y = 0$ vient $f(0) = 0$. Avec x réel et $y = nx$ où $n \in \mathbb{N}$, $f((n+1)x) = f(x) + f(nx)$ et par récurrence simple : $f(nx) = nf(x)$.
Avec $x = \dfrac{1}{n}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, cette dernière équation donne : $f(1) = nf(1/n)$ donc $f(1/n) = f(1)/n$.
Avec $x = q$ et $y = \dfrac{1}{p}$ pour p et q naturels non nuls, et en posant $r = q/p$, il vient $f(r) = qf(1/p) = rf(1)$.
Avec x réel et $y = -x$, on obtient $f(-x) = -f(x)$.
Pour résumer, on a obtenu jusqu'ici : $f(x) = xf(1)$ si x est un rationnel.
Reste à étendre cette relation à x réel.
On va utiliser la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$: x réel est limite d'une suite (x_n) de rationnels.
Or, $|\,f(x) - f(x_n)\,| = |\,f(x) - x_n f(1)\,| = |\,f(x - x_n)\,| \leqslant |x - x_n|$ de limite nulle quand n tend vers $+\infty$.
Comme $x_n f(1)$ tend vers $xf(1)$ quand n tend vers $+\infty$ il vient : $f(x) = xf(1)$, x réel quelconque.

Synthèse :

Soit α un réel et f la fonction $x \mapsto \alpha x$.
Pour x et y réels : $f(x+y) = \alpha(x+y) = f(x) + f(y)$, et $|\,f(x)\,| = |\alpha||x| \leqslant |x|$ à la condition $|\alpha| \leqslant 1$.

Conclusion : les solutions sont les fonctions $x \mapsto \alpha x$ où α réel vérifie : $|\alpha| \leqslant 1$.