▶ ▶ 5 : COMPLEXES ET TRIGONOMÉTRIE

1▶

$*$ Si $\mathbb{R}$ n'a "plus de trou" (par la propriété de la borne supérieure), il reste des "lacunes".

Par exemple, l'équation $x^2 = 1$ admet deux racines 1 et -1 dans $\mathbb{R}$,
mais l'équation $x^2 = -1$ n'a pas de solution réelle,
ou encore, les équations $ax^2 + bx + c = 0$ n'ont pas de solutions réelles lorsque le discrimant est négatif strictement, justement parce qu'il n'y a pas de réel de carré strictement négatif.

On "invente" donc cette chose bizarre, i, qui vérifierait : $\mathrm{i}^2 = -1$..., et si on accepte ce "complexe" non réel, les difficultés précédentes sont résolues, et bien d'autres encore puisqu'on verra par exemple que tout polynôme non constant à coefficients complexes admet autant de racines complexes que son degré (pour parler vite).
On obtient également un outil puissant de calcul et de représentations en physique (électricité et optique notamment).

$*$ Reste à se convaincre de la possibilité d'un carré négatif... On peut en approcher la "réalité" par le biais suivant : identifions tout réel a avec la matrice $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, l'ensemble des matrices 2x2 étant muni de l'addition usuelle : $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix}$

et de la multiplication usuelle $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa'+bc' & ab'+bd' \\ ca'+dc' & cb'+dd' \end{pmatrix}$.

On retrouve ainsi l'addition et la multiplication entre réels en considérant les matrices diagonales.

Considérons maintenant la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et multiplions-la par elle même : on obtient $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, qui représente le réel -1. Ainsi, en posant $\mathrm{i} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a bien $\mathrm{i}^2 = -1$...

Tout ceci donne une représentation possible mais lourde des complexes : il sera plus simple de noter $a + \mathrm{i}b$ le complexe $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}$!

$*$ Notez que $\mathbb{R}$ se trouve naturellement plongé dans $\mathbb{C}$, via l'ensemble des complexes $a + \mathrm{i}.0$ pour a réel.

$*$ Inconvénient : il n'y a pas de relation d'ordre total $\leqslant$ sur $\mathbb{C}$ compatible avec les opérations et prolongeant celle sur $\mathbb{R}$: sinon, on aurait $0 \leqslant \mathrm{i}$ ou $\mathrm{i} \leqslant 0$, mais multiplier par i conduirait à une absurdité.

$*$ Pour plus tard : $\mathbb{C} = \{a.1 + b.\mathrm{i} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$ apparaît ainsi comme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 2 et de base $(1, \mathrm{i})$: tout complexe s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de 1 et de i, mais aucune autre relation que $0.1 + 0.\mathrm{i} = 0$ ne lie 1 et i.

2▶

$*$ Rappel : "$(\mathbb{C}, +, \times)$ corps commutatif" signifie

a) $(\mathbb{C}, +)$ est un groupe commutatif : la loi de composition interne $+$ est associative, commutative, 0 en est l'élément neutre, et tout complexe z admet un opposé $(-z)$ tel que $z + (-z) = 0$,

b) $(\mathbb{C}^*, \times)$, où $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, est un groupe commutatif, d'élément neutre 1, tout complexe non nul admet pour $\times$ un inverse noté $1/z$,

c) la multiplication est distributive par rapport à l'addition.

Une conséquence est que $\mathbb{C}$ **est intègre**, ou encore **n'a pas de diviseur de** 0 : si $zz' = 0$, alors $z = 0$ ou $z' = 0$ (si $z \neq 0$ par exemple, on obtient $z' = 0$ en multipliant par $1/z$).

Une deuxième conséquence : on dispose d'une méthode de calcul pour $(u+v)^n$ où u et v sont complexes et n naturel, par la **formule du binôme de Newton**, comme dans tout anneau commutatif

$$(u+v)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k v^{n-k}$$

ainsi que des identités remarquables, formules de somme géométrique, etc.

3▶

$*$ Supposons $a + \mathrm{i}b = 0$, alors $(a + \mathrm{i}b)(a - \mathrm{i}b) = 0 = a^2 + b^2$, somme de deux réels positifs pour a et b réels, donc tous deux nuls ! Ainsi $a = b = 0$.
Ainsi, si $a + \mathrm{i}b = a' + \mathrm{i}b'$ avec a, a', b et b' réels, alors $(a - a') + \mathrm{i}(b - b') = 0$, donc $a = a'$ et $b = b'$.

$*$ Attention à bien préciser "a et b réels" dans la description algébrique d'un complexe $z = a + \mathrm{i}b$!

Pratique 1 :

1. $(2 + \mathrm{i}) + (-3 + 2\mathrm{i}) = -1 + 3\mathrm{i}$ est de partie réelle -1 et de partie imaginaire 3.
$(1 + 2\mathrm{i})(2 - \mathrm{i}) = (2 + 2) + \mathrm{i}(4 - 1) = 4 + 3\mathrm{i}$ est de partie réelle 4 et de partie imaginaire 3.

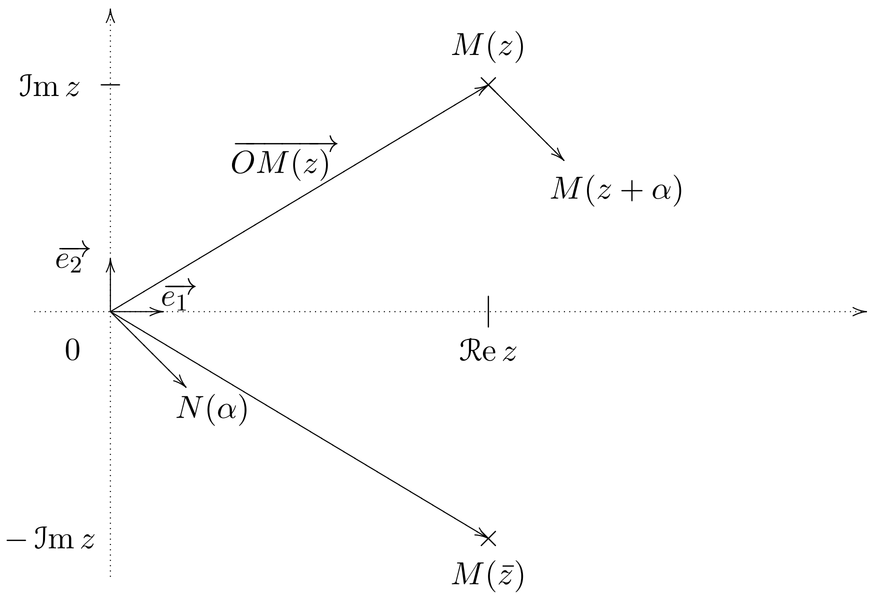
2. Posons $z = a + \mathrm{i}b$ avec a et b réels. On utilise la formule du binôme de Newton :
$z^2 = (a^2 - b^2) + 2\mathrm{i}ab$ et $z^3 = (a^3 - 3ab^2) + \mathrm{i}(3a^2b - b^3)$ puisque $\mathrm{i}^2 = -1$ et $\mathrm{i}^3 = -\mathrm{i}$.
Si z est réel, son carré et son cube sont réels ; si z est imaginaire pur, son carré est réel négatif et son cube est imaginaire pur.

3. On raisonne suivant la congruence p de n modulo 4 (c'est à dire les formes $n = 4k + p$ avec k entier et $p \in \{0; 1; 2; 3\}$).
Si $p = 0$, $\mathrm{i}^n = 1$; si $p = 1$, $\mathrm{i}^n = \mathrm{i}$; si $p = 2$, $\mathrm{i}^n = -1$; et si $p = 3$, $\mathrm{i}^n = -\mathrm{i}$.

4. $z^4 - 1 = (z^2 - 1)(z^2 + 1) = (z - 1)(z + 1)(z^2 + 1)$ pour z réel, et $z^2 + 1$ ne peut alors pas être nul, donc il y a les deux solutions ± 1.
Pour z complexe, $z^2 + 1$ s'annule pour i et $-\mathrm{i}$, on a la factorisation : $z^4 - 1 = (z - 1)(z + 1)(z - \mathrm{i})(z + \mathrm{i})$, et les 4 solutions sont ± 1 et $\pm \mathrm{i}$.

5. En écrivant $z = a + \mathrm{i}b$ et $z' = a' + \mathrm{i}b'$ pour a, b, a' et b' réels, il vient :
$z + z' = (a + a') + \mathrm{i}(b + b')$ donc la partie réelle (respectivement imaginaire) d'une somme (de deux complexes) est la somme des parties réelles (respectivement imagineaires).
$\alpha z = (\alpha a) + \mathrm{i}(\alpha b)$ donc la partie réelle (respectivement imaginaire) de αz s'obtient en multipliant par α la partie réelle (respectivement imaginaire) de z.

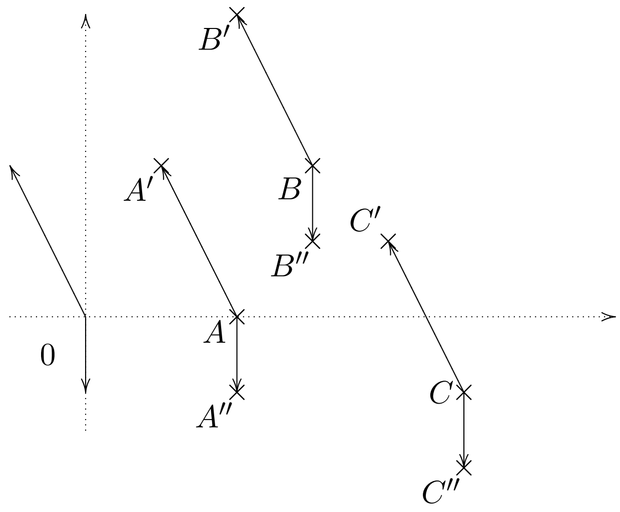
4▶



5▶

Voir sur le dessin précédent. On a $\overrightarrow{OM(z+\alpha)} = \overrightarrow{OM(z)} + \overrightarrow{u_\alpha}$.
La transformation t_α sur $\mathbb{C}$: $z \mapsto z + \alpha$ a pour interprétation géometrique la translation de vecteur d'affixe α dans le plan complexe $\mathcal{P}$.

Pratique 2 :



6▶

$*$ Ces propriétés s'établissent sans difficulté, vérifions par exemple le cas du conjugué d'un quotient : il suffit de montrer que le conjugué d'un inverse est l'inverse du conjugué puis d'utiliser le conjugué d'un produit. Or : $\dfrac{1}{a+\mathrm{i}b} = \dfrac{a-\mathrm{i}b}{a^2+b^2}$ après multiplication au numérateur et au dénominateur par $a - \mathrm{i}b$, et comme $\dfrac{a+\mathrm{i}b}{a^2+b^2} = \dfrac{1}{a-\mathrm{i}b}$, on obtient bien que le conjugué de $\dfrac{1}{a+\mathrm{i}b}$ est $\dfrac{1}{a-\mathrm{i}b}$.

$*$ Un isomorphisme de corps est une application bijective qui "transporte" les deux lois du corps de départ vers celles du corps d'arrivée : $\overline{u+v} = \bar{u}+\bar{v}$ et $\overline{uv} = \bar{u}\bar{v}$ (et envoie en plus 1 sur 1, c'est le cas).

7▶

La conjugaison transforme $M(z)$ en $M(\bar{z})$, c'est-à-dire le point de coordonnées (a, b) en le point de coordonnées $(a, -b)$, symétrique du précédent relativement à l'axe des abscisses (symétrique orthogonale). Le voir sur le dessin précédent.

8▶

$*$ Il suffit de calculer : $|z|^2 = z\bar{z}$ avec $z = a + \mathrm{i}b$, a et b réels. On obtient $a^2 + b^2$.

$*$ Cette quantité est réelle et une racine carrée est positive, donc un module est toujours positif !

$*$ Pour le cas où z est réel, c'est-à-dire $b = 0$ dans le cadre précédent, on obtient $|z| = |a|$, donc le module prolonge bien sur $\mathbb{C}$ la valeur absolue réelle.

9▶

Preuve des propriétés :

$*$ (1), (2) et (4) sont immédiats.

$*$ Pour (3), en posant toujours $z = a + \mathrm{i}b$ sous forme algébrique : $a^2 \leqslant a^2 + b^2$ donne bien la première inégalité par croissance de $\sqrt{\ }$ sur $\mathbb{R}_+$. Même chose pour la seconde.

$*$ Pour (5) : $|zz'|^2 = (zz')(\bar{z}\bar{z}') = (z\bar{z})(z'\bar{z}')$ puis le passage à la racine carrée sur ces quantités positives permet de conclure.

$*$ Pour (6), utiliser que $(1/z)(1/\bar{z}) = 1/(z\bar{z})$ pour la deuxième égalité, les autres cas étant simples.

$*$ Enfin, on vérifie facilement les axiomes de distances comme on l'a fait sur $\mathbb{R}$ (positivité, symétrie, séparation), et le fait qu'on retrouve, comme on l'a vu, la distance (valeur absolue) sur $\mathbb{R}$ si les deux arguments sont réels. Il reste à prouver l'inégalité triangulaire (la "deuxième" s'en déduisant comme dans le cas réel).

Vérifions donc que pour $z = a+\mathrm{i}b$ et $z' = a'+\mathrm{i}b'$ complexes avec a, a', b et b' réels, on a : $|z+z'| \leqslant |z|+|z'|$ et donnons les cas d'égalités.

Par croissance de la bijection $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}_+$, on obtient l'inégalité équivalente :

$(z+z')(\bar{z}+\overline{z'}) \leqslant (|z|+|z'|)^2$, soit $\mathfrak{Re}(z\overline{z'}) \leqslant |z||z'| = |z\overline{z'}|$ après développement, inégalité toujours vraie puisqu'on a vu que pour tout complexe u, $\mathfrak{Re}(u) \leqslant |u|$.

L'inégalité est une égalité si, et seulement si, $\mathfrak{Re}(z\overline{z'}) = |z||z'|$, ce qui implique par passage au carré : $(aa'+bb')^2 = (a^2+b^2)(a'^2+b'^2)$ puis par développement et simplification : $(ab'-ba')^2 = 0$.
Si $(a,b) = (0,0)$, on a clairement un cas d'égalité dès le départ.
Sinon, si $b \neq 0$ par exemple (même résultat si $a \neq 0$), on obtient $a' = \lambda a$ et $b' = \lambda b$ avec $\lambda = b'/b$ réel. Et en reportant dans $\mathfrak{Re}(z\overline{z'}) = |z||z|'$, il vient $\lambda(a^2+b^2) = |\lambda|(a^2+b^2)$ donc $\lambda \geqslant 0$. Réciproquement, on retrouve alors un cas d'égalité en remontant le calcul. □

Pratique 3 :

1. On trouve $1 - \mathrm{i} + \mathrm{i}\bar{z}$.

2. $|1+\mathrm{i}| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$.
$|1+z|^2 = (1+z)(1+\bar{z}) = 1+z+\bar{z}+|z|^2 = 1+|z|^2+2\,\mathfrak{Re}(z)$. Donc $|1+z| = \sqrt{(1+\mathfrak{Re}\,z)^2+(\mathfrak{Im}\,z)^2}$.

3. Posons $z = a+\mathrm{i}b$ avec a et b réels, et cherchons une cns sur a et b pour que $\dfrac{z+\mathrm{i}}{z+1}$ soit réel. Cette dernière condition équivaut à $(a+\mathrm{i}(b+1))(a+1-\mathrm{i}b)$ réel et $z \neq -1$, la première condition s'écrivant : $(b+1)(a+1) - ab = 0$ ou encore $a+b+1 = 0$.
Les complexes cherchés sont donc les affixes des points du plan complexe situés sur la droite d'équation $y = -x-1$ privée du point $(-1,0)$.

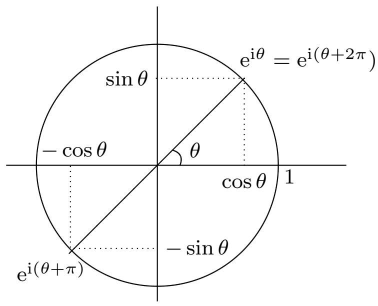
10▶

Il suffit de vérifier que $\mathbb{U}$ est stable par la multiplication (c'est clair, le module d'un produit étant le produit des modules), que $\mathbb{U}$ contient 1 (évident), et que chaque complexe de module 1 a son inverse pour la multiplication de module 1 aussi, ce qui vrai puisque le module d'un inverse de complexe non nul est l'inverse de son module. Rappelons d'ailleurs que pour un complexe de module 1, l'inverse est le conjugué...
Les propriétés générales (associativité, commutativité, neutre) étant vraies dans $\mathbb{C}$ le sont alors forcément dans $\mathbb{U}$.

11▶

$*$ $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ est une notation pour compacter l'expression $\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$; on considère connues les fonctions cos et sin et leurs propriétés établies, comme par exemple les formules sommatoires, à partir des propriétés des triangles rectangles (on n'y revient pas ici, c'est trop long....)
Pourquoi cette notation ? Vous le comprendrez mieux plus tard, mais remarquez pour l'instant que ces formules sommatoires trigonométriques donnent des formules liées aux puissances :
$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\theta')} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}$ (à vérifier depuis les définions sous formes algébriques), et $\mathrm{e}^{\mathrm{i}.0} = 1$.

$*$ Un complexe z de $\mathbb{U}$, donc situé sur le cercle trigonométrique, est repéré par sa distance à l'origine, égale à 1, et par l'angle orienté que fait la demi-droite orientée des abscisses positives avec la demi-droite orientée partant de l'origine et passant par le point M d'affixe z. Cet angle θ est défini de manière unique à 2π près, et, dans le repère orthonormé $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ déjà évoqué du plan $\mathbb{R}^2$, les coordonnées du point M sont $(\cos\theta, \sin\theta)$. Ainsi, $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.
Notez que la 2π-périodicité de cos et de sin s'illustrent bien par l'unicité de ce qu'on appellera l'argument de z à 2π près. Ajouter 2π correspond à "effectuer un tour"...



12▶

$*$ (1) et (3) sont de simples calculs, (2) se déduit de (1) par récurrence sur n naturel d'abord, puis se déduit pour n relatif du fait de $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} = \overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}$.

$*$ La première égalité de (1) se traduit ainsi : $\theta \mapsto e^{i\theta}$ est un morphisme entre les groupes $(\mathbb{R}, +)$ et $(\mathbb{U}, \times)$ (l'application "transporte" le calcul d'addition dans le premier groupe en un calcul de multiplication dans le deuxième groupe). On reviendra sur ces choses plus tard dans l'année...
Cette application est surjective comme on l'a vu (tout complexe de module 1 a une représentation de type $e^{i\theta}$) mais non injectif à cause de la 2π-périodicité. Pour obtenir la bijectivité, on peut restreindre l'ensemble de départ à $]-\pi, \pi]$, mais on perd la structure de groupe de l'ensemble de départ.

Pratique 4 :

1. Voir le formulaire de trigonométrie en fin de chapitre.

2. On peut utiliser les formules sommatoires en passant par $3\theta = 2\theta + \theta$. Plus rapidement, on utilise la formule de Moivre :

$$\cos(3\theta) + i\sin(3\theta) = e^{3i\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^3 = (\cos\theta + i\sin\theta)^3$$

Par la formule du binôme :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = (\cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta) + i(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta) = (4\cos^3\theta - 3\cos\theta) + i(3\sin\theta - 4\sin^3\theta)$$

La partie réelle donne $\cos(3\theta)$, et la partie imaginaire donne $\sin(3\theta)$.

13▶

$*$ Tout ceci découle des remarques développées au point 12.

$*$ Les relations donnant $\cos\theta$ et $\sin\theta$ donc θ à 2π-près peuvent se simplifier en une seule si on impose $\theta \in]-\pi, \pi[$ pour le cas où le complexe non nul z de départ n'est pas -1 (d'argument principal π).
En effet, on a alors : $\dfrac{\theta}{2} \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, ce qui permet de calculer la quantité suivante :

$$\tan(\theta/2) = \frac{\sin(\theta/2)}{\cos(\theta/2)} = \frac{2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)}{2\cos^2(\theta/2)} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \frac{b/\rho}{1+a/\rho} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}+a}$$

Comme on verra que $\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ est bijective, de réciproque notée Arctan, on aura :

$$\boxed{\theta = 2\operatorname{Arctan}\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}+a}\right)}$$

14▶

Découle directement des propriétés de $\theta \mapsto e^{i\theta}$ vues en I.4.

Pratique 5 :

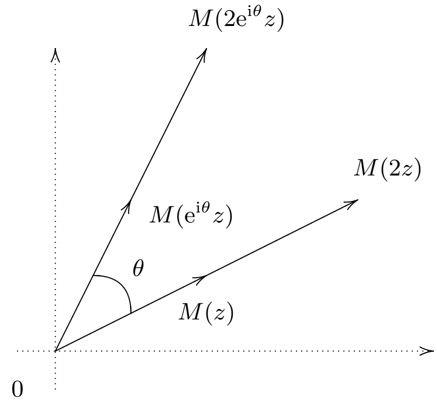
1. $-3 = 3\,e^{i\pi}$, $1 + i = \sqrt{2}(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)) = \sqrt{2}\,e^{i\pi/4}$, $1 - i\sqrt{3} = 2(\cos(-\pi/3) + i\sin(-\pi/3)) = 2\,e^{-i\pi/3}$, et enfin $-\dfrac{\sqrt{3}+i}{4} = \dfrac{1}{2}(\cos(7\pi/6) + i\sin(7\pi/6)) = \dfrac{1}{2}\,e^{7i\pi/6}$.

2. $|2 - 2i| = 2\sqrt{2}$, donc on cherche $\theta \in]-\pi, \pi]$ de cosinus $1/\sqrt{2}$ et de sinus $-1/\sqrt{2}$, c'est donc $-\pi/4$.
Pour $4e^{7i\pi/2}$, on utilise la 2π-périodicité, la réponse est $-\pi/2$.
Pour $-4e^{i\pi/3}$, il faut incorporer $-1 = e^{i\pi}$, la réponse est $-2\pi/3$.

15▶

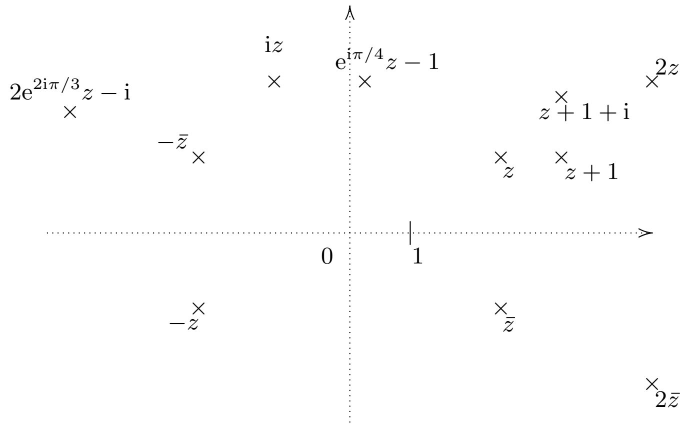
$*$ Le module de $e^{i\alpha}z$ est celui de z, son argument est la somme de celui de z et de α (modulo 2π). On en déduit également l'interprétation de la multiplication de z par ω.
En particulier, la multiplication de z par un réel positif s'interprète géométriquement comme la transformation de $M(z)$ en $M(z')$ par homothétie de centre l'origine et de rapport le réel positif.

∗ Sur ce dessin, θ est proche de $\pi/4$



Pratique 6 :

Pour simplifier, on n'écrit que les affixes...



16▶

∗ *Preuve* : Notons $z=a+ib$ et $z'=a'+ib'$ deux complexes écrits sous forme algébrique.
1) $\exp(z+z')=\exp((a+a')+i(b+b'))=e^{a+a'}e^{i(b+b')}=e^a e^{a'}e^{ib}e^{ib'}=\exp(z)\exp(z')$,
$\dfrac{1}{\exp(z)}=\dfrac{1}{e^a e^{ib}}=e^{-a}e^{-ib}=\exp(-z)$, et $\exp(0)=1$ est déjà revu.

2) Puisque e^{ib} est de module 1 et que $\arg(e^a e^{ib})\equiv b\ [2\pi]$.

3) D'après 1), $\exp(z)=\exp(z')$ équivaut à $\exp(z-z')=1=e^{a-a'}e^{i(b-b')}$, donc
$a=a'$ et $b-b'\in 2\pi\mathbb{Z}$, ce qui donne le résultat. □

∗ exp est un morphisme de groupes entre $(\mathbb{C},+)$ et $(\mathbb{C}^*,\times)$ (comme l'exprime 1)), surjectif comme le montre le théorème suivant, et non injectif puisque $2i\pi$-périodique comme le montre 3).

17▶

∗ *Preuve* : Cherchons z sous forme algébrique $c+id$, avec c et d réels. On résout alors : $e^c e^{id}=|a|e^{i\,\mathrm{Arg}(a)}$. Par passage au module, il vient $e^c=|a|$ ou encore $c=\ln(|a|)$, puis $d=\mathrm{Arg}(a)$ modulo 2π, ce qui donne bien les solutions du théorème. Le calcul en sens inverse assure que tous ces élements sont bien les solutions de l'équation de départ. □

∗ Il n'y a pas de solution pour l'équation $\exp(z)=0$, par le même calcul.

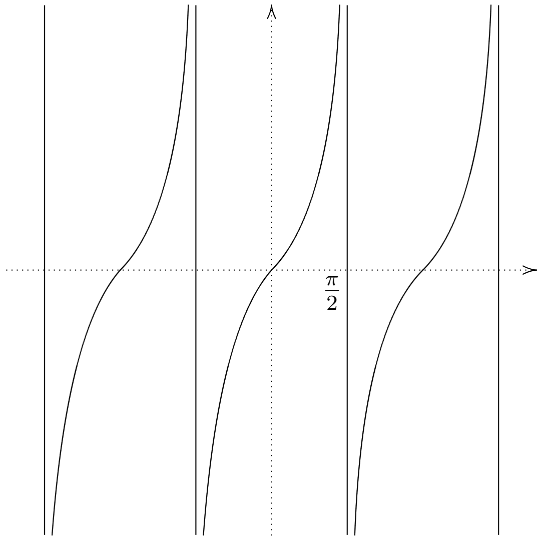
Pratique 7 :

On obtient par le théorème : $\{\dfrac{1}{2}\ln(2)+i\dfrac{\pi}{4}+2ik\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$

18▶

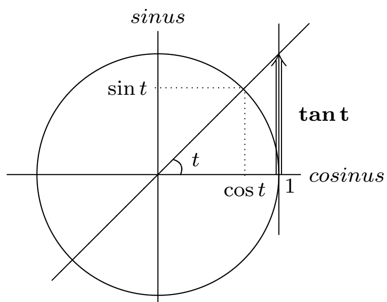
*

Toutes ces propriétés découlent directement de celles de cos et de sin.
Notamment : $\tan' = \dfrac{\cos^2 + \sin^2}{\cos^2} = \dfrac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2$
La fonction tan est donc croissante sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, et on obtient le graphe suivant en utilisant l'imparité et la π-périodicité.



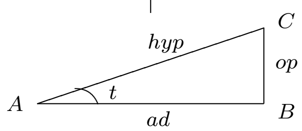
*

Par le théorème de Thalès, avec la droite (Ox) et celle définie par l'angle t, on retrouve à partir du cercle trigonométrique le calcul de $\tan(t)$ car : $\dfrac{\tan(t)}{1} = \dfrac{\sin(t)}{\cos(t)}$



Dans un triangle ABC rectangle en B, si t est l'angle $\widehat{BAC}$:

$$\cos(t) = \frac{AB}{AC} = \frac{ad}{hyp} \quad \sin(t) = \frac{BC}{AC} = \frac{op}{hyp} \quad \tan(t) = \frac{BC}{AB} = \frac{op}{ad}$$



19▶

En effet, $\mathcal{R}\mathrm{e}((\cos(x) + \mathrm{i}\sin(x))^p) = \mathcal{R}\mathrm{e}((\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})^p) = \mathcal{R}\mathrm{e}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}px}) = \cos(px)$. Même chose pour $\sin(px)$.
Puis on utilise la formule de binôme de Newton, en ne conservant que les puissances paires de i pour le calcul de la partie réelle ($\cos(px)$), et que les puissances impaires de i pour le calcul de la partie imaginaire ($\sin(px)$).

Pratique 8 :

$$\sin^4(x) = \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}\right)^4 = \frac{1}{16}\left(\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x} - 4\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} + 6 - 4\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-4\mathrm{i}x}\right) = \frac{1}{8}\cos(4x) - \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{3}{8}$$

De même : $\cos^4(x) = \left(\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}\right)^4 = \dfrac{1}{16}\left(\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x} + 4\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} + 6 + 4\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-4\mathrm{i}x}\right) = \dfrac{1}{8}\cos(4x) + \dfrac{1}{2}\cos(2x) + \dfrac{3}{8}$

$$\sin^3(x)\cos^3(x) = \left(\frac{1}{2}\sin(2x)\right)^3 = \frac{1}{8}\left(\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}\right)^3 = -\frac{1}{64\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{6\mathrm{i}x} - 3\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} + 3\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-6\mathrm{i}x}\right)$$

$$= -\frac{1}{32}\sin(6x) + \frac{3}{32}\sin(2x)$$

20▶

Si on a bien compris les périodes, il ne reste que deux cas à ne pas oublier, conséquences du fait que cos est paire et que le graphe de sin présente une symétrie par rapport à $x = \pi/2$. Les deux choses se tiennent puisqu'un sinus est un cosinus qui s'ignore (ou l'inverse...) : pour tout x réel, $\sin(x + \pi/2) = \cos(x)$.

Se rappeler donc que a et $-a$ ont même cosinus, et que a et $\pi - a$ sont même sinus.

Pratique 9 :

1. On se ramène à l'égalité entre deux sinus, par exemple, soit à résoudre : $\sin(2a) = \sin(b + \pi/2)$
D'après ce qui précède, ceci équivaut à : $2a = b + \pi/2$ ou $2a = \pi/2 - b$ modulo 2π, soit finalement $b = \pm(2a - \pi/2)$ modulo 2π.

2. On linéarise pour obtenir : $2\cos^2(a) + 4\cos(a) + 2 = 0$, soit $(\cos(a) + 1)^2 = 0$.
Les solutions sont donc $a = \pi$ modulo 2π.

3. On se ramène à deux tangentes : $\tan(3a) = \tan(\pi/3)$, donc $a = \pi/9$ modulo $\pi/3$.

21▶

En particulier, il faut savoir transformer les expressions : :
$1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta/2} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}) = 2\cos(\theta/2)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}$ et $1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta/2} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}) = -2\mathrm{i}\sin(\theta/2)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}$

Pratique 10 :

$\cos a + \cos b = \Re(\mathrm{e}^{\mathrm{i}a} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}b}) = 2\cos(\dfrac{a+b}{2})\cos(\dfrac{a-b}{2})$,
$\sin a + \sin b = \Im(\mathrm{e}^{\mathrm{i}a} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}b}) = 2\sin(\dfrac{a+b}{2})\cos(\dfrac{a-b}{2})$,
et $\cos a - \cos b = \Re(\mathrm{e}^{\mathrm{i}a} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}b}) = -2\sin(\dfrac{a+b}{2})\sin(\dfrac{a-b}{2})$.

Pratique 11 :

1. Ajouter π à l'argument d'un cosinus ou d'un sinus change le signe. Donc $\cos(x + n\pi) = (-1)^n \cos(x)$ et $\sin(x + n\pi) = (-1)^n \sin(x)$.

2. $\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \cos(\pi/4) = \cos(2\pi/8) = 2\cos^2(\pi/8) - 1 = 1 - 2\sin^2(\pi/8)$,
donc $\cos(\pi/8) = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et $\sin(\pi/8) = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ (à cause des signes positifs de ces quantité).

3. $\tan(\pi/12) = \tan(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}) = \dfrac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}$ par le formulaire de la tangente d'une différence.

4. $C_n = \Re\left(\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\right) = \Re\left(\dfrac{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)x}}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}\right) = \Re\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx/2}\dfrac{\sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)}\right)$ si x est différent de 0 modulo 2π, sinon $C_n = n + 1$.
Dans le premier cas, on trouve finalement : $C_n = \dfrac{\cos(nx/2)\sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)}$
De même : si $x = 0$ modulo 2π on a $S_n = 0$, sinon : $S_n = \dfrac{\sin(nx/2)\sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)}$

22▶

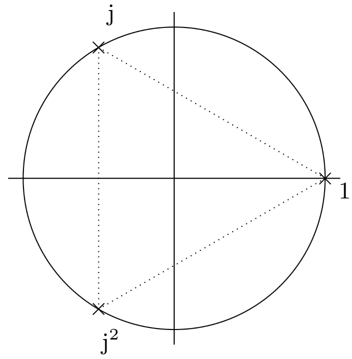
$*$ Cherchons sous forme trigonométrique $r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ les complexes de puissance n-ième $z = \rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ non nul.
On obtient par passage au module : $r^n = \rho$, donc par positivité de r il vient : $r = \sqrt[n]{\rho}$.
Puis $\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ donc $\varphi = \theta/n$ modulo $2\pi/n$, ce qui donne n racines n-ièmes de z également réparties sur le cercle du plan complexe centré à l'origine et de rayon $\sqrt[n]{|z|}$. On voit aussi que ces n racines s'obtiennent en multipliant $\sqrt[n]{\rho}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/n}$ par les racines n-ièmes de l'unité.

$*$ Ainsi l'équation polynomiale de degré n et d'inconnue u complexe : $u^n = z$ admet n solutions.
On admettra le théorème de D'Alembert qui généralise cela : toute équation polynomiale de degré $n \geqslant 1$ et à coefficients complexes admet une solution dans $\mathbb{C}$ (et même n exactement en comptant les ordres de multiplicité) comme on le reverra plus tard.

Pratique 12 :

1.

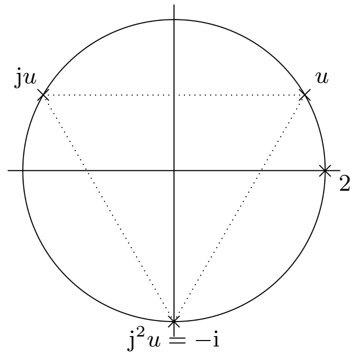
Les racines cubiques de l'unité, traditionnellement notées 1, j et $\mathrm{j}^2 = \bar{\mathrm{j}}$, forment un triangle équilatéral.
$\mathrm{j} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3} = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\mathrm{j}^2 = \mathrm{e}^{4\mathrm{i}\pi/3} = -\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$
$1 + \mathrm{j} + \mathrm{j}^2 = \frac{1 - \mathrm{j}^3}{1 - \mathrm{j}} = 0...$



2. Les racines 4-ièmes de l'unité, 1, i, -1 et $-\mathrm{i}$, forment un carré inscrit dans le cercle trigonométrique.
Les racines 5-ièmes de l'unité sont les $\exp(2\mathrm{i}k\pi/5)$ pour $k \in [\![0, 4]\!]$, et forment un pentagone régulier démarrant de 1 inscrit dans le cercle trigonométrique.
Comme en 1., grâce à une somme géométrique, on obtient les deux sommes demandées nulles.

3.

Comme $8\mathrm{i} = 8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}$, la "plus simple" des racines cubiques est $u = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6}$, qu'on multiplie par j puis j^2 pour obtenir les deux autres.



23▶
Simple application de la formule d'une somme géométrique, sachant que $\omega^n = 1$ et $\omega \neq 1$.

Pratique 13 :

1. $(x + \mathrm{i}y)^2 = 3 - 4\mathrm{i}$ équivaut à : (1) $x^2 - y^2 = 3$, (2) $x^2 + y^2 = 5$ et (3) $2xy = -4$.
Avec (1) + (2) on obtient $x^2 = 4$, avec (2) $-$ (1) il vient $y^2 = 1$, et comme xy est négatif, les solutions sont : $\pm(2 - \mathrm{i})$

2. Par la même méthode on trouve $\pm\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} + \mathrm{i}\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\right)$.

Or $1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$ admet pour racines carrées $\pm\sqrt[4]{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/8}$, donc

$$\cos(\pi/8) = \frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{2^{3/4}} \text{ et } \sin(\pi/8) = \frac{\sqrt{\sqrt{2}-1}}{2^{3/4}}$$

24▶
$*$ Il suffit de redévelopper $a(z - z_1)(z - z_2)$ et d'identifier avec $az^2 + bz + c$ pour obtenir ces relations.

* On retrouve la résolution classique avec coefficients réels, mais en "plus simple" puisqu'il n'y a pas de discussion suivant le signe du discriminant.

Pratique 14 :

1. Discriminant : $3-4\mathrm{i}$, de racines carrées $\pm(2-\mathrm{i})$ vues en Pratique 12. Solutions : $\dfrac{\sqrt{3}\pm(2-\mathrm{i})}{2}$

2. On va utiliser les relations coefficients-racines et obtenir le produit z_1z_2 à partir de la deuxième équation : $z_1^2+z_2^2=(z_1+z_2)^2-2z_1z_2$, donc $z_1z_2=1+\mathrm{i}/2$.

z_1 et z_2 sont donc les racines de $z^2-z+1+\mathrm{i}/2$. Le discriminant de ce trinôme est $-3-2\mathrm{i}$. On en cherche les racines carrées par la méthode détaillée en Pratique 12, puis on reporte avec les formules pour obtenir les solutions (z_1,z_2) ou (z_2,z_1) suivantes : $\dfrac{1\pm\left(\sqrt{\dfrac{\sqrt{13}-3}{2}}-\mathrm{i}\sqrt{\dfrac{\sqrt{13}+3}{2}}\right)}{2}$

25▶

On a déjà vu les transformations suivantes de $\mathbb{C}$ dans C et leurs interprétations géométrique dans $\mathbb{R}^2$:

$z\mapsto z+a$ associée à la translation de vecteur d'affixe a (c'est l'identité si $a=0$),

$z\mapsto\bar{z}$ associée à la symétrie par rapport à l'axe des abscisses,

$z\mapsto -z$ associée à la symétrie de centre l'origine,

$z\mapsto az$ associée à l'homothétie de rapport a lorsque a est réel, à la rotation d'angle $\operatorname{Arg}a$ lorsque a est complexe de module 1, à la similitude composée commutative de la rotation d'angle $\operatorname{Arg}a$ et l'homothétie de rapport $|a|$ dans le cas général.

Par composition, $z\mapsto az+b$ se décompose en $a\mapsto az$ composée (non commutative !!) avec $z\mapsto z+b$, et de même pour $z\mapsto a\bar{z}+b$, ce qui donne une première interprétation géométrique de ces transformations à l'aide des précédentes.

On va toutefois simplifier cette analyse en utilisant une nouvelle origine mieux adaptée.

26▶

Preuve Supposons donc $a\neq 1$. L'équation $z=az+b$ admet une unique solution, la transformation géométrique associée transforme donc un unique point en lui-même, on dit que c'est son unique point fixe, d'affixe $\omega=b/(1-a)$.

On peut alors déduire de : $\omega=a\omega+b$ et $z'=az+b$ que $(z'-\omega)=a(z-\omega)$. Le vecteur $\overrightarrow{\Omega(\omega)M(z)}$ est donc transformé en $\overrightarrow{\Omega(\omega)M(z')}$, c'est bien ce qu'annonce le théorème. ☐

Pratique 15 :

a) Rotation de centre l'origine et d'angle $\pi/2$.

b) Translation de vecteur de coordonnées $(0,2)$.

c) Homothétie de centre d'affixe -1 et de rapport 2.

d) Similitude directe de centre d'affixe i, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\pi/4$.

27▶

* *Preuve* : A, B et C sont alignés si, et seulement si, il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AC}$. Compte tenu du fait que les points sont supposés distincts deux à deux, ceci équivaut à $\dfrac{c-a}{b-a}$ réel. ☐

* Cette condition équivaut au fait que les arguments des deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont égaux à π près.

28▶

Preuve : L'orthogonalité des vecteurs d'affixes u et v écrites sous formes algébriques $u_1+\mathrm{i}u_2$ et $v_1+\mathrm{i}v_2$ s'écrit, grâce au produit scalaire : $u_1v_1+u_2v_2=0$, c'est-à-dire $\Re\mathrm{e}(u\bar{v})=0$. Autrement dit, $u\bar{v}$ est imaginaire pur. Comme $u=b-a$ (est non nul) et $v=c-a$, la condition d'orthogonalité s'écrit : $(b-a)\overline{(c-a)}$ imaginaire pur, et par la quantité conjuguée, $\dfrac{c-a}{b-a}$ imaginaire pur. ☐

Pratique 16 :

1. On utilise la condition d'orthogonalité : la condition est vérifiée pour z non réel (sinon triangle plat) exactement lorsque $\dfrac{z^3 - z}{z^2 - z}$ est imaginaire pur, soit $z + 1$ imaginaire pur.
L'ensemble des points recherchés est donc la droite verticale passant par $(-1, 0)$ privée de ce point.

2. Rapport réel : le point B est une solution, les autres sont tels que A, B et M soient distincts et alignés, c'est donc finalement la droite (AB) privée du point A.

Rapport imaginaire pur : le point B est encore une solution, les autres sont tels que $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont orthogonaux, c'est donc finalement le cercle de diamètre AB privé du point A. On peut aussi le retrouver en posant $z = \alpha + \mathrm{i}\beta$ avec α et β réels.