▶ ▶ 11 : LIMITES-CONTINUITÉ

1▶

∗ Par exemple, $]-1,1[$ est un voisinage de 0 puisque cet intervalle contient $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$, c'est aussi un voisinage de 1/2 puisqu'il contient $[\frac{1}{4},\frac{3}{4}]$, mais ce n'est un voisinage ni de 1, ni de -1, ni de 2...
De même, $]1,2]$ est un voisinage de 3/2, de 5/4, mais pas de 2.

∗ Dans cette définition, on peut remplacer $[a-r,a+r]$ par $]a-r,a+r[$, puisque ce dernier intervalle contient $[a-\frac{r}{2},a+\frac{r}{2}]$.

2▶

On retrouve ici les notions vues au moment de l'étude de $\mathbb{R}$.
Par exemple, 0 est intérieur à $]-1,1[$, comme d'ailleurs tout point a de $]-1,1[$ puisque
$]a-r,a+r[\subset]-1,1[$ en choisissant $r=\mathrm{Min}(|a-1|,|a+1|)/2$. On dit que $]-1,1[$ est un ouvert.
De même, tout réel est intérieur à $\mathbb{R}$ (qui est donc un ouvert), $\varnothing$ est également un ouvert.
En revanche 2 n'est pas intérieur à $]1,2]$ (qui n'est donc pas un ouvert).

$\overset{\circ}{D}$ est toujours inclus dans D par définition ; il y a égalité exactement lorsque D est un ouvert.

Les complémentaires des ouverts s'appellent des fermés. Par exemple, $[1,+\infty[$ est un fermé puisque son complémentaire $]-\infty,1[$ est un ouvert ; $\mathbb{R}$ est un fermé puisque son complémentaire est un ouvert, de même que $\varnothing$: $[1,2[$ n'est ni ouvert ni fermé.

3▶

Par exemple, 0 est adhérent à $[-1,1]$, comme tous les points de $[-1,1]$. En revanche, 2 et 1 sont adhérents à $]1,2]$, alors que 1 n'appartient pas à l'intervalle : cet intervalle n'est pas fermé car distinct de son adhérence.

D est toujours inclus dans $\overline{D}$ puisque tout élément de D est limite de la suite constante prenant sa valeur ; il y a égalité exactement lorsque D est un fermé.
En particulier, tout singleton est fermé.

4▶

Par exemple, $x\mapsto 1/|x|$ est majorée au voisinage de 1 (par 2 sur $[\frac{1}{2},\frac{3}{2}]$) et au voisinage de $+\infty$ (par 1 sur $[1,+\infty[$), et positive au voisinage de 0 (sur $]-1,1[\cap\mathbb{R}^*$ par exemple).

5▶

Dit moins précisément : il est possible de se placer assez proche de a pour que tout élément soit envoyé par f aussi proche de l que fixé à l'avance.

6▶

∗ Ces écritures traitent les différents cas suivant que le point au voisinage duquel on se place et la limite obtenue sont réels ou infinis.

∗ Pour le cas où l est un réel, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$ équivaut à $\lim\limits_{x\to a}|f(x)-l|=0$.

∗ Les inégalités larges des implications peuvent être écrites strictes, ce qui donne encore des définitions équivalentes.

Pratique 1 :

1. $\lim_{x\to 2} f(x) = 3$ s'écrit : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in D,\ |x-2| < \eta \Longrightarrow |f(x)-3| < \varepsilon$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$ s'écrit : $\forall B > 0,\ \exists A > 0,\ \forall x \in D,\ x > A \Longrightarrow f(x) < -B$

2. Supposons $\lim_{x\to a} f(x) = l$.
Pour tout voisinage V_l de l, il existe un voisinage V_a de a tel que $f(V_a \cap D) \subset V_l$. Or $f(a) \in f(V_a \cap D)$ si on suppose que $f(a)$ existe, donc $f(a)$ appartient à tout voisinage de l. Ainsi $f(a)$ est aussi proche de l qu'on le veut, donc $f(a) = l$.

3. Pour les isométries, $k = 1$ et l'inégalité est une égalité (fonctions de type $x \mapsto \pm x + cste$).
Supposons f k-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$, et soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Soit enfin $\varepsilon > 0$. Si on choisit $\eta = \varepsilon/k$, il vient pour tout x tel que $|x - x_0| < \eta$: $|f(x) - f(x_0)| \leqslant k\varepsilon/k = \varepsilon$. Ainsi f est de limite $f(x_0)$ en x_0.

4. Soit x_0 un réel et soit $0 < \varepsilon < 1$. Pour tout $\eta > 0$, le voisinage $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$ contient un rationnel x_1 et un irrationnel x_2 (c'est la densité de $\mathbb{Q}$ et de $\mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$).
On a alors : $|x_0 - x_1| < \eta$ et $|x_0 - x_2| < \eta$, mais $|\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x_0) - \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x_1)|$ ou $|\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x_0) - \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x_2)|$ est égal à 1 ou 0 suivant que x_0 est rationnel ou pas. $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ ne peut donc admettre $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x_0)$ pour limite en x_0.

7▶

Par exemple, $x \mapsto 1/x$ tend vers $+\infty$ en 0^+ et tend vers $-\infty$ en 0^-.

Autre exemple, $x \mapsto \mathrm{e}^{-1/x^2}$ tend vers 0 en 0^+ et en 0^- (par parité).

8▶

$*$ *Preuve* : Supposons $\lim_{x\to a} f(x) = l$: pour tout voisinage V_l de l, il existe un voisinage V_a de a tel que $f(V_a \cap D) \subset V_l$. En particulier : $f(V_a \cap D \cap]-\infty, a[) \subset V_l$ et $f(V_a \cap D \cap]a, +\infty[) \subset V_l$, donc f admet l comme limite à gauche et à droite de a.
Réciproquement, soit l la limite à droite et à gauche de f en a, et V_l un voisinage de l. On écrit les deux définitions de limites à gauche et à droite de a avec V_l, ce qui donne deux voisinages V_{ag} et V_{ad} de a ; on pose $V_a = V_{ag} \cap V_{ad}$, c'est un voisinage de a tel que : $f(V_a \smallsetminus \{a\}) \subset V_l$, ce qui justifie $\lim_{x\to a} f(x) = l$ si f n'est pas définie en a.
Si f est définie en a et $l = f(a)$, alors $f(V_a) \subset V_l$ puisque $f(a) \in V_l$, ce qui donne la conclusion. □

$*$ Comme on l'a vu, lorsque f est définie en a, la seule limite possible de f en a est $f(a)$. On dit dans ce cas que f est continue en a.
Si $f : D \to \mathbb{R}$ n'est pas définie en a mais que $\lim_{x\to a} f(x) = l$ est réel, on peut définir $g : D \cup \{a\} \to \mathbb{R}$ en posant $g(x) = f(x)$ si $x \neq a$ et $g(a) = l$. Cette fonction est alors continue en a. En général on garde le nom f pour g, et on dit qu'on prolonge f par continuité en a en posant $f(a) = l$.

9▶

$*$ *Preuve* : Supposons que f tende vers l quand x tend vers a, et soit (u_n) une suite de réels tendant vers a. Soit V_l un voisinage de l. Il existe un voisinage V_a de a tel que $f(V_a \cap D) \subset V_l$. Comme (u_n) converge vers a, il existe un rang n_0 à partir duquel $u_n \in V_a$. Par conséquent, à partir du rang n_0, $f(u_n) \in V_l$, ce qui est une des définitions équivalentes vues de la convergence de $(f(u_n))$ vers l.
Par exemple, dans le cas où a et l sont réels, on peut écrire : soit $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $|x - a| < \eta$ implique $|f(x) - l| < \varepsilon$. Si (u_n) converge vers a, il existe un rang n_0 tel que $n \geqslant n_0$ implique $|u_n - a| < \eta$. On en déduit : $|f(u_n) - l| < \varepsilon$, ce qui montre bien que la suite $(f(u_n))$ converge vers l.
Montrons la réciproque par contraposée. Supposons que f n'admette pas l pour limite en a. Il existe donc un voisinage V_l de l tel que pour tout voisinage V_a de a on ait $f(V_a \cap D) \not\subset V_l$.
En choisissant V_a égal à $]a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}[$ si a est réel et $[n, a[$ ou $]-\infty, -n]$ si $a = \pm\infty$, on fabrique pour tout naturel n non nul un réel u_n tel que $f(u_n) \notin V_l$. La suite (u_n) tend clairement vers a, mais la suite $(f(u_n))$ ne peut pas tendre vers l. □

$*$ Cette caractérisation séquentielle et très utile pour montrer qu'une fonction n'est pas continue en un point : on fabrique une suite de limite a et dont l'image par f ne converge pas vers $f(a)$.

$*$ Nous avons là notre premier **"théorème d'interversion de symboles"** (mais pas le dernier car c'est le sujet principal du cours d'analyse de deuxième année) :

> si f est continue en a et (u_n) converge vers a, on peut intervertir $\lim\limits_{n\to+\infty}$ et f :
>
> $$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\lim_{n\to+\infty} u_n) \text{ (puisque la réponse est } f(a))$$

Pratique 2 :

On choisit deux suites tendant vers 0^+ mais d'images par f de limites différentes !

Par exemple : $(u_n) = \left(\dfrac{1}{2n\pi}\right)$ et $(v_n) = \left(\dfrac{1}{(2n+1)\pi}\right)$

10▶

$*$ *Preuve* : Il suffit d'appliquer la caractérisation séquentielle de la limite et les propriétés correspondantes déjà démontrées pour les suites.

Par exemple pour 1), supposons que f admette l_1 et l_2 pour limites en a. Par la caractérisation séquentielle de la limite, pour toute suite (u_n) d'éléments de D qui converge vers a, alors $(f(u_n))$ converge vers l_1 et vers l_2. Par unicité de la limite d'une suite convergente, on obtient $l_1 = l_2$. $\square$

$*$ Rappel pour les théorèmes d'opérations : les indéterminées (non résolues) sont $(+\infty)+(-\infty)$, $0\times(\pm\infty)$ et $1^{\pm\infty}$. Reprendre les exemples vus sur les suites et transposables ici.

$*$ On applique ces théorèmes d'opérations à partir des fonctions usuelles que nous avons déjà étudiées : fonctions polynomiales, rationnelles, puissances, exponentielles, logarithmiques, trigonométriques circulaires et hyperboliques, et réciproques...

Pratique 3 :

1. Par compositions de limites, successivement e, 1, $+\infty$ et 0.

2. Idem, $-\ln 2$ et $+\infty$.

11▶

$*$ Conséquence directe de la caractérisation séquentielle de la limite (comme au point 10).

$*$ J'insiste : même si les inégalités sont strictes sur un intervalle pour f, par passage à la limite, elles deviennent larges.
Par exemple, pour tout x dans $]0,1[$ on a $\sin x > 0$, mais la limite en 0 de sin est $\sin(0) = 0$.

12▶

La preuve la plus simple consiste là encore d'utiliser les propriétés correspondantes pour les suites et la caractérisation séquentielle de la limite.

Pratique 4 :

1. Par exemple en passant par une suite (u_n) quelconque tendant vers a : la suite $(f(u_n))$ tend vers $+\infty$ par caractérisation séquentielle de la limite, et $(g(u_n))$ est bornée, donc $((f+g)(u_n)) = (f(u_n)+g(u_n))$ tend vers $+\infty$ par propriété déjà vue sur les suites. Par caractérisation séquentielle de la limite, $f+g$ tend vers $+\infty$ en a.

2. Même chose, la limite obtenue est $-\infty$.

3. Pour tout $x > 0$: $1 \leqslant 2+\sin(1/x) \leqslant 3$ puis $\dfrac{x}{3} \leqslant \dfrac{x}{2+\sin(1/x)} \leqslant x$, et par le théorème d'encadrement de fonctions, la limite cherchée est 0.

13▶

$*$ Il s'agit par ce théorème d'obtenir un encadrement d'une fonction au voisinage d'un point où l'on connaît sa limite.
Par exemple, on utilise très souvent que, si $\lim_{x \to a} f(x) = l > 0$, alors f est à valeurs strictement positives, ou même supérieures à $l/2$, au voisinage de a.

$*$ *Preuve* : Pour le premier cas par exemple, on traduit que f tend vers l en a à partir du voisinage $V_l =]-\infty, M[$ de l : il existe un voisinage V_a de a tel que $f(V_a \cap D) \subset V_l$, ce qui signifie que pour tout x dans $V_a \cap D$, $f(x) < M$, ce qui est annoncé. $\square$

14▶

$*$ Si f est décroissante, on obtient le théorème correspondant en inversant les inégalités, et en point 3) f tend en b vers une limite finie ou $-\infty$.
Adapter également le théorème pour le cas où l'intervalle considéré est $]a, b]$, ou $]a, b[$, ou $[a, b]$.

$*$ *Preuve* : $f(]a, b[)$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$, minorée par $f(a)$, donc admet une borne inférieure l. Pour tout $\varepsilon > 0$, par caractérisation de cette borne inférieure, il existe un point c_ε tel que $a < c_\varepsilon < b$ et $l \leqslant f(c_\varepsilon) < l + \varepsilon$. Comme f est croissante, pour tout $a < x < c_\varepsilon$, on obtient $l \leqslant f(x) < l + \varepsilon$, ce qui montre que f admet en a le réel l pour limite à droite. Comme $f(a) \leqslant f(x)$ pour tout $x > a$, le théorème d'encadrement montre que $f(a) \leqslant l$.
En b, si f est bornée, f admet par la même méthode une limite à gauche. Sinon, pour tout $A \geqslant 0$ il existe un point d dans $[a, b[$ tel que $f(d) > A$, et par croissance de f, pour tout $x > d$ on a $f(x) > A$, ce qui montre que f tend vers $+\infty$ en b^-.
Pour 2) et $c \in]a, b[$, utiliser les résultats précédents avec les restrictions de f à $]a, c[$ et à $]c, b[$. $\square$

15▶

Ici encore, on peut utiliser la propriété déjà vue pour les suites et la caractérisation séquentielle de la limite.

Pratique 5 :

Soit directement puisque $|\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{1+x}| = \dfrac{1}{1+x}$, soit en passant par parties réelle et imaginaire.

16▶

$*$ Continuité pour une fonction numérique sur un intervalle : c'est l'idée que l'on peut tracer son graphe sans avoir à "lever le crayon".

$*$ Comme pour les limites, les deux dernières inégalités peuvent être écrites larges ou strictes.

$*$ Comme on l'a déjà vu, $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ n'est continue en aucun point.

17▶

$*$ Exemple d'application : si $f = g$ sur une partie A dense de D et que f et g sont continues, alors $f = g$ sur D. En effet, soit $x \in D$, par densité, x est limite d'une suite (u_n) de points A où $f(u_n) = g(u_n)$. Par continuité, $(f(u_n))$ et $(g(u_n))$ convergent vers $f(x) = g(x)$.

$*$ Les fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x + y) = f(x) + f(y)$ sont de la forme $x \mapsto \alpha x$ pour un réel α.
Pour le montrer, on raisonne par analyse-synthèse. Si un telle fonction existe, alors $f(0) = 0$, f est impaire, puis pour tout naturel n, $f(n) = nf(1)$ (preuve par récurrence), puis $f(r) = rf(1)$ si r rationnel (passer par $f(p/q) = pf(1/q)$ et $qf(1/q) = f(1)$), et conclure grâce à la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

18▶

$*$ Tout ceci découle des théorèmes d'opérations sur les limites, et c'est le moyen le plus utilisé pour vérifier qu'une fonction (donnée à partir des fonctions usuelles) est continue en un point (ou sur un intervalle).

$*$ Par exemple, si f et g sont deux fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$: $\mathrm{Inf}(f, g) = \dfrac{f + g - |f - g|}{2}$ et $\mathrm{Sup}(f, g) = \dfrac{f + g + |f - g|}{2}$ sont continues sur $\mathbb{R}$.

Pratique 6 :

On utilise, pour le continuité, les théorèmes d'opérations sur les fonctions continues.
1. $\mathbb{R}$ **2.** $\mathbb{R}$ **3.** $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ **4.** $]-1, +\infty[$

19▶

Par exemple $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-1/x^2}$ se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.

Autre exemple $g : x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ se prolonge par continuité en 0 en posant $g(0) = 1$, car $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0} = \cos(0) = 1$.

20▶

$*$ Faites un dessin : vous partez du point $(a, f(a))$ et allez au point $(b, f(b))$ sans lever le crayon, vous devez traverser la droite horizontale d'ordonnée l...

$*$ *Preuve* : Supposons, quitte à changer f en $-f$, que $f(a) < l < f(b)$ (en cas d'égalité, le résultat est évident). Alors $U = \{y \in [a, b] \mid \forall x \in [a, y],\ f(x) < l\}$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide (puisque contient a) et majorée par b, elle admet donc une borne supérieure, notons-la c. Clairement, $c < b$ puisque $f(b) > l$. Si $x < c$, on a $f(x) < l$ sinon c ne serait pas le plus petit des majorants de U. En faisant tendre x vers c, la continuité de f en c et le théorème d'encadrement donne : $f(c) \leqslant l$.
Si $f(c) < l$, alors par continuité de f en c, il existe un voisinage de c sur lequel les valeurs prises par f sont strictement inférieures à l : c'est impossible, c ne serait pas un majorant de U.
Finalement, $f(c) = l$. □

$*$ Historiquement, on a longtemps cru qu'une fonction qui transforme tout intervalle inclus dans son domaine en un intervalle était continue. C'est faux comme le montre le contre-exemple f suivant : $x \mapsto \sin(1/x)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. Un intervalle ne contenant pas 0 est bien transformé en un intervalle puisque $x \mapsto \sin(1/x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$. Un intervalle qui contient 0 et non réduit à 0 contient toujours un intervalle de type $[\dfrac{1}{\pi/2 + (2n+1)\pi}, \dfrac{1}{\pi/2 + 2n\pi}]$ pour un $|n|$ naturel assez grand, donc son image par f est égale à $[-1, 1]$.

Par ailleurs, le théorème de Darboux affirme que toute dérivée sur un intervalle vérifie cette propriété des valeurs intermédiaires, alors qu'une fonction dérivable n'est pas forcément de classe C^1. Nous verrons cela en exercice au prochain chapitre.

Pratique 7 :

C'est une question on ne peut plus classique. $g : x \mapsto f(x) - x$ est continue par théorème d'opérations, positive en 0 et négative en 1. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un point c de $[0, 1]$ où g s'annule, c'est-à-dire $f(c) = c$.

21▶

$*$ *Preuve* : Soit f une fonction numérique définie sur un segment $[a, b]$. Alors $f([a, b])$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide. Si $f([a, b]))$ n'est pas majoré, il existe une suite (u_n) de points de $[a, b]$ telle que $(f(u_n))$ tend vers $+\infty$. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une injection croissante φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que $(u_{\varphi(n)})$ converge vers un point u de $[a, b]$. Par caractérisation séquentielle de la continuité, la suite $(f(u_{\varphi(n)}))$ converge vers $f(u)$, mais tend aussi vers $+\infty$ comme sous-suite de $(f(u_n))$, ce qui est impossible. Donc f est majorée sur $[a, b]$.

La partie $f([a, b])$ est donc non vide et majorée, elle admet une borne supérieure l. Par la caractérisation séquentielle de la borne supérieure, il existe une suite (v_n) de $[a, b]$ telle que $(f(v_n))$ converge vers l. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une injection croissante φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que $(v_{\varphi(n)})$ converge vers un point v de $[a, b]$. Comme f est continue, la suite $(f(v_{\varphi(n)}))$ converge vers $f(v)$ et vers l. Donc cette borne supérieure l est atteinte par f puisque $f(v) = l$.

C'est la même démonstration pour la borne inférieure.

Enfin, $f([a,b])$ est un intervalle (théorème des valeurs intermédiaires), d'où : $f([a,b]) = [\operatorname*{Inf}_{[a,b]} f, \operatorname*{Sup}_{[a,b]} f]$.□

$*$ Ce théorème est l'outil principal pour montrer qu'une borne supérieure est le maximum, ou qu'une borne inférieure est le minimum d'une fonction continue. Par exemple, si f est une fonction continue à valeurs strictement positives sur un segment $[a,b]$, alors $\operatorname*{Inf}_{[a,b]} f > 0$ parce qu'il existe un point c de $[a,b]$ en lequel cet inf est atteint par f.

$*$ Une fonction continue et périodique sur $\mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes : si T est une période de f, les valeurs prises par f sur $\mathbb{R}$ sont celles prises sur $[0,T]$, et f atteint ses bornes sur ce segment.

22▶

Pour compléter le théorème des bornes atteintes, reste à savoir comment une application continue f transforme un intervalle I autre qu'un segment. Pour le cas où f est monotone, on sait déjà par le théorème de la limite monotone et par le théorème des valeurs intermédiaires que $f(I) = (\operatorname*{Inf}_I f, \operatorname*{Sup}_I f)$, sans savoir que signifient les parenthèses en terme de crochet ouvrant ou fermant.
Par exemple, $\tan(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[) =]-\infty, +\infty[$, $\operatorname{th}(\mathbb{R}) =]-1,1[$, et pour $f : x \mapsto \sin(1/x)$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$, alors $f(\mathbb{R}) = [-1,1]$.

23▶

Preuve : Supposons par exemple f strictement croissante (quitte à changer f en $-f$). Alors $x \neq y$ implique $x < y$ ou l'inverse, donc $f(x) < f(y)$ ou l'inverse, donc $f(x) \neq f(y)$, donc f est injective.

Supposons f non strictement monotone : quitte à changer f en $-f$, il existe $x < y < z$ tels que $f(x) \geqslant f(y)$ et $f(y) \leqslant f(z)$. Si ces inégalités ne sont pas strictes, f n'est pas injective. Si elles le sont, pour une valeur l comprise strictement entre $\operatorname{Min}(f(x), f(z))$ et $f(y)$, on trouve par le théorème des valeurs intermédiaires appliqué sur $[x,y]$ d'une part et $[y,z]$ d'autre part deux points distincts d'image l par f, donc f n'est pas injective. □

24▶

$*$ *Preuve du théorème de l'homéomorphisme* : Dans ce cadre d'hypothèses, et d'après la proposition précédente, f est injective, et induit donc une bijection de I sur $f(I)$, notons-la encore f.

Reste à voir que f^{-1} est aussi continue. Supposons f strictement croissante (sinon changer f en $-f$).

Supposons f^{-1} non continue : il existe un point d de $f(I)$ tel que $f^{-1}(d)$ soit distinct de la limite de f^{-1} à droite ou à gauche en ce point, par exemple à gauche (sinon raisonnement similaire) :
$l = \lim_{x \to d^-} f^{-1}(x) < f^{-1}(d) = c$. Il existe donc $t < d$ tel que $f^{-1}(t) < l < c$. Or l'image par f de $[f^{-1}(t), c]$ est l'intervalle $[t,d]$, qui contient tout y compris entre t et d, ce qui est impossible car aucun y compris strictement entre $f(l)$ et d n'est atteint pas f. □

$*$ On a utilisé ce théorème pour justifier la continuité des fonctions racines, Arctan, Arcsin, etc.

$*$ *Preuve du dernier théorème* : Soit $f : I \to f(I)$. On sait par le théorème des bornes atteintes que $f(I)$ est un segment si I en est un. On sait aussi par le théorème des valeurs intermédiaires que $f(I)$ est un intervalle. Quitte à considérer $-f$, on suppose que f est strictement croissante sur I.

Supposons $I = [a,b)$ avec b dans $\bar{\mathbb{R}}$. Alors I contient un segment $[a,c]$ d'image $[f(a), f(c)]$, et pour tout $x > c$ on a $f(x) > f(c)$. Donc $f(I) = [f(a), ...$

Supposons $I =]a,b)$ avec a et b dans $\bar{\mathbb{R}}$. Si $f(I) = [c,d)$, alors par le raisonnement précédent appliqué à f^{-1}, on aurait $f^{-1}(f(I))$ fermé à gauche, ce qui est faux. Donc $f(I) =]\lim_{x \to a^+} f(x), ...$ d'après le théorème de la limite monotone.

Finalement, la nature des crochets à gauche de I et de $f(I)$ est la même. La preuve est la même pour traiter les crochets à droite. □

$*$ Sans ces conditions, tout est possible : par exemple, l'image d'un intervalle quelconque non vide par une fonction constante est toujours un singleton...

Pratique 8 :

f est continue sur $\mathbb{R}_+$ (théorème d'opérations) et strictement croissante (somme de telles fonctions). Par le théorème de l'homéomorphisme, f est un homéomorphisme de $\mathbb{R}_+$ sur $[f(0), \lim_{x \to +\infty} f(x)[= \mathbb{R}_+$.