

Les primitives des fonctions de base.

Louis Herzog

Table des matières

1	La fonction $x \mapsto \text{Arc cos}(x)$.	2
1.1	Calcul de la dérivée de la fonction $x \mapsto \text{Arc cos}(x)$	3
1.2	Calcul de la primitive de la fonction $x \mapsto \text{Arc cos}(x)$	3
2	La fonction $x \mapsto \text{Arc sin}(x)$.	4
2.1	Calcul de la dérivée de la fonction $x \mapsto \text{Arc sin}(x)$	4
2.2	Calcul de la primitive de la fonction $x \mapsto \text{Arc sin}(x)$	5
3	La fonction $x \mapsto \text{Arc tan}(x)$.	5
3.1	Calcul de la dérivée de la fonction $x \mapsto \text{Arc tan}(x)$	6
3.2	Calcul de la primitive de la fonction $x \mapsto \text{Arc tan}(x)$	6
4	La fonction $x \mapsto \ln(x)$.	7
4.1	Calcul de la dérivée de la fonction $x \mapsto \ln(x)$	7
4.2	Calcul de la primitive de la fonction $x \mapsto \ln(x)$	8
5	La fonction $x \mapsto \cos(x)$.	8
5.1	Dérivée de la fonction $x \mapsto \cos(x)$	9
5.2	Calcul de la primitive de la fonction $x \mapsto \cos(x)$	9
6	La fonction $x \mapsto \sin(x)$.	9
6.1	Dérivée de la fonction $x \mapsto \sin(x)$	9

6.2	Calcul de la primitive de la fonction $x \mapsto \sin(x)$	10
7	La fonction $x \mapsto \operatorname{ch}(x)$.	10
7.1	Dérivée de la fonction $x \mapsto \operatorname{ch}(x)$	10
7.2	Calcul de la primitive de la fonction $x \mapsto \operatorname{ch}(x)$	11
8	La fonction $x \mapsto \operatorname{sh}(x)$.	11
8.1	Dérivée de la fonction $x \mapsto \operatorname{sh}(x)$	11
8.2	Calcul de la primitive de la fonction $x \mapsto \operatorname{sh}(x)$	12
9	Calcul de quelques primitives.	12
9.1	Calcul d'une primitive de $x \mapsto \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$	12
9.2	Calcul d'une primitive de $x \mapsto \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$	12
9.3	Calcul d'une primitive de $x \mapsto \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \alpha^2}}$	12
9.4	Calcul d'une primitive de $x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$	12

Résumé

Quelques considérations préliminaires sur le calcul de certaines primitives telles que celles des fonctions $x \mapsto \operatorname{Arc} \cos(x)$, $x \mapsto \operatorname{Arc} \sin(x)$ ou bien $x \mapsto \operatorname{Arc} \tan(x)$ une astuce est indispensable. Elle consiste à procéder à une intégration par parties. En effet, n'ayant aucune idée des primitives, il est raisonnable de changer leurs rôles respectifs et de considérer, non plus la fonction initiale, mais sa dérivée.

Le premier objectif est donc de vérifier si celles-ci existent et sont calculables.

1 La fonction $x \mapsto \operatorname{Arc} \cos(x)$.

La restriction de la fonction $x \mapsto \cos(x)$ à l'intervalle $[0, \pi]$ est une bijection de $[0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$. Il existe donc une fonction réciproque à la fonction $x \mapsto \cos(x)$ que l'on nomme $x \mapsto \operatorname{Arc} \cos(x)$. C'est également une bijection, elle est continue sur l'intervalle fermé $[-1, 1]$ et est dérivable sur l'intervalle ouvert $] - 1, 1[$.

1.1 Calcul de la dérivée de la fonction $x \mapsto \text{Arc cos}(x)$.

Pour ce calcul, il faut utiliser le calcul de la dérivée d'une fonction composée. On a $\cos(\text{Arc cos}(x)) = x$, par conséquent la dérivée de cette expression s'exprime par $-\sin(\text{Arc cos}(x)) \times (\text{Arc cos}(x))' = 1$, d'où $(\text{Arc cos}(x))' = \frac{-1}{\sin(\text{Arc cos}(x))}$. La difficulté est maintenant de déterminer $\sin(\text{Arc cos}(x))$, or on sait que pour tout $X \in \mathbb{R}$, on a $\sin^2(X) + \cos^2(X) = 1$, d'où $\sin(X) = \sqrt{1 - \cos^2(X)}$.

En remplaçant X par $\text{Arc cos}(x)$,

$$\text{on a } \sin(\text{Arc cos}(x)) = \sqrt{1 - \cos^2(\text{Arc cos}(x))} = \sqrt{1 - x^2}.$$

$$\text{Finalement, } (\text{Arc cos}(x))' = \frac{-1}{\sin(\text{Arc cos}(x))} = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Vérification avec Sage

$$\text{f(x)} = \text{acos(x)}$$

$$\text{g(x)} = \text{diff(f(x),x,1)}$$

$$\text{La dérivée de } \text{Arc cos}(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

On peut maintenant entreprendre le calcul de la primitive de la fonction $x \mapsto \text{Arc cos}(x)$.

1.2 Calcul de la primitive de la fonction $x \mapsto \text{Arc cos}(x)$.

Je pose que $u(x)$ est égal à la fonction $\text{Arc cos}(x)$ et $v'(x)$ est égal 1 d'où $u'(x)$ est égal à la fonction $\frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$ et $v(x)$ est égal x .

$$\text{Alors on a } \int \text{Arc cos}(x) dx = x \times \text{Arc cos}(x) - \int \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}} \times x dx.$$

$$\text{Calcul de } \int \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} dx.$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \frac{-1}{2} \int \frac{d(1 - x^2)}{\sqrt{1 - x^2}} = -\sqrt{1 - x^2}.$$

$$\text{Finalement } \int \text{Arc cos}(x) dx = x \times \text{Arc cos}(x) - \sqrt{1 - x^2} + Cste$$

Vérification avec Sage

$$f(x) = \text{acos}(x)$$

$$F(x) = \text{integrate}(f(x), x)$$

La primitive de $\text{Arc cos}(x) = x \text{Arc cos}(x) - \sqrt{-x^2 + 1}$.

2 La fonction $x \mapsto \text{Arc sin}(x)$.

La restriction de la fonction $x \mapsto \sin(x)$ à l'intervalle $[0, \pi]$ est une bijection de $[0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$. Il existe donc une fonction réciproque à la fonction $x \mapsto \sin(x)$ que l'on nomme $x \mapsto \text{Arc sin}(x)$. C'est également une bijection, elle est continue sur l'intervalle fermé $[-1, 1]$ et est dérivable sur l'intervalle ouvert $] -1, 1[$.

2.1 Calcul de la dérivée de la fonction $x \mapsto \text{Arc sin}(x)$.

Pour ce calcul, il faut utiliser le calcul de la dérivée d'une fonction composée. On a $\sin(\text{Arc sin}(x)) = x$, par conséquent la dérivée de cette expression s'exprime par $\cos(\text{Arc sin}(x)) \times (\text{Arc sin}(x))' = 1$, d'où $(\text{Arc sin}(x))' = \frac{1}{\cos(\text{Arc sin}(x))}$.

La difficulté est maintenant de déterminer $\cos(\text{Arc sin}(x))$, or on sait que pour tout $X \in \mathbb{R}$, on a $\sin^2(X) + \cos^2(X) = 1$, d'où $\cos(X) = \sqrt{1 - \sin^2(X)}$.

En remplaçant X par $\text{Arc sin}(x)$,

$$\text{on a } \cos(\text{Arc sin}(x)) = \sqrt{1 - \sin^2(\text{Arc sin}(x))} = \sqrt{1 - x^2}.$$

$$\text{Finalement, } (\text{Arc sin}(x))' = \frac{1}{\cos(\text{Arc sin}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

2.1.1 Vérification avec Sage

$$f(x) = \text{asin}(x)$$

$$g(x) = \text{diff}(f(x), x, 1)$$

$$\text{La dérivée de } \text{Arc sin}(x) = \frac{1}{\sqrt{-x^2 + 1}}.$$

On peut maintenant entreprendre le calcul de la primitive de la fonction $x \mapsto \text{Arc sin}(x)$.

2.2 Calcul de la primitive de la fonction $x \mapsto \text{Arc sin}(x)$.

Je pose que $u(x)$ est égal à la fonction $\text{Arc sin}(x)$ et $v'(x)$ est égal 1 d'où $u'(x)$ est égal à la fonction $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $v(x)$ est égal x .

Alors on a $\int \text{Arc sin}(x) dx = x \times \text{Arc sin}(x) - \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \times x dx$.

2.2.1 Calcul de $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{1-x^2}.$$

Finalement $\int \text{Arc sin}(x) dx = x \times \text{Arc sin}(x) - \sqrt{1-x^2} + Cste$

2.2.2 Vérification avec Sage

$$f(x) = \text{asin}(x)$$

$$F(x) = \text{integrate}(f(x), x)$$

La primitive de $\text{Arc sin}(x) = x \text{Arc sin}(x) + \sqrt{-x^2 + 1}$.

3 La fonction $x \mapsto \text{Arc tan}(x)$.

La restriction de la fonction $x \mapsto \tan(x)$ à l'intervalle $[0, \pi]$ est une bijection de $[0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$. Il existe donc une fonction réciproque à la fonction $x \mapsto \tan(x)$ que l'on nomme $x \mapsto \text{Arc tan}(x)$. C'est également une bijection, elle est continue sur l'intervalle fermé $[-1, 1]$ et est dérivable sur l'intervalle ouvert $] -1, 1[$.

3.1 Calcul de la dérivée de la fonction $x \mapsto \text{Arc tan}(x)$.

Pour ce calcul, il faut utiliser le calcul de la dérivée d'une fonction composée. On a $\tan(\text{Arc tan}(x)) = x$, par conséquent la dérivée de cette expression s'exprime par $\tan(\text{Arc tan}(x)) \times (\text{Arc tan}(x))' = 1$, d'où $(\text{Arc tan}(x))' = \frac{1}{1+x^2}$. La difficulté est maintenant de déterminer $\tan'(\text{Arc tan}(x))$, or on sait que pour tout $X \in \mathbb{R}$, on a $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$, d'où $\tan'(\text{Arc tan}(x)) = 1 + x^2$. Finalement, $(\text{Arc tan}(x))' = \frac{1}{1+x^2}$.

Vérification avec Sage

```
f(x) = atan(x)
g(x) = diff(f(x),x,1)
```

La dérivée de $\text{Arc tan}(x) = \frac{1}{x^2+1}$.

On peut maintenant entreprendre le calcul de la primitive de la fonction $x \mapsto \text{Arc tan}(x)$.

3.2 Calcul de la primitive de la fonction $x \mapsto \text{Arc tan}(x)$.

Je pose que $u(x)$ est égal à la fonction $\text{Arc tan}(x)$ et $v'(x)$ est égal 1 d'où $u'(x)$ est égal à la fonction $\frac{1}{1+x^2}$ et $v(x)$ est égal x .

Alors on a $\int \text{Arc tan}(x) dx = x \times \text{Arc tan}(x) - \int \frac{1}{1+x^2} \times x dx$.

3.2.1 Calcul de $\int \frac{x}{1+x^2} dx$.

$$\int \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2}.$$

Finalement $\int \text{Arc tan}(x) dx = x \times \text{Arc tan}(x) - \ln \sqrt{1+x^2} + Cste$

3.2.2 Vérification avec Sage

```
f(x) = atan(x)
```

$$F(x) = \text{integrate}(f(x), x)$$

La primitive de $\text{Arc tan}(x) = x \text{Arc tan}(x) - \frac{1}{2} \log(x^2 + 1)$.

4 La fonction $x \mapsto \ln(x)$.

La restriction de la fonction $x \mapsto \tan(x)$ à l'intervalle $[0, \pi]$ est une bijection de $[0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$. Il existe donc une fonction réciproque à la fonction $x \mapsto \tan(x)$ que l'on nomme $x \mapsto \text{Arc tan}(x)$. C'est également une bijection, elle est continue sur l'intervalle fermé $[-1, 1]$ et est dérivable sur l'intervalle ouvert $] -1, 1[$.

4.1 Calcul de la dérivée de la fonction $x \mapsto \ln(x)$.

4.1.1 Première Méthode

Passons par les limites pour trouver la primitive de $\ln(x)$,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(\frac{x+h}{x})}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+X)}{x \times X}, \text{ avec } X = \frac{h}{x}.$$

On a donc

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+X)}{x \times X} = \frac{1}{x} \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = \frac{1}{x} \times 1 = \frac{1}{x}$$

4.1.2 Seconde Méthode

Pour ce calcul, il faut utiliser le calcul de la dérivée d'une fonction composée. On a $\exp(\ln(x)) = x$, par conséquent la dérivée de cette expression s'exprime par $\exp(\ln(x)) \times (\ln(x))' = 1$, d'où $(\ln(x))' = \frac{1}{\exp(\ln(x))} = \frac{1}{x}$.

4.1.3 Vérification avec Sage

$$f(x) = \ln(x)$$

$$g(x) = \text{diff}(f(x), x, 1)$$

La dérivée de $\log(x) = \frac{1}{x}$.

On peut maintenant entreprendre le calcul de la primitive de la fonction $x \mapsto \ln(x)$.

4.2 Calcul de la primitive de la fonction $x \mapsto \ln(x)$.

Je pose que $u(x)$ est égal à la fonction $\ln(x)$ et $v'(x)$ est égal 1 d'où $u'(x)$ est égal à la fonction $\frac{1}{1+x^2}$ et $v(x)$ est égal x .

Alors on a $\int \ln(x) dx = x \times \ln(x) - \int \frac{1}{x} \times x dx$.

4.2.1 Calcul de $\int \frac{x}{x} dx$.

$$\int \frac{x}{x} dx = \int 1 dx = x.$$

Finalement $\int \ln(x) dx = x \times \ln(x) - x + Cste$

4.2.2 Vérification avec Sage

$$f(x) = \ln(x)$$

$$F(x) = \text{integrate}(f(x), x)$$

La primitive de $\log(x) = x \log(x) - x$.

5 La fonction $x \mapsto \cos(x)$.

La restriction de la fonction $x \mapsto \ln(x)$ à l'intervalle $[0, \pi]$ est une bijection de $[0, \pi] \rightarrow [0, +\infty]$. Il existe donc une fonction réciproque à la fonction $x \mapsto \ln(x)$ que l'on nomme $x \mapsto \exp(x)$. C'est également une bijection, elle est continue sur l'intervalle fermé $[-1, 1]$ et est dérivable sur l'intervalle ouvert $] -\infty, +\infty[$.

5.1 Dérivée de la fonction $x \mapsto \cos(x)$.

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x)\cos(h) - \sin(x)\sin(h) - \cos(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x)(\cos(h) - 1)}{h} - \frac{\sin(x)\sin(h)}{h} \\ &= -\sin x\end{aligned}$$

5.1.1 Vérification avec Sage

5.2 Calcul de la primitive de la fonction $x \mapsto \cos(x)$.

5.2.1 Vérification avec Sage

6 La fonction $x \mapsto \sin(x)$.

6.1 Dérivée de la fonction $x \mapsto \sin(x)$.

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x)\sin(h) - \cos(x)\sin(h) - \sin(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x)(\cos(h) - 1)}{h} - \frac{\cos(x)\sin(h)}{h} \\ &= \cos x\end{aligned}$$

6.1.1 Vérification avec Sage

6.2 Calcul de la primitive de la fonction $x \mapsto \sin(x)$.

6.2.1 Vérification avec Sage

7 La fonction $x \mapsto \operatorname{ch}(x)$.

7.1 Dérivée de la fonction $x \mapsto \operatorname{ch}(x)$.

$$\begin{aligned}\operatorname{ch}(x)' &= \left(\frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2} \right)' \\ &= \frac{\exp(x)' + \exp(-x)'}{2} \\ &= \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2} \\ &= \operatorname{sh}(x)\end{aligned}$$

7.1.1 Vérification avec Sage

7.2 Calcul de la primitive de la fonction $x \mapsto \operatorname{ch}(x)$.

7.2.1 Vérification avec Sage

8 La fonction $x \mapsto \operatorname{sh}(x)$.

8.1 Dérivée de la fonction $x \mapsto \operatorname{sh}(x)$.

$$\begin{aligned}\operatorname{sh}(x)' &= \left(\frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2} \right)' \\ &= \frac{\exp(x)' - \exp(-x)'}{2} \\ &= \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2} \\ &= \operatorname{ch}(x)\end{aligned}$$

8.1.1 Vérification avec Sage

8.2 Calcul de la primitive de la fonction $x \mapsto \operatorname{sh}(x)$.

8.2.1 Vérification avec Sage

9 Calcul de quelques primitives.

9.1 Calcul d'une primitive de $x \mapsto \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$

9.1.1 Vérification avec Sage

9.2 Calcul d'une primitive de $x \mapsto \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$

9.2.1 Vérification avec Sage

9.3 Calcul d'une primitive de $x \mapsto \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \alpha^2}}$

9.3.1 Vérification avec Sage

9.3.2 Calcul d'une primitive de $x \mapsto \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}$ par un changement de variable puis par l'emploi d'une variable auxiliaire

9.3.3 Vérification avec Sage

9.4 Calcul d'une primitive de $x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$

9.4.1 Vérification avec Sage