Chapitre 9 : ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

I et J désignent des intervalles non vides de $\mathbb{R}$ et non réduits à un point. $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Préliminaires

• Une fonction $a : I \to \mathbb{C}$ est
$*$ continue si les fonctions $\mathcal{R}e(a)$ et $\mathcal{I}m(a)$ (de I dans $\mathbb{R}$) le sont (on note $a \in C^0(I, \mathbb{C})$) ;
$*$ de classe C^k si a est k fois dérivable sur I (c'est-à-dire si $\mathcal{R}e(a)$ et $\mathcal{I}m(a)$ le sont) et de dérivée k-ième continue (on note $a \in C^k(I, \mathbb{C})$) ;
$*$ de classe C^∞ sur I si a est de classe C^k pour tout naturel k (on note $a \in C^\infty(I, \mathbb{C})$) ;

• La somme, le produit, le quotient et la composée de deux fonctions de classe C^k (resp. C^∞) est de classe C^k (resp. C^∞).

• La dérivation est linéaire sur $C^1(I, \mathbb{K})$, et la dérivée d'une composée est : $(a \circ b)' = (a' \circ b).b'$

• Si $a \in C^0(I, \mathbb{K})$ et $t_0 \in I$, alors $A : t \mapsto \displaystyle\int_{t_0}^{t} a(u)\,du$ est l'unique primitive de a sur I qui s'annule en t_0 (en particulier $A' = a$), les autres primitives de A sont les $A + cste$
(C'est le théorème fondamental de l'analyse).

1▸

II Équations différentielles linéaires d'ordre 1

II.1 Description

$(E) : a(t)x' + b(t)x = c(t),$ *Exemple :* $2t\,x' + x = t^2 + 1$

où a, b, c appartiennent à $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$, $x \in C^1(J, \mathbb{K})$ est la fonction inconnue et J est un sous-intervalle de I.

Définition

> *(1) Solution de (E) : toute application de classe C^1 sur un intervalle $J \subset I$ telle que :*
>
> $$\forall t \in J, \quad a(t)x'(t) + b(t)x(t) = c(t).$$
>
> *(2) Solution maximale de (E) : solution qui n'est restriction stricte d'aucune autre solution.*
>
> *(3) Problème de Cauchy en $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{K}$:*
> *$*$ Existence d'une solution maximale x définie en t_0 vérifiant la condition initiale $x(t_0) = x_0$?*
> *$*$ Unicité d'une telle solution maximale si elle existe ?*

2▸

Premier temps : chercher des solutions de (E) sur des sous-intervalles de I où a ne s'annule pas, c'est-à-dire résoudre l'équation résolue associée : (ER) $x' + \frac{b}{a}x = \frac{c}{a}$

II.2 Exemples simples

• Les solutions maximales de $x' = c$ (cas $a = 1$, $b = 0$, c continue sur I) sont les primitives définies sur I de c ; une constante arbitraire intervient.

3▶

• $x' = x$ admet pour solutions : $t \mapsto \lambda \mathrm{e}^t$, λ complexe quelconque.

4▶

• Solutions de $x' + ax = 0$ où a est constante : $t \mapsto \lambda \mathrm{e}^{-at}$, λ complexe quelconque.

5▶

II.3 Première étape : l'équation résolue homogène

(ER) $x' + \alpha(t)x = \beta(t)$ avec α et β continues sur J.

Équation homogène associée : (H) $x' + \alpha(t)x = 0$

Théorème

> *L'ensemble $\mathcal{S}(H)$ des solutions maximales de (H) est le sous-ensemble de $C^1(J, \mathbb{K})$ formé des fonctions multiples de $\tilde{x}$: $t \mapsto \exp\left(\int_{t_0}^{t} (-\alpha(u))\,\mathrm{d}u\right)$, où t_0 est un point de J.*
>
> *(On dit que $\mathcal{S}(H)$ forme un sous-espace vectoriel de $C^1(J, \mathbb{K})$ de base $\tilde{x}$).*

6▶

> Une solution d'une équation homogène résolue sur J qui s'annule en un point de J est la fonction nulle.

Pratique 1 :

Résoudre : **1.** $x' - 2x = 0$ **2.** $x' + 3tx = 0$ **3.** $x' + \frac{x}{t} = 0$

II.4 Deuxième étape : l'équation résolue (avec second membre)

(ER) $x' + \alpha(t)x = \beta(t)$ avec α et β continues sur J.

Équation homogène associée : (H) $x' + \alpha(t)x = 0$

Théorème

> *Toute solution maximale de (ER) s'écrit comme somme d'une solution maximale particulière de (ER) et d'une solution de (H).*
>
> *Les solutions maximales de (ER) sont définies sur J entier et s'écrivent :*
>
> $t \mapsto \tilde{x}(t).\left(cste + \int_{t_0}^{t} \frac{\beta(u)}{\tilde{x}(u)}\,\mathrm{d}u\right)$*, où $cste$ est une constante quelconque de $\mathbb{K}$.*
>
> *(On dit que $\mathcal{S}(ER)$ forme un sous-espace affine de $C^1(J, \mathbb{K})$ de direction $\mathcal{S}(H)$).*

7▶

Théorème de Cauchy-Lipschitz :

> (ER) $x' + \alpha x = \beta$ *avec* α *et* β *continues sur* J *à valeurs dans* $\mathbb{K}$.
>
> *Pour tout* (t_0, x_0) *de* $J \times \mathbb{K}$*, l'équation résolue* (ER) *admet une unique solution maximale au problème de Cauchy en* (t_0, x_0).
> *Cette solution maximale est définie sur* J *entier.*

⚠ Le théorème de Cauchy-Lipschitz ne s'applique que dans le cadre d'une équation résolue !!

8▶

II.5 Recherche pratique d'une solution particulière d'une équation résolue

1) Un cas simple : (ER) $x' + \alpha x = \mathrm{e}^{ut}P(t)$ avec α constante et P polynomiale de degré n.

$\to$ on recherche une solution de type $t \mapsto \mathrm{e}^{ut}Q(t)$ avec Q polynomiale de degré n si $u + \alpha \neq 0$, de degré $n+1$ si $u + \alpha = 0$.

9▶

Pratique 2 :
Résoudre : **1.** $x' + x = 1$ **2.** $x' + x = -t$ **3.** $x' + x = t\mathrm{e}^{2t}$ **4.** $x' + x = t\mathrm{e}^{-t}$

2) Un outil pour se ramener aux cas simples : le principe de superposition

$\to$ on obtient une solution particulière de $x' + \alpha(t)x = \beta_1(t) + \beta_2(t) +$ etc., en sommant des solutions particulières obtenues pour $x' + \alpha(t)x = \beta_1(t)$, $x' + \alpha(t)x = \beta_2(t)$, etc.

10▶

Pratique 3 :
Résoudre : $x' + 2x = 1 + \sin(t) + \mathrm{e}^{-2t}$.

3) Dernier recours : la méthode de variation de la constante.

$\to$ on cherche une solution particulière de forme $t \mapsto \lambda(t)\,\tilde{x}(t)$ où $(\tilde{x})$ forme une base de $\mathcal{S}(H)$.

11▶

Pratique 4 :
Résoudre : $x' + \dfrac{x}{t} = \mathrm{e}^t$

II.6 Retour à (E) : recherche des raccordements

12▶

III Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

III.1 Description

$(E) : ax'' + bx' + cx = d(t)$,

où a, b, c sont des constantes, $a \neq 0$, $d \in C^0(I, \mathbb{K})$, et $x \in C^2(J, \mathbb{K})$ est la fonction inconnue et J est un sous-intervalle de I.

Cette équation d'ordre 2 est résolue ($a \neq 0$).

Équation homogène associée : $(H) : ax'' + bx' + cx = 0$

Définition

(1) Solution de (E) : toute application de classe C^2 sur un intervalle $J \subset I$ telle que :

$$\forall t \in J, \quad : ax''(t) + bx'(t) + cx(t) = d(t)$$

(2) Solution maximale de (E) : solution qui n'est restriction stricte d'aucune autre solution.

(3) Problème de Cauchy en $(t_0, x_0, x_1) \in I \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$:

$*$ Existence d'une solution maximale x vérifiant la condition initiale $\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ x'(t_0) = x_1 \end{cases}$?

$*$ Unicité d'une telle solution maximale si elle existe ?

13▶

III.2 Exemples simples

• Solutions de $x'' = d$ (cas $a = 1$, $b = c = 0$, d continue sur I) : les solutions sont les primitives des primitives de d, deux constantes arbitraires interviennent.

14▶

• $x'' = x$ admet pour solutions maximales : $t \mapsto A\mathrm{e}^t + B\mathrm{e}^{-t}$, ou encore $t \mapsto A\,\mathrm{ch}(t) + B\,\mathrm{sh}(t)$, A et B complexes quelconques.

• $x'' = -x$ admet pour solutions maximales : $t \mapsto A\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}$, ou encore $t \mapsto A\cos(t) + B\sin(t)$, A et B complexes quelconques.

15▶

III.3 Première étape : résoudre l'équation homogène

$(H)\ ax'' + bx' + cx = 0$

16▶

Équation caractéristique associée à (E) : $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \quad (Ec)$ (l'inconnue est λ)

Théorème

L'ensemble $\mathcal{S}(H)$ des $\boxed{\text{solutions complexes maximales}}$ de (H) est le sous-ensemble de $C^2(J, \mathbb{C})$ formé des combinaisons linéaires des deux fonctions suivantes :

(a) si Ec admet deux racines distinctes λ_1 et λ_2 : $t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda_1 t}$ et $t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda_2 t}$

(b) si Ec admet une racine double λ : $t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda t}$ et $t \mapsto t\mathrm{e}^{\lambda t}$.

(On dit que $\mathcal{S}(H)$ forme un sous-espace vectoriel de $C^2(J, \mathbb{C})$ de dimension 2).

17▶

Pratique 5 :

Solutions complexes de : **1.** $x'' - 4x' + 3x = 0$ **2.** $x'' + 2\mathrm{i}x' - x = 0$ **3.** $x'' + x' + x = 0$

THÉORÈME

On suppose a, b et c réels. On note Δ le discriminant de l'équation caractéristique (Ec).
L'ensemble $\mathcal{S}(H)$ des $\boxed{\textit{solutions réelles maximales}}$ *de (H) est le sous-espace vectoriel de $C^2(J, \mathbb{K})$ formé des combinaisons linéaires des deux fonctions suivantes :*

(a) si $\Delta > 0$, donc Ec admet deux racines distinctes λ_1 et λ_2 : $t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda_1 t}$ et $t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda_2 t}$;
(b) si $\Delta = 0$, donc Ec admet une racine double λ : $t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda t}$ et $t \mapsto t\mathrm{e}^{\lambda t}$;

(c) si $\Delta < 0$, donc (Ec) admet deux racines complexes non réelles conjuguées $\alpha \pm \mathrm{i}\beta$: $t \mapsto \mathrm{e}^{\alpha t}\cos(\beta t)$ et $t \mapsto \mathrm{e}^{\alpha t}\sin(\beta t)$.

18▶

Pratique 6 :

Solutions réelles de : **1.** $x'' - x = 0$ **2.** $x'' + x = 0$ **3.** $x'' + x' + x = 0$

III.4 Deuxième étape : l'équation avec second membre

(E) $ax'' + bx' + cx = d(t)$ avec d continue sur I (rappel : a, b, c constantes, $a \neq 0$).

Équation homogène associée : (H) $ax'' + bx' + cx = 0$

THÉORÈME

Toute solution maximale de (E) s'écrit comme somme d'une solution maximale particulière de (E) et d'une solution de (H). Un telle solution maximale de (E) existe et est définie sur I.

On dit que $\mathcal{S}(E)$ forme un sous-espace affine de $C^2(I, \mathbb{K})$ de direction $\mathcal{S}(H)$.

19▶

THÉORÈME DE CAUCHY-LIPSCHITZ :

Pour tout (t_0, x_0, x_1) de $I \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$, l'équation résolue (E) admet une unique solution maximale au problème de Cauchy en (t_0, x_0, x_1).
Cette solution maximale est définie sur I entier.

⚠ Le théorème de Cauchy-Lipschitz ne s'applique que dans le cadre d'une équation résolue ! !

20▶

III.5 Recherche pratique d'une solution particulière d'une équation résolue

1) Un cas simple : (ER) $ax'' + bx' + cx = \mathrm{e}^{ut}P(t)$ avec P polynomiale de degré n.

$\rightarrow$ on recherche une solution de type $t \mapsto \mathrm{e}^{ut}Q(t)$ avec Q polynomiale de degré n si u n'est pas solution de (Ec), de degré $n+1$ si u est racine simple de (Ec), de degré $n+2$ si u est racine double de (Ec).

21▶

Pratique 7 :

Résoudre : **1.** $x'' - 4x = 1$ **2.** $x'' - 4x = \mathrm{e}^t$ **3.** $x'' - 4x = \mathrm{e}^{2t}$

2) Un outil pour se ramener aux cas simples : le principe de superposition

$\rightarrow$ on obtient une solution particulière de $ax'' + bx' + cx = d_1(t) + d_2(t)$+etc., en sommant des solutions particulières obtenues pour $ax'' + bx' + cx = d_1(t)$, $ax'' + bx' + cx = d_2(t)$, etc.

22▶

Pratique 8 :

Résoudre : $x'' + 4x = 1 + \sin(t) + \cos(2t)$.

SAVOIR...

(1) *... étudier une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 1 :*

a) résolution sur les intervalles où elle est résolue

i) formule pour la résolution de l'équation homogène

ii) recherche d'une solution particulière

(cas exponentielle/polynôme, variation de la constante en dernier recours)

b) recherche des raccordements éventuels des intervalles plus grands

c) résolution du problème de Cauchy et allure graphique des solutions si demandé

(2) *... appliquer les différentes étapes d'étude d'une équation différentielle scalaire d'ordre 2 à coefficients constants : recherche d'une base de solutions de l'équation homogène, expressions réelle ou complexe, recherche d'une solution particulière dans les cas exponentielle-polynôme.*