►► 17 : ESPACES VECTORIELS

1►

$*$ Les propriétés imposées par la définition donnent les règles de calcul et expliquent comme interagissent l'addition et la multiplication externe : sortes de pseudo "distributivités" et d'"associativité".

$*$ *Preuve de la proposition* : Supposons $\lambda.x = 0_E$ et supposons $\lambda \neq 0_{\mathbb{K}}$, alors en multipliant par $1/\lambda$ (on peut car $\mathbb{K}$ est un corps), d'après d), $1.x = 0_E$ donc $x = 0_E$ d'après a).
Réciproquement, si $\lambda = 0_{\mathbb{K}}$, alors en choisissant $\lambda = \mu = 0_{\mathbb{K}}$ et un x dans E, avec c), $0_{\mathbb{K}}.x = 0_E$.
Enfin si $x = 0_E$, pour λ scalaire, avec $x = y = 0_E$ dans b), $\lambda.x = 0_E$. □

$*$ On n'écrira pas de flèche sur les vecteurs, ce sera plus rapide et allégé. En contre-partie, pour que les expressions soient lisibles, toujours placer les scalaires à gauche du vecteur qu'ils multiplient. Pour plus de lisibilité également, on note en général les vecteurs par les lettres de la fin de l'alphabet latin (x, y, z, u, v, ...) et les scalaires par des lettres grecques (α, β, λ, μ, ...).

$*$ $\boxed{\text{Exemples à connaître}}$:

a) $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. La multiplication est externe de ce point de vue, qui n'apporte toutefois par grand chose.
Les réels sont les vecteurs de cet espace...

b) De même, $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.

c) Plus intéressant : $(\mathbb{C}, +, .)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, différent du précédent par ses opérations : dans le premier par exemple, $\mathrm{i} = \mathrm{i}.1$ (on peut attraper le vecteur $\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ depuis le vecteur $1 \in \mathbb{C}$ grâce au scalaire i), alors que dans le deuxième, du fait que le corps des scalaires est $\mathbb{R}$, on ne peut pas "attraper" le vecteur $\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ depuis le vecteur $1 \in \mathbb{C}$ puisqu'il n'existe pas de scalaire réel λ tel que $\mathrm{i} = \lambda.1$.

d) $(\mathbb{K}[X], +, .)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, ainsi que $(\mathbb{K}_n[X], +, .)$.
Les vecteurs de cet espace sont donc des polynômes.

e) $(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}, +, .)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ (suites à coefficients dans $\mathbb{K}$),

f) $(\mathcal{F}(I, \mathbb{R}), +, .)$ sur $\mathbb{R}$ (fonctions d'un intervalle I dans $\mathbb{R}$), ses vecteurs sont des fonctions...

g) $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +, .)$ sur $\mathbb{K}$ (matrices à n lignes et p colonnes).

2►

$*$ Par exemple, dans l'espace vectoriel $(\mathbb{R}^4, +, .)$ sur $\mathbb{R}$, on écrira :

$$2.(0, 1, 3, -1) + 3.(-1, 1/3, 0, 0) = (-3, 3, 6, -2)$$

Autre exemple, dans l'espace vectoriel $(\mathbb{R} \times \mathbb{C}, +, .)$ sur $\mathbb{R}$, on écrira :

$$-(1, \mathrm{i} + 1) + 5(-1, 2) + (1/3)(-\sqrt{2}, 6\mathrm{i}) = (-6 - \sqrt{2}/3, \mathrm{i} + 9)$$

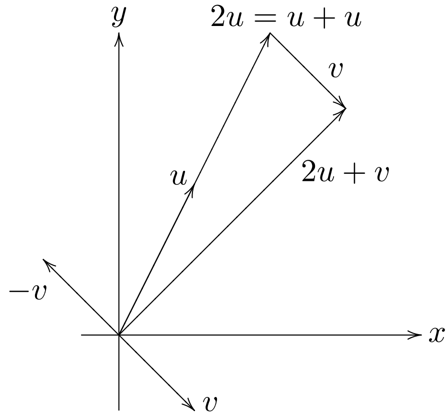
$*$ *Preuve* : Notons $E = \prod_{i=1}^{n} E_i$ le produit des ensembles E_i : c'est l'ensemble des n-uplets $(x_1, \dots, x_n)$ où pour chaque i on a $x_i \in E_i$.
On vérifie que $(E, +)$ forme un groupe commutatif : la loi $+$ est clairement interne, d'élément neutre le n-uplet $(0_{E_1}, 0_{E_2}, \dots, 0_{E_n})$ formé des neutres des E_i, et l'inverse de $(x_1, \dots, x_n)$ et $(-x_1, \dots, -x_n)$, la commutativité étant assurée par celle des additions dans chaque E_i.
Il reste à vérifier les axiomes a) à d) de la définition, ce qui n'est qu'un jeu d'écriture. Par exemple pour b), prenons x et y dans E et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors x et y s'écrivent $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$ pour des x_i et y_i dans E_i, et alors :

$$\lambda.(x + y) = \lambda.((x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n)) = \lambda.(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) = (\lambda.(x_1 + y_1), \dots, \lambda.(x_n + y_n))$$
$$= (\lambda.x_1 + \lambda.y_1, \dots, \lambda.x_n + \lambda.y_n) = (\lambda.x_1, \dots, \lambda.x_n) + (\lambda.y_1, \dots, \lambda.y_n) = \lambda.x + \lambda.y$$

où on a utilisé les définitions des lois sur le produit E. □

$*$ Ainsi, en choisissant $E_i = \mathbb{K}$, on obtient les $\boxed{\text{espaces les plus utilisés}}$: $(\mathbb{K}^n, +, .)$ espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, où n est un naturel non nul.

Grâce aux définitions des lois sur un espace vectoriel produit, on obtient les illustrations géométriques suivantes dans $\mathbb{R}^2$.



3►

$*$ Une combinaison linéaire formée à partir d'un seul vecteur x donne un vecteur "proportionnel" à x et inversement. Leur ensemble s'appelle aussi la droite portée par x.

$*$ Par exemple, dans $(\mathbb{K}[X], +, .)$, les combinaisons linéaires formées à partir de X sont les λX avec λ scalaire quelconque ; on dit aussi que c'est la droite portée par le vecteur X.
Les combinaisons linéaires formées à partir des vecteurs $1 = X^0$, X, ..., X^n forment l'espace vectoriel $(\mathbb{K}_n[X], +, .)$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ et de degré $\leqslant n$.

$*$ Par exemple, pour deux vecteurs u et v d'un espace vectoriel $(E, +, .)$, $u+v$, $u-v$, $2u+v$ sont des combinaisons linéaires de u et de v.

$*$ Réciproquement, tout complexe s'écrivant $a + b\mathrm{i}$ avec a et b réels, l'espace vectoriel $(\mathbb{C}, +, .)$ sur $\mathbb{R}$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de 1 et i (à coefficients réels).
Le plan $\mathbb{R}^2$ est l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients réels des vecteurs $(1,0)$ et $(0,1)$.
Enfin, l'espace $\mathbb{R}^3$ est l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients réels des vecteurs $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ et $(0,0,1)$, mais aussi par exemple des vecteurs $(1,0,0)$, $(0,1,1)$ et $(0,1,-1)$...

$\boxed{\textbf{Pratique 1 :}}$

1. On cherche λ et μ tels que $\lambda(1,0) + \mu(0,1) = (2,3) = (\lambda, \mu)$, ce qui conduit au système très simple $\lambda = 2$, $\mu = 3$. D'où l'existence et l'unicité de la combinaison linéaire demandée.
v_3 n'est pas proportionnel à u, il n'existe pas de scalaire λ tel que $v_3 = \lambda u$. Même chose avec v_4.
Enfin, v_3 et v_4 étant proportionnels ($v_4 = 2v_3$), toute combinaison linéaire de v_3 et v_4 est un multiple de v_3.

2. Supposons $(x,y) = \lambda.(1,-1)$, il vient $x = \lambda$ et $y = -\lambda$, donc $x = -y$.
Réciproquement, $(x,-x) = x.(1,-1)$. L'ensemble de ces vecteurs est la droite des multiples de $(1,-1)$, c'est-à-dire la droite du plan passant par l'origine (elle doit contenir le vecteur nul, comme tout ensemble de combinaisons linéaires) et de pente -1. Dans le plan complexe, il s'agit des multiples de $1 - \mathrm{i}$.

3. De même, (x,y,z) est combinaison linéaire de v_1 et v_2 si, et seulement si, il existe λ et μ réels tels que $x = \lambda + 2\mu$, $y = 2\lambda - \mu$ et $z = 2\mu$. On a donc un système de trois équations et deux inconnues λ et μ. On cherche donc à quelle condition sur les données x, y et z ce système admet une solution. Comme $\mu = z/2$ donc $\lambda = x - z$ (le système a déjà une forme triangulaire), la condition de compatibilité s'écrit : $y = 2x - 2z - z/2$, ou encore : $2x - y - 5z/2 = 0$. L'ensemble de ces vecteurs forme le plan de $\mathbb{R}^3$ (on reviendra sur cette définition) d'équation cartésienne (fonction des coordonnées de ses éléments) $2x - y - 5z/2 = 0$.
Le vecteur $(1,1,1)$ n'est pas dans ce plan puisque $2 \times 1 - 1 - 5/2 \neq 0$.

4►

$*$ Pour former une algèbre, il faut donc deux lois internes et une externe, le troisième requis expliquant comment fonctionnent entre elles les deux dernières lois.

$*$ Par exemple, $(\mathbb{K}, +, \times, \times)$ forme une algèbre sur $\mathbb{K}$ (où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), où on regarde la multiplication usuelle $\times$ une fois comme loi interne de $\mathbb{K}$, une fois comme loi externe (le corps de base étant $\mathbb{K}$...).

On peut vérifier que $(\mathbb{C}, +, \times, .)$ est aussi une algèbre sur $\mathbb{R}$.

Enfin, on utilisera sans cesse que $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, ., \times)$ forme une algèbre sur $\mathbb{K}$ (matrices carrées), mais il faut pour cela définir le produit de deux matrices.

5▶

$*$ En particulier, un sous-espace vectoriel ne peut pas être vide puisqu'il contient l'élément neutre 0_E, et est stable par combinaison linéaire.

$*$ Par exemple, $\{0_E\}$ forme toujours un sous-espace vectoriel de $(E, +, .)$ (ainsi que E).

$*$ Même définition adaptée pour une sous-algèbre.

$*$ $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{R}^2, +, .)$ car n'est pas stable par combinaison linéaire : par exemple $2.(1, 0)$ n'appartient pas au disque unité.

6▶

$*$ *Preuve* : Il reste donc à établir la réciproque du premier point du paragraphe 5 précédent.
Supposons 1) et 2).
F est donc non vide, stable par l'addition (choisir $\lambda = 1$ dans 2)), et par passage à l'opposé (choisir $\lambda = -1$ et $y = 0$ pour obtenir $-x \in F$), et l'addition est commutative dans E donc dans F. Ainsi, $(F, +)$ forme un groupe commutatif.
Enfin, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in E$, $\lambda.x \in F$ d'après 2) (en choisissant $y = 0$), . est donc une loi externe sur F, et les quatre axiomes restant à vérifier le sont bien avec des éléments de F puisqu'ils le sont avec des éléments de E. $\square$

$*$ Vous trouverez possiblement dans certains livres la propriété 2) exprimée avec $\lambda x + \mu y \in F$, ce qui ne change rien : les deux reviennent à montrer que $+$ est une loi interne sur F et . une loi externe sur F.

$*$ Comme on l'a déjà vu entre groupe et sous-groupe, si F est un sous-espace vectoriel de $(E, +, .)$, le neutre 0_F dans F est égal à 0_E nécessairement.

$*$ Exemples de sous-espaces vectoriels : droites ou plans de $\mathbb{R}^3$ passant par l'origine, $\mathbb{K}_n[X]$ dans $\mathbb{K}[X]$, ensemble des fonctions nulles en 0 dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, ensemble des solutions d'un système linéaire homogène.

⚠ Les droites ou les plans de $\mathbb{R}^3$ qui ne contiennent pas l'origine ne sont donc pas des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ (ce sont des sous-espaces affines de $\mathbb{R}^3$, comme ensembles translatés des sous-espaces vectoriels qu'on appelle leurs directions).

7▶

$*$ *Preuve* : Soit F_i, pour $i \in I$ où I est un ensemble, des sous-espaces vectoriels de E. Posons : $F = \bigcap_{i \in I} F_i$.
Comme chaque F_i contient 0_E, il en est de même de F qui n'est pas vide.
Soit x et y dans F et $\lambda \in \mathbb{K}$. Pour tout $i \in I$, puisque F_i est un sous-espace vectoriel de $(E, +, .)$, $\lambda x + y$ appartient à chaque F_i donc à F qui est donc stable par combinaison linéaire.
Finalement, F est bien un sous-espace vectoriel de $(E, +, .)$. $\square$

$*$ Par exemple, l'intersection de droites de $\mathbb{R}^n$ passant par l'origine est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Même chose en prenant des plans, ou des droites et des plans, toujours passant par l'origine.

8▶

On a déjà vu qu'en général la réunion de deux sous-groupes ne forme pas un sous-groupe. Un simple dessin montre que la réunion de deux droites distinctes n'est pas stable par combinaison linéaire. Comme pour les sous-groupes, on peut montrer qu'un telle réunion forme bien un sous-espace vectoriel de $(E, +, .)$ si, et seulement si, l'un des deux est inclus dans l'autre.

9▶

$*$ *Preuve* : Soit F une partie de E. Comme E est un sous-espace vectoriel de $(E, +, .)$ qui contient F, l'ensemble $\mathcal{E}$ des sous-espaces vectoriels qui contiennent F n'est pas vide, donc l'intersection de tous les éléments de cet ensemble est un sous-espace vectoriel de $(E, +, .)$ d'après un théorème précédent, et qui clairement contient F. Notons-le F_1.

Si F_2 est un sous-espace vectoriel de $(E, +, .)$ qui contient F, il fait partie de l'ensemble $\mathcal{E}$, donc il contient F_1 puisqu'il figure dans l'intersection définissant F_1. Ainsi, F_1 est bien le plus petit sous-espace vectoriel de $(E, +, .)$ contenant F, au sens de l'inclusion.

Pour la deuxième description de $\text{Vect}(F)$, notons F_2 l'ensemble des combinaisons linéaires de $F \cup \{0_E\}$. Notez qu'on ajoute $\{0_E\}$ de manière utile pour le seul cas où F est vide, cas qui sinon empêcherait de construire un élément comme combinaison linéaire et empêcherait d'obtenir $\text{Vect}(\varnothing) = \{0\}$.

D'une part F_1 doit contenir toutes les combinaisons linéaires d'éléments de $F \cup \{0_E\}$ puisque F_1 est stable par combinaison linéaire, donc $F_2 \subset F_1$.

D'autre part, on vérifie facilement que F_2 est non vide (contient 0_E !) et stable par combinaisons linéaires, donc F_2 est un sous-espace vectoriel de $(E, +, .)$, et F_2 contient clairement F. Donc $F_2 \in \mathcal{E}$, donc $F_1 \subset F_2$. Et finalement $F_1 = F_2$. $\square$

$*$ Retenez bien que $\text{Vect}(F)$ désigne le plus petit (au sens de l'inclusion) sous-espace vectoriel de $(E, +, .)$ qui contient F.
Inversement, si une partie V de E est définie sous la forme : $V = \text{Vect}(F)$, alors V est un sous-espace vectoriel de $(E, +, .)$ par définition !! Rien de plus à dire...

$*$ Par exemple : $\mathbb{K}_n[X] = \text{Vect}(1, X, X^2, \dots, X^n)$ par définition de ce qu'est un polynôme de degré $\leqslant n$.
On a aussi, puisqu'une combinaison linéaire est toujours une somme finie :

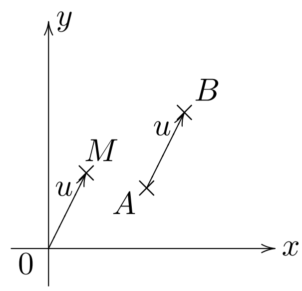
$$\mathbb{K}[X] = \text{Vect}(1, X, X^2, \dots, X^n, X^{n+1}, ...) = \text{Vect}(\{\, X^p \mid p \in \mathbb{N}\})$$

Dans $\mathbb{R}^3$: $\text{Vect}((1, 2, 3))$ est la droite passant par l'origine et dirigée par le vecteur $(1, 2, 3)$, ou encore l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui s'écrivent $(\lambda, 2\lambda, 3\lambda)$ pour un λ réel.

Pour revenir aux exemples de départ : $(\mathbb{C}, +, .)$ considéré comme espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ est égal à $\text{Vect}(1)$, et $(\mathbb{C}, +, .)$ considéré comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ est égal à $\text{Vect}(1, \mathrm{i})$ (par définition), ou $\text{Vect}(1, \mathrm{j})$ (par double inclusion, le vérifier...). En particulier, il y a toujours de multiples familles génératrices pour un même espace vectoriel.

10▶

Dans le plan $\mathbb{R}^2$, on peut "dessiner" un vecteur u de plusieurs manières suivant un "point de départ" choisi.
Si ce point de départ est l'origine, à chaque vecteur u de coordonnées (u_1, u_2) correspond un unique "point" M de mêmes coordonnées (u_1, u_2), et on note : $\overrightarrow{OM} = u$. Cette relation se note aussi : $u = M - 0$, où la "différence" entre deux points symbolise le fait qu'on obtient les coordonnées de u en faisant la différence entre celles de M et celles de l'origine $(0, 0)$. Si l'on "démarre" le vecteur u depuis un point A de coordonnées $(a-1, a_2)$, on obtient un point B de coordonnées (b_1, b_2) et on note de même $\overrightarrow{AB} = u = B - A$, avec $u_1 = b_1 - a_1$ et $u_2 = b_2 - a_2$.



On se déplace ainsi du point 0 au point M, ou du point A au point B par la même transformation T_u définie de l'ensemble des points de $\mathbb{R}^2$ sur l'ensemble des points de $\mathbb{R}^2$ par $T_u : P \mapsto P + u$, appelée translation de vecteur u.
Dans cette notation, on additionne un vecteur (u) à un point (P) pour obtenir un point $(P + u)$.

11▶

$*$ Un sous-espace affine $\mathcal{F}$ n'est donc jamais vide : il doit pouvoir s'écrire sous la forme $x + F$ avec F qui contient le vecteur nul, donc $\mathcal{F}$ contient toujours au moins le "point d'attache" x.

$*$ Rappelez-vous que l'ensemble des solutions d'un système linéaire est soit vide, soit forme un sous-espace affine puisqu'il se décrit comme l'ensemble $s_0 + \mathcal{S}(H)$ des sommes d'une solution particulière s_0 et d'une solution quelconque du système homogène (on a vu que $\mathcal{S}(H)$ a une structure d'espace vectoriel).

$*$ *Preuve* : Supposons $\mathcal{F} = x + F = y + G$ où F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E. Si $f \in F$, alors $x + f \in \mathcal{F}$ donc il existe $g_1 \in G$ tel que $x + f = y + g_1$, et $g_2 \in G$ tel que $x = y + g_2$, d'où $f = (y - x) + g_1 = g_1 - g_2$ appartient à G (car G est stable par combinaison linéaire).

Par raisonnement symétrique, on obtient $G \subset F$, et finalement $F = G$: la direction d'un sous-espace affine est unique.

Montrons maintenant que si $\mathcal{F} = x + F$ et si $A \in \mathcal{F}$, alors $\mathcal{F} = A + F$. En effet, il existe $f \in F$ tel que $A = x + f$. Si $B \in \mathcal{F}$, il existe $f_1 \in F$ tel que $B = x + f_1$, d'où $B = A - f + f_1 = A + (f_1 - f)$ où $f_1 - f$ appartient à F puisque F est stable par combinaison linéaire.
Donc $\mathcal{F} \subset A + F$, et un raisonnement symétrique donne l'inclusion inverse, donc l'égalité. $\square$

Pratique 2 :

1. On résout le système linéaire $x + 2y - z = 1$ d'inconnues réelles x, y et z, qui s'écrit $x = -2y + z + 1$. Les solutions sont donc les triplets de la forme $(-2y + z + 1, y, z) = (1, 0, 0) + y(-2, 1, 0) + z(1, 0, 1)$ pour y et z réels quelconques, ou encore $(1, 0, 0) + \mathrm{Vect}((-2, 1, 0), (1, 0, 1))$, où $(1, 0, 0)$ est une solution particulière du système (obtenue pour $y = z = 0$), et le Vect forme l'ensemble des solutions du système homogène $x + 2y - z = 0$.

2. Le système proposé est déjà sous forme triangulaire en (x, y). On le résout par remontée, z jouant le rôle de paramètre : $y = 3z + 1$ et $x = -5z - 2$. L'ensemble des solutions est donc décrit par l'ensemble des triplets $(-5z-2, 3z+1, z) = (-2, 1, 0) + z(-5, 3, 1)$ avec z réel quelconque, c'est le sous-espace affine passant par le point $(-2, 1, 0)$ (obtenu pour $z = 0$, solution particulière) et de direction $\mathrm{Vect}(-5, 3, 1)$, il s'agit bien de la droite parallèle à la droite vectorielle (passant par l'origine) dirigée par le vecteur $(-5, 3, 1)$, et passant par le point $(-2, 1, 0)$.

12▶

$*$ Soit $\mathcal{F}_i$ des sous-espaces affines de E, pour $i \in I$ où I est un ensemble d'indices, $\mathcal{F}_i$ de direction F_i.
Si $\mathcal{F} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$ est non vide, donc contient un point A, alors pour tout vecteur u appartenant à chaque F_i on a $A + u \in \mathcal{F}$ puisque pour tout i de I, $A + u \in A + F_i$. Ainsi, $A + \bigcap_{i \in I} F_i \subset \mathcal{F}$.

Inversement, si $M \in \mathcal{F}$, pour tout i de I il existe $u_i \in F_i$ tel que $M = A + u_i$ donc tous les u_i sont égaux à un même u qui appartient à $\bigcap_{i \in I} F_i$, donc $\mathcal{F} \subset A + \bigcap_{i \in I} F_i$. Cette dernière intersection étant un sous-espace vectoriel de E, on obtient le résultat. $\square$

$*$ L'intersection de deux droites affines de l'espace $\mathbb{R}^n$ peut donc être vide, ou égale à un point, ou être une droite, et dans ce dernier cas, vu le résultat, les deux droites de départ sont confondues...

13▶

$*$ Dans ce cadre, pour tout x de l'espace **il existe** une combinaison linéaire des vecteurs de la famille donnant x.

$*$ Trouver une famille génératrice de F, c'est trouver une famille $(x_i)_{i \in I}$ telle que $F = \mathrm{Vect}((x_i)_{i \in I})$.

$*$ Exemple : $F = \{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y-z = 0, x-y+2z = 0 \}$ se décrit comme l'ensemble des solutions du système linéaire homogène donné par les deux équations $x + y - z = 0$ et $-2y + 3z = 0$, et finalement comme l'ensemble des quadruplets de forme $(-z/2, 3z/2, z, t) = z(-1/2, 3/2, 1, 0) + t(0, 0, 0, 1)$ pour z et t quelconques, ou enfin sous la forme $\mathrm{Vect}((-1/2, 3/2, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$.
Ces deux vecteurs forment donc une famille génératrice de F.

14▶

Preuve : 1) Toute combinaison linéaire d'éléments d'une famille est une combaison linéaire de la même famille augmentée d'un nombre quelconque de vecteurs : il suffit de choisir les coefficients nuls devant les vecteurs ajoutés.
2) Supposons $F = \mathrm{Vect}(x_i)_{i \in I}$. Soit $i_0 \in I$.

Si x_{i_0} ne peut pas s'écrire comme combinaison linéaire des autres vecteurs, c'est justement qu'on modifie F en enlevant x_{i_0} de la famille $(x_i)_{i\in I}$ puisque $x_{i_0} \notin \mathrm{Vect}(x_i)_{i\in I,\, i\neq i_0}$.
Inversement, supposons que l'on puisse écrire $x_{i_0} = \sum_{i\in J} \lambda_j x_j$ où J est un sous-ensemble fini de I ne contenant pas i_0. Soit $x \in F$. Par définition, il existe une famille presque nulle $(\lambda_i)_{i\in I}$ telle que $x = \sum_{i\in I} \lambda_i x_i$. Dans cette combinaison linéaire, on remplace x_{i_0} par $\sum_{i\in J} \lambda_j x_j$, ce qui montre que x est combinaison linéaire des x_i, $i \neq i_0$, ce qui donne le résultat. □

Pratique 3 :

1. Tout vecteur (x, y) de $\mathbb{R}^2$ s'écrit : $x.(1, 0) + y.(0, 1)$, donc $\{(1, 0); (0, 1)\}$ génère $\mathbb{R}^2$.
Puis on obtient la deuxième partie en changeant $(0, 1)$ en lui-même plus deux fois $(1, 0)$, donc on conserve le ccaractère générateur.
De même, $\{(1, 0); (1, 3)\}$ génère $\mathbb{R}^2$ puisque $(1, 3)$ s'obtient en changeant $(0, 1)$ en $(0, 1) + (1/3).(1, 0)$ que l'on multiplie alors par 3. La sur-famille $\{(1, 0); (2, 0); (1, 3)\}$ est donc génératrice de $\mathbb{R}^2$.

2. L'écriture générale d'un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ implique que $\mathbb{K}[X] = \mathrm{Vect}(1, X, \ldots)$, c'est-à-dire que la famille $(1, X, \ldots, X^n, \ldots)$ génère $\mathbb{K}[X]$.
De même, le théorème de la formule de Taylor pour les polynômes implique que, pour $a \in \mathbb{K}$ quelconque, la famille $(1, X - a, (X - a)^2, \ldots, (X - a)^n), \ldots)$ génère $\mathbb{K}[X]$.

15▶

∗ Encore une fois, il n'y a que des sommes finies dans cette définition !

∗ Par exemple, la famille $(1, X, X^2, \ldots)$ est une famille libre de $\mathbb{K}[X]$, puisqu'un polynôme $P = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n$ est nul si, et seulement si, tous les a_i sont nuls.

∗ On appelle base canonique de $\mathbb{K}^n$ la famille de vecteurs $((1, 0, \ldots, 0), (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, \ldots, 1))$, qui est libre puisqu'un vecteur $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ est nul si, et seulement si, tous les λ_i sont nuls.

16▶

∗ On va donc en déduire que si $F = \mathrm{Vect}(x_i)_{i\in I}$ et que $(x_i)_{i\in I}$ est libre, alors tout vecteur de F s'écrit (existence par le caractère générateur de la famille) **de manière unique** (caractère libre de la famille) comme combinaison linéaire des vecteurs x_i, $i \in I$.

∗ La famille $(\sin, \cos)$ est une famille libre de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$. En effet, supposons $\lambda \sin + \mu \cos = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R})}$. En évaluant en 0, on obtient $\mu = 0$. Puis en $\pi/2$, on obtient $\lambda = 0$.

∗ *Preuve de la proposition* : Supposons $x = \sum_{i\in I} \lambda_i x_i = \sum_{i\in I} \mu_i x_i$ où les familles de scalaires sont presque nulles. Alors : $\sum_{i\in I} (\lambda_i - \mu_i) x_i = 0$. Par liberté de la famille des $(x_i)_{i\in I}$, on obtient pour tout $i \in I$: $\lambda_i = \mu_i$, ce qui montre l'unicité demandée. □

17▶

∗ *Preuve* : Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille liée. Il existe une combinaison linéaire nulle $\sum_{i\in I} \lambda_i x_i = 0$ où la famille de scalaires est presque nulle, mais contient un scalaire λ_{i_0} non nul. On en déduit : $x_{i_0} = -\sum_{i\neq i_0} (\lambda_i/\lambda_{i_0}) x_i$, donc x_{i_0} est combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille.
Réciproquement, supposons un des vecteurs x_{i_0} combinaison linéaire des autres vecteurs : $x_{i_0} = \sum_{i\neq i_0} \lambda_i x_i$, alors $x_{i_0} - \sum_{i\neq i_0} \lambda_i x_i = 0$ est une combinaison linéaire nulle non triviale de la famille $(x_i)_{i\in I}$, donc cette famille est liée. □

∗ ⚠ Si on sait qu'une famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est liée, rien ne prouve que le premier vecteur x_1 peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres !

$*$ Deux vecteurs u et v forment une partie libre si aucun des deux n'est multiple de l'autre... Par exemple, la famille $(1, \mathrm{i})$ est libre dans $(\mathbb{C}, +, .)$ vu comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, mais pas dans $(\mathbb{C}, +, .)$ vu comme espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.

18►

$*$ *Preuve* : 1) Toute combinaison linéaire d'une sous-famille d'une famille libre en est une combinaison linéaire : si elle est nulle, elle ne peut être qu'à coefficients scalaires nuls.

2) Ajoutons un vecteur u à une famille libre $(x_i)_{i\in I}$.
S'il est combinaison linéaire des élements de la famille : $u = \sum\limits_{i\in I} \lambda_i x_i$, la somme étant finie, la combinaison linéaire nulle $u - \sum\limits_{i\in I} \lambda_i x_i = 0$, dont les coefficients ne sont pas tous nuls, montre que la famille augmentée de u est liée.
Sinon, supposons $\alpha u + \sum\limits_{i\in I} \lambda_i x_i = 0$, la somme étant finie, alors $\alpha = 0$ sans quoi u est combinaison linéaire des (x_i). Il reste une combinaison linéaire nulle des vecteurs de la famille de départ, donc les coefficients sont tous nuls, la famille est libre.

3) Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille libre, et supposons $0 \in I$ (ce n'est qu'une notation).
La famille obtenue en changeant x_0 en αx_0 pour un $\alpha \neq 0$ est libre : une combinaison linéaire nulle non triviale de ses vecteurs est aussi une combinaison linéaire nulle non triviale des vecteurs de la famille de départ.
Enfin, posons $y_0 = x_0 + \sum\limits_{i\in I\setminus\{0\}} \alpha_i x_i$, la somme étant finie. Si la famille obtenue en remplaçant x_0 par y_0 est liée, c'est qu'un de ses vecteurs est combinaison linéaire des autres. En remplaçant y_0 par son expression, on obtient que ce vecteur (x_0 si c'était y_0) est combinaison linéaire des autres vecteurs de $(x_i)_{i\in I}$. La famille de départ serait alors liée...

$*$ Notez qu'avec 2), on a retrouvé qu'une famille est liée si, et seulement si, un de ses vecteurs est combinaison linéaire des autres.

Pratique 4 :

1. Supposons $\lambda.(1, 0, 1) + \mu.(1, 1, 1) = (0, 0, 0)$, il vient par composantes : $\lambda + \mu = 0$, $\mu = 0$ et $\lambda + \mu = 0$, donc $\lambda = \mu = 0$, donc cette famille est libre.
On le voit directement puisque ces deux vecteurs ne sont pas proportionnels !

Même méthode pour la seconde famille. Mais cette fois, il n'y a pas d'argument de proportionalité possible (plus de deux vecteurs).

2. $((1, 0, 1); (-2, 0, -2))$ est liée parce que le deuxième vecteur est un multiple du premier.

$((1, 0, 1); (1, 1, 1); (2; 1; 2))$ est liée parce que le troisième vecteur est somme des deux premiers.
On peut aussi résoudre en λ, μ et γ le système $\lambda.(1, 0, 1) + \mu.(1, 1, 1) + \gamma.(2, 1, 2) = (0, 0, 0)$ et trouver une solution $\lambda = 1$, $\mu = 1$, $\gamma = -1$ montrant que la famille est liée.

3. Supposons $\sum\limits_{i\in\mathbb{N}} \lambda_i.(X - a)^i = 0$ avec $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}$ famille de scalaire presque nulle.
Si i_0 est l'indice le plus grand d'un scalaire non nul de la famille s'il en existe un, alors le polynôme à gauche de l'égalité est de degré i_0 alors que la partie droite est le polynôme nul. Les λ_i sont donc tous nuls, la famille proposée est libre.

$*$ **Où en sommes-nous ?**

a) si $(x_i)_{i\in I}$ est génératrice de E et libre, alors tout vecteur de E s'écrit comme une combinaison linéaire de la famille $(x_i)_{i\in I}$ (caractère générateur), et cette écriture est unique (caractère libre).

b) Une famille de vecteurs étant donnée :

- en lui ajoutant un vecteur on augmente ses chances d'être génératrice (ou on conserve cette qualité), mais on risque de perdre sa liberté si elle l'était ;

- en lui otant un vecteur, on augmente ses chances d'être libre (ou on conserve cette qualité), mais on risque de perdre son caractère générateur de l'espace si elle l'avait.

Image très approximative : plus on est nombreux et plus on a de chance de couvrir des yeux un territoire, mais plus le risque augmente d'être plusieurs à regarder dans la même zone...

19▶

$*$ Par exemple dans $\mathbb{K}^n$, la base dite "canonique" est formée des vecteurs $(1, 0, \ldots, 0)$, $(0, 1, 0, \ldots, 0)$, ..., $(0, 0, \ldots, 0, 1)$.

$*$ Par exemple dans $\mathbb{K}[X]$, on a la base $(1, X, X^2, \ldots, X^n, \ldots)$, et, pour un scalaire a quelconque, la base $(1, (X-a), (X-a)^2, \ldots, (X-a)^n, \ldots)$ utilisée dans la formule de Taylor pour les polynômes.

$*$ Par exemple dans $\mathbb{K}_n[X]$, on a la base $(1, X, \ldots, X^n)$, ou encore la base des polynômes de Lagrange associée à $n+1$ points $(a_0, \ldots, a_n)$.

$*$ ... dans $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ ... on ne voit pas très bien ...

$*$ Comment faire pour trouver une base d'un espace vectoriel ? On peut chercher une famille libre, et essayer de l'"augmenter" jusqu'à ce que, peut-être, ce ne soit plus possible sans perdre son caractère libre, c'est-à-dire qu'elle soit justement génératrice...Ou on peut partir d'une famille génératrice et essayer de la diminuer jusqu'à ce que ce ne soit plus possible sans perdre son caractère générateur, ce qui justement indiquerait qu'on a obtenu une famille libre...

$*$ On sait déjà qu'il n'y a pas unicité d'une base d'un espace, s'il en existe une (vu la propriété 3)), mais on n'est pas encore sûr de cette existence...on a même un doute...

Pratique 5 :

1. La famille est libre : en notant u_1 et u_2 les deux vecteurs,
$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 = 0$ conduit au système : $2\alpha_1 = 0$ et $-\alpha_2 = 0$, donc $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Puis, tout vecteur (x_1, x_2) de $\mathbb{R}^2$ s'écrit : $(x_1, x_2) = \dfrac{x_1}{2} u_1 - x_2 u_2$, donc (u_1, u_2) est génératrice de $\mathbb{R}^2$, et finalement en donne une base. C'était facile ici puisque le système $(x_1, x_2) = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$ est diagonal... Noter que la résolution de sa partie homogène permet de répondre à la question de la liberté de la famille...

2. Plus difficile, il faut étudier le système $(x_1, x_2, x_3) = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3$ (notations évidentes) !!

La première étape de la méthode de Gauss donne : $\lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = x_1$, $-3\lambda_2 - 3\lambda_3 = x_2 - x_1$, $\lambda_2 + \lambda_3 = x_3$, où l'on voit que le vecteur $(1, 0, 0)$ n'appartient pas à $\mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3)$, donc cette famille n'est pas génératrice. Autre point de vue : $3u_1 - u_2 = -u_3$ montre que la famille est liée, mais c'est plus difficile à voir de façon systématique... En tout cas, (u_1, u_2, u_3) n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$ parce qu'elle n'est pas libre, ou parce qu'elle n'est pas génératrice.

3. Notons u_1 et u_2 les deux vecteurs proposés. $(x, y, z) \in \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$ si, et seulement si, il existe λ_1 et λ_2 réels tels que $(x, y, z) = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$, d'où le système $2\lambda_1 = x$, $-\lambda_1 - 3\lambda_2 = y$ et $2\lambda_2 = z$. Ce système n'a de solution que si x, y et z vérifient la relation de compatibilité que l'on obtient avec la deuxième équation : $-\dfrac{x}{2} - 3\dfrac{z}{2} = y$, ce qui donne bien l'équation proposée.

Dans ce cas, le système admet une solution unique en λ_1, λ_2, coordonnées de (x, y, z) dans ce qui forme donc une base (u_1, u_2) du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ proposé.

20▶

$*$ Ceci rejoint la remarque du point 19.

$*$ *Preuve* : Une famille génératrice minimale est une famille génératrice de l'espace de laquelle on ne peut enlever un élément sans perdre le caractère générateur. Si une telle famille n'est pas libre, c'est qu'un de ses vecteurs, appelons-le x, est combinaison linéaire des autres, vecteur que l'on peut donc enlever de la famille sans perdre son caractère générateur : si y est un vecteur de E, il s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs de la famille de départ ; en remplaçant x dans cette écriture, on voit que y s'écrit comme combinaison linéaire des éléments de la famille de départ privée de x. Contradiction.

De même, supposons qu'on ajoute un vecteur x à une famille libre maximale : elle perd son caractère libre, c'est-à-dire qu'un de ses vecteurs est combinaison linéaire des autres. Dans une telle combinaison, x intervient nécessairement avec un coefficient non nul, sans quoi la famille de départ ne serait pas libre. On en déduit que x est combinaison linéaire des autres vecteurs, ce qui montre que x appartient au sous-espace engendré par la famille de départ, qui est donc génératrice. $\square$

21▶

Comme expliqué au point 19, les espaces vectoriels $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ sont de dimensions finies, alors que $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ ne sont pas de dimensions finies.

22▶

$*$ *Preuve* : La démarche est très proche de celle de la méthode de Gauss, et s'appuie sur une preuve par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.
Pour $n = 1$, soit e un vecteur non nul qui génère E, et soit (u_1, u_2) un système de vecteurs de E dont on veut montrer qu'il est lié.
Par hypothèse, il existe des scalaires α_1 et α_2 non nuls (sinon (u_1, u_2) est liée) tels que $u_1 = \alpha_1 e$ et $u_2 = \alpha_2 e$. Alors $\alpha_1 u_2 - \alpha_2 u_1 = 0$, donc (u_1, u_2) est liée.

Soit maintenant $n \geqslant 1$ et supposons la propriété établie au rang précédent. Soit donc $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille génératrice de E, et $(u_1, \ldots, u_{n+1})$ une famille de $n+1$ vecteurs de E. Par hypothèse, il existe des scalaires $\lambda_{i,j}$ tels que : $u_i = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_{i,j} e_j$ (le premier indice i indique que le cœfficient est une "coordonnée" de u_i, le deuxième indique que c'est suivant e_j). Si un des vecteurs u_i est nul, la famille $(u_1, \ldots, u_{n+1})$ est liée. Sinon, quitte à renuméroter les vecteurs, on peut supposer que $\lambda_{n+1,n} \neq 0$, c'est à dire que u_{n+1} a une composante non nulle suivant e_n.

On construit une nouvelle famille de n vecteurs, combinaisons linéaires des $n-1$ vecteurs $(e_1, \ldots, e_{n-1})$, en "éliminant" les composantes des u_i suivant e_n, en posant, pour i de 1 à n : $v_i = u_i - \dfrac{\lambda_{i,n}}{\lambda_{n+1,n}} u_{n+1}$.
Vérifiez que v_1, v_2, ..., et v_n s'expriment en fonction de e_1, e_2, ...,e_{n-1}. Ces vecteurs forment donc une famille liée de $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_{n-1})$ par hypothèse de récurrence. Or, une combinaison linéaire nulle à cœfficients non tous nuls des v_i procure une combinaison linéaire nulle à cœfficients non tous nuls des u_i, donc $(u_1, \ldots, u_{n+1})$ est liée. On conclut alors par le principe de récurrence. □

$*$ Dans un espace vectoriel de dimension finie, le nombre d'éléments d'une famille libre est donc majoré par le nombre d'éléments d'une famille génératrice : par les arguments vus au point 20, il existe des familles libres maximales et des familles génératrices minimales, c'est-à-dire des bases dans tout espace vectoriel de dimension finie !!

23▶

$*$ *Preuve* : il reste donc, par rapport au dernier point, à montrer que ces bases ont toutes même cardinal... (b) et (c) découleront directement du théorème fondamental puisque dim E est alors le nombre d'éléments d'une base de E, qui est libre et génératrice.
Considérons donc deux bases : la première est de cardinal inférieur à celui de la deuxième puisque la première est libre et la deuxième génératrice. Par symétrie des rôles joués, les deux bases ont même cardinal. □

Pratique 6 :

$\mathbb{R}_2[X]$ est de dimension 3 (base $(1, X, X^2)$), $(X-1, X+1)$ n'est donc ni génératrice ni basique, mais libre car $X-1$ et $X+1$ ne sont pas proportionnels. La famille $(X, X+1, (X-1)^2)$ est libre car $\lambda X + \mu(X+1) + \gamma(X-1)^2 = 0$ implique $\gamma = 0$ à cause des degrés, puis $\mu = 0$ après évaluation en 0 et enfin $\lambda = 0$. Comme cette famille comporte 3 éléments, c'est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
Enfin, $(1, X-1, X^2, 1+X+X^2)$ comporte 4 éléments donc est liée donc non basique, génératrice puisque $(1, X-1, X^2)$ est basique (3 éléments et libre comme précédemment).

$*$ Il reste donc à savoir trouver une base, ou à savoir concrètement construire une base d'un espace vectoriel de dimension finie.

24▶

$*$ Ce théorème indique que l'on peut compléter une famille libre à l'aide d'éléments bien choisis d'une famille génératrice quelconque pour obtenir une base de l'espace.

Le plus souvent, on puise dans la base canonique qui est une famille génératrice particulière.

$*$ *Preuve* : L'ensemble de toutes les familles libres obtenues en ajoutant des éléments de la famille (g_j) à la famille libre (l_i) est non vide : il contient au moins la famille (l_i)...
Ainsi, l'ensemble des cardinaux des familles ainsi formées forme une partie non vide majorée par la dimension de E, donc elle admet un plus grand élément, qui est le cardinal d'une certaine famille libre $\mathcal{F} = (l_1, \ldots, l_p, g_{j_1}, \ldots, g_{j_r})$.
Si cette famille n'est pas génératrice de l'espace, c'est qu'il existe un élément g de la famille (g_j) qui n'appartient pas à $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ puisque $\mathrm{Vect}((g_j)) = E$. Ceci implique que la famille obtenue en ajoutant g à $\mathcal{F}$ est libre, ce qui contredit la définition de $\mathcal{F}$ (on obtient une famille libre de cardinal plus grand que le plus grand des cardinaux trouvés...).
Ainsi $\mathcal{F}$ est bien basique. $\square$

Pratique 7 :

1. On complète (e_1), libre puisque $e_1 \neq 0$, à l'aide d'éléments de la base canonique (i, j, k). Le plus simple ici est de considérer (i, e_1, k) puisque le système obtenu en écrivant $\lambda_1 i + \lambda_2 e_1 + \lambda_3 k = 0$ est homogène triangulaire supérieur à éléments diagonaux non nuls (la matrice associée est inversible), donc nécessairement $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Comme (i, e_1, k) est libre et comporte 3 vecteurs avec $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, elle est libre maximale donc basique.

2. Tout d'abord, cette famille est libre car le coefficient constant dans $\lambda X(X-1) + \mu(X-1)(X+1) = 0$ est μ qui est donc nul, puis $\lambda = 0$.
On peut alors compléter par X^2, X^3 et X^4 (on puise dans la base canonique) puisque le système associé à $\lambda_1(X-1)(X+1) + \lambda_2 X(X-1) + \lambda_3 X^2 + \lambda_4 X^3 + \lambda_5 X^4 = 0$, où chaque équation est écrite suivant les puissances croissantes de X, est homogène et de matrice associée inversible (triangulaire supérieure à éléments diagonaux non nuls), ce qui conduit par remontée à $\lambda_5 = \lambda_4 = \lambda_3 = \lambda_2 = \lambda_1 = 0$. La famille proposée est donc libre et maximale donc basique.

25►

$*$ Base de $\mathbb{C}$ vu comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$: $(1, \mathrm{i})$, donc dimension 2.

$*$ On reviendra sur $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, une base possible est formée des matrices dont tous les éléments sont nuls sauf un qui vaut 1 et placé en ligne i et colonne j (matrice $(E_{i,j})$). Cette famille comporte pq éléments. Par définition, toute matrice $M = [m_{i,j}] \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ s'écrit de manière unique : $M = \sum\limits_{i,j} m_{i,j} E_{i,j}$

$*$ Prenons $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ une base de F et $(e'_i)_{1 \leqslant i \leqslant q}$ une base de G.

Soit $(x, y) \in F \times G$: par hypothèse, il existe des scalaires tels que $x = \sum\limits_{i=1}^{p} x_i e_i$ et $y = \sum\limits_{j=1}^{q} y_j e'_j$, ce qui donne : $(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{p} x_i(e_i, 0_G) + \sum\limits_{j=1}^{q} y_j(0_F, e'_j)$. On en déduit que la famille formée des $(e_i, 0_G)$ et des $(0_F, e'_j)$ génère $F \times G$.
Par ailleurs elle est libre, puisque en reformant la même combinaison linéaire de ses vecteurs que l'on suppose nulle, il vient $(x, y) = (0_F, 0_G)$ donc $x = 0_F$ et $y = 0_G$, ce qui donne les x_i et les y_j nuls.
Cette famille qui comporte $p + q = \dim F + \dim G$ éléments est donc une base de $F \times G$.

$*$ ⚠ La dimension de $\mathbb{R}_n[X]$ est $n + 1$ car $(1, X, \ldots, X^n)$ en est la base canonique !!

26►

$*$ *Preuve* : Posons $n = \dim E$.

Une famille libre $\mathcal{B}$ de n éléments de E est génératrice, sans quoi il existerait un élément x de E non combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{B}$, ce qui signifie qu'en ajoutant x à $\mathcal{B}$ on obtiendrait une famille libre de cardinal supérieur à n, ce qui est impossible.

De même, soit $\mathcal{B}$ une famille génératrice de n éléments de E. Si elle n'est pas libre, c'est qu'un de ses éléments x est combinaison linéaire des autres. Toute combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{B}$ se transforme donc en une combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{B}$ privée de x : en enlevant x de $\mathcal{B}$, on conserve une famille génératrice, mais de moins de n éléments, ce qui est impossible. $\square$

$*$ Par exemple, la famille $(L_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ des polynômes de Lagrange associés à $n+1$ points distincts a_i est libre dans $\mathbb{R}_n[X]$: si $\sum_{j=0}^{n} \lambda_j L_j = 0$, alors, en évaluant en a_i, comme pour $j \in [\![0,n]\!]$ on a $L_j(a_i) = \delta_{i,j}$, il reste $\lambda_i = 0$, et ceci peut être fait pour i de 0 à n. Cette famille comporte $n+1$ éléments, ce qui correspond à la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$. Elle forme donc une base de cet espace.

$*$ On utilise souvent le $\boxed{\text{théorème des degrés étagés}}$: une famille $(P_0, \ldots, P_n)$ de polynômes de $\mathbb{K}[X]$, tels que pour tout $i \in [\![0,n]\!]$ on a $\deg(P_i) = i$, est libre et donne donc une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
En effet, par l'unicité de l'écriture du polynôme nul, une combinaison linéaire nulle de ces polynômes conduit à un système linéaire homogène triangulaire inversible en les coefficients de la combinaison linéaire, coefficients qui sont donc tous nuls.
Si les polynômes P_i ont seulement la propriété d'avoir des dégrés distincts deux à deux, on obtient seulement la liberté de la famille.

27▶

$*$ *Preuve* : En effet, toute famille génératrice de E est génératrice de F, donc F est bien de dimension finie. De plus, une base de F est une famille libre de F donc de E, donc $\dim F \leqslant \dim E$, avec égalité si, et seulement si, cette base de F a pour cardinal la dimension de F donc de E, auquel cas elle procure une base de E. $\square$

$*$ Les sous-espaces vectoriels (resp. affines) de $\mathbb{R}^2$ sont donc de dimension 0 ($\{0\}$), 1 (les droites vectorielles (resp. affines)), ou 2 ($\mathbb{R}^2$ entier).
De même, l'intersection de deux droites vectorielles est égale à l'origine, ou à une droite si elles sont confondues.
De même, l'intersection d'une droite et d'un plan vectoriel est l'origine ou la droite elle-même si elle est incluse dans le plan.
De même, l'intersection de deux plans vectoriels est l'origine (il faut alors que la dimension de l'espace soit $\geqslant 4$), ou une droite, ou un plan s'ils sont confondus, etc.

28▶

$*$ Cette définition ne suppose pas l'espace E de dimension finie, le rang peut donc être infini...

$*$ Si E est de dimension finie n, le rang d'une base de E est égal à n, le rang d'une famille libre est inférieur à n, et le rang d'une famille génératrice E est égal à n.

$*$ Dans $\mathbb{K}[X]$, $\mathrm{rg}(1, X, 2X, 3X) = 2$ puisque $\mathrm{Vect}(1, X, 2X, 3X) = \mathrm{Vect}(1, X)$ et que $(1, X)$ est libre.
De même, dans $\mathbb{R}^3$, le rang de $((1,1,0), (0,0,1), (1,1,-2))$ est 2 car le sous-espace engendré est le même que celui des deux premiers vecteurs (car le troisième est égal au premier moins deux fois le second) et parce que les deux premiers vecteurs ne sont pas proportionnels.

29▶

Preuve : Le rang d'une famille est la dimension du sous-espace qu'elle engendre. Celle-ci ne peut dépasser son cardinal puisqu'une base de cet espace compte autant ou moins d'éléments. L'égalité a lieu lorsque la famille génératrice est également une base de ce sous-espace, ce qui équivaut à dire qu'elle est également libre. $\square$

30▶

$*$ Par exemple, la matrice d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ dans cette même base est la matrice identité : elle est carrée, diagonale à éléments diagonaux tous égaux à 1 puisque $e_i = 0 + \ldots + e_i + 0 \ldots$ Son rang (comme défini dans le chapitre "Systèmes linéaires") est égal au rang de $\mathcal{B}$, c'est-à-dire n, et c'est ce qu'on appelle le rang de cette matrice. Ces définitions se correspondent donc dans ce cas particulier.

Par exemple, la matrice représentative de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ dans cette même base est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$*$ De même, si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases d'un même espace de dimension finie, le rang de $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ est égal à la taille de la matrice carrée (son nombre de colonnes ou de lignes), ainsi qu'au cardinal de $\mathcal{B}$ puisque le système homogène associé n'a que la solution nulle pour solution (cela traduit la liberté des vecteurs colonnes). Ici encore, les définitions de rang coïncident.

Pratique 8 :

$\mathcal{M}_{(1,X,X^2)}(1, X-1, (X-1)^2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Son rang (comme défini dans le chapitre "Systèmes linéaires") est 3, égal au rang de la famille $(1, X-1, (X-1)^2)$ d'après le théorème des degrés étagés. Là encore les trois définitions de rang se correspondent.

31▶

$*$ *Preuve* : Il s'agit de vérifier la concordance des définitions de rang d'une matrice dans le cas général.

Soit M une matrice, associée au système homogène $MX = 0$.

a) Les opérations élémentaires sur les lignes de M sont des outils de la méthode de Gauss, elles conservent le rang de la matrice et du système linéaire associés, ainsi que le rang du système des vecteurs lignes (on a vu que ces transformations ne modifient pas le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs lignes).

Il en est de même des permutations de colonnes de M, utilisées également pour la méthode de Gauss, et qui ne modifient pas non plus le rang des vecteurs lignes puisqu'après permutation de colonnes, les combinaisons linéaires nulles de vecteurs lignes se correspondent.

b) Rappelons qu'un système homogène de n inconnues (ou n colonnes) est de rang r si, et seulement si, l'ensemble de ses solutions forme un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension $n - r$: on peut maintenant l'interpréter ainsi puisqu'on l'écrivait déjà comme un Vect de $n - r$ vecteurs, obtenus en posant successivement toute inconnue non principale nulle sauf la i-ème, pour $i = r+1$ à n, ce qui donne bien $n - r$ vecteurs linéairement indépendants (écrivez une combinaison linéaire nulle de ces vecteurs, et utilisez les 1 isolés pour conclure).
C'est ce qui a permis, dans le chapitre sur les systèmes linéaires, de définir le rang d'une matrice, puisque le chemin parcouru pour obtenir un système équivalent triangulaire conduit donc toujours au même rang. **Le rang d'une matrice (associée à un système) et celui de ses vecteurs lignes sont donc les mêmes.**

c) Montrons que le rang rc du système des vecteurs colonnes de la matrice est supérieur à celui rl du système des vecteurs lignes.
Pour cela, plaçons sur les premières colonnes, par permutation de colonnes, rc vecteurs colonnes formant une famille libre, ce qui ne change pas le rang rl du système linéaire associé. Ce nouveau système homogène peut s'écrire : $x_1C_1 + x_2C_2 + \ldots + x_{rc}C_{rc} + \ldots + x_nC_n = 0$ où les C_j sont les nouveaux vecteurs colonnes et les x_i les inconnues scalaires.

Tout choix des dernières inconnues (à partir de l'indice $rc+1$) conduit à une solution puisque les dernières colonnes appartiennent au sous-espace vectoriel engendré par les rc premières : il existe x_1, x_2,..., x_{rc} tels que $\sum\limits_{j=1}^{rc} x_jC_j = -\sum\limits_{j=rc+1}^{n} x_jC_j$. En particulier, en choisissant toutes les dernières inconnues nulles sauf la i-ème, et ce successivement de $i = rc+1$ à n, on obtient une famille libre de $n - rc$ vecteurs solutions, puisque de formes $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (.,.,...,.,0,0,..,1,0,0,..)$ où les 1 balaient les cases $rc+1$ à n.

Ainsi : $n - rl \geqslant n - rc$, c'est-à-dire $rc \geqslant rl$.

d) Considèrons maintenant le système ${}^tMX = 0$. Son rang, d'après b), est celui des vecteurs lignes de ${}^tM$, donc rc, et le même raisonnement conduit à $rl \geqslant rc$. D'où l'égalité entre tous ces rangs : celui de la matrice ou de ses vecteurs lignes, du système linéaire associé, du système de ses vecteurs colonnes. □

$*$ Si M est une matrice carrée $n \times n$, M est inversible, c'est-à-dire associée à un système linéaire à solution unique, si, et seulement si, elle est de rang n, c'est à dire si, et seulement si, ses vecteurs lignes, donc également ses vecteurs colonnes, engendrent $\mathbb{R}^n$, ou encore forment une base de $\mathbb{R}^n$.

Pratique 9 :

1. Par la méthode de Gauss : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 5/3 & -2/3 \end{pmatrix}$ donc le rang est 3.

2. En utilisant $L_i \leftarrow L_i - L_{2p-i+1}$ pour i de $p+1$ à $2p$, on obtient le rang p si $\alpha \neq 0$, nul sinon.

3. La colonne j s'écrit : $\cos(j)S + \sin(j)C$ où $S = \begin{pmatrix} \sin(1) \\ \vdots \\ \sin(n) \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} \cos(1) \\ \vdots \\ \cos(n) \end{pmatrix}$.

Le rang cherché est donc inférieur ou égal à 2 puisque $\text{Vect}(S, C)$ est de dimension 2 (car $\tan 1 \neq \tan 2$). La matrice dans (S, C) des vecteurs colonnes de M a deux lignes qui sont exactement C et S, donc $\text{rg}(M) = 2$.

32▶

$*$ On appelle repère canonique le repère $(O, (e_1, e_2, \ldots, e_n))$ où O est l'origine de l'espace et $(e_1, \ldots, e_n)$ est la base canonique.

$*$ Dans le repère $(A, (e_1, \ldots, e_n))$, le point M et le vecteur $\overrightarrow{AM}$ ont mêmes coordonnées.

$*$ Que se passe-t-il si on change l'origine d'un repère ?
Autrement dit, quelles sont les coordonnées m'_i dans $(B, (e_1, \ldots, e_n))$ d'un point M de coordonnées (m_i) dans $(A, (e_1, \ldots, e_n))$? Il faut pour cela connaître les coordonnées (b_i) de B dans le premier repère.

On a donc : $M = A + \sum\limits_{i=1}^{n} m_i e_i$ et $M = B + \sum\limits_{i=1}^{n} m'_i e_i = A + \sum\limits_{i=1}^{n} b_i e_i + \sum\limits_{i=1}^{n} m'_i e_i$, d'où, pour i de 1 à n :

$$m_i = b_i + m'_i, \quad \text{ou} \quad m'_i = m_i - b_i$$

Pratique 10 :

Ici, on change aussi la base du repère, pas seulement l'origine.
On écrit : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM} = j - i + j = -i + 2j = (e_1 - 3e_2)/2$.
Les coordonnées demandées sont donc $(1/2, -3/2)$.

33▶

Regardez la réunion de deux droites : en général, ça ne ressemble ni à une droite, ni à un plan, etc.

On sait depuis longtemps que la réunion de deux sous-groupes d'un groupe ne forme pas en général un sous-groupe (sauf cas d'inclusion), donc il n'y a rien d'étonnant ici...
On avait inventé le concept de groupe engendré pour pallier à cet inconvénient, on fait de même ici avec le concept de sous-espace vectoriel engendré.

34▶

Preuve : $\sum\limits_{i=1}^{p} E_i$ est non vide puisque contient $0_E = 0_{E_1} + \ldots + 0_{E_p}$.

Soit $x = \sum\limits_{i=1}^{p} x_i$ et $y = \sum\limits_{i=1}^{p} y_i$ tels que chaque x_i et y_i appartient à E_i, et soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

Alors $x + \lambda y = \sum\limits_{i=1}^{p} (x_i + \lambda y_i)$ appartient bien à $\sum\limits_{i=1}^{p} E_i$ puisque chaque $x_i + \lambda y_i$ appartient à E_i du fait que E_i est un espace vectoriel. Ainsi $\sum\limits_{i=1}^{p} E_i$ forme un sous-espace vectoriel de E.

Reste à montrer que c'est le plus petit contenant chaque E_i. En effet, un sous-espace vectoriel de E contenant chaque E_i contient toutes les sommes de type $\sum\limits_{i=1}^{p} x_i$ avec $x_i \in E_i$, donc doit contenir $\sum\limits_{i=1}^{p} E_i$.

Enfin, si les E_i sont de dimensions finies, on voit qu'en réunissant des bases de chaque E_i, on obtient clairement une famille génératrice de $\sum_{i=1}^{p} E_i$, de cardinal $\sum_{i=1}^{p} \dim(E_i)$, d'où l'inégalité annoncée. $\square$

35▶

$*$ Plusieurs objectifs : repérer les sommes $\sum_{i=1}^{p} E_i$ dans lesquelles la décomposition d'un élément sous forme $\sum_{i=1}^{p} x_i$ est unique, trouver la dimension exacte et donc construire des bases de $\sum_{i=1}^{p} E_i$ (faire mieux que l'inégalité du théorème précédent, et même rechercher les cas d'égalité).
On commence par le cas $p = 2$ et l'étude de $E_1 + E_2$.

$*$ *Preuve* : 1) implique clairement 2).
Supposons 2) : soit $x \in E_1 \cap E_2$, alors $x \in E_1$ et $-x \in E_2$, et $x - x = 0_E = 0_{E_1} + 0_{E_2}$. Par unicité de l'écriture de 0_E, il vient $x = 0_{E_1} = -0_{E_2} = 0_E$, soit $x = 0_E$. On a donc 3).
Supposons 3), montrons 1) : supposons que $x \in E_1 + E_2$ s'écrive $x = x_1 + x_2 = y_1 + y_2$ avec $x_i \in E_i$ et $y_i \in E_i$, alors $x_1 - y_1 = y_2 - x_2$ appartient à $E_1 \cap E_2$ puisque E_1 et E_2 sont des sous-espaces vectoriels de E. Comme $E_1 \cap E_2 = \{0\}$, il vient $x_1 = y_1$ et $x_2 = y_2$.
On a donc montré l'équivalence entre les trois premières assertions.

Supposons maintenant E_1 et E_2 de dimensions finies respectives p et q.
a) Si E_1 et E_2 sont en somme directe, soit $(e) = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E_1 et $(f) = (f_1, \dots, f_q)$ une base de E_2. Tout élément de $E_1 + E_2$ s'écrit comme somme d'un élément de E_1 (combinaison linéaire d'éléments de (e)) et d'un élement de E_2 (combinaison linéaire d'éléments de (f)), donc est combinaison linéaire de la famille (g) obtenue en réunissant (e) et (f). La famille (g) génère donc $E_1 \oplus E_2$.
De plus, une combinaison linéaire nulle des éléments de (g) conduit à une identité de type : $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i = -\sum_{j=1}^{q} \mu_j f_j$, où chacun des termes de cette égalité appartient à E_1 et à E_2, donc sont nuls d'après 3). Les familles (e) et (f) étant libres, les scalaires λ_i et μ_i sont nuls, et (g) est donc libre.
Ainsi (g) forme une base de $E_1 \oplus E_2$ qui est donc de dimension $p + q$, on a donc 4).
b) Si à l'inverse E_1 et E_2 ne sont pas en somme directe, soit u non nul appartenant à $E_1 \cap E_2$.
On complète (u) libre en une base $\mathcal{B}_1$ de E_1 et en une base $\mathcal{B}_2$ de E_2. Comme établi précédemment, en réunissant $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$, on obtient une famille génératrice de $E_1 + E_2$ qui compte $p + q - 1$ élément, donc $\dim(E_1 + E_2) < \dim E_1 + \dim E_2$. $\square$

$*$ Avec 3), deux droites du plan (ou d'un espace vectoriel) sont en somme directe si, et seulement si, leur intersection est réduite au vecteur nul, ou encore si, et seulement si, elles ne sont pas confondues.

$*$ Pour de multiples raisons, voyez que deux plans de l'espace $\mathbb{R}^3$ ne sont jamais en somme directe...

36▶

$*$ NE CONFONDEZ PAS SUPPLÉMENTAIRE ET COMPLÉMENTAIRE !

D'ailleurs, "complémentaire" est un mot très peu utilisé en algèbre linéaire.
On n'écrit pas de raisonnement de type : "soit $x \in F$, ..., soit $x \notin F$...", mais plutôt :
soit $x \in E = E_1 \oplus E_2$, alors x s'écrit $x = x_1 + x_2$ etc. Cela parce qu'on n'a pas de décomposition de l'espace efficace sous forme $E = F \cup \overline{F}$ mais plutôt sous forme $E = E_1 \oplus E_2$.

$*$ *Preuve du théorème* : Si on suppose soit 2) soit 3) et 1), alors E_1 et E_2 sont en somme directe de somme E.
Si on suppose 2) et 3), alors E_1 et E_2 sont en somme directe, et $E_1 \oplus E_2$ est inclus dans E et de même dimension, donc $E = E_1 \oplus E_2$. $\square$

$*$ Ainsi, $E = E_1 \oplus E_2$ si, et seulement si, tout élément x de E s'écrit de manière unique sous la forme $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$.

$*$ Par exemple, dans $\mathbb{R}^3$, la droite dirigée par $(1, 0, 0)$ et le plan $\mathrm{Vect}((1, 2, 0), (0, 1, 1))$ sont en somme directe et supplémentaires puisque la somme de leurs dimensions fait celle de $\mathbb{R}^3$ (en effet les vecteurs donnés générant les plans ne sont pas proportionnels) et que leur intersection est réduite au vecteur nul (si $(x, 0, 0) = \alpha(1, 2, 0) + \beta(0, 1, 1)$ alors $\alpha = \beta = 0$ donc $(x, 0, 0) = 0$).

$*$ Par exemple, on peut interpréter en terme de somme directe le théorème de la division euclidienne par un polynôme B non nul grâce à l'unicité de l'écriture de tout polynôme A sous la forme $A = BQ + R$ avec $\deg R < \deg B$: on obtient $\boxed{\mathbb{K}[X] = B\mathbb{K}[X] \oplus \mathbb{K}_{\deg(B)-1}[X].}$

$*$ Montrons par exemple que $\boxed{\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}}$ où $\mathcal{P}$ désigne le sous-espace vectoriel des fonctions paires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $\mathcal{I}$ celui des impaires. Ceci a d'ailleurs déjà été fait en début d'année.

Analyse : soit f dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, supposons : $f = p + i$ avec p paire et i impaire. Alors, pour tout réel x : $f(x) = p(x) + i(x)$ et $f(-x) = p(x) - i(x)$, ce qui conduit nécessairement à $p : x \mapsto \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$ et $i : x \mapsto \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$. Il y a donc unicité si l'on montre l'existence.

Synthèse : soit f dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et posons p et i trouvée en analyse. On vérifie facilement que p est paire et i impaire, enfin que $f = p + i$, ce qui prouve l'existence de cette décomposition.

Ainsi, toute fonction de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ s'écrit de manière unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire : c'est la définition de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$.

$*$ Que se passe-t-il pour les sous-espaces affines ? Soit $\mathcal{F} = x + F$ et $\mathcal{G} = y + G$ deux sous-espaces affines de E et on suppose que $E = F + G$. Alors on peut vérifier que $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \varnothing$ (c'est donc un sous-espace affine de E de direction $F \cap G$).

En effet, comme $y - x \in E$, il existe $f \in F$ et $g \in G$ tels que $y - x = f + g$, puisque $E = F + G$. L'égalité $y - g = x + f$ montre que $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \varnothing$.

$*$ Reste à pouvoir calculer $\dim(F + G)$ dans le cas où cette somme n'est pas directe, voir la formule de Grassmann plus loin...

37▶

$*$ *Preuve* : Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie, on peut poser $n = \dim E$ et $p = \dim F$. On choisit une base $(e_1, \ldots, e_p)$ de F (on a vu que cela existe...), et par le théorème de la base incomplète, on peut lui joindre des éléments de E pour former une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E. Comme sous-famille de cette base, la famille $(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ est libre. Le sous-espace vectoriel G qu'elle engendre est donc de dimension $n - p$ puisqu'elle en forme une famille libre et génératrice par définition, donc une base. Comme tout vecteur de E peut se décomposer dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$, on a bien $E = F + G$, et comme $\dim E = n = \dim F + \dim G$, on obtient $E = F \oplus G$. $\square$

$*$ On comprend bien dans la preuve précédente qu'il y a de (très) nombreux supplémentaires possibles pour F, autant que de possibilités de compléter la base de départ de F en une base de E.

⚠ NE JAMAIS PARLER "DU" SUPPLÉMENTAIRE d'un sous-espace vectoriel !!

$*$ Reprenez la preuve : la base construite est dite **adaptée** à la décomposition de l'espace $E = F \oplus G$, car sa première partie forme une base de F et sa seconde une base de G.

Pratique 11 :

1. Par exemple, on montre que $G = \mathrm{Vect}((-2,1,0),(-3,0,1))$ (c'est une résolution de système linéaire), donc G admet une famille génératrice de deux éléments, libre, donc est de dimension 2. Par ailleurs, $F \cap G = \{0\}$ puisque de tous les vecteurs multiples de $(1,2,3)$, seul le vecteur nul vérifie l'équation de G. Donc F et G sont en somme directe, et la somme de leurs dimensions est 3, égale à celle de $\mathbb{R}^3$ qui les contient.

2. $\mathrm{Vect}(1,X)$ est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de $\mathbb{R}_2[X]$, d'intersection avec F réduite au vecteur nul puisque $\alpha+\beta X$ et β nuls en 1 donne $\alpha=\beta=0$. Comme $\mathbb{R}_2[X]$ est de dimension 3, et que F n'est pas réduit au vecteur nul (en fait c'est la droite portée par $(X-1)^2$), on a le résultat.

3. Le système linéaire des équations de F peut se récrire comme un système triangulaire en t, u, z :
$\begin{cases} t & +u & -3z & = & x-2y \\ & u & -z & = & x+y \\ & & z & = & 2x+y \end{cases}$. On en déduit que $F = \mathrm{Vect}((1,0,2,4,3),(0,1,1,-1,2))$, de dimension 2 puisque les deux vecteurs donnés ne sont pas proportionnels, et on complète cette famille libre avec des vecteur de la base canonique à bien choisir, au plus simple les trois derniers vecteurs de la base canonique $(e) = (e_1,\dots,e_5)$ (regarder à quoi conduit une combinaison linéaire nulle de ces vecteurs). Cette base est alors adaptée à la décomposition $\mathbb{R}^5 = F \oplus G$ où $G = \mathrm{Vect}(e_3,e_4,e_5)$.

38▶

$*$ *Preuve* : $F\cap G$ est un sous-espace vectoriel de F et de G. Soit $(e_1,\dots,e_k)$ une base de $F\cap G$, on peut la compléter en une base $(e_1,\dots e_k, f_{k+1},\dots,f_p)$ de F, ou en une base $(e_1,\dots e_k, g_{k+1},\dots,g_q)$ de G. Ces bases sont adaptées respectivement aux sommes directes $F = (F\cap G)\oplus F_1$ et $G = (F\cap G)\oplus G_1$. En d'autres termes, $F_1 = \mathrm{Vect}(f_{k+1},\dots,f_p)$ et $G_1 = \mathrm{Vect}(g_{k+1},\dots,g_q)$.
On va démontrer que $\mathcal{B} = (e_1,\dots,e_k,f_{k+1},\dots,f_p,g_{k+1},\dots,g_q)$ forme une base de $F+G$, et on aura alors : $\dim(F+G) = p+q-k = \dim F + \dim G - \dim(F\cap G)$.
La famille $\mathcal{B}$ génère bien $F+G$: si $x = f+g \in F+G$ avec $f\in F$ et $g\in G$, alors f est combinaison linéaire des e_i et des f_j, g est combinaison linéaire des e_i et des g_j, donc x est bien combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$.
La famille $\mathcal{B}$ est libre : supposons $\sum\limits_{i=1}^{k}\lambda_i e_i + \sum\limits_{j=k+1}^{p}\alpha_j f_j + \sum\limits_{j=k+1}^{q}\beta_j g_j = 0$. Il vient :
$\sum\limits_{i=1}^{k}\lambda_i e_i + \sum\limits_{j=k+1}^{p}\alpha_j f_j = -\sum\limits_{j=k+1}^{q}\beta_j g_j$, et cet élément appartient donc à F et à G_1, donc à $F\cap G$ et à G_1, il est donc nul.
On a donc $\sum\limits_{j=k+1}^{q}\beta_j g_j = 0$, donc les β_j sont tous nuls (on travaille avec une sous-famille d'une base de G, donc libre), puis les α_j et λ_i sont aussi nuls puisque on obtient alors une combinaison linéaire nulle des vecteurs d'une base de F. $\square$

$*$ On a en fait montré que : $F+G = ((F\cap G)\oplus F_1)\oplus G_1$, ce que l'on notera $E = (F\cap G)\oplus F_1 \oplus G_1$ après le paragraphe suivant.

39▶

Par exemple, si $(e_1,\dots,e_n)$ désigne une base d'un espace vectoriel E, on aimerait bien, pour généraliser ce qui précède, traduire l'unicité de la décomposition de tout vecteur de E dans cette base sous la forme : $E = \mathrm{Vect}(e_1)\oplus\mathrm{Vect}(e_2)\oplus\ldots\oplus\mathrm{Vect}(e_n)$, voire utiliser un découpage plus grossier d'une base en p tranches (pas forcément élément par élément) et le traduire en terme de base adaptée à une décomposition de l'espace de forme $E = F_1\oplus F_2\oplus\ldots\oplus F_p$ où la tranche numéro j forme une base de F_j...

40▶

$*$ ⚠ Voyez la complexité de la cns 3) (géométrique), qui généralise la condition $E_1 \cap E_2 = \{0\}$ lorsqu'on traite le cas d'une somme directe de deux sous-espaces vectoriels...
En particulier, $\boxed{\text{on n'étudie jamais les intersections deux à deux des } E_i \text{ lorsque } p \geqslant 3}$!!

Pensez à l'exemple dans $\mathbb{R}^3$ de trois droites du plan $(x0y)$ sécantes à l'origine, mais dont la somme ne fait que $(x0y)$ et non pas tout l'espace...

$*$ *Preuve* : 1) implique 2) est évident.

Supposons 2). Soit $j \in [\![1, p-1]\!]$, et $x \in (\sum\limits_{i=1}^{j} E_i) \cap E_{j+1}$.

Il existe donc des $x_k \in E_k$ tels que $x = \sum\limits_{i=1}^{j} x_i = x_{j+1}$, ce qui s'écrit : $x_{j+1} - \sum\limits_{i=1}^{j} x_i = 0$. Par unicité de l'écriture de 0 supposée avec 2), il vient : $x_{j+1} = 0 = x_1 = x_2 = \ldots = x_j$. Ainsi, l'intersection étudiée est réduite au vecteur nul.

Supposons 3) et montrons 1). Soit $x \in E$, supposons qu'il admette deux écritures différentes : $x = \sum\limits_{i=1}^{p} x_i = \sum\limits_{i=1}^{p} y_i$ avec chaque x_i et y_i dans E_i. Soit j le plus grand indice tel que $x_j \neq y_j$. Il reste : $y_j - x_j = \sum\limits_{i=1}^{j-1} (x_i - y_i)$, cette somme étant nulle si $j = 1$. Cet élément appartient donc à $(\sum\limits_{i=1}^{j-1} E_i) \cap E_j$, donc est nul par hypothèse. On obtient donc $x_j = y_j$, ce qui est contradictoire.

Ainsi, on a montré l'équivalnce entre les trois premières propriétés.

Supposons maintenant les E_i de dimensions finies.

La condition 3) équivaut au fait que pour tout j de 1 à $p-1$, la somme $(\sum\limits_{i=1}^{j} E_i) \oplus E_{j+1}$ est directe, donc que $\dim(\sum\limits_{i=1}^{j} E_i) + \dim E_{j+1} = \sum\limits_{i=1}^{j+1} \dim(E_i)$, et réciproquement. Par récurrence simple, on obtient donc 3) équivalent à 4). $\square$

$*$ Contrairement aux apparences, le plus simple pour montrer que $E = \bigoplus\limits_{i=1}^{p} E_i$ est souvent de prouver par analyse-synthèse l'existence et l'unicité de l'écriture de tout x de E sous la forme $x = \sum\limits_{i=1}^{p} x_i$ où $x_i \in E_i$. L'analyse donne l'unicité en cas d'existence, et permet de rédiger la syntèse qui donne l'existence.

$*$ $\boxed{\text{Revenons à nos espoirs du point 39 ... On obtient deux résultats très utiles !}}$

Supposons $E = \bigoplus\limits_{i=1}^{p} E_i$ et choisissons pour chaque E_i une base $\mathcal{B}_i$.

On obtient que **la concaténation $\mathcal{B}$ (on garde l'ordre des vecteurs, ceux de $\mathcal{B}_1$, puis ceux de $\mathcal{B}_2$, etc.) de ces bases $\mathcal{B}_i$ forme une base de E.**
En effet, pour tout $x \in E$, il existe une écriture unique de la forme $x = x_1 + \ldots + x_p$ avec $x_i \in E_i$. Chaque x_i se décomposant dans $\mathcal{B}_i$, x se décompose dans $\mathcal{B}$ qui génére donc E.
Enfin $\mathcal{B}$ est libre, car une combinaison linéaire nulle non triviale de ses vecteurs induit une écriture de 0_E avec des vecteurs non nuls de certains E_i, ce qui contredit la somme directe.

Inversement, **en "découpant" une base de E en p tranches générant chacune un sous-espace vectoriel E_i, on a bien $E = \bigoplus\limits_{i=1}^{p} E_i$** : la somme est claire puisque tout vecteur de E se décompose dans la base de départ, et la somme des dimensions des E_i donne la dimension de E.

Pratique 12 :

Suivons ces conseils...

Analyse : Soit P un polynôme de degré au plus 2. Supposons qu'il existe α, β et γ des réels tels que $P = \alpha X + \beta(X-1) + \gamma X(X-1)$.
En évaluant en 0, il vient : $\beta = -P(0)$. Puis en 1 : $\alpha = P(1)$. Enfin en 2 : $2\alpha + \beta + 2\gamma = P(2)$, d'où $\gamma = (P(2) - 2P(1) + P(0))/2$, d'où l'unicité en cas d'existence.

Synthèse : Soit P un polynôme de degré au plus 2.
Vérifions que P et $P(1)X - P(0)(X-1) + \dfrac{P(2) - 2P(1) + P(0)}{2} X(X-1)$ coïncident. C'est bien l'expression d'un polynôme réel de degré au plus 2, et les deux expression coïncident en 0, 1 et 2, c'est-à-dire 3 points, donc on a bien l'égalité, et finalement le résultat.

Remarquez qu'on peut se contenter de montrer que $(X, X-1, X(X-1))$ forme une base de $\mathbb{R}_2[X]$, ou simplement une famille libre puisque son cardinal est 3, ce qui se fait facilement en évaluant une combinaison linéaire nulle de ces trois polynômes en 0 et en 1.