► ► 2 : CALCULS ALGÉBRIQUES

1►

$*$ *Preuve de 1)* : l'inégalité équivaut à $2ab \leqslant a^2 + b^2$ puis à $(a-b)^2 \geqslant 0$, ce qui est toujours vrai. $\square$

$*$ *Preuve de 2)* : $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ est non nul par hypothèse, donc l'identité proposée équivaut à :
$(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = a - b$ par la troisième identité remarquable. $\square$

Pratique 1 :

1. $x^2 + 1 = x^2 - \mathrm{i}^2 = (x + \mathrm{i})(x - \mathrm{i})$, et cette identité ne peut s'écrire que dans l'ensemble des complexes.
On dit que $x^2 + 1$ est un polynôme irréductible sur $\mathbb{R}$ (il n'admet pas de racine réelle).

2. $\sqrt{5} + 2$ étant strictement positif, les inégalités sont équivalentes, par multiplication par $\sqrt{5} + 2$, à : $0 \leqslant 5 - 4 \leqslant \dfrac{\sqrt{5}+2}{4}$, qui est vrai puisque $\sqrt{5} \geqslant 2$ (puisque $5 \geqslant 4$).

3. En multipliant par l'expression conjuguée du dénominateur, au numérateur et au dénominateur, on obtient : $(\sqrt{5} + 2)^2$, puis : $9 + 4\sqrt{5}$

4. Pour $h \neq 0$ et petit (tel que $x + h > 0$) on obtient après multiplication par l'expression conjuguée du numérateur : $\dfrac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \dfrac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$, quantité qui tend vers $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ quand h tend vers 0.
La dérivée obtenue sur $\mathbb{R}_+^*$ est : $x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

2►

Exemple : $P : x \mapsto x^3 - 3x + 2$. On essaie les racines "évidentes" $(0, \pm 1, \pm 2)$, ici 1 est racine.
On écrit alors : $x^3 - 3x + 2 = (x-1)(ax^2 + bx + c)$. Pour obtenir x^3, il faut $a = 1$.
En multipliant -1 par ax^2, on obtient $-x^2$ qu'il faut corriger pour obtenir $0.x^2$, donc $b = 1$.
En multipliant -1 par bx, on obtient $-x$ qu'il faut corriger pour obtenir $-3x$, donc $c = -2$.
On vérifie alors avec le terme constant : $(-1) \times (-2) = 2$.

Pratique 2 :

1. On voit que -1 est racine, puis : $x^3 - 7x^2 - 7x + 1 = (x+1)(x^2 - 8x + 1)$.
Si on veut poursuivre, il faut factoriser le trinôme par la méthode du discriminant, voir plus loin.

2. $2x^4 + 5x^3 - x^2 + 5x - 3 = (x+3)(2x^3 - x^2 + 2x - 1) = (x+3)(2x-1)(x^2+1)$, avec la même technique appliquée deux fois...

3►

$*$ Pour obtenir la forme canonique de $ax^2 + bx + c$, on factorise par le coefficient dominant a, puis **on fait apparaître le début d'un carré** : $x^2 + \frac{b}{a}x + ... = (x + \frac{b}{2a})^2 + ...$
Ceci permet d'utiliser la différence de deux carrés pour factoriser.

$*$ Le plus simple est de se ramener à un trinôme à coefficient dominant 1 :

$$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = x^2 + \beta x + \gamma$$

avec, par conséquent, la somme des racines égale à l'opposé du coefficient de x, et le produit des racines égal au coefficient constant.
Par exemple, $x^2 + 3x - 4$ admettant 1 pour racine évidente, on sait avec le produit que la deuxième racine est -4.

Pratique 3 :

1. a) $2x^2+x+4=2(x^2+\frac{x}{2}+2)=2((x+\frac{1}{4})^2+\frac{31}{16})$ et
b) $-3x^2+2x+1=-3(x^2-\frac{2}{3}x-\frac{1}{3})=-3((x-\frac{1}{3})^2-\frac{4}{9})$

2. a) $s=-1/2$, $p=2$ b) $s=2/3$, $p=-1/3$

3. Les racines sont $-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$, qu'on appelle en général j, et son conjugué $\mathrm{j}^2=\bar{\mathrm{j}}$ (toutes deux sont de cube 1 puisque $(x-1)(1+x+x^2)=x^3-1$).

4. 1 est racine évidente, la deuxième est donnée par leur somme ou leur produit, soit 5.

5. Le discrimant est $4\cos^2(\theta)-4=-4\sin^2(\theta)$, il y a donc discussion.
Si $\theta\neq 0$ modulo π, les racines (complexes non réelles) sont : $\dfrac{2\cos(\theta)\pm 2\mathrm{i}\sin(\theta)}{2}=\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\theta}$
Sinon, il y a une seule solution $-\cos(\theta)$ (racine double), c'est-à-dire 1 ou -1 suivant θ.

6. On cherche x et y comme les deux racines du trinôme : $t^2-2t+3=0$, donc $x=1+\mathrm{i}\sqrt{2}$ et $y=1-\mathrm{i}\sqrt{2}$ ou l'inverse.

7. En écrivant l'expression x^2+y^2 symétrique en x et y sous la forme : $(x+y)^2-2xy$, le système proposé est équivalent au système : $\begin{cases} x+y=2 \\ xy=1/2 \end{cases}$

x et y sont donc les deux racines du trinôme : $t^2-2t+1/2$, donc $x=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $y=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou l'inverse.

4►

∗ Dans une telle somme ou un tel produit (finis), l'ordre des termes n'influe pas sur le résultat...

∗ Ces notations se généralisent à plusieurs indices : par exemple, en notant $I=[\![1,3]\!]$ et $J=[\![1,2]\!]$,

$$z_{1,1}+z_{1,2}+z_{2,1}+z_{2,2}+z_{3,1}+z_{2,3}=\sum_{(i,j)\in I\times J} z_{i,j}=\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant 3\\ 1\leqslant j\leqslant 2}} z_{i,j}=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2} z_{i,j}=\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{3} z_{i,j}$$

Après le symbole indexé par i, les termes se comprennent à i fixé.

∗ Sommes à ensembles d'indices infinis : il faut attendre Juin avec ses "séries" et "familles sommables".

∗ Tant que vous peinez avec ces symboles, n'hésitez pas à récrire au moins mentalement sous forme développée...

Pratique 4 :

1. $0+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$ **2.** $\prod_{k=1}^{n}k^2$

3. Les deux sommes sont égales à : $\sin(1)+\sin(2)+\ldots+\sin(n)$. Les indices k et j sont dits muets.

4. $\sum_{k=0}^{n} z=z\sum_{k=0}^{n}1=(n+1)z$ et $\prod_{i=0}^{n} z=z^{n+1}$.

5. $\sum_{k=1}^{n} n=n^2$ alors que $\sum_{k=1}^{n} k=\dfrac{n(n+1)}{2}\cdot$ Pour cette dernière en effet, en sommant les deux lignes suivantes colonne par colonne, on obtient d'une part n fois la valeur $n+1$, et d'autre part deux fois la somme cherchée : $\begin{array}{ccccccccc} 1 & + & 2 & + & \ldots & + & (n-1) & + & n \\ n & + & (n-1) & + & \ldots & + & 2 & + & 1 \end{array}$

6. $\sum_{k=1}^{n}(2k)=2\sum_{k=1}^{n}k=n(n+1)$, et $\prod_{k=1}^{n}(2k)=2^n\prod_{k=1}^{n}k=2^n\,n!$

7. Par la même technique qu'en 5. pour obtenir : $\frac{n}{2}(2a+b(2m+n-1))=n(a+\frac{b}{2}(2m+n-1))$

5▶

$*$ Décalage : c'est bien toujours $z_m + z_{m+1} + \ldots + z_n$ (même chose avec le produit), ou poser $k = l - p$.

$*$ Inversion : on utilise alors la commutativité de la somme et du produit (on inverse le parcours de l'ensemble $[\![m, n]\!]$), ou poser $k = m + n - l$.

$*$ D'autres identité sont possibles ! Par exemple en regroupant les termes (ou facteurs) suivant la parité des indices.

Pratique 5 :

1. Par décalage. On peut poser $l = k + 1$ dans la deuxième somme.

2. Par inversion (ou poser $l = n - k$ dans la deuxième somme).

Il vient donc : $\sum\limits_{k=0}^{n} k = n(n+1) - \sum\limits_{k=0}^{n} k$, ce qui redonne : $\sum\limits_{k=0}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$

6▶

$*$ *Preuve pour une somme télescopique* : $\sum\limits_{i=m}^{n} (z_{i+1} - z_i) = \sum\limits_{i=m}^{n} z_{i+1} - \sum\limits_{i=m}^{n} z_i = \sum\limits_{i=m+1}^{n+1} z_i - \sum\limits_{i=m}^{n} z_i = z_{n+1} - z_m$ (on a utilisé un décalage). $\square$

$*$ *Preuve pour un produit télescopique* : $\prod\limits_{i=m}^{n} \dfrac{z_{i+1}}{z_i} = \dfrac{\prod\limits_{i=m}^{n} z_{i+1}}{\prod\limits_{i=m}^{n} z_i} = \dfrac{\prod\limits_{i=m+1}^{n+1} z_i}{\prod\limits_{i=m}^{n} z_i} = \dfrac{z_{n+1}}{z_m}$ (par décalage). $\square$

$*$ *Preuve pour une somme géométrique* : Pour $q \neq 1$, $(1-q) \sum\limits_{k=0}^{n} q^k = \sum\limits_{k=0}^{n} (q^k - q^{k+1}) = 1 - q^{n+1}$ (c'est une somme télescopique). Pour $q = 1$, le résultat est immédiat. $\square$

$*$ Pour une somme géométrique plus générale $\sum\limits_{k=m}^{n} q^k$, **toujours se ramener à un premier terme de puissance nulle par factorisation !!!**

Ici, si $q \neq 1$: $\sum\limits_{k=m}^{n} q^k = q^m \sum\limits_{k=m}^{n} q^{k-m} = q^m \sum\limits_{k=0}^{n-m} q^k = q^m \dfrac{1 - q^{n-m+1}}{1-q}$ par décalage, puis formule simple.

Pratique 6 :

1. Somme géométrique : $\left(\dfrac{1}{3}\right)^5 \dfrac{1 - (1/3)^6}{1 - 1/3} = \dfrac{3^6 - 1}{2.3^{10}}$

2. $(z-1) \sum\limits_{k=0}^{n} kz^k = \sum\limits_{k=0}^{n} kz^{k+1} - \sum\limits_{k=1}^{n} kz^k = (\sum\limits_{k=0}^{n} (k+1)z^{k+1} - \sum\limits_{k=0}^{n} kz^k) - \sum\limits_{k=0}^{n} z^{k+1}$

On observe une série télescopique, et finalement : $\sum\limits_{k=1}^{n} kz^k = \sum\limits_{k=0}^{n} kz^k = \dfrac{nz^{n+2} - (n+1)z^{n+1} + z}{(z-1)^2}$ lorsque $z \neq 1$, sinon on obtient $n(n+1)/2$.

3. Mettre au même dénominateur, on obtient une somme télescopique. Réponse : $\dfrac{n}{n+1}$

4. $\ln(1 + 1/k) = \ln(k+1) - \ln(k)$ puis somme télescopique. Réponse : $\ln(n+1)$.

5. Produit télescopique. Réponse : $n + 1$.

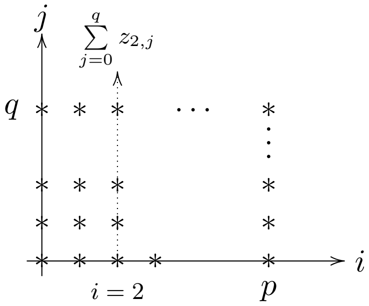
6. $(k+1)^2 - k^2 = 2k + 1$. En sommant pour k de 1 à n, $\sum\limits_{k=1}^{n} ((k+1)^2 - k^2) = (n+1)^2 - 1 = 2 \sum\limits_{k=1}^{n} k + n$ redonne la formule déjà vue.

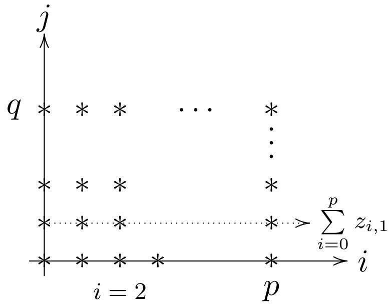
De même, en simplifiant $(k+1)^3 - k^3$ puis en sommant de $k = 1$ à n il vient : $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Cette technique se généralise pour obtenir $S_p = \sum\limits_{k=1}^{n} k^p$ pour p naturel.

7▶

$*$ Dans $\sum_{i=0}^{p}\sum_{j=0}^{q} z_{i,j}$, on somme pour chaque i de $[\![0,p]\!]$ les sommes $\sum_{j=0}^{q} z_{i,j}$, où i est donc fixé.

Sommation par colonnes : 

et par lignes : 

$*$ Les deux procédés donnent bien le même résultat, conséquence de la commutativité de la somme (ou du produit pour les produits doubles en rectangle).

Pratique 7 :

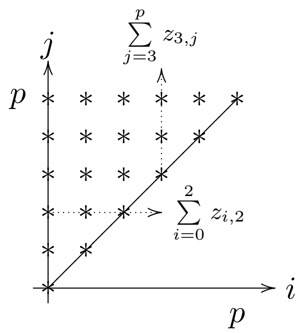
1. $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ij = \sum_{i=1}^{n}(i\sum_{j=1}^{n} j) = \sum_{i=1}^{n}(i\,\frac{n(n+1)}{2}) = \frac{n(n+1)}{2}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

2. $\sum_{i=m}^{n}\sum_{j=p}^{q} a_ib_j = \sum_{i=m}^{n}(a_i\sum_{j=p}^{q} b_j) = (\sum_{j=p}^{q} b_j)(\sum_{i=m}^{n} a_i)$ d'où le résultat par commutativité du produit.

3. $\prod_{i=m}^{n}\prod_{j=p}^{q} a_ib_j = \prod_{i=m}^{n}(a_i^{q-p+1}\prod_{j=p}^{q} b_j) = (\prod_{j=p}^{q} b_j)^{n-m+1}(\prod_{i=m}^{n} a_i)^{q-p+1}$. Réponse : non en général.

8▶

Les égalités découlent de la commutativité de la somme (ou du produit).



Pratique 8 :

1. On choisit la bonne description, celle qui consiste à sommer d'abord les i, plutôt que les $1/j$... :
$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}\frac{i}{j} = \sum_{j=1}^{n}(\frac{1}{j}\sum_{i=1}^{j} i) = \sum_{j=1}^{n}\frac{j+1}{2} = \frac{n(n+1)}{4} + \frac{n}{2} = \frac{n(n+3)}{4}$

2. Preuve par récurrence sur n naturel. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété H_n est celle de la question posée.
H_1 est évidemment vérifiée, et H_2 donne deux écritures de la première identité remarquable :
$(z_1+z_2)^2 = z_1^2+z_2^2+2z_1z_2 = z_1^2+z_2^2+z_1z_2+z_2z_1$.
Soit $n \geqslant 2$, supposons H_n vérifiée, montrons H_{n+1}.
$(\sum_{i=1}^{n+1} z_i)^2 = (\sum_{i=1}^{n} z_i)^2 + z_{n+1}^2 + 2z_{n+1}\sum_{i=1}^{n} z_i$ en utilisant H_2. Compte tenu de H_n, il reste à vérifier que $z_{n+1}\sum_{i=1}^{n} z_i + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} z_iz_j = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n+1} z_iz_j$, ce qui est clair, et enfin que $\sum_{i\neq j} z_iz_j = 2\sum_{i<j} z_iz_j$, ce qui est clair également puisqu'à i et j distincts fixés, avec $i<j$, $2z_iz_j = z_iz_j + z_jz_i$.
On conclut alors par le théorème de récurrence.

Pratique 9 :

1. Par produit avec les $n-1$ inégalités entre entiers positifs : $2 \leqslant k \leqslant n$ pour $k \in [\![2, n-1]\!]$.
On peut aussi faire une preuve par récurrence de n.

2. Réponse : $\dfrac{n!}{(n-p)!}$ (on peut utiliser d'abord une inversion).

3. Soit à calculer, en posant $k = 2p$, le produit : $\prod\limits_{p=1}^{n} (2p) = 2^n.(n!)$

9▶

∗ *Preuve des propriétés* : Commençons par 3) : il suffit de mettre le premier membre de la formule sous même dénominateur $(k+1)!$ lorsque $0 \leqslant k \leqslant n$. Cette formule s'étend alors au cas où $k \in \mathbb{Z} \setminus [\![0, n]\!]$.
La propriété 2) est une conséquence directe de la définition des cœfficients binomiaux.

On déduit par récurrence sur n le caractère naturel de $\dbinom{n}{p}$ en montrant la propriété $H(n)$: pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\dbinom{n}{k}$ est naturel. $H(0)$ est clairement vérifiée. Soit maintenant n un naturel, supposons $H(n)$ vérifiée, et montrons $H(n+1)$.
Si $l \in [\![0, n-1]\!]$, alors $\dbinom{n+1}{k}$ est somme de deux naturels par hypothèse de récurrence et grâce à la formule du triangle de Pascal.
Si $k = n$ alors $\dbinom{n+1}{n+1} = 1$ est bien naturel.
Les autres valeurs de $\dbinom{n+1}{k}$ étant nulles par convention, $H(n+1)$ est démontrée.
On conclut alors par le théorème de récurrence.
Pour établir la formule efficace, on écrit : $(n+1)! = (n+1)\,n!$ puis : $(k+1)! = (k+1).k!$ et enfin : $(n-k)! = ((n+1)-(k+1))!$ □

∗ Le triangle de Pascal :

$$\begin{array}{cccccc}
\binom{0}{0} & & & & & \\
\binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & & \\
\binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & & \\
\binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & & \\
\binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} \rightarrow & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & \\
 & & & \downarrow & & \\
\binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5}
\end{array}$$

∗ La formule efficace... l'est pour l'implémentation informatique notamment, en terme de complexité. Comparez visuellement le segment parcouru qu'elle induit dans le triangle de Pascal, avec la bande (en pointillés pour le calcul de $\binom{4}{2}$) nécessaire via la formule du triangle de Pascal (avec mémoïzation).

10▶

∗ *Preuve* : par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. Notons $H(n)$ la propriété énoncée, pour a et b deux scalaires. $H(0)$ et $H(1)$ sont claires. Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $H(n)$ vérifiée. Alors :

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n(a+b) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}) a^k b^{n+1-k} + \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 + \binom{n}{0} a^0 b^{n+1}$$

ce qui donne $H(n+1)$ par la formule du triangle de Pascal puisque $\binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1}$ et $\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0}$.
On conclut par le théorème de récurrence. $\square$

$*$ Dans $(1+t)^n$, le cœfficient de t^k est donc $\binom{n}{k}$.

De même, celui de s^k dans $(s+e)^n$ est $\binom{n}{k}$, ce qui correspond au nombre de façons de choisir s (le succès) parmi les n facteurs $(s+e)$ de $(s+e)^n$ pour construire le coefficient de s^k.

Pratique 10 :

1. $(a+b)^0 = 1$, $(a+b)^1 = a+b$, $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$, $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, $(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$, et $(a+b)^5 = a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$.

2. Par la formule du triangle de Pascal, on obtient : $\binom{6}{2}$, donc 15.

3. $(1+1)^n = 2^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.

11▶

Preuve : il ne reste à montrer que le dernier point, ce qu'on peut faire à partir du deuxième membre de l'égalité, avec un décalage.

$$(a-b).\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1} a^{k+1} b^{n-1-k} - \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} a^k b^{n-k} - \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k} = a^n - b^n \qquad \square$$

Pratique 11 :

1. $a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$, $a^5-b^5 = (a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)$ et
$a^4-b^4 = (a^2-b^2)(a^2+b^2) = (a-b)(a+b)(a^2+b^2) = (a-b)(a+b)(a-\mathrm{i}b)(a+\mathrm{i}b)$

2. $a^3+b^3 = a^3-(-b)^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$

3. À partir de la formule efficace : $\sum\limits_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n\sum\limits_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1} = n\sum\limits_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k} = n2^{n-1}$