

# Les primitives et les dérivées.

Louis Herzog

# Table des matières

1	Fonctions trigonométriques et trigonométriques inverses.	1
1.1	La fonction $x \mapsto \cos(x)$ . . . . .	1
1.1.1	Dérivée de la fonction $x \mapsto \cos(x)$ . . . . .	1
1.1.2	Calcul de la primitive de la fonction $x \mapsto \cos(x)$ avec Sage	2
1.2	La fonction $x \mapsto \sin(x)$ . . . . .	2
1.2.1	Dérivée de la fonction $x \mapsto \sin(x)$ avec Sage. . . . .	2
1.2.2	Calcul de la primitive de la fonction $x \mapsto \sin(x)$ . . . . .	2
1.3	La fonction $x \mapsto \tan(x)$ . . . . .	2
1.3.1	Dérivée de la fonction $x \mapsto \tan(x)$ . . . . .	2
1.3.2	Calcul de la primitive de la fonction $x \mapsto \tan(x)$ . . . . .	3
1.4	La fonction $x \mapsto \text{Arc cos}(x)$ . . . . .	3
1.4.1	Calcul de la dérivée de la fonction $x \mapsto \text{Arc cos}(x)$ . . . . .	3
1.4.2	Calcul de la primitive de la fonction $x \mapsto \text{Arc cos}(x)$ . . . . .	4
1.5	La fonction $x \mapsto \text{Arc sin}(x)$ . . . . .	5
1.5.1	Calcul de la dérivée de la fonction $x \mapsto \text{Arc sin}(x)$ . . . . .	5
1.5.2	Calcul de la primitive de la fonction $x \mapsto \text{Arc sin}(x)$ . . . . .	6
1.6	La fonction $x \mapsto \text{Arc tan}(x)$ . . . . .	7
1.6.1	Calcul de la dérivée de la fonction $x \mapsto \text{Arc tan}(x)$ . . . . .	7
1.6.2	Calcul de la primitive de la fonction $x \mapsto \text{Arc tan}(x)$ . . . . .	8
2	Fonctions hyperboliques et hyperboliques inverses.	9
2.1	La fonction $x \mapsto \text{ch}(x)$ . . . . .	10

2.1.1	Dérivée de la fonction $x \mapsto \operatorname{ch}(x)$ . . . . .	10
2.1.2	Calcul de la primitive de la fonction $x \mapsto \operatorname{ch}(x)$ . . . . .	10
2.2	La fonction $x \mapsto \operatorname{sh}(x)$ . . . . .	10
2.2.1	Dérivée de la fonction $x \mapsto \operatorname{sh}(x)$ . . . . .	10
2.2.2	Calcul de la primitive de la fonction $x \mapsto \operatorname{sh}(x)$ . . . . .	10
2.3	La fonction $x \mapsto \operatorname{th}(x)$ . . . . .	11
2.3.1	Dérivée de la fonction $x \mapsto \operatorname{th}(x)$ . . . . .	11
2.3.2	Calcul de la primitive de la fonction $x \mapsto \operatorname{th}(x)$ . . . . .	11
2.4	La fonction $x \mapsto \operatorname{Arg} \operatorname{ch}(x)$ . . . . .	12
2.4.1	Dérivée de la fonction $x \mapsto \operatorname{Arg} \operatorname{ch}(x)$ . . . . .	12
2.4.2	Calcul de la primitive de la fonction $x \mapsto \operatorname{Arg} \operatorname{ch}(x)$ . . .	12
2.5	La fonction $x \mapsto \operatorname{Arg} \operatorname{sh}(x)$ . . . . .	13
2.5.1	Dérivée de la fonction $x \mapsto \operatorname{Arg} \operatorname{sh}(x)$ . . . . .	13
2.5.2	Calcul de la primitive de la fonction $x \mapsto \operatorname{Arg} \operatorname{sh}(x)$ . . .	13
2.6	La fonction $x \mapsto \operatorname{Arg} \operatorname{th}(x)$ . . . . .	14
2.6.1	Dérivée de la fonction $x \mapsto \operatorname{Arg} \operatorname{th}(x)$ . . . . .	14
2.6.2	Calcul de la primitive de la fonction $x \mapsto \operatorname{Arg} \operatorname{th}(x)$ . . .	14
3	Calcul de primitives de fonctions de bases. . . . .	15
3.1	La fonction $x \mapsto \ln(x)$ . . . . .	15
3.2	La fonction $x \mapsto \exp(x)$ . . . . .	15
4	Calcul de quelques primitives. . . . .	16
4.1	Calcul d'une primitive de $x \mapsto \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$ . . . . .	17
4.1.1	Vérification avec Sage . . . . .	17
4.2	Calcul d'une primitive de $x \mapsto \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$ . . . . .	17
4.2.1	Vérification avec Sage . . . . .	17
4.3	Calcul d'une primitive de $x \mapsto \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \alpha^2}}$ . . . . .	17
4.3.1	Vérification avec Sage . . . . .	17

4.4	Calcul d'une primitive de $x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$	17
4.4.1	Calcul de la dérivée de la fonction $x \mapsto \ln(x)$ .	17
4.4.2	Calcul de la primitive de la fonction $x \mapsto \ln(x)$ .	19

## Résumé

Quelques considérations préliminaires sur le calcul de certaines primitives telles que celles des fonctions  $x \mapsto \text{Arc cos}(x)$ ,  $x \mapsto \text{Arc sin}(x)$  ou bien  $x \mapsto \text{Arc tan}(x)$  une astuce est indispensable. Elle consiste à procéder à une intégration par parties. En effet, n'ayant aucune idée des primitives, il est raisonnable de changer leurs rôles respectifs et de considérer, non plus la fonction initiale, mais sa dérivée.

Le premier objectif est donc de vérifier si celles-ci existent et sont calculables. On passe des formules de trigonométrie aux formules de trigonométries hyperboliques en remplaçant  $\cos$  par  $\text{ch}$  et  $\sin$  par  $\text{i.sh}$ .

# Chapitre 1

## Fonctions trigonométriques et trigonométriques inverses.

### 1.1 La fonction $x \mapsto \cos(x)$ .

La restriction de la fonction  $x \mapsto \ln(x)$  à l'intervalle  $[0, \pi]$  est une bijection de  $[0, \pi] \rightarrow [0, +\infty]$ . Il existe donc une fonction réciproque à la fonction  $x \mapsto \ln(x)$  que l'on nomme  $x \mapsto \exp(x)$ . C'est également une bijection, elle est continue sur l'intervalle fermé  $[-1, 1]$  et est dérivable sur l'intervalle ouvert  $] -\infty, +\infty[$ .

#### 1.1.1 Dérivée de la fonction $x \mapsto \cos(x)$ .

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x)\cos(h) - \sin(x)\sin(h) - \cos(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x)(\cos(h) - 1)}{h} - \frac{\sin(x)\sin(h)}{h} \\ &= -\sin x\end{aligned}$$

### 1.1.2 Calcul de la primitive de la fonction $x \mapsto \cos(x)$ avec Sage

$$f(x) = \cos(x)$$

$$F(x) = \text{integrate}(f(x), x)$$

La primitive de  $\cos(x) = \sin(x) + \text{Cste}$ .

## 1.2 La fonction $x \mapsto \sin(x)$ .

### 1.2.1 Dérivée de la fonction $x \mapsto \sin(x)$ avec Sage.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x) \sin(h) - \cos(x) \sin(h) - \sin(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x)(\cos(h) - 1)}{h} - \frac{\cos(x) \sin(h)}{h} \\ &= \cos x \end{aligned}$$

### 1.2.2 Calcul de la primitive de la fonction $x \mapsto \sin(x)$ .

$$f(x) = \sin(x)$$

$$F(x) = \text{integrate}(f(x), x)$$

La primitive de  $\sin(x) = -\cos(x) + \text{Cste}$ .

## 1.3 La fonction $x \mapsto \tan(x)$ .

### 1.3.1 Dérivée de la fonction $x \mapsto \tan(x)$ .

$$(\tan(x))' = \left( \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \right)'$$

=

Vérification avec Sage

```
f(x) = tan(x)
g(x) = diff(f(x), x, 1)
```

La dérivée de  $\tan(x) = \tan(x)^2 + 1$ .

Le graphe de  $\tan(x)$ .

### 1.3.2 Calcul de la primitive de la fonction $x \mapsto \tan(x)$ .

Vérification avec Sage

```
f(x) = tan(x)
F(x) = integrate(f(x), x)
```

La primitive de  $\tan(x) = \log(\sec(x)) + \text{Cste}$ .

## 1.4 La fonction $x \mapsto \text{Arc cos}(x)$ .

La restriction de la fonction  $x \mapsto \cos(x)$  à l'intervalle  $[0, \pi]$  est une bijection de  $[0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ . Il existe donc une fonction réciproque à la fonction  $x \mapsto \cos(x)$  que l'on nomme  $x \mapsto \text{Arc cos}(x)$ . C'est également une bijection, elle est continue sur l'intervalle fermé  $[-1, 1]$  et est dérivable sur l'intervalle ouvert  $] -1, 1[$ .

### 1.4.1 Calcul de la dérivée de la fonction $x \mapsto \text{Arc cos}(x)$ .

Pour ce calcul, il faut utiliser le calcul de la dérivée d'une fonction composée. On a  $\cos(\text{Arc cos}(x)) = x$ , par conséquent la dérivée de cette expression s'exprime par  $-\sin(\text{Arc cos}(x)) \times (\text{Arc cos}(x))' = 1$ , d'où  $(\text{Arc cos}(x))' = \frac{-1}{\sin(\text{Arc cos}(x))}$ .



La difficulté est maintenant de déterminer  $\sin(\text{Arc cos}(x))$ , or on sait que pour tout  $X \in \mathbb{R}$ , on a  $\sin^2(X) + \cos^2(X) = 1$ , d'où  $\sin(X) = \sqrt{1 - \cos^2(X)}$ .

En remplaçant  $X$  par  $\text{Arc cos}(x)$ ,

on a  $\sin(\text{Arc cos}(x)) = \sqrt{1 - \cos^2(\text{Arc cos}(x))} = \sqrt{1 - x^2}$ .

Finalement,  $(\text{Arc cos}(x))' = \frac{-1}{\sin(\text{Arc cos}(x))} = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$ .

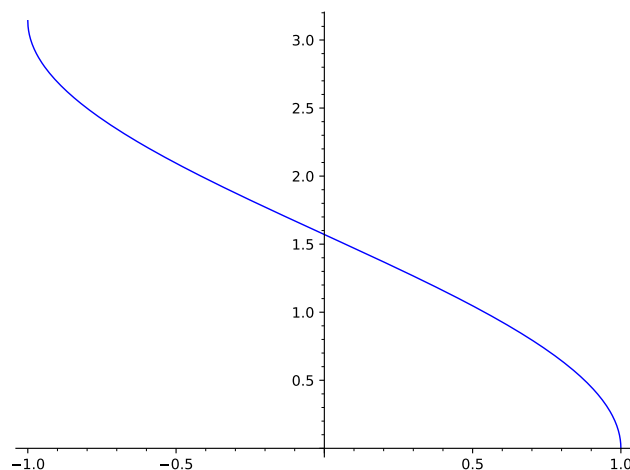
Vérification avec Sage

```
f(x) = arccos(x)
```

```
g(x) = diff(f(x),x,1)
```

La dérivée de  $\text{Arc cos}(x) = -\frac{1}{\sqrt{-x^2 + 1}}$ .

Le graphe de  $\text{Arc cos}(x)$ .



On peut maintenant entreprendre le calcul de la primitive de la fonction  $x \mapsto \text{Arc cos}(x)$ .

#### 1.4.2 Calcul de la primitive de la fonction $x \mapsto \text{Arc cos}(x)$ .

Je pose que  $u(x)$  est égal à la fonction  $\text{Arc cos}(x)$  et  $v'(x)$  est égal 1 d'où  $u'(x)$  est égal à la fonction  $\frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$  et  $v(x)$  est égal  $x$ .

Alors on a  $\int \text{Arc cos}(x) dx = x \times \text{Arc cos}(x) - \int \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}} \times x dx$ .

Calcul de  $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ .

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{-1}{2} \int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} + \text{Cste}.$$

$$\text{Finalement } \int \text{Arc cos}(x) dx = x \times \text{Arc cos}(x) - \sqrt{1-x^2} + \text{Cste}$$

Vérification avec Sage

$$f(x) = \arccos(x)$$

$$F(x) = \text{integrate}(f(x), x)$$

La primitive de  $\text{Arc cos}(x) = x \text{Arc cos}(x) - \sqrt{-x^2 + 1} + \text{Cste}$ .

## 1.5 La fonction $x \mapsto \text{Arc sin}(x)$ .

La restriction de la fonction  $x \mapsto \sin(x)$  à l'intervalle  $[0, \pi]$  est une bijection de  $[0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ . Il existe donc une fonction réciproque à la fonction  $x \mapsto \sin(x)$  que l'on nomme  $x \mapsto \text{Arc sin}(x)$ . C'est également une bijection, elle est continue sur l'intervalle fermé  $[-1, 1]$  et est dérivable sur l'intervalle ouvert  $] -1, 1[$ .

### 1.5.1 Calcul de la dérivée de la fonction $x \mapsto \text{Arc sin}(x)$ .

Pour ce calcul, il faut utiliser le calcul de la dérivée d'une fonction composée. On a  $\sin(\text{Arc sin}(x)) = x$ , par conséquent la dérivée de cette expression s'exprime par  $\cos(\text{Arc sin}(x)) \times (\text{Arc sin}(x))' = 1$ , d'où  $(\text{Arc sin}(x))' = \frac{1}{\cos(\text{Arc sin}(x))}$ .

La difficulté est maintenant de déterminer  $\cos(\text{Arc sin}(x))$ , or on sait que pour tout  $X \in \mathbb{R}$ , on a  $\sin^2(X) + \cos^2(X) = 1$ , d'où  $\cos(X) = \sqrt{1 - \sin^2(X)}$ .

En remplaçant  $X$  par  $\text{Arc sin}(x)$ ,

$$\text{on a } \cos(\text{Arc sin}(x)) = \sqrt{1 - \sin^2(\text{Arc sin}(x))} = \sqrt{1 - x^2}.$$

Finalement,  $(\text{Arc sin}(x))' = \frac{1}{\cos(\text{Arc sin}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

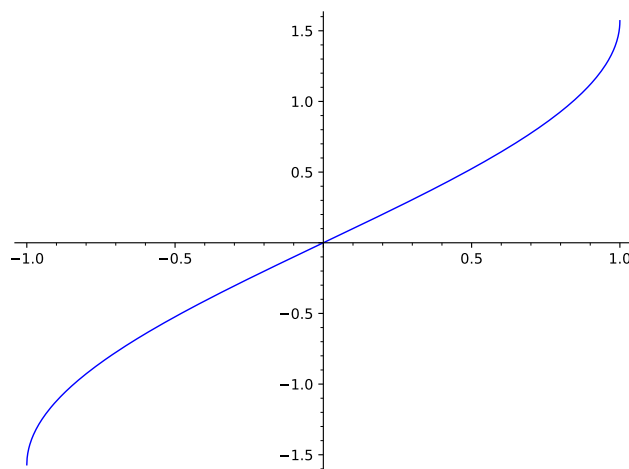
Vérification avec Sage

$$f(x) = \arcsin(x)$$

$$g(x) = \text{diff}(f(x), x, 1)$$

La dérivée de  $\text{Arc sin}(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

Le graphe de  $\text{Arc sin}(x)$ .



On peut maintenant entreprendre le calcul de la primitive de la fonction  $x \mapsto \text{Arc sin}(x)$ .

### 1.5.2 Calcul de la primitive de la fonction $x \mapsto \text{Arc sin}(x)$ .

Je pose que  $u(x)$  est égal à la fonction  $\text{Arc sin}(x)$  et  $v'(x)$  est égal 1 d'où  $u'(x)$  est égal à la fonction  $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  et  $v(x)$  est égal  $x$ .

Alors on a  $\int \text{Arc sin}(x) dx = x \times \text{Arc sin}(x) - \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \times x dx.$

Calcul de  $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{1-x^2}.$$

Finalement  $\int \text{Arc sin}(x) dx = x \times \text{Arc cos}(x) - \sqrt{1-x^2} + \text{Cste}$

Vérification avec Sage

$$f(x) = \arcsin(x)$$

$$F(x) = \text{integrate}(f(x), x)$$

La primitive de  $\text{Arc sin}(x) = x \text{Arc sin}(x) + \sqrt{-x^2 + 1} + \text{Cste}$ .

## 1.6 La fonction $x \mapsto \text{Arc tan}(x)$ .

La restriction de la fonction  $x \mapsto \tan(x)$  à l'intervalle  $[0, \pi]$  est une bijection de  $[0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ . Il existe donc une fonction réciproque à la fonction  $x \mapsto \tan(x)$  que l'on nomme  $x \mapsto \text{Arc tan}(x)$ . C'est également une bijection, elle est continue sur l'intervalle fermé  $[-1, 1]$  et est dérivable sur l'intervalle ouvert  $] -1, 1[$ .

### 1.6.1 Calcul de la dérivée de la fonction $x \mapsto \text{Arc tan}(x)$ .

Pour ce calcul, il faut utiliser le calcul de la dérivée d'une fonction composée. On a  $\tan(\text{Arc tan}(x)) = x$ , par conséquent la dérivée de cette expression s'exprime par  $\tan(\text{Arc tan}(x)) \times (\text{Arc tan}(x))' = 1$ , d'où  $(\text{Arc tan}(x))' = \frac{1}{1 + x^2}$ .

La difficulté est maintenant de déterminer  $\tan'(\text{Arc tan}(x))$ , or on sait que pour tout  $X \in \mathbb{R}$ , on a  $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$ , d'où  $\tan'(\text{Arc tan}(x)) = 1 + x^2$ .

Finalement,  $(\text{Arc tan}(x))' = \frac{1}{1 + x^2}$ .

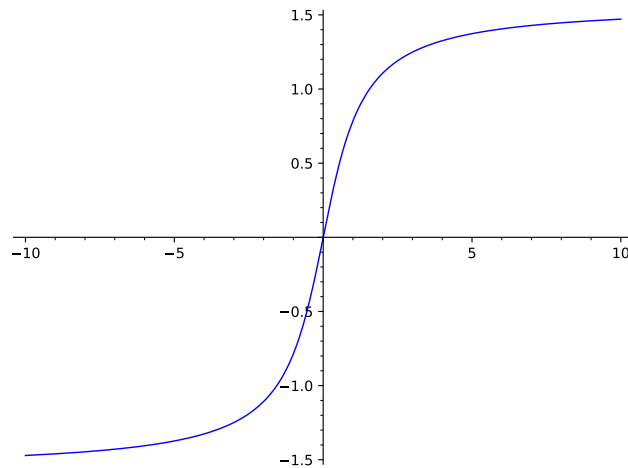
Vérification avec Sage

$$f(x) = \arctan(x)$$

$$g(x) = \text{diff}(f(x), x, 1)$$

La dérivée de  $\text{Arc tan}(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ .

Le graphe de  $\text{Arc tan}(x)$ .



On peut maintenant entreprendre le calcul de la primitive de la fonction  $x \mapsto \text{Arc tan}(x)$ .

### 1.6.2 Calcul de la primitive de la fonction $x \mapsto \text{Arc tan}(x)$ .

Je pose que  $u(x)$  est égal à la fonction  $\text{Arc tan}(x)$  et  $v'(x)$  est égal 1 d'où  $u'(x)$  est égal à la fonction  $\frac{1}{1+x^2}$  et  $v(x)$  est égal  $x$ .

Alors on a  $\int \text{Arc tan}(x) \, dx = x \times \text{Arc tan}(x) - \int \frac{1}{1+x^2} \times x \, dx$ .

Calcul de  $\int \frac{x}{1+x^2} \, dx$ .

$$\int \frac{x}{1+x^2} \, dx = \frac{1}{2} \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2}.$$

Finalement  $\int \text{Arc tan}(x) \, dx = x \times \text{Arc tan}(x) - \ln \sqrt{1+x^2} + \text{Cste}$

Vérification avec Sage

$$f(x) = \arctan(x)$$

$$F(x) = \text{integrate}(f(x), x)$$

La primitive de  $\text{Arc tan}(x) = x \text{Arc tan}(x) - \frac{1}{2} \log(x^2 + 1) + \text{Cste} + \text{Cste}$ .

## Chapitre 2

# Fonctions hyperboliques et hyperboliques inverses.

On passe des formules de trigonométrie aux formules de trigonométries hyperboliques en remplaçant  $\cos$  par  $\text{ch}$  et  $\sin$  par  $i.\text{sh}$ . Par exemple pour  $\cos^2 + \sin^2 = 1$  nous obtenons  $(\text{ch})^2 + (i.\text{sh})^2 = (\text{ch})^2 - (\text{sh})^2 = 1$  et pour  $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ , nous obtenons  $\text{ch}(a+b) = \text{ch}(a)\text{ch}(b) - i.\text{sh}(a)i.\text{sh}(b)$  c'est-à-dire  $\text{ch}(a+b) = \text{ch}(a)\text{ch}(b) - (i)^2 \text{sh}(a)\text{sh}(b)$  finalement  $\text{ch}(a+b) = \text{ch}(a)\text{ch}(b) + \text{sh}(a)\text{sh}(b)$ . On change de signe !

## 2.1 La fonction $x \mapsto \text{ch}(x)$ .

### 2.1.1 Dérivée de la fonction $x \mapsto \text{ch}(x)$ .

$$\begin{aligned}\text{ch}(x)' &= \left( \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2} \right)' \\ &= \frac{\exp(x)' + \exp(-x)'}{2} \\ &= \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2} \\ &= \text{sh}(x)\end{aligned}$$

Vérification avec Sage

### 2.1.2 Calcul de la primitive de la fonction $x \mapsto \text{ch}(x)$ .

Vérification avec Sage

## 2.2 La fonction $x \mapsto \text{sh}(x)$ .

### 2.2.1 Dérivée de la fonction $x \mapsto \text{sh}(x)$ .

$$(\text{sh}(x))' =$$

Vérification avec Sage

### 2.2.2 Calcul de la primitive de la fonction $x \mapsto \text{sh}(x)$ .

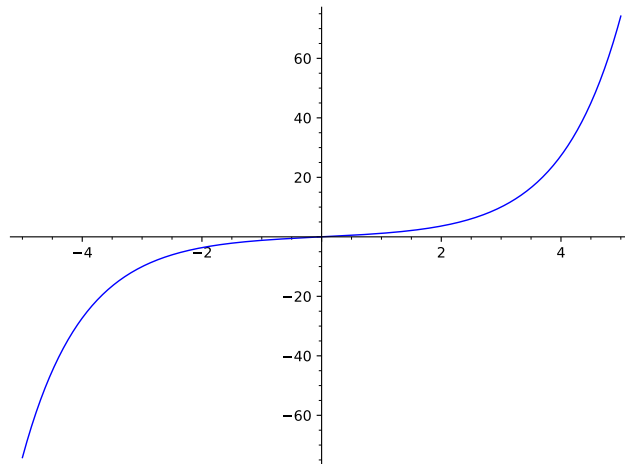
Vérification avec Sage

$$f(x) = \sinh(x)$$

$$F(x) = \text{integrate}(f(x), x)$$

La primitive de  $\operatorname{sh}(x) = \operatorname{ch}(x)$ .

Le graphe de  $\operatorname{sh}(x)$ .



## 2.3 La fonction $x \mapsto \operatorname{th}(x)$ .

### 2.3.1 Dérivée de la fonction $x \mapsto \operatorname{th}(x)$ .

$$(\operatorname{th}(x))' =$$

Vérification avec Sage

### 2.3.2 Calcul de la primitive de la fonction $x \mapsto \operatorname{th}(x)$ .

$$\int \operatorname{th}(x) =$$

Vérification avec Sage

$$f(x) = \tanh(x)$$

$$F(x) = \operatorname{integrate}(f(x), x)$$

La primitive de  $\operatorname{th}(x) = \log(\operatorname{ch}(x)) + \text{Cste}$ .



## 2.4 La fonction $x \mapsto \text{Arg ch}(x)$ .

### 2.4.1 Dérivée de la fonction $x \mapsto \text{Arg ch}(x)$ .

$$(\text{Arg ch}(x))' =$$

Vérification avec Sage

### 2.4.2 Calcul de la primitive de la fonction $x \mapsto \text{Arg ch}(x)$ .

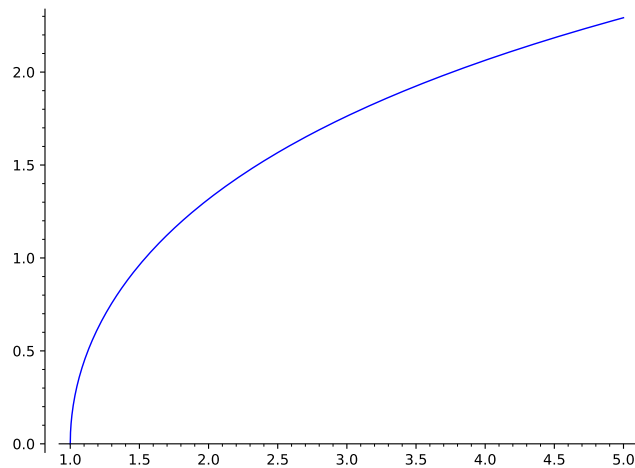
Vérification avec Sage

$$f(x) = \text{acosh}(x)$$

$$F(x) = \text{integrate}(f(x), x)$$

La primitive de  $\text{arcosh}(x) = x \text{ arcosh}(x) - \sqrt{x^2 - 1} + \text{Cste}$ .

Le graphe de  $\text{arcosh}(x)$ .



## 2.5 La fonction $x \mapsto \operatorname{Arg} \operatorname{sh}(x)$ .

### 2.5.1 Dérivée de la fonction $x \mapsto \operatorname{Arg} \operatorname{sh}(x)$ .

$$(\operatorname{Arg} \operatorname{sh}(x))' =$$

Vérification avec Sage

### 2.5.2 Calcul de la primitive de la fonction $x \mapsto \operatorname{Arg} \operatorname{sh}(x)$ .

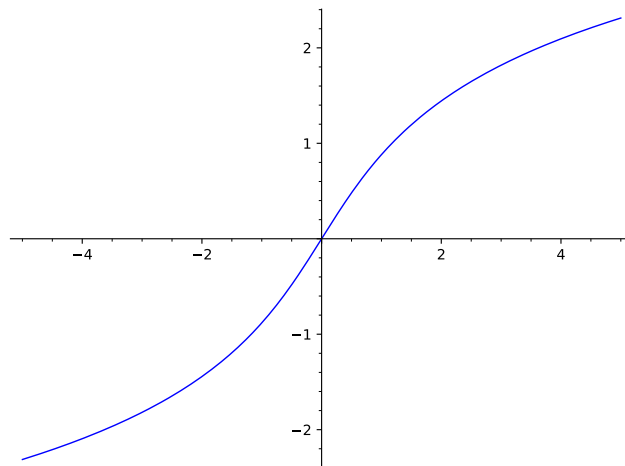
Vérification avec Sage

$$f(x) = \operatorname{asinh}(x)$$

$$F(x) = \operatorname{integrate}(f(x), x)$$

La primitive de  $\operatorname{arsinh}(x) = x \operatorname{arsinh}(x) - \sqrt{x^2 + 1} + \text{Cste}$ .

Le graphe de  $\operatorname{arsinh}(x)$ .



## 2.6 La fonction $x \mapsto \operatorname{Arg} \operatorname{th}(x)$ .

### 2.6.1 Dérivée de la fonction $x \mapsto \operatorname{Arg} \operatorname{th}(x)$ .

$$(\operatorname{Arg} \operatorname{th}(x))' =$$

Vérification avec Sage

### 2.6.2 Calcul de la primitive de la fonction $x \mapsto \operatorname{Arg} \operatorname{th}(x)$ .

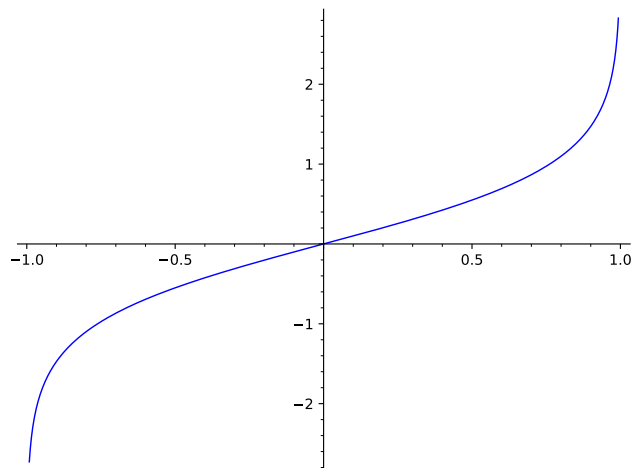
Vérification avec Sage

$$f(x) = \operatorname{atanh}(x)$$

$$F(x) = \operatorname{integrate}(f(x), x)$$

La primitive de  $\operatorname{artanh}(x) = x \operatorname{artanh}(x) + \frac{1}{2} \log(-x^2 + 1) + \text{Cste}$ .

Le graphe de  $\operatorname{artanh}(x)$ .



## Chapitre 3

Calcul de primitives de fonctions de bases.

3.1 La fonction  $x \mapsto \ln(x)$ .

3.2 La fonction  $x \mapsto \exp(x)$ .



## Chapitre 4

### Calcul de quelques primitives.

4.1 Calcul d'une primitive de  $x \mapsto \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$

4.1.1 Vérification avec Sage

4.2 Calcul d'une primitive de  $x \mapsto \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$

4.2.1 Vérification avec Sage

4.3 Calcul d'une primitive de  $x \mapsto \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \alpha^2}}$

4.3.1 Vérification avec Sage

Calcul d'une primitive de  $x \mapsto \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \alpha^2}}$  par un changement de variable puis par l'emploi d'une variable auxiliaire

Vérification avec Sage

4.4 Calcul d'une primitive de  $x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$

Vérification avec Sage

4.4.1 Calcul de la dérivée de la fonction  $x \mapsto \ln(x)$ .

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(\frac{x+h}{x})}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+X)}{x \times X}, \text{ avec } X = \frac{h}{x}.$$

On a donc

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+X)}{x \times X} = \frac{1}{x} \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = \frac{1}{x} \times 1 = \frac{1}{x}$$

## Seconde Méthode

Pour ce calcul, il faut utiliser le calcul de la dérivée d'une fonction composée.

On a  $\exp(\ln(x)) = x$ , par conséquent la dérivée de cette expression s'exprime par  $\exp(\ln(x)) \times (\ln(x))' = 1$ , d'où  $(\ln(x))' = \frac{1}{\exp(\ln(x))} = \frac{1}{x}$ .

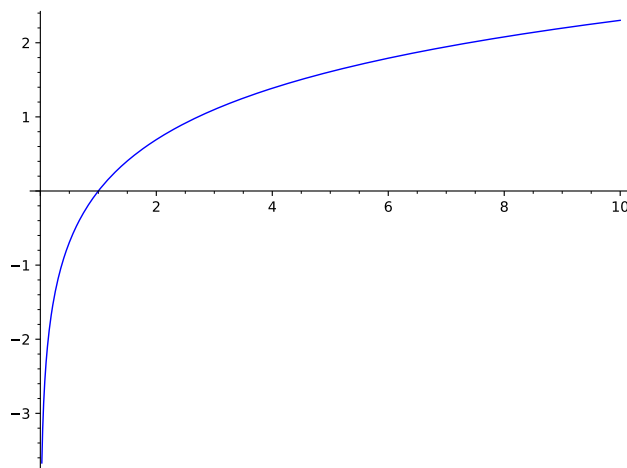
## Vérification avec Sage

$$f(x) = \ln(x)$$

$$g(x) = \text{diff}(f(x), x, 1)$$

La dérivée de  $\log(x) = \frac{1}{x}$ .

Le graphe de  $\log(x)$ .



On peut maintenant entreprendre le calcul de la primitive de la fonction  $x \mapsto \ln(x)$ .

#### 4.4.2 Calcul de la primitive de la fonction $x \mapsto \ln(x)$ .

Je pose que  $u(x)$  est égal à la fonction  $\ln(x)$  et  $v'(x)$  est égal 1 d'où  $u'(x)$  est égal à la fonction  $\frac{1}{1+x^2}$  et  $v(x)$  est égal  $x$ .

Alors on a  $\int \ln(x) dx = x \times \ln(x) - \int \frac{1}{x} \times x dx$ .

Calcul de  $\int \frac{x}{x} dx$ .

$$\int \frac{x}{x} dx = \int 1 dx = x.$$

Finalement  $\int \ln(x) dx = x \times \ln(x) - x + Cste$

Vérification avec Sage

$$f(x) = \log(x)$$

$$F(x) = \text{integrate}(f(x), x)$$

La primitive de  $\log(x) = x \log(x) - x + Cste$ .