Chapitre 10 : SUITES RÉELLES OU COMPLEXES

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Généralités

Définition

> *a) Une suite d'éléments de $\mathbb{K}$ est une famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ formée d'éléments de $\mathbb{K}$.*
> *On la note plus simplement (u_n).*
>
> *b) L'ensemble des suites d'éléments de $\mathbb{K}$ est noté $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Il est muni des opérations suivantes :*
>
> $*$ *somme : $(u_n) + (v_n) = (u_n + v_n)$*
> $*$ *produit (externe) par un scalaire λ : $\lambda(u_n) = (\lambda u_n)$*
> $*$ *produit (interne) : $(u_n)(v_n) = (u_n v_n)$*

Si $f : \mathbb{K} \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, la suite image par f de la suite (u_n) est : $f((u_n)) = (f(u_n))$
Par exemple, on peut étudier les suites $(|u_n|)$, $(\bar{u_n})$, $(\mathfrak{Re}(u_n))$, $(\mathfrak{Im}(u_n))$, etc.

⚠ (u_n) désigne une suite, mais u_n est un scalaire, seulement défini si le naturel n l'est.

1▶

On dit que (u_n) vérifie une **propriété à partir d'un certain rang** s'il existe un rang n_0 tel que la propriété est vérifiée par tous les termes u_n tels que $n \geqslant n_0$.

Par exemple : $(\ln(n^2 \mathrm{e}^{-n}))$ est à valeurs négatives à partir d'un certain rang.

2▶

Une suite peut être donnée de manière explicite (ex. $(u_n) = (n)$), par une relation de récurrence (ex. $u_0 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n$), ou encore sous forme implicite (ex. pour tout naturel n, u_n est l'unique solution positive de l'équation $x^n + x - 1 = 0$).

Exemples fondamentaux :

$*$ (u_n) est une **suite constante** si : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n$, ce qui équivaut à l'existence d'un scalaire a tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = a$

$*$ (u_n) est une **suite stationnaire** si elle est constante à partir d'un certain rang.

$*$ (u_n) est une **suite arithmétique** s'il existe un scalaire r (sa raison) tel que :
$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$, ce qui équivaut à : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$

$*$ (u_n) est une **suite géométrique** s'il existe un scalaire q (sa raison) tel que :
$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = qu_n$, ce qui équivaut à : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = q^n u_0$

$*$ (u_n) est une **suite arithmético-géométrique** s'il existe deux scalaires $a \neq 0$ et b tels que :
$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$.

On se ramène alors aux cas précédents en étudiant $v_n = \dfrac{u_n}{a^n}$ ou $w_n = u_n - \dfrac{b}{1-a}$ si $a \neq 1$.

3▶

DÉFINITION

- *Une suite réelle* (u_n) *est :*

  majorée *s'il existe un réel* M *tel que :* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant M$

  minorée *s'il existe un réel* m *tel que :* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant m$

  croissante *si :* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geqslant u_n$

  décroissante *si :* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leqslant u_n$

  monotone *si elle est croissante, ou si elle est décroissante.*
- *Une suite complexe* (u_n) *est* **bornée** *si la suite réelle* $(|u_n|)$ *est majorée :*

$$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leqslant M$$

4▶

Pour étudier la monotonie de (u_n) :

a) étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$

b) étudier, si (u_n) est à signe strictement positif, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ par rapport à 1

5▶

Pratique 1 :

Dire si les suites sont monotones, majorées, minorées, en utilisant l'outil le plus simple possible :

1. $(u_n) = (\sqrt{n})$ **2.** $(v_n) = \left(\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2} - \dfrac{1}{n}\right)$ **3.** $(w_n) = (\cos n)$ **4.** $(t_n) = \dfrac{n!}{n^n}$

II Limite d'une suite, suite convergente, divergente

II.1 Définitions

DÉFINITION

La suite (u_n) *converge vers le scalaire* l *si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant n_0 \Longrightarrow |u_n - l| \leqslant \varepsilon$$

On écrit alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ *ou* $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$

La suite (u_n) *converge s'il existe* $l \in \mathbb{K}$ *telle qu'elle converge vers* l*, et diverge sinon.*

DÉFINITIONS ÉQUIVALENTES À « (u_n) CONVERGE VERS l » :

a) $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \Longrightarrow |u_n - l| < \varepsilon$

b) Pour (u_n) réelle : pour tout $\varepsilon > 0$, à partir d'un certain rang n_0, $u_n \in [l - \varepsilon, l + \varepsilon]$

c) Pour (u_n) réelle : pour tout $\varepsilon > 0$, à partir d'un certain rang n_0, $u_n \in]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$

d) $(u_n - l)$ converge vers 0

e) $(|u_n - l|)$ converge vers 0

6▶

Pratique 2 :

1. Écrire la négation de « (u_n) converge vers l ».

2. Écrire la définition de la divergence de (u_n) par négation de celle de la convergence.

3. Montrer (par la définition) qu'une suite constante est convergente.

4. Montrer (par la définition) que $(\frac{1}{n})_{n\geqslant 1}$ converge vers 0.

5. Montrer qu'une suite convergente de $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ est une suite constante à partir d'un certain rang.

II.2 Propriétés

Propriétés

(1) Unicité de la limite pour une suite convergente

(2) Toute suite convergente est bornée, la réciproque est fausse

(3) Théorème d'opérations sur les limites : si (u_n) converge vers u et (v_n) vers v, si λ est un scalaire, alors $(\lambda u_n + v_n)$ converge vers $\lambda u + v$ et $(u_n v_n)$ converge vers uv

(4) La suite complexe (u_n) converge vers $u = a + ib$ si, et seulement si, $(\mathfrak{Re}(u_n))$ et $(\mathfrak{Im}(u_n))$ sont convergentes respectivement vers a et b

(5) Convergence et continuité : si une suite réelle (u_n) converge vers a et si la fonction f admet une limite b en a (si f continue en a alors $b = f(a)$), alors $(f(u_n))$ converge vers b

7▶

Proposition

> $*$ *Les seules suites arithmétiques convergentes sont les suites constantes.*
>
> $*$ *La suite géométrique (q^n) est convergente si, et seulement si, $(|q| < 1$ ou $q = 1)$.*

8▶

II.3 Limites infinies (suites réelles)

Définition

> *La suite réelle (u_n)* **tend vers** $+\infty$ *si :* $\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \Longrightarrow u_n \geqslant A$
>
> *On écrit alors :* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ *ou* $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$
>
> *La suite réelle (u_n)* **tend vers** $-\infty$ *si :* $\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \Longrightarrow u_n \leqslant A$
>
> *On écrit alors :* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ *ou* $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$

Définitions équivalentes à « (u_n) tend vers $+\infty$ » :

a) Pour tout A réel, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout naturel n supérieur à n_0, $u_n \in [A, +\infty[$

b) $\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \Longrightarrow u_n > A$

c) Pour tout A réel, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout naturel n supérieur à n_0, $u_n \in]A, +\infty[$

9▶

Pratique 3 :

Montrer (avec la définition) que si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors (u_n) est à termes strictement positifs à partir d'un certain rang.
Si on suppose $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$, quelle condition doit vérifier l pour avoir le même résultat ?

On a alors les propriétés suivantes :

PROPRIÉTÉS

(1) Si (u_n) tend vers $l \in \bar{\mathbb{R}}$, alors l est unique

(2) Une suite qui admet une limite l dans $\bar{\mathbb{R}}$ est bornée si, et seulement si, l est finie ($l \in \mathbb{R}$)

(3) Théorème d'opérations sur les limites : si (u_n) tend vers u et (v_n) vers v dans $\bar{\mathbb{R}}$, si λ est un scalaire, alors $(\lambda u_n + v_n)$ tend vers $\lambda u + v$ et $(u_n v_n)$ tend vers uv lorsque ces quantités ne sont pas indéterminées

10▶

II.4 Limites et comparaisons de suites

• **Comparaison avec une constante** : passage à la limite dans les inégalités

On suppose que la suite réelle (u_n) tend vers $l \in \bar{\mathbb{R}}$, et soit A un réel.

Si (u_n) est majorée par A à partir d'un certain rang, alors : $l \leqslant A$
Si (u_n) est minorée par A à partir d'un certain rang, alors : $l \geqslant A$

11▶

• **Comparaisons simples entre suites** : Théorème d'encadrement ou « des gendarmes »

Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites réelles telles qu'à partir d'un certain rang : $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$

a) Si (v_n) et (w_n) convergent vers la même limite l réelle, alors (u_n) converge vers l.

b) Si (v_n) tend vers $+\infty$, alors (u_n) tend vers $+\infty$.

c) Si (w_n) tend vers $-\infty$, alors (u_n) tend vers $-\infty$.

12▶

En particulier, on se ramène souvent à montrer une convergence vers 0 par majoration :

THÉORÈME DE MAJORATION :

> *Soit (u_n) une suite et l un scalaire.*
>
> *S'il existe une suite (α_n) qui converge vers 0 et telle qu'à partir d'un certain rang : $|u_n - l| \leqslant \alpha_n$, alors (u_n) converge vers l.*

Pratique 4 :

1. Montrer que si (u_n) tend vers $+\infty$ et (v_n) est minorée, alors $(u_n + v_n)$ tend vers $+\infty$.

2. Adapter la propriété pour le cas où on suppose que (u_n) tend vers $-\infty$.

3. Limite de $(n + \cos n)$.

• **Comparaison logarithmique** entre suites à valeurs strictement posivitives :

Soit (u_n) et (v_n) deux suites à termes strictement positifs telles que : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ à partir d'un rang.

1) Si (v_n) converge vers 0, alors (u_n) converge vers 0.

2) Si (u_n) tend vers $+\infty$ alors (v_n) tend vers $+\infty$.

13▶

Pratique 5 :

Montrer que pour $a > 1$: $(\dfrac{n^a}{a^n})$, $(\dfrac{a^n}{n!})$ et $(\dfrac{n!}{n^n})$ tendent vers 0.

II.5 Suites réelles : convergence et monotonie

Théorème de la limite monotone :

> ∗ *Une suite croissante est convergente si, et seulement si, elle est majorée.*
> *Dans ce cas, sa limite est* $\operatorname*{Sup}_{n\in\mathbb{N}} u_n$, *sinon* (u_n) *tend vers* $+\infty$.
>
> ∗ *Une suite décroissante est convergente si, et seulement si, elle est minorée.*
> *Dans ce cas, sa limite est* $\operatorname*{Inf}_{n\in\mathbb{N}} u_n$, *sinon* (u_n) *tend vers* $-\infty$.
>
> ∗ *Toute suite monotone admet une limite dans* $\bar{\mathbb{R}}$.

14▶

Pratique 6 :

1. Montrer que la suite $(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2})_{n\geqslant 1}$ est convergente.

2. Montrer que la suite $(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k})_{n\geqslant 1}$ est divergente. On montrera pour n naturel que $u_{2n} \geqslant u_n + \dfrac{1}{2}$.
Remarquer que, pourtant, $(u_{n+1} - u_n)$ tend vers 0.

⚠ Pas de monotonie pour les suites complexes ! !

II.6 Suites adjacentes

Théorème Définition :

> *(u_n) et (v_n) sont adjacentes si l'une est croissante (disons (u_n)) et l'autre décroissante (disons (v_n)) et $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$*
>
> *Dans ce cas, les deux suites sont convergentes vers la même limite l, et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant l \leqslant v_n$.*

15▶

Pratique 7 :
Montrer que (u_n) et (v_n), où pour n naturel $u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$, sont adjacentes.
Leur limite commune est e.

Théorème des segments emboîtés :

> *Soit $(I_n) = ([a_n, b_n])$ une suite de segments emboîtés de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire : $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} \subset I_n$.*
>
> *Alors : $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n$ est non vide.*
>
> *Si en particulier la suite des diamètres $|b_n - a_n|$ de I_n tend vers 0, alors $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n$ est un singleton, formé de la limite commune des deux suites (a_n) et (b_n).*

16▶

II.7 Suites et suites extraites

Définition

> *Soit (u_n) une suite complexe.*
>
> *La suite (v_n) est une* **suite extraite** *ou une* **sous-suite** *de (u_n) s'il existe une injection croissante $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $(v_n) = (u_{\varphi(n)})$.*

17▶

Proposition

> *Toute suite extraite d'une suite admettant une limite tend vers la même limite.*
>
> *Une suite dont une suite extraite n'a pas de limite, ou dont deux suites extraites tendent vers deux limites distinctes, n'a pas de limite.*
>
> *Si une suite (u_n) tend vers une limite inconnue et admet une suite extraite qui tend vers l, alors (u_n) tend vers l.*

18▶

Pratique 8 :
1. Montrer que la suite $(\frac{1}{n} + (-1)^n)$ est divergente.
2. Montrer que si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite l, alors (u_n) converge aussi vers l.

Toute suite convergente est bornée. La réciproque est fausse, mais il y a une réciproque partielle :

Théorème de Bolzano-Weierstrass :

| *De toute suite bornée on peut extraire une sous-suite convergente.*

19▶

III Suites données par une relation de récurrence de type $u_{n+1} = f(u_n)$

III.1 Généralités

Soit f définie sur une partie non vide A de $\mathbb{R}$, à valeurs dans A.

On étudie la suite (u_n) définie par $u_0 \in I$ et : $\forall n \geqslant 0$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

Propriétés

- Si I est une **partie stable par** f (c'est-à-dire $f(I) \subset I$) et si u_{n_0} appartient à I, alors $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ est une suite d'éléments de I.
- Si (u_n) converge vers $l \in I$ et si f est continue en l, alors l est un **point fixe de** f : $f(l) = l$.

20▶

Désormais, I **est un intervalle stable par** f **et** u_0 **appartient à** I**.**

Propriétés

- Si f est croissante sur I, (u_n) est monotone (et converge si, et seulement si, elle est bornée).
- Si f est décroissante sur I, (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones de sens opposés ; (u_n) est convergente si, et seulement si, ces deux suites sont adjacentes.

f croissante n'implique pas (u_n) croissante, mais seulement monotone ! !

21▶

Méthode pour l'étude de (u_n) :

Les moyens vus dans les paragraphes précédents peuvent suffire (calcul direct, étude directe de monotonie, etc.). Sinon :

∗ On étudie f et son graphe, on cherche les intervalles stables les plus petits possibles, ainsi que les points fixes (là où le graphe coupe la droite $y = x$), et les intervalles de signe fixe de $x \mapsto f(x) - x$.

∗ On utilise les intervalles de monotonie de f pour se ramener à des suites monotones.

∗ On utilise si besoin le théorème des accroissements finis, voir ce qui suit.

III.2 Vitesse et mode de convergence ou de divergence

L'outil principal est le

Théorème des accroissements finis :

| *Soit* f *continue sur* $[a, b]$ *et dérivable sur* $]a, b[$.
| *Alors il existe* $c \in]a, b[$ *tel que :* $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$

22▶

On suppose désormais f de classe C^1 sur I intervalle stable par f.

On applique le T.A.F. à f entre u_n et un point fixe l de f :

$$\exists c_n \in I, \quad u_{n+1} - l = f(u_n) - f(l) = (u_n - l)f'(c_n)$$

Ceci donne une relation entre $|u_{n+1}-l|$ et $|u_n-l|$ qui permet d'étudier si (u_n) converge vers l, de quelle manière, et avec quelle vitesse...

- Cas linéaire : la suite est définie par u_0 et $u_{n+1}=au_n$ pour $n\geqslant 0$.
- Cas général avec f de classe C^1 sur I contenant un point fixe c.

23▶

IV Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

IV.1 Description

On veut une expression explicite pour (u_n) donnée par une relation de récurrence de type :

$$(\mathcal{R}) \qquad \forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+2}=au_{n+1}+bu_n$$

où a et b sont deux complexes, b non nul.

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des suites vérifiant $(\mathcal{R})$.

PROPOSITION

$\mathcal{E}$ forme un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ (non vide et stable par combinaison linéaire).

Chaque suite (u_n) élément de $\mathcal{E}$ est caractérisée par la donnée de u_0 et de u_1 :

la fonction $\begin{array}{|lcl} \varphi : \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathbb{K}^2 \\ (u_n) & \longmapsto & \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} \end{array}$ *est bijective.*

24▶

Méthode : on cherche les éléments de $\mathcal{E}$ sous la forme (r^n)

25▶

Équation caractéristique associée à $\mathcal{R}$: $\quad r^2-ar-b=0 \quad (Ec) \quad$ (l'inconnue est r)

THÉORÈME

L'ensemble $\mathcal{E}$ des suites complexes vérifiant $(\mathcal{R})$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ formé des combinaisons linéaires des deux suites suivantes :

(a) si Ec admet deux racines distinctes r_1 et r_2 : (r_1^n) et (r_2^n)
(b) si Ec admet une racine double r : (r^n) et (nr^n).

($\mathcal{E}$ forme un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ de dimension 2)

26▶

Pratique 9 :

Suites vérifiant pour tout naturel n :

1. $u_{n+2}=4u_{n+1}+3u_n$ **2.** $u_{n+2}+2\mathrm{i}u_{n+1}-u_n=0$ **3.** $u_{n+2}+u_n=0$

THÉORÈME

On suppose a et b réels, $b \neq 0$. Soit Δ le discriminant de l'équation caractéristique (Ec).

L'ensemble $\mathcal{E}$ des suites réelles vérifiant $(\mathcal{R})$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ formé des combinaisons linéaires des deux suites suivantes :

(a) si $\Delta > 0$, donc Ec admet deux racines distinctes r_1 et r_2 : (r_1^n) et (r_2^n) ;
(b) si $\Delta = 0$, donc Ec admet une racine double r : (r^n) et (nr^n) ;

(c) si $\Delta < 0$, donc (Ec) admet deux racines complexes non réelles conjuguées $\rho e^{\pm i\theta}$: $(\rho^n \cos(n\theta))$ et $(\rho^n \sin(n\theta))$.

27▸

Pratique 10 :

Suites réelles vérifiant pour tout naturel n :

1. $u_{n+2} = u_n$ **2.** $u_{n+2} + u_n = 0$ **3.** $u_{n+2} + 2u_{n+1} + 4u_n = 0$

V Exemples d'utilisation des suites

• **Caractérisations séquentielles (ou « par les suites »)**

1) ... **des intervalles fermés de** $\mathbb{R}$: un intervalle I de $\mathbb{R}$ est un intervalle fermé (segment, type $[a, +\infty[$, ou $]-\infty, a]$, ou vide, ou $\mathbb{R}$) si, et seulement si, toute suite d'éléments de I qui converge a sa limite dans I

2) ... **de la borne supérieure** : une partie A non vide de $\mathbb{R}$ admet b pour borne supérieure si, et seulement si, b majore A et est limite d'une suite d'éléments de A

2bis) ... **de la borne inférieure** : une partie A non vide de $\mathbb{R}$ admet b pour borne inférieure si, et seulement si, b minore A et est limite d'une suite d'éléments de A

3) ... **des parties denses de** $\mathbb{R}$: une partie A de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si, et seulement si, tout élément de $\mathbb{R}$ est limite d'une suite d'éléments de A

$\mathbb{Q}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\mathbb{D}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

4) ... **de la limite** : une fonction f admet l pour limite en a si, et seulement si, pour toute suite (u_n) d'éléments du domaine de f qui converge vers a, la suite $(f(u_n))$ converge vers l

4bis) ... **de la continuité** : une fonction f est continue en a si, et seulement si, pour toute suite (u_n) d'éléments du domaine de f qui converge vers a, la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(a)$

28▸

• **Construction de nouveaux objets :** intégrales, séries

• **Méthode des approximations successives :**

On cherche la solution d'un problème comme limite l d'une suite (u_n) définie par u_0 et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout naturel n, avec l point fixe attractif de f. Pour u_0 suffisament proche de l, les termes de la suite procurent des approximations de l.

$*$ Méthodes dynamiques de <u>résolution de système linéaire</u>

$*$ Méthodes de <u>recherche du zéro d'une fonction</u> g de classe C^1 sur $[a, b]$, strictement croissante, de dérivée g' croissante (on dit aussi « g convexe »), telle que $g(a)g(b) < 0$:

29▶

1) **Interpolation linéaire (méthode de Lagrange)** :

$$\begin{cases} f(x) = x - \dfrac{b-x}{g(b)-g(x)}\, g(x) \text{ pour } x \neq b \\ f(b) = b - \dfrac{1}{g'(b)} g(b). \end{cases}$$

30▶

2) **Méthode de Newton** : $f(x) = x - \dfrac{g(x)}{g'(x)}$

31▶

SAVOIR...

(1) *... manier la définition « en (ε, n_0) » de la convergence d'une suite et en écrire sa négation*

(2) *... les définitions et expressions des suites arithmétiques et géométriques*

(3) *... déterminer les intervalles stables par f et de monotonie pour une suite récurrente de type $u_{n+1} = f(u_n)$ (suivant u_0), et appliquer le théorème des accroissements finis pour estimer la vitesse de convergence ou de divergence de la suite* :
Étudier la suite (u_n) définie par $u_0 \geqslant 0$ et pour $n \geqslant 0$: $u_{n+1} = 1 + \sqrt{u_n}$.
Montrer que pour $u_0 = 1$, (u_n) converge vers L et $|u_n - L| \leqslant 1/2^{n-1}$.

(4) *... donner l'expression explicite des termes d'une suite récurrente linéaire d'ordre 1 et 2*

(5) *... énoncer et utiliser les caractérisations séquentielles des intervalles fermés de $\mathbb{R}$, de la borne supérieure ou inférieure, des parties denses, de la limite et de la continuité en un point.*

THÉORÈMES et PROPOSITIONS	**... OUTILS POUR ...**
Suites arithmétiques et géométriques convergentes	*Convergence/Divergence des suites arithmétiques et géométriques*
Théorème d'opérations sur les limites	*Existence et calculs pratiques de limites de suites*
Théorèmes d'encadrement et de majoration	*Études de limites par majoration/minoration*
Théorème de comparaison logarithmique	*Rapidité de convergence/divergence d'une suite et comparaison avec celle d'une suite géométrique*
Lemme de Césaro	*Étude fine de rapidité de convergence/divergence d'une suite*
Théorème de la limite monotone	*Convergence/divergence et monotonie*
Théorème des suites adjacentes	*Suites adjacentes, encadrements de limites*
Proposition sur les suites extraites	*Étude d'une suite à l'aide de sous-suites*
Théorème de Bolzano-Weierstrass	*« Forcer » la convergence pour une suite bornée*
Théorème des accroissements finis	*Lien accroissement-dérivée convergence-divergence d'une suite récurrente*
Suites vérifiant une relation de récurrence linéaire à trois termes	*Expression directe des termes d'une suite donnée par une relation de récurrence linéaire à trois termes*
Théorèmes de caractérisations séquentielles	*Étude par les suites des fermés, des bornes, de la densité, des limite, de la continuité*