▶ ▶ 12 : DÉRIVABILITÉ

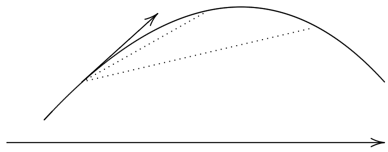
1▶

$*$ 1)2)3) traduisent les propriétés vues sur les limites.

$*$ f dérivable en a de dérivée $f'(a)$ s'écrit : $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) + \varepsilon(x)$, avec $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$. En multipliant par $(x-a)$, on obtient exactement la première identité de 4). La seconde en est une notation : une fonction qui s'écrit $\underset{x\to a}{o}(x-a)$ est par définition une fonction qui divisée par $x-a$ tend vers 0 quand x tend vers a.

$*$ En termes de développements limités, f continue en a signifie que f admet au voisinage de a un développement limité à l'ordre 0 : $f(x) = f(a) + \underset{x\to a}{o}(1)$.
On remarque que si f est dérivable en a, le développement limité de f à l'ordre 1 au voisinage de 1 procure un développement limité à l'ordre 0 puisque $(x-a)f'(a) + \underset{x\to a}{o}(x-a)$ est une fonction qui (divisée par 1) tend vers 0 quand x tend vers a. Ainsi, la dérivabilité en a implique la continuité de f en a. C'est le point 6).

$*$ 5) traduit que $f'(a)$ donne la pente de la tangente en a au graphe de f. C'est la pente limite des cordes joignant les points $(a, f(a))$ et $(x, f(x))$ quand on fait tendre x vers a.



$*$ $x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0 : la limite à gauche du taux de variation vaut -1, la limite à droite est 1.
Le graphe d'une fonction dérivable sur un intervalle apparaît "lisse", sans angles.

$*$ $f : x \mapsto x\sin(1/x)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ (par théorème d'opérations, voir plus loin), mais non dérivable en 0 car $\dfrac{f(x)-0}{x} = \sin(1/x)$ est sans limite en 0.

Pratique 1 :

1. $\dfrac{x^n - a^n}{x-a} = x^{n-1} + ax^{n-2} + \ldots + a^{n-2}x + a^{n-1}$ est de limite na^{n-1} quand x tend vers a.
Donc $x \mapsto x^n$ est de dérivée $x \mapsto nx^{n-1}$ sur $\mathbb{R}$. Donc : $x^n = a^n + n(x-a)a^{n-1} + \underset{x\to a}{o}(x-a)$

2. Cours sur l'exponentielle, réciproque de ln : exp est dérivable en 0 (et même sur $\mathbb{R}$) de dérivée elle-même. Ceci implique : $\mathrm{e}^x = 1 + x + \underset{x\to 0}{o}(x)$

3. Cours fonctions usuelles : cos et sin sont dérivables sur $\mathbb{R}$ (obtenu par encadrements de sin), et $\sin' = \cos$, $\cos' = -\sin$. Donc : $\sin x = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$ et $\cos x = 1 + \underset{x\to 0}{o}(x)$

4. et **5.** De même : $\tan x = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$ puisque $\tan'(0) = 1$, et : $\mathrm{Arc}\tan x = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$

6. $\sqrt{\ }$ n'est pas dérivable en 0 : $\dfrac{\sqrt{x}-0}{x-0}$ tend vers $+\infty$ en 0^+.

7. Enfin : $\ln(1+x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$

2▶

$*$ *Preuve* : le plus simple est d'utiliser les développements limités.
- pour le produit : supposons f et g dérivables en a, soit : $f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)\,\varepsilon_1(x)$ et $g(x) = g(a) + (x-a)g'(a) + (x-a)\,\varepsilon_2(x)$ avec ε_1 et ε_2 de limites nulles en a. Alors

$$(fg)(x) = f(a)g(a) + (x-a)\left(f'(a)g(a) + f(a)g'(a)\right)$$

$$+(x-a)[f(a)\varepsilon_2(x) + g(a)\varepsilon_1(x) + (x-a)f'(a)g'(a) + (x-a)f'(a)\,\varepsilon_2(x) + (x-a)g'(a)\,\varepsilon_1(x)]$$

où l'on voit par théorème d'opérations que le facteur entre crochets tend vers 0 quand x tend vers a. On a donc bien un développement limité de fg au voisinage de a d'ordre 1, ce qui montre que fg est dérivable en a, et on lit sa dérivée $f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$.

- pour le quotient, il suffira d'utiliser le produit et la composition par $x \mapsto 1/x$ (dérivable sauf en 0, obtenu par simples limites des taux de variations) une fois la propriété établie pour la composition.

- pour la composition : par hypothèse, on peut écrire $f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)\,\varepsilon_1(x)$ et $g(y) = g(f(a)) + (y - f(a))g'(f(a)) + (y - f(a))\,\varepsilon_2(y)$ avec ε_1 de limite nule en a et ε_2 de limite nulle en $f(a)$. Alors :

$$g(f(x)) = g(f(a)) + (f(x) - f(a))g'(f(a)) + (f(x) - f(a))\,\varepsilon_2(f(x))$$

$$= g(f(a)) + (x-a)f'(a)g'(f(a)) + (x-a)[g'(f(a))\,\varepsilon_1(x) + (f'(a) + \varepsilon_2(x))(\varepsilon_2(f(x)))]$$

Or f est continue en a puisque dérivable, donc $f(x)$ tend vers $f(a)$ quand x tend vers a, et par composition de limites, on obtient bien un développement limité de $g \circ f$ en a à l'ordre 1. Ainsi $g \circ f$ est dérivable en a de dérivée : $g'(f(a)).f'(a)$ □

$*$ Avec la stabilité par combinaison linéaire, $\mathcal{D}(I, \mathbb{K})$ et $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$ apparaissent comme des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$. Ceci ne traduit qu'une partie des théorème d'opérations.

$*$ Par exemple, si f est dérivable en a, et si n est un naturel, f^n est dérivable en a, de dérivée $nf^{n-1}.f'$

3▶

$*$ Ceci vient compléter les théorèmes d'opérations, puisqu'il s'agit de pouvoir et de savoir dériver une réciproque de fonction dérivable. Ceci n'est toutefois possible qu'aux points où la dérivée de la fonction à inverser est non nulle...

$*$ *Preuve* : Soit $a \in I$ tel que $f'(a) \neq 0$. Par hypothèse : $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$. Comme $f(a) \neq 0$, pour x dans un voisinage V_a assez proche de a, le taux d'accroissement de f considéré est non nul. Par continuité de $x \mapsto 1/x$ sur $\mathbb{R}^*$, on a donc : $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{x - a}{f(x) - f(a)} = \frac{1}{f'(a)}$

f étant bijective continue, $f(V_a) = V_b$ est un voisinage de $b = f(a)$. Pour tout y de V_b distinct de b, le rapport $\displaystyle\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{f(f^{-1}(y)) - f(f^{-1}(b))}$ est bien défini et tend vers $\displaystyle\frac{1}{f'(a)}$ quand y tend vers b puisque $f^{-1}(y)$ tend vers a par continuité de f^{-1} (théorème de l'homéomorphisme).

Cela signifie que f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$ de dérivée en ce point égale à $1/f'(a)$. □

$*$ Si on sait que f^{-1} est dérivable en a, on retrouve cette formule facilement en dérivant : $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}$, ce qui donne avec la formule de dérivation d'une composée : $(f^{-1})'(f(a)).f'(a) = 1$

$*$ Si f est supposée bijective et continue entre deux intervalles de $\mathbb{R}$, le théorème de l'homéomorphisme assure que f est strictement monotone et que f^{-1} est continue. Si de plus f est supposée dérivable, ce théorème du difféomorphisme donne la dérivabilité de f^{-1} aux points où f' ne s'annule pas. Il donne donc une condition simple (f' ne s'annule pas) pour que f soit un difféomorphisme, c'est-à-dire une fonction bijective dérivable de réciproque dérivable.

$*$ C'est ainsi que nous avons montré les dérivabilités de $\sqrt{}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, de exp sur $\mathbb{R}$, de Arcsin et Arccos sur $]-1, 1[$, de Arctan sur $\mathbb{R}$, et calculé leurs dérivées.

Pratique 2 :

1. a) Dérivée $x \mapsto \mathrm{e}^{\sqrt{x}}(2x + \dfrac{x^2}{2\sqrt{x}})$, réponse : $\dfrac{5\mathrm{e}}{2}$

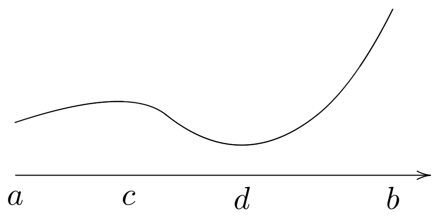
b) Dérivée : $x \mapsto \dfrac{1}{1+(x+\sin(x))^2}.(1+\cos(x))$, réponse : 2

c) Dérivée : $x \mapsto \dfrac{1+\tan^2(x)}{1+x} - \dfrac{\tan x}{(1+x)^2}$, réponse : 1

2. Cette fonction f est définie et dérivable sur $]-1,+\infty[$ par théorème d'opérations, de dérivée f' : $x \mapsto 1 + \dfrac{1}{x+1}$ à valeurs strictement positives. Par le théorème du difféomorphisme, f définit une bijection (strictement croissante) de $]-1,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$.
D'une part, $f'(0) = 2$, et d'autre part : $(f^{-1})'(0) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(0))} = \dfrac{1}{f'(0)} = \dfrac{1}{2}$

4▸

Cette fonction, définie sur $[a, b]$, admet son minimum global en d qui est un point critique, un maximum local en c mais non global et qui est un point critique, et son maximum global en b qui n'est pas un point critique.



5▸

∗ *Preuve* : Supposons que f admette un extremum en c intérieur à son domaine de définition. Quitte à changer f en $-f$ on peut supposer que f admet en c un maximum. Le taux de variation $\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}$ est donc de signe négatif pour $x > c$ et positif pour $x < c$. Par hypothèse, ce taux admet une limite lorsque x tend vers c, limite positive et négative, donc nulle. Le point c est donc un point critique pour f. □

∗ Exemple de point selle (ou col), c'est-à-dire de point critique ne procurant pas un extremum local : pour f définie par $x \mapsto x^3$ sur $\mathbb{R}$, 0 est un point critique puisque $f'(0) = 0$ mais au voisinage de 0 comme sur $\mathbb{R}$, f est strictement croissante.

∗ Attention à bien distinguer les points intérieurs et les points du bord de l'intervalle de définition : notez dans la démonstration que $f'(c) = 0$ s'obtient parce qu'on peut faire tendre x vers c par la gauche et par la droite parce que la fonction est définie sur un voisinage de c de la forme $]c-\eta, c+\eta[$.
Si vous reprenez le dessin ci-dessus, le maximum atteint par la fonction en b, qui est d'ailleurs autant local que global, appartient au bord du domaine de définition.

∗ Ne confondez pas extremum (une valeur prise par une fonction) et point où on obtient cet extremum (un point du domaine de définition). Ainsi, la fonction d'altitude définie sur la sphère des points de la terre d'altitude nulle : elle atteint son maximum de 8848m au point (d'altitude 0) de base de l'Everest.

6▸

∗ Bien respecter ces étapes pour la recherche des extrema locaux : d'une part à l'intérieur du domaine de définition, d'autre part aux bords. On trie ensuite pour trouver si demandé les extrema globaux, mais ce n'est pas toujours un problème facile.

∗ Reprenez le dessin du point précédent. Notez que si on considère qu'il s'agit du graphe d'une fonction g définie sur $]a, b[$, g admet un minimum global en d mais n'admet pas de maximum global.

∗ Un cas plus simple est celui d'une fonction définie et continue sur un segment. D'après le théorème des bornes atteintes, cette fonction atteint sa borne supérieure qui est donc un maximum (global) et sa borne inféreure qui est donc un minimum (global).

$\boxed{\textbf{Pratique 3 :}}$

1. Posons f définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x\mathrm{e}^{-x}$. Cette fonction est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f' : x \mapsto \mathrm{e}^{-x}(1-x)$. Il y a donc un seul point critique, 1, intérieur à $\mathbb{R}$. Comme f est croissante sur $]-\infty, 1]$ et décroissante sur $[1, +\infty[$, 1 procure un maximum, d'ailleurs global, de valeur $1/\mathrm{e}$.
Il n'y a pas de point de $\mathbb{R}$ qui forme une extrémité, donc f n'admet pas d'autre extremum local. Il n'y a donc pas de minimum pour f, ni local ni global.

2. Si g désigne la restriction de f à $\mathbb{R}_+$, il n'y a toujours que 1 qui soit point critique et qui donne le maximum, de valeur $1/\mathrm{e}$. Il faut ensuite étudier ce qui se passe en 0 (au bord de l'intervalle de définition). D'après les variations de g déduites de celles de f, 0 donne un minimum local pour g (avec valeur 0), par ailleurs global.

7▶

$*$ Autrement dit, sous les hypothèses de ce théorème, il existe un point c de $]a, b[$ où la tangente au graphe de f est horizontale.

$*$ *Preuve* : Notez que $a \neq b$ est implicite puisque f est supposée dérivable sur $]a, b[$.
Si f est constante, tout point c de $]a, b[$ convient puisque $f' = 0$.
Sinon, il existe $d \in]a, b[$ tel que $f(d) \neq f(a)$, et quitte à changer f en $-f$, on peut supposer $f(d) > f(a)$.
D'après le théorème des bornes atteintes, il existe un point c de $]a, b[$ tel que $f(c) = \underset{[a,b]}{\operatorname{Max}} f$.
Comme $f(c) \geqslant f(d) > f(a)$, c est dictinct de a et de b, donc dans $]a, b[$, donc c'est un point critique de f (par théorème du point 5, revoir sa preuve). $\square$

$*$ Notez qu'on n'a pas besoin d'hypothèse de dérivabilité de f en a ni en b.

$*$ Attention, ce théorème ne fonctionne plus avec une fonction à valeurs complexes : par exemple $t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ est dérivable sur $[0, 2\pi]$, de même valeur en 0 et 2π, mais sa dérivée $t \mapsto \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ ne s'annule jamais...

$*$ $\boxed{\text{Application}}$: soit une fonction polynomiale de degré n qui s'annule en n points réels distincts $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, comme par exemple $x \mapsto \prod\limits_{k=1}^{n} (x-k)$.
On peut appliquer le théorème de Rolle sur chaque intervalle délimité par deux racines x_i et x_{i+1} consécutives puisqu'une fonction polynomiale est dérivable (à tout ordre). On en déduit l'existence de $n-1$ points distincts deux à deux où sa dérivée s'annule.
On peut donc recommencer avec la fonction dérivée !
Vous pouvez en itérant le procédé montrer l'existence de $n-k$ racines distinctes deux à deux pour la dérivée k-ième, et ce pour k de 0 à n.

8▶

$*$ Autrement dit, sous les hypothèses de ce théorème, il existe un point c de $]a, b[$ où la tangente au graphe de f est parallèle à la corde entre les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$.

$*$ Bien comprendre qu'une qualité de f' (par exemple un encadrement) induira une propriété semblable d'un accroissement de f (une différence entre deux valeurs prises).

$*$ *Preuve* : On applique le théorème de Rolle à la fonction φ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$: $x \mapsto f(x) - f(a) - \lambda(x-a)$, où l'on choisit λ pour avoir $\varphi(b) = 0$. C'est possible avec $\lambda = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$ puisque $a \neq b$. Comme $\varphi(a) = \varphi(b)$ $(= 0)$, il existe $c \in]a, b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$, ce qui donne $f'(c) = \lambda$ et donc le résultat. $\square$

$*$ Tout comme le théorème de Rolle, le théorème des accroissements finis n'est pas vérifié pour le cas d'une fonction à valeurs complexes : reprendre le même contre-exemple avec $t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ sur $[0, 2\pi]$.

9▶

Simple conséquence du théorème des accroissements finis (encadrer $f'(c)$ à l'aide des hypothèses), et exemple parfait de transfert d'une propriété de f' à une estimation d'un taux d'accroissement de f.

10▶

∗ Voilà qui remédie au fait que le théorème des accroissements finis ne s'applique pas aux fonctions à valeurs complexes. Notez l'hypothèse C^1 et non plus seulement dérivable pour la fonction étudiée.

∗ *Preuve* : On revient à la base qu'est le théorème fondamental de l'analyse. Ceci nécessite toutefois de commencer avec un segment $[x, y]$ inclus dans $]a, b[$.
On a donc : $f(y) - f(x) = \displaystyle\int_x^y f'(t)\,\mathrm{d}t$, et par l'inégalité de la moyenne : $|f(y) - f(x)| \leqslant M|y - x|$.
f et la fonction module étant continues, on obtient le résultat en faisant tendre x vers a et y vers b. □

∗ Interprétation cinématique : f modélise un déplacement dans le plan complexe au cours du temps ; la distance entre les points atteints aux instants a et b est majorée par M fois l'intervalle de temps $|b-a|$, où M est un majorant du module de la vitesse numérique au cours du déplacement.

Pratique 4 :

$|\sin x - \sin 0| \leqslant |x - 0|$ d'après l'inégalité des accroissements finis, puisque sin est dérivable sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ de dérivée cos, et $|\cos| \leqslant 1$.
En découle : $|1 - \cos(x)| = |2\sin^2(x/2)| \leqslant x^2/2$
Enfin, notons $\varphi : x \mapsto x - \sin x$ dérivable sur I. Le théorème des accroissements finis donne une majoration de $|x - \sin x|$ moins précise que celle demandée ($|x^3|/2$).
On revient donc au théorème fondamental et à l'inégalité de la moyenne :

$$|x - \sin x| = \left|\int_0^x (1 - \cos(t))\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \left|\int_0^x \frac{t^2}{2}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{|x^3|}{6}$$

On voit donc que $\dfrac{|x - \sin(x)|}{x^2}$ tend vers 0 quand x tend vers 0, ce qui se note : $\sin x = x + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$

11▶

∗ **Preuve** : Enfin cette preuve annoncée depuis si longtemps...
Si f est constante, clairement $f' = 0$ sur I donc sur $\overset{\circ}{I}$ puisque les cordes sont horizontales...
Réciproquement, soit a et b deux points de I et f à valeurs réelles. Par le théorème des accroissements finis, f étant continue et dérivable sur $]a, b[$, il existe $c \in\ ]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c) = 0$.
Les valeurs prises par f sont donc les mêmes en tout point, f est constante.
Si f est à valeurs complexes, on obtient ainsi $\mathfrak{Re}(f)$ et $\mathfrak{Im}(f)$ constantes, donc f constante. □

∗ Attention, cela ne marche pas si le domaine de définition de la fonction n'est pas un intervalle : par exemple, $x \mapsto 0$ si $x \in [0, 1]$ et $x \mapsto 1$ sur $[2, 3]$ définit une fonction dérivable sur chacun des deux intervalles, de dérivée nulle, mais la fonction n'est pas constante.

∗ Deux fonctions définies sur un même intervalle et de même dérivée diffèrent donc d'une constante. C'est ce qu'on a utilisé pour caractériser les primitives d'une fonction continue sur un intervalle.

12▶

∗ Nouvel exemple de lien entre dérivée et accroissement, donné par l'inégalité des accroissements finis.

∗ *Preuve* : - Supposons f k-lipschitzienne sur I : il existe $k \geqslant 0$ tel que :

$$\forall (x, y) \in I^2, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|$$

Alors : $\forall (x, y) \in I^2$, $x \neq y$, $\left|\dfrac{f(x) - f(y)}{x - y}\right| \leqslant k$, donc en faisant tendre y vers x, par continuité du module et dérivabilité de f on obtient : $|f'(x)| \leqslant k$, c'est-à-dire que f' est bornée sur I (par k en module).
- Supposons $|f'| \leqslant M$ sur I. Soit x et y dans I. D'après l'inégalité des accroissements finis appliquée sur $[x, y]$: $|f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y|$, ce qui montre que f est M-lipschitzienne sur I. □

13▶

$*$ *Preuve* : Quitte à changer f en $-f$, montrons la première et la troisième équivalence.

Supposons f croissante sur I. Alors pour tout x et tout y de $\overset{\circ}{I}$ tels que $x < y$, $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} \geqslant 0$. En faisant tendre x vers y, on obtient $f'_g(y) \geqslant 0$, et en faisant tendre y vers x, $f'_d(x) \geqslant 0$. En tout point intérieur à I, les dérivées à droite et à gauche sont égales par hypothèse de dérivabilité et positives, donc $f' \geqslant 0$ sur $\overset{\circ}{I}$.

Réciproquement, si $f' \geqslant 0$ sur $\overset{\circ}{I}$, alors si x et y sont deux points de I tels que $x < y$, il existe un point c dans $]x, y[$ (donc intérieur à I) tel que $f(y) - f(x) = (y-x)f'(c)$, ce qui montre que f et croissante.
Supposons f strictement croissante sur I. Cela empêche f' de s'annuler sur un intervalle $[a, b]$ avec $a < b$, sans quoi f y serait constante.

Si maintenant f croissante mais pas strictement, c'est qu'il existe deux points a et b distincts tels que $f(a) = f(b)$; par croissance, f est donc constante sur $[a, b]$ où f' est donc nulle. □

Pratique 5 :

$f : x \mapsto x + \sin x$ est de dérivée positive $x \mapsto 1 + \cos x$ sur $\mathbb{R}$, strictement positive sauf aux points isolés $\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

14▶

$*$ *Preuve* : Par le théorème des accroissements finis, puisque f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, pour tout x de $]a, b[$ il existe un point $c_x \in]a, x[$ tel que $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c_x)$. Quand x tend vers a, c_x tend vers a également, et par hypothèse $f'(c_x)$ tend vers l. Donc f est dérivable en a et $f'a) = l$.
Si de plus f' est continue sur $]a, b]$, alors elle est continue aussi en a, car sa limite en a est $l = f'(a)$. □

$*$ Rappelons que si f' tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ en a, alors f n'est pas dérivable en a, c'est la même preuve. De plus, le graphe de f admet en a une tangente verticale.

$*$ C'est très utilisé pour vérifier qu'une fonction qu'on vient de prolonger par continuité en un point a et également dérivable en ce point. Attention, il ne s'agit pas de "prolonger une dérivée" : f étant définie en a, sa dérivée en a existe ou n'existe pas...

Pratique 6 :

a) Par théorèmes d'opérations, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.
b) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$ par compositions de limites, on prolonge donc f par continuité en 0 en posant

$$g(x) = f(x) \text{ si } x > 0 \text{ et } g(0) = 0$$

c) Pour $x > 0$, $g'(x) = f'(x) = -\dfrac{e^{-1/x}}{x^2}$, quantité qui tend vers 0 quand x tend vers 0^+ par règles de croissances comparées.
D'après le théorème de prolongement, g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$.

15▶

Appliquons cela à la suite définie par $u_0 = 1$ et pour $n \geqslant 0$: $u_{n+1} = \dfrac{1}{2+u_n}$
La fonction associée est $f : x \mapsto \dfrac{1}{2+x}$, décroissante sur $\mathbb{R}_+$, et on peut restreindre l'étude à l'intervalle stable $[0, 1]$. Le seul point fixe de f sur cet intervalle est $l = \sqrt{2} - 1$.
Par le théorème des accroissements finis, pour tout n naturel, il existe $c_n \in]u_n, l[$ tel que :

$$|u_{n+1} - l| = |f(u_n) - f(l)| = |(u_n - l)f'(c_n)| = \frac{|u_n - l|}{(2+c_n)^2} \leqslant \frac{|u_n - l|}{4}$$

ce qui donne par récurrence simple : $|u_n - l| \leqslant \dfrac{|u_0 - l|}{4^n}$ $(*)$. La suite (u_n) converge donc vers l, avec une vitesse au moins géométrique de raison $1/4$. Remarquez que :

$$|f'(l)| = \frac{1}{(2+l)^2} = \frac{1}{l^2+4l+4} = \frac{1}{2l+5} \# 0.2 \ < 1$$

Par exemple, avec l'inégalité $(*)$, on obtient par calcul que $|u_n - l| < 10^{-9}$ pour $n \log 4 \geqslant 9$, soit $n \geqslant 15$...

16▶

$*$ *Preuve* : Puisqu'une fonction dérivable est continue, une fonction de classe C^n sur un intervalle I admet n dérivées continues et inversement. Ceci donne les autres formulations. ☐

$*$ Par exemple : $x \mapsto \ln x$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ par définition (rappelez-vous, c'est la primitive de $t \mapsto 1/t$ sur $\mathbb{R}_+^*$ qui s'annule en 1). Cette dérivée $t \mapsto 1/t$ étant de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$, il en est de même de ln.

17▶

$*$ Les théorèmes d'opérations sur les fonctions de classe D^n sont une conséquence directe de ceux pour les fonctions D^1 déjà vus, appliqués aux dérivées successives des fonctions étudiées.

$*$ *Preuve de la formule de Leibniz* : Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$. L'initialisation pour $n = 1$ est déjà connue (théorème d'opérations pour les fonctions D_1 et calcul).

Soit $n \geqslant 2$, et soit f et g deux fonctions n fois dérivables en a. Elles le sont donc $n-1$ fois au voisinage de a, où, par hypothèse de récurrence :

$$(fg)^{(n-1)}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-1-k)}(x)$$

On calcule en a la dérivée des deux termes de l'égalité grâce à l'étape d'initialisation :

$$(fg)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} f^{(k+1)}(a) g^{(n-1-k)}(a) + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} f^{(k)}(a) g^{(n-k)}(a)$$

$$= f^{(n)}(a)g(a) + \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-1}{k} f^{(k+1)}(a) g^{(n-1-k)}(a) + f(a)g^{(n)}(a) + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} f^{(k)}(a) g^{(n-k)}(a)$$

$$= f^{(n)}(a)g(a) + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k-1} f^{(k)}(a) g^{(n-k)}(a) + f(a)g^{(n)}(a) + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} f^{(k)}(a) g^{(n-k)}(a)$$

ce qui donne la formule grâce à celle du triangle de Pascal.
Notez que cette preuve est une copie de celle de la formule du binôme de Newton. ☐

$*$ Toute la preuve du théorème du difféomorphisme de classe C^n tient dans celle du cas C^1. En effet, la condition que f' ne s'annule pas assure le caractère C^1 de f^{-1}, et il donne $(f^{-1})' = 1/(f' \circ f^{-1})$, et il ne reste alors plus qu'à appliquer les théorèmes d'opérations pour la composition : f' et f^{-1} étant de classe C^1, on obtient $(f^{-1})'$ de classe C^2, puis de classe C^n par récurrence immédiate.
Ce théorème donne une condition suffisante (f' ne s'annule pas) pour que la réciproque d'une bijection de classe C^n soit aussi de classe C^n. C'est la même condition que pour le cas $n = 1$.

18▶

$*$ *Preuve* : Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$. L'initialisation pour $n = 1$ est donnée par le théorème de prolongement du caractère C^1.
Soit $n \geqslant 2$, et f vérifiant les hypothèses énoncées dans le théorème. Ces hypothèses portant sur les dérivées jusqu'à l'ordre n le sont donc jusqu'à l'ordre $n-1$. Par hypothèse de récurrence, f est de classe C^{n-1} sur $[a, b]$, les dérivées successives en a étant les limites, jusqu'à l'ordre $n-1$. Il ne reste plus qu'à appliquer le théorème de prolongement du caractère C^1 à $f^{(n-1)}$, dont on prouve alors qu'elle est de classe C^1 sur $[a, b]$, avec $(f^{(n-1)})'(a) = l_n$, ce qui donne le résultat et permet de conclure par le principe de récurrence. ☐

$*$ Exemple : soit f définie par $f(x) = \mathrm{e}^{-1/x^2}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. Par règles des croissances comparées, f est continue en 0 et finalement sur $\mathbb{R}$.
De plus, f est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$, et une récurrence simple permet de montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \neq 0$, $f^{(k)}(x) = F_k(x)\mathrm{e}^{-1/x^2}$ où F_k est une fraction rationnelle. Par règles des croissances comparées, $\lim\limits_{x\to 0} f^{(k)}(x) = 0$.
Par le théorème de prolongement, on obtient que f est continument dérivable à tout ordre sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, et en particulier toutes ses dérivées en 0 sont nulles.

Pratique 7 :

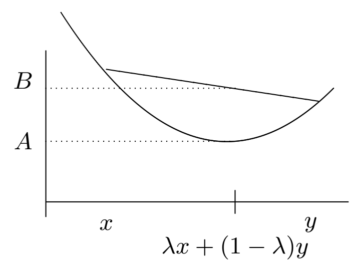
f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ comme produit de $g : x \mapsto 1 + x^2$ et de exp toutes deux de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Comme toutes les dérivées de exp sont égales à exp, et comme $g' : x \mapsto 2x$, $g'' : x \mapsto 2$ et $g^{(k)} = 0$ si $k \geqslant 3$, la formule de Leibniz donne une expression simple de

$$f^{(n)} \ : \ x \mapsto \mathrm{e}^x \left((1 + x^2) + \binom{n}{1}2x + 2\binom{n}{2}\right) = \mathrm{e}^x \left(x^2 + 2nx + (n(n-1) + 1)\right)$$

19▶

$*$ $\lambda x + (1-\lambda)y$ est appelé barycentre des points x et y affectés des poids respectifs λ et $1-\lambda$ (c'est une "moyenne pondérée"). C'est un point du segment $[x, y]$, d'autant plus près de x que λ est proche de 1, de y que λ est proche de 0.
Inversement, si $x \leqslant t \leqslant y$, alors on peut bien écrire : $t = \left(\dfrac{y-t}{y-x}\right)x + \left(\dfrac{t-x}{y-x}\right)y$, et t est bien un barycentre de x et y à coefficients positifs.
Attention, si $\lambda \notin [0, 1]$, le point obtenu est hors du segment $[x, y]$.

Ainsi, cette définition se lit : l'image A par f de tout barycentre à coefficients positifs de x et y est inférieure au même barycentre B des images $f(x)$ et $f(y)$.
Ceci traduit exactement que la partie du plan située au-dessus du graphe de f (appelée "épigraphe" de f) est convexe : si on en choisit deux points quelconques, tout le segment limité par ces deux points est encore au-dessus du graphe.
On peut dire aussi que le graphe se situe en-dessous de ses cordes (ou sécantes).



$*$ Une fonction convexe n'est pas forcément continue : par exemple f définie sur $[0, 1]$ par $f(0) = f(1) = 1$ et $f(x) = 0$ sinon.

$*$ Bien sûr, compte tenu de l'usage de $\leqslant$ dans la définition, la notion de fonction convexe ne s'étend pas au cadre des fonctions complexes.

$*$ Cas simple : les fonctions affines $x \mapsto \alpha x + \beta$ sont convexes (et concaves...) puisqu'elles procurent alors des égalités.

20▶

$*$ On généralise la notion de barycentre de deux points à coefficients positifs à celle de barycentre de n points à coefficients positifs, avec les mêmes propriétés. Notez la condition de somme 1 pour les poids : on a donc dans le cadre de la proposition que $\lambda_n = 1 - \sum\limits_{i=1}^{n-1} \lambda_i$, comme on utilisait les poids λ et $1-\lambda$ pour le cas de deux points.

$*$ La convexité de f se traduit alors par la même phrase : l'image par f de tout barycentre à coefficients positifs de points de son domaine est inférieure au même barycentre des images des points.

∗ *Preuve* : Le sens réciproque est simple puisque la définition est un cas particulier d'inégalité de Jensen avec deux points associés à deux poids positifs λ_1 et λ_2 tels que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$.

On montre le sens direct par récurrence sur $n \geqslant 2$. L'initialisation ($n = 2$) correspond à la définition. Soit un naturel $n \geqslant 2$, supposons le résultat démontré pour n, et choisissons $n+1$ points x_i et $n+1$ poids associés λ_i de somme 1. Posons $A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$, donc $1 - A = \lambda_{n+1}$. Il vient :

$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i + \lambda_{n+1} x_{n+1}\right) = f\left(A\left(\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i/A) x_i\right) + (1-A) x_{n+1}\right)$$

$$\leqslant Af\left(\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i/A) x_i\right) + (1-A) f(x_{n+1}) \leqslant A \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i/A) f(x_i) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1})$$

où on a utilisé la définition de la convexité puis l'hypothèse de récurrence avec n points. On obtient alors l'inégalité avec $n+1$ points, et enfin on conclut par le principe de récurrence. □

21▶

La fonction pente p_a donne donc en x la pente de la corde liant les points $(a, f(a))$ et $(x, f(x))$.

22▶

∗ *Preuve* : 1) provient des théorèmes d'opérations sur les fonctions continues, ou C^1, ou etc.
2) ne traduit que la définition de la dérivabilité de f en a. □

∗ Par conséquent, si f est dérivable sur I, toutes les fonctions pentes associées à f sont continues sur I.

23▶

∗ *Preuve* : a) Supposons f convexe sur I, et soit a un point de I. Soit x et y deux points de I distincts de a. Traitons le cas $x < y < a$, la preuve s'adapte aux autres configurations facilement.
y est donc barycentre à coefficients positifs de x et a, comme on l'a expliqué au point 19 :

$$y = \frac{a-y}{a-x}\, x + \frac{y-x}{a-x}\, a$$

On a donc par convexité de f : $f(y) \leqslant \frac{a-y}{a-x} f(x) + \frac{y-x}{a-x} f(a) = \frac{a-y}{a-x} f(x) + \frac{y-a}{a-x} f(a) + f(a)$, d'où : $\frac{f(y)-f(a)}{y-a} \geqslant \frac{f(a)-f(x)}{a-x}$, c'est-à-dire $p_a(x) \leqslant p_a(y)$. Ainsi p_a est bien croissante sur I.
b) Supposons maintenant les fonctions pentes associées à f croissantes et montrons que f est convexe. Prenons deux points x et y de I, $x < y$, et $t = \lambda x + (1-\lambda) y$ avec $\lambda \in]0,1]$, (le cas $\lambda = 0$ étant simple puisque $t = y$) ; t est un élément de $[x, y]$.
On a donc $p_t(x) \leqslant p_t(y)$, c'est-à-dire : $\frac{f(t)-f(x)}{t-x} \leqslant \frac{f(y)-f(t)}{y-t}$, ce qui donne :

$$(y-t)(f(t)-f(x)) \leqslant (f(y)-f(t))(t-x)$$

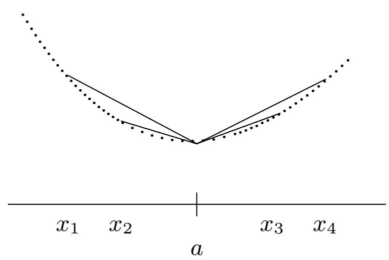
$$\text{puis } f(t)(y-x) \leqslant f(x)(y-t) + f(y)(t-x) = \lambda f(x)(y-x) + (1-\lambda) f(y)(y-x)$$

donc $f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$. La fonction f est donc bien convexe. □

∗ Le sens direct est le plus intéressant, nous allons l'exploiter un peu plus loin.

∗

Croissance de la fonction pente p_a



24▶

Preuve : On applique le théorème de la limite monotone à la fonction croissante p_a en a intérieur à I. Il existe donc x et y dans I tels que $x < a < y$, et $\dfrac{f(a)-f(x)}{a-x} \leqslant \dfrac{f(y)-f(a)}{y-a}$.
À x fixé, $y \mapsto p_a(y)$ est croissante et minorée pour $y > a$ par $p_a(x)$ donc admet une limite finie, ce qui signifie que f est dérivable à droite en a. On procède de même fixant y et faisant varier x pour justifier l'existence de la dérivée à gauche de f en a. Les deux passages à la limite donnent alors $f'_g(a) \leqslant f'_d(a)$. Comme $f(x)-f(a)$ doit donc tendre vers 0 quand x tend vers a^+ ou a^-, on obtient bien la continuité de f en a. □

25▶

Soit a un élément de I.
L'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse a est : $y = f(a)+(x-a)f'(a)$. Comparons par leurs ordonnées les positions des deux points $(x_0, f(x_0))$ du graphe de f et $(x_0, f(a)+(x_0-a)f'(a))$ de la tangente : $f(x_0)-f(a)-(x_0-a)f'(a) = (x_0-a)(p_a(x_0)-f'(a))$. Or p_a est croissante et de valeur (après prolongement) $f'(a)$ en a, donc cette quantité est toujours positive. D'où le résultat. □

26▶

∗ Voilà qui est plus simple... et plus fréquent ! Sachez toutefois bien adapter les caractérisations aux hypothèses de régularité dont vous disposez dans un énoncé !

∗ *Preuve* : a) Supposons f dérivable sur I.

Si f est convexe, la fonction pente en tout a de I, on l'a vu, est continue en a de valeur $f'(a)$, ce qu'on peut utiliser en écrivant, pour $x < y$ dans I : $f'(x) \leqslant p_x(y) = p_y(x) \leqslant f'(y)$. Donc f' est bien croissante.
Réciproquement, soit $x < y$ dans I, et g définie sur $[0,1]$ par $\lambda \mapsto f(\lambda x+(1-\lambda)y)-\lambda f(x)-(1-\lambda)f(y)$. On obtiendra f convexe si on montre que g est à valeurs négatives.
Or g est dérivable sur $[0,1]$, de dérivée $\lambda \mapsto (x-y)f'(\lambda x+(1-\lambda)y)-f(x)+f(y)$ croissante par croissance de f' et négativité de $x-y$. De plus, $g(0) = g(1) = 0$, donc d'après le théorème de Rolle, il existe λ_0 dans $]0,1[$ tel que $g'(\lambda_0) = 0$. Ainsi, g' est négative sur $[0,\lambda_0]$ et positive sur $[\lambda_0, 1]$, et on a le tableau de variations suivant :

	0		λ_0		1
g'		$-$	0	$+$	
g	0	$\searrow$		$\nearrow$	0

ce qui montre que g est à valeurs négatives, donc que f est convexe.

b) Supposons maintenant f deux fois dérivable sur I. D'après ce qui précède, la convexité de f équivaut à la croissance de f' qui équivaut dans ce cadre à la positivité de f''. □

Pratique 8 :

1. Les fonctions affines sont deux fois dérivables et de dérivéee seconde nulle, donc positive...
En revanche, la fonction $-|.|$ est affine par morceaux sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas convexe (elle est par ailleurs concave...).

2. a) exp est deux fois dérivables de dérivée seconde positive donc est convexe sur $\mathbb{R}$.

b) ln est concave sur $\mathbb{R}_+^*$, puisque de dérivée seconde $x \mapsto -1/x^2$.

c) $x \mapsto x^p$ est de dérivée seconde $p(p-1)x^{p-2}$, donc convexe sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, p est pair ou égal à 1, et convexe seulement sur $\mathbb{R}_+$ lorsque p est impair et supérieur à 3.

d) La fonction partie entière ne peut pas être convexe sur $\mathbb{R}$ puisqu'elle n'est pas continue en 0 intérieur à $\mathbb{R}$. Elle l'est toutefois sur chaque intervalle $[k, k+1]$ (pour k entier relatif).

3. sin est concave sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ puisque de dérivée seconde $-\sin$ négative sur cet intervalle. Son graphe est donc au-dessous de ses tangentes, ce qui donne l'inégalité de droite avec la tangente en 0, et au-dessus de ses cordes, ce qui donne l'inégalité de gauche avec la corde entre les points $(0,0)$ et $(\frac{\pi}{2}, 1)$.