Chapitre 7 : SYSTÈMES LINÉNAIRES - MATRICES

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Généralités

DÉFINITION

Soit n et p deux naturels non nuls.

- *Un* **système linéaire** *à n équations et p inconnues est un ensemble d'équations de forme :*

$$(S) \quad \begin{cases} a_{1,1}\,x_1 + a_{1,2}\,x_2 + \ldots + a_{1,p}\,x_p &= b_1 \\ a_{2,1}\,x_1 + a_{2,2}\,x_2 + \ldots + a_{2,p}\,x_p &= b_2 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots & \quad\vdots \\ a_{n,1}\,x_1 + a_{n,2}\,x_2 + \ldots + a_{n,p}\,x_p &= b_n \end{cases}$$

où

$*$ *les* **inconnues** *sont les éléments de $\mathbb{K}$ (ou scalaires) x_1, x_2, ..., x_p,*

$$* \text{ le tableau des } \textbf{coefficients} : A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & \mathbf{a_{i,j}} & & \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} & \leftarrow \text{ligne i} \\ \qquad\qquad\quad \uparrow & \\ \qquad\qquad\quad \text{colonne } j & \end{array}$$

qui comporte n lignes et p colonnes est appelé **matrice associée** *au système (S),*

$*$ *le* **second membre** *de (S) est repésenté par la « matrice colonne » ou vecteur :* $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

Ainsi, on résout un système noté matriciellement : $AX = B$

- *Le* **système homogéne associé** *à (S) est le système (H) de même matrice associée A et de second membre nul. Matriciellement : $AX = 0$*

- *L'ensemble $\mathcal{S}(S)$ des solutions de (S) est le sous-ensemble de $\mathbb{K}^p$ formé des vecteurs* $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ *tels que les équations de (S) soient vérifiées pour x_1, x_2, ... et x_p.*

Si $\mathcal{S}(S)$ est non vide, on parle de **système compatible**, *sinon de* **système incompatible**.

Un système homogène est toujours compatible : l'ensemble de ses solutions contient toujours le vecteur nul.

Résoudre un système linéaire, c'est en donner l'ensemble des solutions (éventuellement vide).

Pratique 1 :

Écrire en équations le système linéaire associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ et au second membre $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Combien y-a-t-il d'équations et d'inconnues ? Est-il compatible ?

Théorème

Soit (S) : $AX = B$ un système linéaire à n équations et p inconnues, de matrice associée A et de second membre B, de système homogène associé (H) : $AX = 0$

L'ensemble $\mathcal{S}(H)$ des solutions de (H) forme un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$, c'est-à-dire un sous-ensemble non vide de $\mathbb{K}^p$ (contient $0_{\mathbb{K}_p}$) stable par combinaison linéaire.

L'ensemble $\mathcal{S}(S)$ des solutions de (S) est :

$*$ soit vide,

$*$ soit forme un sous-espace affine de $\mathbb{K}^p$ de direction $\mathcal{S}(H)$: $\mathcal{S}(S) = X_0 + \mathcal{S}(H)$, où X_0 est une solution particulière de (S), quelconque. Autrement dit, toute solution de (S) est la somme de X_0 et d'une solution de (H), et réciproquement.

2▶

Ce qui ne suffit pas pour résoudre facilement un système linéaire...

II Résolution d'un système linéaire

II.1 Systèmes triangulaires, systèmes diagonaux

Définition

Un système linéaire est triangulaire supérieur s'il comporte autant d'équations que d'inconnues, et que la matrice associée $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est triangulaire supérieure : $i > j \Longrightarrow a_{i,j} = 0$.

Autrement dit, c'est le cas lorsque A est de la forme : $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ & \ddots & \vdots \\ (\mathbf{0}) & & a_{n,n} \end{pmatrix}$

3▶

Proposition

Un système triangulaire (en particulier diagonal) admet une unique solution si, et seulement si, tous les coefficients diagonaux de sa matrice associée sont non nuls.

4▶

Pratique 2 :

1. Écrire la matrice associée au système $(S)\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 1 \\ y+2z & = & 3 \\ 3z & = & 6 \end{array}\right.$ d'inconnues $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$,

puis donner l'ensemble de ses solutions.

2. Soit $a\in\mathbb{R}$. Même chose avec : $(S)\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 1 \\ 2z & = & a \\ 3z & = & 6 \end{array}\right.$

II.2 Systèmes échelonnés

On essaie de ramener le cas général au cas triangulaire...

Définition

Un système (S) est **échelonné** *s'il existe un naturel r non nul tel que :*

$$(S)\quad\left\{\begin{array}{rcl} a_{1,1}\,x_1+a_{1,2}\,x_2+\ldots+a_{1,r}\,x_r+a_{1,r+1}\,x_{r+1}+\ldots+a_{1,p}\,x_p & = & b_1 \\ a_{2,2}\,x_2+\ldots+a_{2,r}\,x_r+a_{2,r+1}\,x_{r+1}+\ldots+a_{2,p}\,x_p & = & b_2 \\ \ddots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad & \vdots & \\ a_{r,r}\,x_r+a_{r,r+1}\,x_{r+1}+\ldots+a_{r,p}\,x_p & = & b_r \\ 0 & = & b_{r+1} \\ & \vdots & \\ 0 & = & b_n \end{array}\right.$$

avec $a_{i,i}\neq 0$ si $i\in[\![1,r]\!]$.

Les r premières équations sont les **équations principales**, *les suivantes* **non principales**.

Les r premières inconnues sont les **inconnues principales**, *les suivantes* **non principales** *ou* **paramètres**.

r est le **rang du système échelonné** (S) *ou encore le* **rang de la matrice associée** A.

5▶

Théorème

Un système (S) échelonné de rang r est compatible si, et seulement si, ses $n-r$ équations non principales sont vérifiées.
Dans ce cas, (S) admet une unique solution si $r=p$ est le nombre de ses inconnues, une infinité de solutions sinon (cas $p>r$).

6▶

Reste à savoir « échelonner » un système...

II.3 Opérations élémentaires, systèmes équivalents

7▶

Définition

> *Les* **opérations élémentaires** *sur les lignes L_i de la matrice A sont :*
>
> $*$ *les opérations de* **transvection** *: $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$, pour un scalaire α et $i \neq j$*
>
> $*$ *les opérations de* **dilatation** *: $L_i \leftarrow \lambda L_i$ pour un scalaire non nul λ*
>
> $*$ *les opérations d'***échange** *: $L_i \leftrightarrow L_j$ pour $i \neq j$.*
>
> *On dispose des mêmes opérations élémentaires sur les colonnes de A.*

Proposition

> *Ces opérations élémentaires sont « inversibles » et conduisent à une matrice dite équivalente.*
>
> *On ne change pas l'ensemble des solutions d'un système linéaire en le transformant par opérations élémentaires* **sur les lignes** *de sa matrice associée.*
>
> *Cela reste vrai si on utilise des échanges de colonnes de la matrice associée, à condition de « renuméroter » les inconnues à chaque échange.*
>
> *Dans ce cadre, on dit que le système linéaire obtenu est équivalent au système de départ.*

8▶

Théorème Définition :

> *Tout système linéaire de matrice associée non nulle est équivalent à un système échelonné.*
>
> *Le rang r d'un tel système échelonné équivalent est indépendant de la méthode.*
>
> *On définit donc le rang du système et de la matrice de départ comme égal à ce rang r.*
>
> *Un système linéaire admet soit : aucune solution, une unique solution, une infinité de solutions.*

La **méthode du pivot de Gauss** est l'outil systématique d'échelonnement d'un système.

Elle se prolonge par une **résolution du système par remontée**.

9▶

Pratique 3 :

1. Résoudre le système linéaire : $\begin{cases} x+y &= 2 \\ 2x-y &= 3 \end{cases}$ d'inconnues x et y.

2. Résoudre le système linéaire : $\begin{cases} 2y - z &= 1 \\ -2x-4y+3z &= -1 \\ x+y-3z &= -6 \end{cases}$ d'inconnues x, y et z.

3. Résoudre le système linéaire : $\begin{cases} x+z &= 1 \\ y+z &= 0 \\ x+y &= 1 \\ 2x+3y &= 0 \end{cases}$ d'inconnues x, y et z.

4. Donner une cns pour que le système linéaire : $\begin{cases} x+2y-z &= a \\ -2x-3y+z &= b \\ x+3y-2z &= c \end{cases}$ d'inconnues x, y et z soit compatible, et le résoudre alors.

III Système de Cramer, matrice inversible

Définition

Un système linéaire est **de Cramer** *lorsque les deux conditions sont vérifiées :*

- $*$ *le nombre d'équations est égal aux nombre d'inconnues (la matrice associée est carrée)*
- $*$ *il admet une unique solution.*

Théorème

Un système linéaire à n équations et n inconnues est de Cramer si, et seulement si, une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée :

a) le système est équivalent à un système triangulaire dont tous les coefficients diagonaux sont non nuls,

b) le système homogène associé admet pour unique solution la solution nulle (il est de Cramer),

c) la matrice associée au système est équivalente à une matrice triangulaire à coefficients diagonaux tous non nuls,

d) la matrice associée au système est équivalente à la matrice identité,

e) la matrice associée au système est de rang n.

10▶

Cas particulier : $n = p = 2$

Le système $\begin{cases} ax + by = b_1 \\ cx + dy = b_2 \end{cases}$ est de Cramer si, et seulement si, $\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ est non nul.

Dans ce cas, l'unique solution est donnée par : $x = \dfrac{\begin{vmatrix} b_1 & b \\ b_2 & d \end{vmatrix}}{\det(A)}$ et $y = \dfrac{\begin{vmatrix} a & b_1 \\ c & b_2 \end{vmatrix}}{\det(A)}$

11▶

Pratique 4 :

1. Résoudre les systèmes $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} x + 2y = 2 \\ 2x + y = -1 \end{cases}$ d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

2. Résoudre le système $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x + 6y = 0 \end{cases}$ d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

3. Soit a et b deux réels. Résoudre le système $\begin{cases} ax + by = 1 \\ -bx + ay = -1 \end{cases}$ d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

4. Résoudre le système $\begin{cases} x + 10y - 3z = 5 \\ 2x - y + 2z = 0 \\ -x + y + z = -3 \end{cases}$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

5. Soit a et b deux réels. Résoudre le système $\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ x + 2y + z = 2 \\ 3x + 4y + 5z = a \\ y + 3z = b \end{cases}$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

SAVOIR...

(1) *... appliquer la méthode du pivot de Gauss pour résoudre un système linéaire*

(2) *... repérer qu'un problème donné se ramène à la résolution d'un système linéaire*

(3) *... déterminer le rang d'une matrice*

THÉORÈMES et PROPOSITIONS	**... outils pour ...**
Théorème de structure d'ensemble des solutions	*Description des solutions*
Théorèmes d'existence / unicité des solutions pour les systèmes échelonnés	*Questions d'existence / unicité*