▶ ▶ 13 : ANALYSE ASYMPTOTIQUE

1▶

$*$ On pourrait aussi traduire (moins bien) $f = \underset{a}{o}(g)$ par "f est très petit devant g au voisinage de a".

$*$ De manière "mécanique", $f = \underset{a}{o}(g)$ traduit que $\dfrac{f}{g} \to 0$ en a.
En particulier, $f = \underset{a}{o}(1)$ signifie que f est de limite nulle en a.

$*$ En d'autres termes, par exemple : $\mathrm{e}^x = 1 + x + \underset{x\to 0}{o}(x)$ signifie que $\mathrm{e}^x = 1 + x$ à une quantité négligeable devant x près, ou encore à la précision x quand x tend vers 0.
Il est donc inutile et même déconseillé d'écrire dans cette égalité des termes négligeables devant x : $\mathrm{e}^x = 1 + x + x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x)$ n'apporte rien de plus ; pire, $\mathrm{e}^x = 1 + x + 2x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x)$ est également vrai.
Pour résumer : ce terme $\underset{x\to 0}{o}(x)$ est un garde-fou, il indique une précision, et tout ce qu'on pourrait ajouter de négligeable devant x n'aurait aucune utilité et doit être éliminé pour éviter des erreurs...

Pratique 1 :

1. Respectivement, f est de limite 0 en a, (u_n) tend vers 0.

2. a) En 0, $x^2 = o(x)$, en $+\infty$ c'est $x = o(x^2)$, et en 1 les deux fonctions sont de limite 1, o ne peut pas être utilisé pour comparer ces fonctions.

b) $1/n^2 = o(1/n)$ puisque $(1/n^2)/(1/n) = 1/n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

c) D'après les régles de croissances comparées, $\mathrm{e}^{-1/x} = o(x^2)$ en 0^+.

d) D'après les régles de croissances comparées, $\ln x = o(1/x)$ en 0^+.

2▶

Ceci rassemble les résultats du chapitre sur les fonctions usuelles.

3▶

Ceci rassemble aussi les résultats vus dans le chapitre sur les suites, établis notamment en dernière ligne à l'aide des comparaisons logarithmiques.

4▶

$*$ Toujours penser en terme de précision ou de limite de rapport. Ces propriétés sont immédiates.

$*$ Par exemple : $\dfrac{1}{n^2} = o(\frac{1}{n}) = o(\frac{2}{n}) = o(\frac{5}{n})$

5▶

$*$ *Preuve pour les fonctions* : Par hypothèse, $f = h\varepsilon_1$ et $h = g\varepsilon_2$ avec ε_i de limites nulles en a, donc $f + g = h(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$ avec $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ de limite nulle en a par théorème d'opérations sur les limites. □

$*$ Par exemple : $\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{n^3} = o(\frac{1}{n})$

$*$ Autre exemple : $\mathrm{e}^x = 1 + x + \underset{x\to 0}{o}(x)$ et $\sin x = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$ donc : $\mathrm{e}^x + \sin x = 1 + 2x + \underset{x\to 0}{o}(x)$

$*$ Remarque : $o(f + g) = o(f) + o(g)$, mais dans un cas concret, on comparera f et g pour ne garder qu'un des deux termes de cette somme, conformément à l'idée d'"ordre de précision" du résultat.

6▶

C'est clair en pensant ces égalités en terme de précisions !

7▶

$*$ Même type de preuve qu'en 5.

$*$ Par exemple : $\cos x = 1 + \underset{x\to 0}{o}(x)$ et $\sin x = x + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$ donne par calcul direct :

$$\cos(x)\sin(x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x^2) + x.\underset{x\to 0}{o}(x) + \underset{x\to 0}{o}(x^3) = x + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$$

8▶

$*$ *Preuve pour les fonctions* : Par hypothèse, $f = g\varepsilon$ avec ε de limite nulle en a, donne $f^r = g^r\varepsilon^r$ avec ε^r de limite nulle en a puisque $r > 0$, d'où le résultat. $\square$

$*$ Ce sera la $\boxed{\text{seule propriété de composition par la gauche}}$ d'une relation de négligeabilité : on n'a pas, en général, que $f = \underset{a}{o}(g)$ implique $h(f) = \underset{a}{o}(h(g))$. Voir l'exemple suivant.

9▶

En revanche, $\boxed{\text{on peut "composer par la droite"}}$:

$$\sin x - x = \underset{x\to 0}{o}(x) \quad \text{donc} \quad \sin(\frac{1}{x}) - \frac{1}{x} = \underset{x\to +\infty}{o}(\frac{1}{x}) \quad \text{car } 1/x \text{ est de limite nulle en } +\infty$$

10▶

On recherche le **terme représentatif non nul** dans un développement. Par exemple, pour $\cos(x)$ en 0, la limite 1. Et en poursuivant, pour $\cos(x) - 1$ en 0, ce sera $-x^2/2$... Pour $\sin(x)$ en 0, ce sera x , et non pas 0 !

On va développer des méthodes de calculs permettant d'accélérer les techniques utilisées jusqu'ici qui étaient basées sur la multiplication par une quantité conjuguée ou la traduction de la valeur d'une dérivée comme limite d'un taux de variations.

11▶

$*$ Rappelez-vous : $\boxed{\text{on garde le terme prépondérant non nul}}$!! Ainsi, $\cos x \underset{x\to 0}{\sim} 1$ est juste, $\cos x \underset{x\to 0}{\sim} 1+x$ aussi, ainsi que $\cos x \underset{x\to 0}{\sim} 1 + 23x^2$, mais les deux dernières identités n'apportent rien (sinon un risque d'erreur ultérieure).

$*$ Prenez l'habitude dans les calculs pratiques de n'écrire QU'UN TERME À DROITE DU SIGNE $\sim$

$*$ Quand vous avez trouvé l'équivalent que vous cherchez, assurez-vous que le rapport fonction/équivalent ou suite/équivalent tend vers 1 !

$\boxed{\textbf{Pratique 2 :}}$

1. Écrire la définition : successivement, f tend vers 1 en a, vers 2 en a, (u_n) converge vers 3, f est nulle au voisinage de a, (u_n) est stationnaire à 0.

2. a) x en 0 car x^2 est négligeable devant x, x^2 en $+\infty$ car x est négligeable devant x^2*, 2 en 1 (regarder les limites des rapports) b) $1/n^2$

c) $\ln(x)$ en 0^+, 2 en 1, et x en $+\infty$ par croissances comparées (regarder les rapports) d) 2^n

12▶

Preuve pour les fonctions : f, g et h désignent trois fonctions définies au voisinage de a.

- $f = f + o(f)$ puisque $f - f = 0$, donc $f \sim f$ (réflexivité)
- si $f \sim g$, alors $f = g(1+\varepsilon)$ avec ε de limite nulle en a, donc $g = f(1 - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon})$, la parenthèse étant de limite 1 en a, donc $g \sim f$ (symétrie)
- supposons $f \sim g$ et $g \sim h$, alors $f = g + o(g)$ et $g = h + o(h)$, d'où $f = h + o(h)$ par propriété de o, donc $f \sim h$ (transitivité). $\square$

13▶

λ étant une constante non nulle !!!! Ce sont les cas d'équivalents les plus simples !

Comme on l'a déjà souligné, si f ou (u_n) tend vers 0, 0 n'est pas l'équivalent cherché, sauf dans le seul cas très particulier où f est la fonction nulle au voisinage de a, ou (u_n) une suite stationnaire à 0.

∗ Dans un calcul de développement, penser à traduire $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lambda$ par : $f(x) = \lambda + \underset{x\to a}{o}(1)$

14▶

∗ *Preuve pour les fonctions* : Par hypothèse, $f = h + o(h)$ et $g = \varphi + o(\varphi)$ donc $fg = h\varphi + o(h\varphi)$ par propriétés de la relation o, donc $fg \sim h\varphi$. □

∗ Par exemple : $\sin(x)(\mathrm{e}^x - 1) \underset{x\to 0}{\sim} x.x \underset{x\to 0}{\sim} x^2$

15▶

∗*Preuve pour les fonctions* : Par hypothèse, $f = g(1+\varepsilon)$ avec ε de limite nulle en a. Pour x assez proche de a, on a $|\varepsilon(x)| < 1/2$, donc $1 + \varepsilon(x) \geqslant 1/2$ donc f et g de même signe et s'annulant simultanément (donc ne s'annulant pas par hypothèse sauf peut-être en a) sur ce voisinage de a. On peut alors inverser l'identité de départ : $\dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{g}\dfrac{1}{1+\varepsilon}$, le dernier quotient tendant vers 1 par composition de limites. □

16▶

∗ *Preuve* : Par hypothèse, $f = g(1+\varepsilon)$ avec ε de limite nulle en a. Pour x assez proche de a, on a $|\varepsilon(x)| < 1/2$, donc $1 + \varepsilon(x) \geqslant 1/2$ donc f et g de même signe (strictement positif par hypothèse) sur ce voisinage de a. On peut donc calculer les puissances r depuis l'identité de départ : $f^r = g^r(1+\varepsilon)^r$, avec $(1+\varepsilon)^r$ de limite 1 en a par composition de limites. Finalement, $f^r \sim g^r$. □

∗ Comme avec o, c'est le $\boxed{\text{seul cas de composition d'un équivalent à gauche}}$!! Voir la suite.

17▶

Par application directe des définitions.

18▶

∗ Plus précisément pour la composition par la gauche :

- Lorsqu'il s'agit de limites non nulles, le théorème d'opérations sur les limites (dont la composition) donne la réponse pour les équivalents. Par exemple, cos et exp sont de limites respectives 1 en 0 et e en 1, donc $\exp\circ\cos$ est d'équivalent e en 0.

- Mais voyez que par exemple, $n+1 \sim n$ alors que e^{n+1} n'est pas équivalent à e^n puisque le rapport des deux tend vers e et non pas 1.

∗ $\boxed{\text{La composition par la droite est possible}}$! Par exemple, $\mathrm{e}^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$ et en posant $u = \sin x$ qui tend bien vers 0 quand x tend vers π, on obtient $\mathrm{e}^{\sin x} - 1 \underset{x\to\pi}{\sim} \sin(x) = \sin(\pi - x) \underset{x\to\pi}{\sim} (\pi - x)$ puisque $\sin v \underset{v\to 0}{\sim} v$ (et on aura posé $v = \pi - x$ qui tend bien vers 0 quand x tend vers π).
C'est ainsi que l'on prouve que $\mathrm{e}^{\sin x} - 1 \underset{x\to\pi}{\sim} (\pi - x)$.

∗ Toutefois, on a les propriétés suivantes, non explicitement dans le programme :

a) Si $f \underset{x\to a}{\sim} g$, alors $\mathrm{e}^f \underset{x\to a}{\sim} \mathrm{e}^g$ si, et seulement si, $f - g$ tend vers 0 en a

b) Si $u_n \sim v_n$, alors $\mathrm{e}^{u_n} \sim \mathrm{e}^{v_n}$ si, et seulement si, $(u_n - v_n)$ tend vers 0.

Rappelez-vous plutôt qu'on ne compose pas les équivalents par la gauche, et retrouvez ce résultat directement en étudiant le rapport $\mathrm{e}^f/\mathrm{e}^g = \mathrm{e}^{f-g}$ ou $\mathrm{e}^{u_n}/\mathrm{e}^{v_n} = \mathrm{e}^{u_n - v_n}$ (c'est la preuve de la règle).

∗ ⚠ $\boxed{\text{Pour les sommes, danger}}$! Par exemple $x \underset{x\to 0}{\sim} x + x^2$ et $-x \underset{x\to 0}{\sim} -x + x^2$ sont deux assertions vraies (les rapports tendent bien vers 1 lorsque x tend vers 0), mais si on somme sans réfléchir, on obtient : $0 \underset{x\to 0}{\sim} 2x^2$ ce qui est faux puisque seule la fonction nulle au voisinage de 0 est d'équivalent 0.

Pour éviter les d'erreurs :
- n'écrivez dans vos calculs pratiques d'équivalents QU'UN SEUL TERME À DROITE DE $\sim$,
- rappelez-vous qu'un équivalent 0 ne convient que pour la fonction nulle au voisinage du point considéré.

19▶

$*$ Prenons $S = e^x + 2\sin(x) - \cos(x) + (\ln(1+2x))^3$ à titre d'illustration, dont on cherche l'équivalent quand x tend vers 0.

Étape 1 : e^x est de limite 1 non nulle, donc d'équivalent 1 ; $2\sin(x)$ est d'équivalent $2x$; $-\cos(x)$ est de limite -1 non nulle donc d'équivalent -1 ; $(\ln(1+2x))^3$ est d'équivalent $(2x)^3$; $S = 1 + o(1) + 2x + o(x) - 1 + o(1) + 8x^3 + o(x^3) = o(1)$.

Étape 2 : il ne reste $0 + o(1)$. Il faut donc recommencer en retranchant 1 à e^x et -1 à $-\cos(x)$.

On recommence donc avec : $S = (e^x - 1) + 2\sin(x) + (1 - \cos(x)) + (\ln(1+2x))^3$.

Étape 1 : $e^x - 1$ est d'équivalent x, $2\sin x$ d'équivalent $2x$, $1 - \cos(x)$ d'équivalent $x^2/2$, et $(\ln(1+2x))^3$ d'équivalent $(2x)^3$, donc $S = x + o(x) + 2x + o(x) + x^2/2 + o(x^2) + 8x^3 + o(x^3) = 3x + o(x)$.

Étape 2 : il ne reste que $S = 3x + o(x)$, avec $3x$ non nul, c'est donc l'équivalent cherché (en distribuant, on voit que $S/(3x)$ tend vers 1 quand x tend vers 0).

Réponse : $S \underset{x\to 0}{\sim} 3x$.

20▶

Voir la preuve dans 15.
Un calcul d'équivalent peut donc donner le signe de la quantité étudiée au voisinage (seulement) du point étudié pour une fonction, ou à partir d'un certain rang pour une suite.

21▶

$*$ Ce tableau est facile à apprendre ! Il simplifiera énormément les calculs de limites (pour les études de courbes, tangentes, asymptotes par exemple).
Notez aussi qu'il s'agit toujours (pour les fonctions) d'équivalents quand x tend vers 0.

$*$ Tous ces équivalents, sauf les deux derniers, s'obtiennent grâce à nos connaissances sur les dérivées.

Par exemple : $\dfrac{\operatorname{Arctan} x - \operatorname{Arctan} 0}{x - 0}$ tend vers $\dfrac{1}{1+0^2}$ quand x tend vers 0, donc, en 0, $\operatorname{Arctan} x \sim x$.

Pour trouver un équivalent simple de $1 - \cos x$, on peut utiliser : $1 - \cos(x) = 2\sin^2(x/2) \underset{x\to 0}{\sim} x^2/2$, et procéder de même pour $\operatorname{ch}(x) - 1$.

Pratique 3 :

1. Poser $u = x - \pi/2$ qui tend vers 0, pour obtenir $\sin(\pi + 2u) = -\sin(2u) \underset{u\to 0}{\sim} -2u$, réponse : $2(\frac{\pi}{2} - x)$

2. Quand x tend vers 0, $\tan x \sim x$ et $\ln(1 + \sin x) \sim \sin x$ s'obtient en posant $u = \sin(x)$ qui tend vers 0 quand x tend vers 0 et en utilisant $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u$. Finalement : $\tan x \ln(1 + \sin x) \sim x^2$

3. En utilisant la quantité conjuguée : $\sqrt{1+x} - 2 = \dfrac{x-3}{\sqrt{1+x}+2} \underset{x\to 3}{\sim} \dfrac{x-3}{4}$

4. Si on s'en tient aux limites (ordre 0), la somme donne 0. On retranche à chaque terme son équivalent. $\sqrt{1+x+x^2} - 1 \sim x/2$ (passer par la quantité conjuguée), $\cos(x) - 1 \sim -x^2/2$ négligeable devant x. $x/2 + o(x) - x^2/2 + o(x^2) = x/2 + o(x)$. Réponse : $x/2$

5. Poser $u = x - 3$. Réponse : $-3\pi(x-3)$ **6.** En utilisant la quantité conjuguée : $1/2$

7. On doit retrancher 1 à l'exponentielle et 1 au cosinus, la réponse est $1/n$ donnée par la partie relative à l'exponentielle.

22▶

$*$ $\underset{x\to a}{O}(1)$ désigne donc une quantité bornée quand x tend vers a.

$*$ Comme pour la relation o, $O()$ est un garde-fou qui précise où s'arrête la précision significative. On élimine donc toute quantité négligeable devant l'argument de O.

$*$ Par exemple, si on sait que : $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$, on peut écrire : $e^x = 1 + x + \underset{x\to 0}{O}(x^2)$.
En ce sens, on utilise souvent O pour désigner une quantité proportionnelle à son argument. C'est souvent suffisant et pratique pour éviter un calcul supplémentaire à un ordre plus grand...

23▶

Simplement parce qu'une quantité qui tend vers 0 est une quantité bornée (mais par réciproquement).

24▶

Cette dernière identité s'écrit aussi : $f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \ldots + a_n(x-a)^n + \underset{x\to a}{o}((x-a)^n)$
Il s'agit donc d'approcher à une certaine précision $(x-a)^n$ la fonction f au voisinage de a par une fonction polynomiale en $(x-a)$.

$\boxed{\text{On se ramènera toujours au point 0 en posant } x = a + h}$.

25▶

Preuve : On change de variable donc de fonction pour se ramener à une étude au voisinage de 0.
Supposons donc : $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n) = b_0 + b_1x + \ldots + b_nx^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$ et supposons qu'il existe un indice k pour lequel $a_k \neq b_k$, indice que l'on choisit alors le plus petit possible.
On obtient alors : $f(x) - a_0 - \ldots - a_{k-1}x^{k-1} \underset{x\to 0}{\sim} a_kx^k \underset{x\to 0}{\sim} b_kx^k$. Le rapport des deux équivalents devrait tendre vers 1, ce qui est impossible puisque $a_k \neq b_k$.
D'où l'unicité annoncée. $\square$

26▶

$*$ *Preuve* : 1) et 2) proviennent directement du résultat d'unicité précédent appliqué aux identités $f(x) = f(-x)$ si f paire, et $f(x) = -f(-x)$ si f est impaire.

3) Si $k < n$, $a_{k+1}h^{k+1} + \ldots + a_nh^n + \underset{h\to 0}{o}(h^n)$ est négligeable devant h^k : diviser par h^k et faire tendre h vers 0.

4) Diviser par $a_p(x-a)^p$ et faire tendre x vers a, on obtient bien 1 pour limite en a. $\square$

$*$ Ainsi, suivant 4), le premier terme non nul d'un développement limité donne un équivalent simple.

N'oubliez pas les équivalents et leurs techniques de calcul pour autant !! Il existe de nombreuses fonctions qui n'admettent pas de développement limité en un point (comme $\sqrt{\ }$ en 0 par exemple...).

Pratique 4 :

1. $(x-1)^4 = \underset{x\to 1}{o}(x-1)^3$ puisque le rapport des deux tend vers 0 en 1, et
de même : $(x-1)^4 = (x-1)^4 + \underset{x\to 1}{o}(x-1)^5$

2. En utilisant l'introduction de IV, même si ce n'est pas encore démontré : $\sin x = x - x^3/6 + \underset{x\to 0}{o}(x^4)$

3. On pose $u = x - \pi$: $\sin(x) = -\sin u = -u + u^3/6 + \underset{u\to 0}{o}(u^3) = -(x-\pi) + (x-\pi)^3/6 + \underset{x\to \pi}{o}((x-\pi)^3)$

4. Puisque $\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + \underset{u\to 0}{O}(u^3)$, $\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + \underset{x\to 0}{o}(x^5)$ en ayant posé $u = x^2$ qui tend bien vers 0 quand x tend vers 0.

5. Par la formule du binôme de Newton : $(1+x)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} x^j$, donc : $(1+x)^k = \sum_{j=0}^{\mathrm{Min}(n,k)} \binom{k}{j} x^j + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$

27▶

∗ ⚠ Les deux premiers points du théorème sont des équivalences alors que le troisième ne donne qu'une condition suffisante pour qu'une fonction admette en a un développement limité à l'ordre n.

∗ On en déduit qu'une fonction de classe C^∞ au voisinage de a admet en a un développement limité à tout ordre (donné par le théorème de Taylor-Young).

∗ On connaît donc, dans ce cadre d'hypothèses de régularité, la forme du développement limité à un ordre donné pour une fonction f donnée. La partie régulière pour l'ordre n s'appelle la somme partielle d'ordre n de la $\boxed{\text{série de Taylor } \sum \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) \text{ de } f \text{ en } a}$.

∗ Un calcul direct de développement limité peut donc renseigner sur la continuité ou la dérivabilité. Par exemple, $g : x \mapsto \dfrac{1-\cos x}{x}$ se prolonge par continuité en 0 par la valeur 0, et ce prolongement est dérivable en 0 de dérivée 1/2 puisque $g(x) = x/2 + o(x)$ (puisque $\cos x = 1 - x^2/2 + o(x^2)$).

∗ Montrons que la réciproque du théorème de Taylor-Young est fausse.

Soit h définie (pour un naturel $n \geqslant 1$) sur $\mathbb{R}$ par : $x \mapsto x^{n+1}\sin(1/x^n)$ si $x \neq 0$, et $h(0) = 0$. h admet un développement limité en 0 à l'ordre n puisque $h(x) = \underset{x\to 0}{o}(x^n)$ (car sin est bornée). Pour $x \neq 0$, on a $h'(x) = (n+1)x^n \sin(1/x^n) - n\cos(1/x^n)$, quantité qui n'a pas de limite en 0. Ainsi h n'est pas de classe C^1 au voisinage de 0. Notez que toutefois h est dérivable en 0 puisque $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{h(x)-h(0)}{x} = 0$ puisque sin est bornée.

∗ Les deux premiers points du théorème ont déjà été démontrés dans le chapitre sur la dérivation. Le théorème de Taylor-Young le sera dans le prochain chapitre.

Pratique 5 :

1. C'est l'application la plus simple de la formule de Taylor-Young puisque la fonction exponentielle est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et ses dérivées en 0 valent toutes 1. Donc :

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \underset{x\to 0}{o}(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$

2. $x \mapsto (1+x)^\alpha$ est de classe C^∞ sur $]-1, +\infty[$, et en 0 de dérivée k-ième $\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)$. Donc : $(1+x)^\alpha = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$

3. sin et cos sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. En 0, les dérivées d'ordres pairs de sin sont nulles, comme celles de cos d'ordre impairs, et les autres valent en alternance 1 ou -1. D'où :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+2}) \qquad \text{et}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+1})$$

28▶

∗ *Preuve* : Posons : $G(x) = F(x) - F(a) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{(x-a)^{k+1}}{k+1}$

Par hypothèse, $G'(x) = F'(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k = \underset{x\to a}{o}(x-a)^n$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V_a de a tel que pour tout x dans V_a on ait : $|G'(x)| \leqslant \varepsilon|x-a|^n$. D'après l'inégalité des accroissements finis appliquée sur l'intervalle $[a, x]$ pour x dans V_a, on a : $|G(x) - G(a)| \leqslant \varepsilon|x-a|^{n+1}$, ce qui donne exactement le résultat puisque : $G(x) - G(a) = G(x) = F(x) - F(a) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{(x-a)^{k+1}}{k+1}$ □

$*$ Autrement dit, si f est dérivable au voisinage de a et que l'on connaît un développement limité de f' à l'ordre n en a, alors on en déduit par "intégration terme à terme" le développement limité de f en a à l'ordre $n+1$. On obtiendra ainsi les développements limités en 0 de $x \mapsto \ln(1+x)$, Arcsin, Arctan, etc.

29▶

$*$ Un vrai théorème de dérivation serait de la forme suivante : si f admet un développement limité à l'ordre n, alors f' admet un développement limité etc. Mais ceci est faux (voir les contre-exemples du point 27).

$*$ On n'a donc qu'un "semblant" de théorème de dérivation, qui n'est qu'une reformulation du théorème d'intégration : si f admet un développement limité en a à l'ordre n, et si f' admet un développement limité en a à l'ordre $n-1$, alors celui de f' s'obtient par "dérivation terme à terme" de celui de f, puisque celui de f s'obtient par "intégration terme à terme" de celui de f'... Le fait de savoir que f ou que f' admet un développement limité en un point passe en général par le théorème de Taylor-Young. En dehors de ses hypothèses, on procède par un calcul direct à partir de fonctions connues.

Pratique 6 :

1. On connaît le développement limité de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ en 0 à l'ordre n. Utiliser le théorème d'intégration.
Réponse : $\ln(1-x) = -x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3} - \ldots - \dfrac{x^n}{n} + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$

2. Même méthode. Réponse : $\operatorname{Arctan} x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \underset{x\to 0}{o}(x^6)$

30▶

$*$ Par exemple : $(1+x+3x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^3))^2 = 1+2x+7x^2+6x^3+\underset{x\to 0}{o}(x^3)$. Attention à ne pas oublier les "doubles-produits" (ou triples-produits...) dans les calculs de puissances.

$*$ Quand des opérations interviennent (produit, quotient, composition), on essaie de prévoir les ordres de développements de chaque facteur pour éviter les calculs inutiles.
Par exemple, pour le calcul du développement limité en 0 à l'ordre 8 de $x \mapsto x\sin(x^2)$, il suffit à cause de l'imparité de développer $\sin^2(x)$ à l'ordre 6, donc d'utiliser le développement de sin en 0 à l'ordre 3.
Ainsi : $x\sin(x^2) = x^3 - \dfrac{x^7}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^8)$

31▶

$*$ *Preuve* : Si $a_0 \neq 0$, $f(x) \underset{x\to a}{\sim} a_0$ et f est du signe de a_0 dans un voisinage de 0, donc ne s'annule pas sur ce voisinage (propriété vue sur les équivalents). Si $a_0 = 0$, clairement $f(a) = 0$.
Supposons $a_0 \neq 0$, alors $\dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{a_0}\dfrac{1}{1+u}$ avec $u = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{a_k}{a_0}(x-a)^k + \underset{x\to a}{o}(x-a)^n$, quantité qui tend vers 0 quand x tend vers a.
Or $\dfrac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + \ldots + (-1)^n u^n + \underset{u\to 0}{o}(u^n)$. On calcule chaque puissance de u jusqu'à n, et on tronque chaque développement à l'ordre n. En sommant le tout, on obtient le résultat. □

$*$ Une fois de plus, effectuez les changements de variables pour vous ramener en 0...

$*$ Par exemple, calculer le développement limité de $\tan = \sin / \cos$ en 0 à l'ordre 5.
Comme sin a un développement de valuation 1 (commence par x) et que celui de cos commence par 1, on développe sin à l'ordre 5 et cos à l'ordre 4.

$$\tan x = \frac{x-(x^3/6)+(x^5/5!)+o(x^5)}{1-(x^2/2)+(x^4/4!)+o(x^4)}$$

$$= (x-(x^3/6)+(x^5/5!)+o(x^5))(1+(x^2/2)-(x^4/4!)+(x^4/4)+o(x^4)) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}\,x^5 + \underset{x\to 0}{o}(x^5)$$

32▶

$*$ Pour l'exponentielle, $x \mapsto (1+x)^\alpha$, cos, ch, sin et sh : formule de Taylor-Young.

Pour tan, voir le calcul au point 31, calcul similaire pour th, ou via les exponentielles.
Pour $x \mapsto \ln(1+x)$, utiliser le théorème d'intégration depuis le développement de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}\cdot$

$*$ Autre exemple : calculer le développement limité de Arcsin en 0 à l'ordre $2n+2$. Pour la dérivée :

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2} = 1+\frac{x^2}{2}+(\frac{-1}{2})(\frac{-1}{2}-1)\frac{x^4}{2!}+\ldots+(\frac{-1}{2})(\frac{-1}{2}-1)\ldots(\frac{-1}{2}-n+1)\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}+\underset{x\to 0}{o}(x^{2n+1})$$

Par le théorème d'intégration :

$$\begin{aligned}\mathrm{Arcsin}(x) &= 0 + x + \frac{x^3}{2.3} + \frac{3}{4.5}\frac{x^5}{2!} + \ldots + \frac{3.5.7...(2n-1)}{2^n(2n+1)}\frac{x^{2n+1}}{n!} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+2}) \\ &= x + \sum_{k=1}^{n} \frac{(2k)!}{4^k(2k+1)(k!)^2}x^{2k+1} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+2})\end{aligned}$$

Dans ce calcul (classique), on écrit : $\boxed{3.5.7\ldots(2n-1) = \dfrac{2.3.4.\ldots(2n-1)(2n)}{2.4.6.\ldots(2n)} = \dfrac{(2n)!}{2^n n!}}$

Pratique 7 :

1. On regarde jusqu'où développer chaque partie : un dl de tan est de valuation 1, divisé par x, c'est de la forme $1+u$ avec u tend vers 0.
Pour $u \mapsto \ln(1+u)$, on développera à l'ordre 2 en u puisque u sera de valuation 2 ($(\tan x)/x = 1+O(x^2)$), donc on développe tan à l'ordre 6 : $\tan(x) = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2}{15}x^5 + \underset{x\to 0}{o}(x^6)$ ce qui ramène à :

$$\ln(\frac{\tan x}{x}) = \ln(1+\frac{x^2}{3}+\frac{2}{15}x^4+\underset{x\to 0}{o}(x^5)) = (\frac{x^2}{3}+\frac{2}{15}x^4) - \frac{1}{2}(\frac{x^4}{9}) + \underset{x\to 0}{o}(x^5)$$

en ayant posé $u = \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{2}{15}x^4 + \underset{x\to 0}{o}(x^5)$ qui tend vers 0 quand x tend vers 0.
Réponse : $\ln(\dfrac{\tan x}{x}) = \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{7}{90}x^4 + \underset{x\to 0}{o}(x^5)$

2. $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$ puis

$$\begin{aligned}\sqrt{1+\sqrt{1+x}} &= (2+\frac{x}{2}-\frac{1}{8}x^2+o(x^2))^{1/2} = \sqrt{2}\left(1+\frac{x}{4}-\frac{x^2}{16}+o(x^2)\right)^{1/2} \\ &= \sqrt{2}\left(1+(\frac{x}{8}-\frac{x^2}{32})-\frac{1}{8}\frac{x^2}{16}+o(x^2)\right) = \sqrt{2}+\frac{x}{4\sqrt{2}}-\frac{5x^2}{64\sqrt{2}}+o(x^2)\end{aligned}$$

3. On pose $u = x-2$. Puis : $\exp((2+u)\ln(2+u)) = \exp((2+u)(\ln(2)+\ln(1+u/2))$

$$= 4\exp(u\ln 2 + 2\ln(1+u/2) + u\ln(1+u/2)) = 4\exp(u(1+\ln 2) + u^2((-1/4)+(1/2)) + o(u^2))$$

$$= 4\left(1+u(1+\ln(2)) + (1/4+(1+\ln(2))^2/2)u^2 + o(u^2)\right)$$

où on a utilisé : $e^v = 1 + v + v^2/2 + \underset{v\to 0}{o}(v^2)$ avec v égal à l'argument de l'exponentielle qui tend bien vers 0. Puis on écrit :

$$x^x = 4 + 4(1+\ln 2)(x-2) + \frac{(1+2(1+\ln 2)^2)}{4}(x-2)^2 + \underset{x\to 2}{o}(x-2)^2$$

33▶

$*$ Un développement limité en a est un cas particulier de développement asymptotique, dans lequel on utilise les fonctions $f_k : x \mapsto (x-a)^k$, avec $f_{k+1} = \underset{x\to a}{o}(f_k)$.

$*$ Exemples : a) $\ln(1+\sqrt{x}) = \sqrt{x} - \frac{1}{2}x + \underset{x\to 0^+}{o}(x)$ s'obtient à partir du développement limité de $u \mapsto \ln(1+u)$ en 0 à l'ordre 2

b) $\sin(u) = u - \frac{u^3}{6} + \underset{u\to 0}{o}(u^4)$ donne : $\sin(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x} - \frac{1}{6x^3} + \underset{x\to+\infty}{o}(\frac{1}{x^4})$ en posant $u = 1/x$ qui tend bien vers 0 quand x tend vers $+\infty$ (composition par la droite)

$*$ L'idée est donc de choisir une famillle de fonctions classées suivant leurs ordres de grandeur et adaptée à la décomposition d'une fonction donnée...

Pratique 8 :

1. $e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{O}(x^4)$ donc

$$\frac{e^x-1}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{x^{3/2}}{2} + \frac{x^{5/2}}{6} + \underset{x\to 0_+}{o}(x^3)$$

car $x^{7/2}$ est négligeable devant x^3 quand x tend vers 0.

2. Par i.p.p. : $I_n = [\frac{t^{n+1}}{n+1}e^{t-1}]_0^1 - \frac{1}{n+1}I_{n+1} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1}I_{n+1}$.

Or $|I_{n+1}| \leqslant \int_0^1 t^{n+1}\,dt \leqslant \frac{1}{n}$, donc $I_n = \frac{1}{n+1} + O(1/n^2)$.

En itérant (ou avec d'autres i.p.p.) : $I_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} + O(1/n^3)$, soit $I_n = 0 + \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2} + O(1/n^3)$.

3. Soit $f : x \mapsto xe^x$, de dérivée $f' : x \mapsto e^x(1+x)$ positive strictement sur $\mathbb{R}_+$. D'après le théorème du difféomorphisme, f étant indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et sa dérivée ne s'y annulant pas, f définit une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur son image $\mathbb{R}_+$ dont la réciproque est également de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+$.

Quand x tend vers $+\infty$, il en est de même de $f(x)$, et donc de $f^{-1}(x)$. De $f(x) = xe^x$ on déduit $f(f^{-1}(x)) = x = f^{-1}(x)e^{f^{-1}(x)}$ puis $(*)$: $\ln(x) = \ln(f^{-1}(x)) + f^{-1}(x) \sim f^{-1}(x)$ à cause des règles de croissances comparées. Ainsi : $f^{-1}(x) \sim \ln x$.

On peut donc poser : $f^{-1}(x) = \ln x + \varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) = o(\ln x)$. En reportant dans $(*)$:

$$\ln x = \ln(\ln(x) + \varepsilon(x)) + \ln x + \varepsilon(x) \text{ donc } \ln(\ln x) + \ln(1 + \frac{\varepsilon(x)}{\ln x}) + \varepsilon(x) = 0$$

et enfin $\varepsilon(x) = -\ln(\ln x) + o(1)$ car $\ln(\ln x)$ est de limite infinie et $\varepsilon(x)/\ln(x)$ de limite nulle en $+\infty$.

Résultat : $f^{-1}(x) = \ln(x) - \ln(\ln(x)) + \underset{x\to+\infty}{o}(1)$

Pratique 9 :

Ici, il faut essayer des développements, en évitant les calculs inutiles...

$$\frac{1}{\tan^2 x} - \frac{1}{\operatorname{th}^2 x} = \frac{\operatorname{th}^2(x) - \tan^2(x)}{\tan^2(x)\operatorname{th}^2(x)} = \frac{(\operatorname{th}(x) - \tan(x))(\operatorname{th}(x) + \tan(x))}{\tan^2(x)\operatorname{th}^2(x)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{(-2x^3/3)(2x)}{x^4} \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{4}{3}$$

Réponse : la limite en 0 de la quantité est $-4/3$.

34▶

$*$ Revoir les dessins du chapitre sur les fonctions usuelles.

$*$ Si $f(x) = ax + b + \frac{c}{x} + \underset{x\to+\infty}{o}(1/x)$ par exemple, $f(x)/x$ tend vers a, $f(x) - ax$ tend vers b, et $f(x) - ax - b \underset{x\to+\infty}{\sim} c/x$ donc est du signe de c pour x assez grand, donc $y = ax + b$ est asymptote oblique au graphe de f en $+\infty$, et la courbe est au-dessus de l'asymptote si $c > 0$, en dessous si $c < 0$.

Pratique 10 :

1. À l'infini, $\dfrac{y(x)}{x} \sim \dfrac{x}{x}$ est de limite 1, puis $y(x)-x = -\dfrac{x}{x+1}$ tend vers -1. Ainsi, $y = x-1$ est asymptote oblique, reste à connaître la position relative de la courbe par rapport à elle. On utilise un développement asymptotique (ce qu'on peut faire dès le départ si on prévoit cette situation) : $y = \dfrac{x^2}{x+1} = x\,\dfrac{1}{1+1/x}$, et comme $1/x$ tend vers 0 à l'infini, on peut utiliser le développement limité de $1/(1+u)$ en 0, ce qui donne : $y(x) = x(1 - \frac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} + o(1/x^2)) = x - 1 + \frac{1}{x} + o(1/x)$. Ainsi, $y(x) - x + 1 \sim 1/x$, ce qui donne le signe : la courbe se situe au-dessus de son asymptote en $+\infty$, et en dessous en $-\infty$.

2. De même, $1/x$ tendant vers 0 à l'infini, on peut utiliser le développement limité de exp au voisinage de 0, puis on factorise par l'équivalent :

$$\begin{aligned} y(x) &= (\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{6x^3} + o(1/x^3))^{-1} = x(1 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{6x^2} + o(1/x^2))^{-1} \\ &= x(1 - (\frac{1}{2x} + \frac{1}{6x^2}) + \frac{1}{4x^2} + o(1/x^2)) = x - \frac{1}{2} + \frac{1}{12x} + o(1/x) \end{aligned}$$

donc, comme en 1., la courbe admet à l'infini la droite $y = x - 1/2$ pour asymptote oblique, la courbe se situant au dessus en $+\infty$, et en dessous en $-\infty$.

35▶

$*$ Une belle formule n'est-ce pas ? Nous aurons besoin de beaucoup de choses différentes pour la démontrer, en fin d'année, mais elle est au programme et doit être connue.

Ne l'utiliser dans les calculs pratiques (étude de suite, recherche d'équivalent) qu'en dernier recours. Par exemple, l'étude de la suite $(n!/n^n)$ s'éffectue directement par comparaison logarithmique...

$*$ Un exemple d'application : de $\dfrac{n!}{n^n \mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n}} = 1 + o(1)$, on déduit le développement asymptotique :

$$\ln(n!) = \sum_{k=1}^{n} \ln k = n\ln n - n + \frac{1}{2}\,\ln n + \frac{\ln(2\pi)}{2} + o(1)$$

Pour résumer : Vous êtes maintenant bien armés pour étudier le comportement d'une fonction au voisinage d'un point (limite, ordres de grandeurs), et pour étudier les suites (limite, comportement, rapidité de convergence ou divergence).