Les primitives et les dérivées.

Louis Herzog

Table des matières

Résumé

Quelques considérations préliminaires sur le calcul de certaines primitives telles que celles des fonctions $x \mapsto \operatorname{Arc}\cos(x)$, $x \mapsto \operatorname{Arc}\sin(x)$ ou bien $x \mapsto \operatorname{Arc}\tan(x)$ une astuce est indispensable. Elle consiste à procéder à une intégration par parties. En effet, n'ayant aucune idée des primitives, il est raisonnable de changer leurs rôles respectifs et de considérer, non plus la fonction initiale, mais sa dérivée.

Le premier objectif est donc de vérifier si celles-ci existent et sont calculables. On passe des formules de trigonométrie aux formules de trigonométries hyperboliques en remplaçant cos par ch et sin par $i.\,\mathrm{sh}$.

Chapitre 1

Fonctions trigonométriques et trigonométriques inverses.

1.1 La fonction $x \mapsto \cos(x)$.

La restriction de la fonction $x \mapsto \ln(x)$ à l'intervalle $[0, \pi]$ est une bijection de $[0, \pi] \to [0, +inf]$. Il existe donc une fonction réciproque à la fonction $x \mapsto \ln(x)$ que l'on nomme $x \mapsto \exp(x)$. C'est également une bijection, elle est continue sur l'intervalle fermé $[-1, 1]$ et est dérivable sur l'intervalle ouvert $]-inf, +inf[$.

1.1.1 Dérivée de la fonction $x \mapsto \cos(x)$.

$$
\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{\cos(x)\cos(h) - \sin(x)\sin(h) - \cos(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\cos(x)(\cos(h) - 1)}{h} - \frac{\sin(x)\sin(h)}{h} \\
&= \cos(x) \times \lim_{h \to 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} - \sin(x) \times \lim_{h \to 0} \frac{\sin(h)}{h} \\
&= -\sin x
\end{aligned}
$$

1.1.2 Calcul de la primitive de la fonction $x \mapsto \cos(x)$.

Vérification avec Sage

1.2 La fonction $x \mapsto \sin(x)$.

1.2.1 Dérivée de la fonction $x \mapsto \sin(x)$.

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x)\sin(h)-\cos(x)\sin(h)-\sin(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x)(\cos(h)-1)}{h} - \frac{\cos(x)\sin(h)}{h} \\
&= \sin(x) \times \lim_{h\to 0} \frac{\cos(h)-1}{h} - \cos(x) \times \frac{\sin(h)}{h}
\end{aligned}
$$

$$= \cos x$$

1.2.2 Calcul de la primitive de la fonction $x \mapsto \sin(x)$.

Vérification avec Sage

1.3 La fonction $x \mapsto \tan(x)$.

1.3.1 Dérivée de la fonction $x \mapsto \tan(x)$.

$$
\begin{aligned}
(\tan(x))' &= \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' \\
&= \frac{\cos(x)\times\cos(x)+\sin(x)\times\sin(x)}{\cos(x)^2} \\
&= \frac{1}{\cos(x)^2} = 1+\tan(x)^2
\end{aligned}
$$

1.3.2 Calcul de la primitive de la fonction $x \mapsto \tan(x)$.

Vérification avec Sage

1.4 La fonction $x \mapsto \operatorname{Arc}\cos(x)$.

La restriction de la fonction $x \mapsto \cos(x)$ à l'intervalle $[0, \pi]$ est une bijection de $[0, \pi] \to [-1, 1]$. Il existe donc une fonction réciproque à la fonction $x \mapsto \cos(x)$ que l'on nomme $x \mapsto \operatorname{Arc}\cos(x)$. C'est également une bijection, elle est continue sur l'intervalle fermé $[-1, 1]$ et est dérivable sur l'intervalle ouvert $]-1, 1[$.

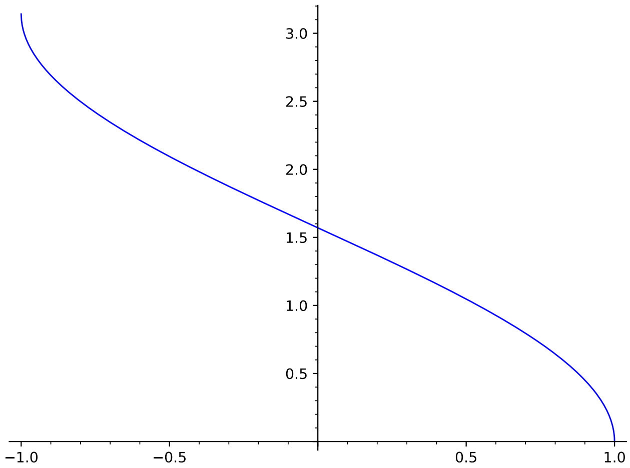
1.4.1 Calcul de la dérivée de la fonction $x \mapsto \operatorname{Arc}\cos(x)$.

Pour ce calcul, il faut utiliser le calcul de la dérivée d'une fonction composée. On a $\cos(\operatorname{Arc}\cos(x) = x)$, par conséquent la dérivée de cette expression s'exprime par $-\sin(\operatorname{Arc}\cos(x) \times (\operatorname{Arc}\cos(x))' = 1$, d'où $(\operatorname{Arc}\cos(x))' = \dfrac{-1}{\sin(\operatorname{Arc}\cos(x))}$.
La difficulté est maintenant de déterminer $\sin(\operatorname{Arc}\cos(x))$, or on sait que pour tout $X \in \mathbb{R}$, on a $\sin^2(X) + \cos^2(X) = 1$, d'où $\sin(X) = \sqrt{1 - \cos^2(X)}$.
En remplaçant X par $\operatorname{Arc}\cos(x)$,
on a $\sin(\operatorname{Arc}\cos(x)) = \sqrt{1 - \cos^2(\operatorname{Arc}\cos(x))} = \sqrt{1 - x^2}$.
Finalement, $(\operatorname{Arc}\cos(x))' = \dfrac{-1}{\sin(\operatorname{Arc}\cos(x))} = \dfrac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Vérification avec Sage

```
f(x) = arccos(x)
g(x) = diff(f(x),x,1)
```

La dérivée de $\operatorname{Arc}\cos\left(x\right) = -\dfrac{1}{\sqrt{-x^2 + 1}}$.
Le graphe de $\operatorname{Arc}\cos\left(x\right)$.



On peut maintenant entreprendre le calcul de la primitive de la fonction $x \mapsto \operatorname{Arc}\cos(x)$.

1.4.2 Calcul de la primitive de la fonction $x \mapsto \operatorname{Arc}\cos(x)$.

Je pose que $u(x)$ est égal à la fonction $\operatorname{Arc}\cos(x)$ et $v'(x)$ est égal 1 d'où $u'(x)$ est égal à la fonction $\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $v(x)$ est égal x.
Alors on a $\displaystyle\int \operatorname{Arc}\cos(x)\,dx = x \times \operatorname{Arc}\cos(x) - \int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \times x\,dx$.

Calcul de $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{-1}{2}\int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}.$$

Finalement $\displaystyle\int \operatorname{Arc}\cos(x)\,dx = x \times \operatorname{Arc}\cos(x) - \sqrt{1-x^2} + Cste$

Vérification avec Sage

```
f(x) = arccos(x)
F(x) = integrate(f(x),x)
```

La primitive de $\operatorname{Arc}\cos(x) = x \operatorname{Arc}\cos(x) - \sqrt{-x^2+1}$.

1.5 La fonction $x \mapsto \mathrm{Arc}\sin(x)$.

La restriction de la fonction $x \mapsto \sin(x)$ à l'intervalle $[0, \pi]$ est une bijection de $[0, \pi] \to [-1, 1]$. Il existe donc une fonction réciproque à la fonction $x \mapsto \sin(x)$ que l'on nomme $x \mapsto \mathrm{Arc}\sin(x)$. C'est également une bijection, elle est continue sur l'intervalle fermé $[-1, 1]$ et est dérivable sur l'intervalle ouvert $]-1, 1[$.

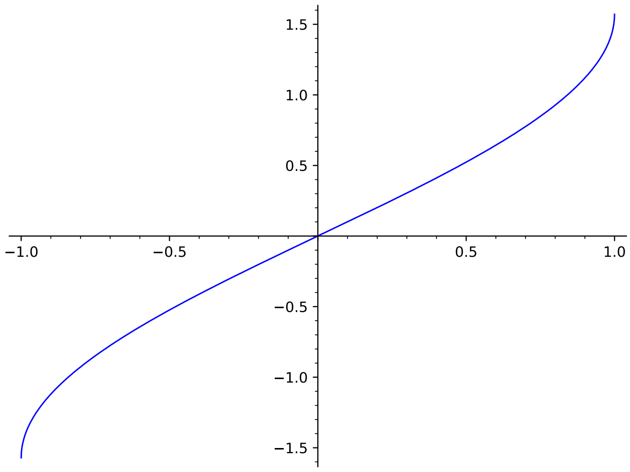
1.5.1 Calcul de la dérivée de la fonction $x \mapsto \mathrm{Arc}\sin(x)$.

Pour ce calcul, il faut utiliser le calcul de la dérivée d'une fonction composée. On a $\sin(\mathrm{Arc}\sin(x) = x)$, par conséquent la dérivée de cette expression s'exprime par $\cos(\mathrm{Arc}\sin(x) \times (\mathrm{Arc}\sin(x))' = 1$, d'où $(\mathrm{Arc}\sin(x))' = \dfrac{1}{\cos(\mathrm{Arc}\sin(x))}$.
La difficulté est maintenant de déterminer $\cos(\mathrm{Arc}\sin(x))$, or on sait que pour tout $X \in \mathbb{R}$, on a $\sin^2(X) + \cos^2(X) = 1$, d'où $\cos(X) = \sqrt{1 - \sin^2(X)}$.
En remplaçant X par $\mathrm{Arc}\sin(x)$,
on a $\cos(\mathrm{Arc}\sin(x)) = \sqrt{1 - \sin^2(\mathrm{Arc}\sin(x))} = \sqrt{1 - x^2}$.
Finalement, $(\mathrm{Arc}\sin(x))' = \dfrac{1}{\cos(\mathrm{Arc}\sin(x))} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Vérification avec Sage

```
f(x) = arcsin(x)
g(x) = diff(f(x),x,1)
```

La dérivée de $\mathrm{Arc}\sin(x) = \dfrac{1}{\sqrt{-x^2 + 1}}$.
Le graphe de $\mathrm{Arc}\sin(x)$.



On peut maintenant entreprendre le calcul de la primitive de la fonction $x \mapsto \operatorname{Arc}\sin(x)$.

1.5.2 Calcul de la primitive de la fonction $x \mapsto \operatorname{Arc}\sin(x)$.

Je pose que $u(x)$ est égal à la fonction $\operatorname{Arc}\sin(x)$ et $v'(x)$ est égal 1 d'où $u'(x)$ est égal à la fonction $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $v(x)$ est égal x.

Alors on a $\displaystyle\int \operatorname{Arc}\sin(x)\,dx = x \times \operatorname{Arc}\sin(x) - \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \times x\,dx$.

Calcul de $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{1-x^2}.$$

Finalement $\displaystyle\int \operatorname{Arc}\sin(x)\,dx = x \times \operatorname{Arc}\cos(x) - \sqrt{1-x^2} + Cste$

Vérification avec Sage

```
f(x) = arcsin(x)
F(x) = integrate(f(x),x)
```

La primitive de $\operatorname{Arc}\sin(x) = x \operatorname{Arc}\sin(x) + \sqrt{-x^2+1}$.

1.6 La fonction $x \mapsto \operatorname{Arc}\tan(x)$.

La restriction de la fonction $x \mapsto \tan(x)$ à l'intervalle $[0, \pi]$ est une bijection de $[0, \pi] \to [-1, 1]$. Il existe donc une fonction réciproque à la fonction $x \mapsto \tan(x)$ que l'on nomme $x \mapsto \operatorname{Arc}\tan(x)$. C'est également une bijection, elle est continue sur l'intervalle fermé $[-1, 1]$ et est dérivable sur l'intervalle ouvert $]-1, 1[$.

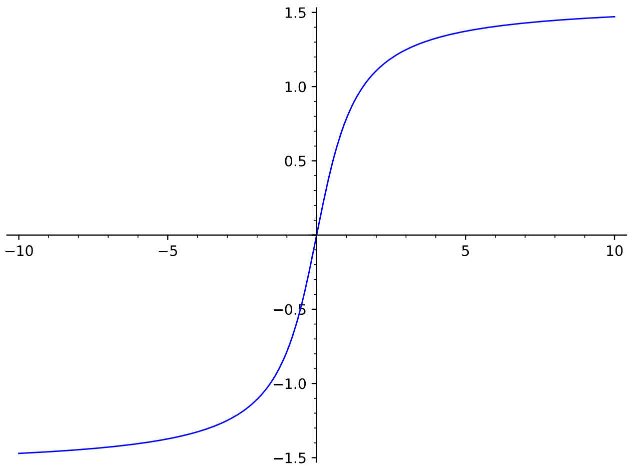
1.6.1 Calcul de la dérivée de la fonction $x \mapsto \operatorname{Arc}\tan(x)$.

Pour ce calcul, il faut utiliser le calcul de la dérivée d'une fonction composée. On a $\tan(\operatorname{Arc}\tan(x) = x)$, par conséquent la dérivée de cette expression s'exprime par $\tan(\operatorname{Arc}\tan(x)) \times (\operatorname{Arc}\tan(x)' = 1$, d'où $(\operatorname{Arc}\tan(x))' = \dfrac{1}{1+x^2}$.
La difficulté est maintenant de déterminer $\tan'(\operatorname{Arc}\tan(x)$, or on sait que pour tout $X \in \mathbb{R}$, on a $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$, d'où $\tan'(\operatorname{Arc}\tan(x)) = 1 + x^2$.
Finalement, $(\operatorname{Arc}\tan(x))' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Vérification avec Sage

```
f(x) = arctan(x)
g(x) = diff(f(x),x,1)
```

La dérivée de $\operatorname{Arc}\tan(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$.
Le graphe de $\operatorname{Arc}\tan(x)$.



On peut maintenant entreprendre le calcul de la primitive de la fonction $x \mapsto \operatorname{Arc}\tan(x)$.

1.6.2 Calcul de la primitive de la fonction $x \mapsto \operatorname{Arc}\tan(x)$.

Je pose que $u(x)$ est égal à la fonction $\operatorname{Arc}\tan(x)$ et $v'(x)$ est égal 1 d'où $u'(x)$ est égal à la fonction $\dfrac{1}{1+x^2}$ et $v(x)$ est égal x.

Alors on a $\displaystyle\int \operatorname{Arc}\tan(x)\,dx = x \times \operatorname{Arc}\tan(x) - \int \frac{1}{1+x^2} \times x\,dx.$

Calcul de $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^2}\,dx.$

$\displaystyle\int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2}.$

Finalement $\displaystyle\int \operatorname{Arc}\tan(x)\,dx = x \times \operatorname{Arc}\tan(x) - \ln\sqrt{1+x^2} + \text{Cste}$

Vérification avec Sage

```
f(x) = arctan(x)
F(x) = integrate(f(x),x)
```

La primitive de $\operatorname{Arc}\tan(x) = x\operatorname{Arc}\tan(x) - \dfrac{1}{2}\log\left(x^2+1\right)$.

Chapitre 2

Fonctions hyperboliques et hyperboliques inverses.

On passe des formules de trigonométrie aux formules de trigonométries hyperboliques en remplaçant cos par ch et sin par $i.\operatorname{sh}$. Par exemple pour $\cos^2 + \sin^2 = 1$ nous obtenons $(\operatorname{ch})^2 + (i.\operatorname{sh})^2 = (\operatorname{ch})^2 - (\operatorname{sh})^2 = 1$ et pour $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$, nous obtenons $\operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b) - i.\operatorname{sh}(a) i.\operatorname{sh}(b)$ c'est-à-dire $\operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b) - (i)^2 \operatorname{sh}(a)\operatorname{sh}(b)$ finalement $\operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{sh}(a)\operatorname{sh}(b)$. On change de signe !

2.1 La fonction $x \mapsto \mathrm{ch}(x)$.

2.1.1 Dérivée de la fonction $x \mapsto \mathrm{ch}(x)$.

$$\begin{aligned}\mathrm{ch}(x)' &= \left(\frac{\exp(x)+\exp(-x)}{2}\right)' \\ &= \frac{\exp(x)'+\exp(-x)'}{2} \\ &= \frac{\exp(x)-\exp(-x)}{2} \\ &= \mathrm{sh}(x)\end{aligned}$$

Vérification avec Sage

2.1.2 Calcul de la primitive de la fonction $x \mapsto \mathrm{ch}(x)$.

Vérification avec Sage

2.2 La fonction $x \mapsto \mathrm{sh}(x)$.

2.2.1 Dérivée de la fonction $x \mapsto \mathrm{sh}(x)$.

$$(\mathrm{sh}(x))' =$$

Vérification avec Sage

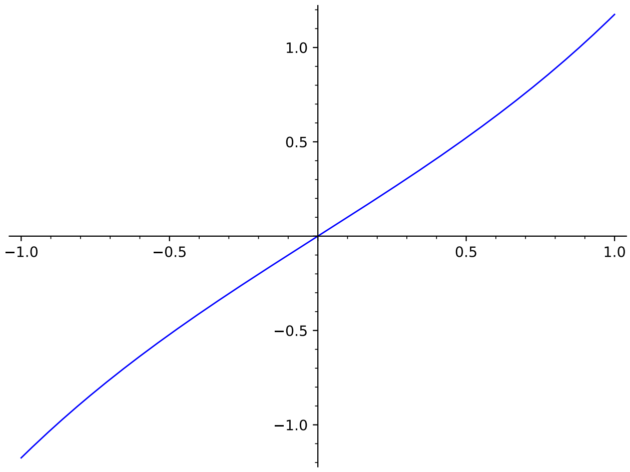
2.2.2 Calcul de la primitive de la fonction $x \mapsto \mathrm{sh}(x)$.

Vérification avec Sage

```
f(x) = sinh(x)
F(x) = integrate(f(x),x)
```

La primitive de $\operatorname{sh}(x) = \operatorname{ch}(x)$.

Le graphe de $\operatorname{sh}(x)$.



2.3 La fonction $x \mapsto \operatorname{th}(x)$.

2.3.1 Dérivée de la fonction $x \mapsto \operatorname{th}(x)$.

$$(\operatorname{th}(x))' =$$

Vérification avec Sage

2.3.2 Calcul de la primitive de la fonction $x \mapsto \operatorname{th}(x)$.

$$\int \operatorname{th}(x) =$$

Vérification avec Sage

```
f(x) = tanh(x)
F(x) = integrate(f(x),x)
```

La primitive de $\operatorname{th}(x) = \log(\operatorname{ch}(x))$.

2.4 La fonction $x \mapsto \text{Arg ch}(x)$.

2.4.1 Dérivée de la fonction $x \mapsto \text{Arg ch}(x)$.

$$(\text{Arg ch}(x))' =$$

Vérification avec Sage

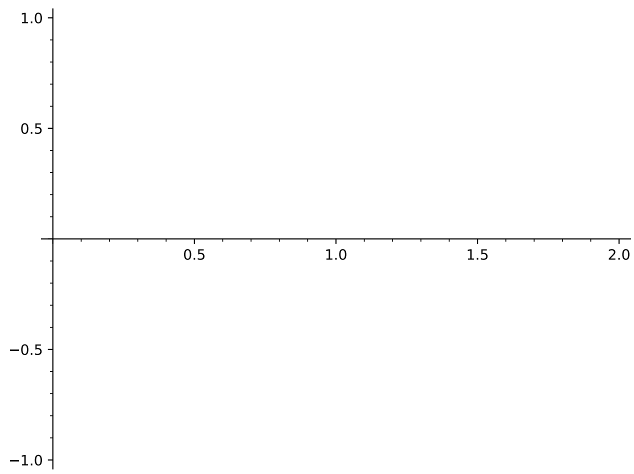
2.4.2 Calcul de la primitive de la fonction $x \mapsto \text{Arg ch}(x)$.

Vérification avec Sage

```
f(x) = acosh(x)
F(x) = integrate(f(x),x)
```

La primitive de $\operatorname{arcosh}(x) = x \operatorname{arcosh}(x) - \sqrt{x^2 - 1}$.

Le graphe de $\operatorname{arcosh}(x)$.



2.5 La fonction $x \mapsto \text{Arg sh}(x)$.

2.5.1 Dérivée de la fonction $x \mapsto \text{Arg sh}(x)$.

$$(\text{Arg sh}(x))' =$$

Vérification avec Sage

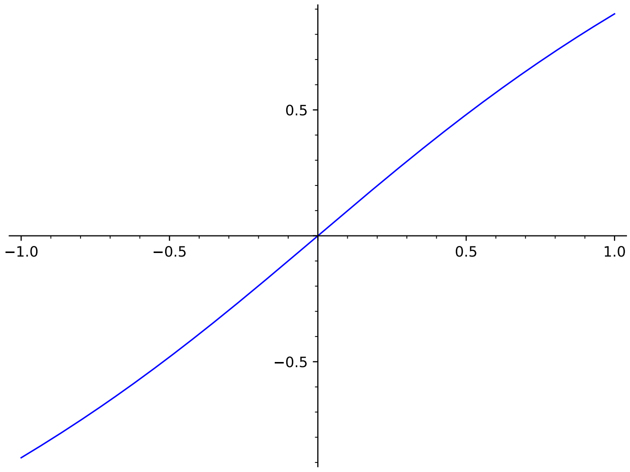
2.5.2 Calcul de la primitive de la fonction $x \mapsto \text{Arg sh}(x)$.

Vérification avec Sage

```
f(x) = asinh(x)
F(x) = integrate(f(x),x)
```

La primitive de $\operatorname{arsinh}(x) = x \operatorname{arsinh}(x) - \sqrt{x^2+1}$.

Le graphe de $\operatorname{arsinh}(x)$.



2.6 La fonction $x \mapsto \text{Arg th}(x)$.

2.6.1 Dérivée de la fonction $x \mapsto \text{Arg th}(x)$.

$$(\text{Arg th}(x))' =$$

Vérification avec Sage

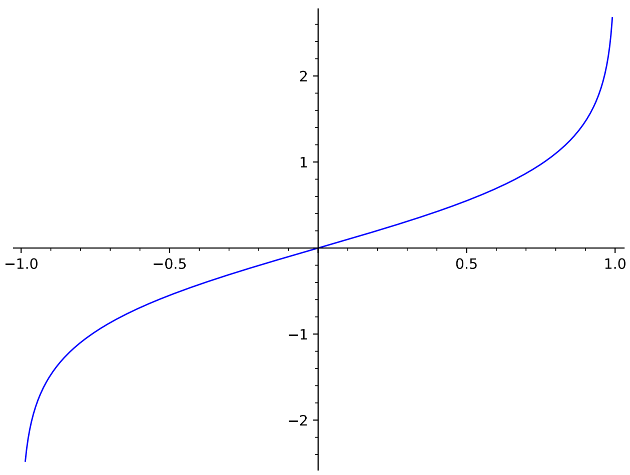
2.6.2 Calcul de la primitive de la fonction $x \mapsto \text{Arg th}(x)$.

Vérification avec Sage

```
f(x) = atanh(x)
F(x) = integrate(f(x),x)
```

La primitive de $\text{artanh}(x) = x\,\text{artanh}(x) + \frac{1}{2}\log\left(-x^2+1\right)$.

Le graphe de $\text{artanh}(x)$.



Chapitre 3

Calcul de primitives de fonctions de bases.

3.1 La fonction $x \mapsto \ln(x)$.

3.2 La fonction $x \mapsto \exp(x)$.

Chapitre 4

Calcul de quelques primitives.

4.1 Calcul d'une primitive de $x \longmapsto \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$

4.1.1 Vérification avec Sage

4.2 Calcul d'une primitive de $x \longmapsto \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$

4.2.1 Vérification avec Sage

4.3 Calcul d'une primitive de $x \longmapsto \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha^2}}$

4.3.1 Vérification avec Sage

Calcul d'une primitive de $x \longmapsto \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$ par un changement de variable puis par l'emploi d'une variable auxiliaire

Vérification avec Sage

4.4 Calcul d'une primitive de $x \longmapsto \sqrt{x^2+1}$

Vérification avec Sage

4.4.1 Calcul de la dérivée de la fonction $x \mapsto \ln(x)$.

Première Méthode

$\lim\limits_{h\mapsto 0}\dfrac{\ln(x+h)-\ln(x}{h}=\lim\limits_{h\mapsto 0}\dfrac{\ln(\frac{x+h}{x})}{h}=\lim\limits_{h\mapsto 0}\dfrac{\ln(1+X)}{x\times X}$, avec $X=\dfrac{h}{x}$.
On a donc
$\lim\limits_{h\mapsto 0}\dfrac{\ln(1+X)}{x\times X}=\dfrac{1}{x}\times\lim\limits_{h\mapsto 0}\dfrac{\ln(1+X)}{X}=\dfrac{1}{x}\times 1=\dfrac{1}{x}$

Seconde Méthode

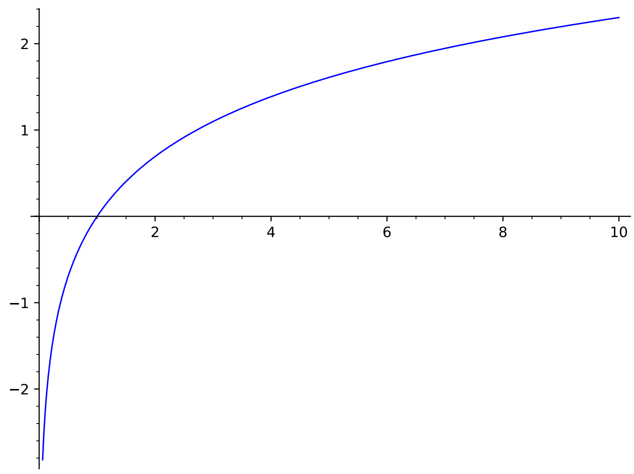
Pour ce calcul, il faut utiliser le calcul de la dérivée d'une fonction composée. On a $\exp((\ln(x))=x)$, par conséquent la dérivée de cette expression s'exprime par $\exp(\ln(x))\times(\ln(x)'=1$, d'où $(\ln(x))'=\dfrac{1}{\exp(\ln(x))}=\dfrac{1}{x}$.

Vérification avec Sage

```
f(x) = ln(x)

g(x) = diff(f(x),x,1)
```

La dérivée de $\log(x)=\dfrac{1}{x}$.
Le graphe de $\log(x)$.



On peut maintenant entreprendre le calcul de la primitive de la fonction $x\mapsto\ln(x)$.

4.4.2 Calcul de la primitive de la fonction $x \mapsto \ln(x)$.

Je pose que $u(x)$ est égal à la fonction $\ln(x)$ et $v'(x)$ est égal 1 d'où $u'(x)$ est égal à la fonction $\dfrac{1}{1+x^2}$ et $v(x)$ est égal x.
Alors on a $\displaystyle\int \ln(x)\,dx = x \times \ln(x) - \int \frac{1}{x} \times x\,dx$.

Calcul de $\displaystyle\int \frac{x}{x}\,dx$.

$\displaystyle\int \frac{x}{x}\,dx = \int 1\,dx = x$.
Finalement $\displaystyle\int \ln(x)\,dx = x \times \ln(x) - x + Cste$

Vérification avec Sage

```
f(x) = log(x)
F(x) = integrate(f(x),x)
```

La primitive de $\log(x) = x\log(x) - x$.