Chapitre 16 : POLYNÔMES

Dans tout ce chapitre, sauf précision, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Qu'est-ce qu'un polynôme ?

I.1 Définition

DÉFINITION

Un polynôme P à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un objet de la forme :

$$P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \ldots + a_{n-1} X^{n-1} + a_n X^n$$

où n est un naturel et où les a_i sont les coefficients de P.

X s'appelle l'indéterminée, et on note aussi $P = P(X)$.

L'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ décrits par l'indéterminée X est noté $\mathbb{K}[X]$.

1▶

I.2 Les lois de composition usuelles sur $\mathbb{K}[X]$

On note $A = \sum\limits_{i=0}^{+\infty} a_i X^i$ et $B = \sum\limits_{i=0}^{+\infty} b_i X^i$ deux polynômes.

• L.c. interne **addition** : $A + B = \sum\limits_{i=0}^{+\infty} (a_i + b_i) X^i$

• L.c. interne **multiplication** : $A \times B = AB = \sum\limits_{i=0}^{+\infty} c_i X^i$ avec $c_i = \sum\limits_{k=0}^{i} a_k b_{i-k} = \sum\limits_{k+l=i} a_k b_l$

• L.c. externe **multiplication par un scalaire** $\lambda \in \mathbb{K}$: $\lambda.A = \lambda A = \sum\limits_{i=0}^{+\infty} (\lambda a_i) X^i$

• L.c. interne **composition** $\circ$: $A \circ B = \sum\limits_{i=0}^{+\infty} a_i B^i$ avec en particulier $X^k \circ X^l = (X^l)^k = X^{kl}$

Les structures induites par ces lois :

1) $\boxed{(\mathbb{K}[X], +, \times) \text{ est un anneau intègre et commutatif}}$

d'éléments neutres 0 pour l'addition et 1 pour la multiplication

2) $\boxed{(\mathbb{K}[X], +, .) \text{ est un espace vectoriel sur } \mathbb{K}}$

de base $(1, X, X^2, \ldots)$ (voir plus tard)

3) $\boxed{(\mathbb{K}[X], +, ., \times) \text{ est une algèbre commutative sur } \mathbb{K}}$

Calculs usuels, pour P, Q, R des polynômes, k un naturel :

$*$ Formule du binôme dans l'anneau commutatif : $(P+Q)^k = \sum\limits_{i=0}^{k} \binom{k}{i} P^i Q^{k-i}$

$*$ $(P+\lambda Q)\circ R = P\circ R + \lambda Q\circ R$ (distributivité à droite)

$*$ $P\circ X = P(X)$, $P(-X) = P\circ(-X)$, $P(X^k) = P\circ X^k$ mais $X^k\circ P = X^k(P) = P^k$

$*$ $(P\circ Q)\circ R = P\circ(Q\circ R)$ (associativité de $\circ$)

$*$ $(PQ)\circ R = (P\circ R)\times(Q\circ R)$

$P\circ(Q+\lambda R)$ ne donne rien de simple ! !

$\circ$ ni distributive à gauche (pas de structure d'anneau avec elle) ni commutative

2▶

Pratique 1 :

1. Donner la forme développée de $(1+2X^2)(2-X)^3$

2. Donner les formes développées de $X^2\circ(1+X)$ et de $(1+X)\circ X^2$

3. Donner les formes développées de $X(1+X)$, $X\circ(1+X)$ et $(1+X)\circ X$.

4. Montrer qu'un polynôme P est pair (c'est à dire vérifie $P(-X) = P(X)$) si, et seulement si, il peut s'écrire sous la forme $Q(X^2)$ pour un polynôme Q.

I.3 Degré, coefficient dominant, valuation

Définition

a) Si $P = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i X^i$ et que $a_n \neq 0$, on dit que n est le **degré** *de P, noté $\deg(P)$, et que a_n est sont* **coefficient dominant**.

Par convention, le degré du polynôme nul est $-\infty$.

b) Un polynôme est dit **unitaire** *si son cœfficient dominant est égal à 1.*

c) La **valuation** *d'un polynôme non nul est le plus petit indice de ses cœfficients non nuls.*

Par convention, la valuation du polynôme nul est $+\infty$.

Degré et opérations : soit P et Q deux polynômes, λ un scalaire,

$*$ $\deg(P+Q) \leqslant \mathrm{Max}(\deg P, \deg Q)$ $\qquad$ $*$ $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$

$*$ $\deg(P\circ Q) = \deg(P)\times\deg(Q)$ quand P et Q sont non nuls

$*$ $\deg(\lambda P) = \deg(P)$ quand λ est non nul.

3▶

Pratique 2 :

1. Trouver les polynômes P et Q tels que $P^2 = XQ^2$.

2. Trouver les polynômes P tels que $P\circ P = P$.

3. Quel sont les polynômes inversibles ?

Définition

On note $\mathbb{K}_n[X]$ le sous-espace vectoriel des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ de degré inférieur ou égal à n, combinaisons linéaires de $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$.

4▶

I.4 Fonction polynomiale, évaluation

Définition

Soit $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ un polynôme de $\mathbb{K}[X]$.

On lui associe l'application $\left|\begin{array}{rcl} \widehat{P} : \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \end{array}\right.$

qu'on appelle fonction polynomiale associée à P.

5▶

Pratique 3 :

Quelle est la fonction polynomiale associée au polynôme $X^3 - X$ de $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X]$?

II Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$

II.1 La division euclidienne dans l'anneau $\mathbb{K}[X]$

Théorème de la division euclidienne :

Soit A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$, B non nul.

Il existe un unique couple de polynômes (Q, R) tel que :

$$A = BQ + R \quad \text{avec} \quad R = 0 \text{ ou } \deg R < \deg B$$

Q est le quotient et R le reste dans cette division de A par B.

6▶

Pratique 4 :

1. Effectuer la division euclidienne de $X^5 - 2X^2 + 1$ par $X^2 + 1$.

2. Même chose avec $X^3 - 3X^2 + 5X - 6$ et $X - 2$: en posant la division, puis sans la poser.

3. Reste de la division euclidienne de $X^{2024} + X^2 + 1$ par $(X-1)(X-2)$, puis par $(X-1)^2$.

Des définitions déjà vues, A et B désignant des polynômes de $\mathbb{K}[X]$:

a) B **divise** A, ou est un **diviseur** de A, s'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A = BQ$, ou encore si le reste de la division euclidienne de A par B est le polynôme nul.
On note $Div(A)$ l'ensemble des diviseurs de A.

b) Dans la même situation, on dit aussi que A est **multiple** de B. On note $B|A$.

L'ensemble des multiples de B est noté $B\mathbb{K}[X]$.

c) On suppose A et B non nuls. $A|B$ et $B|A$ si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $A = \lambda B$. On dit alors que les polynômes A et B sont **associés**.

7▶

II.2 PGCD

Soit A et B deux polynômes, l'un au moins non nul.

Théorème Définition :

> $*$ *On appelle* **PGCD** *de A et B tout polynôme diviseur commun à A et à B et de degré maximal.*
>
> $*$ *Les PGCD de A et B sont tous associés. On note $A \wedge B$ l'unique PGCD unitaire de A et B.*
>
> $*$ *On a alors : $Div(A) \cap Div(B) = Div(A \wedge B)$.*
>
> $*$ *Enfin, si Δ est un PGCD de A et B, il existe deux polynômes U et V tels que : $AU + BV = \Delta$ (***relation de Bezout***). Le couple (U, V) est un* **couple de Bezout** *relativement à A et B.*

8▶

Algorithme d'Euclide étendu :

1) On pose : $R_0 = A$ et $R_1 = B$,

et on pose : $(U_0, U_1) = (1, 0)$ et $(V_0, V_1) = (0, 1)$.

2) Pour $k \in \mathbb{N}$, tant que $R_{k+1} \neq 0$, on note $R_k = Q_{k+1}R_{k+1} + R_{k+2}$ la division euclidienne de R_k par R_{k+1},

et on pose : $U_k = Q_{k+1}U_{k+1} + U_{k+2}$ et $V_k = Q_{k+1}V_{k+1} + V_{k+2}$ (qui définissent U_{k+2} et V_{k+2}).

On change k en $k + 1$.

3) R_n, le dernier reste non nul, est un PGCD de A et B,

et on a : $AU_n + BV_n = R_n$, qui donne $AU'_n + BV'_n = A \wedge B$ en divisant la première relation par le coefficient dominant de R_n.

> **Pratique 5** :
>
> Calculer $A \wedge B$ et un couple de Bezout pour les exemples suivants :
>
> **1.** $A = X^4 + X^3 + X^2 + 2$, $B = X^2 - 1$ **2.** $A = X^4 - X$, $B = X^2 + X + 1$

Définition

> *A et B sont premiers entre eux si $A \wedge B = 1$.*

Théorème de Bezout :

> *A et B sont premiers entre eux si, et seulement si, il existe deux polynômes U et V tels que $AU + BV = 1$.*

9▶

THÉORÈME DE GAUSS :

> *Soit* $(A,B,C) \in \mathbb{K}[X]^3$.
>
> *Si* A *divise* BC *et* $A \wedge B = 1$, *alors* A *divise* C.

PROPOSITION

> *Soit* $(A,B,C) \in \mathbb{K}[X]^3$.
>
> *1) Si* $A \wedge B = 1$ *et* $A \wedge C = 1$ *alors* $A \wedge (BC) = 1$.
>
> *2) Si* A *et* B *divisent* C *et* $A \wedge B = 1$, *alors* AB *divise* C.

10▶

<u>Généralisation</u> : Les polynômes A_1, A_2, ..., A_n non tous nuls sont **premiers entre eux dans leur ensemble** si $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n = 1$.

C'est le cas s'ils sont premiers entre eux deux à deux, la réciproque étant fausse.

Les propriétés vues dans $\mathbb{Z}$ se généralisent alors.

II.3 PPCM

Soit A et B deux polynômes non nuls.

On appelle **PPCM** de A et B tout polynôme multiple de A et de B et de degré positif minimal. Ces PPCM sont tous associés.

On note $A \vee B$ le PPCM unitaire de A et B. On pose aussi $A \vee 0 = 0$.

Tous les multiples communs à A et B sont multiples des PPCM de A et B.

Définitions et propriétés s'étendent au PPCM de plus de deux polynômes (associativité de $\vee$).

On a la relation : $(A \vee B).(A \wedge B) = \lambda AB$ où λ est l'inverse du coefficient dominant de AB.

11▶

III Dérivation

III.1 Définitions, premières propriétés

DÉFINITION

> *Soit* $P = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i X^i \in \mathbb{K}[X]$.
>
> *Le* **polynôme dérivé** *de* P *est :* $P' = D(P) = \sum_{i=1}^{+\infty} i a_i X^{i-1}$

12▶

Dérivation et opérations : soit P et Q dans $\mathbb{K}[X]$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}$

$*$ $(\lambda P + Q)' = \lambda P' + Q'$ (linéarité de la dérivation)

$*$ $(PQ)' = P'Q + PQ'$, et plus généralement on a la

formule de Leibniz : $(PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)}$

$*$ $(P \circ Q)' = (P' \circ Q)Q'$

13▶

Pratique 6 :

1. Donner $((X-a)^k)^{(n)}$ où k et n sont des naturels , a un élément de $\mathbb{K}$.

2. Calculer $(X^2P)^{(n)}$ où $n \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$.

3. Calculer $\widehat{P^{(n)}}(0)$ où $P = \sum_{i=0}^{k} a_i X^i \in \mathbb{K}[X]$ et n et k sont des naturels.

III.2 Formule de Taylor

On cherche à décrire un polynôme P dans une autre base que $(1, X, \ldots, X^n, \ldots)$: pour un scalaire a, on veut utiliser $(1, (X-a), (X-a)^2, \ldots, (X-a)^n, \ldots)$.

Théorème (formule de Taylor) :

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

Alors : $P = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\widehat{P^{(i)}}(a)}{i!}(X-a)^i$

De manière équivalente : $P(a+X) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\widehat{P^{(i)}(a)}}{i!} X^i$

14▶

Pratique 7 :

1. Appliquer la formule à $P = 1 + X^2 + X^3$ en 1.

2. Trouver le reste de la division de $X^5 + 1$ par $(X-1)^3$.

IV Racines

IV.1 Définition, propriétés

Définition

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ *et* $\alpha \in \mathbb{K}$.

α *est une* **racine** *(ou un* **zéro***) de* P *si* $\widehat{P}(\alpha) = 0$.

Proposition

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ *et* $\alpha \in \mathbb{K}$.

α *est racine de* P *si, et seulement si,* $(X-\alpha)$ *divise* P.

15▶

Pratique 8 :

Montrer que 2 est racine de $X^3 - 3X^2 + 4$, et donner la factorisation par $X - 2$.

Généralisation : si α_1, α_2, ...,α_k sont des racines distinctes deux à deux de P, alors $\prod_{i=1}^{k}(X-\alpha_i)$ divise P.

IV.2 Ordre de multiplicité d'une racine

16▶

DÉFINITION

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non nul et $\alpha \in \mathbb{K}$.

*L'***ordre de multiplicité** *de la racine α de P est le plus grand naturel k tel que $(X-\alpha)^k$ divise P.*

17▶

THÉORÈME

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, tel que, pour $i \in [\![1,k]\!]$, α_i soit racine de P d'ordre de multiplicité m_i.

Alors il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = \left(\prod_{i=1}^{k} (X-\alpha_i)^{m_i}\right) Q$ et, $\forall i \in [\![1,k]\!]$, $\widehat{Q}(\alpha_i) \neq 0$.

En particulier, un polynôme non nul P a au plus $\deg(P)$ racines comptées avec leurs ordres de multiplicité.

Seul le polynôme nul peut admettre une infinité de racines, c'est le cas lorsque $\mathbb{K}$ est infini.

18▶

Pratique 9 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ les polynômes $X^n - 1$ et $1 + X + X^2 + \ldots + X^{n-1}$.

IV.3 Polynôme et fonction polynomiale associée

PROPOSITION

Si $\mathbb{K}$ est infini (en particulier si $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), alors le morphisme d'anneaux $P \mapsto \widehat{P}$ défini de $\mathbb{K}[X]$ vers $\mathbb{K}^{\mathbb{K}}$ est injectif.

On peut donc dans ce cas « identifier » P et $\widehat{P}$ et ne garder que la notation P.

19▶

IV.4 Critère de multiplicité

THÉORÈME

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul, $\alpha \in \mathbb{K}$ et m un naturel tel que $1 \leqslant m \leqslant \deg(P)$.

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) α est racine de P d'ordre de multiplicité m
2) $(X-\alpha)^m$ divise P et $(X-\alpha)^{m+1}$ ne divise pas P
3) $P(\alpha) = 0$ et α racine de P' d'ordre de multiplicité $m-1$
4) $\forall k \in [\![0, m-1]\!]$, $P^{(k)}(\alpha) = 0$ et $P^{(m)}(\alpha) \neq 0$

20▶

Pratique 10 :

Quelle est la multiplicité de 1 dans le polynôme $X^4 - 2X^3 + 2X^2 - 2X + 1$?

IV.5 Le théorème de D'Alembert-Gauss

Théorème de d'Alembert (1717-1783) et Gauss (1777-1855) :

> *Tout polynôme complexe non constant admet au moins une racine.*
>
> *Par conséquent, tout polynôme complexe non nul est scindé sur $\mathbb{C}$ et le nombre de ses racines, comptées avec leurs ordres de multiplicité, est égal à son degré.*
>
> *On dit que $\mathbb{C}$* **est algébriquement clos**.

21►

Pratique 11 :

Soit n un naturel, $n \geqslant 2$. Le polynôme X^2+1 divise-t-il $X^n + X$?

IV.6 Relations coefficients-racines

Tout polynôme complexe P non nul (ou scindé sur $\mathbb{K}$) de degré n peut s'écrire de deux façons :

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = a_n \prod_{k=1}^{n} (X - x_k)$$

où les x_k sont ses racines éventuellement répétées avec leurs ordres de multiplicité.

Par unicité de l'écriture développée :

$$\left|\begin{array}{l}
\sigma_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \sum\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} x_k = -a_{n-1}/a_n \\
\sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n = \sum\limits_{1 \leqslant k_1 < k_2 \leqslant n} x_{k_1}x_{k_2} = a_{n-2}/a_n \\
\sigma_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \ldots + x_1x_3x_4 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = \sum\limits_{1 \leqslant k_1 < k_2 < k_3 \leqslant n} x_{k_1}x_{k_2}x_{k_3} = -a_{n-3}/a_n \\
\vdots \\
\sigma_{n-1} = x_1x_2\ldots x_{n-1} + \ldots + x_2x_3\ldots x_n = \sum\limits_{1 \leqslant k_1 < k_2 < \ldots < k_{n-1} \leqslant n} x_{k_1}x_{k_2}\ldots x_{k_{n-1}} = (-1)^{n-1}a_1/a_n \\
\sigma_n = \prod\limits_{k=1}^{n} x_k = (-1)^n a_0/a_n
\end{array}\right.$$

Ou encore pour $1 \leqslant p \leqslant n$: $\boxed{\sigma_p = \sum\limits_{1 \leqslant k_1 < k_2 < \ldots < k_p \leqslant n} x_{k_1}x_{k_2}\ldots x_{k_p} = (-1)^p \dfrac{a_{n-p}}{a_n}}$

22►

⚠ Ne fonctionne dans $\mathbb{K}$ qu'avec un polynôme scindé sur $\mathbb{K}$! !

Pratique 12 :

1. Donner la somme, la somme des produits de deux racines et le produit des racines complexes pour : $P = 2X^4 - 2X^3 + 3X^2 - X + 5$.

2. Trouver a, b et c tels que $\begin{cases} a+b+c=1 \\ a^2+b^2+c^2=-1 \\ abc=1 \end{cases}$

23▶

V Décomposition d'un polynôme en produit de facteurs irréductibles

V.1 Polynômes irréductibles

Définition

> *Un polynôme non constant de $\mathbb{K}[X]$ est* **irréductible** *si les seuls diviseurs de P sont les polynômes associés à P et à 1.*

24▶

Théorème de factorisation irréductible :

> *Tout polynôme de $\mathbb{K}[X]$ non nul s'écrit de manière unique à l'ordre près des facteurs comme le produit d'un élément de $\mathbb{K}$ et de polynômes irréductibles unitaires de $\mathbb{K}[X]$.*

25▶

Pratique 13 :

1. Donner les factorisations de X^2+1 et de X^3-8 dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

2. Factoriser $X^3 - 4X^2 + 5X - 2$ et $X^4 - 4X^3 + 3X^2 + 4X - 4$. Donner leurs PGCD et PPCM.

V.2 Décomposition dans $\mathbb{C}[X]$

Proposition

> *Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1.*
>
> *Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ est scindé (sur $\mathbb{C}$).*

26▶

V.3 Décomposition dans $\mathbb{R}[X]$

Proposition

> *Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{C}$.*
> *Si α est racine de P, alors $\bar{\alpha}$ l'est aussi, et avec le même ordre de multiplicité.*

27▶

Proposition

> *Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 à discriminant strictement négatif.*

28▶

> **Pratique 14** :
>
> Décomposer X^3+1 et X^4+1 dans $\mathbb{R}[X]$.

VI Polynômes d'interpolation de Lagrange

Étant donnés $n+1$ éléments distincts deux à deux de $\mathbb{K}$, notés $(a_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$, et $n+1$ éléments de $\mathbb{K}$ notés $(\lambda_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$, il existe un unique polynôme P_L de $\mathbb{K}[X]$ et de degré inférieur ou égal à n tel que $P_L(a_i)=\lambda_i$ pour $i\in[\![0,n]\!]$. C'est le **polynôme d'interpolation de Lagrange associé au système de points** $\{(a_i,\lambda_i)\}_{i\in[\![0,n]\!]}$.

Par ailleurs :

$$P_L=\sum_{i=0}^{n}\lambda_i L_i \quad \text{où} \quad L_i=\frac{\prod\limits_{j\in[\![0,n]\!],j\neq i}(X-a_j)}{\prod\limits_{j\in[\![0,n]\!],j\neq i}(a_i-a_j)} \quad \text{vérifie} \quad L_i(a_j)=\delta_{i,j} \quad \text{et} \quad \sum_{i=0}^{n}L_i=1$$

29▶

> **Pratique 15** :
>
> Écrire le polynôme de degré $\leqslant 2$ qui prend les valeurs 1, 2 et -1 en 0, 1 et 2 respectivement. Quels sont les autres polynômes vérifiant ces conditions ?

VII Fractions rationnelles

VII.1 Construction

Définition

> *$\mathbb{K}(X)$ est l'ensemble des éléments notés $\dfrac{A}{B}$ où A et $B\neq 0$ sont deux éléments de $\mathbb{K}[X]$, avec la condition :*
>
> $$\forall (A,B,C,D)\in\mathbb{K}[X]^4, B\neq 0, D\neq 0,\ \frac{A}{B}=\frac{C}{D}\iff AD=BC$$
>
> *Les éléments de $\mathbb{K}(X)$ sont appelées les fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{K}$.*

Désormais, l'écriture $\dfrac{A}{B}$ sous-entend $(A,B)\in\mathbb{K}[X]^2$ et $B\neq 0$.

30▶

Théorème Définition :

Le corps des fractions $(\mathbb{K}(X), +, \times)$ *est défini par les lois*

d'addition : $\dfrac{A}{B} + \dfrac{C}{D} = \dfrac{AD+BC}{BD}$

et de multiplication : $\dfrac{A}{B} \times \dfrac{C}{D} = \dfrac{AC}{BD}$

$\mathbb{K}[X]$ *s'identifie à un sous-anneau de* $\mathbb{K}(X)$*, via l'injection :* $P \mapsto \dfrac{P}{1}$

31▶

Définition

$*$ **Forme irréductible** *:* $\dfrac{A}{B}$ *avec* A *et* B *premiers entre eux.*

$*$ **Degré** *:* $\deg(\dfrac{A}{B}) = \deg A - \deg B$ *(et* $-\infty$ *si* $A = 0$*).*

$*$ **Fonction rationnelle associée à** $\dfrac{A}{B}$ **irréductible** *: c'est* $x \mapsto \dfrac{A(x)}{B(x)}$ *définie sur* $\mathbb{K}$ *privé des racines de* B*.*

$*$ **Zéro de multiplicité** p **de** $\dfrac{A}{B}$ **irréductible** *: toute racine de* A *de multiplicité* p *(simple pour* $p = 1$*, double pour* $p = 2$*, etc.)*

$*$ **Pôle de multiplicité** p **de** $\dfrac{A}{B}$ **irréductible** *: toute racine de* B *de multiplicité* p *(simple pour* $p = 1$*, double pour* $p = 2$*, etc.)*

32▶

VII.2 Décomposition (ou réduction) en éléments simples

Théorème Définition :

Pour toute fraction rationnelle $F = \dfrac{A}{B}$*, il existe un unique polynôme* E *et une unique fraction rationnelle* R *tels que* $F = E + R$*, avec* $R = 0$ *ou* $\deg(R) < 0$*.*

E *s'appelle la partie entière de* F *: c'est le quotient de la division euclidienne de* A *par* B*.*

33▶

Théorème de la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$:

Soit $F \in \mathbb{C}(X)$ *de partie entière* E*.*

Alors F *s'écrit de manière unique à l'ordre près des termes comme somme de sa partie entière et des fractions rationnelles de la forme* $\dfrac{\alpha_k}{(X-a)^k}$ *où*

a *décrit l'ensemble des pôles complexes de* F*,*

k *décrit l'intervalle de naturels compris entre* 1 *et l'ordre de multiplicité du pôle* a *de* F*,*

les α_k *sont des complexes.*

34▶

Théorème de la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$:

> *Soit $F \in \mathbb{R}(X)$ de partie entière E.*
>
> *Alors F s'écrit de manière unique à l'ordre près des termes comme somme de :*
>
> $*$ *sa partie entière,*
>
> $*$ *des fractions rationnelles de la forme $\dfrac{\alpha_k}{(X-a)^k}$ où*
>
> *a décrit l'ensemble des pôles réels de F,*
>
> *k varie entre 1 et l'ordre de multiplicité du pôle a de F,*
>
> *les α_k sont des réels ;*
>
> $*$ *des fractions rationnelles de la forme $\dfrac{\beta_k X + \gamma_k}{(X^2+bX+c)^k}$ où*
>
> *$X^2+bX+c = (X-d)(X-\bar{d})$ décrit l'ensemble des polynômes irréductibles unitaires de degré 2 associés aux pôles complexes non réels d de F,*
>
> *k varie entre 1 et l'ordre de multiplicité du pôle d,*
>
> *les β_k et γ_k sont des réels.*

35▶

Proposition

> *Soit a un pôle simple de la fraction irréductible $\dfrac{A}{B}$ de partie polaire associée $\dfrac{\alpha}{X-a}$ dans sa décomposition en éléments simples.*
>
> *Alors : $\alpha = \dfrac{A(a)}{B'(a)}$*

36▶

Pratique 16 :

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\dfrac{X^n}{X^n-1} = 1 + \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \dfrac{\omega}{X-\omega}$

2. Donner la décomposition en éléments simples de : $\dfrac{P'}{P}$, où $P \in \mathbb{K}[X]$, $P \neq 0$.

SAVOIR...

(1) *... qu'on peut décrire ou rechercher un polynôme sous plusieurs formes : décrit dans une base (écriture algébrique « développée », formule de Taylor pour changer de base), ou factorisée (écriture arithmétique), voire scindée*

2) *... utiliser la division euclidienne, en vue d'une factorisation ou de la recherche de PGCD à l'aide de l'algorithme d'Euclide*

3) *... reconnnaître un problème d'interpolation et le résoudre grâce aux polynômes de Lagrange*

4) *... utiliser les relations coefficients-racines pour un polynôme scindé, notamment pour déduire sa dernière racine connaissant les autres*

5) *... parfaitement la forme des réductions en éléments simples d'une fraction rationnelle sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$ ainsi que les techniques de leurs déterminations pratiques*

THÉORÈMES et PROPOSITIONS...	**... OUTILS pour ...**
Théorème de la division euclidienne	*Base de l'arithmétique des polynômes*
Théorème définition du pgcd et théorème de Bezout	*Calculs de pgcd, polynômes premiers entre eux*
Théorème de Gauss	*Diviseurs d'un produit*
Proposition sur produits de diviseurs	*Produits de diviseurs*
Formule de Leibniz	*Calcul de dérivée n-ième d'un produit*
Formule de Taylor	*Lien polynôme-dérivées, changement de base*
Théorème de factorisation par les racines	*Factorisation à partir des racines*
Théorème de critère de multiplicité d'une racine	*Factorisation par évaluations des dérivées*
Théorème de D'Alembert-Gauss	*Existence d'une racine complexe pour tout polynôme complexe*
Théorèmes de factorisation irréductible sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$	*Existence et unicité de la forme factorisée sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$*
Théorèmes de décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$	*Réduire une fraction, calculs de primitives*