Chapitre 4 : ENSEMBLES DE NOMBRES

I L'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels

L'ensemble $\mathbb{N} = \{0\,;1\,;2\,;\ldots\}$ des entiers naturels est muni de deux lois de composition internes $+$ et $\times$ et d'une relation d'ordre totale $\leqslant$ compatible avec ces lois.

a) Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément

b) Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément

c) $\mathbb{N}$ n'admet pas de plus grand élément.

1▶

Le théorème du principe de récurrence s'appuie sur ces propriétés.

II L'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs

L'ensemble $\mathbb{Z} = \{\ldots\,;-3\,;-2\,;-1\,;0\,;1\,;2\,;3\,;4\,;\ldots\}$ des entiers relatifs est muni de deux lois de composition internes $+$ et $\times$ et d'une relation d'ordre $\leqslant$ compatible avec elles, qui prolongent celles de $\mathbb{N}$ qu'il contient.

$*$ $(\mathbb{Z},+)$ est un groupe commutatif (ou abélien) car :

a) $+$ est associative et commutative

b) 0 est élément neutre pour $+$

c) tout élément a de $\mathbb{Z}$ admet un symétrique $(-a)$ pour $+$

$*$ La loi $\times$ est associative, commutative, admet 1 pour élément neutre, et est distributive par rapport à $+$

On dit que $\boxed{(\mathbb{Z},+,\times) \text{ est un anneau commutatif.}}$

Théorème

> *a) Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{Z}$ admet un plus grand élément*
>
> *b) Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{Z}$ admet un plus petit élément*
>
> *c) $\mathbb{Z}$ n'a pas de plus grand élément ni de plus petit élément.*

2▶

III L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels

L'ensemble $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z} \text{ et } q \in \mathbb{Z}^*\}$ des nombres rationnels est muni de deux lois de composition internes $+$ et $\times$ et d'une relation d'ordre total $\leqslant$ compatible avec ces lois et qui prolongent celles de $\mathbb{Z}$ qu'il contient.

$*$ $(\mathbb{Q},+,\times)$ est un anneau commutatif

$*$ Tout rationnel non nul $\frac{p}{q}$ admet un inverse pour $\times$ qui est $\frac{q}{p}$

On dit que $\boxed{(\mathbb{Q},+,\times) \text{ est un corps commutatif.}}$

3▶

IV L'ensemble $\mathbb{D}$ des nombres décimaux

DÉFINITION

$\mathbb{D} = \{ \frac{a}{10^n} \mid a \in \mathbb{Z}$ *et* $n \in \mathbb{N}\}$ *est l'ensemble des nombres décimaux.*

1/3 est rationnel mais n'est pas un décimal !

$\boxed{\mathbb{D} \text{ est un sous-anneau de } (\mathbb{Q}, +, \times)}$

4▶

V L'ensemble $\mathbb{R}$ des réels

V.1 Structure algébrique

L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels est muni de deux lois de composition internes $+$ et $\times$ et d'une relation d'ordre total $\leqslant$ compatible avec ces lois, qui prolongent celles de $\mathbb{Q}$ qu'il contient.

$\boxed{(\mathbb{R}, +, \times) \text{ est un corps commutatif.}}$

5▶

Pour les inclusions : $\boxed{\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}}$

V.2 Inégalités : régles de calculs

a, b, c et d désignent des réels, n un naturel.

$a \leqslant b \iff -b \leqslant -a$ (par définition de $\leqslant$)	$a < b \iff -b < -a$
$a \leqslant b \implies a + c \leqslant b + c$ (compatibilité avec $+$)	$a < b \implies a + c < b + c$
$\boxed{\begin{array}{l}(a \leqslant b \text{ et } c \geqslant 0) \implies ac \leqslant bc \\ (a \leqslant b \text{ et } c \leqslant 0) \implies bc \leqslant ac\end{array} \quad \text{(compatibilité avec .)}}$	$\boxed{\begin{array}{l}(a < b \text{ et } c > 0) \implies ac < bc \\ (a < b \text{ et } c < 0) \implies bc < ac\end{array}}$
$(0 \leqslant a \leqslant b \text{ et } 0 \leqslant c \leqslant d) \implies 0 \leqslant ac \leqslant bd$	$(0 \leqslant a < b \text{ et } 0 \leqslant c < d) \implies 0 \leqslant ac < bd$
$(0 \leqslant a \leqslant b) \implies 0 \leqslant a^n \leqslant b^n$	$(0 \leqslant a < b) \implies 0 \leqslant a^n < b^n$
$\boxed{0 < a \leqslant b \implies 0 < \frac{1}{b} \leqslant \frac{1}{a}}$	$\boxed{0 < a < b \implies 0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}}$

Attention aux renversements d'inégalités (produit par un négatif, passage à l'inverse) ! !

6▶

V.3 Intervalles de $\mathbb{R}$

DÉFINITION

> *a et b désignent deux réels tels que $a \leqslant b$. Les types d'intervalles de $\mathbb{R}$ sont les suivants :*
>
> $$\left.\begin{array}{l}]-\infty,+\infty[= \mathbb{R} \text{ et le vide } \varnothing \\ ]a,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \\ ]a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\} \\ ]-\infty,a[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\} \end{array}\right\} \text{intervalles dits « ouverts »}$$
>
> $$\left.\begin{array}{l}]-\infty,+\infty[= \mathbb{R}, \text{ et le vide } \varnothing \\ [a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\} \text{(segment)} \\ [a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x\} \\ ]-\infty,a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant a\} \end{array}\right\} \text{intervalles dits « fermés »}$$
>
> $$\left.\begin{array}{l} [a,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\} \\ ]a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\} \end{array}\right\} \text{intervalles dits « semi-fermés » ou « semi-ouverts »}$$

7▶

Pratique 1 :

1. Représenter différents intervalles des différents types sur la droite réelle.

2. Quels sont ceux qui sont majorés ? minorés ? bornés ? admettent un min ? un max ?

DÉFINITION

> *Soit A une partie de $\mathbb{R}$, et f une fonction d'un ensemble E vers $\mathbb{R}$.*
>
> *Majorer A, c'est en donner un majorant. Majorer f, c'est majorer $f(E)$.*
> *Minorer A, c'est en donner un minorant. Minorer f, c'est minorer $f(E)$.*
> *Encadrer A, c'est en donner un minorant et un majorant. Encadrer f, c'est encadrer $f(E)$.*
>
> *Dans chaque cas, cela revient à donner un intervalle dans lequel A (ou $f(E)$) est inclus.*

V.4 $\mathbb{R}$ est archimédien

THÉORÈME : *$\mathbb{R}$ est archimédien :* $\forall x \geqslant 0,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists n \in \mathbb{N},\ n\varepsilon \geqslant x$

8▶

V.5 Une distance sur $\mathbb{R}$

Définition

On définit la fonction **valeur absolue** *par :* $\begin{array}{rcl} |\ | : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases} = \operatorname{Max}(x, -x) \end{array}$

Elle permet de définir une distance d *sur* $\mathbb{R}$ *en posant :* $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $d(x,y) = |y-x|$

Propriétés

Soit x, y et z des réels :

(1) $|x| \geqslant 0$, en particulier $d(x,y) \geqslant 0$ *(positivité)*

(2) $|x-y| = |y-x|$, en particulier $d(x,y) = d(y,x)$ *(symétrie)*

(3) $|x| = 0 \iff x = 0$, en particulier $d(x,y) = 0 \iff x = y$ *(séparation)*

(4) $|x+y| \leqslant |x| + |y|$, ou $d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$ *(inégalité triangulaire)*
(égalité ssi x et y de même signe)

(5) $||x| - |y|| \leqslant |x \pm y|$, ou $|d(x,y) - d(y,z)| \leqslant d(x,z)$ *(2e inégalité triangulaire)*

(6) $|xy| = |x||y|$, et pour x non nul, $|\frac{y}{x}| = \frac{|y|}{|x|}$

9▶

Pratique 2 :

1. Vérifier que pour a et b réels : $|a|^2 = a^2$; $\sqrt{a^2} = |a|$; $|a| \leqslant b \iff -b \leqslant a \leqslant b$

$$\operatorname{Max}(a,b) = \frac{a+b+|a-b|}{2} \quad \text{et} \quad \operatorname{Min}(a,b) = \frac{a+b-|a-b|}{2}$$

2. Vérifier que pour x, a et r réels : $|a-b| \leqslant r \iff b-r \leqslant a \leqslant b+r$

Montrer que : $\{x \in \mathbb{R} \mid |x-a| \leqslant r\} = [a-r, a+r]$, $\{x \in \mathbb{R} \mid |x-a| < r\} =]a-r, a+r[$

Comment décrire $]a,b[$ et $[a,b]$ de façon semblable ?

3. Montrer que pour tout x réel : $x = 0 \iff (\forall \varepsilon > 0,\ |x| < \varepsilon)$

4. Soit $(a_i)_{i \in [1,n]}$ une famille de réels. Comment montrer que : $|\prod_{i=1}^{n} a_i| = \prod_{i=1}^{n} |a_i|$?

5. Soit $(a_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ et $(\theta_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ deux familles de réels. Montrer que : $|\sum_{i=1}^{n} a_i \cos(\theta_i)| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |a_i|$

V.6 Comment établir des inégalités

Les lettres a, b, c désignent des réels.

• Majorer (resp. minorer) une somme $a+b$: on majore (resp. minore) a et/ou b.

• Encadrer le module d'une somme : $||a| - |b|| \leqslant |a+b| \leqslant |a| + |b|$. (inégalités triangulaires)

• Majorer ou minorer un produit : attention aux signes ! Se ramener à des facteurs positifs.

• Majorer (resp. minorer) un produit ab de facteurs positifs : on majore (resp. minore) a et/ou b par des termes positifs.

• Majorer (resp. minorer) un quotient a/b de termes strictement positifs : on majore (resp. minore) a et/ou **on minore (resp. majore)** b par des termes strictement positifs.

• Estimer une fonction monotone sur un segment $I = [a, b]$ avec $a \leqslant b$:
f croissante : $\forall x \in I,\ f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b)$
f décroissante : $\forall x \in I,\ f(b) \leqslant f(x) \leqslant f(a)$

• Si cela ne permet pas de conclure, il reste des **jokers** :

1) Identité remarquable : $ab \leqslant |ab| \leqslant \dfrac{a^2+b^2}{2}$

2) Passer par une étude de fonction (recherche de maximum ou minimum local)

3) Théorème (Inégalité de Cauchy-Schwarz) :

> *Soit $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $(y_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ deux familles de réels. Alors :* $|\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i| \leqslant \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}.\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2}$

10▶

Pratique 3 :

1. Encadrer $(a+b)c$ pour $a \in [1, 2]$, $b \in [-2, 1]$ et $c \in [-1, 3]$
(commencer par $c \in [0, 3]$ puis $c \in [-1, 0]$).

2. Montrer que pour tout x dans $[1, 2]$ on a : $0 \leqslant \dfrac{x^3-x}{x^2+1} \leqslant \dfrac{7}{2}$

3. Montrer : $\forall x \in \mathbb{R},\ x(1-x) \leqslant 1/4$

4. Montrer par deux méthodes que, pour a et b réels : $|a+b| \leqslant \sqrt{2}.\sqrt{a^2+b^2}$

5. Soit $(a_i)_{i\in[1,n]}$ et $(\theta_i)_{i\in[1,n]}$ deux familles de réels. Montrer que $|\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \cos(\theta_i)| \leqslant \sqrt{n}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2}$

V.7 La droite numérique achevée $\overline{\mathbb{R}}$

Définition

> *On appelle « droite numérique achevée » l'ensemble $\overline{\mathbb{R}}$ obtenu en adjoignant à $\mathbb{R}$ deux nouveaux éléments $-\infty$ et $+\infty$ et en prolongeant la relation d'ordre $\leqslant$ usuelle sur $\mathbb{R}$ en posant :*
> $$\forall x \in \mathbb{R},\ -\infty < x < +\infty \qquad \text{et} \qquad -\infty < +\infty$$

11▶

V.8 La propriété fondamentale de la borne supérieure

Rappels : Soit A une partie d'un ensemble ordonné $(E, \leqslant)$.

La borne supérieure de A est le plus petit élément s'il existe de l'ensemble des majorants de A.

On la note alors $\boxed{\text{Sup}\, A\text{, c'est « le plus petit des majorants de } A\text{ »}}$.

La borne inférieure de A est le plus grand élément s'il existe de l'ensemble des minorants de A.

On la note alors $\boxed{\text{Inf}\, A\text{, c'est « le plus grand des minorants de } A\text{ »}}$.

Si A a un plus grand élément, alors $\text{Sup}\, A = \text{Max}\, A$ (la borne supérieure est *atteinte* dans A).
Si A a un plus petit élément, alors $\text{Inf}\, A = \text{Min}\, A$ (la borne inférieure est *atteinte* dans A).

12▶

Propriété fondamentale de $\mathbb{R}$:

Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée admet une borne supérieure.

Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée admet une borne inférieure.

13▶

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et M un réel. **Pour montrer** $\text{Sup}\, A \leqslant M$ **:**

1) on écrit : « Soit $x \in A$ » et on montre que $x \leqslant M$; on a donc : $\forall x \in A,\ x \leqslant M$ (1)

2) M majore A, donc $\text{Sup}\, A$ existe ; or c'est le plus petit majorant de A, donc $\text{Sup}\, A \leqslant M$: on dit que l'*on est passé au* Sup *à gauche* dans l'inégalité (1).

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et m un réel. **Pour montrer** $\text{Inf}\, A \geqslant m$ **:**

1) on écrit : « Soit $x \in A$ » et on montre que $x \geqslant m$; on a donc $\forall x \in A,\ x \geqslant m$ (2)

2) m minore A, donc $\text{Inf}\, A$ existe, qui est le plus grand minorant de A donc $\text{Inf}\, A \geqslant m$: on dit que l'*on est passé à l'*Inf *à droite* dans l'inégalité (2).

Pratique 4 :

1. Pour $a < b$, soit $I = [a, b[$. Donner $\text{Sup}\, I$ et $\text{Inf}\, I$. Que dire de $\text{Max}\, I$ et de $\text{Min}\, I$?

2. Soit A une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$.
Montrer que $\text{Inf}\, A \leqslant \text{Sup}\, A$, avec égalité si, et seulement si, A est un singleton.

3. Soit $A = \{\dfrac{t^2 - 1}{1 + t^2} \mid t \in \mathbb{R}\}$. Montrer que $\text{Sup}\, A \leqslant 1$ et $\text{Min}\, A = -1$.

V.9 Deux caractérisations de la borne supérieure (resp. inférieure)

Théorème *(caractérisation en ε)* :

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

$*$ *A admet b pour borne supérieure si et seulement si :* $\begin{cases} \forall a \in A,\ a \leqslant b & \text{et} \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists\, a \in A, b - \varepsilon < a \leqslant b \end{cases}$

$*$ *A admet b pour borne inférieure si et seulement si :* $\begin{cases} \forall a \in A,\ a \geqslant b & \text{et} \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists\, a \in A, b \leqslant a < b + \varepsilon \end{cases}$

Théorème *(caractérisation séquentielle)* :

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

$*$ A admet b pour borne supérieure si et seulement si b majore A et il existe une suite d'éléments de A qui converge vers b.

$*$ A admet b pour borne inférieure si et seulement si b minore A et il existe une suite d'éléments de A qui converge vers b.

14▸

Pratique 5 :

1. Reprendre $A = \{\dfrac{t^2-1}{1+t^2} \mid t \in \mathbb{R}\}$ et montrer que $\operatorname{Sup} A = 1$. Que dire de $\operatorname{Max} A$?

2. Soit A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$.
Montrer que $A+B = \{a+b \mid a \in A, b \in B\}$ est majorée, et que $\operatorname{Sup}(A+B) = \operatorname{Sup} A + \operatorname{Sup} B$.

3. Soit $A = \{\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n} \mid (m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2\}$. Donner $\operatorname{Sup} A$ et $\operatorname{Inf} A$. Que dire de $\operatorname{Max} A$ et $\operatorname{Min} A$?

V.10 Caractérisation des intervalles de $\mathbb{R}$

Définition

Une partie I de $\mathbb{R}$ est **convexe** *si pour tout a et b dans I le segment $[a,b]$ est inclus dans I.*

Théorème (Caractérisation des intervalles de $\mathbb{R}$) :

Les convexes de $\mathbb{R}$ sont exactement les intervalles de $\mathbb{R}$.

15▸

V.11 Répartitions et approximations

• $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Z}$: **la fonction partie entière**.

Théorème Définition :

Soit x un réel.

$*$ L'ensemble des entiers relatifs inférieurs ou égaux à x forme une partie de $\mathbb{Z}$ non vide majorée.
Son plus grand élément s'appelle partie entière de x, notée : $\lfloor x \rfloor = \operatorname{Max}\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leqslant x\}$

$*$ $\lfloor x \rfloor$ est l'unique entier relatif tel que : $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$

⚠ $\lfloor 3.2 \rfloor = 3$ mais $\lfloor -3.2 \rfloor = -4$!

16▸

Pratique 6 :

1. Tracer le graphe de $\lfloor\ \rfloor$. Monotonie ?

2. Calculer $\lfloor -x \rfloor$ en fonction de $\lfloor x \rfloor$.

3. Encadrer $\lfloor x \rfloor$ à l'aide de x.

• $\mathbb{R}$ et $\mathbb{D}$: **approximation décimale d'un réel**.

PROPOSITION

Soit x un réel et n un naturel.

Les nombres décimaux $d_n^- = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ et $d_n^+ = d_n^- + 10^{-n}$ donnent des approximations de x à 10^{-n} près respectivement par défaut et par excès :

$$d_n^- \leqslant x < d_n^+, \qquad 0 \leqslant x - d_n^- < 10^{-n}, \qquad 0 < d_n^+ - x \leqslant 10^{-n}$$

17▶

• $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}$: $\mathbb{Q}$ **est dense dans** $\mathbb{R}$.

THÉORÈME

Entre deux réels distincts quelconques existe un rationnel.

Tout réel est limite d'une suite de rationnels.

18▶

• $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (ensemble des « irrationnels ») : $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ **est dense dans** $\mathbb{R}$.

THÉORÈME

Entre deux réels distincts quelconques existe un irrationnel.

Tout réel est limite d'une suite d'irrationnels.

19▶

Pratique 7 :

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vérifient pour tous x et y réels :

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad \text{et} \qquad |f(x)| \leqslant |x|$$

VI Le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes

• $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps qui contient $\mathbb{R}$, les deux lois prolongent celles de $\mathbb{R}$.

• Le gain : $\mathbb{C}$ est algébriquement clos (tout polynôme de degré $\geqslant 1$ admet une racine)

• La contre-partie : la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ ne peut pas se prolonger en une relation compatible avec les lois.

Voir le chapitre suivant.

SAVOIR...

(1) *... manipuler les inégalités dans $\mathbb{R}$ grâce aux règles de calculs*

(2) *... établir des majorations / minorations par méthodes élémentaires*

(3) *... les inégalités plus « difficiles » : inégalité remarquable pour un produit, Cauchy-Schwarz*

(4) *... faire la différence entre* Sup *et* Max, Inf *et* Min, *et savoir quand ces quantités sont définies suivant le cadre $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$*

(5) *... établir des inégalités faisant intervenir une borne sup ou une borne inf (passage au sup à gauche, passage à l'inf à droite)*

(6) *... encadrer un réel à l'aide de sa partie entière et savoir encadrer une partie entière à partir de son argument*

(7) *... les résultats d'inclusion et de densité entre les ensembles de nombres*

THÉORÈMES et PROPOSITIONS	**... outils pour ...**
Inégalité de Cauchy-Schwarz	*Inégalité difficiles à établir*
Propriété fondamentale de $\mathbb{R}$	*Existence d'une borne supérieure ou inférieure*
Caractérisation séquentielle de la borne supérieure	*Calcul d'un* Sup *ou d'un* Inf
Théorème définition de la partie entière	*Résolution exercices avec partie entière*
Densité de $\mathbb{Q}$ (et de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$) dans $\mathbb{R}$	*Extensions de propriétés de $\mathbb{Q}$ à $\mathbb{R}$*