►► 3 : ENSEMBLES - APPLICATIONS

Pratique 1 :

1. En extension : $\{-1;1\}$. En compréhension : $\{\, z \in \mathbb{C} \mid z^2 = 1 \,\}$.

2. En extension : $\{\, k^2 \mid k \in \mathbb{N} \,\}$. En compréhension : $\{\, n \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N}, n = k^2 \,\}$.

3. 2 appartient bien à E puisqu'est réel et vérifie $(2-1)(2-3) = -1 < 0$. On a aussi : $E =]1,3[$.

1►

∗ Pour montrer l'égalité entre deux ensembles, on montre généralement la double inclusion.

∗ Éviter le mot "contenir" qui est équivoque puisqu'on dit : "une partie contient (possède) un élément" et aussi : "une partie contient une autre partie"...

Pratique 2 :

1. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, $2/3 \in \mathbb{Q}$, $\mathrm{i} \notin \mathbb{R}$, $\mathbb{Z} \not\subset \mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z} \supset \mathbb{N}$

2. $\varnothing \subset E$ (c'est vrai pour pour tout ensemble), $\varnothing \notin E$, $4 \notin E$, $\{3\} \notin E$, $3 \in E$, $\{3;4\} \not\subset E$ et $\{3;4\} \in E$.

2►

∗ E et $\varnothing$ sont toujours inclus dans E, donc sont toujours des éléments de $\mathcal{P}(E)$.

∗ Exemple avec $E = \{0;1\}$: $\mathcal{P}(E) = \{\varnothing; E; \{0\}; \{1\}\}$.

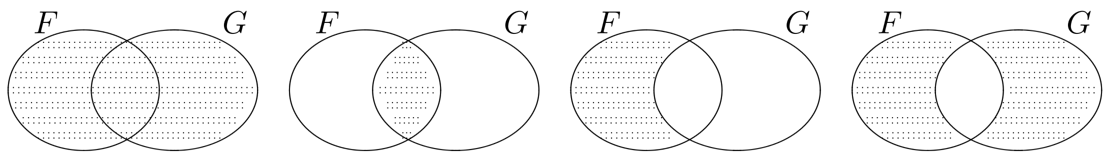
Pratique 3 :

1. En ordonnant les parties suivant leur nombre d'élements, de 0 à 3 :

$$\mathcal{P}(E) = \{\varnothing; \{1\}; \{2\}; \{3\}; \{1;2\}; \{1;3\}; \{2;3\}; \{1;2;3\}\}$$

2. Pour $E = \varnothing$: $\mathcal{P}(E) = \{\varnothing\}$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E)) = \{\varnothing; \{\varnothing\}\}$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))) = \{\varnothing; \{\varnothing\}; \{\{\varnothing\}\}; \{\varnothing; \{\varnothing\}\}\}$

3►

∗ 

$F \cup G$ $\quad$ $F \cap G$ $\quad$ $F \setminus G = \complement_F G$ $\quad$ $F \Delta G$

∗ Attention au rangement dans un produit cartésien ! Le couple $(0,1)$ est différent du couple $(1,0)$!

∗ **Généralisation** : I est un ensemble d'indices, les E_i sont, pour $i \in I$, des parties d'une ensemble E.

$\bigcup\limits_{i \in I} E_i$ est l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à un des E_i au moins

$\bigcap\limits_{i \in I} E_i$ est l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à tous les E_i

$\prod\limits_{i=1}^{n} E_i$ (produit cartésien des E_i) est l'ensemble des n-uplets $(x_1, \ldots, x_n)$ où, pour i de 1 à n, $x_i \in E_i$

Pratique 4 :

1. a) $A \cup B = \{2;3;5;6;9\}$ et $A \cap B = \{2\}$

b) $A \cup B$ est l'ensemble des naturels pairs, $A \cap B$ celui des multiples de 4

c) $A \cup B$ est l'ensembles des fonctions paires ou impaires (rien de particulier...), $A \cap B$ ne contient que la fonction nulle puisqu'en tout réel x, une fonction de cet ensemble vérifie $f(x) = f(-x) = -f(x) = 0$.

d) La réunion de deux droites du plan ne donne rien de plus simple dans sa description, sauf si les deux droites sont confondues (on obtient cette droite).
L'intersection de deux droites du plan est vide (cas de deux droites parallèles distinctes), ou réduite à un point (cas de deux droites sécantes), ou égale à une droite (cas de deux droites confondues).

2. $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[= \{0\}$. En effet, si $a > 0$ ou $a < 0$, pour p assez grand on a $\dfrac{1}{p} < |a|$ donc $a \notin]-\frac{1}{p}, \frac{1}{p}[$.
Inversement 0 appartient bien à tout $]-\frac{1}{p}, \frac{1}{p}[$ pour $p \in \mathbb{N}^*$.

$\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [0,n] = [0,+\infty[$. En effet, l'inclusion directe est évidente, et si $A \geqslant 0$, alors $A \in [0, k+1]$ avec k égal à la partie entière de A, donc A appartient à la réunion étudiée.

3. a) L'ensemble des impairs b) L'ensemble des naturels non divisibles par 6

4. (a) $\{(1,a);(1,b);(1,c);(2,a);(2,b);(2,c)\}$ (b) $\varnothing$
(c) Le quart de plan "supérieur droit" délimité par les axes $(0x)$ et $(0y)$
(d) Le rectangle basé sur $[0,1]$ et $[0,2]$

4▶

Preuve : Par doubles inclusions.

1) Soit $x \in \left(\displaystyle\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap B$, il existe $i_0 \in I$ tel que $x \in A_{i_0}$, et $x \in B$. Donc $x \in A_{i_0} \cap B$, donc $x \in \displaystyle\bigcup_{i\in I}(A_i \cap B)$.

Inversement, soit $x \in \displaystyle\bigcup_{i\in I}(A_i \cap B)$, alors il existe $i_0 \in I$ tel que $x \in A_{i_0} \cap B$, donc $x \in A_{i_0}$, donc $x \in \left(\displaystyle\bigcup_{i\in I} A_i\right)$, et comme $x \in B$, on a bien $x \in \left(\displaystyle\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap B$.
On a donc la première égalité.

De même, soit $x \in \left(\displaystyle\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup B$, alors $x \in B$ ou x appartient à tout A_i pour $i \in I$. Si $x \in B$, alors pour tout i de I, $x \in B$ ou $x \in A_i$, et si $x \notin B$, alors pour tout $i \in I$, $x \in A_i$, donc pour tout i de I, $x \in B$ ou $x \in A_i$. Dans les deux cas, cela se traduit par $x \in \displaystyle\bigcap_{i\in I}(A_i \cup B)$.

Inversement, si $x \in \displaystyle\bigcap_{i\in I}(A_i \cup B)$, alors pour tout i de I, x appartient à A_i ou à B. Si $x \in B$, alors $x \in \left(\displaystyle\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup B$, et sinon c'est que $x \in \left(\displaystyle\bigcap_{i\in I} A_i\right)$, donc on obtient aussi que $x \in \left(\displaystyle\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup B$.
On a donc la deuxième égalité.

2) Dire que x n'appartient pas à $\left(\displaystyle\bigcup_{i\in I} A_i\right)$, c'est dire que x n'appartient à aucun des A_i et réciproquement, on a donc la première égalité.

Dire que x n'appartient pas à tous les A_i, c'est dire qu'il existe un i_0 tel que $x \notin A_{i_0}$, donc que $x \in \bigcup_{i \in I} \complement_E A_i$, et réciproquement ; on a donc la deuxième égalité.

3) Dire que x appartient à B, c'est dire qu'il n'appartient pas au complémentaire dans E de B, et réciproquement. □

5▶

Bien souvent, on utilise le mot "fonction" pour désigner une application, c'est incorrect mais courant... En toute rigueur, une fonction f donnée entre un ensemble E et un ensemble F n'est pas forcément définie en tout point de E. Toutefois, en un point $x \in E$ où elle est définie, on impose que x n'admet qu'une seule image par f. Ainsi, en restreignant f aux points de E où elle est définie, on obtient une application...

Pratique 5 :

1. f et g ne sont pas égales puisque leurs ensembles d'arrivée sont différents.
Pour avoir égalité, à cause de $\sqrt{x^2} = |x|$, il faut par exemple choisir $\mathbb{R}_+$ comme ensemble de départ et comme ensemble d'arrivée pour f et pour g.

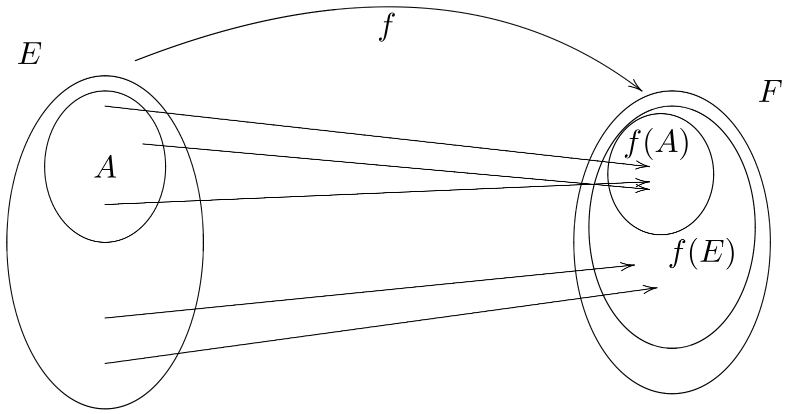
2. $\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$: le vérifier pour $x \in A \cap B$ (valeurs prises 1) et $x \notin A \cap B$ (valeurs 0).

$\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$: le vérifier en calculant l'image de $x \in A \Delta B$, $x \in A \cap B$, et $x \notin A \cup B$.

$\mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$: le vérifier pour $x \in A$ et $x \notin A$.

6▶

$\operatorname{Im} f = f(E)$ est l'ensemble des images par f des éléments de E.



Pratique 6 :

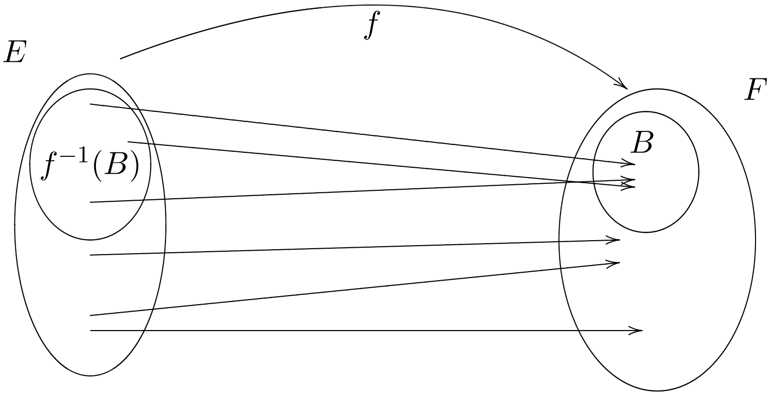
1. $\operatorname{Im} f = \{5\,;6\}$ et $f(\{2\,;3\}) = \{f(2)\,;f(3)\} = \{5\,;6\}$

2. L'image de exp est $\mathbb{R}_+^*$ (toute exponentielle d'un réel est strictement positif et inversement, pour tout $b > 0$, $\exp(\ln b) = b$).
De plus exp est continue est strictement croissante, donc $\exp([0,1]) = [1, \mathrm{e}]$.

3. $\operatorname{Im} f = \mathbb{N}$ car d'une part une partie entière est un naturel, d'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(2n) = n$.

7▶

$*$ f n'a pas besoin d'être bijective pour pouvoir définir ces images réciproques. Si de plus f est bijective, alors pour toute partie B de F : $f^{-1}(B) = \{\, f^{-1}(y) \mid y \in B \}$

* 

Pratique 7 :

1. $f^{-1}(\{5\}) = \{1;2\}$, $f^{-1}(\{6\}) = \{3\}$, et $f^{-1}(\mathbb{N}) = \{1;2;3\}$

2. $\exp^{-1}(\mathbb{R}) = \exp^{-1}(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}$

3. Soit A une partie de E. Si $x \in f^{-1}(f(A))$, alors $f(x) \in f(A)$, ce qui n'implique pas $x \in A$... Si $x \in A$, alors $f(x) \in f(A)$, donc $x \in f^{-1}(f(A))$.
On a donc $A \subset f^{-1}(f(A))$, l'inclusion pouvant être stricte : voir 1. avec $A = \{1\}$.

Soit B une partie de F. Si $y \in B$, alors y n'a peut-être pas d'antécédent par f, et dans ce cas, ne peut appartenir à $f(f^{-1}(B))$... Si $y \in f(f^{-1}(B))$, alors il existe x dans $f^{-1}(B)$ (donc $f(x) \in B$) tel que $y = f(x)$, et comme $f(x) \in B$, c'est que $y \in B$.
On a donc $f(f^{-1}(B)) \subset B$, l'inclusion pouvant être stricte : voir 1. avec $B = \{4\,;5\}$.

Pratique 8 :

L'image de la valeur absolue est $\mathbb{R}_+$. Sa restriction à $\mathbb{R}_+$ est l'application définie de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x$, sa restriction à $\mathbb{R}_+$ corestreinte à $\mathbb{R}_+$ est l'application identité entre ces deux ensembles.

8▶

$*$ Pour $x \in E$ et pour calculer $(g \circ f)(x)$, on commence par appliquer f à x, puis g à $f(x)$...

$*$ *Preuve de l'associativité de* $\circ$: pour tout x de E,

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))) = h((g \circ f)(x)) = (h \circ (g \circ f))(x)$$

Ainsi, $h \circ (g \circ f)$ et $(h \circ g) \circ f$ ont mêmes ensembles de départ et d'arrivée et coïncident sur tout élément de l'ensemble de départ, donc sont égales. $\square$

$*$ C'est la raison pour laquelle on peut noter indifféremment $h \circ g \circ f$, $h \circ (g \circ f)$ ou $(h \circ g) \circ f$.
De même, par itération, pour n naturel et $f : E \to E$, on note $f^0 = \mathrm{Id}_E$ puis

$$f^{n+1} = f \circ f^n = f^n \circ f = f \circ f \circ \ldots \circ f \quad (n \text{ fois})$$

Pratique 9 :

1. Pour les deux, on obtient f.

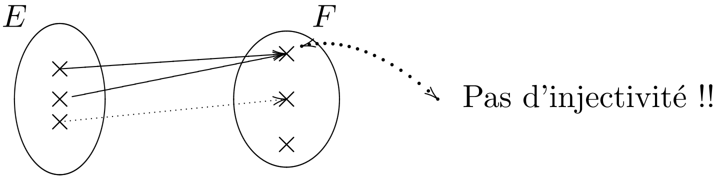
2. Par récurrence simple, on obtient $f^n : x \mapsto x + n$.

3. Par exemple, $f = w \circ v \circ u$ avec u définie de $[0,1]$ dans $[0,1]$ par $x \mapsto 1 - x^2$, puis $v = \sqrt{\ }$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, enfin $w = \exp$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

4. Par exemple : $f = v \circ u$ avec u définie de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ par $x \mapsto (\sqrt{x}, 1/x)$, et v de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ par $(x,y) \mapsto x + y$.

Pour le deuxième exemple : $f = w \circ v \circ u$ avec u définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$ par $x \mapsto 1 + x^2$, $v = \sqrt{\ }$ définie de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$, et w la fonction inverse défine de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$.

9▶

* 

$*$ *Preuve* : Supposons f injective de E vers F. Soit x_1 et x_2 éléments de E tels que $f(x_1) = f(x_2)$. Comme $y = f(x_1) = f(x_2)$ ne peut avoir deux antécédents distincts par f, on obtient $x_1 = x_2$.
Réciproquement, soit $f : E \to F$ telle que : $\forall (x_1, x_2) \in E^2,\ [f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2]$.
Soit $y \in F$, supposons que y admette deux antécédents x_1 et x_2 dans E, c'est-à-dire : $y = f(x_1) = f(x_2)$. Par hypothèse, $x_1 = x_2$, donc y admet au plus un antécédent par f dans E. $\square$

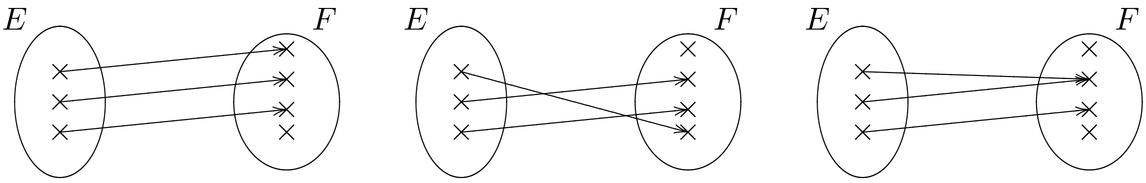
$*$ Pour tout ensemble E, l'application identité de E dans E est toujours injective.

10▶

Preuve : (1) Soit $f : E \to F$, et $g : F \to G$, injectives. Soit $z \in G$, et supposons qu'il existe x_1 et x_2 dans E tels que $z = (g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$. On en déduit : $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ donc $f(x_1) = f(x_2)$ puisque g est injective. Comme f est injective, on obtient $x_1 = x_2$, donc $g \circ f$ est injective.

(2) Supposons $g \circ f$ injective, et soit $y \in F$ tel qu'il existe x_1 et x_2 dans E tels que : $y = f(x_1) = f(x_2)$. On en déduit que : $g(y) = (g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$. Comme $g \circ f$ est injective, on obtient $x_1 = x_2$, donc f est injective. $\square$

Pratique 10 :

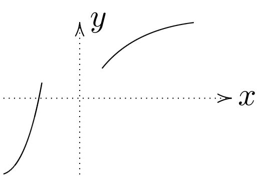
1. 

où la troisième application dessinée n'est pas injective.

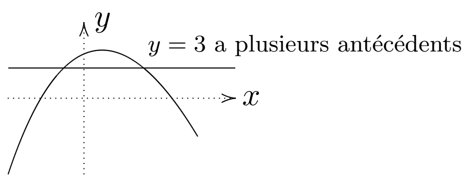
Impossible d'obtenir une injection de $\{1; 2; 3\}$ dans $\{1; 2\}$, il n'y a pas assez d'éléments dans F, ou trop dans E.

2. (a) non injective (car 1 et -1 ont même carré)
(b) et (c) injectives (d) non injective (0 et 2π ont même image)

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est injective lorsque toute droite horizontale $y = \alpha$ coupe le graphe de f en au plus un point (c'est dans ce cadre la traduction directe de la définition de l'injectivité...)

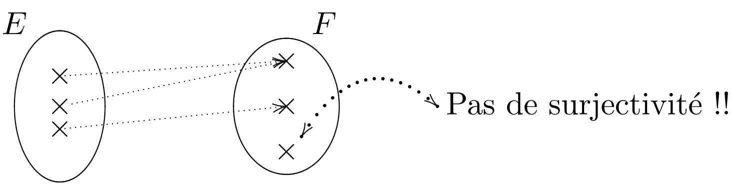


(injective)



(non injective)

11▶

* 

$*$ *Preuve de la proposition* : D'une part on a toujours $f(E) \subset F$, d'autre part par définition de la surjectivité, tout élément de F est image par f d'un élément de E, donc $F \subset f(E)$.
Finalement $f(E) = F$. $\square$

$*$ Pour E ensemble quelconque, l'application Id_E de E dans E est toujours surjective.

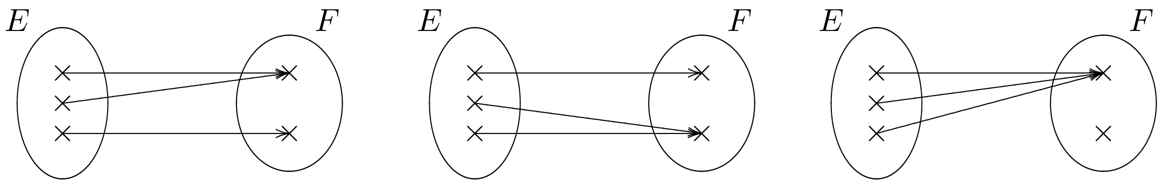
12▶

Preuve : (1) Supposons $f : E \to F$ et $g : F \to G$ surjectives.
Alors $f(E) = F$ et $g(F) = G$, donc $(g \circ f)(E) = g(f(E)) = g(F) = G$, donc $g \circ f$ est surjective.

(2) Supposons $g \circ f$ surjective (avec le même cadre qu'en (1)).
Alors $f(E) \subset F$ donc $g(f(E)) = G \subset g(F) \subset G$.
On en déduit que $g(F) = G$, donc que g est surjective. $\square$

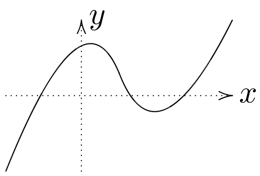
Pratique 11 :

1.

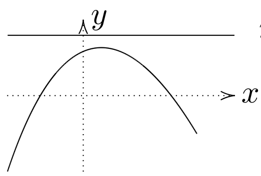


la troisième représente une application non surjective.
Impossible d'obtenir une injection de $\{1; 2; 3\}$ dans $\{1; 2; 3; 4\}$, il n'y a pas assez d'éléments dans E, ou trop dans F.

2. (a) non surjectives, (b) (c) et (d) surjectives.
Dans ce cadre, la surjectivité se traduit par le fait que toute droite horizontale $y = \alpha$ coupe le graphe de l'application en au moins un point.



(surjective)



$y = 5$ n'a pas d'antécédent

(non surjective)

13▶

$*$ *Preuve* : Pour tout y de F, l'équation $y = f(x)$ admet une solution donc f est surjective, et une seule, donc f est injective, et réciproquement.
Pour tout x de E et y tel que $y = f(x)$, il vient $f(f^{-1}(y)) = f(x) = y$ et $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x$.
Donc $f \circ f^{-1}$ et Id_F d'une part, $f^{-1} \circ f$ et Id_E d'autre part, ont mêmes ensembles de départ et d'arrivée et coïncident en tout point de leurs ensembles de départ, donc sont égales. $\square$

$*$ Pour tout ensemble E, l'application identité de E dans E est bijective.

14▶

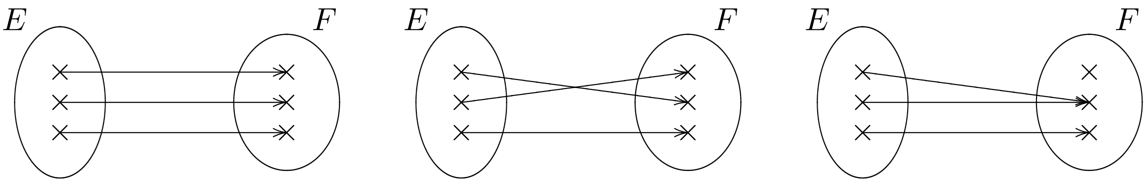
Preuve : (1) La composée de deux injections est injective, la composée de deux surjections est surjective. Donc la composée de deux bijections (injectives et surjectives) est injective et surjective donc bijective.

Supposons f bijective de E vers F et g bijective de F vers G.
Pour tout z de G, il existe un unique $y \in F$ tel que $z = g(y)$ et un unique x de E tel que $y = f(x)$. Alors : $z = (g \circ f)(x)$ et $x = (g \circ f)^{-1}(z) = f^{-1}(y) = f^{-1}(g^{-1}(z)) = (f^{-1} \circ g^{-1})(z)$. Les applications $(g \circ f)^{-1}$ et $f^{-1} \circ g^{-1}$ ont mêmes ensembles de départ et d'arrivée et coïncident en tout point de G, donc sont égales.

(2) Si $g \circ f$ est bijective, elle est injective donc f également, et elle est surjective donc g également, comme vu plus haut.

(3) Id_E et Id_F étant bijectives, on obtient g surjective et injective donc bijective. En composant à gauche par g^{-1} la première égalité, on obtient $f = g^{-1}$, puis de façon symétrique, $g = f^{-1}$. $\square$

Pratique 12 :

1. 

la troisième n'est pas bijective (elle n'est d'ailleurs ni injective ni surjective).

Impossible d'obtenir une bijection entre $\{1;2;3\}$ et $\{1;2;3;4\}$ (impossible d'obtenir une surjection), ni entre $\{1;2;3\}$ et $\{1;2\}$ (impossible d'obtenir une injection).

2. (a) non injective (et non surjective)   (b) bijective   (c) non injective (nulle sur $\pi/2+\pi\mathbb{Z}$)

Une application est bijective si toute droite horizontale $y=\alpha$ coupe le graphe une fois et une seule.

Pratique 13 :

1. $=$ et le parallélisme sont des relations d'équivalences. $\leqslant$, $>$ et $\subset$ n'en sont pas car ne sont pas symétriques, l'orthogonalité non plus car n'est pas réflexive.

2. Ce sont les singletons !

3. La classe d'équivalence de 0 est l'ensemble des pairs, celle de 1 l'ensemble des impairs, il n'y a donc pas d'autre classe d'équivalence.

4. Trois classes d'équivalence : des multiples de 3, des multiples de 3 plus 1, des multiples de 3 plus 2.

15▶

$*$ On parle de l'ensemble des classes d'équivalence, donc non répétées dans cette description.

$*$ *Preuve* : a) La classe d'équivalence d'un élément x de E, puisque c'est ainsi que les classes d'équivalence sont définies, contient au moins x à cause de la réflexivité.

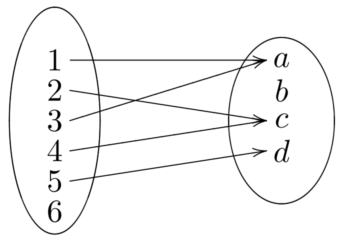
b) Si z appartient à la classe de x et à la classe de y, par transitivité, y appartient à la classe de x, et de même tout élément de la classe de y appartient à celle de x. Par symétrie, les deux classes de x et de y sont donc égales. Finalement, deux classes d'équivalences sont égales ou disjointes.

c) Comme tout élément de E appartient à sa propre classe, la réunion des classes d'équivalences modulo une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ est égale à E. $\square$

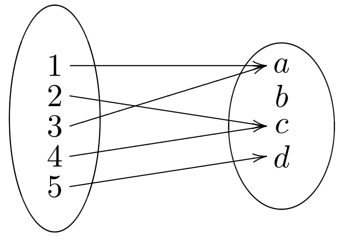
$*$ Une relation d'équivalence sur un ensemble E sert donc à découper E en paquets d'éléments vérifiant un même critère défini par la relation d'équivalence). Par exemple les pairs et les impairs de $\mathbb{N}$ (suivant la divisibilité par 2 ou pas), les droites du plan parallèles entre elles, etc.

$*$ Un exemple d'utilisation : on va, sur un exemple, voir les principes permettant de construire une bijection à partir d'une fonction par des opérations systématiques.

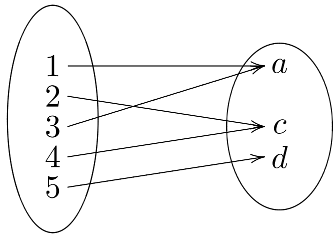
Considérons la fonction $f:\ \{1;2;3;4;5;6\}\to\{a;b;c;d\}$ définie par : $f(1)=f(3)=a$, $f(2)=f(4)=c$ et $f(5)=d$.



On transforme f en une application g en la restreignant à son domaine de définition $D=\{1;2;3;4;5\}$.

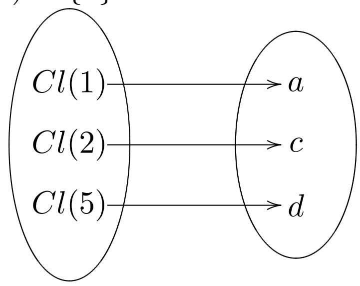


On transforme alors g en une application surjective h en la corestreignant à son image $g(D) = \{a; c; d\}$.



Reste le problème de l'injectivité... il suffit alors de considérer comme équivalents les antécédents d'une même image... Pour cela, on définit la relation $\mathcal{R}$ sur D par : $x \,\mathcal{R}\, y \iff h(x) = h(y)$ (ce qui revient à $f(x) = f(y)$). On vérifie facilement que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $D = D_f$, qui admet sur cet exemple trois classes : $Cl(1) = Cl(3) = \{1; 3\}$, $Cl(2) = Cl(4) = \{2; 4\}$ et $Cl(5) = \{5\}$.

L'application φ définie sur l'ensemble $\{Cl(1); Cl(2); Cl(5)\}$ à valeurs dans $g(D) = \{a; c; d\}$ par $\varphi(Cl(1) = a$, $\varphi(Cl(2) = c$ et $\varphi(Cl(5) = d$ est bijective.



Pratique 14 :

1. $\leqslant$, $=$, la divisibilité et l'inclusion sont des relations d'ordre, la divisibilité et l'inclusion sont partielles. $>$ et l'orthogonalité n'en sont pas parce que non réflexives, le parallélisme n'est pas antisymétrique.

2. On pose donc : $x \,\mathcal{R}'\, y$ si, et seulement si, $y \,\mathcal{R}\, x$.
Pour tout x de E, $x \,\mathcal{R}\, x$ par réflexivité de $\mathcal{R}$, donc $x \,\mathcal{R}'\, x$, donc $\mathcal{R}'$ est bien réflexive.
Soit x et y deux éléments de E. Si $x \,\mathcal{R}'\, y$ et $y \,\mathcal{R}'\, x$, alors $x \,\mathcal{R}\, y$ et $y \,\mathcal{R}\, x$ donc $x = y$ par antisymétrie de $\mathcal{R}$, donc $\mathcal{R}'$ est antisymétrique.
Soit enfin trois éléments x, y et z de E tels que $x \,\mathcal{R}'\, y$ et $y \,\mathcal{R}'\, z$. Alors $y \,\mathcal{R}\, x$ et $z \,\mathcal{R}\, y$, donc, par transitivité de $\mathcal{R}$ il vient $z \,\mathcal{R}\, x$, donc $x \,\mathcal{R}'\, z$, ce qui montre la transitivité de $\mathcal{R}'$.
Ainsi, $\mathcal{R}'$ est une relation d'ordre sur E.

Par exemple, sur $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{N}$, on a les deux relations d'ordre $\leqslant$ et $\geqslant$.

16▶

$*$ En effet, s'il existe deux maxima a et b de F, alors $a \leqslant b$ et $b \leqslant a$ par définition, d'où $a = b$ par antisymétrie de la relation d'ordre. Même chose pour l'unicité du minimum s'il existe.

$*$ On en déduit l'unicité de la borne supérieure et de la borne inférieure en cas d'existence.

$*$ En revanche, il n'y a aucune raison d'avoir l'unicité d'un majorant ou d'un minorant.

Pratique 15 :

1. Pour F_1 : 0 est un minorant, 4 est un majorant, $2 = \operatorname{Min} F_1$ et $4 = \operatorname{Max} F_1$.

Pour F_2 : $1 = \operatorname{Min} F_2$, et F_2 est non majoré.

Pour F_3 : il n'y a ni majorant ni minorant, donc ni borne inférieure ni borne supérieure.

2. F_1 est minoré par -1, majoré par π, $0 = \operatorname{Inf} F_1$ mais F_1 n'a pas de minimum (aucun minorant n'appartient à F_1), et $1 = \operatorname{Max} F_1$.

$\operatorname{Min} F_2 = 0$ et F_2 n'est pas majoré.

F_3 n'est pas minoré, $\operatorname{Sup} F_3 = \pi$ mais aucun majorant de F_3 n'appartient à F_3 donc F_3 n'a pas de maximum.

$\operatorname{Inf} F_4 = 0$ et $\operatorname{Sup} F_4 = 1$ mais F_4 n'a ni minimum ni maximum. Comme il existe toujours un rationnel entre deux réels distincts, il existe toujours dans F_4 un élément inférieur à tout $a > 0$ et un élément supérieur à tout $b < 1$.

3. Notons $E = \mathcal{P}(\{1; 2; 3\})$.

$\varnothing \subset A$ pour toute partie de E, donc toute partie de E majore F_1, donc $\varnothing$, plus petit des majorants, donc $\varnothing = \operatorname{Max} F_1$. Comme seul $\varnothing$ minore F_1, $\varnothing = \operatorname{Min} F_1$.

Les minorants de F_2 sont les parties incluses dans $\{1\}$, donc $\operatorname{Min} F_2 = \{1\}$.
Les majorants de F_2 sont les parties qui contiennent l'élément 1, donc $\operatorname{Max} F_2 = \{1\}$.

Les parties de $\{1;2;3\}$ minorant F_3 sont celles incluses dans $\{1\}$ et incluses dans $\{2\}$, il n'y a donc que $\varnothing$ comme minorant de F_2. Donc $\operatorname{Inf} F_2 = \varnothing$, et F_2 n'a pas de minimum.
Les parties de $\{1;2;3\}$ majorant F_3 sont celles contenant les éléments 1 et 2, donc $\operatorname{Sup} F_3 = \{1;2\}$, mais F_3 n'a pas de maximum.

17▶

$*$ Une relation d'ordre strict associée à une relation d'ordre n'est pas réflexive ! Ce n'est donc pas une relation d'ordre...

$*$ La fonction $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x$ sur $[-1,0]$ et $f(x) = -x+2$ sur $]0,1]$ est injective mais non strictement monotone !

Pratique 16 :

1. Soit f, g et h dans $\mathcal{F}(E,F)$.
Pour tout x de E on a $f(x) \leqslant f(x)$ par réflexivité de $\leqslant$, donc $f \preceq f$.
Si $f \preceq g$ et $g \preceq f$, alors pour tout x de E on a $f(x) \leqslant g(x)$ et $g(x) \leqslant f(x)$, donc $f(x) = g(x)$ par antisymétrie de $\leqslant$. Les fonctions f et g ayant mêmes ensembles de départ et d'arrivée et coïncidant sur E, elles sont égales, d'où l'antisymétrie de $\preceq$.
Si $f \preceq g$ et $g \preceq h$, alors pour tout x de E on a $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ donc $f(x) \leqslant g(x)$ par transitivité de $\leqslant$. Ceci étant vrai pour tout x de E, on obtient $f \preceq h$, donc la transitivité de $\preceq$, qui finalement est bien une relation d'ordre sur $\mathcal{F}(E,F)$.

Cet ordre est partiel en général : par exemple dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, cos et sin ne sont pas comparables.

2. (1) Étudier la fonction dérivable $h : x \mapsto \ln(1+x) - x$ sur $]-1,+\infty[$, de dérivée $x \mapsto -x/(1+x)$ à valeurs positives sur $]-1,0[$ et négatives sur $]0,+\infty[$; utiliser alors la croissance de h sur l'intervalle $]-1,0[$, sa décroissance sur $[0,+\infty[$, et sa valeur nulle en 0.

(2) L'inégalité est claire sur $]-\infty,-1]$ et sur $[1,+\infty[$. Par imparité de $x \mapsto x$ et de sin et positivité de ces fonctions sur $[0,1]$, il reste à montrer que $\sin x \leqslant x$ sur $[0,1]$. Étudier la monotonie de $x \mapsto \sin x - x$ sur $[0,1]$ en dérivant et utiliser la valeur nulle en 0.

L'inégalité droite découle de (2) et traduit que le graphe de sin sur $[0,\pi/2]$ se situe sous sa tangente en 0.
Pour l'inégalité gauche, étudier $x \mapsto \sin x - \frac{2}{\pi}x$ par dérivation sur $[0,\pi/2]$, les valeurs étant nulles en 0 et en $\pi/2$. Cette inégalité se traduit par le fait que le graphe de sin sur cet intervalle se situe au-dessus de sa corde entre les points d'abscisses 0 et $\pi/2$.