► ► 10 : SUITES

1►

$*$ $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est l'ensemble des fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{K}$: on note u_n plutôt que $u(n)$ pour simplifier...

$*$ Par exemple, la suite des carrés des naturels successifs se note : $(n^2)_{n\in\mathbb{N}} = (n^2) = (0, 1, 4, 9, 16, \ldots)$, liée à $u : n \mapsto n^2$

$*$ Vous commencez à être familiarisé avec ces propriétés : on dit que $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ muni de l'addition et du produit externe (respectivement de ces deux opérations et du produit interne) forme un espace vectoriel (respectivement une algèbre) sur $\mathbb{K}$. La suite nulle, notée $(0)_{n\in\mathbb{N}}$, est l'élément neutre pour l'addition, l'élément neutre pour la multiplication étant la suite $(1)_{n\in\mathbb{N}}$. Nous reverrons ces structures dans un chapitre ultérieur.

$*$ Parfois, la numérotation des éléments commence à 1, ou n_0, et on note $(u_n)_{n\geqslant 1}$, ou $(u_n)_{n\geqslant n_0}$.

$*$ On se pose les questions suivantes pour une suite donnée : comment se comporte son terme général u_n lorsque n devient grand ? Si on établit qu'il se rapproche d'un scalaire (convergence), ou qu'il "tend" vers $+\infty$ par exemple, à quelle vitesse cela a-t-il lieu ?

$*$ Une suite sert souvent à approcher la solution d'un problème : obtenir une évaluation de π, ou approcher une solution d'équation dont on ne sait pas trouver les solutions exactes, ou construire un nouvel objet mathématique (comme l'intégrale)...

$*$ On peut représenter les termes d'une suite réelle le long de l'axe réel, ou encore comme on représente une fonction u de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

2►

En effet, $\ln(n^2 \mathrm{e}^{-n}) = 2\ln n - n = -n(1 - 2\frac{\ln n}{n})$, quantité qui est bien négative dès que $\dfrac{\ln(n)}{n} < \dfrac{1}{2}$. On sait que cette inégalité est vérifiée "à partir d'un certain rang", c'est-à-dire pour n assez grand puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n)/n = 0$ d'après les règles de croissances comparées. Autrement dit, il existe un entier n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, on ait $\ln(n^2\mathrm{e}^{-n}) < 0$.

3►

$*$ La suite nulle est une suite constante, la suite $(\lfloor 2/n \rfloor)_{n\geqslant 1}$ est stationnaire.

$*$ Soit une suite arithmétique de raison r : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$.
Par récurrence simple, on montre : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$. La réciproque est immédiate.

$*$ Même principe pour les suites géométriques.

$*$ Soit (u_n) une suite arithmético-géométrique telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$, avec a constante non nulle (sinon la suite est constante). Si $a = 1$, la suite est arithmétique. Supposons donc $a \neq 1$.
Deux méthodes d'étude sont possibles pour se ramener à une suite arithmétique (ou presque) ou à une suite géométrique (la plus couramment utilisée).

Méthode 1 : la suite $(v_n) = (\frac{u_n}{a^n})$ vérifie : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}}{a^{n+1}} = \dfrac{u_n}{a^n} + \dfrac{b}{a^{n+1}} = v_n + \dfrac{b}{a^{n+1}}$. La suite (v_n) n'est pas arithmétique, mais la relation télescopique $v_{n+1} - v_n = \dfrac{b}{a^{n+1}}$ conduit à une somme géométrique et permet le calcul de u_n : $v_n - v_0 = b\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{a^k} = \dfrac{b}{a}\,\dfrac{1 - 1/a^n}{1 - 1/a} = b\,\dfrac{a^n - 1}{a^n(a-1)}$ et finalement : $u_n = a^n v_n = a^n u_0 + b\,\dfrac{a^n - 1}{a - 1}$

Ce type de calcul sera utile dans les études de complexité en informatique.

Méthode 2 : on pose $w_n = u_n - l$ où l vérifie une relation de point fixe : $l = al + b$ (donc $l = \dfrac{b}{1-a}$).
En effet, pour tout n naturel : $w_{n+1} = u_{n+1} - l = (au_n + b) - (al + b) = a(u_n - l) = aw_n$. Ainsi (w_n) est une suite géométrique de raison a, d'où : $w_n = a^n w_0$, ce qui redonne l'expression explicite de (u_n).

4▶

$*$ Pour la stricte croissance ou stricte décroissance, changer les inégalités larges en inégalités strictes.

$*$ (1), $\left(\dfrac{n+1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$, $(\sin n)$ sont des suites bornées, toutes majorées par 2 et minorées par -1, les deux premières sont monotones, la deuxième strictement et décroissante puisqu'égale à $(1+1/n)_{n\geqslant 1}$.

Les suites (n^2), (e^n) et $\left(n\cos\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)\right)$ ne sont pas majorées. Seules les deux premières sont minorées, monotones, strictement croissantes.
La suite $(n\mathrm{e}^{-n})$ est bornée, et décroissante à partir d'un certain rang (le vérifier en étudiant la fonction $x\mapsto x\mathrm{e}^{-x}$ sur $\mathbb{R}_+$).

5▶

$*$ La suite (u_n) est majorée, resp. minorée, resp. bornée, resp. croissante, resp. décroissante, ssi c'est le cas de la fonction $u:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$. Mais ce n'est pas toujours visible...

⚠ Si $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ n'est pas monotone, $(g(n))$ peut être monotone, par exemple avec $g:x\mapsto\cos(2\pi x)$.

$*$ Le a) découle de la définition de la croissance d'une suite.
Le b) s'appuie sur l'étude du rapport : ln étant strictement croissante, la suite (u_n) est (strictement) croissante si, et seulement si, la suite $(\ln(u_n))$ est (strictement) croissante. Justement, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}>1$ équivaut dans ce cadre à $\ln(u_{n+1})>\ln(u_n)$.
Suivant le contexte, on choisit l'outil le plus simple...

Pratique 1 :

1. La fonction $u:n\mapsto\sqrt{n}$ est croissante sur $\mathbb{N}$, minorée par 0, non majorée, il en est de même de (u_n).

2. $v_{n+1}-v_n=\dfrac{1}{(n+1)^2}-\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n}=\dfrac{2n+1}{n(n+1)^2}>0$, donc (v_n) est croissante, donc minorée, et majorée par $1+\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(k-1)}-\frac{1}{n}=2-\frac{1}{n}-\frac{1}{n}\leqslant 2$.

3. (w_n) est minorée par -1, majorée par 1, non monotone puisque $\cos(3)<\cos(2)<\cos(7)$.

4. On étudie le rapport $\dfrac{t_{n+1}}{t_n}$ mieux adapté aux factorielles et puissances. Pour $n\geqslant 1$:

$$\frac{t_{n+1}}{t_n}=\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\,\frac{n^n}{n!}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=(1+\tfrac{1}{n})^{-n}=\exp(-n\ln(1+1/n))=\exp\left(-\frac{\ln(1+1/n)}{1/n}\right)$$

Or $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\ln'(1)=1$. Le rapport (t_{n+1}/t_n) converge donc vers $1/\mathrm{e}$, donc est inférieur strictement à 1 pour n assez grand. La suite $(n!/n^n)_{n\geqslant 1}$ est donc décroissante à partir d'un certain rang.
On en déduit que $(n!)$ tend vers $+\infty$ "moins vite" que $(n^n)_{n\geqslant 1}$ (on a comparé les croissances).

6▶

$*$ Autrement dit, (u_n) converge vers l lorsque pour tout intervalle centré en l, il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite sont dans cet intervalle.
Mais quand il faudra faire des démonstrations, l'expression de cette convergence, dite "en ε, n_0", sera un outil rigoureux et qui permettra des calculs basés sur des inégalités.

$*$ Relisez cette formulation ! On voit que dire qu'une suite "converge vers l à partir d'un certain rang" n'a pas de sens : une suite converge vers l, ou pas !

$*$ Montrons a). Supposons que (u_n) converge vers l au sens de la définition. Soit $\varepsilon>0$. Par la définition, il existe un naturel n_0 tel que pour tout $n\geqslant n_0$ on ait $|u_n-l|\leqslant\varepsilon/2$, ce qui montre que $|u_n-l|<\varepsilon$ (on a appliqué la définition avec $\varepsilon'=\varepsilon/2$).
Inversement, supposons que (u_n) converge vers l au sens de a). Alors il existe n_0 tel que pour tout $n\geqslant n_0$ on ait $|u_n-l|<\varepsilon$, ce qui implique $|u_n-l|\leqslant\varepsilon$.

Pratique 2 :

1. $\exists\,\varepsilon>0,\ \forall p\in\mathbb{N},\ \exists\,q\in\mathbb{N},\ q\geqslant p$ et $|u_q-l|>\varepsilon$.
Par exemple, la suite (n) ne converge vers aucun scalaire l : pour tout $q\geqslant|l|+1$, on a $|u_q-l|\geqslant 1$ (donc $\varepsilon=1$ permet de conclure avec cette valeur de q).

2. (u_n) diverge signifie que (u_n) ne converge vers aucun scalaire l. Autrement dit :
$\forall l\in\mathbb{K},\ \exists\,\varepsilon>0,\ \forall n\in\mathbb{N},\ \exists n_0\in\mathbb{N},\ n_0\geqslant n$ et $|u_{n_0}-l|>\varepsilon$.

3. Soit $(c)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite constante. Sa limite est c. En effet, soit $\varepsilon>0$.
Pour tout $n\geqslant 0$, on a $|u_n-c|=0\leqslant\varepsilon$.

4. Soit $\varepsilon>0$. Posons $n_0=\lfloor 1/\varepsilon\rfloor+1$. Alors pour tout naturel $n\geqslant n_0$, $|\frac{1}{n}-0|=\frac{1}{n}\leqslant\frac{1}{n_0}\leqslant\varepsilon$.

5. Soit (u_n) une suite d'entiers rationnels qui converge vers l. On applique la définition avec $\varepsilon=1/4$: il existe un naturel n_0 tel que pour tout $n\geqslant n_0$ on ait $|u_n-l|\leqslant 1/4$. En particulier : $|u_{n_0}-l|\leqslant 1/4$. Comme u_{n_0} est un entier, $l=u_{n_0}$. Pour $n\geqslant n_0$, on a donc $|u_n-l|\leqslant 1/4$ avec l entier, donc u_n qui est entier est aussi égal à l. La suite est donc stationnaire, c'est-à-dire constante de valeur l à partir du rang n_0 (au moins).

7►

$*$ *Preuve* : (1) Soit une suite (u_n) convergente vers deux limites distinctes l_1 et l_2. Posons $\varepsilon=|l_1-l_2|/2$. Il existe un rang n_1 à partir duquel $|u_n-l_1|<\varepsilon$, et un rang n_2 à partir duquel $|u_n-l_2|<\varepsilon$.
Posons $n_3=\mathrm{Max}(n_0,n_1)$.
Par l'inégalité triangulaire : $|l_1-l_2|\leqslant|l_1-u_{n_3}|+|u_{n_3}-l_2|<2\varepsilon=|l_1-l_2|$, contradiction.
Une suite convergente ne converge donc que vers une seule limite.

(2) Soit (u_n) une suite qui converge vers un scalaire l. Choisissons $\varepsilon=1$.
Il existe un rang n_0 à partir duquel : $|u_n-l|\leqslant 1$, donc $|u_n|\leqslant|u_n-l|+|l|\leqslant 1+|l|$.
Ainsi, pour tout naturel n, $|u_n|\leqslant\mathrm{Max}(1+|l|,\mathrm{Max}(|u_0|,|u_1|,\ldots,|u_{n_0-1}|)$, la suite (u_n) est bornée.

En revanche, la suite $((-1)^n)$ est bornée mais divergente (à valeurs entières mais non stationnaire).

(3) Dans le cadre d'hypothèses, soit $\varepsilon>0$, il existe n_0 tel que pour tout naturel $n\geqslant n_0$ on ait $|u_n-u|<\varepsilon$, et n_1 tel que pour tout naturel $n\geqslant n_1$ on ait $|v_n-v|<\varepsilon$. Alors pour tout n supérieur à $\mathrm{Max}(n_0,n_1)$:

$$|(\lambda u_n+v_n)-(\lambda u+v)|\leqslant|\lambda||u_n-u|+|v_n-v|\leqslant(|\lambda|+1)\varepsilon$$

Inutile de poser au départ $\varepsilon'=\varepsilon/(|\lambda|+1)$ pour obtenir la bonne inégalité : cette majoration par un terme aussi petit que voulu par le choix de ε suffit (on peut refaire des démonstrations du type de celle prouvant la définition équivalente b)...)
Ainsi la suite (λu_n+v_n) converge vers $\lambda u+v$.

De même, si M est une borne pour $(|u_n|)$ (une suite convergente est bornée), pour $n\geqslant\mathrm{Max}(n_0,n_1)$:

$$|u_nv_n-uv|=|u_n(v_n-v)+v(u_n-u)|\leqslant M|v_n-v|+|v||u_n-u|<(M+|v|)\varepsilon$$

Ainsi, la suite (u_nv_n) converge vers (uv).

(4) Provient des inégalités : $|\mathfrak{Re}(u_n)-a|\leqslant|u_n-u|$ et $|\mathfrak{Im}(u_n)-b|\leqslant|u_n-u|$ pour le sens direct, et $|u_n-l|^2=(\mathfrak{Re}(u_n)-a)^2+(\mathfrak{Im}(u_n)-b)^2$ pour le sens réciproque.
Cette propriété ramène l'étude de la convergence d'une suite complexe à celles de deux suites réelles.

(5) Propriété admise ici, démontrée dans le chapitre traitant des limites et de la continuité.
Exemple, si (u_n) converge vers $u>0$, alors $(1/u_n)$ converge vers $1/u$ par continuité de $x\mapsto 1/x$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
Par propriétés sur les limites (dans $\bar{\mathbb{R}}$), on a aussi : si (u_n) tend vers 0^+, alors $(1/u_n)$ (si elle est définie) tend vers $+\infty$. $\square$

8►

$*$ La suite (u_0+nr) converge si, et seulement si, $r=0$, ce qui correspond à la suite constante (u_0).

$*$ La suite $(0^n)_{n\geqslant 1}$ est constante. Si $q \neq 0$, la suite $(|q|^n) = (\exp(n \ln|q|))$ converge vers 0 si $|q| < 1$ (donc (q^n) converge vers 0 dans ce cas), et diverge (tend vers $+\infty$) si $|q| > 1$.
Pour $q = 1$, la suite (q^n) est constante donc convergente.
Supposons $|q| = 1$ et $q \neq 1$. En posant $u_n = q^n$, on a $u_{n+1} = qu_n$. Si (u_n) converge vers l, alors, par continuité de $x \mapsto qx$, on obtient par passage à la limite que $l = ql$, donc $l(1-q) = 0$, donc $l = 0$. Or $(|u_n|) = (1)$ ne peut converger vers 0, donc (u_n) diverge.

9▶

Autrement dit, (u_n) tend vers $+\infty$ est traduit par : aussi grand que soit choisi A, il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite sont plus grand que A.

Les définitions équivalentes s'obtiennent par les mêmes raisonnement que pour les limites finies.

Bien sûr, dans ces situations, les suites considérées ne sont pas bornées (une suite qui tend vers $+\infty$ est non majorée, une suite qui tend vers $-\infty$ est non minorée) ni convergentes.

Inversement, une suite qui diverge ne tend pas nécessairement vers $+\infty$ ou $+\infty$, comme $((-1)^n)$ par exemple.

Pratique 3 :

Appliquer la définition avec $A = 1$, le n_0 associé convient...

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ avec $l > 0$, appliquer la définition avec $\varepsilon = l/2$. A partir d'un certain rang, $|u_n - l| < l/2$ donc $l - u_n < l/2$, donc $u_n > l/2 > 0$.

Si $l = 0$, on ne peut conclure : par exemple la suite $(1/n)$ converge vers 0 et est à valeurs strictement positives, mais ce n'est pas le cas pour la suite $((-1)^n/n)$ qui tend pourtant vers 0.

Bien sûr, si $l < 0$ on montre qu'à partir d'un certain rang les termes de la suite sont strictement négatifs.

10▶

$*$ *Preuve de 1)* : voyons le cas $l = +\infty$ (le cas fini a déjà été vu, le cas $l = -\infty$ est semblable).
La suite (u_n) n'est alors pas bornée, elle ne peut donc converger vers une limite finie.
Elle ne peut pas non plus tendre vers $-\infty$ puisque ses termes sont positifs à partir d'un certain rang.
D'où l'unicité dans le cas général.

$*$ (2) et (3) sont clairs avec ce qui précède. □

$*$ $\boxed{\text{Formes indéterminées mettant ce théorème en défaut : } (-\infty) + (+\infty), \quad 0. \pm \infty, \quad 1^{\pm\infty}}$

Il reste alors à "déterminer" l'éventuelle limite au cas par cas.

Par exemple, si $(u_n) = (n)$ et $(v_n) = (-n)$, $(u_n + v_n)$ converge vers 0, $(2u_n + v_n)$ tend vers $+\infty$ et $(u_n + 2v_n)$ tend vers $-\infty$.

De même, (1^n) converge vers 1 (suite constante) mais $((1 + \frac{1}{n})^n)$ converge vers e (passer par l'écriture exponentielle).

$*$ En complément de ce théorème d'opérations sur les limites de suites : si (u_n) est convergente et (v_n) divergente, alors $(u_n + v_n)$ est divergente. Mais comme le montre les contre-exemples précédents, on ne peut pas conclure de manière générale pour la somme de deux suites divergentes.

Pour résumer : CV+CV=CV, CV+DV=DV et DV+DV= on ne sait pas

11▶

$*$ *Preuve* : Soit (u_n) une suite convergente vers $u \in \bar{\mathbb{R}}$ et majorée par A. Supposons $u > A$ (dans $\bar{\mathbb{R}}$).
On applique la définition de la convergence avec $\varepsilon = u - A$ si u est fini, ou $\varepsilon = A + 1$ si $u = +\infty$.
Il existe un rang à partir duquel $|u_n - u| < \varepsilon$ ou encore $u_n > u - \varepsilon = A$ si u est fini, ou $u_n \geqslant A + 1$ si $u = +\infty$. Dans les deux cas on obtient une contradiction. Finalement : $u \leqslant A$.

Pour la deuxième partie, considérer la suite $(-u_n)$ qui ramène au cas précédent. □

$*$ Attention à la propriété suivante : si (u_n) converge vers u et si : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < A$, alors $u \leqslant A$.

Autrement dit, $\boxed{\text{par passage à la limite, les inégalités deviennent larges !}}$

Par exemple, la suite $(1+1/n)$ est à termes strictement supérieurs à 1, mais la limite est égale à 1.

12▶

Preuve : a) Par hypothèse, pour tout naturel n : $v_n - l \leqslant u_n - l \leqslant w_n - l$ donc
$|u_n - l| \leqslant \text{Max}(|v_n - l|, |w_n - l|)$.
Soit $\varepsilon > 0$. À partir d'un rang n_0 on a $|v_n - l| < \varepsilon$, et à partir d'un rang n_1 on a $|w_n - l| < \varepsilon$.
Ainsi, pour tout n supérieur à $\text{Max}(n_0, n_1)$, on a : $|u_n - l| < \varepsilon$, donc la suite (u_n) converge vers l.

b) Pour n assez grand : $0 \leqslant 1/u_n \leqslant 1/v_n$ permet d'utiliser a). Même chose pour c). □

Pratique 4 :

1. Il existe a tel que pour tout naturel n : $v_n \geqslant a$. Ainsi, pour tout naturel n : $u_n + v_n \geqslant u_n + a$. Comme $(u_n + a)$ tend vers $+\infty$ par théorème sur les limites, la suite $(u_n + v_n)$ tend vers $+\infty$ par théorème d'encadrement.

2. Si (v_n) est majorée et si (u_n) tend vers $-\infty$, alors $(u_n + v_n)$ tend vers $-\infty$.

3. Pour tout naturel n : $n + \cos(n) \geqslant n - 1$, donc par théorème d'encadrement, $(n + \cos n)$ tend vers $+\infty$. C'est un cas particulier de 1.

13▶

∗ Voici un outil crucial pour comparer les vitesses de convergence ou de divergence de suites. Ce sera donc un outil indispensable et performant pour l'étude des séries.

∗ Attention toutefois, cela ne concerne que les suites à termes strictement positifs !

∗ Remarque : on obtient la même conclusion qu'avec l'hypothèse de comparaison classique : $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$

∗ *Preuve* : Notons n_0 le rang à partir duquel $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$, ce qui s'écrit aussi : $\dfrac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leqslant \dfrac{u_n}{v_n}$
Par récurrence simple, pour $n \geqslant n_0$: $\dfrac{u_n}{v_n} \leqslant \dfrac{u_{n-1}}{v_{n-1}} \leqslant \ldots \leqslant \dfrac{u_{n_0}}{v_{n_0}} = K$, puis $u_n \leqslant K v_n$, d'où le résultat. □

∗ Bien voir avec cette dernière ligne de la démonstration qu'en cas de convergence vers 0 de (v_n) par exemple, la suite (u_n) converge vers 0 plus vite que la suite (v_n) !

∗ On obtient ainsi un outil simple de comparaison avec une suite géométrique (q^n) (avec $q > 0$) pour laquelle le rapport est : $\dfrac{q^{n+1}}{q^n} = q$

Soit (u_n) une suite à termes strictement positifs.

- si, à partir d'un certain rang, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant q$ avec $q < 1$, alors (u_n) tend vers 0 !
- si, à partir d'un certain rang, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant q$ avec $q > 1$, alors (u_n) tend vers $+\infty$!

Attention, la valeur $q = 1$ dans les inégalités précédentes n'apporte pas de réponse aussi simple : (1^n) converge vers 1, (n) tend vers $+\infty$, $(\dfrac{2n+1}{n})$ tend vers 2, $\left(\dfrac{n+1}{2n}\right)$ tend vers $1/2$, $(1/n)_{n\geqslant 1}$ tend vers 0, alors que pour toutes ces suites le rapport (u_{n+1}/u_n) tend vers 1.

Pratique 5 :

Autrement dit, on montre que les suites situées au numérateur, qui tendent vers $+\infty$, le font "moins vite" que celles du dénominateur.
On utilise la comparaison logarithmique, appropriée pour ces puissances et factorielles.

Posons : $a_n = n^a/a^n$, $b_n = a^n/n!$ et $c_n = n!/n^n$, à termes strictement positifs pour $n \geqslant 1$.

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = (1+\frac{1}{n})^a/a$ converge vers $1/a$. Pour n assez grand, le rapport est donc inférieur au milieu de $1/a$ et de 1, c'est-à-dire : $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{1}{2}(\frac{1}{a}+1) < 1$.
Donc la suite (a_n) converge vers 0, "plus vite" que la suite géométrique $\left(\frac{1}{2^n}(1+\frac{1}{a})^n\right)$.

$\dfrac{b_{n+1}}{b_n} = \dfrac{a}{n+1}$ converge vers 0.
Donc la suite (b_n) converge vers 0, plus vite que n'importe quelle suite géométrique de raison $0 < q < 1$.

Enfin $\dfrac{c_{n+1}}{c_n} = (1+1/n)^{-n} = \exp(-n\ln(1+1/n))$. Comme $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\ln(1+u)}{u} = 1$ (dérivée de $u \mapsto \ln(1+u)$ en 0), la limite est ici 1/e.
Ainsi, la suite (c_n) tend vers 0 puisque pour n assez grand, $\dfrac{c_{n+1}}{c_n} \leqslant \frac{1}{2}(1+1/e) < 1$.

14▶

∗ *Preuve* : Soit (u_n) une suite réelle croissante.
Si elle est majorée, posons $u = \mathrm{Sup}\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, quantité qui existe bien puisque l'ensemble considéré forme une partie de $\mathbb{R}$ non vide majorée. Vérifions que (u_n) converge vers u : pour tout $\varepsilon > 0$, par caractérisation de la borne supérieure, il existe n_0 tel que $u-\varepsilon < u_{n_0} \leqslant u$. Comme la suite est croissante, on a donc pour tout $n \geqslant n_0$ que $|u_n - u| < \varepsilon$, ce qui montre que la suite (u_n) converge vers u.
Si (u_n) n'est pas majorée, considérons A réel. Il existe n_0 tel que $u_{n_0} \geqslant A$. Comme (u_n) est croissante, pour tout $n \geqslant n_0$ on a $u_n \geqslant A$, c'est-à-dire que (u_n) tend vers $+\infty$.
Si (u_n) est décroissante, appliquer ce qui précède à $(-u_n)$ qui est croissante. □

∗ Pour montrer qu'une suite croissante n'est pas convergente, on montre qu'elle n'est pas majorée.

∗ Ce théorème permet d'établir une convergence de suite sans même savoir ce qu'est la limite.

∗ ⚠ réciproque fausse : pouvez-vous imaginer une suite à valeurs strictement positives et convergente vers 0, mais non décroissante ?
Par exemple, (u_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} = \dfrac{1}{n+1}$ et $u_{2n+1} = \dfrac{1}{2n}$

Pratique 6 :

1. Cette suite croissante est majorée par
$1 + \sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k(k-1)} = 1 + \sum\limits_{k=2}^{n} (\dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}) = 2 - \dfrac{1}{n} \leqslant 2$ (on se ramène à une somme calculable...).

2. $u_{2n} - u_n = \sum\limits_{k=n+1}^{2n} \dfrac{1}{k} \geqslant n \times \dfrac{1}{2n} = \dfrac{1}{2}\cdot$ La suite n'est donc pas majorée puisque $u_{2^n} \geqslant u_1 + \dfrac{n}{2}$, elle est donc divergente.

Remarquez que nous venons d'étudier deux séries intéressantes : la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} \dfrac{1}{k^2}$ est convergente, et la série (dite "harmonique") $\sum\limits_{k\geqslant 1} \dfrac{1}{k}$ est divergente.

15▶

∗ Par exemple, les suites $(1 + \dfrac{1}{n+1})$ et $(1 - \dfrac{1}{n+1})$ sont adjacentes (et de limite 1).

$*$ *Preuve* : Supposons (u_n) croissante et (v_n) décroissante. S'il existe n_0 tel que $v_{n_0} < u_{n_0}$, alors pour tout naturel n supérieur à n_0 on a $v_n \leqslant v_{n_0} < u_{n_0} \leqslant u_n$ donc $|u_n - v_n| \geqslant u_{n_0} - v_{n_0} > 0$, et la suite $(v_n - u_n)$ ne peut tendre vers 0.
Si on suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$, alors : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$. Par conséquent la suite (u_n) est croissante majorée (par v_0) donc convergente vers un réel u, et la suite (v_n) est décroissante minorée (par u_0) donc convergente vers un réel v. Comme $(u_n - v_n)$ converge vers 0, on a $u = v$. □

Pratique 7 :

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)!} > 0$, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{2}{(n+1)!} - \dfrac{1}{n!} = -\dfrac{n-1}{(n+1)!}$, et enfin $v_n - u_n = \dfrac{1}{n!}$, donc les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes. On montrera plus tard que leur limite commune est le nombre e.

16▶

$*$ *Preuve* : On traduit : $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} \subset I_n$ par : $\forall n \in \mathbb{N}$: $a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n$. La suite (a_n) est donc croissante et majorée par b_0 donc convergente vers un réel a. La suite (b_n) est décroissante minorée par a_0 donc convergente vers un réel b. On obtient aussi par passage à la limite que $a \leqslant b$.

Soit $x \in [a, b]$: pour tout naturel n on a $a_n \leqslant a \leqslant x \leqslant b \leqslant b_n$, donc $x \in I_n$.

Par conséquent $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n$ contient $[a, b]$.

Réciproquement, un point x qui appartient à tout I_n vérifie : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leqslant x \leqslant b_n$, et par passage à la limite $a \leqslant x \leqslant b$.

Finalement : $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n = [a, b]$, qui n'est donc pas vide. Si de plus $(b_n - a_n)$ tend vers 0, les deux suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes, donc de limite commune $a = b$, et $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{a\}$. □

$*$ **Exemple d'application** : on ne peut pas "numéroter" les éléments de $\mathbb{R}$ ou même de $[0, 1]$ (on dit que $\mathbb{R}$ **et même** $[0, 1]$ **ne sont pas dénombrables**).

Preuve : Par l'absurde, supposons que l'on puisse numéroter les éléments de $[0, 1]$ en une suite (u_n). Coupons $[0, 1]$ en trois : on choisit un des tiers qui ne contient pas u_0, notons-le $I_0 = [a_0, b_0]$. Par récurrence simple, on construit ainsi une suite de segments emboîtés $(I_n) = ([a_n, b_n])$ telle que pour tout naturel n, le segment I_n soit de largeur $1/3^{n+1}$ et ne contienne pas u_n.

D'après le théorème des segments emboîtés, $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n$ est formé d'un seul point c. En particulier, cet élément c est un terme de la suite, disons u_{n_0}. Or c appartient à tous les I_n donc à I_{n_0}. Or u_{n_0} n'appartient pas à I_{n_0} par construction, d'où la contradiction. □

17▶

$*$ Pour fabriquer une sous-suite, on sélectionne certains termes de la suite (u_n), mais en conservant leur rangement !!!
Par exemple, avec $\varphi : n \mapsto 2n$, on obtient (1) comme suite extraite de $(-1)^n$.
Par exemple, avec $\varphi : n \mapsto 3n$, on obtient la suite $(3n)$ extraite de la suite (n).

$*$ On utilise très souvent les suites suivantes extraites de (u_n) :

- la suite (u_{n+1}) obtenue avec $\varphi : n \mapsto n + 1$
- la suite (u_{2n}) obtenue avec $\varphi : n \mapsto 2n$
- la suite (u_{2n+1}) obtenue avec $\varphi : n \mapsto 2n + 1$

$*$ Noter que pour toute injection croissante $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, on a pour tout naturel n que $\varphi(n) \geqslant n$.

18▶

$*$ *Preuve* : Soit (u_n) une suite convergente vers un complexe u, soit $(u_{\varphi(n)})$ une suite extraite, et soit $\varepsilon > 0$.
Par hypothèse, il existe n_0 tel que pour tout naturel $n \geqslant n_0$ on ait $|u_n - u| < \varepsilon$.

Alors, pour tout $n \geqslant n_0$, $\varphi(n) \geqslant n \geqslant n_0$ donc $|u_{\varphi(n)} - u| < \varepsilon$, ce qui prouve que la sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ converge vers u.

Cette preuve s'adapte sans difficulté à une suite réelle qui tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.

Par contraposée, si (u_n) possède une sous-suite divergente, ou deux suites extraites de limites distinctes, alors elle ne peut être convergente.

De même, si (u_n) est une suite convergente qui admet une suite extraite convergeant vers l, alors la convergence de (u_n) ne peut être que vers l d'après la première partie. $\square$

* Une suite réelle **monotone** admettant une sous-suite tendant vers une limite l dans $\bar{\mathbb{R}}$ tend vers l !

* Par exemple, la suite $(\cos(n\pi/6))$ est divergente puisqu'en ne gardant que les termes d'indices multiples de 12 on obtient la suite constante de valeur 1, et en ne gardant que les termes d'indices congrus à 3 modulo 12, on obtient la suite constante de valeur -1.

Pratique 8 :

1. Regarder les sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}), de limites respectives 1 et -1 distinctes. La suite diverge.

2. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un rang n_0 à partir duquel $|u_{2n} - l| < \varepsilon$, et un rang n_1 à partir duquel $|u_{2n+1} - l| < \varepsilon$. Alors, pour $n \geqslant \text{Max}(2n_0, 2n_1 + 1)$, on a $n = 2p$ pair avec $p \geqslant n_0$ ou $n = 2p + 1$ impair avec $p \geqslant n_1$, donc $|u_n - l| < \varepsilon$.
On a donc bien prouvé la convergence de (u_n) vers l.

19▶

* *Preuve* : Commençons par le cas d'une suite réelle.
À mutiplication par un scalaire près et translation près, on peut se ramener au cas d'une suite (u_n) à valeurs dans $I_0 = [0, 1]$. Posons $\varphi(0) = 0$: $u_{\varphi(0)} \in I_0$.
Une des deux moitiés de I_0, notée I_1, contient une infinité de termes de la suite $(u_n)_{n>\varphi(0)}$. On choisit un indice d'un terme de la suite dans I_1, qu'on note $\varphi(1)$. On a donc $\varphi(1) > \varphi(0)$.
Par récurrence simple, on construit par découpage en moitiés sucessives une suite de segments emboîtés (I_n) dont la suite des diamètres associée converge vers 0, et telle que pour tout naturel n, I_{n+1} est une des deux moitiés de I_n qui contient une infinité de termes de la suites $(u_n)_{n>\varphi(n)}$, et $\varphi_{n+1} > \varphi(n)$ est l'indice d'une terme de la suite $(u_n)_{n>\varphi(n)}$.
L'intersection des segments I_n est un singleton $\{l\}$.
Pour tout naturel n, en notant $I_n = [a_n, b_n]$, on a : $a_n \leqslant u_{\varphi(n)} \leqslant b_n$. Les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes de limite l. Par le théorème des gendarmes, la suite $(u_{\varphi(n)})$ extraite de (u_n) converge vers l.

Si maintenant la suite (u_n) de départ est complexe et bornée, les suites (v_n) de ses parties réelles et (w_n) de ses parties imaginaires sont réelles et bornées.
Il existe donc une sous-suite $(v_{\varphi(n)})$ de (v_n) qui converge vers un réel v.
Attention à cette étape piège : la suite $(w_{\varphi(n)})$ est réelle et bornée, on peut donc en extraire une sous-suite convergente $(w_{\varphi(\psi(n))})$ vers un réel w (les valeurs d'indices sont à prendre parmi les valeurs prises par φ...).
On a donc $(v_{\varphi(\psi(n))})$ convergente vers v puisqu'extraite de de $(v_{\varphi(n)})$.
Finalement, la suite $(u_{\varphi(\psi(n))})$ extraite de (u_n) est convergente (vers $v + \mathrm{i}w$). $\square$

* Ceci permet par exemple de "forcer" la convergence d'une suite qui diverge parce qu'elle admet plusieurs valeurs d'adhérences.

Par exemple, soit K une partie de $\mathbb{C}$ non vide et bornée. On appelle diamètre de K, noté $\text{diam}(K)$, la borne supérieure des distances formées par deux points de K. On veut montrer qu'il existe deux points adhérents à K (c'est-à-dire limites de points de K), a et b, tels que $\text{diam}(K) = |a - b|$.

Pour cela, on justifie que cette borne supérieure existe bien : $\{|z - z'| \mid z \in K, z' \in K)\}$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée par $2M$ où K est non vide et vérifie : $\forall z \in K, |z| \leqslant M$.
Par caractérisation séquentielle de la borne supérieure, il existe deux suites de points de K, (a_n) et (b_n), telles que la suite $|a_n - b_n|$ converge vers $\text{diam}(K)$.

Voilà où le théorème de Bolzano-Weierstrass intervient : imaginez que K soit le cercle trigonométrique, les deux suites considérées n'on pas de raison de converger puisque le problème a une infinité de solutions (tous les couples $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, -\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$).
Les suites (a_n) et (b_n) sont bornées puisque K l'est. Il existe donc une suite extraite $(a_{\varphi(n)})$ de (a_n) qui converge vers un complexe a (adhérent à K par définition). Comme pour la fin de la preuve du théorème de BW, il existe enfin une suite extraite $(b_{\varphi(\psi(n))})$ de $(b_{\varphi(n)})$ convergente vers un complexe b (adhérent à K). Par continuité de la fonction module sur $\mathbb{C}$, la suite $(|a_{\varphi(\psi(n))} - b_{\varphi(\psi(n))}|)$ converge vers $|a-b|$, et par unicité de la limite : $|a-b| = \mathrm{diam}(K)$. □

20▶

∗ Les propriétés de f sur un intervalle I ne sont intéressantes et perpétuables aux éléments de la suite que si I est stable.
Par exemple, si f est à valeurs positives sur I et que $u_0 \in I$, alors $u_1 \geqslant 0$, mais on s'arrête là si I n'est pas stable par f, car rien ne prouve alors que $u_1 \in I$, on ne peut alors utiliser la positivité de f sur I...

∗ Si f est continue sur I, et si (u_n) converge vers $l \in I$, alors la suite (u_{n+1}) extraite de (u_n) converge aussi vers l et la suite $(f(u_n))$ également par continuité de f. En passant à la limite dans la relation : $u_{n+1} = f(u_n)$, il vient $l = f(l)$.
Ainsi on est ramené dans ce cadre à chercher les limites possibles de (u_n) parmi les points fixes de f, c'est-à-dire les solutions de l'équations $f(x) = x$ d'inconnue x dans I. Graphiquement, ces points fixes de f se trouvent aux intersections du graphe de f avec la droite $y = x$.

∗ Inversement, on essaie souvent de résoudre un problème en écrivant sa solution éventuelle comme point fixe d'une fonction, et on applique les techniques développées ci-après. Le théorème de Cauchy-Lipschitz pour les équations différentielles linéaires générales peut se démontrer de cette manière...

21▶

∗ Les techniques précédentes s'appliquent, mais on va voir quelques outils pour les cas où elles ne permettent pas de conclure.

∗ Ne pas confondre f avec la fonction u associée à la suite (u_n) : par exemple, f croissante ne donne pas (u_n) croissante !

∗ **Preuve** : - Supposons f croissante sur I stable par f. (Les termes de la suite appartiennent à I).
Supposons $u_n \leqslant u_{n+1}$, alors, $f(u_n) = u_{n+1} \leqslant f(u_{n+1}) = u_{n+2}$, donc par récurrence simple on obtient que (u_n) est croissante.
Supposons $u_n \geqslant u_{n+1}$, alors, $f(u_n) = u_{n+1} \geqslant f(u_{n+1}) = u_{n+2}$, donc par récurrence simple on obtient que (u_n) est décroissante.
On observe que le placement de u_1 par rapport à u_0 suffit dans ce cas pour connaître le sens de monotonie de (u_n).

- Supposons f décroissante sur I stable par f. Alors $f \circ f$ est croissante, et I est stable par $f \circ f$. Or $u_{2(n+1)} = (f \circ f)(u_{2n})$ et $u_{2(n+1)+1} = (f \circ f)(u_{2n+1})$. D'après la première partie, les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones, le sens de monotonie étant donné par les signes de $u_2 - u_0$ et de $u_3 - u_1$ respectivement.
Supposons $u_0 \leqslant u_2$, alors par décroissance de f : $u_1 \geqslant u_3$ donc (u_{2n}) est croissante et (u_{2n+1}) décroissante. Si $u_0 \geqslant u_2$, c'est l'inverse.

- Enfin, si on suppose (u_n) convergente, les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont convergentes vers la même limite ; elles sont ici de monotonies opposées, ce sont des suites adjacentes.
Inversement, si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes, on a déjà vu que la suite (u_n) converge vers leur limite commune. □

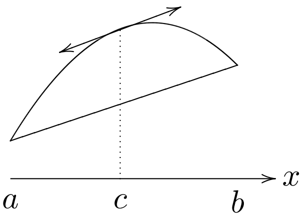
∗ Dans le cas f décroissante, on peut avoir à chercher les points fixes de $f \circ f$ pour obtenir les éventuelles limites de (u_{2n}) et de (u_{2n+1}). Noter qu'un point fixe de f est point fixe pour $f \circ f$, la réciproque étant fausse.

22▶

∗ Preuve admise, voir chapitre ultérieur.

∗ Idée principale à retenir : la différence entre deux valeurs prises par f, par exemple $f(b) - f(a)$, ou encore un taux d'acroissement comme $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$, se contrôle ou s'évalue par les propriétés de f' (par exemple si on a un encadrement de f' sur l'intervalle).

Le taux d'accroissement de f entre les points a et b s'interprète graphiquement, on l'a déjà vu, comme la pente de la corde entre les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$: le théorème affirme qu'il existe un point du graphe entre les abscisses a et b où la pente de la tangente est exactement celle de la corde.

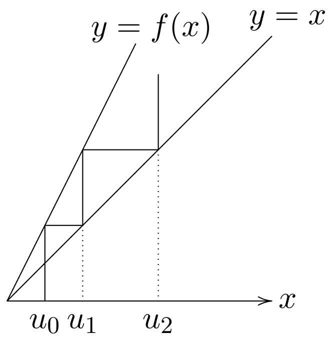


23▶

∗ En annexe du cours, vous trouverez différentes situations traitées avec un programme Python.

Tout d'abord pour le cas "simple" d'une fonction f linéaire (de type $x \mapsto ax$) puis quelques exemples de cas non linéaires (avec f quadratique, de type $x \mapsto ax(1 - x)$).

Sur les graphiques, visualisez l'axe des abscisses, la droite d'équation $y = x$, et le graphe de f. L'intersection entre le graphe de f et la droite $y = x$ donne le ou les points fixes (dans ces exemples, il y a l'origine au moins). Les "escaliers" ou "spirales" permettent de suivre les valeurs de la suite (u_n) sur l'axe des abscisses.



∗ Pour le cas linéaire $x \mapsto ax$, la dérivée de f au point fixe origine est a, et on observe graphiquement comment $|a|$ régit la convergence ou la divergence, et la vitesse de convergence ou de divergence de la suite. Cela illustre le résultat du calcul rigoureux : $u_{n+1} = f(u_n) = au_n$, donc la suite est géométrique de raison a.

∗ Pour le cas non linéaire, c'est plus compliqué, mais c'est le théorème des accroissements finis qui permet une étude rigoureuse. Au voisinage d'un point fixe c (qui vérifie donc $f(c) = c$), on étudie comment évolue la suite par rapport à c en écrivant : $(u_{n+1} - c) = f(u_n) - f(c) = (u_n - c)f'(c_n)$ où c_n est un point de l'intervalle $]c, u_n[$.

Très grossièrement, pour u_n assez proche de c, $f'(u_n)$ est proche de $f'(c)$ et le passage de $u_n - c$ à $u_{n+1} - c$ se fait grâce à un rapport géométrique proche de $f'(c)$....

Par exemple, si c appartient à un intervalle I stable par f et sur lequel $|f'| \leqslant K < 1$, et si on démarre avec u_0 dans I, alors les termes de la suite (u_n) sont tous dans I et pour tout n on a : $|u_{n+1} - c| \leqslant K|u_n - c|$ puis par récurrence simple : $|u_n - c| \leqslant K^n|u_0 - c|$, ce qui montre que la suite (u_n) converge vers c avec une vitesse au moins géométrique de raison K. De plus, on imagine bien que plus on est proche de c et plus on va pouvoir choisir K proche de $|f'(a)|$ (c'est vrai si f' est continue)....

L'idée est donc que le comportement de (u_n), dans certaines conditions (un terme de la suite se trouve "piégé" assez près du point fixe c par exemple), est conditionné par la valeur de la dérivée au point fixe étudié. Comme c'est le cas lorsque f est linéaire ! On se rappelle à cette occasion que $x \mapsto f'(l)(x - l) + l$ est l'équation de la tangente en c au graphe de f, cette expression étant celle de la fonction affine la plus proche de celle de f au voisinage de c.

∗ Tout ceci sert à vous donner quelques indices de prédiction pour l'étude d'une suite qui ne se fait pas par calcul direct. On cherche les points fixes, on calcule les valeurs des dérivées de la fonction associée, on recherche les intervalles stables autour des points fixes, on utilise si possible des arguments de monotonie pour obtenir convergence ou divergence, et à défaut on pense à utiliser le théorème des accroissements finis pour se ramener à des majorations et à des suites géométriques, ce qui procure ensuite des renseignements quantitatifs (vitesse de convergence ou de divergence).

∗ Exemple (SAVOIR 3) : $u_0 \geqslant 0$ et pour $n \geqslant 0$: $u_{n+1} = 1 + \sqrt{u_n}$. Par récurrence simple, les termes de la suite sont bien définis et positifs. En d'autres termes, $\mathbb{R}_+$ est stable par $f : x \mapsto 1 + \sqrt{x}$. Cette fonction

est croissante sur cet intervalle stable, la suite (u_n) est donc monotone, de sens de monotonie donné par le signe de $u_1 - u_0 = 1 + \sqrt{u_0} - u_0$. On étudie donc le signe de $f(x) - x$ sur $\mathbb{R}_+$: $f(x) - x = 1 + \sqrt{x} - x$ s'annule aux points fixes de f, qui vérifient : $l = 1 + \sqrt{l}$, qui équivaut à $l - 1 = \sqrt{l}$ ou ($l^2 - 3l + 1 = 0$ avec $l \geqslant 1$). Il y a donc un seul point fixe : $l = \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}$
$x \mapsto f(x) - x$ est de signe positif sur $[0, l]$ et négatif sur $[l, +\infty]$. Ces deux intervalles sont stables par f.
Si $u_0 \in [0, l[$: la suite est croissante majorée par l donc convergente, vers le seul point fixe possible de f adhérent à cet intervalle : l.
Si $u_0 = l$, la suite est constante de valeur l.
Si $u_0 \in]l, +\infty[$, la suite est décroissante minorée par l donc converge, et la seule limite possible est l.
Dans tous les cas, la suite (u_n) converge vers l.

Pour évaluer la vitesse de convergence dans le cas $u_0 = 1$ (la suite converge en croissant vers l), on utilise le théorème des accroissements finis. Il existe un point c_n de $]1, l[$ tel que :

$$|u_{n+1} - l| = |f(u_n) - f(l)| = |u_n - l||f'(c_n)| = \frac{|u_n - l|}{2\sqrt{c_n}} \leqslant \frac{|u_n - l|}{2}$$

En itérant : $|u_n - l| \leqslant \dfrac{|u_0 - l|}{2^n} \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$ puisque $l - 1 \leqslant 2$ (qui équivaut à $(l - \frac{3}{2})^2 = \frac{5}{4} \leqslant \frac{9}{4}$).

24▶

$*$ *Preuve* : L'ensemble $\mathcal{E}$ contient clairement la suite nulle. Si maintenant (u_n) et (v_n) vérifient $(\mathcal{R})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors en multipliant par λ la relation vérifiée par (u_n) et en additionnant celle vérifiée par (v_n) on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $(\lambda u_{n+2} + v_{n+2}) = a(\lambda u_{n+1} + v_{n+1}) + b(\lambda u_n + v_n)$, donc la suite $(\lambda u_n + v_n)$ appartient bien à $\mathcal{E}$.

Par récurrence immédiate, pour $n \geqslant 2$, les termes u_n sont complètement déterminés par la donnée de u_0 et u_1 : c'est le cas de u_2, et si pour un n donné on connaît u_n et u_{n+1}, alors de la relation $(\mathcal{R})$ on déduit u_{n+2}. φ est donc bijective. $\square$

25▶

Comme dans le cas des équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants, on propose ici la recherche des suites solutions de la forme (r^n) parce que ça marche bien, et vous verrez l'an prochain un argument plus convaincant.
Et comme dans le cas des équations différentielles citées, r est possible s'il est solution d'une équation dite caractéristique (qu'on obtient par simple calcul, en remplaçant (u_n) par (r^n) dans $(\mathcal{R})$).

26▶

$*$ *Preuve* : Par calcul simple, (r^n) appartient à $\mathcal{E}$ si, et seulement si, r est solution de l'équation caractéristique.

- Si l'équation caractéristique admet deux solutions distinctes r_1 et r_2, on a vu que toute suite combinaison linéaire $(\alpha r_1^n + \beta r_2^n)$ est solution de $(\mathcal{R})$. Or un seul élément de $\mathcal{E}$ existe prenant des valeurs u_0 et u_1 données : le système linéaire $\begin{cases} \alpha + \beta = u_0 \\ \alpha r_1 + \beta r_2 = u_1 \end{cases}$ est de Cramer puisque de déterminant non nul $r_2 - r_1$, il admet donc une unique solution en (α, β), ce qui montre que toute suite de $\mathcal{E}$ prend la forme $(\alpha r_1^n + \beta r_2^n)$ pour le couple de constantes (α, β) adéquat.
- Si l'équation caractéristique admet une racine double $r = a/2$, vérifions que (nr^n) est aussi solution de $(\mathcal{R})$: $(n+2)r^{n+2} - a(n+1)r^{n+1} - bnr^n = 0$ équivaut (puisque $r \neq 0$) à $(n+2)\dfrac{a^2}{4} - (n+1)\dfrac{a^2}{2} - bn = -n\dfrac{a^2}{4} - bn = 0$ puisque le discriminant $a^2 + 4b$ du trinôme définissant l'équation caractéristique est nul dans ce cas.

Il ne reste plus qu'à vérifier que toute suite de $\mathcal{E}$ peut s'écrire sous la forme $(\alpha r^n + \beta n r^n)$. Comme dans le premier point, il suffit de montrer qu'il existe un couple (α, β) tel que $\begin{cases} \alpha = u_0 \\ \alpha r + \beta r = u_1 \end{cases}$. Ce système est également un système de Cramer puisque de déterminant égal à r (non nul). $\square$

$*$ Autrement dit, $\mathcal{E} = \mathrm{Vect}((r_1^n), (r_2^n))$ ou $\mathcal{E} = \mathrm{Vect}((r^n), (nr^n))$ suivant que le discriminant de l'équation caractéristique est nul ou pas, les racines étant complexes ainsi que les coefficients des combinaisons linéaires utilisés.

Pratique 9 :

1. Suites de la forme $(\alpha(2+\sqrt{7})^n+\beta(2-\sqrt{7})^n)$ avec α et β complexes, qu'on détermine pour une suite données par les valeurs de départ u_0 et u_1.

2. L'ensemble des suites solutions est : $\mathrm{Vect}(((-\mathrm{i})^n),(n(-\mathrm{i})^n))$.

3. Suites de la forme $(\alpha(\mathrm{i})^n+\beta(-\mathrm{i})^n)$ avec α et β complexes.

27▶

$*$ *Preuve de (c)* : L'équation caractéristique étant à coefficients réels, pour le seul cas (c) restant à traiter, il y a deux racines complexes conjuguées $\rho\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\theta}$.
Une base complexe de solutions est donnée par les suites $(\rho^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta})$ et $(\rho^n\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta})$. La demi-somme et la demi-différence divisée par i donnent donc deux solutions ici réelles : $(\rho^n\cos(n\theta))$ et $(\rho^n\sin(n\theta))$. Il ne reste plus qu'à vérifier que ces deux suites forment une base de l'ensemble des solutions réelles, c'est-à-dire que le système $\begin{cases}\alpha=u_0\\ \alpha\rho\cos\theta+\beta\rho\sin\theta=u_1\end{cases}$ admet bien une solution. C'est un système de Cramer de déterminant $\rho\sin\theta$, non nul puisque 0 n'est pas solution de l'équation caractéristique ($b\neq 0$) et $\theta\neq\pi$ modulo π puisque $\Delta<0$. □

$*$ Ainsi, dans le cas (c), toute suite solution prend la forme : $(\rho^n(\alpha\cos(n\theta)+\beta\sin(n\theta))$

Pratique 10 :

1. Suites de la forme $(\alpha+\beta(-1))^n)$ avec α et β réels

2. L'ensemble des suites réelles solutions est : $\mathrm{Vect}((\cos(n\frac{\pi}{2})),(\sin(n\frac{\pi}{2})))$.

3. Suites réelles de la forme $2^n(\alpha\cos(2n\frac{\pi}{3})+\beta\sin(2n\frac{\pi}{3}))$ avec α et β réels.

28▶

Preuve : 1) D'une part, si (u_n) est une suite convergente vers u à éléments dans un fermé qu'on peut noter $[a,b]$ avec a et b dans $\overline{\mathbb{R}}$, le théorème des suites encadrées donne $u\in[a,b]$.
D'autre part, si l'intervalle I considéré n'est pas fermé, c'est qu'une de ses extrémités réelle a ne lui appartient pas. Par exemple, si $I=\,]a,b)$ avec $a<b$, la suite $(a+\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^*})$ est une suite de points de I qui converge vers a qui n'est pas dans I.

2) Ceci a déjà été vu dans le chapitre sur les nombres réels.

3) Ceci est déjà vu pour la propriété générale. En particulier, pour montrer que $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$, on a utilisé que $\mathbb{R}$ est archimédien.

4) À voir dans le chapitre ultérieur sur les limites et la continuité. □

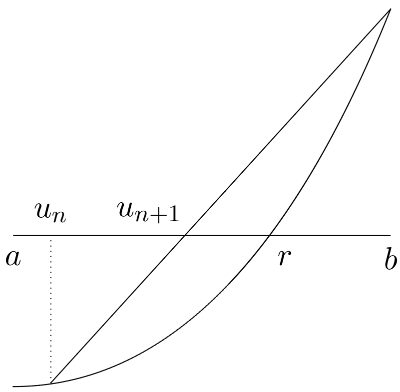
29▶

La recherche par dichotomie est une autre façon de procéder. On coupe l'intervalle courant en deux parties, et on évalue f à la moitié pour déterminer dans quelle moitié se situe le zéro cherché, et on recommence. Si on implémente cette méthode, il faut penser à arrêter le découpage si l'évaluation donne 0 ou si la largeur de l'intervalle courant est inférieure à une marge d'erreur fixée à l'avance.

30▶

Une approximation de r étant donnée (appelons-la u_n), on en fabrique une nouvelle en "remplaçant" la courbe de g par sa corde entre les points $(u_n, g(u_n))$ et $(b, g(b))$. L'intersection de cette corde avec l'axe des abscisses donne u_{n+1}, et on recommence.

La pente de la corde est $\dfrac{g(b)-g(u_n)}{b-u_n}$, donc en regardant les inverses des pentes : $\dfrac{u_{n+1}-u_n}{0-g(u_n)} = \dfrac{b-u_n}{g(b)-g(u_n)}$, ce qui donne bien $u_{n+1} = f(u_n)$ avec la fonction proposée. Remarquer que r est bien l'unique point fixe de f.

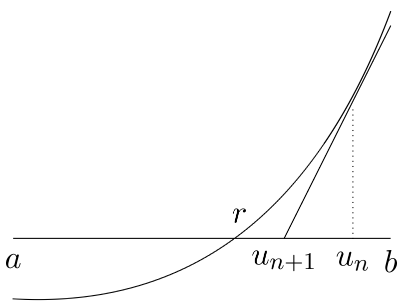


Pour établir la convergence de la suite (u_n) vers r dans ce cadre, on calcule :
$u_{n+1} - r = u_n - r - \dfrac{b-u_n}{g(b)-g(u_n)}(g(u_n)-g(r)) = (u_n - r)\left(1 - \dfrac{pente(u_n, r)}{pente(u_n, b)}\right)$ où on note $pente(\alpha, \beta)$ la pente de la corde au graphe de g entre les points d'abscisses α et β. À cause des hypothèses de croissance de g' (c'est une histoire de croissance de pente ou "convexité"), la dernière parenthèse est positive et inférieure à 1, donc la suite (u_n) se rapproche de r, en croissant si $u_0 < r$, en décroissant si $u_0 > r$.
(u_n) est donc croissante majorée par r ou décroissante minorée par r, donc converge, et sa limite est r, seul point fixe de f.

Remarquer que $f'(r) = 1 - \dfrac{g'(r)}{pente(r,b)} = 1 - \dfrac{g'(r)}{g'(c)}$ pour un point c entre r et b, d'après le théorème des accroissements finis. Comme g' est croissante, cette dérivée de f au point fixe est positive et inférieure strictement à 1. On s'attend donc à une convergence à vitesse géométrique de (u_n) vers r.

31▶

Ici, une approximation de r étant donnée (appelons-la u_n), on en fabrique une nouvelle en "remplaçant" la courbe de g par sa tangente au point $(u_n, g(u_n))$. L'intersection de cette tangente avec l'axe des abscisses donne u_{n+1}, et on recommence.
La pente de la tangente considérée est $g'(u_n)$, donc en regardant les inverses des pentes : $\dfrac{u_{n+1}-u_n}{0-g(u_n)} = \dfrac{1}{g'(u_n)}$, ce qui donne bien $u_{n+1} = f(u_n)$ avec la fonction proposée. Remarquer que r est bien l'unique point fixe de f.



Pour établir la convergence de la suite (u_n) vers r dans ce cadre, on calcule :
$u_{n+1} - r = u_n - r - \dfrac{g(u_n)-g(r)}{g'(u_n)} = (u_n - r)\left(1 - \dfrac{pente(u_n, r)}{g'(u_n)}\right) = (u_n - r)(1 - \dfrac{g'(c_n)}{g'(u_n)})$ pour un c_n entre u_n et r, grâce au théorème des accroissements finis. À cause des hypothèses de croissance de g', la dernière parenthèse est positive et inférieure à 1 lorsque $u_n > r$, mais négative sinon. Ainsi, dès la deuxième itération, à condition que u_{n+1} appartienne à I, les termes de la suite se situent à droite de r, et la suite (u_n) décroît et est minorée par r, donc converge vers le seul point fixe de f, c'est-à-dire r.

Deux remarques :

a) cette méthode ne permet donc d'approcher r que par excès (dans ce cadre), on la conjugue donc avec la méthode de Lagrange pour obtenir un encadrement de r ;

b) $f'(r) = 1 - \dfrac{g'(r)}{g'(r)} = 0$, donc la suite (u_n) converge "très vite" vers r, plus vite que n'importe quelle suite géométrique qui converge vers 0.

$*$ Avec l'équation $x^2 = 2$, on applique la méthode Newton avec $g : x \mapsto x^2 - 2$ sur $[1, 2]$, avec $u_0 = 2$ par exemple, puis $u_{n+1} = f(u_n) = u_n - \dfrac{u_n^2 - 2}{2u_n} = \dfrac{1}{2}\dfrac{u_n^2 + 2}{u_n}\cdot$ Noter que toutes les valeurs prises par la suite sont rationnelles, et cette suite de rationels converge vers l'irrationnel $\sqrt{2}$.