▶ ▶ 18 : APPLICATIONS LINÉAIRES - MATRICES

1▶

$*$ Comme c'est le cas pour tout type de morphisme, une application linéaire «transporte» les calculs, ici utilisant somme et multiplication externe, c'est-à-dire les combinaisons linéaires.

$*$ Exemples : identité, application nulle, homothéties, $(x, y, z) \mapsto (x + y, x - z)$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$.

$*$ Autre exemples : les **formes linéaires** pour lesquelles l'espace d'arrivée est le corps de base, comme $(x, y, z) \mapsto ax + by + cz$ linéaire de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}$.
Les formes coordonnées sur une base sont des formes linéaires particulières : si $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une base de l'espace E, tout x de E s'écrit de manière unique sous la forme $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$, ce qui permet de définir relativement à (e) les formes coordonnées $e_1^* : x \mapsto x_1$, $e_2^* : x \mapsto x_2$, etc.

$*$ Autres exemples :

- la forme linéaire définie sur l'espace vectoriel des suites complexes convergentes, et qui à une suite associe sa limite
- sur $\mathbb{K}[X]$, les évaluations $P \mapsto P(a)$ où $a \in \mathbb{K}$, la multiplication par un polynôme A ($P \mapsto AP$), la dérivation
- sur $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$, les évaluations $f \mapsto f(a)$ où a est un élément de $\mathbb{K}$
- sur $C^0([a, b], \mathbb{R})$, $f \mapsto \displaystyle\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t$

$*$ Mais, par exemple, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x + 1$ ne sont pas linéaires sur $\mathbb{R}$.

2▶

$*$ *Preuve* : on sait depuis longtemps qu'un morphisme de groupe envoie l'élément neutre du groupe de départ sur le neutre du groupe d'arrivée. Or une application linéaire est en particulier un morphisme de groupe.
Plus directement : pour $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $f(0_E) = f(0_E + 0_E) = 2f(0_E)$ donc $f(0_E) = 0_F$. □

$*$ Pas de réciproque ! ! On sait déjà que $\operatorname{Ker} f = f^{-1}(0)$ est réduit à l'élément neutre 0 si, et seulement si, f est injectif (ceci date des propriétés d'un morphisme de groupe).

3▶

$*$ *Preuve* : Soit $(e_i)_{i \in I}$ une base de E, qu'on suppose donc exister, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
Soit $x \in E$, qui s'écrit de manière unique sous la forme : $x = \sum\limits_{i \in I} x_i e_i$, où les x_i sont des scalaires presque tous nuls. f étant linéaire : $f(x) = \sum\limits_{i \in I} \lambda f(e_i)$.
Ainsi, la connaissance des $f(e_i)$ suffit pour donner $f(x)$. □

$*$ Tout cela est très pratique ... à condition qu'il existe une base dans E !

4▶

D'après la note 3, il suffit, pour connaître f, de connaître l'écriture dans la base d'arrivée (f) de l'image par u de tout vecteur de la base (e) !

5▶

$*$ Il s'agit donc juste de donner une représentation, ou un codage, d'une application linéaire, relativement à une base.

$*$ Inversement, toute matrice de $\mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ représente un morphisme de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^q$ munis de leurs bases canoniques.

Pratique 1 :

1. On obtient une matrice carrée de taille p (à p lignes et p colonnes), constituée de 0 sauf sur la diagonale constituée de 1 pour l'identité et de λ pour l'homothétie de rapport λ. Ces matrices sont des cas particuliers de matrices dites diagonales. On remarwue également que le choix de la base de l'espace n'intervient oas sur le résultat.

2. On a une matrice à une ligne et $p = \dim E$ colonnes. Comme l'image de chaque vecteur de base est nulle sauf pour le numéro i, il s'agit d'une matrice « ligne » composée de 0 sauf en colonne i où se trouve 1 : (0 0 ... 1 0 ...)

3. Cette application linéaire, notée u, est caractérisée par $u(e_1) = e_1$ et $u(e_2) = -e_2$, et en particulier, $u^2 = \mathrm{Id}_E$ (les images de e_1 et e_2 suffisent pour en être sûr). Il s'agit de la symétrie par rapport à la droite $\mathrm{Vect}(e_1)$ (invariante) parallèlement à la droite $\mathrm{Vect}(e_2)$. Faites un dessin !

4. Il suffit de connaître les images par D (comme dérivation) des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$ et de les y exprimer.

Pour $p \in [\![0, n]\!]$: $D(X^p) = pX^{p-1}$. Ainsi, D est représentée sur la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$ par la matrice à $n+1$ lignes et colonnes, triangulaire supérieure à diagonale formée de 0, ci-contre :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & (0) & & \ddots & n \\ 0 & \dots & & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

On obtient la deuxième matrice demandée en supprimant la dernière ligne dans la matrice précédente.

6▶

$*$ Rappels : soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, E_1 un sous-espace vectoriel de E, et F_1 de F.

La restriction de u à E_1 est notée $u_{|E_1} : E_1 \to F$ et définie par : $\forall x \in E_1$, $u_{|E_1}(x) = u(x)$.
Elle est linéaire.

Si $u(E) \subset F_1$, on peut définir la corestriction de u à F_1 , notée $u_{|F_1}$, définie de E vers F_1 par : $\forall x \in E$, $u_{|F_1}(x) = u(x)$. Elle est linéaire.

Si $u \in \mathcal{L}(E)$ et si E_1 est stable par u, c'est-à-dire $u(E_1) \subset E_1$, u induit sur E_1 un endormorphisme $u_{E_1} : E_1 \to E_1$ définit par : $\forall x \in E_1$, $u_{E_1}(x) = u(x)$

Les opérations $u \mapsto u_{|E_1}$, $u \mapsto u_{|F_1}$, et $u \mapsto u_{E_1}$, si elles sont bien définies, sont linéaires.

$*$ Matriciellement : soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E adaptée à $E = E_1 \oplus E_2$ et soit $f = (f_1, \dots, f_q)$ une base de F adaptée à $F = F_1 \oplus F_2$.
On peut **visualiser** ces « découpages » de bases par des lignes virtuelles qui traversent la matrice représentative M de u entre (e) et (f) (formée de q lignes et p colonnes).

Si E_1 est de dimension p_1, les p_1 premiers vecteurs de (e) forment par construction une base (e') de E_1, et M peut se dessiner : $(U_1|U_2)$ où $U_1 = \mathrm{Mat}_{(e'),(f)}(u_{|E_1})$.

Par exemple, la matrice de la restriction de la dérivation (voir Pratique 1, 4.) à $\mathrm{Vect}(1, X, X^2)$ de $(1, X, X^2)$ sur la base canoniuque de $\mathbb{R}_n[X]$ est : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Si F_1 est de dimension q_1, les q_1 premiers vecteurs de (f) forment par construction une base (f') de F_1, et M peut se dessiner : $\left(\frac{V_1}{V_2}\right)$. L'hypothèse $u(E) \subset F_1$ se traduit par $V_2 = 0$, et alors V_1 est la matrice représentative de $u_{|F_1}$ entre les bases (e) de E et (f') de F_1.

Enfin, si $u \in \mathcal{L}(E)$ et E_1 est stable par u et de dimension p_1, $M = \mathrm{Mat}_{(e)}(u)$ est carrée, comporte p lignes et p colonnes, et $M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)$ où A comporte p_1 lignes et colonnes, et représente u_{E_1} sur la base (e') de E_1 formée des p_1 premiers vecteurs de (e).
Par exemple, $\mathrm{Vect}(1, X, X^2)$ est stable par la dérivation précédente D, et la matrice de l'endomorphisme induit par D sur ce sous-espace muni de la base $(1, X, X^2)$ est : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$*$ Imaginons qu'on ait pu « découper » l'espace E en somme directe de sous-espaces stables par $u \in \mathcal{L}(E)$: $E = \bigoplus_{i=1}^{k} E_i$.
En construisant une base adaptée (e) à cette décomposition, c'est-à-dire en mettant bout à bout des bases des E_i, la matrice représentative de u sur (e) est « diagonale par blocs » : $M = \begin{pmatrix} A_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & A_k \end{pmatrix}$, où le i-ème bloc diagonal représente sur la base de E_i formée de la i-ème tranche de la base (e) de E l'endomorphisme induit par u sur E_i.
En particulier, u est représenté sur une base par une matrice diagonale si, et seulement si, E se décompose comme une somme directe de droites globalement invariantes par u.

Réciproquement, il faut savoir traduire ces formes matricielles particulières en propriétés du morphisme u qu'elle représente (identification de $u(E)$, existence de sous-espaces stables par u).

7▶

$*$ *Preuve* : supposons que l'espace se décompose sous la forme $E = \bigoplus_{i=1}^{k} E_i$.
Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est donné, ses restrictions aux E_i sont imposées : pour $i \in [\![1, k]\!]$ et $x \in E_i$, $u_{|E_i}(x) = u(x)$ par définition.
Réciproquement, pour $i \in [\![1, k]\!]$, on se donne k morphismes $u_i : E_i \to F$.
Soit $x \in E$, qui s'écrit de manière unique $x = \sum_{i=1}^{k} x_i$ avec $x_i \in E_i$.
Il vient par linéarité : $u(x) = \sum_{i=1}^{n} u(x_i)$. Si les u_i sont données comme étant les restrictions de u aux E_i, les vecteurs $u(x_i) = u_i(x_i)$ sont donnés et ainsi $u(x)$ est déterminé. $\square$
$*$ Si E est de dimension finie, on retrouve le théorème disant qu'une application linéaire est complètement déterminée par ses images des vecteurs d'une base de E : il suffit d'utiliser une base adaptée à la décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^{k} E_i$.

$*$ Utilité pratique : encore une possibilité « d'identification » !

$\boxed{\text{Pour montrer que deux applications linéaires } u \text{ et } v \text{ de } E \text{ dans } F \text{ sont égales}}$, si $E = \bigoplus_{i=1}^{k} E_i$, et si les restrictions u_i et v_i aux E_i de u et v sont identiques, alors $u = v$.
Dans le cadre de la dimension finie, on a déjà vu que si u et v sont linéaires et ont mêmes espaces de départ E et d'arrivée F, et si elles coïncident sur les vecteurs d'une base de E, alors elles sont égales (pas besoin de vérifier que tout x de E satisfait $f(x) = g(x)$!) C'est un cas particulier où, si $(e) = (e_1, \ldots, e_n)$ forme une base de E, on utilise que $E = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{Vect}(e_i)$.

8▶

$*$ *Preuve pour la structure d'espace vectoriel* : On montre que $\mathcal{L}(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{F}(E,F),+,.)$.
L'application nulle est bien linéaire.
Si u et v sont linéaires de E vers F et λ est un scalaire, pour tout x et y de E et α scalaire, par définition des lois dans $\mathcal{F}(E,F)$ et linéarité de u et v :

$$(\lambda u+v)(\alpha x+y)=\lambda u(\alpha x+y)+v(\alpha x+y)=\alpha(\lambda u+v)(x)+(\lambda u+v)(y)$$

donc $\lambda u+v$ appartient bien à $\mathcal{L}(E,F)$ qui est donc stable par combinaison linéaire. □

$*$ *Preuve pour la composition* : Soit $u\in\mathcal{L}(E,F)$ et $v\in\mathcal{L}(F,G)$, vérifions que $v\circ u\in\mathcal{L}(E,G)$.
Soit x et y dans E, et λ un scalaire :

$$(v\circ u)(\lambda x+y)=v(u(\lambda x+y))=v(\lambda u(x)+y)$$
$$=\lambda v(u(x))+v(u(y))=\lambda(v\circ u)(x)+(v\circ u)(y)$$

□

$*$ *Preuve pour la structure d'algèbre de* $(\mathcal{L}(E),+,.,\circ)$: la structure d'espace vectoriel est vue, $\circ$ est interne sur $\mathcal{L}(E)$, toujours associative, d'élement neutre Id_E linéaire ; enfin, pour f, g et h dans $\mathcal{L}(E)$, $(f+g)\circ h=f\circ h+g\circ h$ (règles de calcul) et $f\circ(g+h)=f\circ g+f\circ h$ par linéarité de f. □

9▶

$*$ Somme et produit par un scalaire : calcul au plus simple ! Ce n'est pas le cas du produit...

$*$ Produit : schématiquement, en posant $K=NM$ chaque composante $k_{i,j}$ du produit se calcule comme le produit scalaire du i-ième vecteur ligne de N par le j-ième vecteur colonne de M.

$$\begin{pmatrix} n_{1,1} & \cdots & \cdots & n_{1,q} \\ \vdots & & & \vdots \\ \mathbf{n_{i,1}} & \to & \to & \mathbf{n_{1,q}} \\ \vdots & & & \vdots \\ n_{r,1} & \cdots & \cdots & nr,q \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} m_{1,1} & \cdots & \mathbf{m_{1,j}} & \cdots & m_{1,p} \\ \vdots & & \downarrow & & \vdots \\ \vdots & & \downarrow & & \vdots \\ m_{q,1} & \cdots & \mathbf{m_{q,j}} & \cdots & m_{q,p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & \mathbf{k_{i,j}} & \\ & & \end{pmatrix}$$

Pour qu'un tel produit matriciel soit possible, **il faut la concordance des tailles** : même nombre de colonnes pour la matrice de gauche que de lignes pour la matrice de droite !

Clairement, la question de la commutativité ne se pose pas dans ce cas général !

$*$ Exemple : $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1&-2\\-3&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(-1-6)&(-2-8)\\(-3-12)&(-6-16)\end{pmatrix}$.

$*$ Dans la suite, on n'écrit plus le $\times$.

$*$ Comprenez que le produit de deux matrices carrées diagonales (donc de même taille) donne une matrice diagonale. Idem pour deux matrices triangulaires supérieures, respectivement inférieures.

10▶

$*$ ⚠ La somme et la multiplication externe relatives aux morphismes se traduit par la somme et la multiplication externe sur les matrices correspondantes, mais la composition devient un produit ! Ce n'est en fait qu'une question de vocabulaire...

$*$ *Preuve* : Pour $j\in[\![1,\dim(E)]\!]$, on montre la coïncidence entre les colonnes j de la matrice $M+N$ et de $\mathrm{Mat}_{(e),(f)}(u+v)$, puis de λM et de $\mathrm{Mat}_{(e),(f)}(\lambda f)$, enfin de $\mathrm{Mat}_{(e),(f)}(v\circ u)$ et de NM, via les calculs respectifs de $(u+v)(e_j)$, $\lambda u(e_j)$ et $(v\circ u)(e_j)$ dans les cadres proposés.

Pour la somme : $(u+v)(e_j)=u(e_j)+v(e_j)=\sum\limits_{i=1}^{\dim(F)} m_{i,j}f_i+\sum\limits_{i=1}^{\dim(F)} n_{i,j}f_i=\sum\limits_{i=1}^{\dim(F)}(m_{i,j}+n_{i,j})f_i$.
Ceci est vrai pour chaque colonne j de $\mathrm{Mat}_{(e),(f)}(u+v)$ et on retrouve les colonnes j sommées de M et de N. Finalement : $\mathrm{Mat}_{(e),(f)}(u+v)=M+N=\mathrm{Mat}_{(e),(f)}(u)+\mathrm{Mat}_{(e),(f)}(v)$.

Pour la multiplication externe : $\lambda u(e_j) = \lambda \sum\limits_{i=1}^{\dim(F)} m_{i,j} f_i = \sum\limits_{i=1}^{\dim F} (\lambda m_{i,j}) f_i$. Ceci est vrai pour chaque colonne j de $\mathrm{Mat}_{(e),(f)}(\lambda u)$ et on retrouve la colonne j de M multipliée par λ. Finalement : $\mathrm{Mat}_{(e),(f)}(\lambda u) = \lambda M = \lambda \,\mathrm{Mat}_{(e),(f)}(u)$.

Pour la composition des endomorphismes / produit des matrices :

$$(v \circ u)(e_j) = v(\sum_{k=1}^{\dim F} m_{k,j} f_k) = \sum_{k=1}^{\dim F} m_{k,j} v(f_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{\dim F} m_{k,j} (\sum_{i=1}^{\dim G} n_{i,k} g_i) = \sum_{i=1}^{\dim G} \left(\sum_{k=1}^{\dim F} n_{i,k} m_{k,j} \right) g_i$$

ce qui montre bien que l'élément en ligne i et colonne j de $\mathrm{Mat}_{(e),(g)}(v \circ u)$ est $\sum\limits_{k=1}^{\dim F} m_{i,k} n_{k,j}$, c'est-à-dire $(NM)_{i,j}$ par définition.

Plus facilement, la colonne j du produit MN s'obtient en multipliant M par la colonne j de N, qui représente l'image par u du j-ième vecteur de la base de départ e_j, et on obtient ainsi la représentation matricielle dans la base d'arrivée de $(v \circ u)(e_j)$, et cela pour chaque vecteur de la base de départ...

Montrons enfin que l'application $\Psi : \mathcal{L}(E, F) \to \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$, qui à u associe sa matrice représentative entre les base (e) de E et (f) de F, est un isomorphisme. D'après ce qu'on vient de montrer, Ψ est bien définie et linéaire.

Ψ est bien bijective puisque, comme on l'a déjà vu, la donnée d'une matrice $M = [m_{i,j}]$ de $\mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ et de deux bases (e) de E et (f) de F définit une unique application linéaire u de E dans F associée puisque devant vérifier $u(e_j) = \sum\limits_{i=1}^{q} m_{i,j} f_i$, ce qui définit les images des vecteurs d'une base de E. $\square$

$*$ Pour le cas où $E = F$ et $(e) = (f)$, Ψ vérifie en plus $\Psi(v \circ u) = \Psi(v) \times \Psi(u)$ comme vu ci dessus, et également $\Psi(\mathrm{Id}_E) = \mathrm{I}_n$, ce qui en fait un isomorphisme d'algèbre.

$*$ Y penser : dans le cadre d'espaces vectoriels de dimensions finies, résoudre un problème concernant des applications linéaires peut se faire plus facilement via les matrices, et inversement ! !

$*$ Attention à l'ordre des lettres dans les produits de matrices, comme on y fait attention dans les compositions ! ! Par exemple,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_{1,2} E_{2,2} = E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ mais } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{2,2} E_{1,2} = 0$$

Ces deux matrices ne commutent pas entre elles, on dit de manière générale que le produit matriciel n'est pas commutatif.
Ce qui n'empêche pas que deux matrices diagonales de même taille commutent entre elles.

$*$ $\boxed{\text{Les algèbres } (\mathcal{L}(E), +, ., \circ) \text{ et } (\mathcal{M}_p(\mathbb{K}), +, ., \times) \text{ ne sont ni commutatives, ni intègres.}}$

Par exemple : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{K})}$.

$*$ Supposons $v \circ u = 0$: pour tout y de $\mathrm{Im}\, u$, il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$, donc $v(y) = v(u(x)) = 0$ donc $y \in \mathrm{Ker}\, v$, et donc $\mathrm{Im}\, u \subset \mathrm{Ker}\, v$.

Réciproquement, si $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}\, v$, pour tout x de E, $u(x)$ appartient à $\mathrm{Im}(u)$ inclus dans $\mathrm{Ker}\, v$, donc $v(u(x) = 0$, ce qui signifie $v \circ u = 0$.

Pratique 2 :

1. $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ puis par récurrence simple, pour $n \in \mathbb{N}$: $M^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. Plus rapidement : $M = \mathrm{I}_2 + J$ avec $J = E_{1,2}$ et $J^2 = 0$. Comme I_2 et J commutent, par la formule du binôme, pour $n \geqslant 1$: $M^n = \mathrm{I}_2 + nJ = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

11▶

$*$ Pour que ce soit possible : $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$

Alors en notant $C = {}^{\mathrm{t}}(AB)$ et $D = {}^{\mathrm{t}}B\,{}^{\mathrm{t}}A$ et avec des notations évidentes, pour i et j dans $[\![1,p]\!]$: $c_{j,i} = \sum_{k=1}^{q} a_{ik}b_{k,j}$ et $d_{j,i} = \sum_{k=1}^{q} b_{k,j}a_{i,k}$, d'où l'égalité.

$*$ Calculs par blocs : faites-le mentalement pour l'élément en ligne i et colonne j : on utilise la ligne i de la matrice de gauche, la colonne j de la matrice de droite, et on sépare cette somme en deux au passage de la ligne virtuelle...

$*$ ⚠ Cela fonctionne très bien à condition que toutes les conditions de compatibilités des calculs de produits de blocs soient vérifiées ! !

$*$ ⚠ Bien garder l'ordre des lettres figurant les blocs dans les produits : le produit matriciel n'est pas commutatif, les blocs n'ont aucune raison de pouvoir commuter !

Pratique 3 :

Notons n la taille des matrices utilisées.

Pour $n = 1$, le résultat est évident puisque toute matrice de $\mathcal{M}_1(\mathbb{K})$ est triangulaire supérieure.

Hérédité : écrire A_{n+1} et B_{n+1} sous forme : $A_{n+1} = \left(\begin{array}{c|c} \alpha & \cdots \\ \hline (0) & A \end{array}\right)$ et $B_{n+1} = \left(\begin{array}{c|c} \beta & \cdots \\ \hline (0) & B \end{array}\right)$ où A et B sont donc triangulaires supérieures dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, puis effectuer le produit, sachant que par hypothèse de récurrence, AB est triangulaire supérieure...

12▶

$*$ *Preuve* : Soit u bijective et linéaire entre E et F. Vérifions que u^{-1} est linéaire (on sait qu'elle est bijective, d'inverse u).

Soit donc y_1 et y_2 dans F et α un scalaire. Il existe x_1 et x_2 dans E tels que $y_1 = u(x_1)$ et $y_2 = u(x_2)$ par surjectivité de u. Or u étant linéaire, $u(\alpha x_1 + x_2) = \alpha u(x_1) + u(x_2) = \alpha y_1 + y_2$. Comme u est injective, $u^{-1}(\alpha y_1 + y_2) = \alpha x_1 + x_2$ puisque ces deux éléments ont même image par u.

u^{-1} est donc bien linéaire.

Si maintenant E et F sont de dimensions finies p et q, si (e) et (f) sont bases de E et F respectivement, par définition du produit matriciel : $\mathrm{Mat}_{(e),(f)}(u^{-1} \circ u) = \mathrm{Mat}_{(e),(f)}(\mathrm{Id}_E) = \mathrm{I}_p$ et $\mathrm{Mat}_{(f),(e)}(u \circ u^{-1}) = \mathrm{Mat}_{(f),(e)}(\mathrm{Id}_F) = \mathrm{I}_q$, donc la matrice de l'inverse de u est bien l'inverse de la matrice de u (sur les bases fixées).

Ainsi $GL(E)$ contient Id_E, est constitué des éléments inversibles (relativement à $\circ$) de $\mathcal{L}(E)$, est stable par produit (une composée de bijections linéaires et bijective et linéaire) et par passage à l'inverse (l'inverse d'une application linéaire inversible est linéaire), donc forme un sous-groupe de l'ensemble des bijections de E. $\square$

$*$ Au sens de l'inversibilité d'une matrice vu au chapitre sur les systèmes, c'est-à-dire que le système associé admet une unique solution, on a $\dim(E) = \dim(F)$ s'il existe un isomorphisme de E vers F... on va le retrouver dans la suite.

$*$ Qu'est-ce que résoudre un système linéaire ? C'est résoudre $u(x) = b$ avec l'inconnue x dans un espace vectoriel E de dimension p, b le second membre élément de F de dimension q, et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Si u inversible, on a l'unique solution $x = u^{-1}(b)$. Sinon ?... À suivre

13▶

$*$ *Preuve pour l'inverse d'une matrice triangulaire (resp. diagonale)* : par récurrence matricielle ! c'est-à-dire par récurrence sur la taille n de la matrice triangulaire supérieure (resp. diagonale) et inversible $A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Pour $n = 1$, $A_1 = (\alpha)$ est inversible si, et seulement si, $\alpha \neq 0$ et son inverse est $(1/\alpha)$, la propriété est vérifiée.

Soit $n \geqslant 1$ un naturel, supposons la propriété vérifiée pour toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure (resp. diagonale).

Soit $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure (resp. diagonale). On la « découpe » par blocs : $A = \left(\begin{array}{c|c} \alpha & C \\ \hline (0) & B \end{array}\right)$ avec C matrice ligne à n éléments et B triangulaire supérieure dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (resp. C matrice ligne nulle et B matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$).

On suppose A inversible. En découpant de même son inverse $A' = \left(\begin{array}{c|c} \alpha' & C' \\ \hline D' & B' \end{array}\right)$ avec C' matrice ligne de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et D' matrice colonne à n éléments, il vient par calcul de $AA' = A'A = \mathrm{I}_{n+1}$: $\alpha\alpha' = 1$, $\alpha C' + CB = 0_{1,n}$, $BD' = 0_{n,1}$ et $BB' = \mathrm{I}_n$. Ainsi α et non nul et $\alpha' = 1/\alpha$, B est inversible, et par hypothèse de récurrence, son inverse est triangulaire supérieure d'éléments diagonaux les inverses de ceux de B, donc $D' = 0$ et par conséquent A^{-1} est triangulaire supérieure. Si on se place dans le cas où A est diagonale, on obtient, du fait que C est nulle, que C' est nulle, donc que A^{-1} est diagonale. Enfin, les coefficients diagonaux de A^{-1} sont bien les inverses de ceux de A (dans chacun des deux deux cas triangulaire supérieure ou diagonale).

La preuve pour une matrice triangulaire inférieure s'adapte ou on s'y ramène par transposition via le point suivant. $\square$

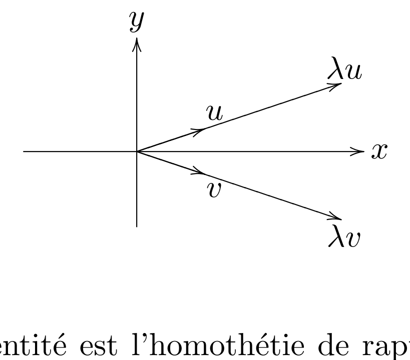
$*$ *Preuve du calcul de l'inverse d'une transposée* : Soit M inversible. MM^{-1} est la matrice identité de taille le nombre de lignes de M, de transposée la même matrice, égale à ${}^{\mathrm{t}}(M^{-1})^{\mathrm{t}}M$. On fait de même avec $M^{-1}M$. On a bien que ${}^{\mathrm{t}}M$ est inversible d'inverse ${}^{\mathrm{t}}(M^{-1})$. Autrement dit, une matrice inversible est de transposée inversible, l'inverse de sa transposée et la transposée de son inverse. $\square$

14▶

$*$ $h_\lambda : x \mapsto \lambda x$ transforme tout vecteur e_i d'une base de E en λe_i, donc $\mathrm{Mat}_{(e)}(h_\lambda) = \lambda\, \mathrm{I}_n$.

Réciproquement, si $u \in \mathcal{L}(E)$ est tel que $\mathrm{Mat}(u) = \lambda\, \mathrm{I}_n$, alors u et h_λ coïncident sur la base (e) de E , donc $u = h_\lambda$.

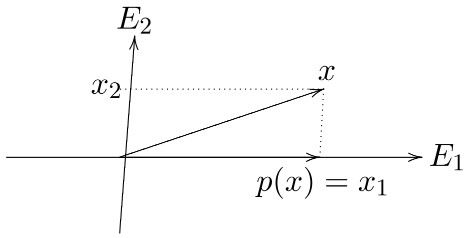
$*$ Pour une homothétie, la matrice représentative sur toute base de E est la même : cette propriété n'est pas vérifiée par d'autres endomorphismes ! (preuve plus tard...)

$*$ 

15▶

L'identité est l'homothétie de rapport 1, la composée $h_\lambda \circ h_\mu$ est égale à $h_{\lambda\mu}$, donc pour $\lambda \neq 0$, h_λ est inversible d'inverse $h_{(1/\lambda)}$ et la composée de deux homothéties de rapports non nul en est encore une.

16▶

∗ 

∗ On vérifie facilement que p est linéaire grâce à l'unicité de la décomposition de tout élément dans $E = E_1 + E_2$: soit $x = x_1 + x_2$ et $y = y_1 + y_2$ dans E écrits suivant cette décomposition, et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\lambda x + y = (\lambda x_1 + y_1) + (\lambda x_2 + y_2)$ est bien l'écriture décomposée de $\lambda x + y$ puisque E_1 et E_2 sont des sous-espaces vectoriels de E, donc $p(\lambda x + y) = \lambda p(x) + p(y)$.

∗ Vérifions que p est idempotent : soit $x \in E$, x s'écrit de manière unique $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$. Alors $p(x_1) = x_1$ puisque $x_1 = x_1 + 0_{E_2}$. Donc $p(p(x)) = p(x)$, et finalement $p \circ p = p^2 = p$.

∗ Réciproquement, soit u un endomorphisme de E idempotent : $u \circ u = u$. Soit $x \in E$. On peut écrire $x = (x - u(x)) + u(x)$, où $u(x - u(x)) = 0$. Ainsi $E = \operatorname{Ker}(u) + \operatorname{Im}(u)$.
Par ailleurs, $\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u = \{0\}$: en effet, soit $y \in \operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} u$, alors il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$, d'où $u(y) = 0 = u^2(x) = u(x) = y$, donc $y = 0$.
Ainsi, $E = \operatorname{Ker}(u) \oplus \operatorname{Im}(u)$, et tout x de E de décompose comme ci-dessus ; par unicité : $x = x_1 + x_2$ avec $x_2 = u(x)$, donc par définition, u est le projecteur de E sur $\operatorname{Im}(u)$ parallèlement à $\operatorname{Ker}(u)$.

∗ Caractérisation du noyau et de l'image d'un projecteur : un idempotent p (vérifiant $p^2 = p$ donc $p^N = p$ pour N naturel non nul quelconque) est donc le projecteur sur $\operatorname{Im} p$ parallèlement à $\operatorname{Ker} p$, et la décompositon de tout $x \in E$ dans la somme directe supplémentaire $E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p$ s'écrit : $x = (x - p(x)) + p(x)$.
Ainsi $\operatorname{Im} p = \{x \in E \mid p(x) = x\} = \operatorname{Ker}(\operatorname{Id}_E - p)$, ce qui **simplifie en général la résolution des exercices** par rapport à la définition générale de $\operatorname{Im} u = \{y \in E \mid \exists x \in E, y = u(x)\}$.

∗ Tous ces points sont fondamentaux pour la connaissance des projecteurs et la résolution des exercices ! Pour résumer, si p est le projecteur de E sur E_1 parallèlement à E_2, on a :

$\boxed{p \circ p = p,\ E = E_1 \oplus E_2 \text{ avec } E_1 = \operatorname{Im} p = \{x \in E \mid p(x) = x\} \text{ et } E_2 = \operatorname{Ker} p}$

et tout x de E s'écrit de manière unique suivant cette décomposition sous la forme

$\boxed{x = p(x) + (x - p(x)) \text{ avec } p(x) \in \operatorname{Im} p \text{ et } x - p(x) \in \operatorname{Ker} p}$

∗ Le seul projecteur inversible est l'identité (composer dans ce cas $p \circ p = p$ par p^{-1}).

17▶

∗ $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker, nul sauf si $i = j$ auquel cas : $\delta_{i,i} = 1$

∗ *Preuve* : p_j est donc défini sur E par $p_j(x) = x_j$ où $x = \sum_{i=1}^{p} x_i$ est l'écriture unique de x suivant la décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$.
Ainsi $p_i \circ p_i = p_i$ puisque p_i est un projecteur, et si $i \neq j$, pour tout x écrit comme précédemment, $p_i(p_j(x)) = p_i(x_j) = 0$.
Enfin, Id_E et $\sum_{i=1}^{p} p_i$ ont mêmes espaces de départ et d'arrivée, sont linéaires et ont mêmes restrictions aux E_i, donc sont égaux.

∗ Cas particulier d'une décomposition $E = E_1 \oplus E_2$: on alors $p_2 = \operatorname{Id}_E - p_1$.
Si p est un projecteur de E, $\operatorname{Id}_E - p$ est aussi un projecteur de E, et

$$\operatorname{Ker} p = \operatorname{Im}(\operatorname{Id}_E - p), \quad \operatorname{Ker}(\operatorname{Id}_E - p) = \operatorname{Im} p$$

$*$ Sur une base adaptée à $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$, la matrice de p_i est diagonale, à éléments diagonaux nuls sauf ceux correspondant au i-ème bloc de la base, tous égaux à 1.
On retrouve par interprétation matricielle que $\sum_{i=1}^{p} p_i = \mathrm{Id}_E$.

Pratique 4 :

1. Notons p_1 la projection sur $\mathrm{Vect}(i+j)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}(i-j)$, et p_2 la projection sur $\mathrm{Vect}(i-j)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}(i+j)$.
Sur la base $(i+j, i-j)$, les matrices de p_1 et de p_2 sont respectivement : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Par ailleurs : $p_1(i+j) = p_1(i) + p_1(j) = i+j$ et $p_1(i-j) = p_1(i) - p_1(j) = 0$ donne $p_1(i) = \frac{1}{2}(i+j) = p_1(j)$, donc la matrice de p_1 sur (i,j) est $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$, et de même celle de p_2 est $\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

2. La partie paire de f est $p(f) : x \mapsto \frac{1}{2}(x+f(x))$, donc on obtient facilement $p \circ p = p$. On peut aussi passer par la somme directe : $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \mathcal{P} + \mathcal{I}$ où $\mathcal{P}$ désigne le sous-espace vectoriel des fonctions paires et $\mathcal{I}$ celui des impaires, tout f s'écrivant $f = (x \mapsto \frac{1}{2}(f(x)+f(-x)) + (x \mapsto \frac{1}{2}(f(x)-f(-x)))$ suivant cette décomposition. En particulier, $\mathrm{Id} - p$ est la projection sur $\mathcal{I}$ parallèlement à $\mathcal{P}$, qui à toute fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ associe sa partie impaire.

18▸

$*$ La linéarité de s se montre comme pour les projecteurs.

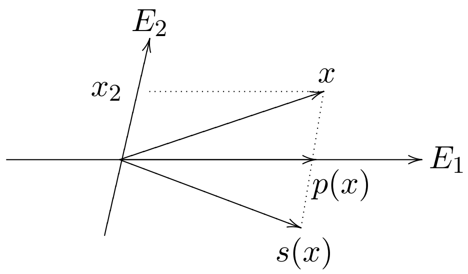
$*$ Si x se décompose en $x = x_1 + x_2$, alors $s(x) = x_1 - x_2$ donc $s(s(x)) = x_1 + x_2 = s(x)$ sonc $s \circ s = \mathrm{Id}_E$. Une symétrie est donc bijective d'inverse elle-même !
On observe qu'on a alors : $x_1 = \frac{1}{2}(x + s(x))$ et $x_2 = \frac{1}{2}(x - s(x))$.
En particulier, les éléments de E_1 sont exactement les invariants de s :

$$E_1 = \mathrm{Inv}(s) = \{x \in E \mid s(x) = x\} = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$$

et les éléments de E_2 sont exactement les éléments de E changés en leur opposé :

$$E_2 = \mathrm{Opp}(s) = \{x \in E \mid s(x) = -x\}$$

$*$ Réciproquement, supposons $u \circ u = \mathrm{Id}_E$, alors tout x de E peut s'écrire :
$x = \frac{1}{2}(x + s(x)) + \frac{1}{2}(x - s(x))$, où on voit que le premier vecteur est invariant par s, le second changé par s en son opposé, l'intersection de ces deux sous-espaces vectoriels étant $\{0\}$.
Ainsi $E = \mathrm{Inv}(s) \oplus \mathrm{Opp}(s)$ et s est bien la symétrie de E par rapport à $\mathrm{Inv}(s)$ et parallèlement à $\mathrm{Opp}(s)$.

$*$


$*$ Comme pour les projecteurs, ces points sont fondamentaux pour la connaissance des symétries et la résolution des exercices où elles interviennent.

∗ Exemples de symétries : la transposition sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, les symétries centrales, axiales, réflexions, $z \mapsto \bar{z}$ sur $\mathbb{C}$, etc.

19▶

∗ Précisons : si $E = E_1 \oplus E_2$, la projection p sur E_1 parallèlement à E_2 et la symétrie s par rapport à E_1 parallèlement à E_2 sont associées dans la relation $s = 2p - \mathrm{Id}_E$.
En effet, ces deux applications linéaires de E ont mêmes restrictions à E_1 et E_2 !
En particulier, $\mathrm{Im}\, p = \mathrm{Inv}(s)$ et $\mathrm{Ker}\, p = \mathrm{Opp}(x)$.

∗ Sur une base adaptée à $E = E_1 \oplus E_2$,
la matrice de p est $\left(\begin{array}{c|c} I & (0) \\ \hline (0) & (0) \end{array}\right)$, celle de s est $\left(\begin{array}{c|c} I & (0) \\ \hline (0) & -I \end{array}\right)$.

∗ $\boxed{\text{De façon résumée, ce qu'il faut bien retenir sur projections et symétries :}}$

On suppose $E = E_1 \oplus E_2$, p_1 désigne la projection sur E_1 parallèlement à E_2, s_1 est la projection associée, par rapport à E_1 parallèlement à E_2, et on a : $s_1 = 2p_1 - \mathrm{Id}_E$;

$$E = E_1 \oplus E_2$$

$E = \mathrm{Im}(p_1) \oplus \mathrm{Ker}(p_1)$ $\forall x \in E,\ x = p_1(x) + (x - p_1(x))$	$E = Inv(s_1) \oplus Opp(s_1)$ $\forall x \in E, x = \dfrac{x + s_1(x)}{2} + \dfrac{x - s_1(x)}{2}$
$E_1 = \mathrm{Im}\, p_1 = \mathrm{Ker}(p_1 - \mathrm{Id}_E)$ $= Inv(p_1) = \{x \in E \mid p_1(x) = x\}$	$E_1 = \mathrm{Ker}(s_1 - \mathrm{Id}_E)$ $= Inv(s_1) = \{x \in E \mid s_1(x) = x\}$
$E_2 = \mathrm{Ker}\, p_1$	$E_2 = \mathrm{Ker}(s_1 + \mathrm{Id}_E) = \{x \in E \mid s_1(x) = -x\}$
$p_1 \circ p_1 = p_1$	$s_1 \circ s_1 = \mathrm{Id}_E$
projection associée : $\mathrm{Id}_E - p_1 = p_2$	symétrie associée : $-s_1 = s_2$

Pratique 5 :

Clairement, appliquer deux transpositions à une matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ redonne la matrice de départ, la transposition est donc une involution.
L'ensemble $\mathcal{S}_n$ des invariants par transposition donne le sous-espace vectoriel des matrices dites symétriques (symétrie par rapport à la diagonale principale, ou $m_{i,j} = m_{j,i}$ pour tous indices), et l'ensemble $\mathcal{A}_n$ des matrices changées en leur opposée par transposition est le sous-espace vectoriel formé des matrices dites antisymétriques (on change le signe de l'élément considéré après symétrie par rapport à la diagonale, ou $m_{j,i} = -m_{i,j}$ pour tous indices, en particulier les éléments diagonaux sont nuls).
Pour fabriquer une matrice symétrique, il faut et il suffit de remplir la partie supérieure relativement à la diagonale, diagonale incluse. Ainsi les $(E_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n}$ génèrent $\mathcal{S}_n$ et en forment une base, donc $\dim \mathcal{S}_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ (compter le nombre d'éléments sur la diagonale, puis sur la sur-diagonale, etc.).
De même pour fabriquer une matrice antisymétrique, il faut et il suffit de remplir la partie strictement supérieure à la diagonale, donc $\dim \mathcal{A}_n = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

20▶

∗ Existence de l'indice : l'ensemble des puissances k donnant $u^k = 0$ est une partie non vide de $\mathbb{N}^*$ si u est nilpotent, qui admet donc un plus petit élément.

∗ Pour toute puissance k supérieure à l'indice d'un nilpotent u, on a $u^k = 0$.

Pratique 6 :

L'endomorphisme nul est nilpotent d'indice 1.
La dérivation D sur $\mathbb{K}_n[X]$ est nilpotente d'indice $n+1$: $D^{n+1}=0$ et $D^n(X^n)=n$ est non nul.

21▶

∗ *Preuve* : soit u un endomorphisme nilpotent d'indice k.
Il existe donc un vecteur x_0 dans E tel $u^{k-1}(x_0)\neq 0$.
On va montrer que la famille $(x_0, u(x_0), \ldots, u^{k-1}(x_0))$ est libre, ce qui imposera $k \leqslant \dim(E)$, puisque la dimension de l'espace est supérieure ou égale à tout cardinal d'une quelconque de ses familles libres.

Supposons donc $\sum_{i=0}^{k-1} a_i u^i(x_0)=0$ pour des scalaires a_i. Supposons qu'un au moins de ces scalaires ne soit pas nul, et notons k_0 l'indice le plus petit vérifiant cette condition : $\sum_{i=k_0}^{k-1} a_i u^i(x_0)=0$.
En prenant l'image par u^{k-1-k_0}, il reste $a_{k_0}u^{k-1}(x_0)=0$, ce qui impose $a_{k_0}=0$, contradiction.
On conclut que la famille est libre et finalement $k \leqslant \dim(E)$. □

∗ Pour le cas où u est nilpotent d'indice $n=\dim E$, les éléments de la matrice représentative de u sur une base du type précédent $(x_0, u(x_0), \ldots, u^{n-1}(x_0))$ sont tous nuls sauf ceux de la «sous-diagonale» formée de 1 puisque $u(u^k(x)) = u^{k+1}(x)$.

∗ Par exemple, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, et plus généralement $E_{i,j}$ lorsque $i \neq j$, est nilpotente d'indice 2.

∗ On peut montrer qu'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure à éléments diagonaux nuls est nilpotente, en vérifiant que $A^n=0$.
En effet, en notant f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ représenté par A sur la base canonique $(e_1, \ldots, e_n)$, la forme triangulaire supérieure de A implique, pour tout $j \in [\![2,n]\!]$, que $f(e_j) \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_{j-1})$, et que $f(e_1)=0$. Par inclusions successives, il vient $f^n(e_j) \in f(\mathrm{Vect}(e_1)) = \{0\}$, soit $f^n=0$.
Une preuve par récurrence matricielle sur la taille de la matrice A est possible également.

Pratique 7 :

Preuve par récurrence sur la dimension p de E, pour $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent.
Si $p=1$, la matrice représentative de u sur la base (1) s'écrit (a), donc $a=0$ puisqu'il existe k naturel tel que $a^k=0$. Donc $u^1=0$.
Soit p un naturel non nul, supposons le résultat établi : si u est nilpotent sur E de dimension p, alors $u^p=0$.
Soit donc u nilpotent sur E de dimension $p+1$. Notons k son indice : il existe $x_0 \in E$ tel que $u^{k-1}(x_0)\neq 0$. On peut donc compléter la famille libre $(u^{k-1}(x_0))$ en une base $\mathcal{B}$ de E. Comme $u(u^{k-1}(x_0)) = u^k(x_0)=0$, la première colonne de $M=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est nulle.

On la «découpe» : $M = \left(\begin{array}{c|c} 0 & {}^{\mathrm{t}}U \\ \hline (0) & N \end{array}\right)$ où U est une matrice colonne à p éléments, et N une matrice carrée à p lignes et colonnes.

On calcule $M^2 = \left(\begin{array}{c|c} 0 & {}^{\mathrm{t}}UN \\ \hline (0) & N^2 \end{array}\right)$, puis par récurrence simple : $M^n = \left(\begin{array}{c|c} 0 & {}^{\mathrm{t}}UN^{n-1} \\ \hline (0) & N^n \end{array}\right)$ pour n naturel non nul quelconque.
En particulier : $M^k=0$ implique $N^k=0$, donc N est une matrice nilpotente. Par hypothèse de récurrence, on a $N^p=0$ puisque N représente par exemple sur la base canonique de $\mathbb{K}^p$ un endomorphisme nilpotent de $\mathbb{K}^p$. Donc $N^{p+1}=0$, donc $M^{p+1}=0$ et on conclut par le principe de récurrence puisqu'on obtient $u^{p+1}=0$.

22▶

$*$ *Preuve* : Soit E_1 un sous-espace vectoriel de E, y_1 et y_2 dans $u(E_1)$ et λ un scalaire. Il existe x_1 et x_2 dans E_1 tels que $y_1 = u(x_1)$ et $y_2 = u(x_2)$. On a donc $u(\lambda x_1 + x_2) = \lambda y_1 + y_2$ avec $\lambda x_1 + x_2 \in E_1$, donc $u(E_1)$ est stable par combinaison linéaire. Comme $u(0_E) = 0_F$, on conclut.

De même, soit E_1 un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$, Y_1 et Y_2 dans ME_1 et λ un scalaire. Il existe X_1 et X_2 dans E_1 tels que $Y_1 = MX_1$ et $Y_2 = MX_2$. On a donc $M(\lambda X_1 + X_2) = \lambda Y_1 + Y_2$ avec $\lambda X_1 + X_2 \in E_1$, donc ME_1 est stable par combinaison linéaire. Comme $M0_{\mathbb{K}^p} = 0_{\mathbb{K}^q}$, on conclut.

Remarquez la similarité d'écriture pour ces deux preuves. La deuxième ne fait que traduire la première en termes de représentations sur des bases : M représente u sur deux bases (e) de E et (f) de F, X_1 est le vecteur des coordonnées de x_1 sur (e), Y_1 celui de y_1 sur (f), etc.

Montrons maintenant que $u(\mathrm{Vect}(X)) = \mathrm{Vect}(u(X))$: un élément de $\mathrm{Vect}(X)$ s'écrit $\sum\limits_{i=1}^{k} a_i x_i$ pour des éléments x_i de X et des scalaires a_i, son image par u est $\sum\limits_{i=1}^{k} a_i u(x_i)$ qui appartient à $\mathrm{Vect}(u(X))$. Réciproquement, un élément de $\mathrm{Vect}(u(X))$ s'écrit $\sum\limits_{i=1}^{k} a_i u(x_i)$ pour des x_i dans X et des scalaires a_i, donc s'écrit $u(\sum\limits_{i=1}^{k} a_i x_i)$, ce qui donne l'inclusion inverse. □

$*$ Il faut bien comprendre et retenir le dernier point dans le cas particulier où E est de dimension finie : $\mathrm{Im}(u)$ est généré par $(u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_p))$ où $(e_1, \ldots, e_p)$ est une base quelconque de E.

Si $M = \mathrm{Mat}_{(e),(f)}(u)$, les colonnes de M donnent $(u(e_1), .., u(e_n))$ dans (f), qui génèrent $\mathrm{Im}(u)$

$*$ Exemple : Soit u défini de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^3$ par : $(x, y, z) \mapsto (x + y, x - y, y)$.

En raisonnant depuis la définition : un élément $Y = (y_1, y_2, y_3)$ appartient à $\mathrm{Im}(u)$ si, et seulement si, il existe (x_1, x_2, x_3) tel que $y_1 = x_1 + x_2$ et $y_2 = x_1 - x_2$ et $y_3 = x_2$. On résout ce système en x_1, x_2, x_3 pour obtenir par la méthode de Gauss : $x_1 + x_2 = y_1$, $x_2 = (y_1 - y_2)/2$, $x_2 = y_3$ ce qui donne la condition de compatibilité $y_1 - y_2 - 2y_3 = 0$. Ainsi $\mathrm{Im}(u)$ est le plan de base $((2, 0, 1), (0, 2, -1))$.

Plus rapidement, en raisonnant à l'aide de la proposition, $\mathrm{Im}(u)$ est généré par les images par u des vecteurs de la base canonique de l'espace de départ, c'est donc
$\mathrm{Vect}((1, 1, 0), (1, -1, 1), (0, 0, 0)) = \mathrm{Vect}((1, 1, 0), (1, -1, 1))$ donc le même plan (les deux vecteurs forment une famille libre et vérifient l'équation cartésienne du plan trouvée en première méthode).

Pratique 8 :

1. $\mathrm{Im}(u)$ est généré par les trois vecteurs colonnes de $\mathbb{R}^3$ qui forment la matrice proposée. L'étude du système homogène associé montre que la famille est liée (la matrice n'est pas inversible). En particulier $C_1 - 2C_3 = \frac{3}{2}C_2$, et (C_1, C_3) étant libre, $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}(C_1, C_3)$.

2. Une homothétie de rapport non nul et une symétrie sont bijectives, donc d'images tout l'espace.
Une homothétie de rapport nul est nulle, donc d'image le singleton $\{0_E\}$.
Une projection est d'image le sous-espace vectoriel de ses invariants, la base de cette projection.

23▶

$*$ *Preuve* : u surjective signifie par définition $u(E) = F$, c'est-à-dire $\mathrm{Im}\, u = F$.

1) implique 2) : si X génère E, $\mathrm{Vect}(u(X)) = u(\mathrm{Vect}(X)) = u(E) = F$, donc l'image de toute famille génératrice de E est génératrice de F.

2) implique 3) : évident.

3) implique 1) : Soit $y \in F$ et $(e_i)_{i \in I}$ une famille génératrice de E telle que $(u(e_i))_{i \in I}$ génère F. Il existe $J \subset I$ fini et des scalaires a_j tels que $y = \sum\limits_{j \in J} a_j u(e_j) = u(\sum\limits_{j \in J} a_j e_j)$. Donc u est surjective.

Si F est de dimension finie, on a toujours par définition $\mathrm{Im}(u) \subset F$. La surjectivité équivaut à $\mathrm{Im}(u) = F$ donc à $\dim \mathrm{Im}(u) = \dim F$. □

$*$ S'il existe u linéaire et surjective de E vers F, alors nécessairement $\dim E \geqslant \dim F$: en effet l'image par u d'une base de E est une famille génératrice de F donc de cardinal supérieur à celui d'une base de F.

$*$ Faites l'analogie avec l'existence d'une application surjective entre deux ensembles finis !

24▶

Rappel : u^{-1} désigne une application ensembliste (définie sur les ensembles), et non pas la réciproque de u sauf si on sait ou si on suppose u bijective !

Ainsi, pour u définie de E vers F et Y partie de F : $u^{-1}(Y) = \{x \in E \mid u(x) \in Y\}$

25▶

$*$ *Preuve* : Soit F_1 un sous-espace vectoriel, soit x_1 et x_2 dans $u^{-1}(F_1)$ et λ un scalaire. On a $f(x_1)$ et $f(x_2)$ dans le sous-espace vectoriel F_1, donc $\lambda u(x_1) + u(x_2) = u(\lambda x_1 + x_2) \in F_1$, donc $\lambda x_1 + x_2 \in u^{-1}(F_1)$, ce qui montre que F_1 est stable par combinaison linéaire. Comme $u(0_E) = 0_F \in F_1$, $u^{-1}(F_1)$ est bien un sous-espace vectoriel de E.

La preuve s'adapte sans difficulté pour l'interprétation matricielle. $\square$

$*$ **Interprétation en termes de systèmes** : on a vu que résoudre un système linéaire s'interpréte comme rechercher les solutions $x \in E$ d'une équation $u(x) = b$ avec $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $b \in F$ (ou $MX = B$ en interprétant matriciellement). Le noyau de u (ou de M) donne donc l'ensemble des solutions du système linéaire homogène associé : $u(x) = 0$ (ou $MX = 0$).

La dimension de ce noyau correspond au nombre de paramètres indépendants sur lesquels on peut jouer pour décrire l'ensemble des solutions du système depuis une solution particulière (si elle existe) : on avait établi que cet ensemble de solutions, s'il est non vide, est : $x_{part} + \mathrm{Ker}(u)$, ce qui traduit que $u(x_{part} + x) = u(x_{part}) = b$ pour tout $x \in \mathrm{Ker}\, u$.

26▶

$*$ *Preuve* : Supposons u injective : seul $x = 0_E$ vérifie $u(0_E) = 0_F$ puisque 0_F ne peut avoir plus d'un antécédent par u. Donc $\mathrm{Ker}\, u = \{0_E\}$.

Supposons maintenant $\mathrm{Ker}\, u = \{0_E\}$, et supposons $u(x) = u(y)$ pour deux éléments x et y de E. Alors $u(x) - u(y) = 0_F = u(x - y)$, donc $x - y \in \mathrm{Ker}\, u$, donc $x = y$, et ainsi u est injective.

Supposons $u \in \mathcal{L}(E, F)$ injective, soit $(e_i)_{i \in I}$ une famille libre de E, montrons que $(u(e_i))_{i \in I}$ est libre. Supposons $\sum\limits_{j \in J} a_j u(e_j) = 0$ pour $J \subset I$ fini et des scalaires a_j. On obtient par linéarité de u que $u(\sum\limits_{j \in J} a_j e_j) = 0$, donc $\sum\limits_{j \in J} a_j e_j = 0$. Les coefficients a_j sont donc tous nuls par liberté de $(e_j)_{j \in J}$. u transforme donc toute famille libre en une famille libre.

Supposons maintenant que $u \in \mathcal{L}(E, F)$ transforme toute famille libre de E en une famille libre de F. En particulier, si $x \in E$ est non nul, (x) est libre donc $(u(x))$ aussi, donc $u(x) \neq 0_F$, donc $\mathrm{Ker}\, u = \{0_E\}$ et u est injective. $\square$

$*$ Ainsi, pour vérifier l'injectivité d'une application linéaire, il suffit de résoudre l'équation $u(x) = 0_F$, et non plus $u(x) = u(y)$ avec x et y arbitraires...

$*$ En particulier, une application linéaire injective transforme toute base en une famille libre.

$*$ Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est injective et si E est de dimension finie, alors $\dim E \leqslant \dim F$ avec la propriété précédente.

$*$ Faites l'analogie avec l'existence d'une application injective entre deux ensembles finis !

$*$ Soit u définie de $\mathbb{K}^3$ vers $\mathbb{K}^3$ par $(x, y, z) \mapsto (x + y, x - y, y)$. Pour obtenir son noyau, on résout le système homogène d'inconnues x, y, z, donné par $x + y = 0$, $x - y = 0$ et $y = 0$. On obtient donc $x = y = 0$, donc $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Vect}((0, 0, 1))$.

Pratique 9 :

1. On résout le système homogène :

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 0,\ 2x_1 + x_3 = 0,\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0, \text{ qui donne}$$

$x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$, $-4x_2 + 3x_3 = 0$, $4x_2 - 3x_3 = 0$ et finalement : $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Vect}((-2, 3, 4))$.

2. Pour une homothétie de rapport non nul ou une symétrie (bijectives donc injectives) les noyaux sont réduits au vecteur nul.
Pour une homothétie de rapport nul, donc nulle, le noyau est tout l'espace.
Pour une projection, le noyau est la direction suivant laquelle on projette.

3. On voit dans toutes ces situations que la somme des dimensions du noyau et de l'image donne la dimension de l'espace (de départ).

27▶

∗ *Preuve* : Par rapport à ce qui précède, il ne reste qu'à apporter des précisions pour les points où l'on parle de bijectivité.

Si u est linéaire et bijective, u transforme une base de E (donc génératrice et libre) en une famille génératrice et libre de F, donc en une base de F. Si E est de dimension finie, F l'est donc aussi et $\dim E = \dim F$.

Supposons que $u \in \mathcal{L}(E, F)$ transforme une base $(e_i)_{i\in I}$ de E en une famille libre de F, et supposons $u(x) = 0_F$. Il existe $(x_j)_{j\in J}$, avec $J \subset I$ fini, et des scalaires x_j tels que $x = \sum\limits_{j\in J} x_j e_j$, d'où $\sum\limits_{j\in J} x_j u(e_j) = 0$. Comme $(e_j)_{j\in J}$ est libre comme sous-famille d'une famille libre, les x_j sont tous nuls, donc $x = 0_E$ et $\operatorname{Ker}(u) = \{0_E\}$. Donc u est injective.

Supposons maintenant que $u \in \mathcal{L}(E, F)$ transforme une base (e) de E en une base de F : u est surjective puisque u transforme la famille génératrice (e) en une famille génératrice de F, et u est injective puisque transforme la base (e) en une famille libre de F. Finalement u est bijective.

Dans ce cas, si E est de dimension finie, nécessairement F l'est aussi et de même dimension puisque la base $(e_1, \dots, e_n)$ de E transformée par u en une base de F compte le même nombre d'éléments. De plus, toute autre base de E est aussi transformée en une base de F puisque ce sera une famille libre (u injective) et génératrice (u surjective).

Inversement, l'application définie de E, espace vectoriel de dimension p sur $\mathbb{K}$, vers $\mathbb{K}^p$, et qui à tout vecteur associe le p-uplet de ses coordonnées sur $\mathbb{K}^p$ est un isomorphisme (par définition d'une base). Par composition, deux espaces vectoriels de même dimension sont donc isomorphes.

∗ Ainsi, il n'y a qu'un seul espace vectoriel de dim p sur $\mathbb{K}$ à isomorphisme près, c'est $\mathbb{K}^p$: travailler sur un vecteur ou sur un p-uplet de coordonnées revient au même...

28▶

On a vu que $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ sont isomorphes si $\dim E = p$ et $\dim F = q$, c'est le principe de la représentation matricielle avec deux bases (e) de E et (f) de F fixées.
Or $\mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ est de dimension pq puique $(E_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant q \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ en donne une base.

29▶

∗ Puisque $\operatorname{Im}(u) = u(E)$ est généré par les images par u des vecteurs d'une base (e) de E, on retrouve la définition du rang de cette famille de vecteurs, avec les inégalités et cas d'égalités suivant les propriétés d'injectivité, surjectivité, bijectivité de u.
Si on choisit une base (e) de E et une base (f) de F pour le cas où ces espaces sont de dimensions finies, on retrouve également la définition du rang de $\operatorname{Mat}_{(e),(f)}(u)$ puisque ses vecteurs colonnes représentent dans (f) les images par u des vecteurs de (e).

Rappelons que le rang d'une matrice est égal à celui de sa transposée, donc inférieur au nombre de ses lignes et de ses colonnes.

∗ **Rangs de nos endomorphismes incontournables** : supposons E de dimension p.

Rang d'une homothétie de E : c'est le rang de $\lambda\,\mathrm{I}_p$, c'est-à-dire p si $\lambda \neq 0$, et 0 si $\lambda = 0$.

Rang d'une projection de E : c'est la dimension de $\operatorname{Im} p$, ou encore le nombre de 1 sur la diagonale de sa matrice représentative sur une base adaptée à $E = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p$.
On verra plus loin que c'est aussi la somme des éléments diagonaux d'une matrice représentative sur une base (sa trace).

Rang d'une symétrie de E : toute symétrie est inversible, donc de rang p.

Rang d'un endomorphisme u nilpotent d'indice k : on a vu qu'il existe x_0 tel que $(x_0, u(x_0), \ldots, u^{k-1}(x_0))$ est libre, donc $(u(x_0), u^2(x_0), \ldots, u^{k-1}(x_0))$ est une famille libre de $\operatorname{Im}(u)$, donc $k - 1 \leqslant \operatorname{rg}(u) \leqslant n - 1$ (puisque u ne peut pas être bijectif car $u^k = 0$).

30▶

$*$ *Preuve* : Dans ce cadre, u transforme une base de (e) en une famille libre si u injective, ou génératrice si u surjective, et qui a pour cardinal $\dim E = \dim F$. Donc u transforme (e) en une base de F, c'est un isomorphisme. Son rang est égal à $\dim F = \dim E$. □

$*$ Sauvagement : $\boxed{\text{si linéarité et } \dim E = \dim F, \text{ alors injectivité} \iff \text{surjectvité} \iff \text{bijectivité}}$

$*$ Exemple : soit a_0, a_1, …, a_p des points de $\mathbb{K}$ distincts deux à deux.

L'application $\left|\begin{array}{rcl} \Psi \ : \ \mathbb{K}_p[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^{p+1} \\ P & \longmapsto & (P(a_0), \ldots, P(a_p)) \end{array}\right.$ est linéaire, injective puisqu'un polynôme de degré au plus p qui s'annule $p+1$ fois est le polynôme nul, donc c'est un isomorphisme puisque les deux espaces de départ et d'arrivée ont même dimension. Ψ transforme la base des polynômes de Lagrange $(L_0, \ldots, L_p)$ associés aux a_i en la base canonique de $\mathbb{K}^{p+1}$.

$*$ Exemple : soit E_1, E_2, …, E_p des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E.

L'application $\left|\begin{array}{rcl} \Pi \ : \ \prod\limits_{i=1}^{p} E_i & \longrightarrow & \sum\limits_{i=1}^{p} E_i \\ (x_1, \ldots, x_p) & \longmapsto & \sum\limits_{i=1}^{p} x_i \end{array}\right.$ est linéaire et surjective par définition de la somme.

De plus, elle est injective (donc finalement bijective) si, et seulement si, $\bigoplus\limits_{i=1}^{p} E_i$ (la somme est directe), si, et seulement si, $\dim \bigoplus\limits_{i=1}^{p} E_i = \sum\limits_{i=1}^{p} \dim(E_i)$.

Pratique 10 :

1. Les homothéties sont bijectives sauf celle de rapport nul. Seule l'identité est un projecteur bijectif. Toutes les symétries sont bijectives. Aucun endomorphisme nilpotent n'est bijectif (sans quoi toutes ses composées le seraient, ce qui contredit la définition d'un nilpotent).

2. Si u est nilpotent d'indice s :

$$\operatorname{Id} = \operatorname{Id} - u^s = (\operatorname{Id} - u) \circ (\operatorname{Id} + u + \ldots + u^{s-1}) = (\operatorname{Id} + u + \ldots + u^{s-1}) \circ (\operatorname{Id} - u)$$

ce qui montre que $\operatorname{Id} - u$ est inversible.
Nous avons vu cela de manière plus générale dans un anneau.

31▶

$*$ *Preuve* : Supposons $u : E \to F$ et $v : F \to G$ linéaires.
$\operatorname{rg}(v \circ u) = \dim(v(u(E)))$. Comme $v(u(E)) \subset v(F)$, $\operatorname{rg}(v \circ u) \leqslant \operatorname{rg}(v)$.
On a aussi $\dim(v(u(E))) \leqslant \dim u(E) = \operatorname{rg}(u)$ puisque v transforme une base de $u(E)$ en une famille génératrice de $v(u(E))$.
Si v est bijective, $\dim(v(u(E))) = \dim(u(E)) = \operatorname{rg}(u)$ (et v injective suffit).
Si u est bijective : $u(E) = F$ donc $\operatorname{rg}(v \circ u) = \dim v(F) = \operatorname{rg}(v)$ (et u surjective suffit).
Le deuxième point est la traduction matricielle du premier.

$*$ Ainsi, « **composer** » **à gauche ou à droite par un endomorphisme inversible, ainsi que multiplier à gauche ou à droite par une matrice inversible, ne change pas le rang.**

Pratique 11 :

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ est non nul (premier élément -1 donc de rang au moins 1.
Comme la première matrice est de de rang 1 puisque non nulle et de deuxième ligne multiple de la première, les propriétés du rang d'un produit donne le rang de la matrice résultat inférieur à 1, donc finalement égal à 1.

2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ est le produit d'une matrice inversible (triangulaire à éléments diagonaux non nuls) et d'une matrice de rang 2 puisque de deux premières colonnes non proportionnelles alors que sa troisième est la somme des deux première. Multiplier par une matrice inversible ne change pas le rang, la réponse est donc 2.

32▶

$*$ *Preuve* : Soit E_1 un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ dans E : $E = \operatorname{Ker} u \oplus E_1$. Montrons que la restriction de u à E_1 corestreinte à $\operatorname{Im} u$, que nous notons g, est un isomorphime entre E_1 et $\operatorname{Im} u$.

g est bien définie puisque g est définie sur E_1 par $g(x) = u(x)$ donc $g(E_1) \subset u(E_1) = \operatorname{Im} u$.
On a déjà vu que g est linéaire puisque définie à partir de u par restrictions-corestrictions.

g est injective : si $g(x) = 0$ avec $x \in E_1$, alors $u(x) = 0$ donc $x \in \operatorname{Ker} u \cap E_1 = \{0_E\}$, donc $x = 0$.

g est surjective : si $y \in \operatorname{Im} u$, il existe $x \in E$ tel que $u(x) = y$, et x se décompose en $x = x_0 + x_1$ avec $x_0 \in \operatorname{Ker} u$ et $x_1 \in E_1$. Mais alors $y = u(x) = u(x_1) = g(x_1)$, donc y admet un antécédent par g_1 dans E_1.

Ainsi g réalise un isomorphisme entre E_1 et $\operatorname{Im} u$. □

$*$ Noter dans la démonstration que ce qui empêche éventuellement l'injectivité de l'endomorphisme u de départ, ce sont les degrés de liberté liés au noyau : on écrit $x = x_0 + x_1$ avec x_0 quelconque dans $\operatorname{Ker} u$ qui n'intervient pas dans le calcul de $u(x) = u(x_1)$. Ces libertés disparaissent en restreignant u à un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ dans E.

$*$ On peut montrer que deux supplémentaires dans E d'un même sev sont isomorphes : si $E = E_1 \oplus E_2 = E_1 \oplus E_3$, alors E_2 et E_3 sont isomorphes ! Ce résultat est évident si E est de dimension finie, car alors E_2 et E_3 ont même dimension. Mais sinon ?
On utilise la projection p de E sur E_2 parallèlement à E_1. D'après le théorème, p induit un isomorphisme de E_3 (vu comme supplémentaire de $\operatorname{Ker} p = E_1$) sur $E_2 = \operatorname{Im} p$.....

33▶

$*$ Enfin ! ! On l'attendait depuis un moment...
En conséquence du théorème fondamental et sous ses hypothèses, en ajoutant E de dimension finie : $\dim E_1 = \dim \operatorname{Im} u = \dim E - \dim \operatorname{Ker} u$.

$*$ ⚠ **Ne pas confondre** la relation $\dim \operatorname{Ker} u + \dim \operatorname{Im} u = \dim E$ avec $E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u$ qui en général n'a pas de sens ($\operatorname{Im} u$ est un sous-espace de F, pas de E...), ou qui est fausse en général pour $u \in \mathcal{L}(E)$...

On a vu que : $E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u$ lorsque u est une projection, ou une bijection... On verra en exercice que cette relation est vérifiée si, et seulement si, $\operatorname{Im} u^2 = \operatorname{Im} u$ si, et seulement si, $\operatorname{Ker} u^2 = \operatorname{Ker} u$, ce qui est vrai clairement pour un projecteur.

Pratique 12 :

On vérifie pour P de degré inférieur à n que le degré de $P(X+1) - P(X)$ est inférieur à $n-1$. Le noyau est formé des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ vérifiant $P(X+1) = P(X)$. Un tel polynôme P vérifie que $P - P(0)$ est nul sur $\mathbb{Z}$, donc admet une infinité de racines, donc P est constant. Par le théorème du rang, ce noyau étant de dimension 1, le rang demandé est n (on peut en déduire la surjectivité du morphisme).

34▶

∗ Pour calculer $E_{i,j}E_{k,l}$: dans le résultat, l'élément en ligne s et colonne t s'obtient en multipliant la ligne s de $E_{i,j}$ avec la colonne t de $E_{k,l}$. C'est donc 0 en toute ligne distince de i et toute colonne distincte de l ! En ligne i et colonne l, on n'obtient 1 (et non 0) que si $j = k$, regardez-le à la main !

∗ En posant $M = \sum\limits_{k,l} m_{k,l}E_{k,l}$, il vient : $E_{i,j}M = \sum\limits_{k,l} m_{k,l}E_{i,j}E_{k,l} = \sum\limits_{l} m_{j,l}E_{i,l}$ puisque si k (qui varie) est distinct de j (fixé), les produits sont nuls. Le résultat est donc bien une matrice nulle sauf en ligne i où est recopiée la ligne j de M.

∗ À retenir :

→ multiplier M à gauche par $E_{i,j}$ opére sur les lignes de M : on ne garde que la ligne j (indice près de M) de M que l'on place en ligne i (indice éloigné de M)

→ multiplier M à droite par $E_{i,j}$ opére sur les colonnes de M : on ne garde que la colonne i (indice près de M) de M et on la place en colonne j (indice éloigné de M)

∗ Exemple d'application : quelles sont les matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ qui commutent avec toutes les autres ? (c'est ce qu'on appelle le centre de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$)

Si M commute avec toute matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, elle commute avec toute matrice $E_{i,j}$. Déduire de $E_{i,j}M = ME_{i,j}$ que $m_{i,k} = 0$ si $i \neq k$ (regarder en ligne i et colonne k) et que $m_{i,i} = m_{j,j}$, pour tout couple (i,j) possible. Donc M est une matrice d'homothétie ($\lambda\,\mathrm{I}_p$), et la réciproque est claire.

35▶

∗ On a déjà expliqué dans le chapitre sur les systèmes que ces opérations étaient inversibles, et on va le retrouver par leurs traductions matricielles.

∗ Opération 1) de **transvection** : il faut garder la matrice, et y ajouter sa ligne j multipliée par α et placée en ligne i. On fabrique cet ajout par multiplication de M à gauche (pour les lignes) par $\alpha E_{i,j}$, ce qui donne en tout :

$$M \quad \text{changée en} \quad (\mathrm{I}_p + \alpha E_{i,j})M = T_{i,j,\alpha}M,$$

où $T_{i,j,\alpha}$ est une matrice dite de transvection, de forme diagonale composée de 1 avec en plus α en ligne i et colonne j :

$$T_{i,j,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & & & (0) \\ & \ddots & \alpha & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & 1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est bien inversible, d'inverse $T_{i,j,-\alpha}$; effectuer le produit par M conserve donc bien le rang de M...

∗ Opération 2) de **dilatation** : on garde M et lui ajoute $\alpha - 1$ fois sa ligne i en ligne i, donc

$$M \quad \text{est changée en} \quad (\mathrm{I}_p + (\alpha-1)E_{i,i})M = D_{i,\alpha}M$$

où $D_{i,\alpha}$ est une matrice dite de dilatation, diagonale formée de 1 sauf α en ligne et colonne i :

$$D_{i,\alpha} = \mathrm{diag}(1, 1, \ldots, \alpha, 1, \ldots, 1)$$

Cette matrice est bien inversible car $\alpha \neq 0$, et d'inverse $D_{i,1/\alpha}$; effectuer le produit par M conserve donc le rang de M...

∗ Opération 3) de **transposition** : il faut soustraire à M ses lignes i et j pour les rajouter en lignes j et i, donc

$$M \quad \text{est changée en} \quad (\mathrm{I}_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i})M = P_{i,j}M$$

où $P_{i,j}$ est une matrice dite de transposition, de forme diagonale constituée de 1 sauf 0 en places (i,i) et (j,j), et les 1 manquants se trouvent en places (i,j) et (j,i).

Cette matrice est inversible d'inverse elle-même ; effectuer le produit par M conserve donc bien le rang de M...

36▶

∗ Pour calculer le rang de M, on ramène M par opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes à une matrices triangulaire supérieure...

∗ Étape i de la méthode de Gauss : on place un pivot en position $(1,1)$ par permutation de lignes ou colonnes, puis : $L_j \leftarrow L_j - a_{ji}/a_{ii}L_i$ pour j de $i+1$ à n

∗ Calcul de l'inverse d'une matrice inversible de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$: On procède par opérations élémentaires **sur les lignes seulement**. On peut à chaque étape trouver un pivot puisque la matrice est inversible (de rang son nombre de lignes).

On ramène ainsi M à la matrice identité (d'abord à une forme triangulaire en « descente », puis à la matrice identité en « montée »).

Les opérations élémentaires sur les lignes se traduisant par une suite de multiplications à gauche par des matrices inversibles, on peut écrire ce calcul sous la forme

$$O_kO_{k-1}\dots O_2O_1M = \mathrm{I}_p \quad \text{qui donne} \quad M^{-1} = O_kO_{k-1}\dots O_2O_1\,\mathrm{I}_p$$

Et **là est le prodige** : il suffit d'appliquer les mêmes opérations élémentaires sur les lignes de I_p, dans le même ordre, pour obtenir M^{-1} ! !

∗ On peut faire de même en n'agissant que sur les colonnes de M.

⚠ Tout s'écroule si vous manipulez lignes **et** colonnes : voyez-vous pourquoi ?

Pratique 13 :

1. On applique la méthode en ne travaillant que sur les lignes.

$$\begin{array}{ccc} M & \mathrm{I}_3 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} & L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} & L_1 \leftarrow L_1 + L_2,\ L_3 \leftarrow -L_3 \\ I_3 & \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = M^{-1} & \end{array}$$

N'oubliez pas de vérifier $MM^{-1} = \mathrm{I}_3$ après calcul...

2. Si u est nilpotent d'indice $p = \dim(E)$, il existe $x_0 \in E$ tel que $u^{p-1}(x_0) \neq 0$, et on a vu qu'alors $(x_0, u(x_0), \ldots, u^{p-1}(x_0)) = \mathcal{B}$ forme une base de E.

En calculant les images par u des vecteurs de $\mathcal{B}$: $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

On cherche donc à inverser $\mathrm{I}_p - M$ pour obtenir $(\mathrm{Id}_E - u)^{-1}$ (et vérifier que cela existe).

$$\mathrm{I}_p - M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ -1 & 1 & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{I}_p \qquad L_2 \leftarrow L_2 + L_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & & & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & & & (0) \\ 1 & 1 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & 1 \end{pmatrix}$$

On utilise alors $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$, puis $L_4 \leftarrow L_4 + L_3$, etc. jusqu'à aboutir à gauche à I_p et à droite à la matrice triangulaire inférieure constitué de 1 uniquement sous sa diagonale, comprise.

Or $u^k(x_0) = u^k(x_0)$, $u^k(u(x_0)) = u^{k+1}(x_0)$, ..., $u^k(u^j(x_0)) = u^{k+j}(x_0)$, quantité nulle dès que $j \geqslant p - k$, ce qui montre qu'on obtient M^k en « décalant » $k - 1$ fois vers le bas la sous-diagonale de 1 de M. Par exemple, M^{p-1} est consituée de 0 sauf en place $(p, 1)$.

Clairement on obtient donc $(\mathrm{I}_p - M)^{-1} = \mathrm{I}_p + M + M^2 + \ldots + M^{p-1}$, ce qui redonne le résultat déjà démontré dans la Pratique 8 question 2.

37▶

∗ *Preuve du premier point* : observer (par conditions nécessaires) comment doivent être transformés

par u les premiers vecteurs de la base (e) à construire...
On choisit donc une base $(f_1, \dots, f_r)$ de $\operatorname{Im} u$ de dimension $r = \operatorname{rg}(u)$, que l'on complète en une base (f) de F.
Par définition, il existe des vecteurs $(e_1, \dots, e_r)$ de E tels que $u(e_i) = f_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant r$.
Puis on choisit une base $(e_{r+1}, \dots, e_p)$ de $\operatorname{Ker} u$ (les indices sont les bons grâce au théorème du rang). Vérifions que $(e_1, \dots, e_p)$ est libre et forme donc une base de E.

Supposons $\sum\limits_{i=1}^{p} a_i e_i = 0_E$, où les a_i sont des scalaires. En prenant l'image par u, il reste $\sum\limits_{i=1}^{r} a_i f_i = 0$, donc, pour $1 \leqslant i \leqslant r$, les a_i sont nuls car $(f_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ forme une base de $\operatorname{Im} u$. Il reste $\sum\limits_{i=r+1}^{p} a_i e_i = 0$, donc ces a_i sont nuls aussi puisque $(e_i)_{r+1 \leqslant i \leqslant p}$ forme une base de $\operatorname{Ker} u$. Donc (e) et libre et forme une base de E.

La matrice de u entre les bases (e) et (f) a bien la forme annoncée. □

∗ Le deuxième point a été démontré dans le chapitre sur les systèmes linéaires : la notion d'équivalence était alors liée à l'usage des opérations élémentaires sur les lignes et permutations de colonnes. On sait maintenant que ces opérations élémentaires, auxquelles on peut adjoindre les opérations élémentaires sur les colonnes, conservent le rang de la matrice. Par conséquent, le deuxième point peut s'énoncer ainsi : une matrice de $\mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ est de rang r si, et seulement si, elle est équivalente (ou «ramenable par opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes») à la matrice J_r de $\mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$.

∗ Cas d'un projecteur de rang r : il se représente sur toute base adaptée à $E = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p$ par la matrice J_r. Une seule base est alors utilisée. C'est d'ailleurs la seule exception, puisqu'inversement la matrice J_r est idempotente et représente donc sur une base quelconque une projection.

38▶

∗ Une forme linéaire u a pour espace d'arrivée le corps de base, de dimension 1 : son rang, c'est-à-dire la dimension de $\operatorname{Im} u$ est donc au plus 1, c'est 0 si, et seulement si, $u(E) = \{0_{\mathbb{K}}\}$, c'est-à-dire si, et seulement si, $u = 0$.

∗ Le rang d'une matrice est celui du système de ses vecteurs lignes, également celui de ses vecteurs colonnes : pour une matrice ligne ou colonne, c'est donc 0 ou 1, suivant qu'elle est nulle ou pas.

∗ Supposons $u \in \mathcal{L}(E, F)$ de rang 1 : son espace image est de dimension 1, il existe donc un vecteur $y \in F$ non nul tel que (y) soit une base de $\operatorname{Im} u$, et pour tout x de E, il existe un scalaire $f(x)$ tel que $u(x) = f(x)y$. Par linéarité de u, on voit que f est linéaire sur E, et définit donc une forme linéaire de E dans $\mathbb{K}$, non nulle sinon on aurait $u = 0$ de rang 0.

∗ Réciproquement, supposons $u = f.y$ avec $f \in E^*$ non nulle et $y \in F$ non nul. Alors $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Vect}(y)$, et $f(x_0)$ étant non nul pour un vecteur x_0 de E au moins, u n'est pas l'application linéaire nulle, donc $\operatorname{rg} u = 1$.

∗ Soit M de rang 1 : M possède une colonne non nulle, notons-la U, et toutes les autres lui sont proportionnelles : $C_j = a_j U$ avec $a_j = 1$ si U est la colonne j de M. En notant ${}^{\mathrm{t}}V = (a_1\ a_2\ ..)$ le vecteur ligne des scalaires a_j, on a $M = U\,{}^{\mathrm{t}}V$, et ni U ni V ne sont nuls.

∗ Inversement, $M = U\,{}^{\mathrm{t}}V$ avec ces conditions montre que toutes les colonnes de M sont multiples de U donc le rang de M est $\leqslant 1$. Comme il existe un élément u_i de U et un élément v_j de V non nul, l'élément $m_{i,j}$ de M en ligne i et colonne j n'est pas nul, donc M est de rang 1.
Remarquer la correspondance entre ces résultats qui concernent un endomorphisme ou une matrice M : si M représente u entre deux bases (e) de E et (e') de F, U peut représenter y sur (e') et ${}^{\mathrm{t}}V$ la forme linéaire sur (e) (et (1) base de $\mathbb{K}$).

∗ Calculer M^2 si $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ est de rang $\leqslant 1$ en utilisant $M = U\,{}^{\mathrm{t}}V$: vérifier que
$M^2 = U\,{}^{\mathrm{t}}V U\,{}^{\mathrm{t}}V = ({}^{\mathrm{t}}V U)(U\,{}^{\mathrm{t}}V) = \operatorname{Tr}(M)M$. En effet, ${}^{\mathrm{t}}V U$ est une matrice a un élément donc identifiable à un scalaire, égal par ailleurs à $\sum\limits_{i=1}^{p} u_i v_i$, et le calcul de $U\,{}^{\mathrm{t}}V$ montre que $m_{i,j} = u_i v_j$, en particulier $\operatorname{Tr}(M) = \sum\limits_{i=1}^{p} u_i v_i$.

39►

$*$ On parle de système linéaire : cette linéarité concerne la partie homogène, ou encore $x \mapsto f(x)$, mais pas b...

$*$ Si $b \notin \operatorname{Im} f$, il ne peut exister d'élément x dans E tel que $f(x) = b$, donc le système n'a pas de solution...c'est le cas d'un système non compatible.

$*$ Si $b \in \operatorname{Im} f$, c'est qu'il existe un x_0 dans E tel que $f(x_0) = b$: c'est une solution particulière et le système est compatible. Toute autre solution x vérifie donc $f(x) - f(x_0) = 0 = f(x - x_0)$, c'est-à-dire que $x - x_0$ appartient à $\operatorname{Ker} f$, et réciproquement. L'ensemble des solutions du système s'écrit donc : $x_0 + \operatorname{Ker} f$, avec sa structure de sous-espace affine de E, de point d'attache x_0 et de direction $\operatorname{Ker} f$.
Les «inconnues paramètres» ou «non principales» sont au nombre $\dim \operatorname{Ker}(f)$, ou encore $p - r$ d'après le théorème du rang, où $r = \operatorname{rg}(f)$ est le rang du système. C'est bien ce que donne la théorie pour les systèmes linéaires...

$*$ Si en plus $E = \operatorname{Ker} f \oplus E_1$, f induit un isomorphisme entre E_1 et $\operatorname{Im} f$, il existe donc un unique x_0 de E_1 tel que $f(x_0) = b$, il y a donc une unique solution du système appartenant à E_1.

$*$ Comme déjà dit, la dimension de $\operatorname{Ker} f$ correspond au nombre de paramètres indépendants, ou degrés de liberté, du système.

$*$ Si le système est de rang r, on a déjà vu que r est le rang de la matrice associée A, mais aussi de f, et il se ramène par opérations élémentaires à un système équivalent à r équations linéairement indépendantes dites principales, avec solution unique pour chaque choix des autres inconnues (dites non principales ou paramètres).

$*$ Le système est dit inversible lorsqu'il est «carré» et de rang égal au nombre de lignes et de colonnes de A. Une seule solution alors ! S'il est de plus homogène, cette unique solution est la solution nulle (toutes les inconnues prennent la valeur nulle).

40►

$*$ Rappelons comme on l'a vu et utilisé à propos des systèmes que si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ est le vecteur de $\mathbb{K}^p$ qui représente $x = \sum_{j=1}^{p} x_j e_j \in E$ sur la base (e) et si $M = [m_{i,j}] = \operatorname{Mat}_{(e),(f)}(u)$, alors $Y = MX$ représente $y = u(x)$ sur (f), où MX est un produit matriciel : pour $i \in [\![1, q]\!]$, $y_i = \sum_{j=1}^{p} m_{i,j} x_j$.
En effet : $y = u(x) = u(\sum_{j=1}^{p} x_j e_j) = \sum_{j=1}^{p} x_j u(e_j) = \sum_{j=1}^{p} x_j \sum_{i=1}^{q} m_{i,j} f_i = \sum_{i=1}^{q} (\sum_{j=1}^{p} m_{i,j} x_j) f_i$.

$*$ Remarquer alors que $P_{(e)}^{(e')}$ est bien la matrice de Id_E entre (e') et (e) puisqu'on place en colonne j le vecteur $\operatorname{Id}_E(e'_j) = e'_j$ écrit dans la base (e).
En pratique, on connaît les vecteurs de la «nouvelle» base (e') par leurs expressions suivant les vecteurs de l'«ancienne» base : $e'_j = a e_1 + b e_2 + ...$, et c'est ce qu'on reporte en colonnes dans P.
Par conséquent, si $x = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i = \sum_{i=1}^{p} x'_i e'_i$ est représenté par le vecteur X des x_i dans (e), et par X' dans (e'), alors on obtient X en multipliant X' par la matrice de Id_E entre les bases (e') et (e), c'est-à-dire P, donc $X = PX'$.

⚠ La matrice de passage de (e) à (e') donne donc par cette formule $X = PX'$ les **anciennes coordonnées d'un vecteur en fonction des nouvelles** ! ! !

$*$ Ensuite : $Y = MX$ traduit $y = u(x)$ dans les «anciennes» bases (e) et (f), $Y' = M'X'$ traduit $y = u(x)$ dans les «nouvelles» bases (e') et (f'), et $X = PX'$ et $Y = QY'$ font le lien. P et Q sont inversibles puisque représentent Id_E et Id_F sur les bases appropriées, d'où : $Y' = M'X' = M'P^{-1}X = Q^{-1}Y = Q^{-1}MX = Q^{-1}MPX'$ donc $M' = Q^{-1}MP$.

Noter que ceci traduit simplement une composition de morphismes :
M' représente u de $(E,(e'))$ vers $(F,(f'))$, résultat des composées successives de
l'identité de $(E,(e'))$ vers $(E,(e))$, représentée par P,
u de $(E,(e))$ vers $(F,(f))$, représentée par M,
l'identité de $(F,(f))$ vers $(F,(f'))$, représentée par Q^{-1}.

$*$ Pour le cas d'un endomorphisme, on considère $F=E$ et on prend $(f)=(e)$ et $(f')=(e')$ pour appliquer ce qui précède avec $Q=P$, donc $M'=P^{-1}MP$ où $M=\mathrm{Mat}_{(e)}(u)$ et $M'=\mathrm{Mat}_{(e')}(u)$.

$*$ Ces calculs peuvent être lourds, et ils nécessitent en particulier de savoir calculer un inverse, ce qu'on va apprendre à faire. Mais c'est mieux que rien !

Pratique 14 :

Les trois vecteurs forment une famille libre donc une base de $\mathbb{R}^3$: si $\lambda e_1+\mu e_2+\gamma e_3=0$, alors l'image par $(u-\mathrm{Id})\circ(u-2\,\mathrm{Id})$ donne $2\gamma e_3=0$ donc $\gamma=0$, puis l'image par $u-\mathrm{Id}$ donne $\mu e_2=0$ donc $\mu=0$ et finalement $\lambda=0$.
$M'=\mathrm{diag}(1,2,3)$ et $M'=P^{-1}MP$ avec : $P=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$

41▶

$*$ En effet, écrire Q^{-1} à la place de Q ne change rien puisque Q n'est pas interprétée comme matrice de passage dans la définition.

$*$ L'équivalence entre matrices définit une relation d'équivalence :
- réflexivité : pour toute matrice M de $\mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$, $M=\mathrm{I}_q\,M\,\mathrm{I}_p$.
- symétrie : si $N=QMP$ avec Q et P inversible de bonne taille, $M=Q^{-1}NP^{-1}$.
- transitivité : si $N=QMP$ et $O=Q'NP'$ avec P, P', Q et Q' inversibles de bonnes tailles, alors $O=(Q'Q)M(PP')$ avec $Q'Q$ et PP' inversibles comme produit de matrices inversibles (on ne change pas le rang par multiplication par une matrice inversible).

De même, la relation de similarité est une relation d'équivalence (imiter la preuve précédente).

42▶

$*$ On fait concorder les notions d'équivalence pour les matrices : soit par transformation par opérations élémentaires sur lignes et/ou colonnes, soit via la relation d'équivalence précédente. On a vu que cela coïncide, il suffit d'interpréter une matrice comme représentant un morphisme sur deux bases, et de traduire en terme de changements de bases.
Deuxième point : c'est la caractérisation des endomorphismes de rang r, puisqu'on interprète la construction des deux bases effectuées dans le théorème du point 32 comme deux changements de bases depuis les bases canoniques de E et de F.

$*$ Deux matrices semblables ont même rang, la réciproque est fausse. Par exemple, $E_{1,1}$ et $E_{1,2}$ ont même rang, mais ne peuvent représenter sur une base un même endomorphisme : ce serait une projection nilpotente non nulle....

43▶

Exemple : montrons que $\boxed{\text{deux matrices semblables ont même trace.}}$
Supposons $M=P^{-1}NP$ avec M, N et P matrices carrées à p colonnes.
De manière générale, pour deux matrices A et B telles que AB et BA existent, on montrera dans le paragraphe suivant que $\mathrm{Tr}(AB)=\mathrm{Tr}(BA)$.
Ceci admis, il vient : $\mathrm{Tr}(M)=\mathrm{Tr}((P^{-1}N)P)=\mathrm{Tr}(P(P^{-1}N))=\mathrm{Tr}(N)$.

44▶

$*$ E^* n'est qu'une notation pour $\mathcal{L}(E,\mathbb{K})$.

$*$ Si E et F sont de dimension finies, on a vu plus généralement : $\dim\mathcal{L}(E,F)=\dim E.\dim F$
Pour le cas particulier où $F=\mathbb{K}$, il vient $\dim E^*=\dim E$.

$*$ Supposons $\dim E = p$ et soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de E.

On note e_j^* la j-ième forme coordonnée relativement à cette base : e_j^* associe à $x = \sum\limits_{k=1}^{p} x_k e_k$ sa coordonnée x_j sur (e).
Alors les formes coordonnées $(e_1^*, \ldots, e_p^*)$ forment une base de E^*, appelée **base duale** de $(e_1, \ldots, e_p)$.

En effet, cette famille comporte $p = \dim E^*$ éléments, et si $\sum\limits_{i=1}^{p} a_i e_i^* = 0_{E^*}$ pour des scalaires a_i, en appliquant cette forme linéaire à e_j il reste $a_j = 0$, et ce pour j quelconque. La famille est libre de cardinal p donc forme bien une base de E^*.

$\operatorname{Ker} e_i^* = \bigoplus\limits_{\substack{j\neq i \\ j=1}}^{p} \operatorname{Vect}(e_j)$ est un hyperplan : en effet, x appartient à $\operatorname{Ker} e_i^*$ si, et seulement si, sa i-ème coordonnée suivant la base $(e_1, \ldots, e_p)$ est nulle.

$*$ Dans $\mathbb{R}^2$, la droite d'équation $x + 2y = 0$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^2$.
Dans $\mathbb{R}^3$, les plans d'équation $x + 2y = 0$ ou d'équation $x - 3y + z = 0$ sont des hyperplans de $\mathbb{R}^3$.
On sait tout cela depuis le chapitre portant sur les systèmes linéaires !

$*$ Dans $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $H = \{ f \in E \mid f(0) = 0\}$ est un hyperplan ; un supplémentaire possible est donné par $\operatorname{Vect}(x \mapsto 1)$.
En effet : si $f \in E$, on peut écrire $f = (f - f(0)) + f(0).1$ donc $E = H + \operatorname{Vect}(x \mapsto 1)$. Par ailleurs, $H \cap \operatorname{Vect}(x \mapsto 0) = \{0_{\mathbb{R}^\mathbb{R}}\}$, donc $E = H \oplus \operatorname{Vect}(x \mapsto 1)$.

45►

$*$ *Preuve* : Soit H un hyperplan de E : par définition, il existe e dans E tel que $E = H \oplus \operatorname{Vect}(e)$.
Soit x un vecteur de E qui n'appartient pas à H. Clairement $H \cap \operatorname{Vect}(x) = \{0\}$ sans quoi on aurait $x \in H$. On a donc $H \oplus \operatorname{Vect}(x)$.
Reste à montrer que $E = H + \operatorname{Vect}(x)$. Or x peut s'écrire $x = h + \alpha e$ pour un scalaire α non nul (sinon $x \in H$) et un élément h de H. Soit y un élément de E, il existe k dans H et β scalaire tel que $y = k + \beta e$. On en déduit que $z = k + \dfrac{\beta}{\alpha}(x - h) = (k - \dfrac{\beta}{\alpha}h) + \dfrac{\beta}{\alpha}x$, ce qui montre que $E \subset H + \operatorname{Vect}(x)$, et l'inclusion inverse est claire.
Finalement $E = H \oplus \operatorname{Vect}(x)$.

Réciproquement, si $E = H \oplus \operatorname{Vect}(x)$, soit x non nul n'appartient pas à H sans quoi la somme n'est pas directe, soit $x = 0$ et alors $H = E$ n'est pas un hyperplan (tout supplémentaire de dimension 1 serait inclus dans H...). $\square$

$*$ Ainsi toute droite non incluse dans un hyperplan H en procure un supplémentaire dans E.

46►

$*$ *Preuve du sens direct* : Soit H un hyperplan de E et soit e un vecteur de E non dans H. On a en particulier : $E = H \oplus \operatorname{Vect}(e)$.
Tout vecteur x de E s'écrit de manière unique : $x = h_x + \alpha(x)e$, où h_x est un élément de H est $\alpha(x)$ un scalaire. Il est facile de voir que α définit une forme linéaire sur E, grâce à l'unicité de la décomposition de chaque élément suivant la somme directe : si x_1 et x_2 sont dans E et λ est un scalaire, $\lambda x_1 + x_2 = h_{(\lambda x_1 + x_2)} + \alpha(\lambda x_1 + x_2)e$ donc la composante suivant e de $\lambda x_1 + x_2$ est d'une part $\alpha(\lambda x_1 + x_2)$ et d'autre part $\lambda\alpha(x_1) + \alpha(x_2)$.
Clairement, le noyau de α est H (donc α est non nulle, en particulier $\alpha(e) = 1$), car formé des vecteurs se décomposant sous la forme : $x = h_x + 0$. $\square$

$*$ *Preuve du sens réciproque* : Soit φ une forme linéaire non nulle sur E. Il existe donc e dans E tel que $\varphi(e) \neq 0$. Montrons que $E = \operatorname{Ker}\varphi \oplus \operatorname{Vect}(e)$, ce qui donnera le résultat.
Soit $x \in E$. Vous pouvez chercher par analyse la décomposition de x suivant cette somme si elle est possible. On en arrive à poser : $x = (x - \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(e)}e) + \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(e)}e$. On remarque que le premier vecteur appartient bien à $\operatorname{Ker}\varphi$ et le deuxième à $\operatorname{Vect}(e)$, ce qui montre que $E = \operatorname{Ker}\varphi + \operatorname{Vect}(e)$.

Enfin, $\text{Vect}(e) \cap \text{Ker}(\varphi) = \{0_E\}$, donc finalement $E = \text{Ker}\,\varphi \oplus \text{Vect}(e)$, le noyau de φ est bien un hyperplan de E. $\square$

$*$ Hyperplans de E et formes linéaires sur E sont donc extrêmement liés, en «correspondance» aux constantes multiplicatives non nulles près comme on va le montrer !

47▶

$*$ *Preuve* : Soit $H = \text{Ker}\,\varphi$ un hyperplan de E et $\psi \in E^*$ nulle sur H. Il existe $e \in E$ tel que $E = H \oplus \text{Vect}(e)$. Il existe un scalaire α tel que $\psi(e) = \alpha\varphi(e)$ puisque $\psi(e)$ et $\varphi(e)$ sont deux scalaires. Ainsi ψ et $\alpha\varphi$ ont mêmes restrictions à H (nulle) et à $\text{Vect}(e)$, donc $\psi = \alpha\varphi$.
La réciproque est simple. $\square$

$*$ Le plan de $\mathbb{R}^3$ engendré par $(1,0,1)$ et $(1,2,0)$ a pour équation cartésienne $2x - y - 2z = 0$, mais aussi $4x - 2y - 4z = 0$ ou encore $x - (y/2) - z = 0$, mais n'admet pas une équation différente de celles-ci à un scalaire non nul près.

$*$ Conséquence : si E est de dimension finie p, comme toute forme linéaire est combinaison linéaire des formes coordonnées relatives à la base canonique, tout hyperplan a pour équation cartésienne une équation de la forme $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_px_p = 0$ pour des scalaires a_i non tous nuls.

Pratique 15 :

1. Par exemple : $x - y - z = 0$, qui est bien un hyperplan puisque noyau de la forme linéaire non nulle $(x, y, z) \mapsto x - y - z$ sur $\mathbb{R}^3$ et qui contient bien le sous-espace de dimension 2 proposé.

2. $(x, y) \mapsto x - y$ est bien une forme linéaire non nulle sur $\mathbb{R}^2$, de noyau l'hyperplan proposé.

48▶

$*$ *Preuve* : Un tel système de q équations correspondant à q formes linéaires s'annulant est homogène, on peut l'écrire $AX = 0$ pour une matrice $A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ à q lignes et p colonnes (correspondant aux inconnues que sont les coordonnées d'un vecteur solution, c'est-à-dire élément de l'intersection des q hyperplans).
La dimension de $\text{Ker}\,A$ donne celle du sous-espace vectoriel qui est l'intersection des hyperplans.
Par ailleurs : $\dim \text{Ker}\,A = p - \text{rg}\,A \geqslant p - q$ puisque A comporte q lignes. $\square$

$*$ Quand a-t-on égalité ? Justement lorsque $\text{rg}\,A = q$, c'est-à-dire lorsque le système est de rang q.

$*$ Par exemple, dans $\mathbb{R}^3$, l'intersection des deux hyperplans (ou plans) $2x + y = 0$ et $x - z = 0$ est le sous-espace vectoriel F des solutions du système : $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$ qui est de rang 2 puisque les vecteurs lignes $(2, 1, 0)$ et $(1, 0, -1)$ forment une famille libre (ils correspondent aux coordonnées dans la base (e_1^*, e_2^*, e_3^*) des deux formes linéaires intervenant, $2e_1^* + e_2^*$ et $e_1^* - e_3^*$, qui sont bien linéairement indépendantes). F est donc de dimension $1 = 3 - 2$.

49▶

$*$ *Preuve* : Soit F un sous-espace vectoriel de E, avec E de dimension p et F de dimension $q \leqslant p$. Soit (e) une base de E obtenue en complétant une base de q éléments formant une base de F. Un élément x de E appartient donc à F si, et seulement si, ses $p - q$ dernières coordonnées sont nulles : F est donc bien l'intersection des $p - q$ hyperplans que sont les noyaux des formes coordonnées e_i^* pour i de $q + 1$ à p et qui forment une famille libre donc de vecteurs linéairement indépendants. $\square$

$*$ On voit dans la preuve que de multiples systèmes d'équations sont possibles, puisque qu'on peut compléter une base de F de multiples façons, et donc obtenir des hyperplans différents, mais toujours en nombre $p - q$. On peut toutefois généraliser le théorème-définition précédent et montrer que deux systèmes d'équations cartésiennes de F se déduisent l'un de l'autre par opérations élémentaires sur les lignes.

$*$ Dans $\mathbb{R}^3$, la droite $\text{Vect}((1, 1, -2))$ admet pour système d'équations cartésiennes
$\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x + z = 0 \end{cases}$, mais aussi $\begin{cases} 3x - y + z = 0 \\ 2x + z = 0 \end{cases}$

$*$ Conséquence : on étudie l'intersection de sous-espaces vectoriels (et de sous-espaces affines) en formant et réduisant le système de leurs équations cartésiennes.

Deux droites vectorielles de $\mathbb{R}^2$ ont pour intersection l'origine (système de rang 2) ou sont confondues (système de rang 1).

Deux plans de $\mathbb{R}^3$ ont pour intersection une droite (système de 2 équations à 3 inconnues, de rang 2), ou sont confondus (rang 1).

Deux plans de $\mathbb{R}^4$ ont pour intersection un point (système de 4 équations à 4 inconnues, de rang 4), une droite (rang 3) ou sont confondus (rang 2).

Un plan affine et une droite affine de $\mathbb{R}^3$ ont pour intersection le vide (système de trois équations à trois inconnues incompatible), ou un point (système compatible de rang 3), ou la droite (système compatible de rang 2).

Pratique 16 :

1. $x - y = 0$ est l'équation d'un hyperplan de $\mathbb{R}^3$ comme noyau d'une forme linéaire non nulle : dimension 2.

2. $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$ est l'intersection de deux hyperplans affines de $\mathbb{R}^3$ associés à des formes linéaires non proportionnelles : dimension 1 (c'est une droite affine)

3. $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y - z = 1 \\ x - 2y - 2z = 0 \end{cases}$ est l'intersection de 3 hyperplans affines, mais la troisième équation peut être oubliée, différence entre la deuxième et la première. Les deux formes linéaires associées aux deux premières équations sont indépendantes. La dimension est donc 1 (c'est encore une droite affine).

50▶

$*$ (a) Tr est la somme des formes coordonnées relatives aux $E_{i,i}$ de la base canonique de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

$*$ (b) Posons $A = [a_{i,j}]$ et $B = [b_{i,j}]$ avec les dimensions données, puis $C = AB \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ et $D = BA \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. Avec des notations évidentes : $c_{i,i} = \sum\limits_{j=1}^{p} a_{i,j}b_{j,i}$ et $d_{j,j} = \sum\limits_{i=1}^{q} b_{j,i}a_{i,j}$. Puis : $\mathrm{Tr}(C) = \sum\limits_{i=1}^{q} c_{i,i} = \sum\limits_{i=1}^{q}\sum\limits_{j=1}^{q} a_{i,j}b_{j,i}$. Ces deux sommes étant finies à indices indépendants, la commutativité de la somme permet de les inverser, et on trouve exactement $\mathrm{Tr}(D)$.

$*$ (c) évident puisque les éléments diagonaux restent invariants par transposition.

$*$ (d) Déjà démontré dans le paragraphe VI.3 concernant les « matrices semblables »

$*$ Un calcul utile en algèbre bilinéaire : pour toute matrice carrée complexe $A = [a_{i,j}]$, on a $\mathrm{Tr}({}^{t}\bar{A}A) = 0$ si, et seulement si, $A = 0$. En effet, vérifier que $\mathrm{Tr}({}^{t}\bar{A}A) = \sum\limits_{i,j} |\, a_{i,j}\,|^2$.

$*$ En application de ce qui précède, l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et de trace nulle forme un hyperplan de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, par exemple en somme directe supplémentaire avec $\mathrm{Vect}(\mathrm{I}_p)$.

51▶

Invariant par similitude donc par changement de base (sans « s » !) pour la représentation matricielle d'un endomorphisme !

52▶

Il suffit donc de bien choisir la base sur laquelle représenter matriciellement une projection p pour pouvoir calculer sa trace ! Or sur une base adaptée à $E = \mathrm{Im}\, p \oplus \mathrm{Ker}\, p$, le résultat est évident puisque la matrice est diagonale formée du nombre de 1 correspondant à dimension de $\mathrm{Im}\, p$.

53▶

$*$ Montrons que des sous-espaces propres $\mathrm{Ker}(u - \lambda_i \,\mathrm{Id}_E)$ associés à des valeurs propres distinctes deux à deux sont en somme directe : supposons $0_E = x_1 + x_2 + \ldots x_k$ avec $(u - \lambda_i)(x_i) = 0$ (c'est-à-dire $u(x_i) = \lambda_i x_i$). En prenant l'image à i fixé par l'application linéaire $\prod_{j \neq i} (u - \lambda_j \,\mathrm{Id}_E)$, où la notation produit désigne la composition, ce qui est licite puisque ces facteurs commutent entre eux, on obtient $[\prod_{j \neq i} (\lambda_i - \lambda_j)] x_i = 0$ puisque les autres termes sont nuls : par exemple le terme relatif à x_1, pour le cas où $i \neq 1$, disparaît à cause du facteur $(u - \lambda_1 \,\mathrm{Id}_E)(x_1) = \lambda_1 x_1 - \lambda_1 x_1 = 0$. On en déduit l'unicité de l'écriture de 0_E dans cette somme qui est donc directe.

Vous n'aurez pas manqué de voir poindre les polynômes de Lagrange relatifs aux λ_i et appliqués en u (on remplace les puissances de X par celles de u). En particulier, si $E = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{Ker}(u - \lambda_i \,\mathrm{Id}_E)$, c'est que tout x de E peut s'écrire $u(x) = \sum_{i=1}^{p} x_i$ avec $u(x_i) = \lambda_i x_i$, et on obtient $x_i = (L_i(u))(x)$, ce qui montre que les projecteurs associés à cette décomposition sont des polynômes en u...

$*$ Exemple avec $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. On cherche valeurs et vecteurs propres en résolvant le système $\begin{cases} 2x + y + z = \lambda x \\ x + 2y + z = \lambda y \\ x + y + 2z = \lambda z \end{cases}$, d'inconnues x, y et z, et de paramètre λ utile si le système est non inversible.

On résout et réduit par la méthode de Gauss : $\begin{cases} (2-\lambda)x + y + z = 0 \\ x + (2-\lambda)y + z = 0 \\ x + y + (2-\lambda)z = 0 \end{cases}$, on échange alors les deux premières équations pour éliminer une discussion prématurée sur λ, on obtient alors :

$\begin{cases} x + (2-\lambda)y + z = 0 \\ (2-\lambda)x + y + z = 0 \\ x + y + (2-\lambda)z = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} x + (2-\lambda)y + z = 0 \\ (1 - (2-\lambda)^2)y + (\lambda - 1)z = 0 \\ (\lambda - 1)y + (1 - \lambda)z = 0 \end{cases}$, enfin $\begin{cases} x + z + (2-\lambda)y = 0 \\ (\lambda - 1)z + (1 - (2-\lambda)^2)y = 0 \\ (\lambda - 1)(\lambda - 4)y = 0 \end{cases}$

Si $\lambda = 1$, le système est de rang 1 et $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)$ est le plan d'équation $x + y + z = 0$.
Si $\lambda = 4$, le système n'est pas inversible et $\mathrm{Ker}(u - 4\,\mathrm{Id}_E)$ est la droite dirigée par $(1, 1, 1)$.
La somme de ces deux sous-espaces propres est directe, de dimension 3 donc égale à l'espace.

Sur une base de l'espace formée d'une base du plan propre et de $(1, 1, 1)$,
par exemple $((1, -1, 0), (1, 0, -1), (1, 1, 1))$, u est représenté par $\mathrm{diag}(1, 1, 4)$!
Observer la trace par rapport à celle de la matrice de départ...

Il est alors plus facile de calculer les puissances de u, de trouver les endomorphismes qui commutent avec u, etc.