Chapitre 1 : LOGIQUE

I Propositions

I.1 Définitions et exemples

Définition

> *Une proposition (ou assertion) est une phrase à laquelle on peut attribuer la valeur de vérité vrai (notée V) ou faux (notée F).*

Remarque :
Pas d'autre possibilité pour une proposition : c'est le principe du tiers exclu.

Exemples :

∗ « 2 est un nombre pair », « l'ensemble des nombres premiers est infini », « -2 est positif » sont des propositions (valeurs respectives V, V et F).

∗ « Tout entier pair supérieur ou égal à trois peut s'écrire comme la somme de deux nombres premiers » est une proposition...mais on ne sait toujours pas si elle est vraie ou fausse ! (conjecture de Goldbach).

∗ « x est un entier pair » n'est pas une proposition mais définit un **prédicat** P : on ne connait pas x, la valeur à lui associer dépend de cette variable. $P(2)$, ou $P(3)$, ou encore $P(+)$ sont des propositions (valeurs respectives V, F et F).
En restreignant P à $\mathbb{N}$, P devient un prédicat sur $\mathbb{N}$.

I.2 Constructeurs de propositions : négation, conjonction, disjonction

Définition

> *On construit de nouvelles propositions à partir de deux propositions P et Q quelconques :*
>
> - **Négation de** P : *valeur vrai si P fausse, faux sinon,* *notations : $nonP$, $\neg P$, $\bar{P}$*
> - **Conjonction** *de P et Q : valeur vrai si P et Q vraies, faux sinon* *notations : $P\,et\,Q$, $P \wedge Q$*
> - **Disjonction** *de P et Q : valeur vrai si P ou Q au moins est vraie, faux sinon* *notations : $P\,ou\,Q$, $P \vee Q$*

Ceci se résume par les **tables de vérité** :

P	$\neg P$
V	F
F	V

Négation

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
F	V	F
V	F	F
F	F	F

Conjonction

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
F	V	V
V	F	V
F	F	F

Disjonction

Remarques :

∗ Le « ou » logique est inclusif : $P \vee Q$ est en particulier vrai quand P et Q sont vraies !
Le ou exclusif (« xor ») est malheureusement celui des restaurants : « fromage ou dessert ».

∗ $\neg(\neg P)$ prend les mêmes valeurs que P : P et $\neg(\neg P)$ sont dites (logiquement) équivalentes.

I.3 Un connecteur logique simplificateur : l'équivalence

Définition

> *Deux propositions logiques P et Q sont équivalentes si elles prennent la même valeur de vérité.*
> *On note alors : $P \iff Q$*

| Ce qui signifie que $P \iff Q$ est vraie. On écrit aussi : P vraie si, et seulement si, Q vraie.

Proposition

> *Soit P et Q deux propositions.*
> *∗ Double négation :* $\neg(\neg P) \iff P$
> *∗ Lois de De Morgan (1806-1871) :* *(1)* $\neg(P \wedge Q) \iff (\neg P) \vee (\neg Q)$
> *(2)* $\neg(P \vee Q) \iff (\neg P) \wedge (\neg Q)$

1▶

Pratique 1 :

1. Donner la table de vérité de l'équivalence puis de sa négation. Qu'obtient-on ?

2. Démontrer les lois de De Morgan à l'aide de tables de vérité.

3. Donner la valeur de vérité des propositions : « 5 et 2 sont pairs », « 5 ou 2 est pair », « 12 est multiple de 3 et de 5 », « 12 est divisible par 3 ou par 4 ».

4. Soit x un réel.
Donner une proposition équivalente à la négation de : « $x^2 \geqslant 2$ » puis de : « $x \geqslant 0$ et $x < 2$ ».

D'autres exemples d'équivalences :

∗ $P \wedge (Q \wedge R) \iff (P \wedge Q) \wedge R$ (associativité de $\wedge$)
∗ $P \vee (Q \vee R) \iff (P \vee Q) \vee R$ (associativité de $\vee$)
∗ $P \wedge Q \iff Q \wedge P$ et $P \vee Q \iff Q \vee P$ (commutativité de $\wedge$ et de $\vee$)
∗ $P \wedge (Q \vee R) \iff (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ (distributivité de $\wedge$ par rapport à $\vee$)
∗ $P \vee (Q \wedge R) \iff (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ (distributivité de $\vee$ par rapport à $\wedge$).

2▶

I.4 Un connecteur logique incontournable : l'implication

Définition

> *Soient P et Q deux propositions.*
> *La proposition $P \Longrightarrow Q$ (« P implique Q ») est fausse si P est vraie et Q fausse, vraie sinon.*
> *Autrement dit :* $(P \Longrightarrow Q) \iff ((\neg P) \vee Q)$

Table de vérité de l'implication :

P	Q	$P \Longrightarrow Q$
V	V	V
F	V	V
V	F	F
F	F	V

Remarques :

$*$ On traduit souvent $P \Longrightarrow Q$ par : « Si P (vraie), alors Q (vraie) », mais c'est incomplet...

$*$ Si P est faux, $P \Longrightarrow Q$ est vrai indépendamment de Q !

$*$ Pour montrer que $P \Longrightarrow Q$ est faux, on montre que P est vraie et Q fausse...

DÉFINITION

> *Soit P et Q deux propositions. Il est équivalent de dire :*
>
> *a) $P \Longrightarrow Q$ (est vraie)*
>
> *b) P est une* **condition suffisante** *pour Q*
>
> *c) Q est une* **condition nécessaire** *pour P*

3▶

Pratique 2 :

1. Quelle est la négation de $P \Longrightarrow Q$?

2. Donner condition nécessaire et condition suffisante (si c'est possible !) pour les couples de propositions suivantes :

a) (« $x \geqslant 0$ » , « $x \geqslant 1$ ») b) (« je suis un humain », « je suis un élève »)

c) pour x réel : (« $x \in \mathbb{Q}$ »,« $x^2 \in \mathbb{Q}$ »)

d) pour f fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: (« f est dérivable »,« f est continue »)

e) pour x réel : (« $x = 1$ »,« $x^2 = 1$ »), puis (« $x = 0$ »,« $x^2 = 0$ »)

PROPOSITION

> *Soit P et Q deux propositions.*
>
> *La proposition $P \Longleftrightarrow Q$ et la proposition $(P \Longrightarrow Q) \wedge (Q \Longrightarrow P)$ sont équivalentes.*
>
> *P est alors une condition nécessaire et suffisante pour Q (et inversement).*

4▶

Pratique 3 :

Connaissez vous des **conditions nécessaires et suffisantes** concernant :

1. l'existence de deux racines carrées distinctes pour un réel ? pour un complexe ?

2. l'existence de racines réelles pour un trinôme à coefficents réels de degré 2 ?

3. la monotonie d'une fonction dérivable sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles ?

PROPOSITION

> *Soit P et Q deux propositions.*
>
> **Principe de contraposition** *:* $P \Longrightarrow Q$ *et* $\neg Q \Longrightarrow \neg P$ *sont équivalentes.*

5▶

Pratique 4 :

1. Contraposée et proposition réciproque de :

« Si un entier naturel est de carré pair , alors il est pair »

2. Vérifier que deux propositions P et Q sont équivalentes si, et seulement si, leurs négations sont équivalentes ; écrivez cette proposition avec les symboles de négation et d'équivalence.

3. Contraposée et négation de : « si tu ne manges pas ta soupe, tu n'as pas de dessert ».

II Quantificateurs

II.1 Définitions

À partir d'un prédicat on construit des propositions à l'aide de quantificateurs.

Définition

> *Soit P un prédicat à une variable sur un ensemble E.*
>
> • **Quantificateur universel** $\forall$ *: la proposition « $\forall x \in E,\ P(x)$ » est vraie si pour tout x de E la proposition $P(x)$ est vraie, elle est fausse sinon.*
>
> • **Quantificateur existentiel** $\exists$ *: la proposition « $\exists\, x \in E,\ P(x)$ » est vraie s'il existe un élément x de E tel que la proposition $P(x)$ soit vraie, elle est fausse sinon.*
>
> • *Notation : la proposition « $\exists!\, x \in E,\ P(x)$ » est vraie s'il existe un et un seul élément x de E tel que $P(x)$ soit vraie, elle est fausse sinon.*

Exemples :

* « $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant 0$ » se lit : pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$, x^2 est positif.
* « $\exists\, x \in \mathbb{C},\ x^2 = -1$ » se lit : il existe un élément x dans $\mathbb{C}$ tel que $x^2 = -1$.
* « $\exists!\, n \in \mathbb{N},\ n^2 = 4$ » se lit : il existe un unique n dans $\mathbb{N}$ tel que $n^2 = 4$.

Remarque :

« $\forall x \in E,\ P(x)$ » ne dépend pas de x, c'est une proposition ! En particulier, « $\forall y \in E,\ P(y)$ » est la même proposition : on dit que x une **variable muette**.

⚠

* Un quantificateur ne doit pas servir d'abréviation dans une phrase en français ! L'usage est réservé aux expressions mathématiques !
* La place d'un quantificateur est « avant » celle du prédicat, pas après !
* Si E est vide, « $\forall x \in E,\ P(x)$ » est vrai et « $\exists x \in E,\ P(x)$ » est faux, indépendamment de P.

II.2 Combinaisons de plusieurs quantificateurs

Attention aux interversions entre $\exists$ et $\forall$! !

* « Toute rivière a une source (propre) » est une proposition vraie, qui diffère de la proposition fausse « Il existe une source (commune) à toute rivière »

* « $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ 2x + 3y = 1$ » peut se lire : pour tout réel x, il existe un réel y tel que $2x + 3y = 1$, ce qui est vrai !

$\rightarrow$ Dans l'écriture « $\forall x,\ \exists y,\ ...$ », l'élément y dépend de l'élément x !

* « $\exists y \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $2x+3y=1$ » peut se lire : il existe un réel y tel que pour tout réel x on a $2x+3y=1$, ce qui est faux !
→ Dans l'écriture « $\exists y$, $\forall x$, ... », l'élément y est indépendant de tous les éléments x !

* En revanche, avec des notations simplifiées :
« $\forall x$, $\forall y$, $P(x,y)$ » et « $\forall y$, $\forall x$, $P(x,y)$ » sont équivalentes, et
« $\exists\, x$, $\exists\, y$, $P(x,y)$ » et « $\exists\, y$, $\exists\, x$, $P(x,y)$ » sont équivalentes.

6▶

II.3 Quantificateurs et négation

Proposition

> *Soit P un prédicat à une variable sur E.*
>
> *La négation de :* « $\forall x \in E$, $P(x)$ » *est* « $\exists\, x \in E$, $\neg P(x)$ ».
>
> *La négation de :* « $\exists\, x \in E$, $P(x)$ » *est* « $\forall x \in E$, $\neg P(x)$ ».

Pour nier une proposition, on parcourt les termes de gauche à droite et :
* on change $\forall$ en $\exists$,
* on change $\exists$ en $\forall$,
* on change les autres termes en leurs négations par les outils déjà vus.

7▶

Pratique 5 :

1. Négation de : $\exists x \in \mathbb{R}$, $(x \geqslant 0) \vee (x \leqslant 0)$

2. $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\forall q \in \mathbb{N}^*$, $(p+q \leqslant 4) \vee (p\,q \geqslant 6)$ est-elle vraie ?

3. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles.
Donner une proposition traduisant que f est constante. Donner sa négation.
Même chose avec : f s'annule, puis f bornée, puis f périodique.

4. Soit (u_n) une suite réelle. Négation de : « $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant n_0 \Longrightarrow |u_n| < \varepsilon$ ».

III Quelques méthodes de raisonnements

Pour trouver une solution à une question, on allie deux types de raisonnements :
* **déductif** : choisir un ensemble (suffisant) de propriétés, en déduire une propriété (nécessaire).
Schématiquement : on passe du « général » au « particulier » .
* **inductif** : à partir de cas particuliers, on conjecture une propriété générale, à confirmer par déductions. Cette démarche participe au choix de départ du raisonnement déductif !

III.1 Prouver une proposition P

• **Preuve directe :** on cherche Q vraie (condition suffisante) telle que $Q \Longrightarrow P$.

• **Preuve par l'absurde :** supposer P fausse, en déduire Q (on montre $\neg P \Longrightarrow Q$), en sachant Q fausse. On a donc $Q \wedge \neg Q$ vraie : impossible (*tiers exclu*), donc P est vraie.

8▶

• **Preuve par disjonction de cas :** on sépare en différents cas dont la réunion donne le cadre.

9▶

III.2 Prouver une implication $P \Longrightarrow Q$

• **Preuve directe :** on suppose P vraie, et on montre que Q est vraie (*modus ponens*).

• **Preuve par contraposée :** on montre que $\neg Q \Longrightarrow \neg P$.

10▶

• **Preuve par l'absurde :** par définition de l'implication, on suppose P et $\neg Q$ et on cherche une contradiction.

11▶

III.3 Prouver une équivalence $P \Longleftrightarrow Q$

• Preuve directe (à éviter et réserver aux cas très simples) : on établit des équivalence successives de P jusqu'à Q.

• **Preuve par double implication :** on montre $P \Longrightarrow Q$ et on montre $Q \Longrightarrow P$.

12▶

III.4 Preuve par récurrence

Théorème (Principe de récurrence) :

> *Soit P un prédicat sur $\mathbb{N}$. On suppose :*
>
> $P(0)$ *vraie* (*initialisation*)
>
> $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) \Longrightarrow P(n+1)$ (*hérédité*)
>
> *Alors :* $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n)$ ($P(n)$ *est vraie pour tout naturel* n*).*

Variantes :

$*$ **Récurrence forte** : l'hypothèse d'hérédité forte s'écrit : $\forall n \in \mathbb{N}$, $(\forall k \leqslant n,\ P(k)) \Longrightarrow P(n+1)$, c'est-à-dire qu'on suppose que pour tout naturel n, si la propriété est vérifiée jusqu'à l'entier n, (et pas seulement pour n), alors $P(n+1)$ est vraie.

$*$ **Récurrence finie** sur $[\![0, N]\!]$ pour un naturel N : l'hypothèse d'hérédité finie s'écrit $\forall n \in [\![0, N-1]\!]$, $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$ et la conclusion est restreinte à $[\![0, N]\!]$.

$*$ **Récurrence double** : on a besoin de savoir $P(n)$ et $P(n+1)$ vraies pour en déduire $P(n+2)$. L'initialisation se fait sur $P(0)$ et $P(1)$, et l'héridité porte sur $P(n)$ et $P(n+1)$.

Il y a également des récurrences triples, etc.

$*$ Chaque cas peut être initialisé en un naturel n_0, la conclusion est restreinte aux naturels supérieurs à n_0.

$*$ **Récurrence descendante depuis** n_0 : on crée un prédicat sur une partie de $\mathbb{N}$ par $Q(n) = P(n_0 - n)$.

13▶

Exemple :

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}^*$. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0.q^n$

Rédaction en 4 points après annonce de la démarche :

1) Expliciter la propriété à prouver : pour tout naturel n, posons $HR(n)$: ... ⚠ **pas de $\forall$! ! !**

Pour n naturel, posons $HR(n)$: « $u_n = u_0.q^n$ ».

2) On initialise la récurrence au(x) plus petit(s) entier(s) utilisé(s).

Pour $n = 0$: $HR(0)$: $u_0 = u_0.1 = u_0$ est vrai.

3) On montre que la propriété est héréditaire. ⚠ **toujours pas de $\forall n$! ! !**

Soit n **un naturel**, supposons $HR(n)$ vraie, c'est à dire : $u_n = u_0.q^n$
Par définition : $u_{n+1} = qu_n = u_0.q^{n+1}$, donc $HR(n+1)$ est vraie.

4) On conclut en citant le théorème utilisé, comme toujours !

D'après le principe de récurrence, pour tout naturel n la propriété $HR(n)$ est vraie ($u_n = u_0.q^n$)

Pratique 6 :

1. Montrer que pour tout naturel n on a : $0 + 1 + 2 + ... + n = \sum\limits_{k=0}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$

2. La suite de Fibonacci (F_n) est définie par : $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, et : $\forall n \geqslant 0$, $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$
Montrer que pour tout naturel n : $F_n \leqslant 2^n$

III.5 L'analyse-synthèse

Pour résoudre les problèmes d'existence difficiles :

« Montrer qu'il existe un élément ... (ou qu'il existe un unique élément) ... tel que ... »

Pas facile si on ne « voit » pas de solution !

$*$ **Analyse** (on recherche la forme des solutions possibles par conditions nécessaires) :
a) on suppose qu'une telle solution existe, et on la pose : soit ....
b) on réduit au maximum l'ensemble des possibilités ; peut-être est-il encore trop grand...
c) s'il reste une seule possibilité : l'unicité en cas d'existence est démontrée.

$*$ **Synthèse** :
Si l'une des possibilités données par l'analyse vérifie effectivement les exigences du problème, on a montré l'existence d'une solution. (Éventuellement on obtient l'ensemble des solutions)

14▶

Pratique 7 :

1. Trouver les réels x tels que : $x = \sqrt{2 - x}$.

2. Montrer toute fonction $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ s'écrit de manière unique comme somme d'une fonction affine $g : x \mapsto ax + b$ et d'une fonction h qui s'annule en 0 et en 1.

SAVOIR...

(1) *... les définitions et tables de vérité des connecteurs logiques étudiés*

(2) *... donner la négation d'une proposition (lois de De Morgan, implication, quantificateurs)*

(3) *... ce que signifie condition nécessaire, suffisante, nécessaire et suffisante*

(4) *... écrire l'implication et l'équivalence avec les connecteurs* $\neg$, $\wedge$ *et* $\vee$

(5) *... ce qu'est une preuve par l'absurde, par disjonction de cas, par contraposée, par double implication, par analyse-synthèse*

(6) *... rédiger parfaitement les 4 points d'une preuve par récurrence*

(7) *... rédiger le début de l'analyse et de la synthèse d'une preuve par analyse-synthèse*

(8) *... passer en revue ces modes de démonstration quand on cherche une solution !*

THÉORÈMES et PROPOSITIONS	**... outils pour ...**
Double négation et Lois de De Morgan	*Obtenir une négation de proposition*
Principe de contraposition, de double implication	*Montrer ou utiliser une implication*
Négation et quantificateurs	*Nier une proposition avec quantificateurs*
Théorème (ou principe) de récurrence	*À citer en fin de preuve par récurrence*