Notations.

On note $\wedge$ le pgcd et $\vee$ le ppcm, par ailleurs on préfère la notation $a \equiv b \pmod{n}$ pour exprimer que a est congru à b modulo n.

Exercice 1.

Soit $n \geqslant 2$. Calculer :

1. $n \wedge (2n+1)$
2. $n \vee (2n+1)$
3. $(n-1) \wedge (2n+1)$
4. $(n-1) \vee (2n+1)$

Solution, proposée par le manuel, de l'exercice 1.

1. $n \wedge (2n+1)$?

   La division euclidienne de $2n+1$ par n s'exprime par l'égalité $2n+1 = 2 \times n + 1$, c'est-à-dire $2n+1-2n=1$ d'où on conclut que les entiers $(2n+1)$ et n sont premiers entre eux.

2. $n \vee (2n+1)$?

   Comme le pgcd de $(2n+1)$ et n vaut 1, alors le ppcm de $(2n+1)$ et n est le produit $(2n+1) \times n$.

3. $(n-1) \wedge (2n+1)$
4. $(n-1) \vee (2n+1)$

Exercice 2.

Soit $(a, b, c) \in (\mathbb{N}*)^3$ tel que $a^2 + b^2 = c^2$ et $a \wedge b \wedge c = 1$.

Montrer que $a \wedge b = a \wedge c = b \wedge = 1$.

Solution de l'exercice 2.

Exercice 3.

Soit $(a, b, c) \in (\mathbb{N}*)^3$ tel que $a^2 + b^2 = c^2$ et $a \wedge b = 1$.

Montrer que a et b ne sont pas de même parité.

Indication. On pourra utiliser des congruences modulo 4.

Solution de l'exercice 3.