Chapitre 5 : COMPLEXES ET TRIGONOMÉTRIE

Un monde merveilleux dans lequel toute équation polynomiale de degré $\geqslant 1$ admet une racine (monde algébriquement clos), mais un monde dé-s-ordonné....

I Le corps $\mathbb{C}$

I.1 Définitions et opérations

DÉFINITION

$\mathbb{C}$ est l'ensemble des nombres $a + \mathrm{i}b$ où a et b sont réels et i vérifie $\mathrm{i}^2 = -1$.

1▶

Addition : $(a + \mathrm{i}b) + (c + \mathrm{i}d) = (a + c) + \mathrm{i}(b + d)$ (prolonge l'addition sur $\mathbb{R}$)

Multiplication : $(a + \mathrm{i}b)(c + \mathrm{i}d) = (ac - bd) + \mathrm{i}(ad + bc)$ (prolonge la multiplication sur $\mathbb{R}$)

$(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps commutatif.

⚠ Il n'y a pas de relation d'ordre total sur $\mathbb{C}$ compatible avec les opérations !!

2▶

THÉORÈME - DÉFINITION :

Pour tout a et tout b réels : $a + \mathrm{i}b = 0 \Longleftrightarrow a = b = 0$.

*L'***écriture algébrique** *d'un complexe $z = a + \mathrm{i}b$ (avec a et b réels) est donc unique.*

$a = \mathfrak{Re}(z)$ est la **partie réelle** *de z, $b = \mathfrak{Im}(z)$ est sa* **partie imaginaire**.

Les réels sont les complexes de partie imaginaire nulle.
Si $\mathfrak{Re}(z) = 0$, z est dit imaginaire pur. Leur ensemble est noté $\mathrm{i}\mathbb{R}$.

3▶

Pratique 1 :

1) Donner les parties réelles et imaginaires de : $(2 + \mathrm{i}) + (-3 + 2\mathrm{i})$ et de : $(1 + 2\mathrm{i})(2 - \mathrm{i})$

2) Calculer la forme algébrique du carré et du cube d'un complexe.
Que se passe-t-il dans le cas d'un réel ou d'un imaginaire pur ?

3) Calculer i^n pour n naturel.

4) Combien de solutions admet l'équation $z^4 = 1$ dans $\mathbb{R}$? dans $\mathbb{C}$?

5) Calculer les parties réelles et imaginaires de $z + z'$ et de αz pour α réel, z et z' complexes.

Définition

> *On munit le plan $\mathbb{R}^2$ d'un repère orthonormé direct $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.*
>
> *À tout complexe $z = a + \mathrm{i}b$ (a et b réels) correspond l'unique point $M(a, b)$ du plan, appelé image de z, ou de manière équivalente le vecteur $\overrightarrow{OM} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$.*
>
> *z est alors l'affixe de M et l'affixe de $\overrightarrow{OM}$.*
>
> *Le point M et le vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ d'affixes z sont notés $M(z)$ et $\vec{u}_z$.*
>
> *Dans ce cadre, on parle aussi du plan complexe qu'on notera $\mathcal{P}$.*

L'affixe d'une somme de vecteurs est la somme de leurs affixes.

Pour M et N d'affixes repectives m et n, l'affixe du vecteur $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}$ est $n - m$.

4▶

Interprétation géométrique de l'addition : additionner a à z, c'est appliquer à $M(z)$ la translation de vecteur $\vec{u}_a$.

5▶

Pratique 2 :

Placer dans le plan complexe les points $A(2)$, $B(3 + 2\mathrm{i})$ et $C(5 - \mathrm{i})$, ainsi que leurs translatés de vecteur d'affixe $-1 + 2\mathrm{i}$ et $-\mathrm{i}$.

I.2 Conjugaison

Soit $z = a + ib$ un complexe de partie réelle a et de partie imaginaire b.

Le **conjugué de** z est $\overline{z} = a - \mathrm{i}b$. Donc $\mathcal{R}\mathrm{e}(\overline{z}) = \mathcal{R}\mathrm{e}(z)$ et $\mathcal{I}\mathrm{m}(\overline{z}) = -\mathcal{I}\mathrm{m}(z)$.

Propriétés

Pour tout z complexe :

1) $\overline{\overline{z}} = z$ (la conjugaison est une involution sur $\mathbb{C}$, donc une bijection)

2) $\mathcal{R}\mathrm{e}(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$ et $\mathcal{I}\mathrm{m}(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2\mathrm{i}}$

3) z est réel si, et seulement si, $z = \overline{z}$ et z est imaginaire pur si, et seulement si, $z = -\overline{z}$

4) Le conjugué d'une somme, d'un produit, d'un quotient est respectivement la somme, le produit, le quotient des conjugués. La conjugaison est un isomorphisme de corps sur $\mathbb{C}$.

6▶

Interprétation géométrique de la conjugaison : conjuguer z, c'est transformer $M(z)$ en son symétrique par rapport à l'axe des abscisses.

7▶

I.3 Module d'un complexe

Théorème -Définition :

> *On appelle module l'application :* $\begin{array}{|lcl} | \ | : \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ z & \longmapsto & |z| = \sqrt{(\Re\mathrm{e}(z))^2 + (\Im\mathrm{m}(z))^2} = \sqrt{z\bar{z}} \end{array}$
>
> *Ce module prolonge la valeur absolue réelle.*

8▶

Propriétés : Pour tout z et z' complexes :

1) $|z|^2 = z\bar{z}$ 2) $|z| = |\bar{z}|$ 3) $|\Re\mathrm{e}(z)| \leqslant |z|$ et $|\Im\mathrm{m}(z)| \leqslant |z|$ 4) $|z| = 0 \Longleftrightarrow z = 0$

5) Produit : $|zz'| = |z||z'|$

6) Quotient (pour z non nul) : $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$, $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$, $\dfrac{1}{z} = \bar{z} \Longleftrightarrow |z| = 1$

7) $(z, z') \mapsto |z' - z|$ prolonge la distance sur $\mathbb{R}$ en une distance sur $\mathbb{C}$.
En particulier, on a les inégalités triangulaires : $||z| - |z'|| \leqslant |z + z'| \leqslant |z| + |z'|$
avec égalité à droite si, et seulement si, $z = 0$ ou « il existe $\lambda \geqslant 0$ tel que $z' = \lambda z$ ».

9▶

Pratique 3 :

Soit z un complexe.

1. Calculer le conjugué de $1 + \mathrm{i} - \mathrm{i}z$.

2. Calculer le module de $1 + \mathrm{i}$, puis de $1 + z$ pour un complexe z quelconque.

3. Trouver les complexes z tels que $\dfrac{z + \mathrm{i}}{z + 1}$ soit réel.

Interprétation géométrique du module : pour des complexes a et b, et $R \geqslant 0$:
$|b - a|$ calcule la distance euclidienne entre $A(a)$ et $B(b)$.
En particulier, $|z|$ est la distance de O à $M(z)$, et la norme euclidienne du vecteur $\overrightarrow{OM}$.
$\{M(z) \in \mathcal{P} \mid |z - a| = R\}$ est le cercle de centre $A(a)$ et de rayon R
$\{M(z) \in \mathcal{P} \mid |z - a| \leqslant R\}$ est le disque fermé de centre $A(a)$ et de rayon R
$\{M(z) \in \mathcal{P} \mid |z - a| < R\}$ est le disque ouvert de centre $A(a)$ et de rayon R.

I.4 Les complexes de module 1

Définition

> *On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des complexes de module 1 :* $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$
>
> *On l'appelle aussi « cercle unité » ou « cercle trigonométrique ».*

Proposition : $\mathbb{U}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.

10▶

Théorème -Définition :

a) Pour θ réel, on appelle « exponentielle de $\mathrm{i}\theta$ » le complexe : $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)$

b) $\mathbb{U} = \{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\}$. *En particulier, pour tout réel θ :* $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}| = 1$

c) $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'} \iff \theta \equiv \theta' \ [2\pi]$. *En particulier :* $\mathbb{U} = \{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \mid \theta \in]-\pi, \pi]\}$

11▶

Propriétés : Régles de calcul pour θ et θ' réels, n entier relatif

1) $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\theta')} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}$ et $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = \overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}$

2) **Formule de Moivre** : $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$ c'est-à-dire $(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta)$

3) **Formules d'Euler** : $\cos(\theta) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}$

12▶

Pratique 4 :

1. Placer $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ sur le cercle unité pour θ valant 0, $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$, $\pi/2$, $2\pi/3$, $5\pi/6$, $3\pi/2$, -3π.

2. Calculer $\cos(3\theta)$ et $\sin(3\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ respectivement.

I.5 Argument et forme trigonométrique d'un complexe

Si z est non nul, $z/|z|$ est de module 1, il peut donc s'écrire sous la forme $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ pour un réel θ.

Définition

Soit z un complexe non nul.

On appelle **argument** *de z tout réel θ tel que :* $z = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. *On note* $\arg(z)$ *leur ensemble.*

*Un seul argument appartient à $]-\pi, \pi]$, c'est l'***argument principal** *de z noté* $\mathrm{Arg}(z)$.

On note souvent abusivement $\arg(z) \equiv \theta_0 \ [2\pi]$ par exemple...

Propriétés : Soit z un complexe non nul.

1) Les arguments de z sont ceux de $z/|z|$

2) $z \in \mathbb{R}_+^* \iff \arg(z) \equiv 0 \ [2\pi]$ et $z \in \mathbb{R}_-^* \iff \arg(z) \equiv \pi \ [2\pi]$

$z \in \mathrm{i}\mathbb{R}_+^* \iff \arg(z) \equiv \pi/2 \ [2\pi]$ et $z \in \mathrm{i}\mathbb{R}_-^* \iff \arg(z) \equiv -\pi/2 \ [2\pi]$

ou encore : $z \in \mathbb{R}^* \iff \arg(z) \equiv 0 \ [\pi]$

DÉFINITION

> *Pour tout z complexe non nul on a : $z = \rho e^{i\theta}$ où $\rho = |z|$ appartient à $\mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \arg(z)$.*
> *C'est la* **forme trigonométrique** *de z.*

Lien entre les écritures algébriques et trigonométriques : $z = a + ib$ et $z = \rho e^{i\theta}$ (avec $\rho > 0$)

$$\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{et} \quad \cos(\theta) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin(\theta) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

13▶

PROPOSITION : Soit z et z' deux complexes non nuls. Alors :

$$\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z') \; [2\pi] \quad \text{et} \quad \arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z') \; [2\pi]$$

14▶

Pratique 5 :

1. Mettre sous forme trigonométrique : -3, $1 + i$, $1 - i\sqrt{3}$, $-\frac{\sqrt{3}+i}{4}$

2. Quel est l'argument principal de $2 - 2i$? de $4e^{7i\pi/2}$? de $-4e^{i\pi/3}$?

Interprétation géométrique de l'argument : pour des complexes a et b :

$\arg(a)$ mesure l'**angle orienté de vecteurs** $\widehat{\vec{e_1}, \vec{u_a}}$: $mes(\widehat{\vec{e_1}, \vec{u_a}}) \equiv \text{Arg}(a) \; [2\pi]$

Plus généralement : $mes(\widehat{\vec{u_a}, \vec{u_b}}) \equiv \text{Arg}(b) - \text{Arg}(a) \equiv \text{Arg}(\frac{b}{a}) \; [2\pi]$

Interprétation géométrique de la multiplication par un complexe :
Soit z et w deux complexes non nuls.

$*$ Multiplier z par $e^{i\alpha}$, c'est transformer $M(z)$ en $M'(z')$ par rotation de centre O et d'angle α du vecteur $\overrightarrow{OM}$.
La transformation complexe associée est donnée par : $z' = e^{i\theta} z$.

$*$ Multiplier z par w, c'est transformer $M(z)$ en $M'(z')$ par rotation de centre O et d'angle $\text{Arg}(w)$ suivie d'une homothétie de rapport $|w|$ (ou la composée inverse).
La transformation complexe associée est : $z' = wz = |w| e^{i\,\text{Arg}(w)} z$

15▶

Pratique 6 :

1. Soit z un complexe. Placer dans $\mathcal{P}$ les points d'affixes z, $-z$, $\overline{z}$ et $-\overline{z}$.

2. Placer ensuite les points d'affixes $z + 1$, $z + 1 + i$, $2z$, $2\overline{z}$, iz, $e^{i\pi/4}z - 1$ et $2e^{2i\pi/3}z - i$.

I.6 L'exponentielle complexe

Définition

On appelle **exponentielle du complexe** z *le complexe* $\mathrm{e}^{\mathfrak{Re}(z)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathfrak{Im}(z)}$ *noté* $\exp(z)$ *ou* e^z.

Cette fonction exp définie de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}^*$ prolonge l'exponentielle réelle et l'exponentielle définie précédemment sur $\mathrm{i}\mathbb{R}$.

Propriétés : Pour z et z' complexes

1) $\exp(z+z') = \exp(z)\exp(z')$, $\quad \dfrac{1}{\exp(z)} = \exp(-z) \quad$ et $\quad \exp(0) = 1$

2) $|\exp(z)| = \mathrm{e}^{\mathfrak{Re}(z)} \quad$ et $\quad \arg(\exp(z)) \equiv \mathfrak{Im}(z)\ [2\pi]$

3) $\exp(z) = \exp(z')$ si, et seulement si, $z - z' \in 2\mathrm{i}\pi\mathbb{Z}$

16▶

Théorème

Soit $a \in \mathbb{C}^*$. *L'ensemble des solutions de l'équation :* $\exp(z) = a$ *d'inconnue* z *est*

$$\{\ln(|a|) + \mathrm{i}\,\mathrm{Arg}(a) + 2\mathrm{i}k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

17▶

Pratique 7 :

Résoudre l'équation $\exp(z) = 1 + \mathrm{i}$ d'inconnue z complexe.

II Applications à la trigonométrie

II.1 La fonction « tangente »

Définition

La fonction tangente est définie par : $\tan = \dfrac{\sin}{\cos}$

On définit aussi la fonction cotangente par : $\mathrm{cotan} = \dfrac{\cos}{\sin} = \dfrac{1}{\tan}$

$*$ tan est de période π, impaire, définie sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[+ \pi\mathbb{Z}$, de dérivée $\tan' = 1 + \tan^2 = \dfrac{1}{\cos^2}$

$*$ $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}+} \tan(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}-} \tan(x) = +\infty$

$*$ cotan est de période π, définie sur $]0, \pi[+ \pi\mathbb{Z}$, et $\mathrm{cotan}' = -1 - \mathrm{cotan}^2 = -\dfrac{1}{\sin^2}$

$*$ $\lim\limits_{x \to 0_+} \mathrm{cotan}(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to \pi_-} \mathrm{cotan}(x) = -\infty$

18▶

II.2 Linéariser (et dé-linéariser) des expressions trigonométriques

Il est plus facile de calculer $\int \cos(3x)\,\mathrm{d}x$ que $\int \cos^3(x)\,\mathrm{d}x$...

Soit p et q des naturels, et x un réel.

Linéariser $x \mapsto \cos^p(x)\sin^q(x)$, c'est l'écrire comme combinaison linéaire des $x \mapsto \cos(kx)$ et $x \mapsto \sin(kx)$ pour des k entiers naturels.

L'opération inverse (**dé-linéariser**) consiste à exprimer $x \mapsto \cos(p\,x)$ et $x \mapsto \sin(p\,x)$ en fonction des $x \mapsto \cos^k(x)$ et $x \mapsto \sin^k(x)$:

$$\cos(p\,x) = \mathfrak{Re}\left((\cos(x)+\mathrm{i}\sin(x))^p\right) = \sum_{k=0}^{\lfloor p/2 \rfloor} (-1)^k \binom{p}{2k} \cos^{p-2k}(x)\sin^{2k}(x)$$

$$\sin(p\,x) = \mathfrak{Im}\left((\cos(x)+\mathrm{i}\sin(x))^p\right) = \sum_{k=0}^{\lfloor (p-1)/2 \rfloor} (-1)^k \binom{p}{2k+1} \cos^{p-(2k+1)}(x)\sin^{2k+1}(x)$$

19▶

Les outils : formules d'Euler - formule du binôme de Newton - formule de Moivre

Pratique 8 :

Linéariser $\sin^4(x)$, $\cos^4(x)$, $\sin^3(x)\cos^3(x)$.

II.3 Traiter les égalités

Soit a et b deux réels, z et z' deux complexes.

$*$ $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{z'}$ équivaut à $(z - z' \in 2\mathrm{i}\pi\mathbb{Z})$

$*$ $\cos(a) = \cos(b)$ équivaut à $(a \equiv b\ [2\pi]$ ou $a \equiv -b\ [2\pi])$

$*$ $\sin(a) = \sin(b)$ équivaut à $(a \equiv b\ [2\pi]$ ou $a \equiv \pi - b\ [2\pi])$

$*$ $\tan(a) = \tan(b)$ équivaut à $(a \equiv b\ [\pi])$

20▶

Pratique 9 :

1. Trouver les réels a et b tels que : $\sin(2a) = \cos(b)$

2. Résoudre : $\cos(2a) + 4\cos(a) + 3 = 0$ d'inconnue réelle a.

3. Résoudre : $\tan(3a) = \sqrt{3}$ d'inconnue réelle a.

II.4 La technique de l'angle moitié

La *technique de l'angle moitié* permet de factoriser $\mathrm{e}^{\mathrm{i}a} \pm \mathrm{e}^{\mathrm{i}b}$ (avec a et b réels).
On fait apparaître la demi-somme des arguments intervenant :

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}a} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}b} = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}(a+b)}{2}} . \left(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}(a-b)}{2}} + \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}(a-b)}{2}} \right) = 2\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}(a+b)}{2}} . \cos(\frac{a-b}{2})$$

et

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}a} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}b} = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}(a+b)}{2}} . \left(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}(a-b)}{2}} - \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}(a-b)}{2}} \right) = 2\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}(a+b)}{2}} . \sin(\frac{a-b}{2})$$

| On retrouve ainsi facilement les formules de transformations somme $\leftrightarrow$ produit !

21▶

Pratique 10 :

1. Récrire depuis cette dernière égalité les formules de $\cos(a) + \cos(b)$ et $\sin(a) + \sin(b)$.

2. Faire de même pour $\cos(a) - \cos(b)$.

II.5 Transformer $a\cos(t) + b\sin(t)$ en $A\cos(t - \varphi)$

Très très utile en physique...

$t \mapsto a\cos(t) + b\sin(t)$ représente un **signal**, A sera son **amplitude** et φ sa **phase**.

On suppose $ab \neq 0$: $a\cos(t) + b\sin(t) = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos(t) + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin(t) \right)$

L'amplitude est donnée par : $A = \sqrt{a^2+b^2}$

La phase est : $\varphi = \operatorname{Arg}(a + \mathrm{i}b)$, car $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \mathrm{i}\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi)$ est de module 1.

II.6 Les formules à connaître !

Formulaire en fin de chapitre : le connaître et le revoir régulièrement !

Pratique 11 :

1. Calculer $\sin(x + n\pi)$ et $\cos(x + n\pi)$ pour n entier relatif et x réel quelconques.

2. Donner une expression de $\sin(\pi/8)$ et de $\cos(\pi/8)$ à l'aide de radicaux.

3. Calculer $\tan(\pi/12)$.

4. À savoir faire : pour n naturel, calculer $C_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \cos(kx)$ et $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \sin(kx)$.

III Racines n-ièmes d'un complexe

On cherche à résoudre ici les équations de type : $x^n = \textit{constante}$ d'inconnue x.

DÉFINITION

Soit z un complexe et n un naturel non nul.

On appelle racine n-ième de z tout complexe ζ tel que $\zeta^n = z$.

Les racines n-ièmes de 1 sont appelées racines n-ièmes de l'unité. Leur ensemble est noté $\mathbb{U}_n$.

⚠ Notation $\sqrt[n]{z}$ interdite ! !

(réservée au cas $z \in \mathbb{R}_+$ pour désigner « sa » racine n-ième positive, voir le théorème suivant)

THÉORÈME

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $z = \rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec $\rho > 0$ un complexe non nul.

$*$ 0 *admet une unique racine n-ième, qui est 0.*

$*$ z *possède n racines n-ièmes distinctes deux à deux :* $\sqrt[n]{\rho}\ \mathrm{e}^{(\mathrm{i}\frac{\theta}{n}+\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n})}$ *pour* $k \in [\![0, n-1]\!]$

En particulier : l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité est : $\mathbb{U}_n = \{\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}}\}_{k\in[\![0,n-1]\!]}$

PROPRIÉTÉS

a) $\mathbb{U}_n$ est un sous-groupe de $(\mathbb{U}, \times)$, à n éléments dont 1, et qui contient -1 ssi n est pair.

b) En posant $\omega_1 = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}}$, on a aussi : $\mathbb{U}_n = \{\omega_1^k\}_{k\in[\![0,n-1]\!]} = \{\omega_1^k\}_{k\in\mathbb{Z}}$

c) **On obtient toutes les racines n-ièmes de z en multipliant l'une d'elle par les racines n-ièmes de l'unité.**
Par exemple, si $z = \rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, l'ensemble des racines n-ièmes de z est : $\{\sqrt[n]{\rho}.\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\theta}{n}}.\omega\}_{\omega\in\mathbb{U}_n}$

22▶

Pratique 12 :

1. Calculer les racines cubiques de l'unité : on les note 1, j et $\mathrm{j}^2 = \bar{\mathrm{j}}$ (en tournant suivant le sens trigonométrique).
Les placer sur le cercle trigonométrique. Justifier que : $1 + \mathrm{j} + \mathrm{j}^2 = 0$

2. Faire la même chose avec les racines quatrièmes, respectivement cinquièmes de l'unité.
Respectivement, quelle relation semblable les lie ?

3. Faire la même chose avec les racines troisièmes de 8i.

PROPOSITION

Soit n un naturel, $n \geqslant 2$, et ω une racine n-ième de l'unité distincte de 1. Alors :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = 1 + \omega + \omega^2 + \ldots + \omega^{n-1} = 0$$

23▶

Cas particulier : calcul des racines carrées de z à partir des formes algébriques :

On cherche ζ tel que $\zeta^2 = z = a + ib$ en posant $\zeta = x + iy$, avec a, b, x et y réels. Il vient :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x^2 + y^2 = |\zeta|^2 = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \\ 2xy = b \end{cases}$$

Ce système donne facilement x^2 et y^2, d'où 4 possibilités au plus pour (x, y) : on sélectionne les deux bonnes en utilisant que xy est du signe de b.

Pratique 13 :

1. Quelles sont les racines carrées de $3 - 4\mathrm{i}$? Le vérifier par le calcul des carrés.

2. Calculer les racines carrées de $1 + \mathrm{i}$, et en déduire les cosinus et sinus de $\pi/8$.

IV Équations polynomiales de degré 2 à coefficients complexes

a est un complexe non nul, b et c des complexes, et $P = az^2 + bz + c$ le trinôme étudié.

• **Discrimant** de P : $\Delta = b^2 - 4ac$

• **Forme canonique** de P : $\forall z \in \mathbb{C}$, $az^2 + bz + c = a\left((z + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)$

• **Résolution de** (E) **:** $az^2 + bz + c = 0$:

Elle est donnée par la forme canonique, en notant δ une racine carrée de Δ.

∗ si $\Delta \neq 0$, (E) admet deux solutions complexes distinctes : $\dfrac{-b + \delta}{2a}$ et $\dfrac{-b - \delta}{2a}$

∗ si $\Delta = 0$, (E) admet une seule racine, dite double : $-\dfrac{b}{2a}$

• **Relations coefficients-racines** : en notant z_1 et z_2 les deux racines de (E), éventuellement confondues :

$$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2) \quad \text{et} \quad \begin{cases} z_1 + z_2 = -b/a \\ z_1 z_2 = c/a \end{cases}$$

Ceci permet de trouver facilement la deuxième racine quand on en connaît déjà une...

24▶

Pratique 14 :

1. Résoudre l'équation $z^2 - \sqrt{3}z + \mathrm{i} = 0$ d'inconnue z dans $\mathbb{C}$.

2. Résoudre le système $\begin{cases} z_1 + z_2 = 1 \\ z_1^2 + z_2^2 = -1 - \mathrm{i} \end{cases}$ d'inconnues z_1 et z_2 dans $\mathbb{C}$.

V Encore un peu de géométrie

V.1 Transformations géométriques du plan complexe

25▶

Pour résumer, les transformations étant définies de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$:

Translation de vecteur $\vec{u_a}$: $z \mapsto z + a$

Rotation de centre ω et d'angle θ réel : $z \mapsto \omega + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z - \omega)$

Homothétie de centre ω et de rapport λ réel : $z \mapsto \omega + \lambda(z - \omega)$

Symétrie d'axe réel : $z \mapsto \overline{z}$

Symétrie d'axe imaginaire : $z \mapsto -\overline{z}$

Symétrie origine : $z \mapsto -z$

Similitude directe : $z \mapsto az + b$ (pour a non nul et b complexes)

Similitude indirecte : $z \mapsto a\overline{z} + b$ (idem)

Proposition

> *Une similitude directe $z \mapsto az + b$ est*
>
> *a) soit une translation si $a = 1$,*
>
> *b) soit admet un unique point fixe d'affixe $\omega = \dfrac{b}{1-a}$, et c'est alors la composée commutative de la rotation de centre ω et d'angle $\mathrm{Arg}(a)$ et de l'homothétie de centre ω et de rapport $|a|$.*

26▶

> **Pratique 15** :
>
> Identifier les transformations du plan complexe associées à :
>
> a) $z \mapsto \mathrm{i}z$ b) $z \mapsto z + 2\mathrm{i}$ c) $z \mapsto 2z + 1$ d) $z \mapsto (1+\mathrm{i})z + 1$

V.2 Alignement et orthogonalité

Théorème

> *Soit trois points distincts A, B et C du plan complexe, d'affixes respectives a, b et c.*
>
> *Ces trois points sont alignés si, et seulement si, $\dfrac{c-a}{b-a}$ est réel.*

27▶

Théorème

Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ d'affixes respectives u et v.

Ces deux vecteurs sont orthogonaux si, et seulement si, $u\bar{v}$ est imaginaire pur.

En particulier, soit $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$ trois points distincts du plan complexe.

Alors $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux ssi $\dfrac{c-a}{b-a}$ est imaginaire pur.

28▶

Pratique 16 :

1) Trouver l'ensemble des points $M(z)$ du plan complexe tels que $M(z)$, $M(z^2)$ et $M(z^3)$ forment un triangle rectangle en $M(z)$.

2) Soit $A(a)$ et $B(b)$ deux points distincts du plan complexe.

Quel est l'ensemble des points $M(z)$ tels que $\dfrac{z-b}{z-a}$ soit réel ? imaginaire pur ?

SAVOIR...

(1) *... passer de l'écriture trigonométrique à l'écriture algébrique d'un complexe*

(2) *... tracer les graphes de* cos, sin, tan

(3) *... les formules...du formulaire !*

(4) *... appliquer la technique de l'angle moitié, calculer* $\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$ *et* $\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$

(5) *... calculer les racines n-ièmes d'un complexe, en particulier les racines carrées, et les décrire à l'aide des racines n-ièmes de l'unité*

(6) *... résoudre une équation de degré deux à coefficients complexes*

(7) *... donner l'amplitude et la phase d'un signal (transformer* $a\cos(t)+b\sin(t)$ *en* $A\cos(t-\varphi)$*)*

(8) *... reconnaître et décrire les transformations* $z \mapsto az+b$ *et* $z \mapsto a\bar{z}+b$ *du plan complexe*

THÉORÈMES et PROPOSITIONS	**... outils pour ...**
Théorèmes pour l'exponentielle complexe	*Calculs, résolution de* $\exp(z) = a$
Formule de Moivre et d'Euler	*Trigonométrie, (dé)-linéarisation*
Racines n-ièmes	*Résolution d'équations polynomiales*
Théorème de réduction d'une similitude	*Géométrie complexe et transformations*
Alignement, orthogonalité	*Recherche d'ensemble de points du plan complexe*