► ► 1 : LOGIQUE

1►

$*$ Le tiers exclu est à la base du **raisonnement par l'absurde** : pour montrer qu'une proposition est fausse, on la suppose vraie, et on en déduit une absurdité, c'est-à-dire la vérité d'une proposition dont on sait par ailleurs qu'elle est fausse.

$*$ Deux propositions sont donc équivalentes lorsqu'elles ont même table de vérité.

Pratique 1 :

1.

P	Q	$P \Longleftrightarrow Q$
V	V	V
F	V	F
V	F	F
F	F	V

Équivalence

P	Q	$\neg(P \Longleftrightarrow Q)$
V	V	F
F	V	V
V	F	V
F	F	F

Négation de l'équivalence (le "ou exclusif" XOR)

2.

P	Q	$\neg(P \wedge Q)$
V	V	F
F	V	V
V	F	V
F	F	V

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \vee \neg Q$
V	V	F	F	F
F	V	V	F	V
V	F	F	V	V
F	F	V	V	V

Les deux tables ont même dernière colonne, donc les deux propositions relatives sont logiquement équivalentes. On procède de même pour la deuxième loi de De Morgan.

3. Successivement : F, V, F, V.

4. $x^2 \geqslant 2$ équivaut à "$x \geqslant \sqrt{2}$ ou $x \leqslant -\sqrt{2}$". D'après les lois de De Morgan, la négation est : "$x \in]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$".

De même, la négation de "$x \geqslant 0$ et $x < 2$" est "$x < 0$ ou $x \geqslant 2$".

2►

Il s'agit ici de dresser une table de vérité à trois variables, donc $2^3 = 8$ lignes hors présentation. Par exemple, pour démontrer la distributivité de $\wedge$ par rapport à $\vee$, on vérifie que les deux propositions ont bien même table de vérité, ce qui établit l'équivalence entre elles.

P	Q	R	$Q \vee R$	$P \wedge (Q \vee R)$	$P \wedge Q$	$P \wedge R$	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	$P \wedge (Q \vee R)$
V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	F	V	V
V	F	V	V	V	F	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F	F	F
F	V	V	V	V	F	F	F	F
F	V	F	V	V	F	F	F	F
F	F	V	V	V	F	F	F	F
F	F	F	F	V	F	F	F	F

3▶

$*$ Supposons $P \Longrightarrow Q$.

Si P est vraie, alors Q est vraie : en ce sens, la vérité de P est suffisante pour avoir celle de Q. Mais pas nécessaire : si P est fausse et Q vraie, l'implication prend la valeur vraie.

Si Q fausse, alors P ne peut être vraie : en ce sens, il est nécessaire que Q soit vraie pour avoir P vraie. Mais Q vraie n'est pas suffisant pour avoir P vraie, pour la même raison qu'à la ligne au dessus.

$*$ Pour montrer $P \Longrightarrow Q$ (vraie), on se contente donc de montrer que : si P est vraie alors Q l'est aussi.

Inversement, si P et $P \Longrightarrow Q$ sont vraies, alors Q est vraie : c'est ce qu'on appelle le **modus ponens**. En pratique, pour montrer Q vraie, on cherche P vraie telle que $P \Longrightarrow Q$ soit vrai...

$*$ Un théorème est en général de la forme : pour tout x d'un ensemble, $P(x) \Longrightarrow Q(x)$. Pour l'appliquer à l'élément x_0 qui nous intéresse, on vérifie $P(x_0)$ (vraie), et on en déduit $Q(x_0)$ (vraie).

$*$ "Donc" ne s'abrège pas par $\Longrightarrow$: "9 est multiple de 4 donc multiple de 2" est un raisonnement faux, alors que $P \Longrightarrow Q$ est vrai avec P : "9 est multiple de 4" et Q : "Un multiple de 4 est multiple de 2".

Pratique 2 :

1. $P \Longrightarrow Q$ est logiquement équivalente à $\neg P \vee Q$, de négation $P \wedge \neg Q$ par les lois de De Morgan.

2. a) $(x \geqslant 1) \Longrightarrow (x \geqslant 0)$, $x \geqslant 0$ est nécessaire pour avoir $x \geqslant 1$, et $x \geqslant 1$ est suffisant pour avoir $x \geqslant 0$.

b) Éleve implique humain, être élève est une condition suffisante pour être un humain, condition nécessaire pour être élève.

c) x rationnel implique x^2 rationnel, car si $x = p/q$ est rapport de deux entiers, $x^2 = p^2/q^2$ l'est aussi. Une condition nécessaire pour qu'un réel soit rationnel est que son carré le soit.

Notez que ce n'est pas suffisant comme le montre l'exemple de $\sqrt{2}$: si on pouvait écrire $\sqrt{2} = p/q$ pour deux entiers p et q premiers entre eux, on obtiendrait $p^2 = 2q^2$, le facteur premier 2 serait donc présent un nombre pair de fois dans le carré p^2, et un nombre impair de fois dans $2q^2$, ce qui est impossible.

d) La dérivabilité d'une fonction implique sa continuité, la réciproque étant fausse (penser à la fonction valeur absolue sur $\mathbb{R}$). Pour qu'une fonction soit dérivable, il faut qu'elle soit continue (la continuité est une condition nécessaire à la dérivabilité). Toute fonction dérivable sur un ensemble y est continue (la dérivabilité est une condition suffisante pour obtenir la continuité). Nous y reviendrons.

e) $x = 1$ implique $x^2 = 1$, donc par exemple $x^2 = 1$ est une condition nécessaire pour obtenir $x = 1$, la réciproque étant fausse (considérer le réel -1).

Pour un réel, être nul ou de carré nul est équivalent. Chacune des deux assertions est nécessaire et suffisante pour l'autre.

4▶

$*$ *Preuve* : par exemple à l'aide d'une table de vérité. $\square$

$*$ C'est ainsi que l'on démontre une équivalence : par **double implication**, le sens direct ($\Longrightarrow$) et le sens réciproque ($\Longleftarrow$).

$*$ Lorsque $P \Longleftrightarrow Q$, on dit que Q est une condition nécessaire et suffisante pour P (et inversement). On dit souvent : "une CNS".

Pratique 3 :

1. CNS sur un réel r pour qu'il admette deux racines carrées distinctes : $r > 0$
CNS sur un complexe z pour qu'il admette deux racines carrées distinctes : $z \neq 0$

2. CNS sur un trinôme $ax^2 + bx + c$ à coefficients réels (avec $a \neq 0$) pour qu'il admette des racines réelles : $\Delta = b^2 - 4ac$ positif ou nul.
Si l'on est pointilleux et que le "s" de "racines" désigne deux racines distinctes : $\Delta > 0$

3. CNS pour que f dérivable sur I intervalle de $\mathbb{R}$ soit monotone : $f' \geqslant 0$ sur I ou $f' \leqslant 0$ sur I.

5▶

$*$ *Preuve* : Pour deux propositions P et Q, l'assertion $P \Longrightarrow Q$ est logiquement équivalente à $\neg P \vee Q$, ou encore à $\neg\neg Q \vee \neg P$, elle-même équivalente à $\neg Q \Longrightarrow \neg P$, d'où le résultat. $\square$

$*$ Montrer **par contraposée** que $P \Longrightarrow Q$, c'est montrer que $\neg Q \Longrightarrow \neg P$.

Pratique 4 :

1. Contraposée de la proposition : "si p est un entier impair, alors son carré est impair", ce qui se montre plus facilement car le produit de deux impairs est impair ($(2p+1)(2q+1) = 2(2pq+p+q)+1$). Ainsi l'implication de départ est vraie.

Proposition réciproque : "si un entier naturel est pair, alors son carré est pair", ce qui est clair puisque ce carré est alors divisible par 4 donc par 2. Mais ceci n'aide en rien pour montrer l'implication de départ. En revanche, l'implication de départ est également une équivalence.

2. Deux propositions sont équivalentes si leurs valeurs de vérité sont les mêmes, ce qui implique que leurs négations ont aussi mêmes valeurs de vérité ; la réciproque se démontre de la même manière puisque toute proposition P est équivalente à $\neg\neg P$. Autrement dit : $(P \Longleftrightarrow Q) \Longleftrightarrow (\neg P \Longleftrightarrow \neg Q)$

3. Contraposée : "si tu as du dessert, alors tu manges ta soupe" (en gros, si tu as eu du dessert c'est que tu avais mangé ta soupe...).
Négation : "tu ne manges pas ta soupe et tu as du dessert". On comprend bien la différence...

6▶

Comme vu au chapitre 0 :
- proposition $\forall x,\ \exists y...$: soit x un réel, posons $y = (1-2x)/3$, on a bien : $2x+3y = 1$. On voit que y dépend de x.
- proposition $\exists y,\ \forall x...$: supposons par l'absurde l'existence d'un tel y, avec $x = 0$ il vient nécessairement $y = 1/3$, et avec $x = 1$, $y = -1/3$, ce qui est impossible.

7▶

$*$ Il est faux qu'il existe un oiseau sans plume, signifie qu'il est vrai que tous les oiseaux ont des plumes.

$*$ Par exemple, la convergence d'une suite complexe (u_n) vers le complexe u s'écrit :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \Longrightarrow |u_n - u| < \varepsilon$$

Dire qu'une suite (u_n) ne converge pas vers u, c'est écrire :

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \text{ et } |u_n - u| \geqslant \varepsilon$$

$*$ Autre exemple, la continuité en un point x_0 de la fonction f numérique définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ s'écrit :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ |x - x_0| < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

La non-continuité de f en x_0 s'écrit donc :

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall \eta > 0,\ \exists x \in I,\ |x - x_0| < \eta \text{ et } |f(x) - f(x_0)| \geqslant \varepsilon$$

On voit, une fois ε ainsi donné, qu'on peut choisir pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, (avec $\eta = 1/n$), un y_n tel que $|y_n - x_0| < 1/n$ et $|f(y_n) - f(x_0)| \geqslant \varepsilon$. Autrement dit, il existe une suite de points (y_n) de I qui converge vers x_0 et telle que la suite $(f(y_n))$ ne converge pas vers $f(x_0)$.

Pratique 5 :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x < 0$ et $x > 0$ (par les lois de De Morgan)

2. $\exists p \in \mathbb{N}$, $\exists q \in \mathbb{N}$, $(p+q > 4)$ et $(pq < 6)$ est vraie avec $p = 1$ et $q = 4$, donc la proposition de départ est fausse.

3. f constante s'écrit : $\exists c \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = c$. Négation : $\forall c \in \mathbb{R}$, $\exists x \in \mathbb{R}$, $f(x) \neq c$

f s'annule s'écrit : $\exists x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0$. Négation : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \neq 0$

f bornée s'écrit : $\exists M \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leqslant M$. Négation : $\forall M \in \mathbb{R}$, $\exists x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| > M$

f périodique s'écrit : $\exists T > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x+T) = f(x)$. Négation : $\forall T > 0$, $\exists x \in \mathbb{R}$, $f(x+T) \neq f(x)$

4. Négation : $\exists \varepsilon > 0$, $\forall n_0 \in \mathbb{N}$, $\exists n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant n_0$ et $|u_n| \geqslant \varepsilon$ (revoir la négation d'une implication !)
La négation de : "la suite (a_n) converge vers 0" est donc : "il existe une constante $\varepsilon > 0$ telle qu'une infinité de termes u_n de la suite vérifient : $|u_n| \geqslant \varepsilon$"

8▶

Exemple à connaître : $\boxed{\sqrt{2} \text{ n'est pas un rationnel.}}$ On raisonne par l'absurde.
Supposons $\sqrt{2} = p/q$ avec p et q deux naturels. En élevant au carré : $p^2 = 2q^2$. On voit, en décomposant p et q en facteurs premiers, que 2 figure un nombre impair de fois à droite de l'égalité, et un nombre pair de fois à gauche, ce qui est impossible par unicité de la décomposition première de tout $n \geqslant 2$.

9▶

Montrons : $\forall n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)/2 \in \mathbb{N}$ par disjonction de cas :
- si n est pair, $n/2$ est un naturel, donc son produit par un naturel est un naturel.
- si n est impair, alors $n+1$ est pair, et le raisonnement précédent s'adapte.

10▶

Voir Pratique 4.

11▶

$*$ Un cas particulier : montrer que P ou Q est vrai. Cela revient à montrer par exemple : $\neg P \Longrightarrow Q$. On suppose donc P fausse et on montre Q vraie. Ou on suppose Q fausse et on montre P vraie, suivant la situation...

$*$ Exemple : montrer que pour tout réel x, $\text{Max}(x^2, (x-2)^2) \geqslant 1$.
Supposons $x^2 < 1$, c'est-à-dire $-1 < x < 1$. Alors $-3 < x - 2 < -1$, puis $1 < (x-2)^2 < 9$ par décroissance de $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}_-$.
Ainsi, pour tout réel x, on a $x^2 \geqslant 1$ ou $(x-2)^2 \geqslant 1$, ce qui est le résultat demandé.

12▶

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et x_1, x_2, ..., x_n des réels positifs. Montrons que : $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 0 \Longleftrightarrow (\forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i = 0)$.

Supposons les x_i tous nuls, alors leur somme est nulle : ceci montre le "sens réciproque".

Montrons le sens direct par contraposée. Supposons un des x_i non nul, disons $x_{i_0} > 0$,
alors $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \geqslant x_{i_0} > 0$ donc $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \neq 0$.

On a donc montré l'équivalence par double implication.

13▶

$*$ *Preuve du théorème* : Notons E l'ensemble des naturels tels que $P(n)$ soit fausse, et faisons un raisonnement par l'absurde en supposant E non vide et les hypothèses du théorème vérifiées.

Ainsi E est une partie non vide de $\mathbb{N}$, elle admet un plus petit élément n_0, qui ne peut pas être nul à cause de la première hypothèse (initialisation). Donc $n_0 - 1$ est un naturel et $P(n_0 - 1)$ est vraie par définition de n_0. Mais $P(n_0)$ fausse contredit alors la deuxième hypothèse (hérédité). $\square$

$*$ La preuve s'adapte sans difficulté aux variantes.

Pratique 6 :

1. a) Pour tout naturel n, on note $P(n)$: $\sum\limits_{k=0}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$

b) Pour $n = 0$: $P(0)$ est vérifiée puisqu'on obtient $0 = 0$.

c) Soit n un naturel, supposons $P(n)$ vraie et montrons $P(n+1)$.
$\sum\limits_{k=0}^{n+1} k = \sum\limits_{k=0}^{n} k + (n+1) = \dfrac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$, donc $P(n+1)$ est bien vérifiée.

d) On conclut par le principe de récurrence que pour tout naturel n, la propriété $P(n)$ est vraie.

2. a) Pour tout naturel n, on note $P(n)$: $F_n \leqslant 2^n$

b) Pour $n = 0$ et $n = 1$: $P(0)$ et $P(1)$ sont bien vérifiées puisqu'on obtient $0 \leqslant 1$ et $1 \leqslant 2$.
Notez qu'il faut bien deux vérifications initiales, on ne pourrait déduire $P(1)$ de $P(0)$...

c) Soit n un naturel, supposons $P(n)$ et $P(n+1)$ vraies et montrons $P(n+2)$.
$F_{n+2} = F_n + F_{n+1} \leqslant 2^n + 2^{n+1} = 2^n(1+2) \leqslant 2^n.4 = 2^{n+2}$, donc $P(n+2)$ est bien vérifiée.

d) On conclut par le principe de récurrence que pour tout naturel n, la propriété $P(n)$ est vraie.

14▶

$*$ Par exemple : montrer que toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ s'écrit de manière unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Analyse : soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et supposons qu'elle s'écrive $f = p + i$ avec p paire et i impaire. On exploite leurs propriétés pour les calculer en fonction de la donnée f :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = p(x) + i(x) \text{ et } f(-x) = p(x) - i(x)$$

d'où l'on obtient : $\forall x \in \mathbb{R}$, $p(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ et $i(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$, ce qui assure l'unicité de p et de i si une telle décomposition de f est possible.
Ainsi, l'Analyse donne la piste pour la question de l'existence, et nous fournit l'unicité demandée.

Synthèse : soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Définissons les fonctions p et i en tout réel x par : $p(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ et $i(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$.
p est bien paire, i est impaire, et $f = p + i$, ce qui prouve l'existence de la décomposition annoncée.

Conclusion : on a démontré la propriété annoncée.

$*$ Lorsque le problème n'est qu'une question d'existence, et si on ne "voit" pas de solution, on rédige l'analyse au brouillon, et on se contente de montrer enfin une solution au problème.
La présentation de l'analyse n'est nécessaire que lorsque la question de l'existence est accompagnée de celle de l'unicité.

Pratique 7 :

1. Supposons qu'un réel x vérifie : $x = \sqrt{2-x}$. Nécessairement $x \geqslant 0$ (comme racine carrée définie par le symbole $\sqrt{\ }$) et $2 - x \geqslant 0$ (à cause du domaine de cette même fonction). En élevant au carré : $x^2 + x - 2 = 0$, donc $x = 1$ ou $x = -2$, cette dernière possibilité étant donc à exclure. (On termine ici l'analyse).
Réciproquement, 1 est bien solution (c'est la synthèse), et c'est la seule (conséquence de l'analyse).

2. Analyse : **soit** $f : [0,1] \to \mathbb{R}$**, supposons qu'il existe** $g : x \mapsto ax+b$ et h telles que $h(0) = h(1) = 0$ et $f = g + h$.
Nécessairement, on obtient : $f(0) = b$ et $f(1) = a+b$ donc $a = f(1) - f(0)$. Ainsi a et b sont déterminés de manière unique (f est "la" donnée), donc g est unique, ainsi par conséquent que $h = f - g$.
Il y a donc unicité de la solution si elle existe.
Synthèse : **soit** $f : [0,1] \to \mathbb{R}$**, posons** $g : x \mapsto (f(1) - f(0))x + f(0)$ et $h : x \mapsto f(x) - g(x)$.
Alors g est bien affine, et on a bien $f = g + h$ avec $h(0) = f(0) - g(0) = 0$ et $h(1) = f(1) - g(1) = 0$.
D'où l'existence de la décomposition de f **demandée.**
Conclusion : il y a bien existence (synthèse) et unicité (par l'analyse) de la décomposition $f = g + h$ du type demandé pour toute fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$.