Les primitives et les dérivées.

Louis Herzog

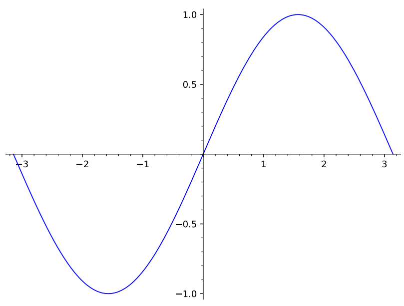
21 avril 2024

Table des matières

0.1 La fonction $x \mapsto \sin(x)$.

Définissons nos fonctions dans Sage

```
f(x) = sin(x)
g(x) = diff(f(x),x)
F(x) = integrate(f(x),x)
```



La représentation graphique de $x \mapsto \sin(x)$ sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

La fonction est impaire et périodique de période 2π.

0.1.1 Dérivée de la fonction $x \mapsto \sin(x)$.

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - sin(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x)\cos(h) + \cos(x)\sin(h) - \sin(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(\frac{\sin(x)(\cos(h)-1)}{h} + \frac{\cos(x)\sin(h)}{h} \right) \\
&= \sin(x) \times \lim_{h\to 0} \frac{\cos(h)-1}{h} + \cos(x) \times \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} \\
&= \cos x
\end{aligned}$$

0.1.2 Calcul d'une primitive de la fonction $x \mapsto \sin(x)$.

Dans la section précédente, on a calculé la dérivée de la fonction $x \mapsto \cos(x)$ qui vaut $x \mapsto -\sin(x)$, par conséquent une primitive de $x \mapsto \sin(x)$ est égale, à une constante près, à $-\cos(x) + C^{ste}$.

On vérifie ce résultat avec Sage. Une primitive de $\sin(x)$ est $-\cos(x) + C^{ste}$ définie à une constante près.

0.2 La fonction $x \mapsto \mathrm{Arc}\sin(x)$.

La restriction de la fonction $x \mapsto \sin(x)$ à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ est une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$. Il existe donc une fonction réciproque à la fonction $x \mapsto \sin(x)$ que l'on nomme $x \mapsto \mathrm{Arc}\sin(x)$. C'est également une bijection, elle est continue sur l'intervalle fermé $[-1, 1]$ et est dérivable sur l'intervalle ouvert $]-1, 1[$.

0.2.1 Calcul de la dérivée de la fonction $x \mapsto \mathrm{Arc}\sin(x)$.

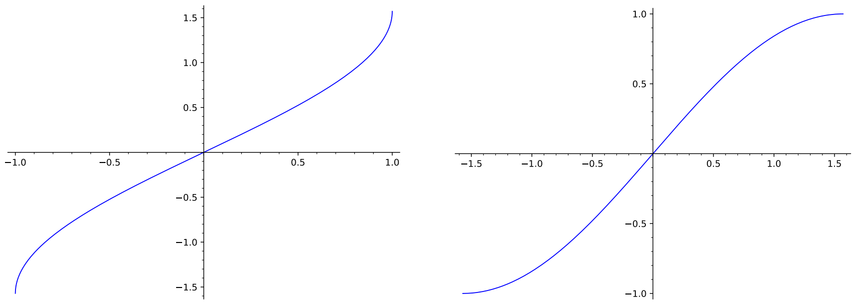
Définissons nos fonctions dans Sage

```
f(x) = arcsin(x)
g(x) = diff(f(x),x)
F(x) = integrate(f(x),x)
```

Pour ce calcul, il faut utiliser le calcul de la dérivée d'une fonction composée. On a $\sin(\mathrm{Arc}\sin(x)) = x$, par conséquent la dérivée de cette expression s'exprime par $\cos(\mathrm{Arc}\sin(x)) \times \mathrm{Arc}\sin'(x) = 1$, d'où $\mathrm{Arc}\sin'(x) = \dfrac{1}{\cos(\mathrm{Arc}\sin(x))}$.

La difficulté est maintenant de déterminer $\cos(\text{Arcsin}(x))$, or on sait que pour tout $X \in \mathbb{R}$, on a $\sin^2(X) + \cos^2(X) = 1$, d'où $\cos(X) = \sqrt{1 - \sin^2(X)}$.
En remplaçant X par $\text{Arcsin}(x)$, on a $\cos(\text{Arcsin}(x)) = \sqrt{1 - \sin^2(\text{Arcsin}(x))} = \sqrt{1 - x^2}$.
Finalement, $\text{Arcsin}'(x) = \dfrac{1}{\cos(\text{Arcsin}(x))} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\text{Arcsin}(x))}} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

On vérifie ce résultat avec Sage. La dérivée de $\text{Arcsin}\,(x) = \dfrac{1}{\sqrt{-x^2 + 1}}$.



Les représentations graphiques de $x \mapsto \text{Arcsin}\,(x)$ et de $x \mapsto \sin(x)$.

On peut maintenant entreprendre le calcul de la primitive de la fonction $x \mapsto \text{Arcsin}(x)$.

0.2.2 Calcul de la primitive de la fonction $x \mapsto \text{Arcsin}(x)$.

Je pose que $u(x)$ est égal à la fonction $\text{Arcsin}(x)$ et $v'(x)$ est égal dx d'où $u'(x)$ est égal à la fonction $\text{Arcsin}(x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ et $v(x)$ est égal x. Alors on a $\displaystyle\int \text{Arcsin}(x)\,dx = x \times \text{Arcsin}(x) - \int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \times x\,dx$.

Calcul de $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx$. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{d(1 - x^2)}{\sqrt{1 - x^2}} = \sqrt{1 - x^2}$.
Finalement, une primitive de la fonction $x \mapsto \text{Arcsin}(x)$ est une fonction $x \mapsto x\,\text{Arcsin}(x) - \sqrt{1 - x^2} + C^{ste}$.

On vérifie ce résultat avec Sage. Une primitive de la fonction $\text{Arcsin}\,(x) = x\,\text{Arcsin}\,(x) + \sqrt{-x^2 + 1} + C^{ste}$.

0.3 La fonction $x \mapsto \text{Arctan}(x)$.

La restriction de la fonction $x \mapsto \tan(x)$ à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ est une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$. Il existe donc une fonction réciproque à la fonction $x \mapsto \tan(x)$ que l'on nomme $x \mapsto \text{Arctan}(x)$. C'est également une bijection, elle est continue sur l'intervalle fermé $[-1, 1]$ et est dérivable sur l'intervalle ouvert $]-1, 1[$.

0.3.1 Dérivée de la fonction $x \mapsto \text{sh}(x)$.

$$\begin{aligned}
\text{sh}(x)' &= \left(\frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2}\right)' \\
&= \frac{\exp(x)' - \exp(-x)'}{2} \\
&= \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2} \\
&= \text{ch}(x)
\end{aligned}$$

0.3.2 Calcul d'une primitive de la fonction $x \mapsto \text{sh}(x)$.

$\displaystyle\int \text{sh}(x)dx = \int \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2}dx = \frac{1}{2}\times\left(\int \exp(x)dx - \int \exp(-x)dx\right) = \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2} =$ $\text{ch}(x) + C^{ste}$

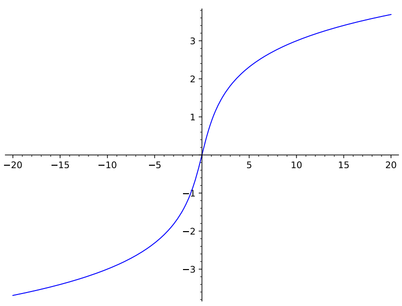
On vérifie ce résultat avec Sage. Une primitive de $\text{Arcsin}\,(x) = x\,\text{Arcsin}\,(x) + \sqrt{-x^2+1} + C^{ste}$.

0.4 La fonction $x \mapsto \text{Argsh}(x)$.

Définissons nos fonctions dans Sage

```
f(x) = arcsinh(x)
g(x) = diff(f(x),x)
F(x) = integrate(f(x),x)
```

La fonction $x \mapsto \text{sh}(x)$ est inversible sur son domaine de définition $\mathbb{R}$, car elle y est bijective, son inverse est notée « Argsh » et définit la fonction « *argument sinus hyperbolique* » telle que $x \mapsto \text{Argsh}(x)$.



La représentation graphique de $x \mapsto \text{Argsh}(x)$.

On observe que la fonction est croissante, impaire $\text{Argsh}(-x) = -\text{Argsh}(x)$ et on observe que la fonction est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

0.4.1 Dérivée de la fonction $x \mapsto \operatorname{Arg sh}(x)$.

On a la fonction composée $\mathrm{Id} = \mathrm{sh} \circ \operatorname{Arg sh}$ telle que $x \mapsto \mathrm{sh}\,(\operatorname{Arg sh}(x)) = x$ dont la dérivée s'écrit alors $1 = \operatorname{Arg sh}' \times \mathrm{sh}' \circ \operatorname{Arg sh}$.

$$
\begin{aligned}
x &= \mathrm{sh}\,(\operatorname{Arg sh}(x))\,(x) \quad \text{en dérivant, on a} \\
1 &= \operatorname{Arg sh}'(x) \times \mathrm{sh}' \circ \operatorname{Arg sh}(x) \quad \text{d'où} \\
\operatorname{Arg sh}'(x) &= \frac{1}{\mathrm{sh}' \circ \operatorname{Arg sh}(x)} = \frac{1}{\mathrm{ch}\,(\operatorname{Arg sh}(x))} \quad \text{or} \\
\mathrm{ch}\,(\operatorname{Arg sh}(x)) &= \sqrt{1 + \mathrm{sh}^2\,(\operatorname{Arg sh}(x))} = \sqrt{1+x^2} \quad \text{donc} \\
\operatorname{Arg sh}'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}
\end{aligned}
$$

On vérifie ce résultat avec Sage. La dérivée de $\operatorname{arsinh}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

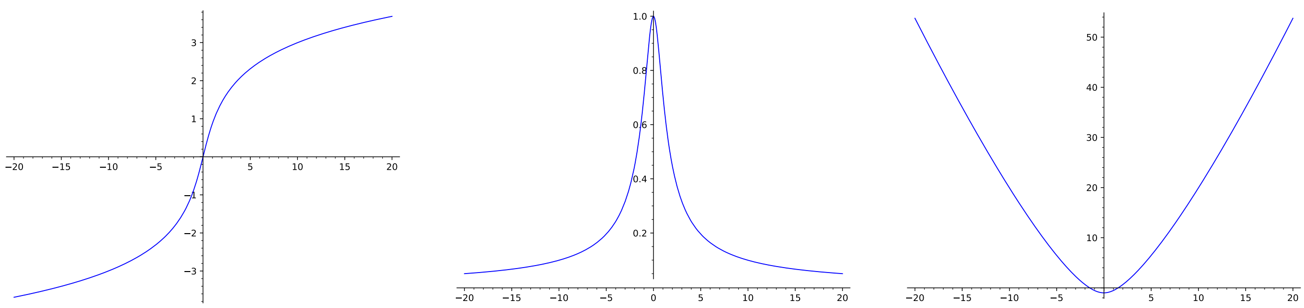
0.4.2 Calcul d'une primitive de la fonction $x \mapsto \operatorname{Arg sh}(x)$.

Pour calculer $\displaystyle\int \operatorname{Arg sh}(x)\,dx$, on procède par une intégration par parties en posant $u(x) = \operatorname{Arg sh}(x)$ et $v'(x) = dx$, d'où $u'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ et $v(x) = x$.

On a donc

$$
\begin{aligned}
&\int \operatorname{Arg sh}(x)\,dx = x \operatorname{Arg sh}(x) - \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \quad \text{or} \\
&\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \int \left(\sqrt{1+x^2}\right)'\,dx = \sqrt{1+x^2} \quad \text{d'où} \\
&\int \operatorname{Arg sh}(x)\,dx = x \operatorname{Arg sh}(x) - \sqrt{1+x^2} + C^{ste} \quad \text{que l'on retrouve avec Sage.}
\end{aligned}
$$

On vérifie ce résultat avec Sage. Une primitive de $\operatorname{arsinh}(x) = x \operatorname{arsinh}(x) - \sqrt{x^2+1} + C^{ste}$.



Les représentations graphiques respectivement de $x \mapsto \operatorname{Arg sh}(x)$, de sa dérivée et de sa primitive.