►► 6 : FONCTIONS NUMÉRIQUES USUELLES

1►

S'il existe $y \in \mathrm{Im}(f)$ admettant plusieurs antécédents par f (la droite horizontale des points d'ordonnée y coupe plusieurs fois le graphe de f), alors f n'est pas injective.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est surjective lorsque $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$, ou encore toute droite horizontale coupe le graphe de f.

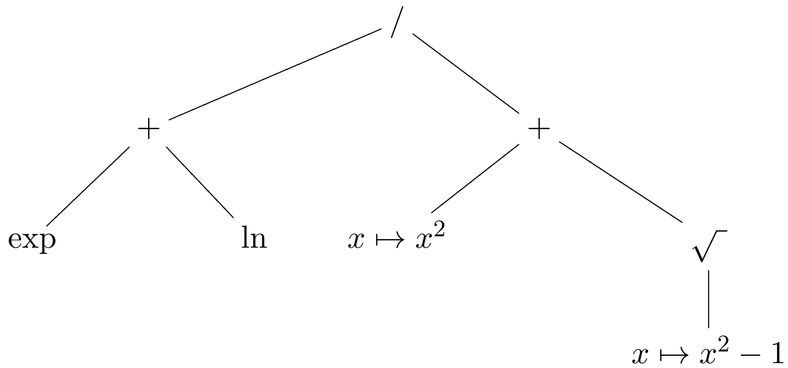
2►

De nombreuses autres possibilités, comme $|f|$ définie sur $\mathcal{D}_f$, comme f^{-1} sur $f(\mathcal{D}_f)$ si f est injective, λf pour un réel λ donné ou encore $x \mapsto f(-x)$ définies sur $\mathcal{D}_f$.

3►

On peut imaginer disposer d'une calculette possédant les opérations précédentes, ou visualiser une fonction donnée par un arbre.

Par exemple pour $f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x + \ln x}{x^2 + \sqrt{x^2 - 1}}$

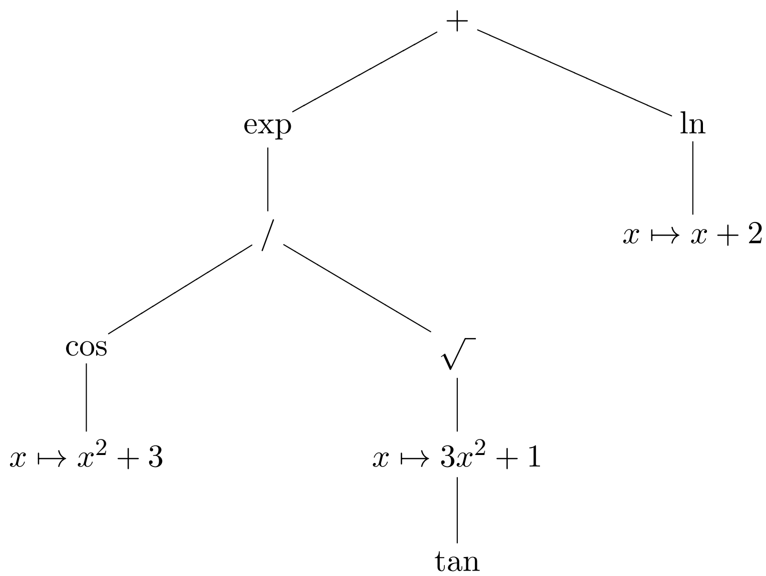


En "remontant" l'arbre on détermine le domaine le définition : $\mathbb{R}$ pour l'exponentielle, $\mathbb{R}_+^*$ pour ln donc pour leur somme, donc pour le numérateur, puis $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ pour le dénominateur et enfin son inverse. Finalement : $\mathcal{D}_f = [1, +\infty[$

Pratique 1 :

1. a) Par exemple $f_1 : x \mapsto 3|x|$, $f_2 : x \mapsto x^2$, $f_3 : (x, y) \mapsto x + y$, $f_4 = \ln$, $f_5 : x \mapsto x + \mathrm{e}^x$, $f_6 = \sin$, $f_7 : (x, y) \mapsto xy$, et alors la fonction f proposée s'écrit $f = f_7(f_6(f_5), f_4(f_3(f_2 + f_1)))$.

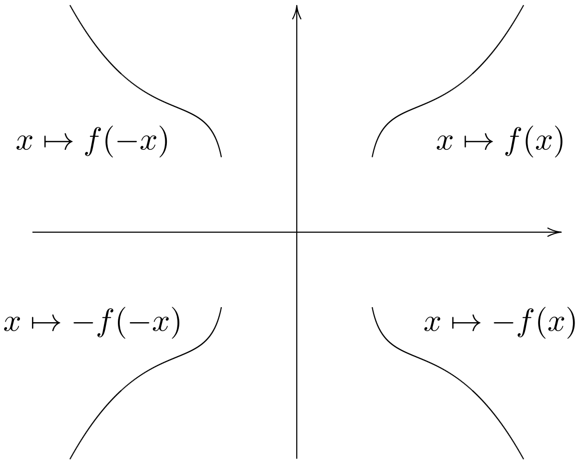
b) Utilisons un arbre pour la fonction g proposée :



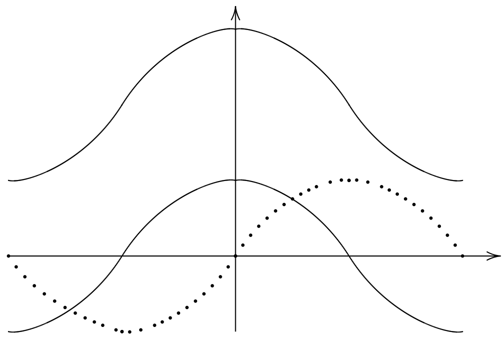
2. a) Pour f, $x \mapsto x^2 + 3|x|$ est défini sur $\mathbb{R}$, à valeurs strictement positives pour $x \neq 0$. Il n'y pas d'autres contraintes, donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$.

b) Pour g, tan n'est pas définie en $\pi/2$ modulo π, puis $x \mapsto 3\tan^2(x) + 1$ est à valeurs strictement positives donc le dénominateur est bien défini, ainsi que l'exonentielle ; enfin pour la partie du logarithme, il faut se restreindre à $]-2, +\infty[$. Finalement : $\mathcal{D}_g =]-2, +\infty[\setminus \{-\pi/2 + k\pi \mid k \in \mathbb{N}\}$

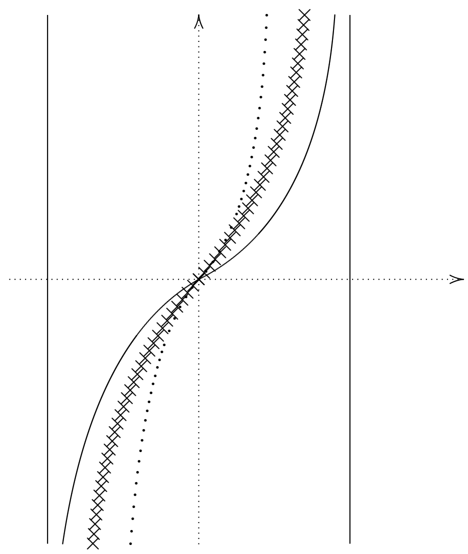
4▶



Les courbes sur $[-\pi, \pi]$ de cos, de $x \mapsto \cos(x) + 2$, et en pointillé de sin obtenue par translation depuis : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin(x) = \cos(x - \pi/2)$.



Les graphes de tan et de $2\tan$ (avec des croix) sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, enfin de $x \mapsto \tan(2x)$ sur $]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$ en pointillés :



5▶

$*$ Reprenez les graphes précédents : cos est paire, sin est impaire et son graphe présente aussi une symétrie par rapport à $x = \pi/2$ puisque : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin(\pi - x) = \sin x$. Les deux fonctions sont de plus 2π-périodiques.

$*$ $\boxed{\text{Pour étudier le graphe d'une fonction } f}$:

- on cherche d'abord la (plus petite) période $T > 0$: s'il en existe une, on restreint l'étude à un intervalle de longueur T **que l'on ne fixe pas tout de suite !!**
- si $T/2$ est antipériode ($f(x + T/2) = -f(x)$), l'étude se fait sur un intervalle de longueur $T/2$ (qu'on ne fixe pas encore !)
- s'il y a une symétrie, on centre l'intervalle d'étude à l'abscisse donnant cette symétrie et on étudie sur une moitié : à ce stade l'intervalle est choisi...
- s'il y a d'autres symétries, on poursuit de même...

Exemple pour sin : période 2π, π anti-période, puis sin est impaire ; on fait l'étude sur $[0, \pi/2]$. Une fois tracé le graphe sur cet intervalle, on complète par symétrie par rapport à l'origine (imparité, graphe sur $[-\pi/2, \pi/2]$), puis par translation horizontale de vecteur $(0, \pi)$ et symétrie (Ox) (antipériodicité, graphe sur $[-\pi/2, 3\pi/2]$), enfin on complète par translations de vecteur $(0, 2\pi)$.

6▶

$*$ *Preuve* : Si $T > 0$ est période de f, pour tout entier relatif n, nT est aussi une période de f, d'où l'infinité.
Si T et T' sont deux périodes, alors $T - T'$ l'est aussi :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f,\ f(x + T - T') = f((x + T) - T') = f(x + T) = f(x)$$

Les autres assertions sont très simples à vérifier. □

$*$ sin et cos ont pour période 2π, tan et cotan ont pour période π.

$*$ On parle en général d'une période, plus rarement de la période, qui est alors la plus petite période possible strictement positive.

Pratique 2 :

1. Déjà traité précédemment

2. Domaine de définition $\mathbb{R}$, période 2π, π est anti-période, la fonction est paire. On l'étudie sur $[0, \pi/2]$, on trace, puis on complétera par symétrie $(0y)$, puis par la composée de la translation de vecteur $(0, \pi)$ avec la symétrie par rapport à $(0x)$, enfin par translations de vecteurs $(0, 2\pi)$.

3. Domaine de définition $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, période π, fonction impaire. On l'étudie sur $[0, \pi/2[$, on trace, puis on complète par symétrie origine, puis par translations de vecteurs $(0, \pi)$.

7▶

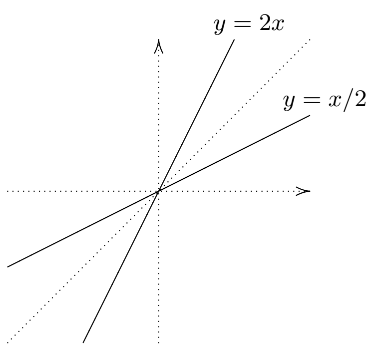
$*$ Ces théorèmes seront démontrés plus tard dans l'année. Nous verrons que la continuité de f permet d'affirmer que l'image d'un intervalle par f en est un également, et qu'en particulier l'image d'un segment est un segment. En cas de stricte monotonie, un intervalle et son image sont alors de même nature (un fermé se change en fermé, un ouvert en un ouvert, un semi-ouvert en un semi-ouvert).

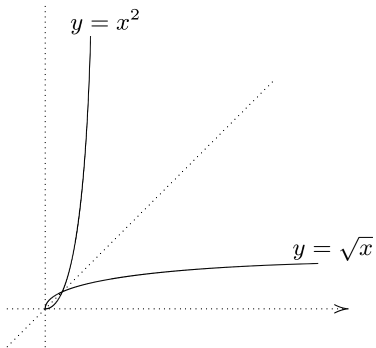
$*$ Penser à la stricte monotonie pour montrer une bijectivité via l'injectivité.

8▶

$*$ *Preuve* : Supposons $(x, f(x))$ un point du graphe de f. Comme f est bijective, en posant $y = f(x)$, ce point s'écrit $(f^{-1}(y), y)$, et son symétrique $(y, f^{-1}(y))$ par rapport à la première bissectrice est bien un point du graphe de f^{-1}. Comme $(f^{-1})^{-1} = f$, l'argument peut se récrire depuis un point du graphe de f^{-1}, d'où la conclusion. □

$*$ Exemples :





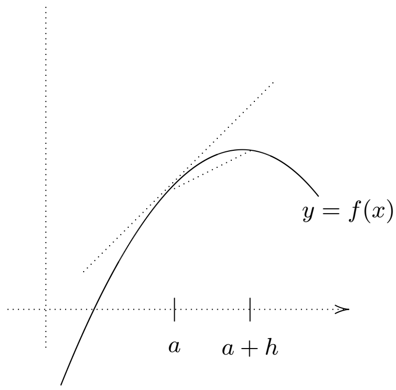
9▶

$*$ Le taux de variation (aussi taux d'accroissement) s'écrit souvent également $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$, et f est dérivable en a si $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ existe.

$*$ f est dérivable en a équivaut à dire que f admet un **développement limité en a à l'ordre** 1 : $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\varepsilon(h)$ avec $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$.

$*$

Le taux de variation entre les points d'abscisses a et $a+h$ correspond à la pente de la corde joignant les deux points du graphe de f d'abscisses a et $a+h$.
La tangente en a est la droite du plan passant par le point $(a, f(a))$ qui est la plus proche du graphe de f au voisinage de a, sa pente est $f'(a)$.



10▶

$*$ Il faut bien connaître ces expressions ! On retrouve d'ailleurs grâce à elles les conditions permettant de dériver une fonction obtenue par calculs.

$*$ On retrouve l'expression de la dérivée d'une réciproque (lorsqu'on sait qu'elle existe !) à partir de la formule pour la composition, en utilisant $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}$, puisqu'alors en tout x du domaine de f : $(f^{-1})'(f(x)).f'(x) = 1$, et il suffit de poser $y = f(x)$.

Pratique 3 :

Le domaine de définition est $\mathbb{R}$ privé de $1/2$. Le domaine de dérivabilité est le même (on a une somme de produit et de composées de fonctions dérivables sur ce domaine).
Enfin, la dérivée est la fonction qui à x distinct de 2 associe :

$$2x\cos(2x) - 2x^2\sin(2x) + \mathrm{e}^{\sin(5x)/(2x-1)}.\,\frac{5\cos(5x)(2x-1) - 2\sin(5x)}{(2x-1)^2}$$

11▶

Voici un théorème très pratique : il est souvent plus aisé de passer à la limite en a dans l'expression générale de f' connue sur $]a, b]$ que de trouver la limite du taux de variations de f en a, sans parler du cas où cette limite est infinie... De plus, on récupère ainsi la continuité de la fonction dérivée, et non pas seulement le fait qu'elle soit définie en a...
Par exemple, $x \mapsto x^3\sin(1/x)$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ et prolongeable par continuité par la valeur 0 en 0 du fait que sin est bornée. Ce prolongement, noté f, est donc continu sur $\mathbb{R}$ et continûment dérivable sur $\mathbb{R}^*$ par théorèmes d'opérations sur les fonctions de classe C^1. Que se passe-t-il en 0 ?
La limite du taux de variations en 0 de f est 0, toujours parce que sin est bornée, donc f est dérivable en 0, de dérivée nulle. Mais ceci ne donne pas la continuité de f' en 0...
Pour $x \neq 0$: $f'(x) = 3x^2\sin(1/x) - x\cos(1/x)$, et cette expression est de limite 0 en 0 parce que sin et cos sont bornées. Par le théorème de prolongement, sans utiliser la ligne précédente, on obtient f de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
Considérons maintenant le prolongement g de $x \mapsto x^2\sin(1/x)$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ et continu sur $\mathbb{R}$. Par l'étude du taux de variations en 0, on voit que g est dérivable en 0 de dérivée nulle.
En revanche, pour $x \neq 0$, $g'(x) = 2x\sin(1/x) - \cos(1/x)$, qui n'a pas de limite en 0. La fonction g donne un exemple de fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ mais qui n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

12▶

$*$ Ce théorème est aussi admis pour l'instant.

$*$ Par exemple, $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ à dérivée strictement positive, donc strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Pratique 4 :

Il faut montrer que $f : x \mapsto x + \sin(x)$ est continue, bijective et de réciproque continue de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})$ à identifier.
Par théorèmes d'opérations, f est dérivable (donc continue) sur $\mathbb{R}$ de dérivée $x \mapsto 1 + \cos x$ à valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}$ sauf aux points $\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ où elle est nulle, donc la fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Par le théorème de l'homéomorphisme, f est injective sur $\mathbb{R}$, et induit donc une bijection continue de réciproque continue de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R}) = \left] \lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x) \right[= \mathbb{R}$ (puisque sin est bornée).

13▶

∗ *Preuve* : Supposons par exemple que f admette en $c \in \overset{\circ}{I}$ un maximum : $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}$ est positif pour $x < c$ et négatif pour $x > c$, donc la limite en c du taux de variations de f ne peut être que nulle (elle est supposée exister puisque f est dérivable en c). Donc $f'(c) = 0$.

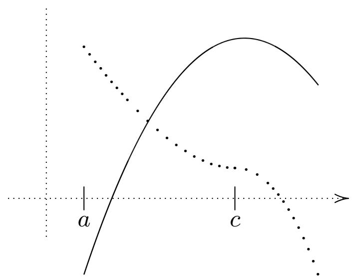
En revanche, $x \mapsto x^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée nulle en 0, où f n'y admet pas d'extremum local.

Enfin, $x \mapsto x$ admet sur $[0, 1]$ un minimum en 0, un maximum en 1, mais sa dérivée ne s'annule pas. □

∗ Un point c à l'intérieur du domaine de définition de f et tel que $f'(c) = 0$ est un **point critique** pour f. Un point critique qui n'est pas un extremum s'appelle un **point selle** ou **point col**.
Attention à bien traiter à part les points aux extrémités du domaine de définition...

∗

En c point critique, la courbe en trait plein admet un maximum local, mais c'est un point selle pour la courbe en pointillés.
En a, la courbe en trait plein admet un minimum local, et un maximum local pour la courbe en pointillés, sans que les pentes n'y soient nulles.



14▶

D'après le point précédent, dire que f'' s'annule en x_0 en changeant de signe ou que f' admet un extremum en x_0 a la même signification (lorsque f est de classe C^2 sur un voisinage de x_0).
D'un côté de x_0, les pentes croissent, et de l'autre décroissent, ce qui se traduit géométriquement par un changement de courbure (tournée vers le haut, respectivement vers le bas), ce qu'on appelle un changement de concavité. En un tel point, la tangente "traverse" le graphe.
Par exemple, le graphe de $x \mapsto x^3$ présente un changement de concavité en 0 ; cette concavité est tournée vers le bas sur $\mathbb{R}_-$ et vers le haut sur $\mathbb{R}_+$.
Nous reviendrons plus en détails sur la convavité (ou convexité) dans un chapitre ultérieur.

Pratique 5 :

Les points critiques sont tous des points selles.
La concavité change en 0 modulo π (comme le signe de $-\sin$).

15▶

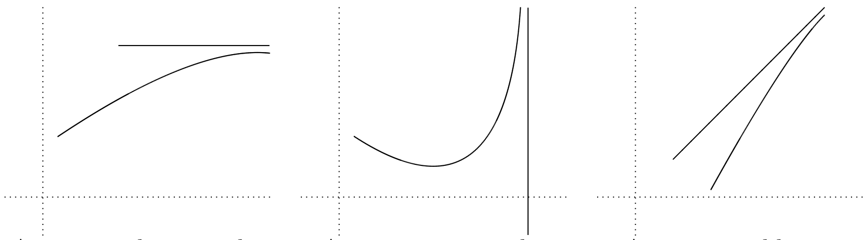
Par exemple, pour $f : x \mapsto \dfrac{x+1}{x^2+3}$, le domaine de définition est $\mathbb{R}$, il n'y a ni parité ni symétries ni période, et $f' : x \mapsto \dfrac{x^2 + 3 - 2x(x+1)}{(x^2+3)^2} = \dfrac{(1-x)(x+3)}{(x^2+3)^2}$.
Ainsi f est décroissante sur $]-\infty, -3]$ et sur $[1, +\infty[$, croissante sur $[-3, 1]$. Les limites en $-\infty$ et $+\infty$ sont nulles puisque : $f(x) = \dfrac{1 + 1/x}{x(1 + 3/x^2)}$.

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	0	$\searrow$	$-1/6$	$\nearrow$	$1/2$	$\searrow$	0

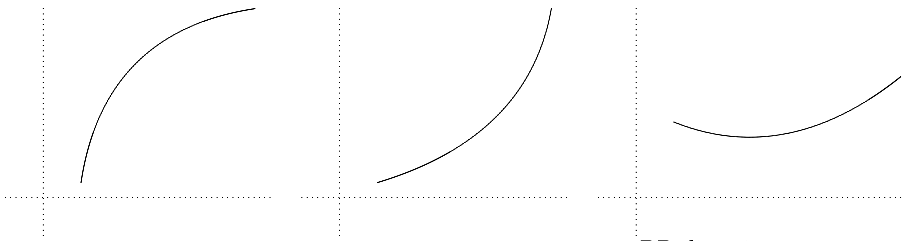
Un telle étude de variations permet de montrer par exemple : $\forall x \in \mathbb{R},\ -\dfrac{1}{6} \leqslant \dfrac{x+1}{x^2+3} \leqslant \dfrac{1}{2}$

16▶

$*$



Asymptote horizontale   Asymptote verticale   Asymptote oblique



BP horizontale   BP verticale   BP direction $y = x$

$*$ $\boxed{\text{Il faudra de plus préciser la position de la courbe par rapport à ses éventuelles asymptotes obliques}}$.

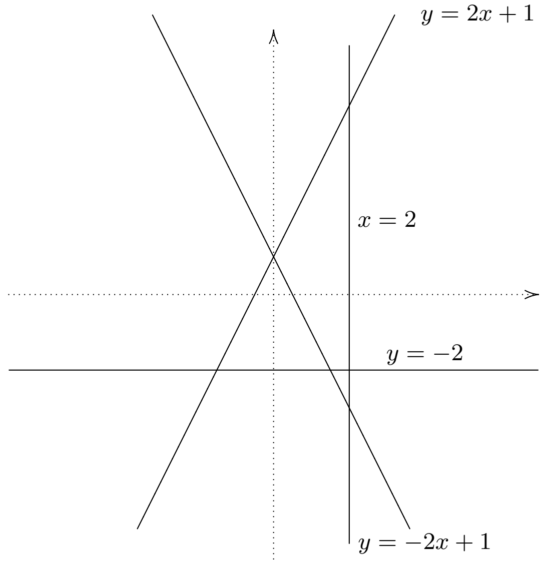
$*$ La fonction vue en note 15 admet en $\pm\infty$ la droite $y = 0$ pour asymptote horizontale car $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{1}{x} \dfrac{1 + 1/x}{1 + 3/x^2} = 0$.

17▶

$*$ Ces fonctions affines sont dérivables à tout ordre, monotones, de tableaux de variations par conséquent très simples.

$*$ Une droite verticale a pour équation : $x = x_0$, pour un x_0 réel donné.
On peut regrouper toutes ces équations de droites en une forme générique : $ax + by + c = 0$, avec $(a, b) \neq (0, 0)$.

Pratique 6 :



18▶

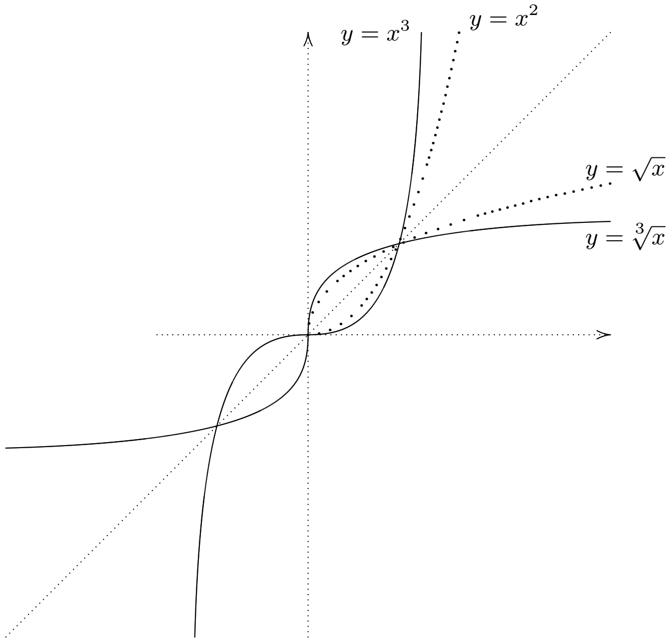
$*$ Ces fonctions polynomiales sont dérivables à tout ordre sur $\mathbb{R}$, leurs dérivées successives sont elles-mêmes polynomiales.

$*$ Les fonctions rationnelles sont définies sur $\mathbb{R}$ privé des zéros réels de la fonction polynomiale du dénominateur (qu'on appelle pôles de la fraction) et dérivables à tout ordre sur ce domaine, les dérivées successives étant rationnelles.
Par exemple, $f : x \mapsto \dfrac{x^2+3x+4}{x^2-1}$ est définie sur $\mathbb{R}$ privé de 1 et -1, de dérivée la fonction rationnelle :
$x \mapsto \dfrac{(2x+3)(x^2-1)-2x(x^2+3x+4)}{(x^2-1)^2} = \dfrac{-3x^2-10x-3}{(x^2-1)^2}$
En $\pm\infty$, f tend vers 1 car $f(x) = \dfrac{x^2(1+3/x+4/x^2)}{x^2(1-1/x^2)} = \dfrac{1+3/x+4/x^2}{1-1/x^2}$.

19▶

$*$ C'est une application directe du théorème de l'homéomorphisme et des théorèmes d'opérations sur les fonctions dérivables, appliqués à $x \mapsto x^n$ sur $\mathbb{R}_+$ ou $\mathbb{R}$ (ensuite privés de 0) suivant que n est pair ou impair. Simplement, en dérivant $x \mapsto x^{1/n}$, on retrouve bien $x \mapsto \dfrac{1}{n}\, x^{1/n-1}$.

$*$



Pratique 7 :

En réalité, vous ne verrez que difficilement la différence avec les graphes de $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \sqrt{x}$... Les puissances 4 sont inférieures aux carrés sur $[0,1]$ et supérieures sur $[1,+\infty[$, et c'est l'inverse, par symétrie suivant $y=x$, pour $x \mapsto \sqrt[4]{x}$ et $x \mapsto \sqrt{x}$.

20▶

$*$ *Preuve* : Par exemple, $\sqrt[p]{xy}$ est l'unique réel (positif si p est pair) a tel que $a^p = xy$. Or $(\sqrt[p]{x}\sqrt[p]{y})^p = xy$, et (la quantité est positive si p est pair), donc $a = \sqrt[p]{x}\sqrt[p]{y}$.
Procéder de même pour les autres propriétés.
Enfin, comme $\lim\limits_{x\to+\infty} x^p/x = +\infty$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[p]{x}/(\sqrt[p]{x})^p = 0$. □

$*$ Ainsi le graphe de $x \mapsto \sqrt[p]{x}$ présente en $+\infty$ une branche parabolique horizontale, bien sûr la symétrique par rapport à $y=x$ de la branche parabolique verticale du graphe de $x \mapsto x^p$.

Observez les positions relatives des $x \mapsto \sqrt[p]{x}$ lorsque p augmente : le graphe est de plus en plus proche de l'axe des ordonnées au voisinage de l'origine, et s'"écrase" de plus en plus au voisinage de $+\infty$.

21▶

Cette définition, pour être cohérente, ne doit pas dépendre de la représentation du rationnel r.
Or si $r = \dfrac{p}{q} = \dfrac{\alpha p}{\alpha q}$ pour un naturel α, on a pour tout $x>0$:

$$x^{\alpha p/\alpha q} = \sqrt[\alpha q]{x^{\alpha p}} = \sqrt[q]{\sqrt[\alpha]{(x^p)^\alpha}} = \sqrt[q]{x^p} = x^{p/q}$$

22▶

$*$ Il s'agit des groupes $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ et $(\mathbb{R}, +)$...

$*$ *Preuve* : Fixons $x>0$, et considérons $f : y \mapsto \ln(xy)$. Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ admet pour dérivée : $y \mapsto \dfrac{x}{xy} = \dfrac{1}{y}$. D'après le théorème fondamental, on a donc : $f = \ln + cste$, et on détermine la constante d'intégration par la valeur en $y=1$, donc égale à $\ln x$. On a donc la première relation, et les suivantes s'en déduisent immédiatement, la dernière par récurrence sur n naturel dans un premier temps, puis en complétant à l'aide de la précédente. □

23▶

$*$ *Preuve* : $\ln'$ est à valeurs strictement positives sur $]0,+\infty[$, donc $\ln$ est strictement croissante donc injective sur cet intervalle, donc admet des limites dans $\overline{\mathbb{R}}$ en 0^+ et en $+\infty$. Comme $\ln 2 = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t > 0$ et que $\ln(2^n) = n\ln 2$, la limite en $+\infty$ ne peut qu'être $+\infty$. Comme de même $\ln((1/2)^n) = -n\ln 2$, la limite en 0^+ ne peut être que $-\infty$.
Il ne reste qu'à démontrer les régles de croissances comparées.
On vérifie facilement que : $\forall x>0,\ \ln x \leqslant x-1$, en étudiant la fonction $x \mapsto \ln x - x + 1$.
Pour $x>0$, on obtient alors : $\ln x = 2\ln(\sqrt{x}) \leqslant 2\sqrt{x} - 2$, et après division par x et le théorème des limites encadrées on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.
En posant alors $y = 1/x$, il vient : $\lim\limits_{y\to 0^+} y\ln y = 0$. □

$*$ Le graphe de $\ln$ admet en 0^+ une asymptote verticale, et en $+\infty$ une branche parabolique horizontale.

$*$ L'inégalité : $\forall x>0,\ \ln x \leqslant x-1$ établie dans la preuve précédente est importante et souvent utile. Géométriquement, elle traduit exactement que le graphe de $\ln$ se situe sous sa tangente au point d'abscisse 1.

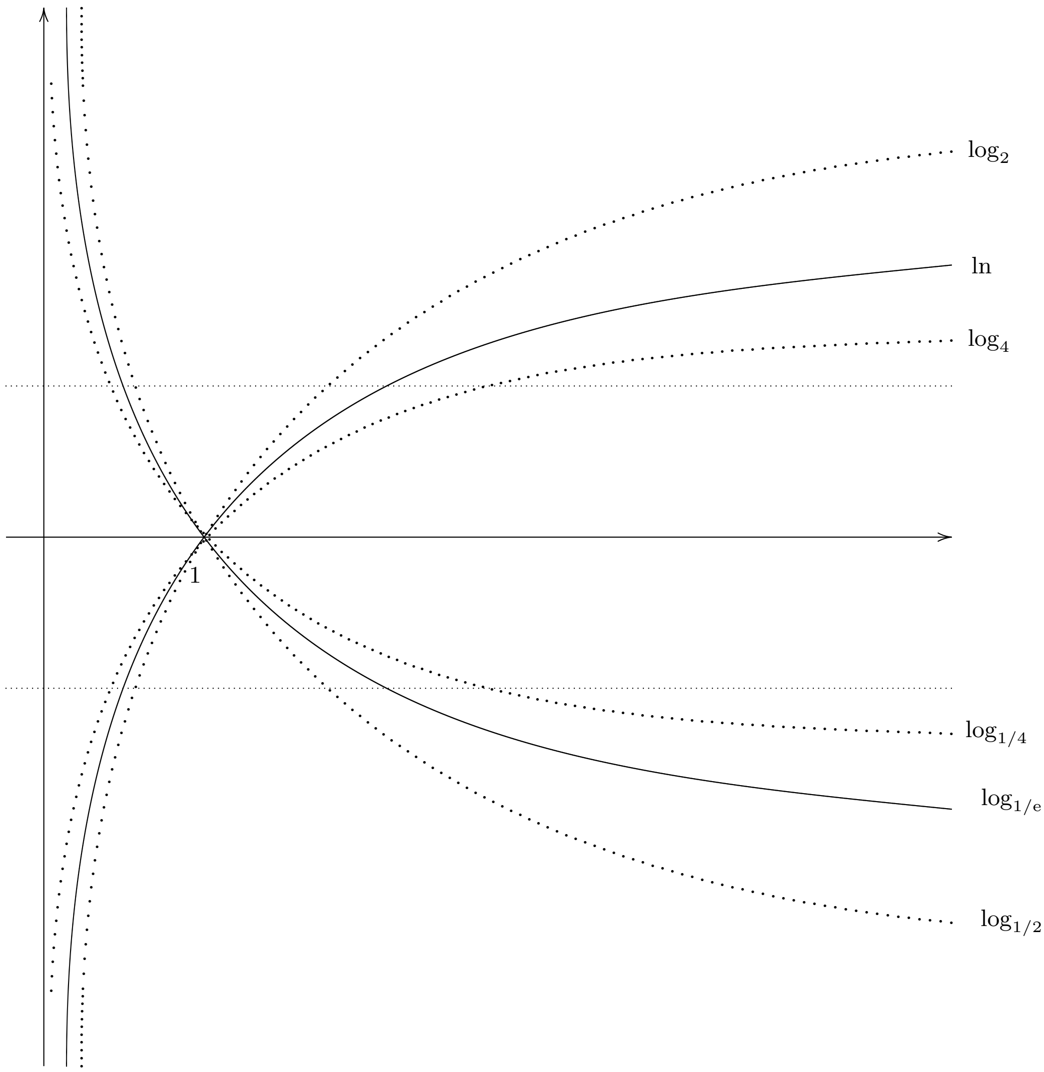
$*$ Gardez bien en tête ces règles de croissances comparées : elles donnent la réponse dans cette situation à des indéterminées de type $0\times(+\infty)$ et $0\times(-\infty)$.

24▶

$*$ Toutes ces propriétés se déduisent de celle de ln très simplement à partit de la définition de $\log_a$. En particulier, $\log_{\mathrm{e}} = \ln$.

$*$ Si $a \geqslant 2$, le nombre de chiffres dans l'écriture d'un naturel n en base a est $\lfloor \log_a(n) + 1 \rfloor$.

$*$



25▶

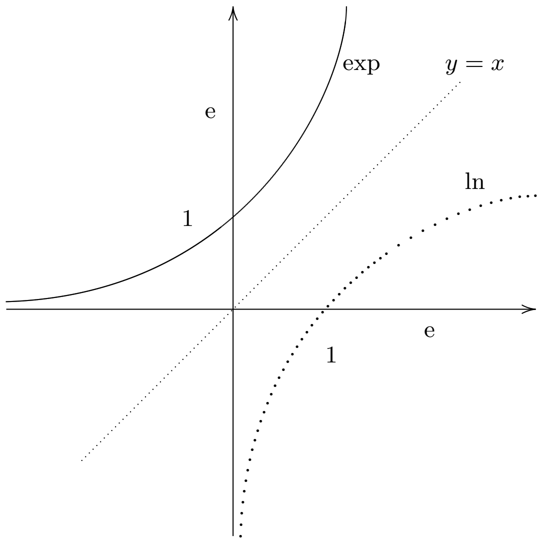
$*$ *Preuve* : Tout cela découle de la définition d'une réciproque.

Par exemple, pour x et y réels quelconques, $\ln(\exp(x+y)) = x + y$ et

$\ln(\exp(x)\exp(y)) = \ln(\exp x) + \ln(\exp y) = x + y$ donc $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$.

Autre exemple, pour les règles de croissances comparées : en posant $y = \exp(x)$, $\exp(x)/x = y/\ln(y)$ qui est donc de limite $+\infty$ quand x donc y tend vers $+\infty$ d'après les régles de croissances comparées relatives à ln. $\square$

*
Graphe de exp obtenu par symétrie de celui de ln par rapport à la droite $y = x$:



26▶

Preuve : Ici encore, ce ne sont que des conséquences directes des définitions.
Par exemple, la dérivée de p_a est $x \mapsto \exp(a \ln x).\frac{a}{x}$, c'est bien ap_{a-1}. □

27▶

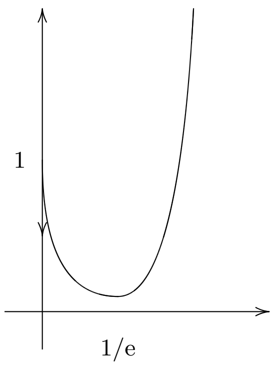
∗ *Preuve des régles de croissances comparées* : dans les hypothèses énoncées,
- $\frac{\mathrm{e}^{ax}}{x^b} = \exp(ax - b\ln x) = \exp(ax(1 - \frac{b}{a}\frac{\ln x}{x}))$ tend bien vers $+\infty$, par compositions de limites et parce que $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x)/x = 0$
- Posons $y = \ln x$ dans $\frac{(\ln(x))^a}{x^b}$, on retrouve $\frac{y^a}{\mathrm{e}^{by}}$, de limite 0 quand y tend vers $+\infty$ comme on vient de le voir
- en posant $y = 1/x$, on démontre les deux dernières régles à l'aide des deux premières. □

∗ Comprendre ces règles de la manière suivante : **en cas de forme indéterminée** et dans le cadre de ces expressions, c'est le terme exponentiel qui donne la limite cherchée plutôt que la puissance, ou c'est la puissance plutôt que le logarithme.
Ne pas le formuler ainsi ! Pour rédiger : "par règle des croissances comparées, la limite obtenue est..."

Pratique 8 :

1. $\ln(8) = \ln(2^3) = 3\ln(2)$ et $\ln(4 + 2\mathrm{e}^{3\ln(2)}) = \ln(2^2 + 2^4) = 2\ln(2) + \ln(5)$.

2. On trace le graphe de $f : x \mapsto \exp(x \ln x)$.
Cette fonction est définie et indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de limite 1 en 0^+ grâce aux règles de croissance comparées, et $+\infty$ en $+\infty$, de dérivée : $x \mapsto (1 + \ln x)x^x$, positive sur $[1/\mathrm{e}, +\infty[$ où elle croît, et négative sur $]0, 1/\mathrm{e}[$ où elle décroît (et $f(1/e) = \mathrm{e}^{-1/\mathrm{e}}$). Enfin, $f(x)/x = \mathrm{e}^{(x-1)\ln x}$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$, donc le graphe possède une branche parabolique dans la direction verticale.
Il reste à déterminer la pente au graphe en 0^+. Comme $\lim\limits_{x\to0^+} f'(x) = -\infty$, cette pente est verticale comme on l'a vu dans le théorème de prolongement.



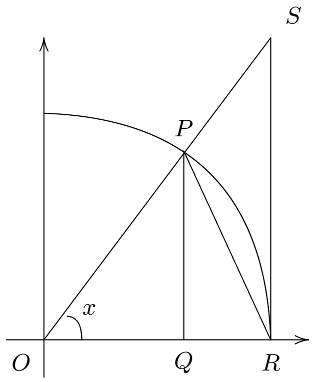
28▶

En particulier :
sin est 2π-périodique impaire, bijective, infiniment dérivable strictement croissante de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur $[-1, 1]$,
cos est 2π-périodique paire, bijective, infiniment dérivable strictement décroissante de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$,
tan est π-périodique impaire, bijective, infiniment dérivable strictement croissante de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur $\mathbb{R}$.

29▶

Preuve : Pour démontrer que sin est dérivable en tout réel x_0, on étudie le rapport de définition : $\dfrac{\sin(x_0+h)-\sin(x_0)}{h} = \sin(x_0)\,\dfrac{\cos(h)-1}{h} + \cos(x_0)\,\dfrac{\sin(h)}{h}$. Comme $\cos(h)-1 = -2\sin^2(h/2)$, on voit que le calcul de $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin(h)}{h}$ va permettre de conclure (non évident, il y a une forme indéterminée 0/0).

On établit que pour $x \in\,]0, \pi/2[$ on a : $\sin x \leqslant x \leqslant \tan x$, en comparant les aires de trois domaines construits à partir du cercle trigonométrique :
Aire OPR : $\dfrac{\sin(x).1}{2}$. Aire OSR : $\dfrac{\tan(x).1}{2}$.
Aire A du secteur angulaire déterminé par l'angle x : par une régle de trois, $\dfrac{x}{2\pi} = \dfrac{A}{\pi.1^2}$ donc $A = x/2$.
Par inclusion d'ensemble, on obtient : $\sin x \leqslant x \leqslant \tan x$, d'où $\cos x \leqslant \dfrac{\sin x}{x} \leqslant 1$. En faisant tendre x vers 0^+, on obtient $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin x}{x} = 1$. Même limite quand x tend vers 0_- par parité.



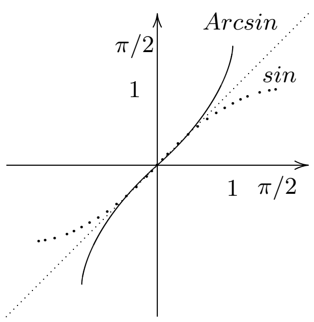
Ceci établi, on obtient bien en tout x_0 réel que $\sin'(x_0) = \cos(x_0)$.
De même, ce résultat permet d'établir que $\cos' = -\sin$; puis le reste de la proposition. ☐

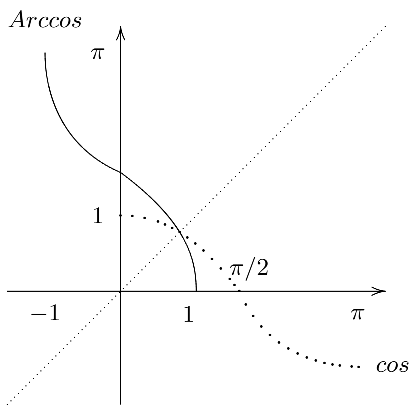
30▶

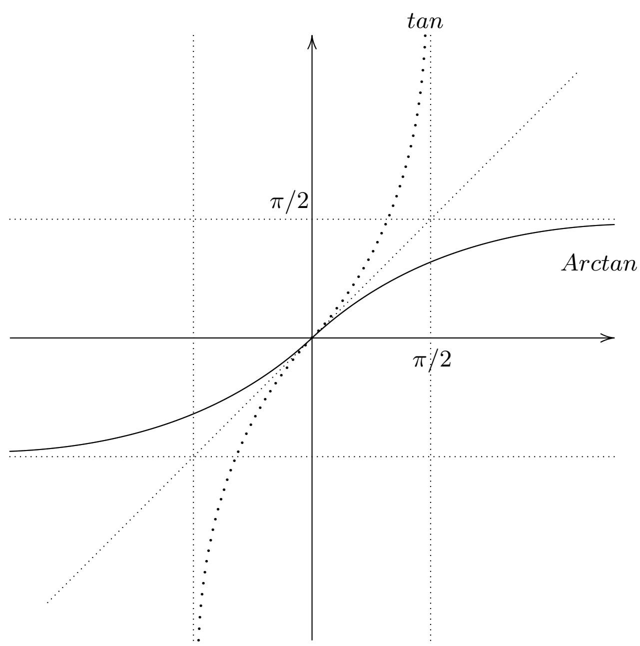
∗ *Preuve* : Tout ceci découle du théorème de l'homéomorphisme, en utilisant les rappels du début de paragraphe, ainsi que du théorème de dérivation d'une fonction réciproque. ☐

∗ Noter les pentes verticales des graphes des réciproques aux bornes ouvertes de leurs domaines de définition.

∗ Les graphes se déduisent de ceux des fonctions de départ par symétries par rapport à la droite $y = x$.







31►

Preuve : Les propriétés 1) à 3) découlent de la construction des différentes réciproques : les domaines utilisés correspondent bien aux définitions.

Dans 4), ne pas respecter les conditions conduirait à des absurdités : par exemple, Arcsin prend ses valeurs dans $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, donc écrire $\operatorname{Arcsin}(\sin x)=x$ implique bien que x appartient à cet intervalle ! Auquel cas, 1) permet de conclure.

5) découle de l'imparité de sin et de tan et des domaines symétriques par rapport à 0 utilisés.

6) Sur $[-1,1]$, Arcsin + Arccos est continue, et la dérivée de cette fonction sur $]-1,1[$ est :
$x\mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}=0$. Cette fonction est donc constante sur l'intervalle $[-1,1]$, de valeur donnée par exemple en 0, c'est-à-dire $\pi/2$.
De même, sur $\mathbb{R}_+^*$, $x\mapsto \operatorname{Arctan} x+\operatorname{Arctan}(1/x)$ est continue et même dérivable de dérivée
$x\mapsto \dfrac{1}{1+x^2}+\dfrac{1}{1+(1/x)^2}.(-1/x^2)=0$, donc cette fonction est constante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$, de valeur obtenue par exemple en 1, donc $\pi/2$. On conclut alors par imparité. □

Pratique 9 :

1. Valeurs des Arcsin : 0, $\pm\pi/6$, $\pm\pi/4$, $\pm\pi/3$ et $\pm\pi/2$.

Valeurs des Arccos : $\pi/2$, $\pi/3$ et $2\pi/3$, $\pi/4$ et $3\pi/4$, $\pi/6$ et $5\pi/6$, 0 et π.

2. Successivement : 0, $\pm\pi/4$, $\pi/3$ et $-\pi/6$.

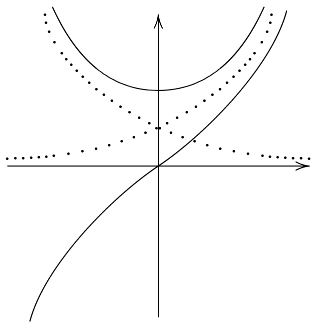
3. Il faut ramener les angles dans les bons domaines !
$\sin(21\pi/5)=\sin(4\pi+\pi/5)=\sin(\pi/5)$ avec $\pi/5\in[-\pi/2,\pi/2]$, donc $\operatorname{Arcsin}(\sin(21\pi/5))=\pi/5$.
De même, $\cos(7\pi/4)=\cos(2\pi-\pi/4)=\cos(\pi/4)$ avec $\pi/4\in[0,\pi]$, donc $\operatorname{Arccos}(\cos(7\pi/4))=\pi/4$.
$\tan(8\pi/3)=\tan(3\pi-\pi/3)=\tan(-\pi/3)$ avec $-\pi/3\in\,]-\pi/2,\pi/2[$, donc $\operatorname{Arctan}(\tan(8\pi/3))=-\pi/3$.

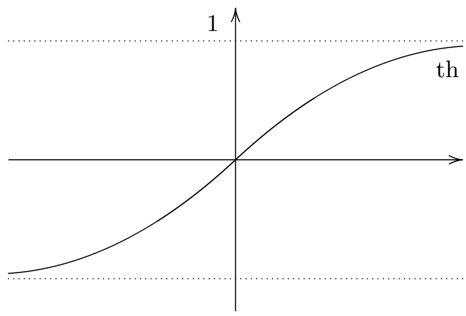
4. Comme $\cos^2=1-\sin^2$, $\cos(\operatorname{Arcsin} x)=\sqrt{1-x^2}$ du fait que $\cos(\operatorname{Arcsin} x)$ est positif puisque $\operatorname{Arcsin} x\in[-\pi/2,\pi/2]$. De même, $\sin(\operatorname{Arccos}(x))=\sqrt{1-x^2}$ par des arguments semblables.

5. Comme $\cos^2=\dfrac{1}{1+\tan^2}$ on obtient $\cos(\operatorname{Arctan}(x))=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ du fait que $\cos(\operatorname{Arctan} x)$ est positif puisque $\operatorname{Arctan} x\in\,]-\pi/2,\pi/2[$.
De même, $\sin^2=1-\cos^2=\dfrac{\tan^2}{1+\tan^2}$, donc $\sin(\operatorname{Arctan} x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ (qui est bien du signe de $\sin(\operatorname{Arctan} x)$, c'est-à-dire du signe de x).

32►

En pointillés, les graphes de $x\mapsto e^x/2$ et de $x\mapsto e^{-x}/2$. On reconnaît ch, paire, et sh, impaire.





33►

Preuve : 1) traduit les définitions de ch et de sh.

2) s'obtient par simple développement à partir des expressions exponentielles (identité remarquable).

3) et 4) : conséquences directes des expressions exponentielles.

5) En effet, tout point $(\pm \operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t)$ vérifie l'équation cartésienne $x^2 - y^2 = 1$ d'après 2), et inversement, par bijectivité de sh de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, si (x, y) est un point de l'hyperbole d'équation $x^2 - y^2 = 1$, il existe un unique t réel tel que $y = \operatorname{sh} t$, et alors $x^2 = 1 + y^2 = \operatorname{ch}^2(t)$, donc $x = \pm \operatorname{ch} t$.

6) Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{2x} = +\infty$ par règles de croissances comparées, il vient, par factorisation par le terme prépondérant au numérateur que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\operatorname{ch} x}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\operatorname{sh} x}{x} = +\infty$. On obtient les autres limites par parité ou imparité.

Pratique 10 :

Successivement, contracter le graphe de ch suivant l'axe horizontal avec un rapport $1/2$, dilater celui de sh suivant l'axe vertical avec un rapport 2, et combiner à partir du graphe de th une contraction suivant l'axe horizontal de rapport $1/2$ et une dilatation suivant l'axe vertical de rapport 3 (en particulier, les asymptotes horizontales sont aux ordonnées 3 et -3).

34▶

Preuve : En écrivant : $\varphi(x) = \alpha(x) + \mathrm{i}\beta(x)$ où α et β sont des fonctions dérivables sur I et à valeurs réelles, il vient : $\exp(\varphi) = \exp(\alpha)(\cos(\beta) + \mathrm{i}\sin(\beta))$, dont la dérivée est :

$$\exp(\alpha)\left(\alpha'.\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta} + \beta'(-\sin(\beta) + \mathrm{i}\cos(\beta))\right) = \exp(\alpha).(\alpha' + \mathrm{i}\beta').\exp(\mathrm{i}\beta) = \varphi'.\mathrm{e}^{\varphi}$$ □

Pratique 11 :

On applique la formule....pour obtenir : $x \mapsto (1 + 2\mathrm{i}x)\mathrm{e}^{x + \mathrm{i}x^2}$