Notations.

On note $\wedge$ le pgcd et $\vee$ le ppcm, par ailleurs on préfère la notation $a \equiv b \pmod{n}$ pour exprimer que a est congru à b modulo n.

Exercice 1.

Soit $n \geqslant 2$. Calculer :

1. $n \wedge (2n+1)$
2. $n \vee (2n+1)$
3. $(n-1) \wedge (2n+1)$
4. $(n-1) \vee (2n+1)$

Ma solution

$n \wedge (2n+1)$?

Comme le reste de la division euclidienne entre les deux nombres vaut 1, alors $n \wedge (2n+1) = 1$

$n \vee (2n+1)$?

Comme $n \wedge (2n+1) = 1$ alors $n \vee (2n+1) = n \times (2n+1)$

$(n-1) \wedge (2n+1)$?

La division euclidienne de $(2n+1)$ par $(n-1)$ vaut 3. Donc $(n-1) \wedge (2n+1) = 3$

$(n-1) \vee (2n+1)$?

On a trois cas qui se présente à nous.

1. Lorsque $n \equiv 1 \pmod 3$, on a $(n-1)$ et $(2n+1) \equiv 0 \pmod 3$.

   Donc $(n-1) \vee (2n+1)$ vaut $(n-1) \times (2n+1)$

2. Lorsque $n \equiv 2 \pmod 3$, on a $(n-1) \equiv 1 \pmod 3$ et $(2n+1) \equiv 2 \pmod 3$.

   Donc $(n-1) \vee (2n+1)$ vaut $\dfrac{(n-1) \times (2n+1)}{3}$

3. Lorsque $n \equiv 0 \pmod 3$, on a $(n-1) \equiv 2 \pmod 3$ et $(2n+1) \equiv 1 \pmod 3$.

   Donc $(n-1) \vee (2n+1)$ vaut $\dfrac{(n-1) \times (2n+1)}{3}$

Solution, proposée par le manuel, de l'exercice 1.

1. $n \wedge (2n+1)$?

   La division euclidienne de $2n+1$ par n s'exprime par l'égalité $2n+1 = 2 \times n + 1$, c'est-à-dire $2n+1-2n = 1$ d'où on conclut que les entiers $(2n+1)$ et n sont premiers entre eux.

2. $n \vee (2n+1)$?

   Comme le pgcd de $(2n+1)$ et n vaut 1, alors le ppcm de $(2n+1)$ et n est le produit $(2n+1) \times n$.

3. $(n-1) \wedge (2n+1)$?

   La division euclidienne de $2n+1$ par $n-1$ s'exprime par l'égalité $2n+1 = 2 \times (n-1) + 3$, d'où on conclut que le pgcd de $(n-1)$ et $(2n+1)$ est un diviseur de 3, donc est égal à 3 ou bien 1.

   — Dans le cas où $n \not\equiv 1 \pmod 3$ implique $n-1 \not\equiv 0 \pmod 3$ c'est-à-dire $n-1$ n'est pas divisible par 3 et donc $(n-1) \wedge (2n+1) = 1$.

   — Dans le cas où $n \equiv 1 \pmod 3$, on a alors $2n+1 \equiv 2 \times 1 + 1 \equiv 3 \pmod 3$ c'est-à-dire $2n+1 \equiv 0 \pmod 3$, donc 3 divise $2n+1$.

     $n \equiv 1 \pmod 3$ implique $n-1 \equiv 0 \pmod 3$ c'est-à-dire 3 divise $n-1$ et donc $(n-1) \wedge (2n+1) = 3$.

4. $(n-1) \vee (2n+1)$?

   Les calculs des pgcd ci-dessus permettent de trouver aisément les ppcm.

   En conclusion on a :

   - si $n \equiv 1 \pmod 3$, alors $(n-1) \vee (2n+1) = \dfrac{(n-1)(2n+1)}{3}$;
   - si $n \not\equiv 1 \pmod 3$, alors $(n-1) \vee (2n+1) = (n-1)(2n+1)$.

Exercice 2.

Soit $(a, b, c) \in (\mathbb{N}*)^3$ tel que $a^2 + b^2 = c^2$ et $a \wedge b \wedge c = 1$.

Montrer que $a \wedge b = a \wedge c = b \wedge = 1$.

Ma solution

Solution, proposée par le manuel, de l'exercice 2.

Raisonnons par l'absurde et supposons $a \wedge b = 1$. Alors, il existe un nombre premier p qui divise a et b. Il divise donc $a^2 + b^2 = c^2$. D'après le corolaire *"Un nombre premier divise un produit si, et seulement s'il divise l'un de ses facteurs."*, p divise c donc p divise $a \wedge b \wedge c = 1$, ce qui constitue une absurdité.

On démontre de même que $a \wedge c = b \wedge c = 1$.

Exercice 3.

Soit $(a, b, c) \in (\mathbb{N}*)^3$ tel que $a^2 + b^2 = c^2$ et $a \wedge b = 1$.

Montrer que a et b ne sont pas de même parité.

Indication. On pourra utiliser des congruences modulo 4.

Ma solution

Solution, proposée par le manuel, de l'exercice 3.

Tout d'abord, a et b ne sont pas tous les deux pairs sinon 2 divise $a \wedge b = 1$. Raisonnement par l'absurde et supposons que a et b soient tous les deux impairs. Alors on peut trouver $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = 2k+1$, puis $a^2 = 4k^2+4k+1$ donc $a^2 \equiv 1 \mod 4$ et de même, $b^2 \equiv 1 \mod 4$. Par somme, $c^2 \equiv 2 \mod 4$, or un carré est congru à ou à 1 modulo 4.

Conclusion : a et b sont de parités différentes.