Les primitives et les dérivées.

Louis Herzog

Table des matières

Résumé

Quelques considérations préliminaires sur le calcul de certaines primitives telles que celles des fonctions $x \mapsto \operatorname{Arccos}(x)$, $x \mapsto \operatorname{Arcsin}(x)$ ou bien $x \mapsto \operatorname{Arctan}(x)$ une astuce est indispensable. Elle consiste à procéder à une intégration par parties. En effet, n'ayant aucune idée des primitives, il est raisonnable de changer leurs rôles respectifs et de considérer, non plus la fonction initiale, mais sa dérivée.

Le premier objectif est donc de vérifier si celles-ci existent et sont calculables.

Remarque.

On passe des formules de trigonométrie aux formules de trigonométries hyperboliques en remplaçant cos par ch et sin par $i.\operatorname{sh}$.

Chapitre 1

Fonctions trigonométriques et trigonométriques inverses.

1.1 La fonction $x \mapsto \cos(x)$.

La restriction de la fonction $x \mapsto \cos(x)$ à l'intervalle $[0, \pi]$ est une bijection de $[0, \pi] \rightarrow [-1, +1]$. Il existe donc une fonction réciproque à la fonction $x \mapsto \cos(x)$ que l'on nomme $x \mapsto \operatorname{Arc}\cos(x)$. C'est également une bijection, elle est continue sur l'intervalle fermé $[-1, 1]$ et est dérivable sur l'intervalle ouvert $]-1, 1[$.

1.1.1 Dérivée de la fonction $x \mapsto \cos(x)$.

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x)\cos(h) - \sin(x)\sin(h) - \cos(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x)(\cos(h) - 1)}{h} - \frac{\sin(x)\sin(h)}{h} \\
&= \cos(x) \times \lim_{h\to 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} - \sin(x) \times \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} \\
&= -\sin x
\end{aligned}
$$

1.1.2 Calcul d'une primitive de la fonction $x \mapsto \cos(x)$.

```
f(x) = cos(x)
F(x) = integrate(f(x),x)
```

Une primitive de la fonction $x \mapsto \cos(x)$ est la fonction $x \mapsto \sin(x) + C^{ste}$ définie à une constante près.

1.2 La fonction $x \mapsto \sin(x)$.

1.2.1 Dérivée de la fonction $x \mapsto \sin(x)$.

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x)\sin(h)-\cos(x)\sin(h)-\sin(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x)(\cos(h)-1)}{h}-\frac{\cos(x)\sin(h)}{h}\\ &= \sin(x)\times\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h}-\cos(x)\times\frac{\sin(h)}{h}\\ &= \cos x\end{aligned}$$

1.2.2 Calcul d'une primitive de la fonction $x \mapsto \sin(x)$.

```
f(x) = sin(x)
F(x) = integrate(f(x),x)
```

Une primitive de $\sin(x)$ est $-\cos(x) + C^{ste}$ définie à une constante près.

1.3 La fonction $x \mapsto \tan(x)$.

1.3.1 Dérivée de la fonction $x \mapsto \tan(x)$.

$$\begin{aligned}\tan(x)' &= \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' \\ &= \frac{\cos(x) \times \cos(x) + \sin(x) \times \sin(x)}{\cos(x)^2} \\ &= \frac{1}{\cos(x)^2} = 1 + \tan(x)^2\end{aligned}$$

Vérification avec Sage

```
f(x) = tan(x)
g(x) = diff(f(x),x)
```

La dérivée de $\tan(x) = \tan(x)^2 + 1$.

1.3.2 Calcul d'une primitive de la fonction $x \mapsto \tan(x)$.

On a $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$, alors $\displaystyle\int \tan(x)\,dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,dx$.
Je pose $u(x) = \cos(x)$ donc $u'(x) = -\sin(x)\,dx$ et par ce changement de variable on a $\displaystyle\int \tan(x)\,dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,dx = -\int \frac{u'}{u} = -\ln|u| = \ln\left(\frac{1}{|u|}\right) = \ln\left(\frac{1}{|\cos(x)|}\right) + C^{ste}$.

Vérification avec Sage

```
f(x) = tan(x)
F(x) = integrate(f(x),x)
```

Une primitive de $\tan(x)$ est la fonction définie à une constante près $x \mapsto \log(\sec(x)) + C^{ste}$.

La fonction $x \mapsto \sec$ est la fonction paire $x \mapsto \dfrac{1}{\cos(x)}$ périodique de période 2π définie sur $\mathbb{R} - \{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. On retrouve bien le résultat précédent.

1.4 La fonction $x \mapsto \mathrm{Arc}\cos(x)$.

La restriction de la fonction $x \mapsto \cos(x)$ à l'intervalle $[0, \pi]$ est une bijection de $[0, \pi] \to [-1, 1]$. Il existe donc une fonction réciproque à la fonction $x \mapsto \cos(x)$ que l'on nomme $x \mapsto \mathrm{Arc}\cos(x)$. C'est également une bijection, elle est continue sur l'intervalle fermé $[-1, 1]$ et est dérivable sur l'intervalle ouvert $]-1, 1[$.

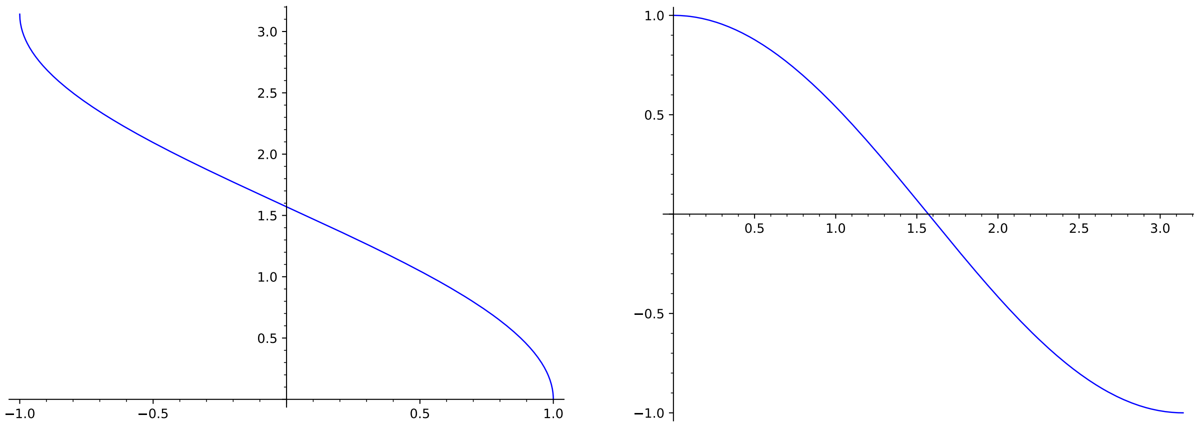
1.4.1 Calcul de la dérivée de la fonction $x \mapsto \mathrm{Arc}\cos(x)$.

Pour ce calcul, il faut utiliser le calcul de la dérivée d'une fonction composée. On a $\cos(\mathrm{Arc}\cos(x)) = x$, par conséquent la dérivée de cette expression s'exprime par $-\sin(\mathrm{Arc}\cos(x) \times \mathrm{Arc}\cos(x)' = 1$, d'où $\mathrm{Arc}\cos(x)' = \dfrac{-1}{\sin(\mathrm{Arc}\cos(x))}$.
La difficulté est maintenant de déterminer $\sin(\mathrm{Arc}\cos(x))$, or on sait que pour tout $X \in \mathbb{R}$, on a $\sin^2(X) + \cos^2(X) = 1$, d'où $\sin(X) = \sqrt{1 - \cos^2(X)}$.
En remplaçant X par $\mathrm{Arc}\cos(x)$, on a $\sin(\mathrm{Arc}\cos(x)) = \sqrt{1 - \cos^2(\mathrm{Arc}\cos(x))} = \sqrt{1 - x^2}$.
Finalement, $\mathrm{Arc}\cos(x)' = \dfrac{-1}{\sin(\mathrm{Arc}\cos(x))} = \dfrac{-1}{\sqrt{1 - \cos^2(\mathrm{Arc}\cos(x))}} = \dfrac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Vérification avec Sage

```
f(x) = arccos(x)
g(x) = diff(f(x),x)
```

La dérivée de la fonction $\mathrm{Arc}\cos(x)$ est la fonction $x \mapsto -\dfrac{1}{\sqrt{-x^2 + 1}}$, ce que l'on retrouve sous une écriture légèrement modifiée de Sage.



Les représentations graphiques de $x \mapsto \operatorname{Arccos}(x)$ et de $x \mapsto \cos(x)$.

On peut maintenant entreprendre le calcul de la primitive de la fonction $x \mapsto \operatorname{Arccos}(x)$.

1.4.2 Calcul de la primitive de la fonction $x \mapsto \operatorname{Arccos}(x)$.

Je pose que $u(x)$ est égal à la fonction $\operatorname{Arccos}(x)$ et $v'(x)$ est égal 1 d'où $u'(x)$ est égal à la fonction $\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $v(x)$ est égal x.

Alors on a, par une intégration par parties, $\displaystyle\int \operatorname{Arccos}(x)\,dx = x \times \operatorname{Arccos}(x) - \int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \times x\,dx = x\operatorname{Arccos}(x) + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

Calcul de $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

$\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{-1}{2}\int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}.$

Finalement $\displaystyle\int \operatorname{Arccos}(x)\,dx = x\operatorname{Arccos}(x) - \sqrt{1-x^2} + C^{ste}$ est une primitive de la fonction $x \mapsto \operatorname{Arccos}(x)$.

Vérification avec Sage

```
f(x) = arccos(x)
F(x) = integrate(f(x),x)
```

Une primitive de $\operatorname{Arccos}(x) = x\operatorname{Arccos}(x) - \sqrt{-x^2+1} + C^{ste}$.

1.5 La fonction $x \mapsto \text{Arc}\sin(x)$.

La restriction de la fonction $x \mapsto \sin(x)$ à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ est une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$. Il existe donc une fonction réciproque à la fonction $x \mapsto \sin(x)$ que l'on nomme $x \mapsto \text{Arc}\sin(x)$. C'est également une bijection, elle est continue sur l'intervalle fermé $[-1, 1]$ et est dérivable sur l'intervalle ouvert $]-1, 1[$.

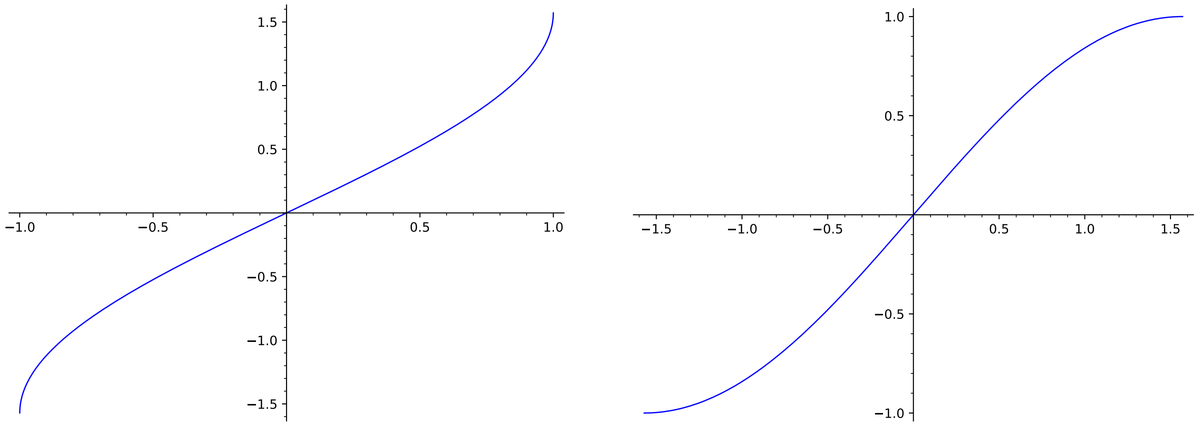
1.5.1 Calcul de la dérivée de la fonction $x \mapsto \text{Arc}\sin(x)$.

Pour ce calcul, il faut utiliser le calcul de la dérivée d'une fonction composée.
On a $\sin(\text{Arc}\sin(x)) = x$, par conséquent la dérivée de cette expression s'exprime par $\cos(\text{Arc}\sin(x)) \times \text{Arc}\sin(x)' = 1$, d'où $\text{Arc}\sin(x)' = \dfrac{1}{\cos(\text{Arc}\sin(x))}$.
La difficulté est maintenant de déterminer $\cos(\text{Arc}\sin(x))$, or on sait que pour tout $X \in \mathbb{R}$, on a $\sin^2(X) + \cos^2(X) = 1$, d'où $\cos(X) = \sqrt{1 - \sin^2(X)}$.
En remplaçant X par $\text{Arc}\sin(x)$,
on a $\cos(\text{Arc}\sin(x)) = \sqrt{1 - \sin^2(\text{Arc}\sin(x))} = \sqrt{1 - x^2}$.
Finalement, $\text{Arc}\sin(x)' = \dfrac{1}{\cos(\text{Arc}\sin(x))} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\text{Arc}\sin(x))}} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Vérification avec Sage

```
f(x) = arcsin(x)
g(x) = diff(f(x),x)
```

La dérivée de $\text{Arc}\sin\left(x\right) = \dfrac{1}{\sqrt{-x^2 + 1}}$.



Les représentations graphiques de $x \mapsto \text{Arcsin}\,(x)$ et de $x \mapsto \sin(x)$.

On peut maintenant entreprendre le calcul de la primitive de la fonction $x \mapsto \text{Arcsin}(x)$.

1.5.2 Calcul de la primitive de la fonction $x \mapsto \text{Arcsin}(x)$.

Je pose que $u(x)$ est égal à la fonction $\text{Arcsin}(x)$ et $v'(x)$ est égal 1 d'où $u'(x)$ est égal à la fonction $\text{Arcsin}(x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $v(x)$ est égal x.

Alors on a $\displaystyle\int \text{Arcsin}(x)\,dx = x \times \text{Arcsin}(x) - \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \times x\,dx.$

Calcul de $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{1-x^2}.$$

Finalement, une primitive de la fonction $x \mapsto \text{Arcsin}(x)$ est une fonction $x \mapsto x\,\text{Arcsin}(x) - \sqrt{1-x^2} + C^{ste}$.

Vérification avec Sage

```
f(x) = arcsin(x)
F(x) = integrate(f(x),x)
```

Une primitive de la fonction $\text{Arcsin}\,(x)\ = x\,\text{Arcsin}\,(x) + \sqrt{-x^2+1} + C^{ste}$.

1.6 La fonction $x \mapsto \text{Arctan}(x)$.

La restriction de la fonction $x \mapsto \tan(x)$ à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ est une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$. Il existe donc une fonction réciproque à la fonction $x \mapsto \tan(x)$ que l'on nomme $x \mapsto \text{Arctan}(x)$. C'est également une bijection, elle est continue sur l'intervalle fermé $[-1, 1]$ et est dérivable sur l'intervalle ouvert $]-1, 1[$.

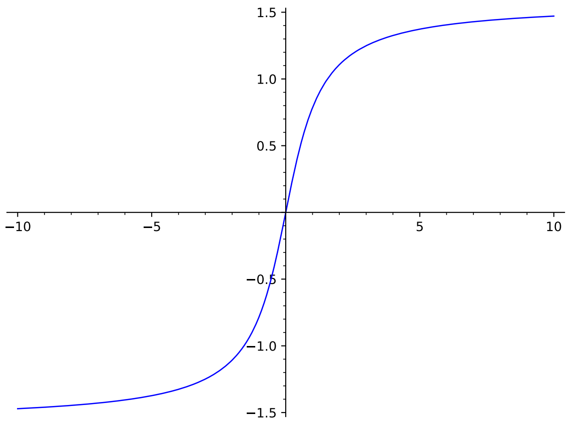
1.6.1 Calcul de la dérivée de la fonction $x \mapsto \text{Arctan}(x)$.

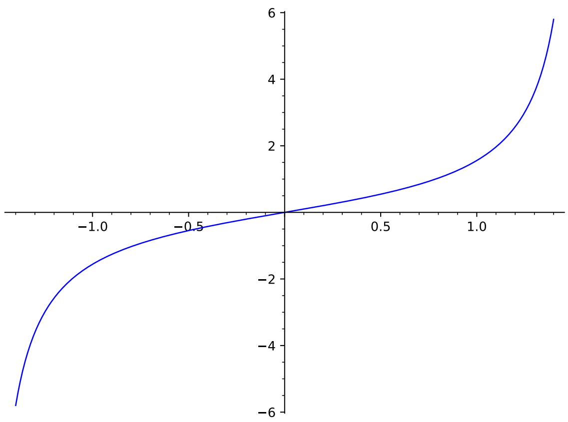
Pour ce calcul, il faut utiliser le calcul de la dérivée d'une fonction composée. On a $\tan(\text{Arctan}(x)) = x$, par conséquent la dérivée de cette expression s'exprime par $\tan'(\text{Arctan}(x)) \times \text{Arctan}(x)' = 1$, d'où $\text{Arctan}(x)' = \dfrac{1}{\tan'(\text{Arctan}(x))}$.
La difficulté est maintenant de déterminer $\tan'(\text{Arctan}(x)$, or on sait que pour tout $X \in \mathbb{R}$, on a $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$, d'où $\tan'(\text{Arctan}(x)) = 1 + x^2$.
Finalement, $\text{Arctan}(x)' = \dfrac{1}{1 + x^2}$.

Vérification avec Sage

```
f(x) = arctan(x)
g(x) = diff(f(x),x)
```

La dérivée de $\text{Arctan}\,(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$.





Les représentations graphiques de $x \mapsto \mathrm{Arctan}\,(x)$ et de $x \mapsto \tan(x)$.

On peut maintenant entreprendre le calcul de la primitive de la fonction $x \mapsto \mathrm{Arctan}(x)$.

1.6.2 Calcul de la primitive de la fonction $x \mapsto \mathrm{Arctan}(x)$.

Je pose que $u(x)$ est égal à la fonction $\mathrm{Arctan}(x)$ et $v'(x)$ est égal 1 d'où $u'(x)$ est égal à la fonction $\dfrac{1}{1+x^2}$ et $v(x)$ est égal x.
Alors on a $\displaystyle\int \mathrm{Arctan}(x)\,dx = x \times \mathrm{Arctan}(x) - \int \frac{1}{1+x^2} \times x\,dx$.

Calcul de $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^2}\,dx$.

$\displaystyle\int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2}$.
D'où $\displaystyle\int \mathrm{Arctan}(x)\,dx = x\,\mathrm{Arctan}(x) - \frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right| + C^{ste}$. Finalement, une primitive de la fonction $x \mapsto \mathrm{Arctan}(x)$ est une fonction $x \mapsto x\,\mathrm{Arctan}(x) - \ln\left(\sqrt{1+x^2}\right) + C^{ste}$ ou encore $x \mapsto x\,\mathrm{Arctan}(x) + \ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) + C^{ste}$.

Vérification avec Sage

```
f(x) = arctan(x)
F(x) = integrate(f(x),x)
```

Une primitive de $\mathrm{Arctan}\,(x) = x\,\mathrm{Arctan}\,(x) - \dfrac{1}{2}\log\left(x^2+1\right) + C^{ste}$.

Chapitre 2

Fonctions hyperboliques et hyperboliques inverses.

On passe des formules de trigonométrie aux formules de trigonométries hyperboliques en remplaçant cos par ch et sin par $i.\,sh$. Par exemple pour $\cos^2+\sin^2=1$ nous obtenons $(ch)^2+(i.\,sh)^2=(ch)^2-(sh)^2=1$ et pour $\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$, nous obtenons $ch(a+b)=ch(a)\,ch(b)-i.\,sh(a)i.\,sh(b)$ c'est-à-dire $ch(a+b)=ch(a)\,ch(b)-(i)^2\,sh(a)\,sh(b)$. Finalement on a $ch(a+b)=ch(a)\,ch(b)+sh(a)\,sh(b)$. On change de signe !

2.1 La fonction $x \mapsto \mathrm{ch}(x)$.

2.1.1 Dérivée de la fonction $x \mapsto \mathrm{ch}(x)$.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{ch}(x)' &= \left(\frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2}\right)' \\
&= \frac{\exp(x)' + \exp(-x)'}{2} \\
&= \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2} \\
&= \mathrm{sh}(x)
\end{aligned}
$$

2.1.2 Calcul d'une primitive de la fonction $x \mapsto \mathrm{ch}(x)$.

$\int \mathrm{ch}(x)dx = \int \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2}dx = \frac{1}{2} \times \int \exp(x)dx + \int \exp(x)dx = \frac{1}{2} \times \exp(x) - \exp(-x) = \mathrm{sh}$

2.2 La fonction $x \mapsto \mathrm{sh}(x)$.

2.2.1 Dérivée de la fonction $x \mapsto \mathrm{sh}(x)$.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{sh}(x)' &= \left(\frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2}\right)' \\
&= \frac{\exp(x)' - \exp(-x)'}{2} \\
&= \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2} \\
&= \mathrm{ch}(x)
\end{aligned}
$$

2.2.2 Calcul d'une primitive de la fonction $x \mapsto \operatorname{sh}(x)$.

$\int \operatorname{sh}(x)dx = \int \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2}dx = \frac{1}{2} \times \int \exp(x)dx - \int \exp(x)dx = \frac{1}{2} \times \exp(x) + \exp(-x) = \operatorname{ch}$

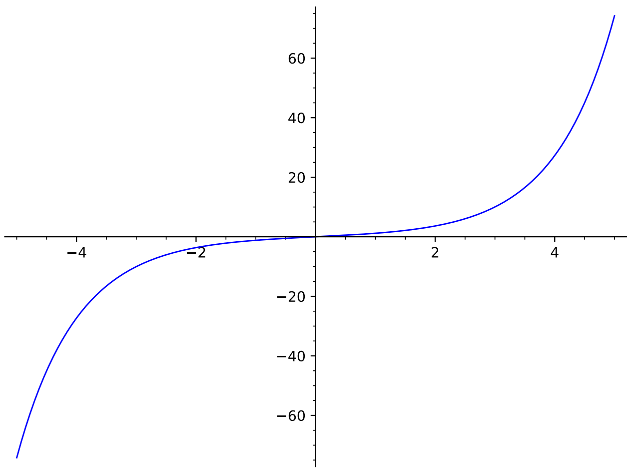
Vérification avec Sage

```
f(x) = sinh(x)

F(x) = integrate(f(x),x)
```

Une primitive de $\operatorname{sh}(x) = \operatorname{ch}(x)$.

Le graphe de $\operatorname{sh}(x)$.



2.3 La fonction $x \mapsto \mathrm{th}(x)$.

2.3.1 Dérivée de la fonction $x \mapsto \mathrm{th}(x)$.

$$\begin{aligned}(\mathrm{th}(x))' &= \left(\frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}\right)' \\ &= \frac{\mathrm{sh}(x)' \times \mathrm{ch}(x) - \mathrm{ch}(x)' \times \mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)^2} \\ &= \frac{\mathrm{ch}(x)^2 - \mathrm{sh}(x)^2}{\mathrm{ch}(x)^2} \\ &= \frac{1}{\mathrm{ch}(x)^2}\end{aligned}$$

Vérification avec Sage

2.3.2 Calcul d'une primitive de la fonction $x \mapsto \mathrm{th}(x)$.

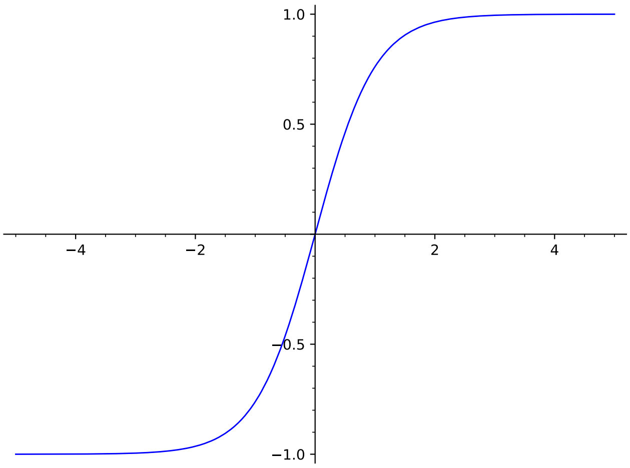
$$\begin{aligned}\int \mathrm{th}(x) &= \int \frac{\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{sh}(x)} \\ &= \int \frac{1}{u(x)} \times du(x), u(x) = \mathrm{ch}(x), du(x) = \mathrm{sh}(x) \\ &= \ln(u(x)) \\ &= \ln(\mathrm{ch}(x))\end{aligned}$$

Vérification avec Sage

```
f(x) = tanh(x)
F(x) = integrate(f(x),x)
```

Une primitive de $\mathrm{th}\left(x\right) = \log\left(\mathrm{ch}\left(x\right)\right)$.

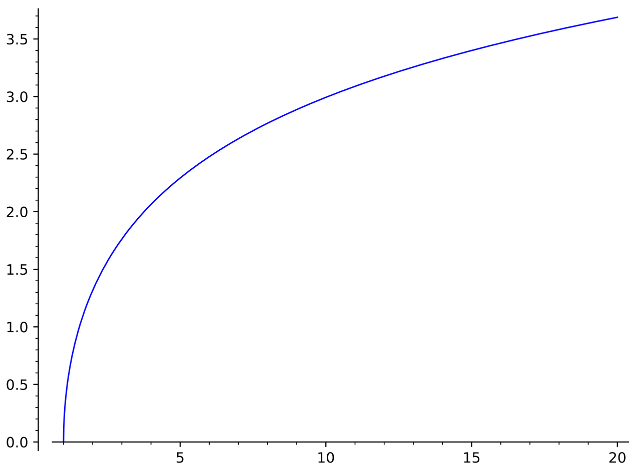
Le graphe de $\mathrm{th}\left(x\right)$.



2.4 La fonction $x \mapsto \operatorname{Arg}\operatorname{ch}(x)$.

Le cosinus hyperbolique, noté ch est défini sur $\mathbb{R}$ selon l'expression $\dfrac{\exp(x)+\exp(-x)}{2}$, son domaine de valeurs est $[1, +\infty[$ c'est une fonction paire c'est-à-dire $\operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch}(x)$.

La fonction $x \mapsto \operatorname{ch}(x)$ est inversable sur le domaine de définition restreint à $\mathbb{R}^+$, car elle y est bijective, son inverse est notée « Arg ch » et définit la fonction « *argument cosinus hyperbolique* » telle que $x \mapsto \operatorname{Arg}\operatorname{ch}(x)$.



La représentation graphique de $x \mapsto \operatorname{Arg}\operatorname{ch}(x)$.

On observe que la fonction est croissante, continue sur $[1\,,\,+\infty[$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]1\,,\,+\infty[$.

2.4.1 Dérivée de la fonction $x \mapsto \operatorname{Arg ch}(x)$.

On a la fonction composée $\mathrm{Id} = \mathrm{ch} \circ \operatorname{Arg ch}$ telle que $x \mapsto \mathrm{ch}\left(\operatorname{Arg ch}(x)\right) = x$ dont la dérivée s'écrit alors $1 = \operatorname{Arg ch}' \times \mathrm{ch}' \circ \operatorname{Arg ch}$.

$$\begin{aligned}
x &= \mathrm{ch}\left(\operatorname{Arg ch}(x)\right)(x) \quad \text{en dérivant, on a}\\
1 &= \operatorname{Arg ch}'(x) \times \mathrm{ch}' \circ \operatorname{Arg ch}(x) \quad \text{d'où}\\
\operatorname{Arg ch}'(x) &= \frac{1}{\mathrm{ch}' \circ \operatorname{Arg ch}(x)} = \frac{1}{\mathrm{sh}\left(\operatorname{Arg sh}(x)\right)} \quad \text{or, on sait que}\\
1 &= \mathrm{ch}^2\left(\operatorname{Arg ch}(x)\right) - \mathrm{sh}^2\left(\operatorname{Arg ch}(x)\right) \quad \text{alors}\\
\mathrm{sh}\left(\operatorname{Arg ch}(x)\right) &= \sqrt{\mathrm{ch}^2\left(\operatorname{Arg ch}(x)\right) - 1} = \sqrt{x^2-1} \quad \text{finalement}\\
\operatorname{Arg ch}'(x) &= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad \text{on vérifie ce calcul avec Sage.}
\end{aligned}$$

Vérification avec Sage

```
f(x) = arccosh(x)
g(x) = diff(f(x),x)
F(x) = integrate(f(x),x)
```

La dérivée de $\operatorname{arcosh}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}\sqrt{x-1}}$.

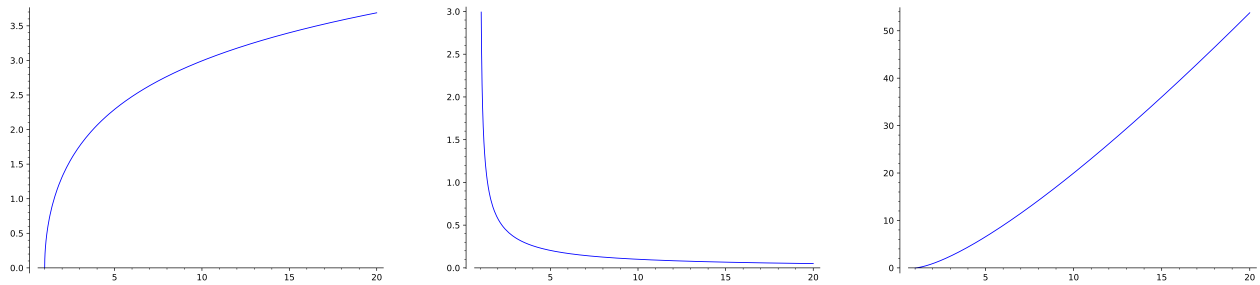
2.4.2 Calcul d'une primitive de la fonction $x \mapsto \operatorname{Arg ch}(x)$.

Pour calculer $\displaystyle\int \operatorname{Arg ch}(x)\,dx$, je procède par une intégration par parties en posant $u(x) = \operatorname{Arg ch}(x)$ et $v'(x) = dx$, d'où $u'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ et $v(x) = x$.
On a donc

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{Arg ch}(x)\,dx &= x \operatorname{Arg ch}(x) - \int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx \quad \text{or}\\
\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx &= \int \left(\sqrt{x^2-1}\right)'\,dx = \sqrt{x^2-1} \quad \text{d'où}\\
\int \operatorname{Arg ch}(x)\,dx &= x \operatorname{Arg ch}(x) - \sqrt{x^2-1} + C^{ste} \quad \text{que l'on retrouve avec Sage.}
\end{aligned}$$

Vérification avec Sage

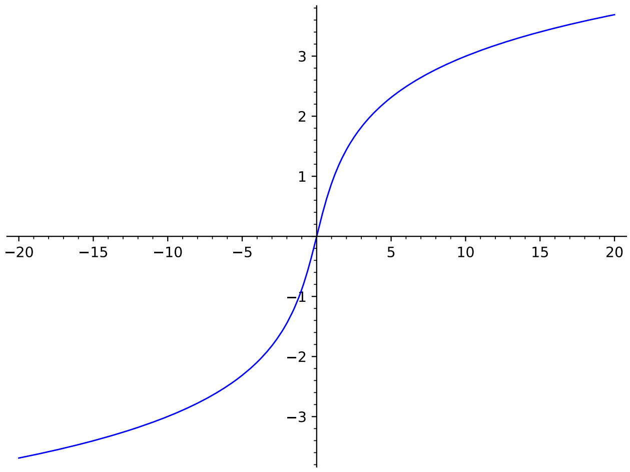
Une primitive de $\operatorname{arcosh}(x) = x \operatorname{arcosh}(x) - \sqrt{x^2 - 1} + C^{ste}$.



Les représentations graphiques respectivement de $x \mapsto \operatorname{Arg\,ch}(x)$, de sa dérivée et de sa primitive.

2.5 La fonction $x \mapsto \operatorname{Arg\,sh}(x)$.

La fonction $x \mapsto \operatorname{sh}(x)$ est inversable sur son domaine de définition $\mathbb{R}$, car elle y est bijective, son inverse est notée « Arg sh » et définit la fonction « *argument sinus hyperbolique* » telle que $x \mapsto \operatorname{Arg\,sh}(x)$.



La représentation graphique de $x \mapsto \operatorname{Arg\,sh}(x)$.

On observe que la fonction est croissante, impaire $\operatorname{Arg\,sh}(-x) = -\operatorname{Arg\,sh}(x)$ et on observe que la fonction est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

2.5.1 Dérivée de la fonction $x \mapsto \operatorname{Arg\,sh}(x)$.

On a la fonction composée $\mathrm{Id} = \mathrm{sh} \circ \operatorname{Arg\,sh}$ telle que $x \mapsto \mathrm{sh}\left(\operatorname{Arg\,sh}(x)\right) = x$ dont la dérivée s'écrit alors $1 = \operatorname{Arg\,sh}' \times \mathrm{sh}' \circ \operatorname{Arg\,sh}$.

$$
\begin{aligned}
x &= \mathrm{sh}\left(\operatorname{Arg\,sh}(x)\right)(x) \quad \text{en dérivant, on a} \\
1 &= \operatorname{Arg\,sh}'(x) \times \mathrm{sh}' \circ \operatorname{Arg\,sh}(x) \quad \text{d'où} \\
\operatorname{Arg\,sh}'(x) &= \frac{1}{\mathrm{sh}' \circ \operatorname{Arg\,sh}(x)} = \frac{1}{\mathrm{ch}\left(\operatorname{Arg\,sh}(x)\right)} \quad \text{or} \\
\mathrm{ch}\left(\operatorname{Arg\,sh}(x)\right) &= \sqrt{1 + \mathrm{sh}^2\left(\operatorname{Arg\,sh}(x)\right)} = \sqrt{1+x^2} \quad \text{donc} \\
\operatorname{Arg\,sh}'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{on vérifie ce calcul avec Sage.}
\end{aligned}
$$

Vérification avec Sage

```
f(x) = arcsinh(x)
g(x) = diff(f(x),x)
F(x) = integrate(f(x),x)
```

La dérivée de arsinh $(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

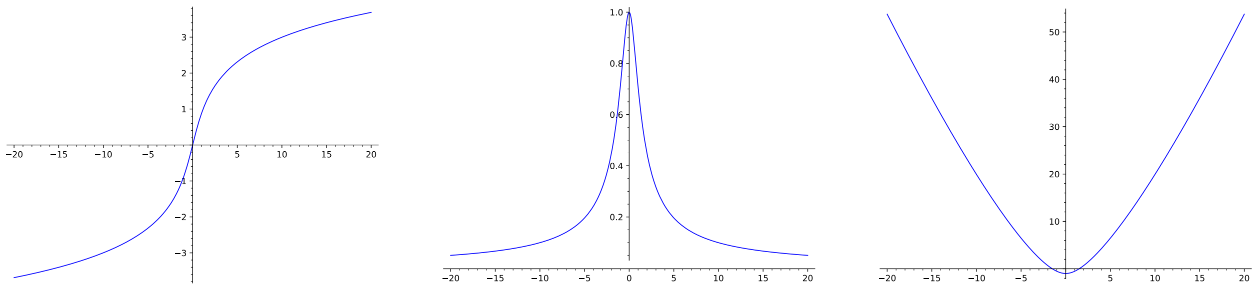
2.5.2 Calcul d'une primitive de la fonction $x \mapsto \operatorname{Arg\,sh}(x)$.

Pour calculer $\displaystyle\int \operatorname{Arg\,sh}(x)\,dx$, je procède par une intégration par parties en posant $u(x) = \operatorname{Arg\,sh}(x)$ et $v'(x) = dx$, d'où $u'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ et $v(x) = x$.
On a donc

$$
\begin{aligned}
&\int \operatorname{Arg\,sh}(x)\,dx = x \operatorname{Arg\,sh}(x) - \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \quad \text{or} \\
&\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \int \left(\sqrt{1+x^2}\right)'\,dx = \sqrt{1+x^2} \quad \text{d'où} \\
&\int \operatorname{Arg\,sh}(x)\,dx = x \operatorname{Arg\,sh}(x) - \sqrt{1+x^2} + C^{ste} \quad \text{que l'on retrouve avec Sage.}
\end{aligned}
$$

Vérification avec Sage

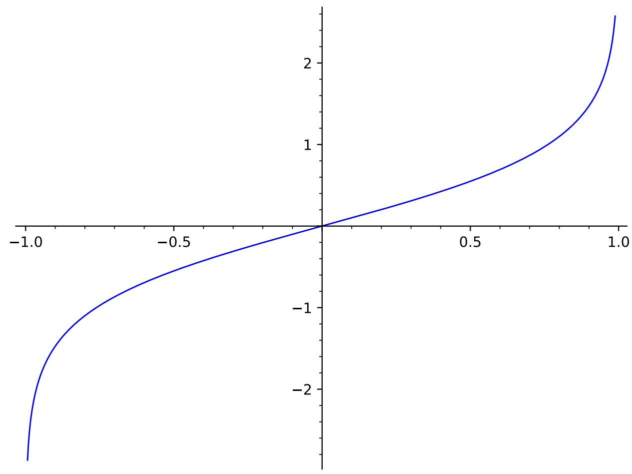
Une primitive de $\operatorname{arsinh}(x) = x \operatorname{arsinh}(x) - \sqrt{x^2+1} + C^{ste}$.



Les représentations graphiques respectivement de $x \mapsto \operatorname{Arg sh}(x)$, de sa dérivée et de sa primitive.

2.6 La fonction $x \mapsto \operatorname{Arg th}(x)$.

La fonction $x \mapsto \operatorname{th}(x)$ est inversable sur son domaine de définition $\mathbb{R}$, car elle y est bijective, son inverse est notée « Arg th » et définit la fonction « *argument tangente hyperbolique* » telle que $x \mapsto \operatorname{Arg th}(x)$.



La représentation graphique de $x \mapsto \operatorname{Arg th}(x)$.

On observe que la fonction est croissante, impaire $\operatorname{Arg sh}(-x) = -\operatorname{Arg sh}(x)$ et on observe que la fonction est continue et dérivable sur l'intervalle ouvert $]-1, 1[$.

2.6.1 Dérivée de la fonction $x \mapsto \operatorname{Arg\,th}(x)$.

On a la fonction composée $\mathrm{Id} = \mathrm{th} \circ \operatorname{Arg\,th}$ telle que $x \mapsto \mathrm{th}\left(\operatorname{Arg\,th}(x)\right) = x$ dont la dérivée s'écrit alors $1 = \operatorname{Arg\,th}' \times \mathrm{th}' \circ \operatorname{Arg\,th}$.

$$\begin{aligned} x &= \mathrm{th}\left(\operatorname{Arg\,th}(x)\right)(x) \quad \text{en dérivant, on a} \\ 1 &= \operatorname{Arg\,th}'(x) \times \mathrm{th}' \circ \operatorname{Arg\,th}(x) \quad \text{d'où} \\ \operatorname{Arg\,th}'(x) &= \frac{1}{\mathrm{th}' \circ \operatorname{Arg\,th}(x)} \quad \text{or, la dérivée de } \mathrm{th} \text{ vaut} \\ \mathrm{th}' &= 1 - \mathrm{th}^2 \quad \text{donc} \\ \mathrm{th}'\left(\operatorname{Arg\,th}(x)\right) &= 1 - \mathrm{th}^2\left(\operatorname{Arg\,th}(x)\right) = 1 - x^2 \quad \text{finalement} \\ \operatorname{Arg\,th}'(x) &= \frac{1}{1-x^2} \quad \text{on vérifie ce calcul avec Sage.} \end{aligned}$$

Vérification avec Sage

```
f(x) = arctanh(x)
g(x) = diff(f(x),x)
F(x) = integrate(f(x),x)
```

La dérivée de artanh $(x) \ = -\dfrac{1}{x^2-1}$.

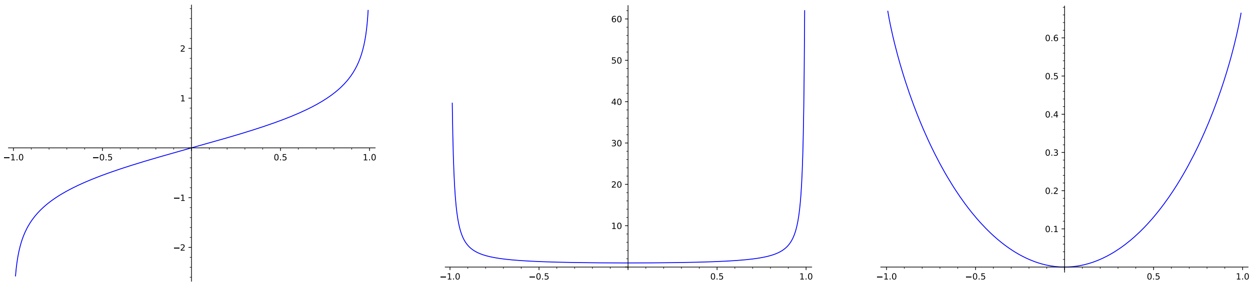
2.6.2 Calcul d'une primitive de la fonction $x \mapsto \operatorname{Arg\,th}(x)$.

Pour calculer $\displaystyle\int \operatorname{Arg\,th}(x)\,dx$, je procède par une intégration par parties en posant $u(x) = \operatorname{Arg\,th}(x)$ et $v'(x) = dx$, d'où $u'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$ et $v(x) = x$.
On a donc

$$\begin{aligned} &\int \operatorname{Arg\,th}(x)\,dx = x \operatorname{Arg\,th}(x) - \int \frac{x}{1-x^2}\,dx \quad \text{on reconnaît dans} \\ &-\int \frac{x}{1-x^2}\,dx = -\frac{1}{-2}\int \frac{d(1-x^2)}{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{d(1-x^2)}{1-x^2}\,dx \quad \text{d'où} \\ &\int \operatorname{Arg\,th}(x)\,dx = x \operatorname{Arg\,th}(x) + \frac{1}{2}\ln|1-x^2| + C^{ste} \quad \text{or } x \in]-1,1[\\ &\int \operatorname{Arg\,th}(x)\,dx = x \operatorname{Arg\,th}(x) + \frac{1}{2}\ln(1-x^2) + C^{ste} \quad \text{que l'on retrouve avec Sage.} \end{aligned}$$

Vérification avec Sage

Une primitive de $\operatorname{artanh}(x) = x \operatorname{artanh}(x) + \frac{1}{2}\log\left(-x^2+1\right) + C^{ste}$.



Les représentations graphiques respectivement de $x \mapsto \operatorname{Arg\,th}(x)$, de sa dérivée et de sa primitive.

Chapitre 3

Calcul de quelques primitives.

3.1 La fonction $x \mapsto \ln(x)$.

$$\begin{aligned}\int \ln(x) =& \int \ln(x) \times 1 \\ =& x \times \ln(x) - \int \ln(x)' \times x dx \\ =& x \times \ln(x) - \int 1 dx \\ =& x \times \ln(x) - x + C^{ste}\end{aligned}$$

3.2 La fonction $x \mapsto \exp(x)$.

$$\int \exp(x) = \exp(x)$$

3.3 Calcul d'une primitive de $x \longmapsto \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$

$\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$. Je pose $y + x = \sqrt{x^2+1}$

3.4 Calcul d'une primitive de $x \longmapsto \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$

3.5 Calcul d'une primitive de $x \longmapsto \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha^2}}$

3.5.1 Vérification avec Sage

Calcul d'une primitive de $x \longmapsto \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$ par un changement de variable puis par l'emploi d'une variable auxiliaire

Vérification avec Sage

3.6 Calcul d'une primitive de $x \longmapsto \sqrt{x^2+1}$

Vérification avec Sage

3.6.1 Calcul de la dérivée de la fonction $x \mapsto \ln(x)$.

Première Méthode

Passons par les limites pour trouver Une primitive de $\ln(x)$,
$\lim\limits_{h \mapsto 0} \dfrac{\ln(x+h)-\ln(x}{h} = \lim\limits_{h \mapsto 0} \dfrac{\ln(\frac{x+h}{x})}{h} = \lim\limits_{h \mapsto 0} \dfrac{\ln(1+X)}{x \times X}$, avec $X = \dfrac{h}{x}$.
On a donc
$\lim\limits_{h \mapsto 0} \dfrac{\ln(1+X)}{x \times X} = \dfrac{1}{x} \times \lim\limits_{h \mapsto 0} \dfrac{\ln(1+X)}{X} = \dfrac{1}{x} \times 1 = \dfrac{1}{x}$

Seconde Méthode

Pour ce calcul, il faut utiliser le calcul de la dérivée d'une fonction composée. On a $\exp((\ln(x)) = x)$, par conséquent la dérivée de cette expression s'exprime par $\exp(\ln(x)) \times (\ln(x)' = 1$, d'où $(\ln(x))' = \dfrac{1}{\exp(\ln(x))} = \dfrac{1}{x}$.

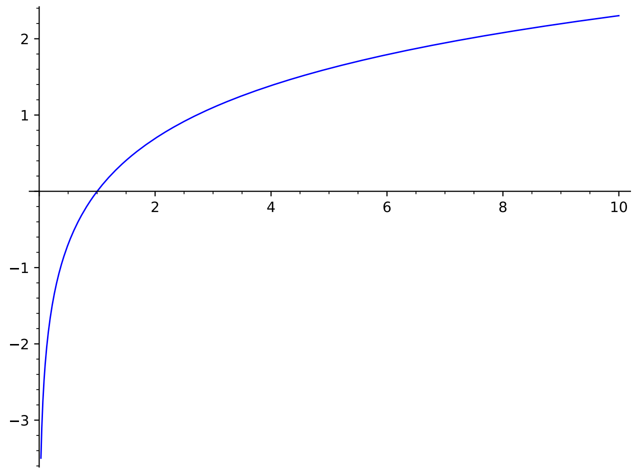
Vérification avec Sage

```
f(x) = ln(x)
```

```
g(x) = diff(f(x),x,1)
```

La dérivée de $\log(x) = \frac{1}{x}$.

Le graphe de $\log(x)$.



On peut maintenant entreprendre le calcul d'une primitive de la fonction $x \mapsto \ln(x)$.

3.6.2 Calcul d"une primitive de la fonction $x \mapsto \ln(x)$.

Je pose que $u(x)$ est égal à la fonction $\ln(x)$ et $v'(x)$ est égal 1 d'où $u'(x)$ est égal à la fonction $\frac{1}{1+x^2}$ et $v(x)$ est égal x.

Alors on a $\int \ln(x)\,dx = x \times \ln(x) - \int \frac{1}{x} \times x\,dx$.

Calcul de $\int \frac{x}{x}\,dx$.

$\int \frac{x}{x}\,dx = \int 1\,dx = x$.

Finalement $\int \ln(x)\,dx = x \times \ln(x) - x + C^{ste}$

Vérification avec Sage

```
f(x) = log(x)
F(x) = integrate(f(x),x)
```

Une primitive de $\log(x) = x\log(x) - x$.