Les primitives et les dérivées.

Louis Herzog

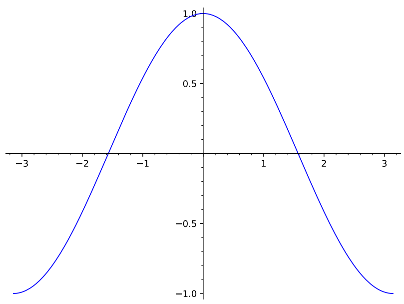
20 août 2025

Table des matières

0.1 La fonction $x \mapsto \cos(x)$.

Définissons nos fonctions dans `Sage`. Soit

```
f(x) = cos(x)
g(x) = diff(f(x),x)
F(x) = integrate(f(x),x)
```



La représentation graphique de $x \mapsto \cos(x)$ sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

La fonction est paire et périodique de période 2π.

0.1.1 Dérivée de la fonction $x \mapsto \cos(x)$.

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{\cos(x+h) - cos(x)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{\cos(x)\cos(h) - \sin(x)\sin(h) - cos(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \left(\frac{\cos(x)(\cos(h) - 1)}{h} - \frac{\sin(x)\sin(h)}{h} \right) \\
&= \cos(x) \times \lim_{h \to 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} - \sin(x) \times \lim_{h \to 0} \frac{\sin(h)}{h} \\
&= -\sin x
\end{aligned}$$

0.1.2 Calcul d'une primitive de la fonction $x \mapsto \cos(x)$.

Dans la section suivante, on calcule la dérivée de la fonction $x \mapsto \sin(x)$ qui vaut $x \mapsto \cos(x)$, par conséquent une primitive de $x \mapsto \cos(x)$ est égale, à une constante près, à $\sin(x) + C^{ste}$.

On vérifie ce résultat avec Sage. Une primitive de la fonction $x \mapsto \cos\left(x\right)$ est la fonction $x \mapsto \sin\left(x\right) + C^{ste}$ définie à une constante près.

0.2 La fonction $x \mapsto \mathrm{Arc}\cos(x)$.

La restriction de la fonction $x \mapsto \cos(x)$ à l'intervalle $[0, \pi]$ est une bijection de $[0, \pi] \to [-1, 1]$. Il existe donc une fonction réciproque à la fonction $x \mapsto \cos(x)$ que l'on nomme $x \mapsto \mathrm{Arc}\cos(x)$. C'est également une bijection, elle est continue sur l'intervalle fermé $[-1, 1]$ et est dérivable sur l'intervalle ouvert $]-1, 1[$.

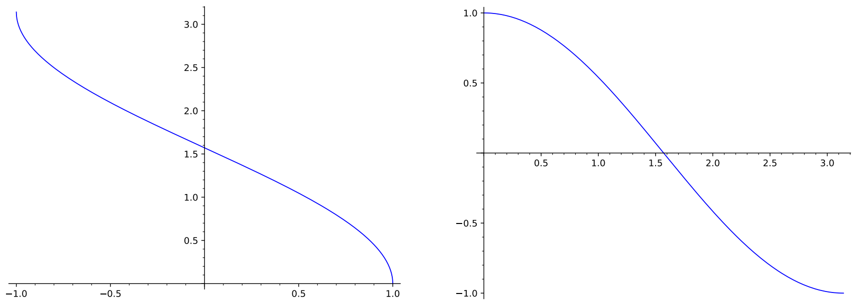
0.2.1 Calcul de la dérivée de la fonction $x \mapsto \mathrm{Arc}\cos(x)$.

Définissons nos fonctions dans `Sage`

```
f(x) = arccos(x)
g(x) = diff(f(x),x)
F(x) = integrate(f(x),x)
```

Pour ce faire, il faut utiliser le calcul de la dérivée d'une fonction composée. On a $\cos(\mathrm{Arc}\cos(x)) = x$, par conséquent la dérivée de cette expression s'exprime par $-\sin(\mathrm{Arc}\cos(x) \times \mathrm{Arc}\cos'(x) = 1$, d'où $\mathrm{Arc}\cos(x)' = \dfrac{-1}{\sin(\mathrm{Arc}\cos(x))}$.
La difficulté est maintenant de déterminer $\sin(\mathrm{Arc}\cos(x))$, or on sait que pour tout $X \in \mathbb{R}$, on a $\sin^2(X) + \cos^2(X) = 1$, d'où $\sin(X) = \sqrt{1 - \cos^2(X)}$.
En remplaçant X par $\mathrm{Arc}\cos(x)$, on a $\sin(\mathrm{Arc}\cos(x)) = \sqrt{1 - \cos^2(\mathrm{Arc}\cos(x))} = \sqrt{1 - x^2}$.
Finalement, $\mathrm{Arc}\cos'(x) = \dfrac{-1}{\sin(\mathrm{Arc}\cos(x))} = \dfrac{-1}{\sqrt{1 - \cos^2(\mathrm{Arc}\cos(x))}} = \dfrac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

On vérifie ce résultat avec Sage. La dérivée de la fonction $\mathrm{Arc}\cos\,(x)$ est la fonction $x \mapsto -\dfrac{1}{\sqrt{-x^2 + 1}}$, ce que l'on retrouve sous une écriture légèrement modifiée de Sage.



Les représentations graphiques de $x \mapsto \mathrm{Arc}\cos\,(x)$ et de $x \mapsto \cos(x)$.

On peut maintenant entreprendre le calcul de la primitive de la fonction $x \mapsto \mathrm{Arc}\cos(x)$.

0.2.2 Calcul de la primitive de la fonction $x \mapsto \mathrm{Arc}\cos(x)$.

Je pose que $u(x)$ est égal à la fonction $\mathrm{Arc}\cos(x)$ et $v'(x)$ est égal dx d'où $u'(x)$ est égal à la fonction $\dfrac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$ et $v(x)$ est égal x. Alors on a, par une intégration par parties, $\displaystyle\int \mathrm{Arc}\cos(x)\,dx = x \times \mathrm{Arc}\cos(x) - \int \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}} \times x\,dx = x\,\mathrm{Arc}\cos(x) + \int \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx$.

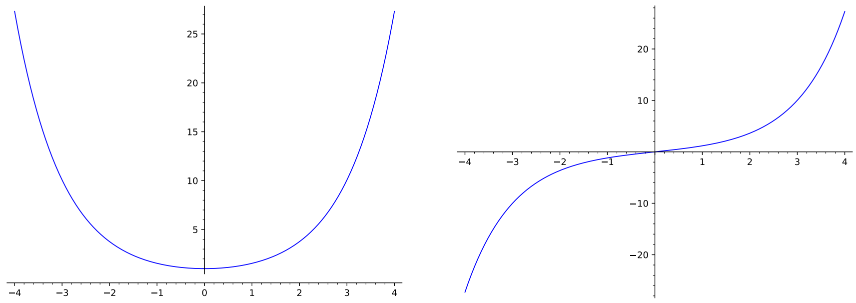
Calcul de $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx$. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx = \frac{-1}{2} \int \frac{d(1 - x^2)}{\sqrt{1 - x^2}} = -\sqrt{1 - x^2}$.
Finalement, $\displaystyle\int \mathrm{Arc}\cos(x)\,dx = x\,\mathrm{Arc}\cos(x) - \sqrt{1 - x^2} + C^{ste}$ est une primitive de la fonction $x \mapsto \mathrm{Arc}\cos(x)$.

On vérifie ce résultat avec Sage. Une primitive de $\mathrm{Arc}\cos(x) = x\,\mathrm{Arc}\cos(x) - \sqrt{-x^2+1} + C^{ste}$.

0.3 La fonction $x \mapsto \mathrm{ch}(x)$.

Définissons nos fonctions dans Sage

```
f(x) = cosh(x)
g(x) = diff(f(x),x)
F(x) = integrate(f(x),x)
```



La représentation graphique de $x \mapsto \mathrm{ch}(x)$ et de sa dérivée.

0.3.1 Dérivée de la fonction $x \mapsto \mathrm{ch}(x)$.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{ch}(x)' &= \left(\frac{\exp(x)+\exp(-x)}{2}\right)' \\
&= \frac{\exp(x)'+\exp(-x)'}{2} \\
&= \frac{\exp(x)-\exp(-x)}{2} \\
&= \mathrm{sh}(x)
\end{aligned}
$$

0.3.2 Calcul d'une primitive de la fonction $x \mapsto \mathrm{ch}(x)$.

$\displaystyle\int \mathrm{ch}(x)dx = \int \frac{\exp(x)+\exp(-x)}{2}dx = \frac{1}{2}\times\int \exp(x)dx + \frac{1}{2}\times\int \exp(-x)dx = \frac{\exp(x)-\exp(-x)}{2} =$ $\mathrm{sh} + C^{ste}$

On vérifie ce résultat avec Sage. Une primitive de $\mathrm{ch}(x) = \mathrm{sh}(x) + C^{ste}$.

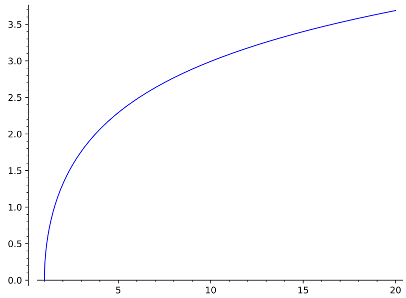
0.4 La fonction $x \mapsto \mathrm{Arg}\,\mathrm{ch}(x)$.

Définissons nos fonctions dans Sage

```
f(x) = arccosh(x)
g(x) = diff(f(x),x)
F(x) = integrate(f(x),x)
```

Le cosinus hyperbolique, noté ch est défini sur $\mathbb{R}$ selon l'expression $\dfrac{\exp(x)+\exp(-x)}{2}$, son domaine de valeurs est $[1,+\infty[$ c'est une fonction paire c'est-à-dire $\mathrm{ch}(-x)=\mathrm{ch}(x)$.

La fonction $x \mapsto \mathrm{ch}(x)$ est inversible sur le domaine de définition restreint à $\mathbb{R}^+$, car elle y est bijective, son inverse est notée « Arg ch » et définit la fonction « *argument cosinus hyperbolique* » telle que $x \mapsto \mathrm{Arg\,ch}(x)$.



La représentation graphique de $x \mapsto \mathrm{Arg\,ch}(x)$.

On observe que la fonction est croissante, continue sur $[1\,,\,+\infty[$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]1\,,\,+\infty[$.

0.4.1 Dérivée de la fonction $x \mapsto \mathrm{Arg\,ch}(x)$.

On a la fonction composée $\mathrm{Id} = \mathrm{ch} \circ \mathrm{Arg\,ch}$ telle que $x \mapsto \mathrm{ch}\left(\mathrm{Arg\,ch}(x)\right) = x$ dont la dérivée s'écrit alors $1 = \mathrm{Arg\,ch}' \times \mathrm{ch}' \circ \mathrm{Arg\,ch}$.

$$
\begin{aligned}
x &= \mathrm{ch}\left(\mathrm{Arg\,ch}(x)\right)(x) \quad \text{en dérivant, on a} \\
1 &= \mathrm{Arg\,ch}'(x) \times \mathrm{ch}' \circ \mathrm{Arg\,ch}(x) \quad \text{d'où} \\
\mathrm{Arg\,ch}'(x) &= \frac{1}{\mathrm{ch}' \circ \mathrm{Arg\,ch}(x)} = \frac{1}{\mathrm{sh}\left(\mathrm{Arg\,sh}(x)\right)} \quad \text{or, on sait que} \\
1 &= \mathrm{ch}^2\left(\mathrm{Arg\,ch}(x)\right) - \mathrm{sh}^2\left(\mathrm{Arg\,ch}(x)\right) \quad \text{alors} \\
\mathrm{sh}\left(\mathrm{Arg\,ch}(x)\right) &= \sqrt{\mathrm{ch}^2\left(\mathrm{Arg\,ch}(x)\right) - 1} = \sqrt{x^2-1} \quad \text{finalement} \\
\mathrm{Arg\,ch}'(x) &= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad \text{on vérifie ce calcul avec Sage.}
\end{aligned}
$$

On vérifie ce résultat avec Sage. La dérivée de $\mathrm{arcosh}\,(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}\sqrt{x-1}}$.

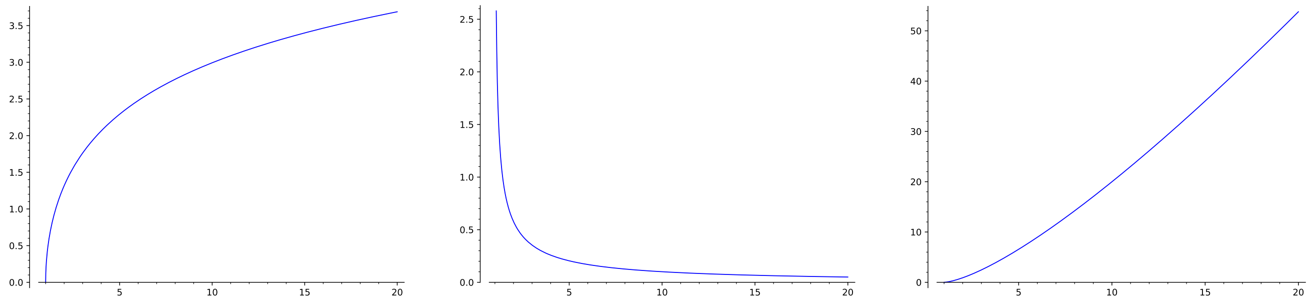
0.4.2 Calcul d'une primitive de la fonction $x \mapsto \operatorname{Arg ch}(x)$.

Pour calculer $\displaystyle\int \operatorname{Arg ch}(x)\,dx$, on procède par une intégration par parties en posant $u(x) = \operatorname{Arg ch}(x)$ et $v'(x) = dx$, d'où $u'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ et $v(x) = x$.

On a donc

$$\int \operatorname{Arg ch}(x)\,dx = x\operatorname{Arg ch}(x) - \int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx \quad \text{or}$$
$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \int \left(\sqrt{x^2-1}\right)'\,dx = \sqrt{x^2-1} \quad \text{d'où}$$
$$\int \operatorname{Arg ch}(x)\,dx = x\operatorname{Arg ch}(x) - \sqrt{x^2-1} + C^{ste}$$

On vérifie ce résultat avec Sage. Une primitive de $\operatorname{arcosh}(x) = x\operatorname{arcosh}(x) - \sqrt{x^2-1} + C^{ste}$.

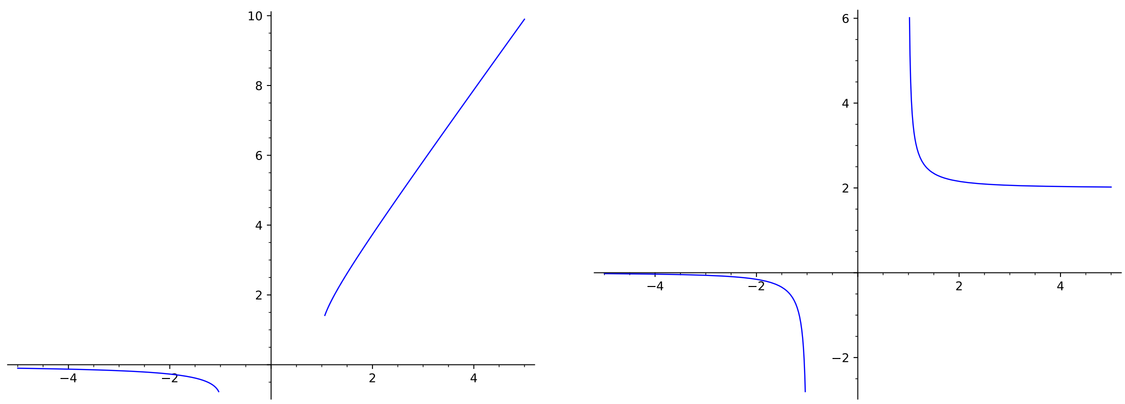


Les représentations graphiques respectivement de $x \mapsto \operatorname{Arg ch}(x)$, de sa dérivée et de sa primitive.

0.5 Calcul d'une primitive de $x \longmapsto \dfrac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$.

Je pose $y - x = \sqrt{x^2-1}$ avec $y - x = \sqrt{x^2-1} \geqslant 0$, donc $y \geqslant x$.

Quel est le signe de y c'est-à-dire le signe de $x + \sqrt{x^2-1}$?



La représentation graphique de $x + \sqrt{x^2-1}$ et de sa dérivée.

En élevant au carré, on a

$$\begin{aligned}
(y-x)^2 &= x^2-1 \\
y^2-2yx+x^2 &= x^2-1 \\
y^2-2yx &= -1 \quad \text{puis en différentiant chaque variable} \\
2ydy-2dy\times x-2ydx &= 0 \\
(y-x)dy &= ydx \\
\frac{dy}{y} &= \frac{dx}{(y-x)} = \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} \\
\int \frac{dy}{y} = \ln|y| + C^{ste} &= \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}dx \quad \text{or } y = x+\sqrt{x^2-1} \geqslant 0 \\
\ln(x+\sqrt{x^2-1}) + C^{ste} &= \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}dx
\end{aligned}$$

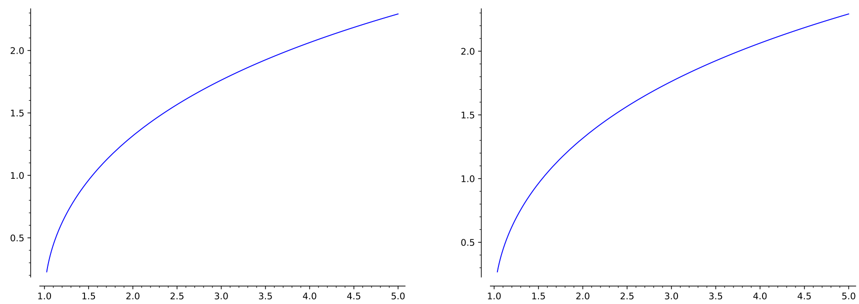
Or, nous avons déjà vu en **??**, page **??** que la dérivée de la fonction $x \mapsto \operatorname{Arg sh}(x)$ vaut $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ ce qui implique que $\ln(x+\sqrt{x^2-1}) + C^{ste} = \operatorname{Arg sh}(x)$. Montrons-le !

0.5.1 Avons nous $\operatorname{Arg ch}(x) = \ln(x+\sqrt{x^2-1})$?

Posons $y = \operatorname{Arg ch}(x)$, comme $\operatorname{Arg ch}$ est la fonction inverse de ch, on a $\operatorname{ch}(y) = \dfrac{\exp(y)+\exp(-y)}{2} = x$ d'où $2x = \exp(y)+\exp(-y)$ et en multipliant par $\exp(y)$, on obtient l'équation du second degré en $\exp(y)$,

$$(\exp(y))^2 - 2x\exp(y) + 1 = 0, \tag{1}$$

dont le discriminant Δ vaut $4x^2-4 \neq 0$, ainsi les solutions s'écrivent $\exp(y_1) = x + \dfrac{\sqrt{4x^2-4}}{2} = x+\sqrt{x^2-1}$ et $\exp(y_2) = x - \dfrac{\sqrt{4x^2-4}}{2} = x-\sqrt{x^2-1}$.
On ne retient que la solution $\exp(y) = x+\sqrt{x^2-1}$ puisque la fonction exponentielle est toujours positive et que $\exp(y_2) = x-\sqrt{x^2-1} < 0$.
Finalement, $y = \operatorname{Arg ch}(x) = \ln(x+\sqrt{x^2-1})$.



Les représentations graphiques de $\ln(x+\sqrt{x^2-1})$ et de $\operatorname{Arg ch}(x)$.

Nous avons montré l'égalité $\operatorname{Arg ch}(x) = \ln(x+\sqrt{x^2-1})$.