Chapitre 12 : DÉRIVABILITÉ

I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.
Sauf précision, f est une fonction de I dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Nombre dérivé, fonction dérivée

I.1 Définitions

DÉFINITION

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ et $a \in I$.

f est dérivable en a si la fonction **taux d'accroissement de f en a**, *définie sur $I \setminus \{a\}$ par : $x \mapsto \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$, admet une limite en a.*
Cette limite est dans ce cas notée $f'(a)$, c'est la **dérivée de f en a**.

Si le taux d'accroissement admet une limite à droite (resp. à gauche) en a, on la note $f'_d(a)$ (resp. $f'_g(a)$), c'est la dérivée à droite (resp. à gauche) en a de f.

PROPRIÉTÉS

1) f est dérivable en a si, et seulement si, $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ existe et est finie.

2) f est dérivable en a si, et seulement si, $\mathcal{R}\mathrm{e}(f)$ et $\mathcal{I}\mathrm{m}(f)$ le sont, et alors :

$$f'(a) = (\mathcal{R}\mathrm{e}(f))'(a) + \mathrm{i}(\mathcal{I}\mathrm{m}(f))'(a)$$

3) f est dérivable en $a \in \overset{\circ}{I}$ si, et seulement si, f admet des dérivées à droite et à gauche en a, et qu'elles sont égales.

4) f est dérivable en a si, et seulement si, il existe un scalaire l tel que

$$f(x) = f(a) + (x-a)l + (x-a)\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$$

Si f est dérivable en a, on a donc le **développement limité de f en a à l'ordre 1** :

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \underset{x \to a}{o}(x-a)$$

5) f, à valeurs réelles, est dérivable en a si, et seulement si, le graphe de f au point $(a, f(a))$ admet une tangente non verticale.

$\boxed{\text{L'équation de cette tangente est : } y = f(a) + f'(a)(x-a)}$

6) Si f est dérivable en a (resp. sur I), alors f est continue en a (resp. sur I).
La réciproque est fausse.

1▶

DÉFINITION

f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point de I.
Ceci définit alors sa fonction dérivée f' de I dans $\mathbb{K}$.

Pratique 1 :

Donner parmi les fonctions suivantes celles qui sont dérivables au point proposé.
Dans l'affirmative, préciser cette dérivée ainsi que le développement limité obtenu :

1. $x \mapsto x^n$ pour n naturel, en a **2.** $x \mapsto \mathrm{e}^x$ en 0 **3.** sin puis cos en 0 **4.** tan en 0
5. Arctan en 0 **6.** $x \mapsto \sqrt{x}$ en 0 **7.** $x \mapsto \ln(1+x)$ en 0

DÉFINITION

$D(I, \mathbb{K})$: ensemble des fonctions dérivables sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

$C^1(I, \mathbb{K})$: ensemble des fonctions dérivables et de dérivée continue sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

I.2 Opérations

THÉORÈME D'OPÉRATIONS :

- *Soit f et g deux fonctions dérivables en a et λ un scalaire. Alors :*

  - $\lambda f + g$ est dérivable en a et *(transfert aux combinaisons linéaires)*
  $(\lambda f + g)'(a) = \lambda f'(a) + g'(a)$

  - fg est dérivable en a et $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$ *(transfert au produit)*

  - si $g(a) \neq 0$, $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en a

  et $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$, *(transfert au quotient sous condition)*

  en particulier $\left(\dfrac{1}{g}\right)'(a) = -\dfrac{g'(a)}{g^2(a)}$

- *Soit f réelle et dérivable en a, et g dérivable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a*
  et : $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)).f'(a)$ *(transfert à la composition)*

2▶

THÉORÈME DU DIFFÉOMORPHISME :

Soit f bijective et continue entre deux intervalles I et J de $\mathbb{R}$.

Si f est dérivable en $a \in I$ et si $f'(a) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $f(a)$ et :

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$$

En particulier, si f est dérivable sur I et que f' ne s'annule pas sur I, alors f^{-1} est dérivable sur J et : $(f^{-1})' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$

f est alors un difféomorphisme : une bijection dérivable et de réciproque dérivable.

3▶

Exemples : $\sqrt{\ }$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, exp sur $\mathbb{R}$, Arcsin et Arccos sur $]-1, 1[$, Arctan sur $\mathbb{R}$.

Schématiquement, quand les opérations et les expressions suivantes ont un sens, une combinaison linéaire, un produit, un quotient, une composition, une réciproque, est dérivable avec :

$$(\lambda f+g)' = \lambda f' + g', \quad (fg)' = f'g + fg', \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g-fg'}{g^2}$$

$$(g\circ f)' = g'(f).f', \quad (f^{-1})' = \frac{1}{f'\circ f^{-1}}$$

Pratique 2 :

1. Dérivée de la fonction au point donné :

a) $x \mapsto x^2 \mathrm{e}^{\sqrt{x}}$ en 1 b) $x \mapsto \mathrm{Arctan}(x+\sin(x))$ en 0 c) $x \mapsto \dfrac{\tan x}{1+x}$ en 0

2. Montrer que $x \mapsto x+\ln(x+1)$ définit un différomorphisme de $]-1,+\infty[$ sur J à préciser. Donner sa dérivée en 0 ainsi que celle de sa réciproque en 0.

II À quoi sert une dérivée ?

II.1 Extrema locaux et points critiques

f désigne ici une fonction dérivable sur I et à valeurs réelles, et a est un point de I.

DÉFINITION

- $*$ *a est un* **point critique** *de f si $f'(a)=0$.*
- $*$ *f admet un maximum local, ou relatif, en a si $f(x) \leqslant f(a)$ pour x au voisinage de a.*
- $*$ *f admet un minimum local, ou relatif, en a si $f(x) \geqslant f(a)$ pour x au voisinage de a.*
- $*$ *Ce maximum (ou minimum) est strict si les inégalités précédentes sont strictes pour $x \neq a$.*
- $*$ *Un maximum (ou minimum) est global si les inégalités précédentes sont vérifiées sur I entier.*
- $*$ *Un extremum est un maximum ou un minimum.*

4▶

THÉORÈME

Si un point a intérieur à I procure un extremum pour f, alors c'est un point critique de f.
Réciproque fausse : un point critique qui ne donne pas un extremum s'appelle un **point selle**.

5▶

Comment rechercher les extrema de f ?

1) Rechercher les points critiques a de f intérieurs à I ;

2) Étudier alors le signe de $f-f(a)$ au voisinage du point a candidat :
- si $f(x)-f(a)$ conserve un signe fixe au voisinage de a, a procure un extremum local,
- sinon a est un point selle.

3) Une extrémité a de I peut aussi procurer un extremum local : étudier $f(x)-f(a)$ pour $x \in I$.

4) Éventuellement, chercher alors parmi les extrema locaux ceux qui peuvent être globaux.

6▶

Pratique 3 :

Extrema locaux de $x \mapsto x\mathrm{e}^{-x}$ sur $\mathbb{R}$, puis sur $\mathbb{R}_+$.

II.2 Le théorème de Rolle

Théorème de Rolle :

> *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.*
>
> *On suppose que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in \,]a,b[$ tel que : $f'(c) = 0$*

7▶

II.3 Le théorème des accroissements finis

Théorème des accroissements finis :

> *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.*
>
> *Alors il existe $c \in \,]a,b[$ tel que : $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$*

8▶

Théorème (Inégalités des accroisements finis) :

> *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.*
>
> $*$ *On suppose que $a < b$ et qu'il existe m et M tels que : $\forall x \in \,]a,b[$, $m \leqslant f'(x) \leqslant M$*
>
> *Alors : $m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b-a)$*
>
> $*$ *On suppose qu'il existe M tel que : $\forall x \in \,]a,b[$, $|f'(x)| \leqslant M$*
>
> *Alors : $|f(b) - f(a)| \leqslant M|b-a|$*

9▶

Théorème (inégalité des accroissements finis, cas complexe) :

> *Soit f continue sur $[a,b]$, de classe C^1 sur $]a,b[$, et à valeurs complexes.*
>
> *S'il existe un réel M tel que pour tout $t \in \,]a,b[$ on ait $|f'(t)| \leqslant M$, alors*
>
> $$|f(b) - f(a)| \leqslant M|b-a|$$

10▶

Pratique 4 :

Montrer que pour tout x dans $[-\pi/2, \pi/2]$: $|\sin(x)| \leqslant |x|$, puis : $|1-\cos(x)| \leqslant \dfrac{x^2}{2}$, puis : $|x - \sin(x)| \leqslant \dfrac{|x|^3}{6}$. En particulier : $\sin(x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$

II.4 Une caractérisation des fonctions constantes

Théorème

> *Soit f à valeurs complexes, continue sur un intervalle I et dérivable sur $\overset{\circ}{I}$.*
>
> *Alors f est constante sur I si, et seulement si, $f' = 0$ sur $\overset{\circ}{I}$.*

11▶

II.5 Une caractérisation des fonctions k-lipschitziennes

Proposition

> *Soit f à valeurs complexes, dérivable sur un intervalle I.*
>
> *Alors f est k-lipschitzienne sur I si, et seulement si, f' est bornée sur I.*

12▶

II.6 Une caractérisation des fonctions dérivables monotones

Théorème

> *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I et dérivable sur $\overset{\circ}{I}$. Alors :*
>
> *$*$ f est croissante sur I si, et seulement si, $f' \geqslant 0$ sur $\overset{\circ}{I}$.*
>
> *$*$ f est décroissante sur I si, et seulement si, $f' \leqslant 0$ sur $\overset{\circ}{I}$.*
>
> *$*$ f est strictement croissante sur I si, et seulement si, $f' \geqslant 0$ sur $\overset{\circ}{I}$ et il n'existe pas d'intervalle non réduit à un point sur lequel $f' = 0$.*
> *En particulier, si $f' > 0$ sur $\overset{\circ}{I}$, alors f est strictement croissante.*
>
> *$*$ f est strictement décroissante sur I si, et seulement si, $f' \leqslant 0$ sur $\overset{\circ}{I}$ et il n'existe pas d'intervalle non réduit à un point sur lequel $f' = 0$.*
> *En particulier, si $f' < 0$ sur $\overset{\circ}{I}$, alors f est strictement décroissante.*

13▶

Pratique 5 :

Montrer que : $x \mapsto x + \sin x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

II.7 Le théorème du prolongement D (resp. C^1)

Théorème du prolongement D (resp. C^1) :

> *Soit f continue sur $[a, b]$ et dérivable (resp. C^1) sur $]a, b]$.*
> *On suppose que f' admet une limite l en a.*
> *Alors f est dérivable en a de dérivée l, donc f est dérivable (resp. C^1) sur $[a, b]$.*

14▶

Pratique 6 :

Vérifier que f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $x \mapsto \mathrm{e}^{-1/x}$ se prolonge sur $\mathbb{R}_+$ en une fonction de classe C^1.

II.8 Rappels sur les suites récurrentes de type $u_{n+1} = f(u_n)$

On étudie la suite donnée par u_0 et pour $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est dérivable.

On évalue le comportement qualitatif (convergence/divergence) et quantitatif (vitesse de convergence/divergence) de (u_n) au voisinage de l grâce au théorème des accroissement finis :

$$\boxed{u_{n+1} - l = f(u_n) - f(l) = (u_n - l)f'(c_n)}$$

pour un c_n dans $]u_n, l[$.

15▶

III Dérivées d'ordres supérieurs

III.1 Définitions

Soit $f : I \to \mathbb{K}$. Si f' existe sur I, elle peut être dérivable, etc.

• Soit $n \in \mathbb{N}$. Si c'est possible, la dérivée n-ième de f se définit par récurrence :

$$f^{(0)} = f \text{ et si } f^{(n)} \text{ existe et est dérivable, } f^{(n+1)} = (f^{(n)})'.$$

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

f est n fois dérivable en $a \in I$ si $f^{(n-1)}$ est définie au voisinage de a et dérivable en a.

f est n fois dérivable sur I si $f^{(n-1)}$ est définie et dérivable sur I.

$D^n(I, \mathbb{K})$ est l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{K}$ et n fois dérivables.

$C^n(I, \mathbb{K})$ est l'ensemble des fonctions de $D^n(I, \mathbb{K})$ de dérivée n-ième continue sur I.

f est de classe C^n sur I
- si, et seulement si, f est de classe C^{n-1} sur I et $f^{(n-1)}$ de classe C^1 sur I
- si, et seulement si, f est dérivable sur I et f' de classe C^{n-1} sur I.

• $C^\infty(I, \mathbb{K})$ est l'ensemble des fonctions appartenant à $C^n(I, \mathbb{K})$ pour tout naturel n.

16▶

III.2 Propriétés déduites de celles des fonctions dérivables

Soit f et g deux fonctions n fois dérivables en a et λ un scalaire.

• **Théorèmes d'opérations** :

$*$ $\lambda f + g$ est n fois dérivable en a et : $(\lambda f + g)^{(n)}(a) = \lambda f^{(n)}(a) + g^{(n)}(a)$

$*$ **Formule de Leibniz** : fg est n fois dérivable en a et : $\boxed{(fg)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(a).g^{(n-k)}(a)}$

$*$ si $g(a) \neq 0$, $\dfrac{f}{g}$ est n fois dérivable en a.

$*$ Soit f réelle et n fois dérivable en a, et g, n fois dérivable en $f(a)$.
Alors $g \circ f$ est n fois dérivable en a (mais pas de formule « simple »).

• **Théorème du difféomorphisme de classe** C^n : Soit f bijective et continue entre deux intervalles I et J de $\mathbb{R}$.

On suppose que f est n fois dérivable sur I et que f' ne s'annule pas sur I.
Alors f^{-1} est n fois dérivable sur J et $(f^{-1})' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

Si de plus f est de classe C^n sur I, alors f^{-1} est de classe C^n sur J.

f est alors un difféomorphisme de classe C^n (bijective de réciproque comme elle de classe C^n).

On a le même résultat en remplaçant C^n par C^∞.

17▶

Exemples : $\sqrt{\ }$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$, Arcsin et Arccos sur $]-1,1[$, Arctan sur $\mathbb{R}$, ln sur $\mathbb{R}_+^*$.

• Extensions de la formule des accroissements finis : formules de Tayor chapitres suivants.

• **Le théorème du prolongement** C^n : Soit f continue sur $[a,b]$ et de classe C^n sur $]a,b]$.
On suppose que pour tout $r \in [\![1,n]\!]$, $f^{(r)}$ admet une limite l_r en a.
Alors f est de classe C^n sur $[a,b]$ et pour tout $r \in [\![1,n]\!]$, $f^{(r)}(a) = l_r$.

18▶

Pratique 7 :

Vérifier que : $x \mapsto (1+x^2)\,\mathrm{e}^x$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et calculer ses dérivées successives.

IV Convexité d'une fonction numérique

Dans tout ce paragraphe, f est une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles.

IV.1 Définitions

Définition

La fonction f est **convexe** *si :*

$$\forall (x,y) \in I^2, \quad \forall \lambda \in [0,1], \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

Si $-f$ est convexe, on dit que f est **concave**.

19▶

Cette définition se généralise en une définition équivalente utilisant l' **inégalité de Jensen** :

Proposition

La fonction f est convexe si, et seulement si, :
pour tout naturel $n \geqslant 2$, tous réels positifs λ_1 ... λ_n de somme 1 et tous réels x_1 ... x_n de I,

$$f(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

20▶

IV.2 Fonctions pentes

Définition

> *Soit $a \in I$. La fonction pente en a de f, notée p_a, est définie sur $I \setminus \{a\}$ par : $x \mapsto \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$*

21▶

Propriétés

1) Pour tout a de I, p_a est de même régularité que f sur $I \setminus \{a\}$
2) Si f est dérivable en $a \in I$, alors p_a est continue en a.

22▶

Théorème de caractérisation de la convexité par les fonctions pentes :

> *La fonction f est convexe sur I si, et seulement si, ses fonctions pentes associées sont croissantes sur I.*

23▶

Corollaire

> *En tout point intérieur à son domaine, une fonction convexe est continue, dérivable à droite et à gauche, avec $f'_g \leqslant f'_d$.*

24▶

IV.3 Caractérisation des fonctions convexes dérivables

Propriétés

Si f est convexe et dérivable, son graphe se situe au-dessus de ses tangentes en tout point.

25▶

Théorème

> *a) f, dérivable de I dans $\mathbb{R}$, est convexe si, et seulement si, f' est croissante sur I.*
> *b) f, deux fois dérivable de I dans $\mathbb{R}$, est convexe si, et seulement si, f'' est positive sur I.*

26▶

Corollaire

> *Le graphe d'une fonction f de classe C^2 sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ possède un* **point d'inflexion** *(ou change de concavité) en x_0 lorsque f'' s'annule et change de signe en x_0.*

Pratique 8 :

1. Vérifier que les fonctions affines sur un intervalles sont convexes.
Qu'en est-il des fonctions affines « par morceaux » ?

2. Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont convexes ? concaves ?
a) exp b) ln c) $x \mapsto x^p$ (p naturel) d) $\lfloor\ \rfloor$

3. Que dire de la concavité de sin sur $[0, \pi/2]$? En déduire : $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\frac{2}{\pi}x \leqslant \sin x \leqslant x$

SAVOIR...

1) *... écrire et utiliser les différentes définitions équivalentes du nombre dérivée en un point*

2) *... justifier la classe d'une fonction à partir des théorèmes d'opérations*

3) *... utiliser les propriétés de la dérivée pour estimer une différence entre deux valeurs prises par une fonction (égalité et inégalité des accroissements finis, application à l'étude des suites de type $u_{n+1} = f(u_n)$)*

4) *... faire le lien entre bijectivité, signe de la dérivée, stricte monotonie pour une fonction définie sur un intervalle*

5) *... écrire et utiliser la formule de Leibniz*

6) *... connaître les caractérisations de la convexité, adapter suivant l'hypothèse de régularité*

THÉORÈMES et PROPOSITIONS...	**... OUTILS pour...**
Théorème d'opérations sur fonctions n fois dérivables dont formule de Leibniz Théorème du difféomorphisme C^n	*Dérivabilité et dérivations par calculs*
Théorème points critiques/extrema	*Recherche des extrema d'une fonction*
Théorème de Rolle	*Existence de zéros d'une dérivée*
Th. des accroissements finis (égalité, inégalités)	*Évaluation d'un accroissement par la dérivée*
Caractérisation des fonctions constantes, lipschitziennes	
Caractérisation de la (stricte) monotonie	*Étude des variations*
Théorème du prolongement C^n	*Régularité d'une fonction prolongée*
Théorèmes de caractérisation de la convexité : par l'inégalité de Jensen par la croissance des fonctions pentes par la croissance de la dérivée si existe par la positivité de la dérivée seconde si existe	*Convexité suivant régularité*