►► 7 : SYSTÈMES LINÉAIRES - MATRICES

1►

$*$ Par exemple : $\begin{cases} 2x & + & 3y & - & z & = & 1 \\ x & - & y & - & 2z & = & 0 \end{cases}$ est un système de deux équations ($n = 2$) et 3 inconnues ($p = 3$), de matrice associée $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, de second membre représenté par le vecteur $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
A comporte autant de lignes que d'équations de (S), et autant de colonnes que d'inconnues et que de lignes du second membre.
Il n'est pas facile à priori de savoir si son ensemble de solutions est non vide, encore moins d'avoir l'ensemble exact de ses solutions.

$*$ Observez le lien entre la notation matricielle $AX = B$ et l'écriture en équations du système : c'est ainsi qu'on "multiplie" une matrice par un vecteur (colonne), le nombre de colonnes de A devant correspondre aux nombre de lignes de X, et le nombre de lignes de A donnant le nombre de ligne du résultat de cette multiplication, ici B.

$*$ Il est très facile de fabriquer des systèmes incompatibles : par exemple $\begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$

$*$ Ces systèmes sont dits linéaires parce que l'ensemble des solutions du système homogène (H) forme un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$, au sens où il est non vide car contient le vecteur nul, et que toute combinaison linéaire de solutions de (H) (de la forme $\lambda X_1 + X_2$ avec X_1 et X_2 deux solutions de (H) et λ un scalaire) est encore solution de (H).
La linéarité se reconnaît à la forme générale du système : il n'y figure en premier membre ni constante, ni produit (ni puissances) d'inconnues, ni fonctions usuelles comme $\sqrt{\ }$, ln, exp, etc.

Pratique 1 :

$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + 3y = 2 \\ -x - 2y = 0 \end{cases}$, avec $n = 3$ équations et $p = 2$ inconnues, incompatible à cause des équations 1 et 3.

2►

$*$ Voici un exemple simple avec un système à une équation et trois inconnues : $x + y - z = 1$. L'ensemble des solutions du système homogène associé : $x + y - z = 0$ est formé des vecteurs de la forme $\begin{pmatrix} -y + z \\ y \\ z \end{pmatrix}$ pour y et z scalaires quelconques, ce qui s'écrit encore : $y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ pour y et z scalaires quelconques.
L'ensemble des solutions de (H) est donc formé des combinaisons linéaires des deux vecteurs $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, ce qu'on note : $\mathcal{S}(H) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$
De même, l'ensemble des solutions du système : $x + y - z = 1$ est formé des vecteurs de la forme $\begin{pmatrix} 1 - y + z \\ y \\ z \end{pmatrix}$ pour y et z scalaires quelconques, ce qui s'écrit encore : $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ pour y et z scalaires quelconques.
L'ensemble des solutions de (S) est donc formé des sommes de la solution particulière $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et des combinaisons linéaires des deux vecteurs $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. On note : $\mathcal{S}(S) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

C'est ce qu'on appelle le sous-espace affine de $\mathbb{K}^3$ passant par le point $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et de direction $\mathcal{S}(H)$.

$*$ *Preuve du théorème* : De façon générale, $\mathcal{S}(H)$ contient toujours le vecteur nul, et si X et Y vérifient (H), et si $\lambda \in \mathbb{K}$, alors de $AX = 0$ et $AY = 0$ on déduit $A(\lambda X + Y) = 0$. Il faut le vérifier par calcul direct, ou voir équation par équation que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, avec des notations naturelles : $\sum\limits_{j=1}^{p} a_{i,j}(\lambda x_j + y_j) = \lambda \sum\limits_{j=1}^{p} a_{i,j}x_j + \sum\limits_{j=1}^{p} a_{i,j}y_j = 0$.
Cela montre la structure de sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$ de $\mathcal{S}(H)$.
Enfin, si X_0 est une solution de (S), c'est-à-dire si $AX_0 = B$, alors pour toute solution X de (H) (vérifiant $AX = 0$) on a $A(X_0 + X) = AX_0 + AX = B + 0 = B$ donc $X_0 + X$ est bien solution de (S). Inversement, si Y est solution de (S), alors de $AX_0 = AY = B$ on obtient $A(Y - X_0) = 0$, donc $Y = X_0 + (Y - X_0)$ est bien la somme de X_0 et d'une solution de (H). $\square$

$*$ Il y a quelques systèmes avec lesquels on sait se débrouiller facilement. Par exemple, si A est diagonale, les équations sont découplées de forme $a_{i,i}x_i = b_i$, et c'est simple à résoudre...

3▶

A triangulaire inférieure signifie de même que les coefficients de A situés strictement au-dessus de la diagonale principale sont nuls.

Une matrice diagonale est donc une matrice à la fois triangulaire supérieure et triangulaire inférieure.

Par exemple : $\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & 1 \\ & & 2y & - & z & = & 3 \\ & & & & 5z & = & -1 \end{array}\right.$ est un système triangulaire supérieur.

4▶

Preuve : Par récurrence sur le nombre n d'équations.
Si $n = 1$, le système s'écrit : $a_{1,1}x_1 = b_1$, qui admet pour unique solution $x_1 = b_1/a_{1,1}$ si $a_{1,1}$ est non nul, n'admet pas de solution si $a_{1,1} = 0$ et $b_1 \neq 0$, et admet tout scalaire comme solution si $a_{1,1} = b_1 = 0$.
Soit $n \geqslant 2$, et supposons le résultat établi pour tout système triangulaire de m équations avec $m \leqslant n-1$. Considérons alors un système triangulaire supérieur à n équations, le raisonnement étant symétrique en cas de système triangulaire inférieur. Notons l'équation numéro i : $\sum\limits_{j=i}^{n} a_{i,j}x_i = b_i$, cela pour $i \in [\![1, n]\!]$.
Si tous les $a_{i,i}$ sont non nuls, la dernière équation donne une unique solution pour $x_n = b_n/a_{n,n}$ puisque $a_{n,n} \neq 0$. En remplaçant x_n par cette valeur dans les équations précédentes, on obtient un système triangulaire supérieur à $n-1$ équations en les $n-1$ inconnues x_1, ...,x_{n-1} (on "passe" tous les x_n en second membre), et dont tous les coefficients diagonaux sont non nuls. Par hypothèse de récurrence, ce système admet une unique solution en $(x_1, ..., x_{n-1})$, et finalement le système de départ admet bien une unique solution en $(x_1, ..., x_n)$.
Sinon, soit i_0 le plus grand indice tel que $a_{i_0,i_0} = 0$. Si $i_0 < n$, le système constitué des équations suivantes (de i_0 à n) est triangulaire supérieur en les inconnues $(x_{i_0+1}, ..., x_n)$ et à éléments diagonaux non nuls donc à solution unique en ces inconnues par hypothèse de récurrence. En passant ces inconnues dans le second membre et en les remplaçant par ces valeurs, on obtient avec les i_0 premières équations un système triangulaire supérieur à i_0 équations et inconnues, dont l'équation i_0 s'écrit : $0 = b'_{i_0}$, où b'_{i_0} est son nouveau second membre.
Si $b'_{i_0} \neq 0$, il n'y a pas de solution. Si $b'_{i_0} = 0$, pour chaque valeur fixée de x_{i_0}, le système formé des $i_0 - 1$ premières équations où l'on a passé x_{i_0} dans le second membre, est triangulaire supérieur.
Si pour toute valeur de x_{i_0} le système obtenu est impossible, alors c'est le cas du système de départ.
Si pour une valeur de x_{i_0} le système admet une infinité de solutions, alors c'est aussi le cas du système de départ.
Sinon, pour chaque valeur de x_{i_0} on obtient une solution, ce qui donne une infinité de solutions au système de départ.

On peut alors conclure par le principe de récurrence. $\square$

Pratique 2 :

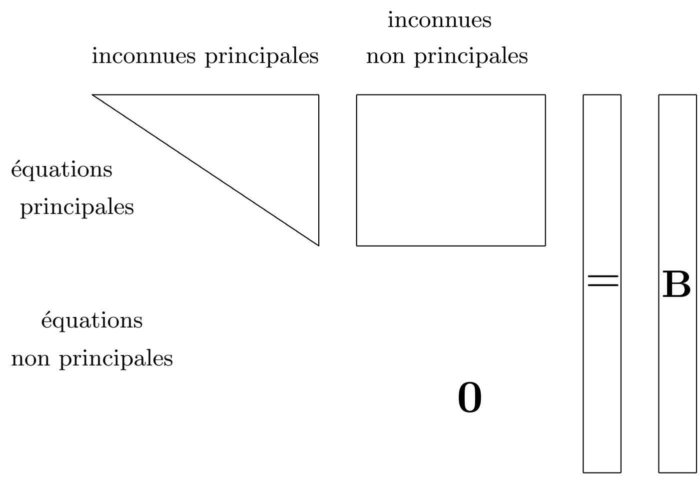
1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Il s'agit d'un système triangulaire supérieur, que l'on résout par remontée. On obtient $z = 6/3 = 2$, puis $y = 3 - 2 \times 2 = -1$, enfin $x = 1 - (-1) - 2 = 0$.

Le système, comme prévu, admet donc une solution unique qui est $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Il s'agit encore d'un système triangulaire supérieur, qu'on résout par remontée.
On obtient $z = 2$, puis $4 = a$ conduit à un discussion.
Si $a = 4$, la deuxième équation est inutile et il reste : $x = -1 - y$, donc on obtient l'ensemble infini des solutions $\begin{pmatrix} -1-y \\ y \\ 2 \end{pmatrix}$, soit le sous-espace affine de solutions : $\mathcal{S}(S) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \text{Vect}\left(\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)\right)$
Si $a \neq 4$, le système est impossible : $\mathcal{S}(S) = \varnothing$

5▶

Schématiquement, on a un "morceau" de système triangulaire relativement aux premières équations et inconnues, dites principales, pour lesquelles les coefficients "diagonaux" sont non nuls, puis suivent des équations sans inconnues.



6▶

Preuve : Si les b_i, pour $i \in [\![r+1, n]\!]$, ne sont pas tous nuls, c'est-à-dire si une équation non principale au moins n'est pas vérifiée, il est clair que le système n'a pas de solution (une des équations est impossible).

Si les b_i, pour $i \in [\![r+1, n]\!]$ sont tous nuls, et si $r = p$, il reste un système triangulaire supérieur à éléments diagonaux non nuls, donc admettant une unique solution, donc compatible.

Enfin, si les b_i, pour $i \in [\![r+1, n]\!]$, sont tous nuls, et si $r < p$, il reste un système de r équations (les principales) et n inconnues. Pour chaque choix de x_{r+1}, ..., x_n, on obtient un système triangulaire supérieur en x_1, ...,x_r, à coefficients diagonaux non nuls par hypothèse, donc qui admet une unique solution en ces inconnues principales. Le système de départ est donc compatible, et de plus il admet une infinité de solutions. $\square$

7▶

Pour se ramener à un système échelonné, on va chercher, parmi les coefficients de A, un "pivot" – c'est-à-dire un élément non nul –, le plus simple possible, par exemple égal à 1, que l'on place en première ligne et première colonne - position $(1, 1)$ - par échange de lignes dans le système, et/ou échange de numérotations d'inconnues (ce qui revient à permuter les colonnes de A).

À partir de ce pivot, on fait apparaître des 0 sous lui en première colonne par les opérations élémentaires décrites ci-après.

Puis on reproduit le procédé avec un nouveau pivot à placer en deuxième position de la "diagonale" - position $(2,2)$ - , et ce, sans modifier la première colonne, afin de faire apparaître des zéros en deuxième colonne sous lui, etc.

C'est la méthode dite "de Gauss" ou "de Gauss-Jordan".

8▶

$*$ Simplement, le nouveau système S' obtenu est équivalent au premier système S au sens où son ensemble de solutions est le même. C'est simple à comprendre pour les opérations d'échanges de lignes ou de colonnes (attention toutefois dans ce cas à la numérotation des inconnues...) et les opérations de dilatations ($\sum\limits_{j=1}^{p} a_{i,j}x_j = b_i$ si, et seulement si, $\lambda(\sum\limits_{j=1}^{p} a_{i,j}x_j) = \lambda b_i$ quand $\lambda \neq 0$).

Supposons que l'on passe de (S) à (S') par l'opération de transvection $L'_i = L_i + \alpha L_j$. Les solutions de (S) (elles annulent notamment L_i et L_j) sont clairement solutions de (S') puisque $L'_i = L_i + \alpha L_j$ et que les autres lignes sont identiques. À partir de L'_i et $L'_j = L_j$, on reforme $L_i = L'_i - \alpha L'_j = L'_i - \alpha L_j$, donc les solutions de (S') sont solutions de (S).

$*$ Exemple avec le système du début de chapitre :

$\begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ x - y - 2z = 0 \end{cases}$ On choisit le pivot 1 en place $(2,1)$ et on effectue : $L_1 \leftrightarrow L_2$

$\begin{cases} x - y - 2z = 0 \\ 2x + 3y - z = 1 \end{cases}$ On élimine le 2 sous le pivot : $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$

$\begin{cases} x - y - 2z = 0 \\ \quad\ 5y + 3z = 1 \end{cases}$ Le système est alors échelonné, x et y sont les inconnues principales, z est le paramètre, le système est compatible puisque sans équations non principales.

On passe alors le paramètre z en second membre, et on résout par remontée le système triangulaire en (x,y). L'ensemble des solutions est alors : $\begin{pmatrix} 1/5 \\ 1/5 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 7/5 \\ -3/5 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

9▶

$*$ *Preuve* : Il existe par hypothèse un élément non nul dans la matrice A. Par échanges de lignes et colonnes comme déjà expliqué, on ramène cet élément en ligne 1 et colonne 1, puis par opérations élémentaires sur les lignes, on fait apparaître des zéros sous ce pivot : c'est la première étape de la méthode dite de Gauss.

À ce stade, oublions la première ligne et la première colonne : s'il ne reste que des 0 dans le premier membre, l'échelonnement est terminé ; sinon on obtient un système de taille inférieure, et le processus peut-être reproduit. Notez qu'un échange de colonnes impactera la première ligne, mais pas la première colonne, et que les opérations élémentaires utilisées ne changent pas non plus la première colonne (elle garde le premier pivot et ses zéros en dessous).

Ainsi, ces transformations conduisant toutes à des systèmes équivalents, le premier résultat du théorème s'établit par récurrence sur le nombre d'équations du système.

Pour ce qui concerne le rang d'un système, il faut se convaincre pour l'instant que le rang r d'un système échelonné est lié au nombre $n-r$ de paramètres "indépendants", ou degrés de liberté, permettant la description de l'ensemble des solutions. Les systèmes obtenus par différentes méthodes (choix de pivot, opérations élémentaires) étant équivalents, ce rang est bien déterminé par le système de départ ou la matrice associée. Les chapitres d'algèbre linéaire de milieu d'année permettront de démontrer ce résultat plus clairement et plus rigoureusement. La quantité $n-r$ sera *la dimension* du sous-espace vectoriel de l'ensemble des solutions du systèmes homogène associé. □

$*$ La méthode du pivot de Gauss est décrite dans cette preuve, et nous allons l'appliquer dans la Pratique suivante. **Ne cherchez pas à l'éviter**, elle est incontournable pour $n \geqslant 3$, sauf système très simple.

Schématiquement : tant qu'on peut trouver un élément non nul, nouveau pivot,

$$\begin{pmatrix} & \\ & \text{pivot} \end{pmatrix} \to \left(\begin{array}{c|c} \text{pivot} & \\ \hline & \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{c|c} \text{pivot} & \\ \hline 0 & \\ \vdots & \\ 0 & \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{c|c} \text{pivot} & - \\ \hline 0 & \\ \vdots & \textit{recommencer} \\ 0 & \end{array}\right)$$

Pratique 3 :

1. Vous avez l'habitude de procéder par substitution, mais entraînez-vous à utiliser la méthode de Gauss... $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ donne le système équivalent : $\begin{cases} x+y=2 \\ -3y=-1 \end{cases}$ qu'on résout par remontée : $y = 1/3$ puis $x = 5/3$. Le système admet pour unique solution : $\begin{pmatrix} 5/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$

2. Je choisis le pivot 1 de la troisième ligne en échangeant les lignes 1 et 3 : $\begin{cases} x+y-3z &= -6 \\ -2x-4y+3z &= -1 \\ 2y-z &= 1 \end{cases}$

Puis $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$: $\begin{cases} x + y - 3z = -6 \\ -2y - 3z = -13 \\ 2y - z = 1 \end{cases}$

Enfin, en choisissant -2 comme pivot : $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$ donne : $\begin{cases} x + y - 3z = -6 \\ -2y - 3z = -13 \\ -4z = -12 \end{cases}$

Par remontée, on obtient la solution unique : $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

3. $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ et $L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1$ donne : $\begin{cases} x + z = 1 \\ y + z = 0 \\ y - z = 0 \\ 3y - 2z = -2 \end{cases}$

Puis $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$ et $L_4 \leftarrow L_4 - 3L_2$ donne : $\begin{cases} x + z = 1 \\ y + z = 0 \\ -2z = 0 \\ -5z = -2 \end{cases}$

Clairement (sans avoir à aller jusqu'à la forme échelonnée), il n'y a pas de solution au système.

4. On se ramène à un système échelonné, la discussion sera simplifiée...

Après $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, on a : $\begin{cases} x + 2y - z = a \\ y - z = b+2a \\ y - z = c-a \end{cases}$

Puis $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$ donne : $\begin{cases} x + 2y - z = a \\ y - z = b+2a \\ 0 = c-b-3a \end{cases}$

Le système est échelonné, compatible si, et seulement si, $c - b - 3a = 0$ ou $c = b + 3a$, auquel cas le système est équivalent à : $\begin{cases} x + 2y - z = a \\ y - z = b+2a \end{cases}$ dont l'ensemble des solutions s'obtient par remontée, avec z comme paramètre (rang 2) : $\begin{pmatrix} -2b-3a \\ b+2a \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

10▶

$*$ *Preuve* : Soit (S) un système linéaire à n équations et n inconnues.

- Supposons (S) de Cramer, donc admettant une unique solution. La méthode de Gauss permet de l'échelonner en un système équivalent, donc à solution unique. On a vu qu'alors son rang est égal à son nombre n d'inconnues, donc ce système échelonné est triangulaire à éléments diagonaux non nuls. La réciproque est déjà vue.

- L'équivalence précédente ne fait pas intervenir le second membre (il n'y avait pas de condition de compatibilité à vérifier). Donc a) et b) sont équivalents, et un système est de Cramer si, et seulement si, le système homogène associé est de Cramer également.

- c) et a) sont équivalentes, c) n'est que la traduction matricielle de a).

- d) implique c) est évident, montrons que c) implique d). La méthode de Gauss appliquée à une matrice triangulaire supérieure à éléments diagonaux non nuls, dont on échange les lignes par $L_i \leftrightarrow L_{n+1-i}$ pour i de 1 à $\lfloor n/2 \rfloor$, conduit à une matrice diagonale à mêmes éléments diagonaux (donc non nuls). Il reste plus alors qu'à utiliser les dilatations adéquates sur chaque ligne pour obtenir que la matrice est équivalente à la matrice identité (diagonale, de diagonale formée de 1).

- Dire que la matrice associée à (S) est de rang n, c'est dire exactement que le système est équivalent à un système échelonné triangulaire à éléments diagonaux non nuls. Donc e) équivaut à a). $\square$

$*$ Sous ces hypothèses on dit aussi que A est inversible. On comprendra mieux pourquoi plus tard.

11▶

Preuve : Si $a \neq 0$, on utilise a comme pivot pour obtenir un système équivalent par $L_2 \leftarrow L_2 - \frac{c}{a} L_1$:
$\begin{cases} ax + by = b_1 \\ (d - \frac{c}{a} b)y = b_2 - \frac{c}{a} b_1 \end{cases}$, qui est de Cramer si, et seulement si, $d - cb/a \neq 0$, condition voulue.
Si $a = 0$, alors le système est triangulaire en (y, x) (on échange les colonnes), donc de Cramer si, et seulement si, b et c sont non nuls, ce qui équivaut bien à la condition $ad - bc \neq 0$.

On vérifie alors élémentairement que $x = (b_1 d - b_2 b)/(ad - bc)$ et $y = (b_2 a - b_1 c)/(ad - bc)$ donne bien la solution du système. $\square$

Pratique 4 :

1. On peut dans ce cas voir que :
- le premier système admet une unique solution puisque le déterminant de sa matrice est -3, et que cette solution est donnée par $x = -1/3$ et $y = 2/3$;
- le second système admet également une unique solution pour la même raison, donnée par $x = -4/3$ et $y = 5/3$.

2. Ici le déterminant de la matrice associée est nul ! La deuxième ligne est trois fois la première pour son premier membre, mais pas pour le second, le système est donc incompatible.

3. Si a ou b est non nul, c'est un système de Cramer, d'unique solution donnée par $x = (a+b)/(a^2+b^2)$ et $y = (b-a)/(a^2+b^2)$ avec les formules du cours.
Si a et b sont nuls, le système est clairement incompatible.

4. Première étape : $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, on obtient : $\begin{cases} x + 10y - 3z = 5 \\ \quad -21y + 8z = -10 \\ \quad 11y - 2z = 2 \end{cases}$
Deuxième étape : pour changer on peut résoudre le système des deux dernières équations qui est de Cramer : $y = -2/23$ et $z = -34/23$, et avec la première équation : $x = 33/23$

5. Première étape, $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$, on obtient : $\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ \quad y - z = 1 \\ \quad y - z = a - 3 \\ \quad y + 3z = b \end{cases}$
Deuxième étape, $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$ et $L_4 \leftarrow L_4 - L_2$ donne : $\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ \quad y - z = 1 \\ \quad 0 = a - 4 \\ \quad 4z = b - 1 \end{cases}$
Il y a donc une équation non principale, le système est compatible si, et seulement si, $a = 4$. Dans ce cas, on obtient par remontée, $z = (b-1)/4$, $y = (b+3)/4$ et $x = (-3b+3)/4$.