

Les primitives et les dérivées.

Louis Herzog

Table des matières

1	Fonctions trigonométriques et trigonométriques inverses.	1
1.1	La fonction $x \mapsto \cos(x)$	1
1.1.1	Dérivée de la fonction $x \mapsto \cos(x)$	1
1.1.2	Calcul d'une primitive de la fonction $x \mapsto \cos(x)$	2
1.2	La fonction $x \mapsto \sin(x)$	2
1.2.1	Dérivée de la fonction $x \mapsto \sin(x)$	2
1.2.2	Calcul d'une primitive de la fonction $x \mapsto \sin(x)$	2
1.3	La fonction $x \mapsto \tan(x)$	3
1.3.1	Dérivée de la fonction $x \mapsto \tan(x)$	3
1.3.2	Calcul d'une primitive de la fonction $x \mapsto \tan(x)$	3
1.4	La fonction $x \mapsto \text{Arc cos}(x)$	4
1.4.1	Calcul de la dérivée de la fonction $x \mapsto \text{Arc cos}(x)$	4
1.4.2	Calcul de la primitive de la fonction $x \mapsto \text{Arc cos}(x)$	5
1.5	La fonction $x \mapsto \text{Arc sin}(x)$	6
1.5.1	Calcul de la dérivée de la fonction $x \mapsto \text{Arc sin}(x)$	6
1.5.2	Calcul de la primitive de la fonction $x \mapsto \text{Arc sin}(x)$	7
1.6	La fonction $x \mapsto \text{Arc tan}(x)$	8
1.6.1	Calcul de la dérivée de la fonction $x \mapsto \text{Arc tan}(x)$	8
1.6.2	Calcul de la primitive de la fonction $x \mapsto \text{Arc tan}(x)$	9
2	Fonctions hyperboliques et hyperboliques inverses.	10
2.1	La fonction $x \mapsto \text{ch}(x)$	11

2.1.1	Dérivée de la fonction $x \mapsto \operatorname{ch}(x)$	11
2.1.2	Calcul d'une primitive de la fonction $x \mapsto \operatorname{ch}(x)$	11
2.2	La fonction $x \mapsto \operatorname{sh}(x)$	11
2.2.1	Dérivée de la fonction $x \mapsto \operatorname{sh}(x)$	11
2.2.2	Calcul d'une primitive de la fonction $x \mapsto \operatorname{sh}(x)$	12
2.3	La fonction $x \mapsto \operatorname{th}(x)$	13
2.3.1	Dérivée de la fonction $x \mapsto \operatorname{th}(x)$	13
2.3.2	Calcul d'une primitive de la fonction $x \mapsto \operatorname{th}(x)$	13
2.4	La fonction $x \mapsto \operatorname{Arg sh}(x)$	14
2.4.1	Dérivée de la fonction $x \mapsto \operatorname{Arg sh}(x)$	14
2.4.2	Calcul d'une primitive de la fonction $x \mapsto \operatorname{Arg sh}(x)$	14
3	Calcul de quelques primitives.	15
3.1	La fonction $x \mapsto \ln(x)$	15
3.2	La fonction $x \mapsto \exp(x)$	15
3.3	Calcul d'une primitive de $x \mapsto \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$	16
3.4	Calcul d'une primitive de $x \mapsto \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$	16
3.5	Calcul d'une primitive de $x \mapsto \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \alpha^2}}$	16
3.5.1	Vérification avec Sage	16
3.6	Calcul d'une primitive de $x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$	16
3.6.1	Calcul de la dérivée de la fonction $x \mapsto \ln(x)$	16
3.6.2	Calcul d'une primitive de la fonction $x \mapsto \ln(x)$	17

Résumé

Quelques considérations préliminaires sur le calcul de certaines primitives telles que celles des fonctions $x \mapsto \operatorname{Arccos}(x)$, $x \mapsto \operatorname{Arcsin}(x)$ ou bien $x \mapsto \operatorname{Arc tan}(x)$ une astuce est indispensable. Elle consiste à procéder à une intégration par parties. En effet, n'ayant aucune idée des primitives, il est raisonnable de changer leurs rôles respectifs et de considérer, non plus la fonction initiale, mais sa dérivée.

Le premier objectif est donc de vérifier si celles-ci existent et sont calculables.

Remarque.

On passe des formules de trigonométrie aux formules de trigonométries hyperboliques en remplaçant \cos par ch et \sin par sh .

Chapitre 1

Fonctions trigonométriques et trigonométriques inverses.

1.1 La fonction $x \mapsto \cos(x)$.

La restriction de la fonction $x \mapsto \cos(x)$ à l'intervalle $[0, \pi]$ est une bijection de $[0, \pi] \rightarrow [-1, +1]$. Il existe donc une fonction réciproque à la fonction $x \mapsto \cos(x)$ que l'on nomme $x \mapsto \text{Arc cos}(x)$. C'est également une bijection, elle est continue sur l'intervalle fermé $[-1, 1]$ et est dérivable sur l'intervalle ouvert $] -1, 1[$.

1.1.1 Dérivée de la fonction $x \mapsto \cos(x)$.

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x)\cos(h) - \sin(x)\sin(h) - \cos(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x)(\cos(h) - 1)}{h} - \frac{\sin(x)\sin(h)}{h} \\ &= \cos(x) \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} - \sin(x) \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h} \\ &= -\sin x\end{aligned}$$

1.1.2 Calcul d'une primitive de la fonction $x \mapsto \cos(x)$.

$$f(x) = \cos(x)$$

$$F(x) = \text{integrate}(f(x), x)$$

Une primitive de la fonction $x \mapsto \cos(x)$ est la fonction $x \mapsto \sin(x) + \text{Cste}$ définie à une constante près.

1.2 La fonction $x \mapsto \sin(x)$.

1.2.1 Dérivée de la fonction $x \mapsto \sin(x)$.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x) \sin(h) - \cos(x) \sin(h) - \sin(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x)(\cos(h) - 1)}{h} - \frac{\cos(x) \sin(h)}{h} \\ &= \sin(x) \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} - \cos(x) \times \frac{\sin(h)}{h} \\ &= \cos x \end{aligned}$$

1.2.2 Calcul d'une primitive de la fonction $x \mapsto \sin(x)$.

$$f(x) = \sin(x)$$

$$F(x) = \text{integrate}(f(x), x)$$

Une primitive de $\sin(x)$ est $-\cos(x) + \text{Cste}$ définie à une constante près.

1.3 La fonction $x \mapsto \tan(x)$.

1.3.1 Dérivée de la fonction $x \mapsto \tan(x)$.

$$\begin{aligned}\tan(x)' &= \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)} \right)' \\ &= \frac{\cos(x) \times \cos(x) + \sin(x) \times \sin(x)}{\cos(x)^2} \\ &= \frac{1}{\cos(x)^2} = 1 + \tan(x)^2\end{aligned}$$

Vérification avec Sage

```
f(x) = tan(x)
g(x) = diff(f(x), x)
```

La dérivée de $\tan(x) = \tan(x)^2 + 1$.

1.3.2 Calcul d'une primitive de la fonction $x \mapsto \tan(x)$.

On a $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, alors $\int \tan(x) dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx$.

Je pose $u(x) = \cos(x)$ donc $u'(x) = -\sin(x) dx$ et par ce changement de variable on a $\int \tan(x) dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx = -\int \frac{u'}{u} = -\ln|u| = \ln\left(\frac{1}{|u|}\right) = \ln\left(\frac{1}{|\cos(x)|}\right) + \text{Cste.}$

Vérification avec Sage

```
f(x) = tan(x)
F(x) = integrate(f(x), x)
```

Une primitive de $\tan(x)$ est la fonction définie à une constante près $x \mapsto \log(\sec(x)) + \text{Cste.}$

La fonction $x \mapsto \sec$ est la fonction paire $x \mapsto \frac{1}{\cos(x)}$ périodique de période 2π définie sur $\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. On retrouve bien le résultat précédent.

1.4 La fonction $x \mapsto \text{Arc cos}(x)$.

La restriction de la fonction $x \mapsto \cos(x)$ à l'intervalle $[0, \pi]$ est une bijection de $[0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$. Il existe donc une fonction réciproque à la fonction $x \mapsto \cos(x)$ que l'on nomme $x \mapsto \text{Arc cos}(x)$. C'est également une bijection, elle est continue sur l'intervalle fermé $[-1, 1]$ et est dérivable sur l'intervalle ouvert $] -1, 1[$.

1.4.1 Calcul de la dérivée de la fonction $x \mapsto \text{Arc cos}(x)$.

Pour ce calcul, il faut utiliser le calcul de la dérivée d'une fonction composée. On a $\cos(\text{Arc cos}(x)) = x$, par conséquent la dérivée de cette expression s'exprime par $-\sin(\text{Arc cos}(x)) \times \text{Arc cos}(x)' = 1$, d'où $\text{Arc cos}(x)' = \frac{-1}{\sin(\text{Arc cos}(x))}$.

La difficulté est maintenant de déterminer $\sin(\text{Arc cos}(x))$, or on sait que pour tout $X \in \mathbb{R}$, on a $\sin^2(X) + \cos^2(X) = 1$, d'où $\sin(X) = \sqrt{1 - \cos^2(X)}$.

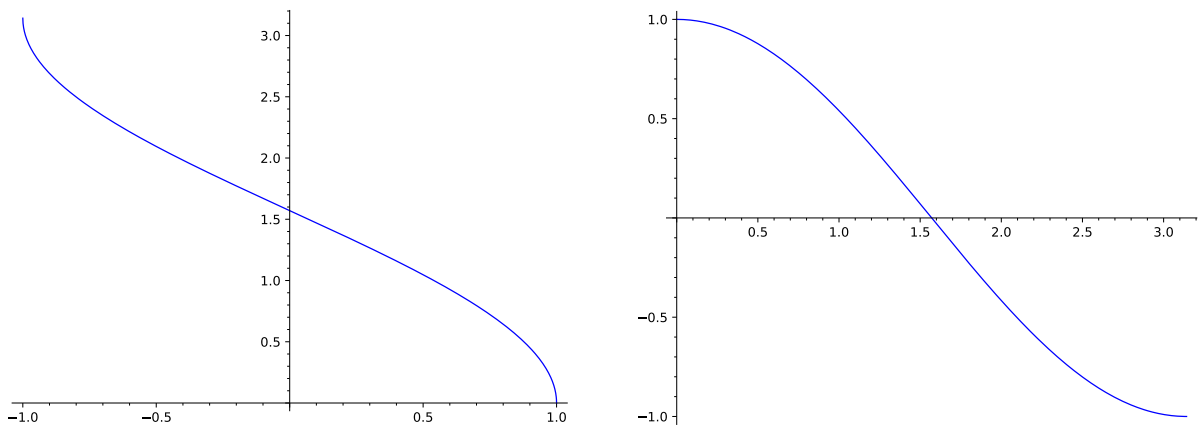
En remplaçant X par $\text{Arc cos}(x)$, on a $\sin(\text{Arc cos}(x)) = \sqrt{1 - \cos^2(\text{Arc cos}(x))} = \sqrt{1 - x^2}$.

Finalement, $\text{Arc cos}(x)' = \frac{-1}{\sin(\text{Arc cos}(x))} = \frac{-1}{\sqrt{1 - \cos^2(\text{Arc cos}(x))}} = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Vérification avec Sage

```
f(x) = arccos(x)
g(x) = diff(f(x), x)
```

La dérivée de la fonction $\text{Arc cos}(x)$ est la fonction $x \mapsto -\frac{1}{\sqrt{-x^2 + 1}}$, ce que l'on retrouve sous une écriture légèrement modifiée de Sage.



Les représentations graphiques de $x \mapsto \text{Arc cos}(x)$ et de $x \mapsto \cos(x)$.

On peut maintenant entreprendre le calcul de la primitive de la fonction $x \mapsto \text{Arc cos}(x)$.

1.4.2 Calcul de la primitive de la fonction $x \mapsto \text{Arc cos}(x)$.

Je pose que $u(x)$ est égal à la fonction $\text{Arc cos}(x)$ et $v'(x)$ est égal 1 d'où $u'(x)$ est égal à la fonction $\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $v(x)$ est égal x .

Alors on a, par une intégration par parties, $\int \text{Arc cos}(x) dx = x \times \text{Arc cos}(x) - \int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \times x dx = x \text{Arc cos}(x) + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

Calcul de $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{-1}{2} \int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}.$$

Finalement $\int \text{Arc cos}(x) dx = x \text{Arc cos}(x) - \sqrt{1-x^2} + \text{Cste}$ est une primitive de la fonction $x \mapsto \text{Arc cos}(x)$.

Vérification avec Sage

$$f(x) = \arccos(x)$$

$$F(x) = \text{integrate}(f(x), x)$$

Une primitive de $\text{Arc cos}(x) = x \text{Arc cos}(x) - \sqrt{-x^2 + 1} + \text{Cste}$.

1.5 La fonction $x \mapsto \text{Arc sin}(x)$.

La restriction de la fonction $x \mapsto \sin(x)$ à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ est une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$. Il existe donc une fonction réciproque à la fonction $x \mapsto \sin(x)$ que l'on nomme $x \mapsto \text{Arc sin}(x)$. C'est également une bijection, elle est continue sur l'intervalle fermé $[-1, 1]$ et est dérivable sur l'intervalle ouvert $] -1, 1[$.

1.5.1 Calcul de la dérivée de la fonction $x \mapsto \text{Arc sin}(x)$.

Pour ce calcul, il faut utiliser le calcul de la dérivée d'une fonction composée. On a $\sin(\text{Arc sin}(x)) = x$, par conséquent la dérivée de cette expression s'exprime par $\cos(\text{Arc sin}(x)) \times \text{Arc sin}(x)' = 1$, d'où $\text{Arc sin}(x)' = \frac{1}{\cos(\text{Arc sin}(x))}$. La difficulté est maintenant de déterminer $\cos(\text{Arc sin}(x))$, or on sait que pour tout $X \in \mathbb{R}$, on a $\sin^2(X) + \cos^2(X) = 1$, d'où $\cos(X) = \sqrt{1 - \sin^2(X)}$.

En remplaçant X par $\text{Arc sin}(x)$,

on a $\cos(\text{Arc sin}(x)) = \sqrt{1 - \sin^2(\text{Arc sin}(x))} = \sqrt{1 - x^2}$.

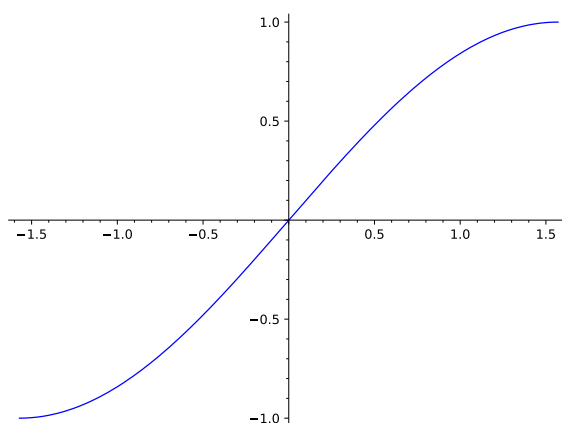
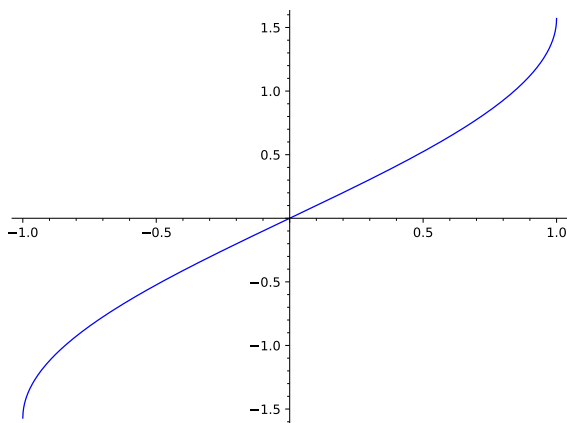
Finalement, $\text{Arc sin}(x)' = \frac{1}{\cos(\text{Arc sin}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\text{Arc sin}(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Vérification avec Sage

$$f(x) = \arcsin(x)$$

$$g(x) = \text{diff}(f(x), x)$$

La dérivée de $\text{Arc sin}(x) = \frac{1}{\sqrt{-x^2 + 1}}$.



Les représentations graphiques de $x \mapsto \text{Arc sin}(x)$ et de $x \mapsto \sin(x)$.

On peut maintenant entreprendre le calcul de la primitive de la fonction $x \mapsto \text{Arc sin}(x)$.

1.5.2 Calcul de la primitive de la fonction $x \mapsto \text{Arc sin}(x)$.

Je pose que $u(x)$ est égal à la fonction $\text{Arc sin}(x)$ et $v'(x)$ est égal 1 d'où $u'(x)$ est égal à la fonction $\text{Arc sin}(x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $v(x)$ est égal x .

Alors on a $\int \text{Arc sin}(x) dx = x \times \text{Arc sin}(x) - \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \times x dx$.

Calcul de $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{1-x^2}.$$

Finalement, une primitive de la fonction $x \mapsto \text{Arc sin}(x)$ est une fonction $x \mapsto x \text{Arc sin}(x) - \sqrt{1-x^2} + \text{Cste}$.

Vérification avec Sage

$$f(x) = \arcsin(x)$$

$$F(x) = \text{integrate}(f(x), x)$$

Une primitive de la fonction $\text{Arc sin}(x) = x \text{Arc sin}(x) - \sqrt{1-x^2} + \text{Cste}$.

1.6 La fonction $x \mapsto \text{Arc tan}(x)$.

La restriction de la fonction $x \mapsto \tan(x)$ à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ est une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$. Il existe donc une fonction réciproque à la fonction $x \mapsto \tan(x)$ que l'on nomme $x \mapsto \text{Arc tan}(x)$. C'est également une bijection, elle est continue sur l'intervalle fermé $[-1, 1]$ et est dérivable sur l'intervalle ouvert $] -1, 1[$.

1.6.1 Calcul de la dérivée de la fonction $x \mapsto \text{Arc tan}(x)$.

Pour ce calcul, il faut utiliser le calcul de la dérivée d'une fonction composée. On a $\tan(\text{Arc tan}(x)) = x$, par conséquent la dérivée de cette expression s'exprime par $\tan'(\text{Arc tan}(x)) \times \text{Arc tan}(x)' = 1$, d'où $\text{Arc tan}(x)' = \frac{1}{\tan'(\text{Arc tan}(x))}$.

La difficulté est maintenant de déterminer $\tan'(\text{Arc tan}(x))$, or on sait que pour tout $X \in \mathbb{R}$, on a $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$, d'où $\tan'(\text{Arc tan}(x)) = 1 + x^2$.

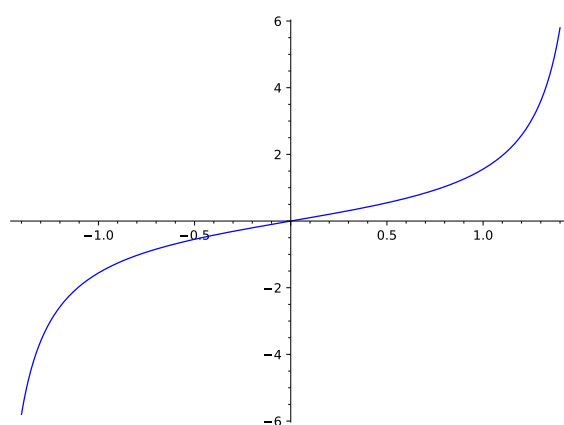
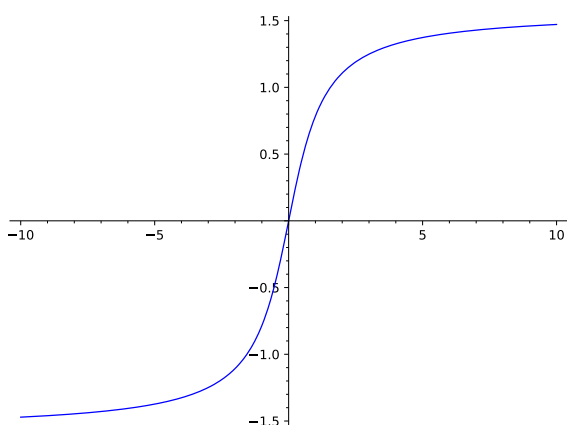
Finalement, $\text{Arc tan}(x)' = \frac{1}{1 + x^2}$.

Vérification avec Sage

$$f(x) = \arctan(x)$$

$$g(x) = \text{diff}(f(x), x)$$

La dérivée de $\text{Arc tan}(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$.



Les représentations graphiques de $x \mapsto \text{Arc tan}(x)$ et de $x \mapsto \tan(x)$.

On peut maintenant entreprendre le calcul de la primitive de la fonction $x \mapsto \text{Arc tan}(x)$.

1.6.2 Calcul de la primitive de la fonction $x \mapsto \text{Arc tan}(x)$.

Je pose que $u(x)$ est égal à la fonction $\text{Arc tan}(x)$ et $v'(x)$ est égal 1 d'où $u'(x)$ est égal à la fonction $\frac{1}{1+x^2}$ et $v(x)$ est égal x .

Alors on a $\int \text{Arc tan}(x) dx = x \times \text{Arc tan}(x) - \int \frac{1}{1+x^2} \times x dx$.

Calcul de $\int \frac{x}{1+x^2} dx$.

$$\int \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2}.$$

D'où $\int \text{Arc tan}(x) dx = x \text{Arc tan}(x) - \frac{1}{2} \ln |1+x^2| + \text{Cste}$. Finalement, une primitive de la fonction $x \mapsto \text{Arc tan}(x)$ est une fonction $x \mapsto x \text{Arc tan}(x) - \ln(\sqrt{1+x^2}) + \text{Cste}$ ou encore $x \mapsto x \text{Arc tan}(x) + \ln\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) + \text{Cste}$.

Vérification avec Sage

$$f(x) = \arctan(x)$$

$$F(x) = \text{integrate}(f(x), x)$$

Une primitive de $\text{Arc tan}(x) = x \text{Arc tan}(x) - \frac{1}{2} \log(x^2 + 1) + \text{Cste}$.

Chapitre 2

Fonctions hyperboliques et hyperboliques inverses.

On passe des formules de trigonométrie aux formules de trigonométries hyperboliques en remplaçant \cos par ch et \sin par $i.\text{sh}$. Par exemple pour $\cos^2 + \sin^2 = 1$ nous obtenons $(\text{ch})^2 + (i.\text{sh})^2 = (\text{ch})^2 - (\text{sh})^2 = 1$ et pour $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$, nous obtenons $\text{ch}(a+b) = \text{ch}(a)\text{ch}(b) - i.\text{sh}(a)i.\text{sh}(b)$ c'est-à-dire $\text{ch}(a+b) = \text{ch}(a)\text{ch}(b) - (i)^2 \text{sh}(a)\text{sh}(b)$.

Finalement on a $\text{ch}(a+b) = \text{ch}(a)\text{ch}(b) + \text{sh}(a)\text{sh}(b)$. On change de signe !

2.1 La fonction $x \mapsto \text{ch}(x)$.

2.1.1 Dérivée de la fonction $x \mapsto \text{ch}(x)$.

$$\begin{aligned}\text{ch}(x)' &= \left(\frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2} \right)' \\ &= \frac{\exp(x)' + \exp(-x)'}{2} \\ &= \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2} \\ &= \text{sh}(x)\end{aligned}$$

2.1.2 Calcul d'une primitive de la fonction $x \mapsto \text{ch}(x)$.

$$\int \text{ch}(x) dx = \int \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2} dx = \frac{1}{2} \times \int \exp(x) dx + \int \exp(-x) dx = \frac{1}{2} \times \exp(x) - \frac{1}{2} \times \exp(-x) + C$$

$\exp(x) - \exp(-x) = \text{sh}$

2.2 La fonction $x \mapsto \text{sh}(x)$.

2.2.1 Dérivée de la fonction $x \mapsto \text{sh}(x)$.

$$\begin{aligned}\text{sh}(x)' &= \left(\frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2} \right)' \\ &= \frac{\exp(x)' - \exp(-x)'}{2} \\ &= \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2} \\ &= \text{ch}(x)\end{aligned}$$

2.2.2 Calcul d'une primitive de la fonction $x \mapsto \text{sh}(x)$.

$$\int \text{sh}(x) dx = \int \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2} dx = \frac{1}{2} \times \int \exp(x) dx - \int \exp(-x) dx = \frac{1}{2} \times \exp(x) + \exp(-x) = \text{ch}(x)$$

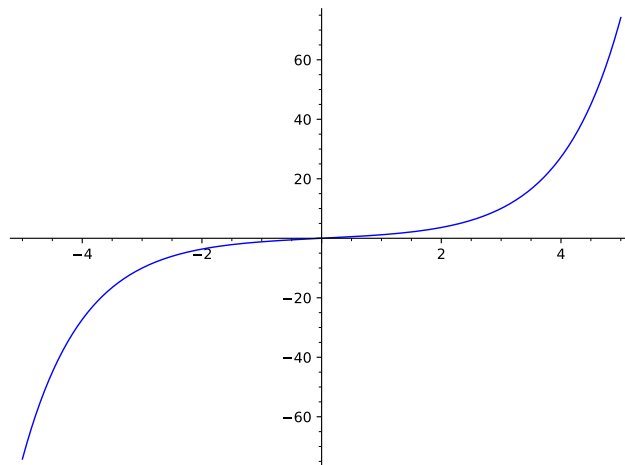
Vérification avec Sage

$$f(x) = \sinh(x)$$

$$F(x) = \text{integrate}(f(x), x)$$

Une primitive de $\text{sh}(x) = \text{ch}(x)$.

Le graphe de $\text{sh}(x)$.



2.3 La fonction $x \mapsto \text{th}(x)$.

2.3.1 Dérivée de la fonction $x \mapsto \text{th}(x)$.

$$\begin{aligned}(\text{th}(x))' &= \frac{\text{ch}(x)'}{\text{sh}(x)'} \\&= \frac{\text{ch}(x)' \times \text{sh}(x) - \text{sh}(x)' \times \text{ch}(x)}{\text{ch}(x)^2} \\&= \frac{\sinh(x)^2 - \cosh(x)^2}{\cosh(x)^2} \\&= \frac{1}{\cosh(x)^2}\end{aligned}$$

Vérification avec Sage

2.3.2 Calcul d'une primitive de la fonction $x \mapsto \text{th}(x)$.

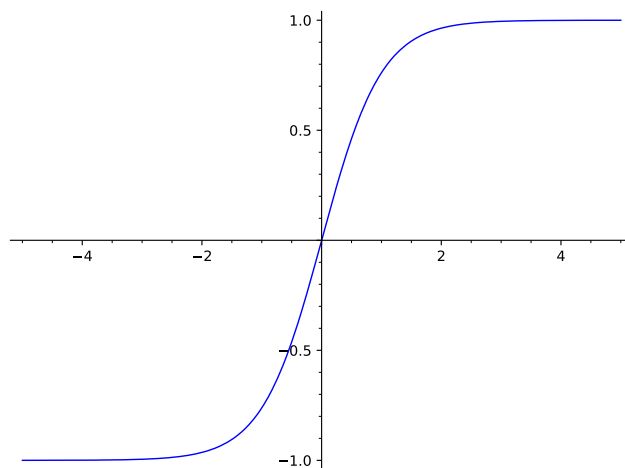
$$\begin{aligned}\int \text{th}(x) &= \int \frac{\text{ch}(x)}{\text{sh}(x)} \\&= \int \frac{1}{u(x)} \times du(x), u(x) = \text{ch}(x), du(x) = \text{sh}(x) \\&= \ln(u(x)) \\&= \ln(\text{ch}(x))\end{aligned}$$

Vérification avec Sage

$$\begin{aligned}f(x) &= \tanh(x) \\F(x) &= \text{integrate}(f(x), x)\end{aligned}$$

Une primitive de $\text{th}(x) = \log(\text{ch}(x))$.

Le graphe de $\text{th}(x)$.



2.4 La fonction $x \mapsto \text{Arg sh}(x)$.

2.4.1 Dérivée de la fonction $x \mapsto \text{Arg sh}(x)$.

Vérification avec Sage

2.4.2 Calcul d'une primitive de la fonction $x \mapsto \text{Arg sh}(x)$.

Vérification avec Sage

Une primitive de $\text{th}(x) = \log(\text{ch}(x))$.

Le graphe de $\text{th}(x)$.

Chapitre 3

Calcul de quelques primitives.

3.1 La fonction $x \mapsto \ln(x)$.

$$\begin{aligned}\int \ln(x) &= \int \ln(x) \times 1 \\ &= x \times \ln(x) - \int \ln(x)' \times x dx \\ &= x \times \ln(x) - \int 1 dx \\ &= x \times \ln(x) - x\end{aligned}$$

3.2 La fonction $x \mapsto \exp(x)$.

$$\int \exp(x) = \exp(x)$$

3.3 Calcul d'une primitive de $x \mapsto \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} = \text{Arg sh}(x)$$

3.4 Calcul d'une primitive de $x \mapsto \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$

3.5 Calcul d'une primitive de $x \mapsto \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}$

3.5.1 Vérification avec Sage

Calcul d'une primitive de $x \mapsto \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}$ par un changement de variable puis par l'emploi d'une variable auxiliaire

Vérification avec Sage

3.6 Calcul d'une primitive de $x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$

Vérification avec Sage

3.6.1 Calcul de la dérivée de la fonction $x \mapsto \ln(x)$.

Première Méthode

Passons par les limites pour trouver Une primitive de $\ln(x)$,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(\frac{x+h}{x})}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+X)}{x \times X}, \text{ avec } X = \frac{h}{x}.$$

On a donc

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+X)}{x \times X} = \frac{1}{x} \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = \frac{1}{x} \times 1 = \frac{1}{x}$$

Seconde Méthode

Pour ce calcul, il faut utiliser le calcul de la dérivée d'une fonction composée.

On a $\exp(\ln(x)) = x$, par conséquent la dérivée de cette expression s'exprime par $\exp(\ln(x)) \times (\ln(x))' = 1$, d'où $(\ln(x))' = \frac{1}{\exp(\ln(x))} = \frac{1}{x}$.

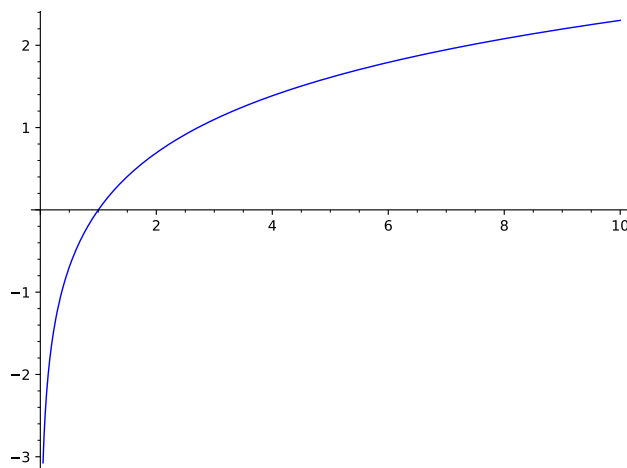
Vérification avec Sage

$$f(x) = \ln(x)$$

$$g(x) = \text{diff}(f(x), x, 1)$$

La dérivée de $\log(x) = \frac{1}{x}$.

Le graphe de $\log(x)$.



On peut maintenant entreprendre le calcul d'une primitive de la fonction $x \mapsto \ln(x)$.

3.6.2 Calcul d'une primitive de la fonction $x \mapsto \ln(x)$.

Je pose que $u(x)$ est égal à la fonction $\ln(x)$ et $v'(x)$ est égal 1 d'où $u'(x)$ est égal à la fonction $\frac{1}{x}$ et $v(x)$ est égal x .

Alors on a $\int \ln(x) dx = x \times \ln(x) - \int \frac{1}{x} \times x dx$.

Calcul de $\int \frac{x}{x} dx$.

$$\int \frac{x}{x} dx = \int 1 dx = x.$$

Finalement $\int \ln(x) dx = x \times \ln(x) - x + Cste$

Vérification avec Sage

$$f(x) = \log(x)$$

$$F(x) = \text{integrate}(f(x), x)$$

Une primitive de $\log(x) = x \log(x) - x$.