

# 1 Quelques considérations préliminaires

Quelques considérations préliminaires sur le calcul de certaines primitives telles que celles des fonctions  $x \mapsto \text{Arc cos}(x)$ ,  $x \mapsto \text{Arc sin}(x)$  ou bien  $x \mapsto \text{Arc tan}(x)$  une astuce est indispensable. Elle consiste à procéder à une intégration par parties. En effet, n'ayant aucune idée des primitives, il est raisonnable de changer leurs rôles respectifs et de considérer, non plus la fonction initiale, mais sa dérivée. Le premier objectif est donc de vérifier si celles-ci existent et sont calculables.

## 2 La fonction $x \mapsto \text{Arc cos}(x)$ .

La restriction de la fonction  $x \mapsto \cos(x)$  à l'intervalle  $[0, \pi]$  est une bijection de  $[0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ . Il existe donc une fonction réciproque à la fonction  $x \mapsto \cos(x)$  que l'on nomme  $x \mapsto \text{Arc cos}(x)$ . C'est également une bijection, elle est continue sur l'intervalle fermé  $[-1, 1]$  et est dérivable sur l'intervalle ouvert  $] - 1, 1[$ .

### 2.1 Calcul de la dérivée de la fonction $x \mapsto \text{Arc cos}(x)$ .

Pour ce calcul, il faut utiliser le calcul de la dérivée d'une fonction composée. On a  $\cos(\text{Arc cos}(x)) = x$ , par conséquent la dérivée de cette expression s'exprime par  $-\sin(\text{Arc cos}(x)) \times (\text{Arc cos}(x))' = 1$ , d'où  $(\text{Arc cos}(x))' = \frac{-1}{\sin(\text{Arc cos}(x))}$ . La difficulté est maintenant de déterminer  $\sin(\text{Arc cos}(x))$ , or on sait que pour tout  $X \in \mathbb{R}$ , on a  $\sin^2(X) + \cos^2(X) = 1$ , d'où  $\sin(X) = \sqrt{1 - \cos^2(X)}$ .

En remplaçant  $X$  par  $\text{Arc cos}(x)$ ,

on a  $\sin(\text{Arc cos}(x)) = \sqrt{1 - \cos^2(\text{Arc cos}(x))} = \sqrt{1 - x^2}$ .

Finalement,  $(\text{Arc cos}(x))' = \frac{-1}{\sin(\text{Arc cos}(x))} = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$ .

### Vérification avec Sage

```
f(x) = acos(x)
```

```
g(x) = diff(f(x), x, 1)
```

La dérivée de  $\text{Arc cos}(x) = -\frac{1}{\sqrt{-x^2 + 1}}$ .

On peut maintenant entreprendre le calcul de la primitive de la fonction  $x \mapsto \text{Arc cos}(x)$ .

## 2.2 Calcul de la primitive de la fonction $x \mapsto \text{Arc cos}(x)$ .

Je pose que  $u(x)$  est égal à la fonction  $\text{Arc cos}(x)$  et  $v'(x)$  est égal 1 d'où  $u'(x)$  est égal à la fonction  $\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$  et  $v(x)$  est égal  $x$ .

Alors on a  $\int \text{Arc cos}(x) dx = x \times \text{Arc cos}(x) - \int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \times x dx$ .

**Calcul de  $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ .**

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{-1}{2} \int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}.$$

Finalement  $\int \text{Arc cos}(x) dx = x \times \text{Arc cos}(x) - \sqrt{1-x^2} + Cste$

### Vérification avec Sage

$$f(x) = \text{acos}(x)$$

$$F(x) = \text{integrate}(f(x), x)$$

La primitive de  $\text{Arc cos}(x) = x \text{Arc cos}(x) - \sqrt{-x^2 + 1}$ .

### 3 La fonction $x \mapsto \operatorname{Arc\,sin}(x)$ .

3.1 Calcul de la dérivée de la fonction  $x \mapsto \operatorname{Arc\,sin}(x)$ .

3.2 Calcul de la primitive de la fonction  $x \mapsto \operatorname{Arc\,sin}(x)$ .

### 4 La fonction $x \mapsto \operatorname{Arc\,tan}(x)$ .

4.1 Calcul de la dérivée de la fonction  $x \mapsto \operatorname{Arc\,tan}(x)$ .

4.2 Calcul de la primitive de la fonction  $x \mapsto \operatorname{Arc\,tan}(x)$ .