Revue de la Filière Mathématiques
RMS

[Épreuves orales des concours]
Algèbre

1. [P] · Soient $m, M, r \in \mathbf{N}$, avec $r \geq 3$, $k_0, \ldots, k_M \in \mathbf{Z}$ tels que $\sum_{i=0}^{M} k_i r^i = \sum_{i=0}^{m} r^i$. Montrer que $\sum_{i=0}^{M} |k_i| \geq m + 1$.

2. [L] Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on note $c_n := |\mathcal{P} \cap [\![0, n]\!]|$, où $\mathcal{P}$ désigne l'ensemble des nombres premiers. On note $r_n := \prod_{p \in \mathcal{P}, p | n!} p$.

a) Montrer que $r_n = O(4^n)$ quand n tend vers $+\infty$.

b) Montrer que $(c_n)^{c_n} = O(r_n)$ quand n tend vers $+\infty$.

c) En déduire que $c_n = O\left(\frac{n}{\ln n}\right)$ quand n tend vers $+\infty$.

3. [SR] ***a)*** On note φ la fonction indicatrice d'Euler. Redémontrer que $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$ pour tous m, n dans $\mathbf{N}^*$ premiers entre eux (on dit que φ est arithmétiquement multiplicative), redonner la formule explicite pour $\varphi(n)$, et enfin calculer $\sum_{d|n} \varphi(d)$ pour tout $n \geq 1$.

b) Soit m, n dans $\mathbf{N}^*$. Exprimer $\varphi(mn)$ en fonction de $\varphi(m)$, $\varphi(n)$, $\varphi(m \wedge n)$ et $m \wedge n$.

c) Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on note d_n le nombre de diviseurs premiers de n, puis $\mu(n) := (-1)^{d_n}$ si n n'est pas divisible par le carré d'un nombre premier, et enfin $\mu(n) := 0$ dans le cas contraire. Montrer que μ est arithmétiquement multiplicative, et calculer $\sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d}$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

4. [PLSR] Soit n et m dans $\mathbf{N}^*$. On munit $\mathbf{C}$ de sa structure canonique d'espace euclidien.

a) Expliciter les ϕ dans $\mathcal{O}(\mathbf{C})$ tels que $\phi(\mathrm{U}_n) = \mathrm{U}_n$. On note D_{2n} l'ensemble ainsi formé. C'est un sous-groupe de $\mathcal{O}(\mathbf{C})$.

b) Dénombrer les morphismes de groupes de D_{2m} vers D_{2n}.

c) Montrer que tout automorphisme du groupe $\mathcal{S}_3$ est de la forme $g \mapsto aga^{-1}$ pour un $a \in \mathcal{S}_3$.

5. [SR] On fixe un corps $\mathbf{K}$ et on pose $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, (a, b, c) \in \mathbf{K}^3 \right\}$.

a) Montrer que H est un sous-espace affine de dimension 3 de $\mathcal{M}_3(\mathbf{K})$.

b) Montrer que H est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_3(\mathbf{K})$, et en déterminer le centre (c'est-à-dire l'ensemble des éléments qui commutent avec tous les éléments de H).

c) On note $L = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, (a, b, c) \in \mathbf{K}^3 \right\}$.

On définit $\star$ par $A \star B = A + B + \frac{1}{2}(AB - BA)$ pour A et B dans L. Montrer que $(L, \star)$ est un groupe et que l'exponentielle définit un isomorphisme de groupes de L vers H.

d) Calculer A^n pour $A \in H$ et $n \in \mathbf{N}$.

e) On prend K = Z⁄2Z. Montrer que H est isomorphe au groupe des isométries vectorielles de $\mathbf{R}^2$ qui stabilisent le carré $C := \{(1,0),(0,1),(-1,0),(0,-1)\}$.

6. [L] · On prend pour **K** l'un des corps **R** ou **C**.
a) Déterminer les éléments de $GL_n(\mathbf{K})$ qui commutent avec tous les autres.

b) Étant donné $n \in \mathbf{N}^*$, on note $\mathbb{P}^n(\mathbf{K})$ l'ensemble quotient de $\mathbf{K}^{n+1} \setminus \{0\}$ pour la relation de colinéarité entre vecteurs. On choisit un élément ∞ hors de **K**. Montrer que l'on définit une bijection de $\mathbb{P}^1(\mathbf{K})$ sur $\mathbf{K} \cup \{\infty\}$ en associant à la classe de (a,b) le nombre $\frac{a}{b}$ si $b \neq 0$, et ∞ si $b = 0$.

c) On note $PGL_n(\mathbf{K})$ le quotient de $GL_n(\mathbf{K})$ par la relation d'équivalence définie comme suit : $P \sim Q \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbf{K}^* : P = \alpha Q$. Montrer qu'il existe une unique structure de groupe sur $PGL_n(\mathbf{K})$ faisant de la projection canonique $P \mapsto [P]$ un morphisme de $GL_n(\mathbf{K})$ dans $PGL_n(\mathbf{K})$. On munit $PGL_n(\mathbf{K})$ de cette structure de groupe dans toute la suite de l'énoncé.

d) Montrer que, pour $P \in GL_n(\mathbf{K})$ et $X \in \mathbf{K}^n$, la classe de colinéarité du vecteur PX ne dépend que de la classe de P modulo $\sim$ et de la classe de colinéarité de X. On obtient ainsi une fonction $\rho : PGL_n(\mathbf{K}) \times \mathbb{P}^{n-1}(\mathbf{K}) \to \mathbb{P}^{n-1}(\mathbf{K})$ envoyant systématiquement le couple $([P],[X])$ sur $[PX]$. On notera $g.x := \rho(g,x)$ pour $g \in PGL_n(\mathbf{K})$ et $x \in \mathbb{P}^{n-1}(\mathbf{K})$.

e) Soit $g \in PGL_2(\mathbf{K})$ représenté par la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Montrer que, via l'identification de la question ***b)*** entre $\mathbb{P}^1(\mathbf{K})$ et $\mathbf{K} \cup \{\infty\}$, l'application $x \mapsto g.x$ s'identifie à l'homographie $\rho_g : z \in \mathbf{K} \cup \{\infty\} \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \in \mathbf{K} \cup \{\infty\}$, en convenant que $\frac{az+b}{cz+d} = \infty$ si $z \in \mathbf{K}$ et $cz + d = 0$, $\frac{a\infty+b}{c\infty+d} = \frac{a}{c}$ si $c \in \mathbf{K}^*$, et $\frac{a\infty+b}{c\infty+d} = \infty$ si $c = 0$.

f) Soit a, b, c des éléments distincts de $\mathbb{P}^1(\mathbf{K})$, et a',b',c' des éléments distincts de $\mathbb{P}^1(\mathbf{K})$. Montrer qu'il existe $g \in PGL_2(\mathbf{K})$ tel que $(a',b',c') = (g.a,g.b,g.c)$.

g) Pour $x \in \mathbb{P}^1(\mathbf{K})$, on note $S_x := \{g \in PGL_2(\mathbf{K}) : g.x = x\}$. Expliciter S_0, S_∞, $S_0 \cap S_\infty$ et $S_0 \cap S_\infty \cap S_1$ (avec l'identification précédente entre $\mathbf{K} \cup \{\infty\}$ et $\mathbb{P}^1(\mathbf{K})$).

h) Montrer que, dans le groupe $PGL_2(\mathbf{C})$, tout élément d'ordre 2 est conjugué à l'élément dont l'homographie associée est $z \mapsto -z$.

7. [L] On note $\mathbf{Z}[i\sqrt{2}] = \left\{a + ib\sqrt{2}, (a,b) \in \mathbf{Z}^2\right\}$.
a) Montrer que $\mathbf{Z}[i\sqrt{2}]$ est un sous-anneau de **Q**.

b) Montrer que l'anneau $A := \mathbf{Z}[i\sqrt{2}]$ est euclidien, c'est-à-dire qu'il existe une fonction $N : \mathbf{Z}[i\sqrt{2}] \to \mathbf{N}$ telle que, pour tout $(a,b) \in A \times (A \setminus \{0\})$, il existe un couple $(q,r) \in A^2$ tel que $a = bq + r$ et $N(r) < N(b)$.

c) Énoncer et démontrer un théorème d'existence et d'unicité d'une décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbf{Z}[i\sqrt{2}]$.

8. [PLSR] · Pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on note $\epsilon(\sigma)$ sa signature et $\nu(\sigma)$ son nombre de points fixes. Calculer $\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \frac{\epsilon(\sigma)}{\nu(\sigma)+1}$.

9. [P]· Déterminer les inversibles de $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})[X]$.

10. [PLSR] On munit $\mathbf{R}^n$ de la norme euclidienne canonique. Une partie A de $\mathbf{R}^n$ est un L-groupe si c'est un sous-groupe de $\mathbf{R}^n$ tel que $\mathrm{Vect}(A) = \mathbf{R}^n$ et, pour tous $x \in \mathbf{R}^n$ et $r \in \mathbf{R}^{+*}$, $A \cap \overline{B}(x,r)$ est fini.
a) Que dire dans le cas $n = 1$?

b) Soit $e = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de $\mathbf{R}^n$.

On pose $L_e = \{a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n,\ (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{Z}^n\}$.

i) Montrer que L_e est un L-groupe.

ii) Soient e et e' deux bases de $\mathbf{R}^n$. À quelles conditions a-t-on $L_e = L_{e'}$?

11. [PLSR] On note $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ le groupe des matrices de déterminant 1 de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Soit $\varphi : \mathrm{SL}_2(\mathbf{R}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ un morphisme de groupes. Montrer que φ est à valeurs dans $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$.

12. [L] Soient H l'ensemble des nombres complexes de partie imaginaire strictement positive, $G = \mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$.
Pour $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$ et $z \in H$, on pose $g.z = \frac{az+b}{cz+d}$.
a) Montrer que, si $z \in H$ et $g \in G$, alors $g.z \in H$. Montrer que, si $z \in H$ et $(g,g') \in G^2$, alors $g'.(g.z) = g'g.z$.

b) Soient $K = \mathrm{SO}_2(\mathbf{R})$, A le sous-groupe de G constitué des matrices de la forme $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & \frac{1}{x} \end{pmatrix}$ avec $x \in \mathbf{R}^{+*}$, N le sous-groupe de G constitué des matrices de la forme $\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $\lambda \in \mathbf{R}$. Montrer que, si $g \in G$, g s'écrit de façon unique kan avec $(k,a,n) \in K \times A \times N$.

Ind. Considérer $g(i)$ si $g \in G$.

13. [L] · Si G est un groupe, on note $sub(G)$ l'ensemble des sous-groupes de G. Soit G,H deux groupes finis de cardinaux premiers entre eux.
Montrer que $|sub(G \times H)| = |sub(G)| \times |sub(H)|$.

14. · ***a)*** Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathbf{R}^+$ telle que : $\forall n,p \in \mathbf{N}^*$, $a_{n+p} \leq a_n + a_p$. Montrer que la suite de terme général a_n/n converge vers $\inf\left\{\frac{a_k}{k}, k \in \mathbf{N}^*\right\}$.
b) Soient G un groupe multiplicatif, S une partie génératrice finie de G stable par passage à l'inverse. Pour $x \in G$, on pose $L_S(x) = \min\{n \in \mathbf{N}; \exists (s_1, \ldots, s_n) \in S^n, x = s_1 \cdots s_n\}$. Pour Φ endomorphisme de G, on pose $\Lambda_S(\Phi) = \max\{L_S(\Phi(x)), x \in S\}$. Montrer que la suite de terme général $\frac{1}{n} \ln(\Lambda_S(\Phi^n))$ tend vers une limite ne dépendant pas de S.

15. [L] · Si A est un anneau commutatif et I un idéal de A, on dit que I est premier si $A \setminus I$ est stable par multiplication, que I est maximal si le seul idéal de A contenant strictement I est A.
a) Montrer que tout idéal maximal est premier.

b) Soient $n \geq 3$ un nombre premier, $A = \mathbf{Z}[e^{2i\pi/n}]$. Montrer que tout idéal premier de A est maximal.

16. [SR] ***a)*** Soient A un anneau commutatif et M un idéal de A. Montrer que M est maximal (au sens de l'inclusion) parmi les idéaux de A différents de A si et seulement si l'ensemble $\{a + M,\ a \in A\}$ est muni d'une structure naturelle de corps (par exemple, $(a + M) + (b + M) = (a + b) + M$…).
On considère désormais $A = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbf{R})$.

b) Pour $x_0 \in [0, 1]$, on pose $M(x_0) = \{f \in A,\ f(x_0) = 0\}$.

Montrer que $M(x_0)$ est un idéal maximal de A.

c) Soit I un idéal de A tel que $\cap_{f\in I} f^{-1}(\{0\}) = \varnothing$. Montrer que $I = A$.

d) Caractériser les idéaux maximaux de A.

17. [Rennes, concours étudiant]
a) Soit $P \in \mathbf{C}[X]$ tel que $\{x \in \mathbf{N} ; P(x) \in \mathbf{Q}\}$ soit infini. Montrer que $P \in \mathbf{Q}[X]$.

b) Soient P et Q dans $\mathbf{C}[X] \setminus \{0\}$ avec $deg(P) \leq deg(Q)$, $F = \frac{P}{Q}$, $\alpha \in \mathbf{C}$ tel que $Q(\alpha) \neq 0$. Montrer qu'il existe $P_1 \in \mathbf{Q}[X]$ de degré strictement inférieur à celui de P tel que $\frac{F(X)-F(\alpha)}{X-\alpha} = \frac{P_1}{Q}$.

c) Soit $F \in \mathbf{C}(X)$ telle que $\{x \in \mathbf{N} ; F(x) \in \mathbf{Q}\}$ soit infini. Montrer que $F \in \mathbf{Q}(X)$.

18. [PLSR] Soit $n \in \mathbf{N}^*$.
a) Montrer qu'il existe $P_n \in \mathbf{R}[X]$ tel que $\forall \theta \in \mathbf{R}$, $\sin(4n\theta) = \cos(\theta)\sin(\theta)P_n\left(\cos^2(\theta)\right)$.

b) Calculer $\prod_{k=1}^{2n-1} \cos\left(\frac{4k\pi}{n}\right)$, puis $\prod_{k=1}^{2n-1} \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{n}\right)$.

19. [L] Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n > 0$. Montrer que P est simplement scindé sur $\mathbf{R}$ si et seulement si $\forall i \in [[1, n-1]]$, $\forall x \in \mathbf{R}$, $(P^{(i)}(x))^2 - P^{(i-1)}(x)\, P^{(i+1)}(x) > 0$.

20. [L] ***a)*** Montrer que $\cos(\pi/8)$ n'est pas rationnel.
b) Montrer qu'un entier algébrique rationnel est entier.

c) Déterminer l'ensemble des $q \in \mathbf{Q}$ tels que $\cos(q\pi)$ est rationnel.

21. [L] · Soit p un nombre premier, dont on note $p = \overline{a_n a_{n-1} \cdots a_0}^{10}$ l'écriture décimale. Montrer que le polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ est irréductible dans $\mathbf{Z}[X]$.

22. [SR] Soient $a \in \mathbf{Z}$ et $n \in \mathbf{N}^*$. On définit la suite $(P_k)_{0\leq k\leq n}$ par :

$P_0 = 1$ et, pour $k \in \{1,\ldots,n\}$, $P_k(X) = \frac{1}{k!}\prod_{l=0}^{k-1}(X - (a + l))$.

a) i) Montrer que $(P_0,\ldots,P_n)$ est une base de $\mathbf{C}_n[X]$.

ii) Montrer que $\forall k \in [[0,n]]$, $\forall i \in \mathbf{Z}$, $P_k(i) \in \mathbf{Z}$.

b) Soit $P \in \mathbf{C}_n[X]$ un polynôme prenant des valeurs entières en $n + 1$ entiers consécutifs.

Montrer que $P(i) \in \mathbf{Z}$ pour tout entier $i \in \mathbf{Z}$.

c) Le résultat précédent est-il préservé si les $n + 1$ entiers ne sont plus supposés consécutifs ?

d) Caractériser les polynômes P tels que $P(\mathbf{Z}) \subset \mathbf{Z}$.

23. [L] On pose $\Phi_1(X) = X - 1$ et pour tout $n \geq 2$, $\Phi_n(X) = \dfrac{X^n - 1}{\prod_{\substack{d|n \\ d<n}} \Phi_d(X)}$.

a) Montrer que $\Phi_n(X) = \prod_{\substack{0\leqslant k\leqslant n \\ k\wedge n=1}}(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}})$.

b) Montrer que $\Phi_n(X) \in \mathbf{Z}[X]$.

c) Montrer que, pour p et q deux nombres premiers distincts, Φ_{pq} est à coefficients dans $\{0, \pm 1\}$.

d) Donner le coefficient en X^7 dans Φ_{105}.

24. [L] Soit p un nombre premier. On pose $\Phi_p(X) = \dfrac{X^p - 1}{X - 1}$.

a) Montrer que Φ_p est irréductible dans $\mathbf{Q}[X]$.

b) On note $\zeta = e^{\frac{2i\pi}{p}}$. Montrer que, si $Q \in \mathbf{Q}[X]$ et $R \in \mathbf{Q}[X]$ vérifient $Q(\zeta) = R(\zeta)$, alors Φ_p divise le polynôme $Q - R$.

c) Montrer que l'ensemble $\mathbf{Q}[\zeta]$ défini par $\{P(\zeta),\ P \in \mathbf{Q}_{p-1}[X]\}$ est un corps.

d) Montrer que, si $Q \in \mathbf{Q}[X]$ et $R \in \mathbf{Q}[X]$ vérifient $Q(\zeta) = R(\zeta)$, alors, pour tout entier k non multiple de p, $Q(\zeta^k) = R(\zeta^k)$.

e) Soit $(a_0, \dots, a_{p-1}) \in \mathbf{Q}^p$. On pose $C = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{p-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_2 & & \ddots & a_1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_0 \end{pmatrix}$.

Montrer que, si la matrice C est inversible, alors son inverse est de la même forme.

25. [L] ***a)*** Déterminer les inversibles de $\mathbf{Z}[X]$.
b) Si $P \in \mathbf{Z}[X] \setminus \{0\}$, on note $C(P)$ le pcgd des coefficients de P. Montrer que, pour P et Q dans $\mathbf{Z}[X] \setminus \{0\}$, $c(PQ) = c(P)c(Q)$.

c) Caractériser les irréductibles de $\mathbf{Z}[X]$. Montrer que tout élément de $\mathbf{Z}[X] \setminus \{0\}$ s'écrit de façon unique à l'ordre près comme produit d'irréductibles de $\mathbf{Z}[X]$ et d'un inversible de $\mathbf{Z}[X]$.

26. [L] On admet que tout polynôme de $\mathbf{C}[X_0, \dots, X_{n-1}]$ se factorise de manière unique comme produit de polynômes irréductibles.

Calculer le déterminant $D = \begin{vmatrix} X_0 & X_{n-1} & X_{n-2} & \cdots & X_1 \\ X_1 & X_0 & X_{n-1} & & X_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ X_{n-1} & X_{n-2} & \cdots & \cdots & X_0 \end{vmatrix}$.

27. [L] ***a)*** Montrer qu'il existe une unique suite $(L_n)_{n \in \mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathbf{C}[X, Y]$ telle que $L_n(a + b, ab) = a^n + b^n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $(a, b) \in \mathbf{C}^2$.
b) Expliciter L_3.

c) Soit $(p, q) \in \mathbf{C}^2$. On considère le polynôme $P := X^3 - pX - q$. Montrer qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbf{C}^2$ tel que $L_3(X, \alpha\beta) - \alpha^3 - \beta^3 = P(X)$.

28. [SR] On fixe un entier $n \geq 2$. On note G_n l'ensemble des polynômes de la forme $\sum_{k=1}^{n-1} a_k X^k$ où $(a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbf{C}^{n-1}$ et $a_1 \neq 0$.

a) Pour P, Q dans G_n, montrer qu'il existe un unique $T \in G_n$ tel que X^n divise $P \bullet Q - T$; on note alors $P \star Q := T$.

b) Montrer que $(G_n, \star)$ est un groupe et que son élément neutre est X.

29. [PLSR] · Soit $d \in \mathbf{N}^*$, et $0 < a_1 < \ldots < a_d$ des entiers.

On pose $P_n = \prod_{k=1}^{d}(X - na_k) - 1$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

a) Montrer que, pour n assez grand, P_n est scindé à racines simples sur **R**.

b) Pour tout $n \geq 1$ pour lequel P_n est scindé à racines simples sur **R**, et tout $k \in [[1,d]]$, on note $x_n^{(k)}$ la k-ième racine de P_n dans l'ordre croissant. Déterminer, pour n'importe quel $k \in [[1,d]]$, un équivalent de $x_n^{(k)}$ lorsque $n \to +\infty$.

c) Montrer que P_n est irréductible dans $\mathbf{Z}[X]$ pour tout $n \geq 1$.

30. [SR] Soit a, b deux réels, et $n \geq 3$ un entier impair. Étudier, en fonction de n, a et b, le nombre de racines réelles de $X^n + aX + b$.

31. [SR] Si $P \in \mathbf{R}[X]$ et $n \in \mathbf{N}^*$, soit $A_P^n = \prod_{i=0}^{n-1}(P - i)$.
a) Montrer qu'il existe une unique forme linéaire L sur $\mathbf{R}[X]$ telle que $\forall n \in \mathbf{N}, L(A_X^n) = 1$.

b) Pour $n \in \mathbf{N}$, calculer $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k^n}{k!}$. Expliciter le cas $n = 3$.

32. [P] Soient $n \in \mathbf{N}^*$, **K** un corps et $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \in \mathbf{K}^n$. À quelle condition existe-t-il $M = (M_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telle que $M^2 = M$ et que $\forall i \in \{1,\ldots,n\}$, $M_{i,i} = \lambda_i$?

33. [L] Soient $n \geq 2$, $\mathcal{T}_n$ l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ dont les coefficients diagonaux sont dans U, $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des matrices de permutation. On pose $\mathcal{N}_n = \{AB; A \in \mathcal{T}_n, B \in \mathcal{S}_n\}$.
a) Montrer que $\mathcal{N}_n$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbf{C})$.

On note $\mathcal{N}_n'$ le commutant de $\mathcal{N}_n$ et $\mathcal{N}_n''$ le commutant de $\mathcal{N}_n'$.

b) Montrer que $\mathcal{N}_n'' = \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

34. [L] Pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on note P_σ la matrice de permutation associée. On note $\mathcal{D}_n$ l'ensemble des matrices diagonales complexes de taille n dont les coefficients sont de module égal à 1.
L'ensemble $G = \{P_\sigma D P_\sigma; \sigma \in \mathcal{S}_n, D \in \mathcal{D}_n\}$ est-il un sous-groupe de $GL_n(\mathbf{C})$?

35. [L] Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ telle que, pour toute $M \in \mathcal{A}$, $\overline{M}^T \in \mathcal{A}$.
Soient $\mathcal{A}'$ le commutant de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}''$ le commutant de $\mathcal{A}'$. Montrer que $\mathcal{A}'' = \mathcal{A}$.

36. [P] Soient E un **R**-espace vectoriel de dimension finie et G un sous-groupe fini de $GL(E)$. Montrer que si F un sous-espace vectoriel de E stable par tous les éléments de G alors F possède un supplémentaire stable par tous les éléments de G.

37. [L] Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $(a_0,\ldots,a_{n-1}) \in \mathbf{C}^n$. Calculer le déterminant de la matrice $(a_{i+j-2})_{1\leq i,j\leq n}$ où $i + j - 2$ est pris modulo n.

38. [PLSR] Soit $P_1,\dots,P_r$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ vérifiant $\forall(i,j)\in\{1,\dots,r\}^2, P_iP_j=\delta_{i,j}P_i$ et $\sum_{i=1}^{r}P_i=I_n$. Soit $\lambda_1,\dots,\lambda_r$ des réels distincts. On pose $A := \sum_{i=1}^{r}\lambda_iP_i$.

Montrer que, pour toute matrice $B\in\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, il existe une matrice $K\in\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $B=\sum_{i=1}^{r}P_iBP_i+AK-KA$.

39. [PLSR] · Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. On note $q\in[[0,n]]$ la multiplicité de 0 dans le polynôme caractéristique de A.
a) Montrer l'existence et l'unicité de $X\in\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ telle que $AX=XA$, $A^{q+1}X=A^q$ et $XAX=X$.

b) Que dire si $A\in\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$?

c) L'application φ qui, à $A\in\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, associe la matrice X définie en question ***a)*** est-elle continue ?

d) Soit (A_k) une suite convergente de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur (A_k) pour que $\lim_{k\to\infty}\varphi(A_k)=\varphi\left(\lim_{k\to\infty}A_k\right)$.

40. [PLSR] · Soient $n\in\mathbf{N}^*$ impair, A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telles que $AB=BA$. Montrer que $A+iB$ admet un vecteur propre réel.

41. [PLSR] Soit $P\in\mathbf{C}[X]$. On pose $F=P(X)^2$.
a) Montrer que l'application $f : A\in\mathcal{M}_n(\mathbf{C})\mapsto F(A)$ n'est pas surjective.

b) Montrer qu'il existe $N\in\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ telle que $f^{-1}(\{N\})$ soit infini.

c) Montrer qu'il existe un ensemble E dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ tel que, pour tout $M\in E$, $|f^{-1}(\{M\})|$ est fini et indépendant de M.

42. [SR] Soient $p\in\mathbf{N}^*$, $\mathbf{K}$ un sous-corps de $\mathbf{C}$, $A\in\mathcal{M}_p(\mathbf{K})$. On dit que A est toute puissante sur le corps $\mathbf{K}$ (TP**K**) si, pour tout $n\in\mathbf{N}^*$, il existe $B\in\mathcal{M}_p(\mathbf{K})$ telle que $B^n=A$.
a) Traiter le cas $p=1$ pour $\mathbf{K}=\mathbf{C}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{Q}$.

b) On suppose que $\chi_A=\prod_{i=1}^{k}(X-\lambda_i)^{\alpha_i}$ où les λ_i sont distincts dans $\mathbf{K}$ et les α_i dans $\mathbf{N}^*$.

i) Montrer qu'il existe $N_1,\dots,N_k$ nilpotentes telles que A soit semblable à une matrice diagonale par blocs avec comme blocs diagonaux $\lambda_1I_{\alpha_1}+N_1,\dots,\lambda_kI_{\alpha_k}+N_k$.

ii) Montrer que A est TP**K**si et seulement si les $\lambda_iI_{\alpha_i}+N_i$ le sont.

On dit que $M\in\mathcal{M}_p(\mathbf{K})$ est unipotente si $M-I_p$ est nilpotente et on note $\mathcal{U}_p(\mathbf{K})$ l'nsemble des matrices unipotentes de $\mathcal{M}_p(\mathbf{K})$.

Pour $A\in\mathcal{U}_p(\mathbf{K})$, on pose $ln(A)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(A-I_p)^n$.

c) Justifier la définition de $ln(A)$ pour $A\in\mathcal{U}_p(\mathbf{K})$. Montrer que exp est une bijection de $\mathcal{N}_p(\mathbf{K})$ sur $\mathcal{U}_p(\mathbf{K})$.

d) Montrer que les matrices unipotentes sont TP**K**.

43. [PLSR] Étant donné des nombres complexes $a_1,\dots,a_n$, calculer le déterminant de

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & \cdots & \cdots & a_{n-1} \\ & & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & a_2 \\ a_2 & a_3 & \cdots & & a_1 \end{pmatrix}.$$

44. [PLSR] · ***a)*** Quelle est la dimension maximale d'une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ engendrée par une matrice nilpotente ?

b) Soient $m \in \mathbf{N}^*$, $A_1,\dots,A_m$ des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ qui commutent deux à deux, $\mathcal{A}$ la sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ engendrée par $A_1,\dots,A_m$. Montrer que la dimension de $\mathcal{A}$ est majorée par $n(n-\min\{\mathrm{rg}(A_i); 1 \leqslant i \leqslant m\})$.

45. [PLSR] · Déterminer tous les morphismes d'algèbres de $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ vers $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

46. [PLSR]· On note E l'ensemble des suites $u \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ de carré sommable. On fixe $a \in \mathbf{C}^*$ et $b \in \mathbf{C}$, et on considère l'opérateur $T_{a,b} : u \in E \longmapsto (au_{n+1} + bu_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Déterminer les $\lambda \in \mathbf{C}$ tels que $T_{a,b} - \lambda\, id$ ne soit pas bijectif.

47. [PLSR] Soit G l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}$ où $(a,b) \in \mathbf{C}^2$ et $|a|^2 + |b|^2 = 1$.

a) Vérifier que G est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{C})$.

b) Un sous-groupe H de G est dit distingué dans G si, pour tout $(h,g) \in H \times G$, $ghg^{-1} \in H$. Montrer que G possède exactement un sous-groupe distingué autre que G et $\{I_2\}$.

48. [PLSR] Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On note $G_n = (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^n$ avec sa structure de groupe produit. On note $V := \mathcal{F}(G_n, \mathbf{R})$ avec sa structure naturelle de $\mathbf{R}$-espace vectoriel.

a) Déterminer la dimension de V.

b) Pour $x \in G_n$, on note v_x la fonction indicatrice du singleton $\{x\}$. Pour x,y dans G_n, on note $x \sim y$ pour signifier que la liste $y - x$ a exactement un terme non nul. On définit un endomorphisme ψ de V par $\psi(v_x) = \sum_{y\in G_n, y\sim x} v_y$. Montrer que ψ est diagonalisable.

c) Montrer que tout morphisme de groupes de $(G_n,+)$ vers $(\mathbf{R}^*,\times)$ est un vecteur propre de ψ.

49. [P]· ***a)*** Montrer que si n est impair alors $\mathcal{A}_n(\mathbf{R})$ ne contient aucune matrice inversible.

b) On suppose n pair. On note $I = \{(i,j) \in \mathbf{N}^2 : 1 \leq i < j \leq n\}$. Montrer qu'il existe une fonction polynomiale $P : \mathbf{R}^I \to \mathbf{R}$ telle que $det(A) = P^2\big((a_{i,j})_{(i,j)\in I}\big)$ pour tout $A \in \mathcal{A}_n(\mathbf{R})$.

50. [P] · Soit E un espace euclidien, G un sous-groupe fini d'ordre $n > 1$ de $\mathcal{O}(E)$, et v un vecteur unitaire de E tel que $\|g(v) - v\|^2 < \frac{2n}{n-1}$ pour tout $g \in G$. Montrer qu'il existe un vecteur $w \in E \setminus \{0\}$ tel que $g(w) = w$ pour tout $g \in G$.

51. [PLSR] Soient A_1 et A_2 dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$. Montrer l'équivalence entre les conditions suivantes :

i) Toute combinaison linéaire de A_1 et A_2 est diagonalisable ;

ii) une, et une seule, des propriétés suivantes est vraie :

- toute combinaison linéaire non nulle de A_1 et A_2 admet deux valeurs propres réelles distinctes ;

- les matrices A_1 et A_2 sont codiagonalisables ;

iii) il existe $S \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbf{R})$ telle que, pour toute combinaison linéaire A de A_1 et A_2, on ait $SA \in \mathcal{S}_2(\mathbf{R})$.

52. [SR] · Soient $n \in \mathbf{N}^*$, $\mathcal{A}_n(\mathbf{R})$ le sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ des matrices antisymétriques.
Si - 1 n'appartient pas au spectre de $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, on pose $f(B) = (I_n - B)(I_n + B)^{-1}$.

a) Si $A \in \mathcal{A}_n(\mathbf{R})$, montrer que - 1 n'est pas valeur propre de A.

b) Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbf{R})$. Montrer que $f(A)$ est dans $\mathrm{SO}_n(\mathbf{R})$ et que - 1 n'est pas valeur propre de $f(A)$.

c) Examiner la réciproque de la propriété démontrée dans la question précédente.

d) Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbf{R})$. Que vaut $f(f(A))$? Que peut-on en déduire ?

e) Expliciter $f(A)$ pour $n = 2$.

f) Déduire de ce qui précède le théorème de réduction des matrices antisymétriques pour n pair.

53. [P] · Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telles qu'il existe $U \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ telle que $U\overline{U}^T = I_n$ et $A = UB\overline{U}^T$. Montrer qu'il existe $O \in \mathcal{O}_n(\mathbf{R})$ telle que $A = OBO^T$.

54. Soient $A \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ et M_i la matrice obtenue en supprimant la i-ième ligne et i-ième colonne de A. On note $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$ les valeurs propres de A et $\mu_1 \leq \cdots \leq \mu_{n-1}$ les valeurs propres de M_i. Montrer que $\lambda_1 \leq \mu_1 \leq \lambda_2 \leq \mu_2 \leq \cdots \leq \mu_{n-1} \leq \lambda_n$.

55. [PLSR] Pour $A \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$, soit $\lambda_1(A) \geq \cdots \geq \lambda_n(A)$ le spectre ordonné de A. Pour A et B dans $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$, i et j dans $\{1,\dots,n\}$ tels que $i + j \leq n - 1$, comparer $\lambda_{i+j-1}(A + B)$ et $\lambda_i(A) + \lambda_j(B)$.

56. [P] · Soit $P(X) = a_{2n}X^{2n} + \cdots + a_1X + a_0 \in \mathbf{R}[X]$ avec $a_{2n} \neq 0$. Montrer que la fonction associée à P est positive sur $\mathbf{R}$ si et seulement s'il existe $A = (A_{i,j})_{0 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{S}_{n+1}^{+}(\mathbf{R})$ telle que $a_k = \sum_{i+j=k} A_{i,j}$ pour $k \in [[0, 2n]]$.

57. [PLSR] Soient $A \in \mathcal{A}_n(\mathbf{R})$, $B \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbf{R})$. On suppose qu'il existe $K \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ telle que le spectre de $KA - AK + B$ soit inclus dans $\mathbf{R}^{+*}$. Montrer qu'il existe $c, C \in \mathbf{R}^{+*}$ tels que : $\forall t \in \mathbf{R}^+$, $\left\|e^{-t(A+B)}\right\|_{op} \leq C\, e^{-ct}$, où $\|\,\|_{op}$ est la norme subordonnée à la norme euclidienne canonique sur $\mathbf{R}^n$.

58. [PLSR] Soient $(E, \langle\,,\,\rangle)$ un espace vectoriel euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme symétrique. On munit $\mathcal{L}(E)$ de la norme subordonnée $\|\,\|_{op}$. Soient F un sous-espace vectoriel et A_F l'ensemble des projecteurs d'image F.
Montrer que l'ensemble $\{\|u \circ p - p \circ u\|_{\mathrm{op}}, p \in A_F\}$ admet un minimum.

59. [P] · Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Déterminer les fonctions f de $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ dans $\mathbf{R}^{+*}$ possédant les propriétés suivantes :
- pour $S \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ et $O \in \mathcal{O}_n(\mathbf{R})$, $f(O^TSO) = f(S)$;

- il existe une famille $(f_{i,j})_{1 \leq i \leq j \leq n}$ de fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telle que :

$$\forall S = (S_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R}),\ f(S) = \prod_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} f_{i,j}(S_{i,j}).$$

60. [P] · L'espace $\mathbf{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique et $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ de la norme subordonnée. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que : pour tous $n, d \in \mathbf{N}^*$, pour toutes matrices $A, B \in \mathcal{O}_n(\mathbf{R})$ vérifiant $A^d = I_n$ et $\|A^kB - BA^k\| \leq \delta$ pour tout $k \in \mathbf{N}$, il existe une matrice $B_1 \in \mathcal{O}_n(\mathbf{R})$ telle que $\|B_1 - B\| \leq \varepsilon$ et $AB_1 = B_1A$.

61. [PLSR]· Soit A,B dans $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$, et $k \in \mathbf{N}^*$.
Montrer que $tr\left((AB)^{2^k}\right) \leq tr\left((A^2B^2)^{2^{k-1}}\right)$.

62. [SR] Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ et $X_0 \in \mathbf{R}^n \setminus\{0\}$. Pour $k \in \mathbf{N}$, on pose $V_k := Vect(A^iX_0)_{0\leq i\leq k}$.
a) Montrer qu'il existe $k_0 \in \mathbf{N}$ tel que $\forall k \in [\![0,k_0]\!], \dim V_k = k+1$ et $\forall k > k_0, V_k = V_{k_0}$.

b) On définit par récurrence $(v_i)_{0\leq i\leq k_0}$ par $v_0 = \frac{1}{\|X_0\|} X_0$, $\widetilde{v_j} := Av_{j-1} - \sum_{i=0}^{j-1} \langle Av_{j-1}, v_i\rangle\, v_i$ pour tout $j \in [\![1, k_0]\!]$, $v_j = \frac{1}{\|\widetilde{v_j}\|}\widetilde{v_j}$. Montrer que cette famille est bien définie et est une base orthonormale de V_{k_0}.

c) Montrer que $\widetilde{v_j} - Av_{j-1} \in Vect(v_{j-1}, v_{j-2})$ pour tout $j \in [\![1,k_0]\!]$, où $v_{-1} := 0$.

d) On définit la matrice $T \in \mathcal{S}_{k_0+1}(\mathbf{R})$ par $t_{i,i} = \langle Av_i, v_i\rangle$, $t_{i,i+1} = t_{i+1,i} = \|\widetilde{v_{i+1}}\|$ et $t_{i,j} = 0$ pour tout couple $(i,j) \in [\![0,k_0]\!]^2$ tel que $|i-j| > 1$. Montrer que T a le même spectre que l'endomorphisme induit par $X \mapsto AX$ sur V_{k_0}.

63. [SR] On note $\|\,\|$ la norme euclidienne standard sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
a) Préciser la dimension de $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$.

b) Montrer que $\mathcal{S}_n^+(\mathbf{R})$ est un convexe fermé de $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$, et préciser son intérieur dans $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$.

c) Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$. Montrer qu'il existe un unique $P \in \mathcal{S}_n^+(\mathbf{R})$, que l'on déterminera, tel que : $\forall M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbf{R})$, $\|A - P\| \leq \|A - M\|$.

64. [L] Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$, et a,b deux réels strictement positifs tels que $aI_n - A$ et $A - bI_n$ soient positives. Soit X, Y dans $\mathbf{R}^n$ tels que $\langle X, Y\rangle = 0$. Montrer que :
$\langle X, AY\rangle^2 \leq \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2 \langle X, AX\rangle\langle Y, AY\rangle$.

65. [PLSR] Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, on note $C(A)$ sa comatrice. Soit U,V deux vecteurs unitaires de $\mathbf{R}^n$. On note P et Q les matrices canoniquement associées aux projections orthogonales sur $\{U\}^\perp$ et $\{V\}^\perp$, respectivement.
Montrer que $C(P)C(Q)C(P) = \langle U,V\rangle^2\, C(P)$.

66. [L] Une matrice H de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ est dite hermitienne lorsque, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $h_{i,j} = \overline{h_{j,i}}$ et une telle matrice est dite positive (resp. définie positive) lorsque toutes ses valeurs propres sont réelles positives (resp. réelles strictement positives).
a) Déterminer les formes linéaires f sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ telles que $f(I_n) = 1$ et $f(H) \in \mathbf{R}_+$ pour toute $H \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ hermitienne positive.

b) Déterminer les formes linéaires f sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ telles que $f(I_n) = 1$ et $f(H) \in \mathbf{R}_+^*$ pour toute $H \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ hermitienne définie positive.

67. [SR]· Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{R})$.
a) Justifier que AA^T est diagonalisable à valeurs propres positives.

On note $\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$ ses valeurs propres non nulles (avec multiplicité), et $S(A) = (\sqrt{\sigma_1}, \ldots, \sqrt{\sigma_r})$.

b) Comparer $S(A)$ à $S(A^T)$.

c) Montrer qu'il existe U dans $\mathcal{O}_n(\mathbf{R})$ et V dans $\mathcal{O}_p(\mathbf{R})$ telles que $U^TAV = R = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, avec $D = \mathrm{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$, où $S(A) = (\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$.

d) On considère $A^* = V R^* U^T$, avec $R^* = \begin{pmatrix} D^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{R})$. Interpréter géométriquement les matrices AA^* et A^*A, en commençant par examiner le cas particulier où A est inversible.

Analyse

68. [SR] On munit $\mathbf{R}^n$ des normes $\|\|_\infty$ et $\|\|_2$.
a) Montrer : $\forall x \in \mathbf{R}^n$, $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\ \|x\|_\infty$.

b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On suppose que : $\forall x \in \mathbf{R}^n$, $\|x\|_\infty \leq \|Ax\|_2$. Montrer qu'il existe x non nul tel que $\sqrt{n}\ \|x\|_\infty \leq \|Ax\|_2$.

c) Soit $x \in \mathbf{R}^n$. Montrer que, pour $1 < p \leq p' \leq +\infty$, $\|x\|_{p'} \leq \|x\|_p$.

69. [PLSR] · On fixe un entier $n \geq 1$.
a) Déterminer les plus petites constantes C et C' telles que $\forall X \in \mathbf{R}^n$, $\|X\|_2 \leq C\ \|X\|_\infty$ et $\|X\|_\infty \leq C'\ \|X\|_2$.

b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $\forall X \in \mathbf{R}^n, \|AX\|_2 \geq \|X\|_\infty$. Montrer qu'il existe $X \in \mathbf{R}^n$ telle que $\|AX\|_2 \geq \sqrt{n}\ \|X\|_\infty$.

c) Pour deux espaces vectoriels normés E et F de dimension finie, et $f \in \mathcal{L}(E,F)$, on note $\|f\| = \sup_{x \in E,\ \|x\|_E = 1} \|f(x)\|_F$. Lorsque $\dim E = \dim F$, on note

$d(E, F) = \inf\left\{\|f\| \times \|f^{-1}\|, f \in \mathcal{L}(E,F) \text{ isomorphisme}\right\}$.

Déterminer $d(E, F)$ lorsque $E = \mathbf{R}^n$ est muni de $\|\|_2$, et $F = \mathbf{R}^n$ muni de $\|\|_\infty$.

70. [PLSR] Soit $n \in \mathbf{N}^*$.
a) Montrer que l'ensemble des polynômes de degré n simplement scindés sur $\mathbf{C}$ est un ouvert de $\mathbf{C}_n[X]$.

b) Pour $t \in \mathbf{C}$, on pose $P_t = X^n - tX - 1$. Montrer qu'il existe n fonctions continues $x_1, \dots, x_n$ définies sur un voisinage V de 0 dans $\mathbf{C}$, à valeurs dans $\mathbf{C}$, telles que, si $t \in V$, $P_t = \prod_{i=1}^{n}(X - x_i(t))$.

71. [P] · Soit $f : x \in \mathbf{R}^* \mapsto 2x - \frac{1}{x}$. On pose $K = \cap_{n \in \mathbf{N}} f^{-n}([-1,1])$.
Montrer que K est un compact d'intérieur vide, sans point isolé, et que $f(K) = K$.

72. [P] · On note $\mathcal{B}([0,1], \mathbf{R})$ l'espace des fonction bornées de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$, et $\mathcal{C}([0,1], \mathbf{R})$ celui des fonctions continues. On munit ces espaces de la norme infinie.
Montrer qu'il n'existe pas d'application linéaire continue T de $\mathcal{B}([0,1], \mathbf{R})$ dans $\mathcal{C}([0,1], \mathbf{R})$ telle que $\forall f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbf{R})$, $T(f) = f$.

73. [PLSR] Soit $f : X \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \mapsto 2X - X^2 \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. On note Γ l'ensemble des $Y \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ qui sont limite d'une suite de la forme $(f^k(X))_{k \in \mathbf{N}}$ avec $X \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.
a) Déterminer Γ.

b) Pour $Y \in \Gamma$, déterminer les $X \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ telles que $f^k(X) \xrightarrow[k \to +\infty]{} Y$.

74. [PLSR] Soit $m \in \mathbf{N}^*$. Pour $u \in \mathcal{L}(\mathbf{Q}^m)$, on pose $\Psi_u(X) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbf{C}}(u)}(X - \lambda)$.

Étudier la bonne définition et la convergence de la suite (u_n) d'endomorphismes de $\mathbf{Q}^m$ définie par $u_0 = u$ et

$u_{n+1} = u_n - \Psi_u(u_n) \cdot \Psi'_u(u_n)^{-1}$ pour $n \in \mathbf{N}$.

75. [SR] On munit $GL_n(\mathbf{C})$ de la norme subordonnée à la norme $\|\ \|_\infty$. Déterminer le plus petit $a > 0$ tel qu'il existe un sous-groupe non trivial de $GL_n(\mathbf{C})$ inclus dans la boule fermée $B(I_n, a)$.

76. [P] Soient E un espace euclidien et A une partie bornée non vide de E.
Montrer qu'il existe une unique boule fermée de rayon minimal contenant A.

77. [SR] Soit $\|\ \|$ une norme sur $\mathbf{R}^n$. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ de la norme d'opérateur définie par : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $\|A\| = sup_{\|x\|=1}\|Ax\|$.

a) i) Montrer que, pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et $x \in \mathbf{R}^n$, $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$.

ii) Montrer que, pour $A,B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.

b) Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, on pose $\rho(M) = sup\{|\lambda|, \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\}$.

Montrer que, pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}$.

c) Soient $A \in GL_n(\mathbf{R})$, $b,b' \in \mathbf{R}^n$ non nuls et $X,X' \in \mathbf{R}^n$ solutions de $AX = b$ et $AX' = b'$. Montrer que $\frac{\|X - X'\|}{\|X\|} \leq C(A)\frac{\|b-b'\|}{\|b\|}$, où $C(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$.

d) L'inégalité précédente est-elle optimale ?

e) On considère $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ la matrice de terme général donné par $a_{i,j} = 1$ si $i = j$, $-1/2$ si $|j - i| = 1$ et 0 sinon.

i) Montrer que la matrice A est symétrique définie positive et donner ses éléments propres.

ii) Calculer $C(A)$ et en donner un équivalent lorsque $n \to +\infty$.

Commenter.

78. [PLSR] Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On munit $\mathbf{R}^n$ d'une norme $\|\ \|$ et l'espace $\mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ de la norme d'opérateur associée.
Montrer qu'il existe une base de vecteurs unitaires de $\mathbf{R}^n$ dans laquelle les formes linéaires coordonnées sont unitaires.

79. [P] Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite de matrices de déterminant 1 dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$, ainsi qu'une norme arbitraire N sur $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$. On suppose que $(A_n)_{n\geq 1}$ est bornée. On considère, pour tout $k \geq 1$, la matrice produit $B_k = A_k A_{k-1} \cdots A_1$.
On suppose enfin que $\frac{1}{n} \ln N(B_n)$ tend vers un réel $\gamma > 0$ lorsque n tend vers $+\infty$.
Montrer qu'il existe un vecteur non nul v de $\mathbf{R}^2$ tel que $\frac{1}{n} \ln\|B_n v\|_2$ tende vers $-\gamma$ lorsque n tend vers $+\infty$.

80. [L] On fixe un nombre premier p. On rappelle que v_p désigne la fonction de valuation p-adique sur $\mathbf{Z} \setminus \{0\}$.

a) Pour $r = \frac{a}{b}$ un rationnel avec a,b entiers, on pose $\|r\| = p^{v_p(a)-v_p(b)}$ si $a \neq 0$, et $\|r\| := 0$ sinon. Montrer que la quantité ainsi définie ne dépend effectivement que de r et non du couple (a,b) envisagé.

b) Montrer que $\|\ \|$ vérifie $\|r + s\| \leq max(\|r\|, \|s\|) \leq \|r\| + \|s\|$ pour tous r,s dans $\mathbf{Q}$, que $\|-r\| = \|r\|$ pour tout $r \in \mathbf{Q}$, que $\|\ \|$ est à valeurs positives et ne s'annule qu'en 0. On définit à partir de là, et comme pour une norme sur un $\mathbf{R}$-espace vectoriel, la notion de convergence vers 0 pour une suite à termes dans $\mathbf{Q}$.

c) Une suite $(a_n)_{n\geq 0}$ à termes dans $\mathbf{Q}$ est dite *de Cauchy* lorsque, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier $n_0 \geq 0$ tel que $\|a_n - a_m\| \leq \varepsilon$ pour tous $n \geq n_0$ et $m \geq n_0$. Montrer que si une telle suite ne tend pas vers 0, alors elle est à termes non nuls à partir d'un certain rang et la suite inverse $(1/a_n)_n$ est de Cauchy.

d) Montrer que l'ensemble $\mathcal{C}_p$ des suites de Cauchy à termes dans $\mathbf{Q}$ est un sous-anneau de $\mathbf{Q}^{\mathbf{N}}$.

e) Deux suites de Cauchy $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ sont dites équivalentes lorsque leur différence converge vers 0.

Montrer que l'on définit ainsi une relation d'équivalence sur $\mathbf{Q}^{\mathbf{N}}$. On considère l'ensemble quotient Q_p de l'ensemble des suites de Cauchy par cette relation d'équivalence. Montrer qu'il existe une unique structure d'anneau sur Q_p qui fasse de la projection canonique de $\mathcal{C}_p$ dans Q_p un morphisme d'anneaux.

f) Montrer que Q_p est un corps, et mettre en évidence un unique morphisme injectif de **Q** dans Q_p.

g) Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de Cauchy à termes dans Q. On appelle norme de a le réel :

$N(a) := \lim_{n\to+\infty} sup\{\|a_k\|; k \geq n\}$. Montrer que deux suites de Cauchy équivalentes ont la même norme, et en déduire une fonction $\|\|$ sur Q_p telle que $N(a) = \|[a]\|$ pour toute suite de Cauchy a à termes dans Q, dont on note $[a]$ la classe pour la relation d'équivalence précédente. Vérifier que $N(x+y) \leq max(N(x), N(y))$ pour tous x,y dans Q_p, que $N(-x) = N(x)$ pour tout $x \in Q_p$, et enfin que N est positive et ne s'annule qu'en l'élément nul de $\mathbf{Q}_p$.

h) Soit $\sum a_n$ une série à termes dans Q_p. Montrer qu'elle converge au sens de N si et seulement si $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0 au sens de N.

i) Le corps **R** est-il isomorphe au corps $\mathbf{Q}_p$?

81. [PLSR] Soit u une suite réelle. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une réindexation de u qui soit monotone à partir d'un certain rang.

82. [PLSR] Soient $d \geq 1$, et $A,B \in \mathcal{M}_d(\mathbf{C})$. Montrer $\left(e^{\frac{A}{n}}e^{\frac{B}{n}}\right)^n \longrightarrow_{n\to+\infty} \exp(A+B)$.

83. [P]· Pour $x \in \mathbf{R}$, on note $\lceil x \rceil$ le plus petit entier relatif supérieur ou égal à x. On définit une suite $u \in (\mathbf{N}^*)^{\mathbf{N}}$ par $u_0 = 1$, $u_n = 2u_{n-1}$ pour tout entier $n \geq 2$ qui est une puissance de 2, $u_n = \lceil (u_{n-1})/3 \rceil$ pour tout entier $n \geq 3$ qui est une puissance de 3, et enfin $u_n = u_{n-1}$ pour tout autre entier naturel $n \geq 1$. Montrer que u tend vers $+\infty$.

84. [SR] ***a)*** Soient $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ deux suites de réels > 0. On suppose que, à partir d'un certain rang, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$. Que dire des séries de termes généraux a_n et b_n ?
b) Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels > 0. On suppose que $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ avec $\alpha > -1$. Montrer que la série diverge.

c) Que dire si $\alpha < -1$?

85. [PLSR] Si $a = (a_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ est une famille sommable de complexes, on pose $\|a\| = \sum_{n\in\mathbf{Z}} |a_n|$.

Si $a = (a_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ et $b = (b_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ sont deux familles sommables de complexes, on pose : $\forall n \in \mathbf{Z}$, $(a * b)_n = \sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k b_{n-k}$.

a) Montrer que $a * b$ est bien définie, sommable, et que $\|a * b\| \leq \|a\| \times \|b\|$.

b) Montrer que * est commutative, associative. Déterminer un élément neutre pour *.

Si $a = (a_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ est sommable, on pose, pour $z \in U$, $f_a(z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n z^n$.

c) Montrer que f_a est continue sur le disque unité fermé D.

d) Si a est inversible pour *, montrer que f_a ne s'annule pas sur D.

e) On suppose que la suite a est à support fini et que f_a ne s'annule pas sur U. Montrer que a est inversible pour la loi *.

86. [P] Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de $]0,1[$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que, pour tout $x \in]0,1[$, il existe une permutation σ de $\mathbf{N}^*$ telle que $x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{\sigma(n)}}{2^n}$.

87. Soient $a, b, c \in \mathbf{R}$ et $f : x \mapsto 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx$. Montrer qu'il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = a + b + c$.

88. [L] Donner une fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continue en tout point de $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ et discontinue en tout point de $\mathbf{Q}$.

89. [SR] ***a)*** Rappeler la formule de Taylor avec reste intégral, en déduire l'inégalité de Taylor-Lagrange.
b) Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et f une fonction de classe C^n tels que f et $f^{(n)}$ soient bornées sur $\mathbf{R}$. Montrer que, si $1 \leq k \leq n - 1$, $f^{(k)}$ est bornée sur $\mathbf{R}$.

c) On reprend les hypothèses de la question ***b)*** avec $n = 2$.

Montrer que $\|f'\|_\infty \leq \sqrt{2\|f\|_\infty \|f''\|_\infty}$.

d) On reprend les hypothèses de la question ***b)*** . Montrer que, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n - 1$, $\|f^{(k)}\|_\infty \leq 2^{\frac{k(n-k)}{n}} \|f\|_\infty^{\frac{n-k}{n}} \|f^{(n)}\|_\infty^{\frac{k}{n}}$.

90. [SR] Soit $f : \mathbf{R}^{+*} \to \mathbf{R}^{+*}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$ et dont la dérivée n-ième s'annule en un unique $x_n > 0$ pour tout entier $n \geq 1$.
a) Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est strictement croissante.

b) Montrer que $\lim_{x\to 0} x^n f^{(n)}(x) = 0$ pour tout entier $n \in \mathbf{N}$.

c) Soit $g : x \in \mathbf{R}^{+*} \mapsto \frac{f(x)}{x}$. Montrer, pour $n \in \mathbf{N}$, l'existence de $(c_{n,p})_{0\leq p\leq n} \in \mathbf{R}^{n+1}$ tel que $g^{(n)}(x) = \sum_{p=0}^{n} c_{n,p} \frac{f^{(n-p)}(x)}{x^{p+1}}$. Montrer alors que $(-1)^n g^{(n)}$ est strictement positive sur $\mathbf{R}^{+*}$.

91. [PLSR] On fixe un entier $n \geq 2$. On note E l'ensemble des fonctions f de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ de $[0,1]$ dans $[-1, 1]$ qui sont aussi de classe $\mathcal{C}^n$ par morceaux et vérifient $|f^{(n)}(t)| \leq 1$ en tout point t où $f^{(n)}$ est définie.
a) Montrer que E est une partie convexe de l'espace vectoriel des fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$.

b) Un élément f de E est dit extrémal lorsque, pour tout $(g,h) \in E^2$ tel que $f = \frac{g+h}{2}$, on a $g = h = f$. Si $f \in E$, on pose $F_f = \{x \in [0,1] \ ; \ |f(x)| = 1\}$. Si $t \in F_f$, on définit m_t par les conditions $m_t = k$ si $f'(t) = \cdots = f^{(k-1)}(t) = 0$ et $f^{(k)}(t) \neq 0$ si $k \leq n - 1$, et $m_t = n - 1$ lorsque $f'(t) = \cdots = f^{(n-1)}(t) = 0$.

Montrer que si $f \in E$ est extrémal alors $\sum_{t\in[0,1]} m_t \geq n$.

c) Montrer que, si $f \in E$ est extrémal, alors $|f^{(n)}(t)| = 1$ en tout point t de $[0,1]$ où $f^{(n)}$ est définie.

92. [L] Soient I un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$, f et g deux fonctions de I dans $\mathbf{R}$ dont l'ensemble des points de continuité est dense dans I. Montrer que f et g ont un point de continuité commun.

93. [P] · Déterminer les fonctions $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continues et bornées telles que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\frac{1}{4}(f(x+1) + f(x-1) + f(x+\pi) + f(x-\pi)) = f(x)$.

94. [P] · Soit f une fonction de classe C^1 de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$ telle que $(f(x), f'(x)) \neq (0,0)$ pour $x \in [0, 1]$. Déterminer la limite, lorsque δ tend vers 0^+, de $\frac{1}{\delta}\int_0^1 1_{|f(t)|<\delta} |f'(t)| \, dt$.

95. [L] Soit $f \in C^0([0,1], \mathbf{R})$ telle que $\forall (x,y) \in [0,1]^2, x\, f(y) + y\, f(x) \leq 1$. Montrer que $\int_0^1 f(x)\ dx \leq \frac{\pi}{4}$.

96. [L] Soit $f \in \mathcal{C}^0([-\pi,\pi], \mathbf{R})$ monotone et continue par morceaux. On pose, pour $n \in \mathbf{Z}$, $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx}\, dx$. Montrer que la suite $(nc_n(f))_{n\in\mathbf{Z}}$ est bornée.

97. [SR] Calculer $\int_0^{+\infty}\int_x^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt\ dx$.

98. [L] · Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbf{R}^+, \mathbf{R})$ strictement décroissante telle que $f(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$.
Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{f(x)-f(x+1)}{f(x)}\, dx = +\infty$.

99. [P] Déterminer les suites croissantes u à termes positifs telles que, pour toute fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continue et intégrable, on ait $u_n\int_{\mathbf{R}}\left|f(x + 1/n) - f(x)\right| dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

100. [SR] Soit $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ tel que $a \geq b > 0$.
a) Montrer que $1 \leq \frac{a+b}{2\sqrt{ab}} \leq \sqrt{\frac{a}{b}}$, puis que $0 \leq \frac{\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}}{\frac{a+b}{2}+\sqrt{ab}}$.

b) On pose $I(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}}$. Calculer $I(a,a)$, puis démontrer que $I(a, b) = I\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right)$.

c) On définit deux suites réelles $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ par $a_0 = a, b_0 = b$ et, pour $n \in \mathbf{N}$, $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ et $b_{n+1} = \sqrt{a_nb_n}$. Étudier la convergence de $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$.

d) En déduire $I(a,b)$.

101. Soit $f \in \mathcal{C}^0(]0,1], \mathbf{R})$ décroissante. On pose $r_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ et $I(x) = \int_x^1 f(t)dt$ pour $n \in \mathbf{N}^*$ et $x \in]0, 1]$.
a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $I\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}f(1) \leq r_n \leq I\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)$.

b) Trouver une condition suffisante pour que (r_n) converge.

c) Soit $f : x \mapsto \frac{x^2-1}{4} - \frac{1}{2}\ln x$. Calculer r_n et en déduire la limite de $\frac{n!^{1/n}}{n}$ sans utiliser Stirling.

102. [P] Soient $f \in \mathcal{C}^0(\mathbf{R}^+, \mathbf{R})$ de carré intégrable et $g : x \mapsto f(x) - 2e^{-x}\int_0^x e^t f(t)dt$. Montrer que $\int_0^{+\infty} g^2 = \int_0^{+\infty} f^2$.

103. [SR] · Soit $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ continue et intégrable sur $\mathbf{R}^+$ telle que $\int_{\mathbf{R}^+} f = 1$.
On pose $g(x) = \int_x^{+\infty} f(t)dt$ pour $x \geq 0$.

a) Montrer que $\int_0^{+\infty} g = \int_0^{+\infty} xf(x)dx$ (dans $\overline{\mathbf{R}}$).

On suppose à présent que f est décroissante.

b) Montrer qu'il existe un unique $m \in \mathbf{R}^+$ tel que $\int_0^m f(x)dx = \frac{1}{2}$.

c) Montrer que $\int_0^{+\infty} xf(x)dx \geq m$.

104. [P] · Déterminer l'ensemble des fonctions réelles qui sont limites uniformes sur [-1,0] d'une suite de polynômes à coefficients positifs.

105. [SR] Pour $N \in \mathbf{N}^*$, on pose $g_N : x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z} \mapsto \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{x+n}$.

a) Montrer que $(g_N)_{N \in \mathbf{N}}$ converge simplement sur $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$. On note g sa limite.

b) Montrer que g est continue.

c) Montrer que g est impaire, 1-périodique et vérifie l'équation fonctionnelle :

$\forall x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z},\ g(x) = \frac{1}{2}\left(g(x/2) + g((x+1)/2)\right)$.

d) Montrer que $g(x) = \pi \operatorname{cotan}(\pi x)$ pour tout $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$.

106. [L] · On considère une suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de réels positifs telle $\sum e^{-\lambda_j t}$ converge pour tout $t > 0$. On suppose en outre que $\sum_{j=0}^{+\infty} e^{-\lambda_j t} \sim_{t \to 0^+} Bt^{-a}$ pour des réels $B > 0$ et $a > 0$.

On note E l'espace des fonctions $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ continues par morceaux et telles que $t \mapsto f(t)\, e^t$ soit bornée, et pour $f \in E$ on note $N(f) = \sup_{t \in \mathbf{R}_+} |f(t)\, e^t|$. On admet que (E,N) est un espace vectoriel normé.

Pour $f \in E$ et $t \in \mathbf{R}_+^*$, on note $L_t(f) = \sum_{j=0}^{+\infty} f(\lambda_j t)\, t^a$. On note F le sous-espace vectoriel de E engendré par les f_k : $t \mapsto \exp(-kt)$, pour $k \in \mathbf{N}^*$.

Pour $f \in E$, on note $L_0(f) = \frac{B}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} f(t)\, t^{a-1} \mathrm{d}t$ où $\Gamma(a) := \int_0^{+\infty} t^{a-1} e^{-t}\, \mathrm{d}t$.

a) Montrer que L_t est bien définie, linéaire et continue sur E.

b) Montrer que L_0 est bien définie, linéaire, continue et que $L_t(f) \xrightarrow[t \to 0^+]{} L_0(f)$ pour tout $f \in \overline{F}$.

c) Pour $x > 0$, on note $N_x := \left|\{j \in \mathbf{N}^*, \lambda_j \leq x\}\right|$. Montrer que $N_x \sim_{x \to +\infty} B \frac{x^a}{a\Gamma(a)}$.

107. [SR] · Soit a,b deux réels tels que $a \in]0,1[$, $b > 1$ et $ab > 1$.

On pose $f_{a,b} : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} a^n \cos(b^n \pi x)$ et $\alpha = -\frac{\ln a}{\ln b}$.

a) Montrer que $f_{a,b}$ est définie sur $\mathbf{R}$, bornée et continue.

b) Montrer que $f_{a,b}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b^{-n\alpha} \cos(b^n \pi x)$ pour tout réel x.

c) Montrer qu'il existe un réel $C > 0$ tel que $\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2, |f_{a,b}(x) - f_{a,b}(y)| \leq C\, |x - y|^\alpha$.

d) Soit $n \in \mathbf{N}$ et $x \in \mathbf{R}$. Calculer $\int_{x-h}^{x+h} f_{a,b}(t)\cos(b^n \pi t)\,dt$ pour $h = 2b^{-n}$.

108. [PLSR] On pose $p(n) = \left|\left\{(k_1,\ldots,k_N) \in (\mathbf{N}^*)^N ; N \in \mathbf{N}^*, k_1 + \cdots + k_N = n\right\}\right|$ pour $n \in \mathbf{N}^*$, et $p(0) = 1$. Montrer que, pour $|z| < 1$, $\sum_{n=0}^{+\infty} p(n) z^n = \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1-z^k}$.

109. [PLSR] Pour $z \in \mathbf{C}$ tel que $|z| < 1$, on pose $f(z+1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} z^n$.

a) Soient $u, v \in \mathbf{C}$ tels que $|u| < 1$, $|v| < 1$ et $|u + v + uv| < 1$.

Montrer que $f((1+u)(1+v)) = f(1+u) + f(1+v)$.

b) Soit $h(X) = (X - a_1)\ldots(X - a_n) \in \mathbf{C}[X]$ avec $a_1,\ldots,a_n$ non nuls.

Montrer que $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|h(re^{it})|\,dt = \ln|h(0)| + \ln\frac{r}{|a_1\ldots a_n|}$ pour $r > 3\max(|a_1|,\ldots,|a_n|)$.

110. [L] Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle décroissante, positive et de limite nulle telle que la suite $(a_n - a_{n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ soit également décroissante.

Montrer que, pour tous $n \in \mathbf{N}$ et $x \in [0,1]$, $\sum_{k=2n}^{+\infty} (-1)^{k+1} a_k x^k \leq x^{2n} \sum_{k=2n}^{+\infty} (-1)^{k+1} a_k$.

111. [L] Soient $C(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$ et $D(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} d_k x^k$ les sommes de deux séries entières à coefficients réels de rayon de convergence infini.
Soit $a > 0$ avec $a \neq 1$. On suppose que, pour tout entier naturel $n \in \mathbf{N}$, $C(a^n) = D(a^n)$.

a) On suppose que $c_k = d_k$ à partir d'un certain rang. A-t-on $C = D$?

b) On suppose $a \in]0,1[$. Montrer que $C = D$.

c) Donner un exemple de séries entières distinctes C et D, et de $a > 1$ pour lesquels la propriété est vérifiée.

d) On suppose que $a > 1$ et qu'il existe $r \in]0,1[$ tel que $c_k < r^{k^2}$ et $d_k < r^{k^2}$ pour tout entier $k \in \mathbf{N}$. Montrer que $C = D$.

112. [SR] · Pour $x \in [-1,1[$, on pose $L(x) = -\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}\,dt$.

a) Justifier la bonne définition de L sur $[-1,1[$ et montrer que L est prolongeable par continuité en 1.

b) Déterminer le développement en série entière de L en 0 et préciser son rayon de convergence.

c) Calculer $L(1)$.

d) Exprimer à l'aide de L la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n n^2}$.

e) Exprimer $L(x) + L(-x)$. Qu'en déduire ?

113. [PLSR] Soient $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence infini et $P \in \mathbf{C}[X]$ un polynôme de degré $k \in \mathbf{N}^*$.
Montrer l'existence d'une série entière de rayon de convergence infini et de somme g, et d'un polynôme $Q \in \mathbf{C}_{k-1}[X]$ tel que $\forall z \in \mathbf{C}$, $f(z) = g(z)\,P(z) + Q(z)$.

114. [SR] Soit a une suite réelle convergeant vers un réel $l \neq 0$.
a) Déterminer le rayon de convergence de $\sum \frac{a_n}{n} z^n$.

b) Déterminer la limite, quand t tend vers 1^-, de $\frac{1}{\ln(1-t)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n} t^n$.

c) On pose $b_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$. On suppose que $\sum a_n$ converge. Déterminer les rayons de convergence des séries entières $\sum_{n\geqslant 1} \frac{a_n}{n!} z^n$ et $\sum_{n\geqslant 1} \frac{b_n}{n!} z^n$. On note G et H leurs sommes respectives.

e) Exprimer G' à l'aide de H et H'.

f) Exprimer $\int_0^{+\infty} G(x)\, e^{-x}\, dx$ en fonction de $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

115. [P] · Soit $f : \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z} \to \mathbf{R}$ une fonction 1-périodique intégrable sur $]0,1[$.
a) Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $\theta \in \mathbf{R}$. Montrer qu'il existe une subdivision $(a_0,\dots,a_N)$ de $[0,1]$ telle que chacune des intégrales $\int_{a_i}^{a_{i+1}} \Big(\sum_{k=0}^{n-1} f(t + k\theta)^2\Big)^{1/2} dt$ soit bien définie.

On admet alors que leur somme ne dépend pas du choix de la subdivision envisagée, et on la note $\int_0^1 \Big(\sum_{k=0}^{n-1} f(t + k\theta)^2\Big)^{1/2} dt$.

b) Soit $\theta \in \mathbf{R}$. Déterminer la limite, quand n tend vers $+\infty$, de $\frac{1}{n}\int_0^1 \Big(\sum_{k=0}^{n-1} f(t + k\theta)^2\Big)^{1/2} dt$.

116. [SR] Soit $d \in \mathbf{N}^*$. On munit $\mathbf{R}^d$ de la norme euclidienne canonique. Soit $[a,b[$ un intervalle de $\mathbf{R}$, $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions de $[a,b[$ dans $\mathbf{R}^d$ continues par morceaux. On suppose que (f_n) converge uniformément sur tout compact vers $f : [a,b[\to \mathbf{R}^d$. On suppose de plus qu'il existe $g : [a,b[\to \mathbf{R}^+$ intégrable telle que : $\forall n \in \mathbf{N}$, $\forall t \in [a,b[$, $\|f_n(t)\| \leq g(t)$.
a) Montrer que $\int_a^b f$ et $\int_a^b f_n$, pour $n \in \mathbf{N}$, convergent. Montrer que $\int_a^b f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f$.

b) On pose $f_n : t \in \mathbf{R}^+ \mapsto \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n 1_{t\in[0,\sqrt{n}]}$. Montrer que (f_n) converge uniformément sur tout compact vers une fonction f que l'on déterminera. Montrer que $\int_0^{+\infty} f_n \to \int_0^{+\infty} f$.

c) Donner une expression exacte de $\int_0^{+\infty} f_n$ et retrouver la limite à l'aide de Stirling.

d) Montrer la convergence uniforme de (f_n) à l'aide du théorème de Dini (et en le démontrant dans le cas général).

117. [L] *a)* Montrer que $\forall u \in]-1,1[, \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} u^{2n} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$.

b) Montrer que l'application $f : x \in [-1,1] \mapsto \int_0^{\pi} \ln\left((\cos(t)+x)^2\right) dt$ est constante. On pourra poser $x = \cos(u)$ avec $0 \le u \le \pi$.

c) Que déduit-on des deux questions précédentes ?

118. [L] Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ continue et π-périodique.
Sous réserve d'existence, on définit, pour $\phi \in [-\pi,\pi]$ et $t \in \mathbf{R}$,

$$I_t(f)(\phi) = \int_{-\pi}^{\phi} \frac{f(\theta)}{(1-\cos(\theta-\phi))^{t-\frac{1}{2}}} d\theta + \int_{\phi}^{\pi} \frac{f(\theta)}{(1-\cos(\theta-\phi))^{t-\frac{1}{2}}} d\theta.$$

a) Pour quelles valeurs de t la quantité $I_t(f)(\phi)$ est-elle définie quelle que soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ continue π-périodique et quel que soit $\phi \in [-\pi,\pi]$?

b) Calculer, pour les réels t et ϕ en lesquels elle est définie, la quantité $I_t(1)(\phi)$ en fonction de $\int_0^1 x^{-t}(1-x)^{-\frac{1}{2}} dx$.

c) Montrer que $I_t(f)$ est continue pour tout réel $t < 1$.

119. [L] On pose $P(z,\theta) = \frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}-z|^2}$ pour $z \in \mathbf{C} \setminus \mathrm{U}$ et $\theta \in [-\pi,\pi]$.

a) Calculer $\int_{-\pi}^{\pi} P(z,\theta)\, d\theta$ pour $|z| < 1$.

b) Soit $f : S_1 \to \mathbf{R}$ continue sur $S_1 = \{z \in \mathbf{C},\ |z| \le 1\}$.

On pose $P(f)(z) = f(z)$ si $|z| = 1$ et $P(f)(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta})\, P(z,\theta)\, d\theta$ si $|z| < 1$.

Montrer que $P(f)$ est continue sur S_1.

120. [PLSR] Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continue et de limite nulle en $\pm\infty$.
a) Justifier qu'est correctement définie la fonction

$$u : (t, x) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R} \longmapsto \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4t}\right) f(y)\, dy.$$

b) Montrer que u est prolongeable en une fonction uniformément continue sur $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$.

121. [P] · Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$ continue à support compact d'intégrale 1. Déterminer les fonctions $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continues bornées telles que $\forall x \in \mathbf{R}, g(x) = \int_{\mathbf{R}} f(t)\, g(x-t)\, dt$.

122. [PLSR] · Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Soit $r \in \mathbf{R}_+^*$ tel que A n'ait pas de valeur propre de module r.

Donner une interprétation simple de la matrice $M(r) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} re^{i\theta}(re^{i\theta} I_n - A)^{-1}\mathrm{d}\theta$ en fonction de la matrice A (on montrera en particulier que $M(r)$ est un projecteur).

123. [L] On note E l'espace vectoriel des fonctions continues et intégrables de **R** dans **C**. Pour $f \in E$, on note $\hat{f} : x \mapsto \int_{\mathbf{R}} f(t)\, e^{-ixt}\, \mathrm{d}t$. On admet que $\hat{\hat{f}}(x) = 2\pi f(-x)$ pour tout $f \in E$ tel que $\hat{f} \in E$. Déterminer les complexes λ tels que l'équation $\hat{f} = \lambda f$ ait une solution non nulle $f \in E \setminus \{0\}$.
Ind. On pourra introduire le sous-espace vectoriel $\mathcal{S}$ des fonctions $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telles que $f^{(p)}(x) =_{x\to\pm\infty} O(|x|^{-n})$ pour tout $(n,p) \in \mathbf{N}^2$.

124. [L] ***a)*** Soit $x \in \mathbf{R}^{+*}$. Montrer que $\varepsilon \mapsto \int_{-x}^{-\varepsilon} \frac{e^{-x-t}}{t}\,\mathrm{d}t + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-x-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ possède une limite finie en 0^+, que l'on notera $I(x)$.
b) Déterminer un équivalent de I en 0^+.

125. [SR] · ***a)*** Montrer que la suite de terme général $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n)$ converge vers un réel strictement positif noté γ. On pose $\Gamma(x) := \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ pour $x > 0$.
b) Montrer que Γ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+^*$.

c) Montrer que $\Gamma'(1) = \int_0^{+\infty} \ln(t)\, e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

d) Établir successivement les expressions suivantes pour $\Gamma'(1)$:

$$\Gamma'(1) = \lim_{y\to 0^+}\left[\int_y^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}\mathrm{d}x + \ln y\right] = \int_0^{+\infty} e^{-x}\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{1-e^{-x}}\right]\mathrm{d}x.$$

e) Montrer que $\Gamma'(1) + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} =_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u} - e^{-(n+1)u}}{u}\,\mathrm{d}u + o(1)$, et conclure que $\Gamma'(1) = -\gamma$.

126. [L] Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ et (*) l'équation différentielle $X'(t) = AX(t)$. En discutant suivant la matrice A, donner l'allure des solutions de (*).

127. [SR] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Soit $\|\ \|$ une norme sur $\mathbf{C}^n$.
a) Déterminer $E_+ = \left\{x \in \mathbf{C}^n ; e^{tA}x \longrightarrow_{t\to+\infty} 0\right\}$ et $E_- = \left\{x \in \mathbf{C}^n ; e^{tA}x \longrightarrow_{t\to-\infty} 0\right\}$.

b) Si $E^+ = \mathbf{C}^n$, montrer qu'existe $(C,\delta) \in \mathbf{R}^{+*2}$ tel que $\forall x \in \mathbf{C}^n, \|e^{tA}x\| \leq Ce^{-\delta t}\|x\|$.

c) On fait l'hypothèse de ***b)*** . Soit B une application continue de $\mathbf{R}^+$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ tendant vers 0 en $+\infty$. Montrer que les solutions de l'équation différentielle $x'(t) = (A + B(t))x(t)$ tendent vers 0 en $+\infty$.

128. [SR] Soient $\lambda > 0$, $T > 0$ et $a \in \mathcal{C}(\mathbf{R}^+, \mathbf{R}^*)$.
On suppose l'existence de $\alpha > 0$ tel que $\forall T^* > T$, $\sup_{t\in]0,T^*[} \frac{1}{t}\int_0^t u^2\, a(u)\mathrm{d}u < \alpha$.

a) Énoncer le théorème de Cauchy linéaire.

On admet que l'équation différentielle $x' = \lambda + a(t)x^2$ admet une unique solution sur $\mathbf{R}^+$ s'annulant en 0.

b) On suppose que $1 > 4\alpha\lambda$. Soit $T^* > T$. On pose $r : t \in]0,T^*[\mapsto \sup_{s\in]0,t[}\frac{x(s)}{s}$.

i) Montrer que r est positive, continue et prolongeable par continuité en 0.

ii) Montrer qu'il existe $\mu < \alpha$ tel que $\forall t \in]0,T^*[$, $r(t) < \lambda + \mu r^2(t)$.

iii) Montrer que, soit x est bornée, soit $T^* = +\infty$.

129. [PLSR] Soit $a < 2$ un réel, et $u : \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^3$. On suppose que $u(t, 0) = u(t, 1) = 0$ pour tout $t > 0$, et $\partial_1 u(t,x) = (\partial_2)^2 u(t,x) + a\, u(t,x)$ pour tout $(t, x) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$. Montrer, pour tout $k \in [[0,3]]$, que $\int_0^1 \left((\partial_2)^k u(t,x)\right)^2 \mathrm{d}x \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$.

130. [L] · Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On considère des fonctions dérivables $y_1,\dots,y_n$ et des réels $a_{i,j} \in \mathbf{R}_+^*$ tels que, pour tout $1 \leq i \leq n$, $y_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\, y_j$ et $\lim_{t\to+\infty} y_i(t) = 0$. Montrer que $(y_1,\dots,y_n)$ est liée.

131. [SR] · On munit $\mathbf{R}$ d'une structure de groupe de loi notée $\star$, et de neutre noté e.
On suppose que la fonction f définie sur $\mathbf{R}^2$ par $f(x,y) = x \star y$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

a) Rappeler la définition de la différentielle d'une fonction $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ différentiable.

b) Montrer que $\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2$, $\partial_2 f(x \star y,e) = \partial_2 f(x,y)\partial_2 f(y,e)$.

c) Montrer l'existence de $\Phi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme tel que $\Phi(x \star y) = \Phi(x) + \Phi(y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. *Ind.* On pourra chercher Φ sous la forme $\Phi(x) = a\int_e^x \frac{\mathrm{d}t}{\partial_2 f(t,e)}$.

132. [PLSR] Soient $A = (A_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$, $D = \mathrm{Diag}(A_{1,1},\dots,A_{n,n})$, $b \in \mathbf{R}^n$ et f la fonction de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$ telle que $\forall x \in \mathbf{R}^n, f(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle$
a) Montrer que f a un unique point critique, qui est un minimum global.

b) Montrer que $D \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$.

c) Soient $(\alpha_k)_{k\geq 0}$ une suite réelle, $(x_k)_{k\geq 0}$ une suite d'éléments de $\mathbf{R}^n$ telle que, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $x_{k+1} = x_k + \alpha_k D^{-1}(b - Ax_k)$. Si $k \in \mathbf{N}$, soit $w_k = D^{-1}(b - Ax_k)$. Déterminer le signe de $\langle \nabla f(x_k), w_k\rangle$.

d) On suppose que x_k n'est pas point critique de f. Montrer qu'il existe un unique réel β_k en lequel $t \in \mathbf{R} \mapsto f(x_k + tw_k)$ est minimal.

e) On suppose qu'aucun des x_k n'est point critique de f et que, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\alpha_k = \beta_k$. Montrer que $(x_k)_{k\geq 0}$ converge.

133. [PLSR] Soit $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$. On suppose que $\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} \geq 0$. Montrer que la restriction de f à la boule unité fermée pour $\|\,\|_2$ admet un maximum, atteint en un point de la sphère unité.

134. [L] Soit $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ continue et minorée. On note $\|\,\|$ la norme euclidienne standard sur $\mathbf{R}^n$.
a) Soit $\lambda > 0$, $\varepsilon > 0$ et $x_0 \in \mathbf{R}^n$. Montrer que $g : x \mapsto f(x) + \frac{\varepsilon}{\lambda}\|x - x_0\|$ admet un minimum sur $\mathbf{R}^n$.

b) On suppose f différentiable. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $y_\varepsilon \in \mathbf{R}^n$ tel que $f(y_\varepsilon) \leq \inf(f) + \varepsilon$ et

$\|\nabla f(y_\varepsilon)\| \le \sqrt{\varepsilon}$.

135. [PLSR] Soient $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $L \in \mathbf{R}^{+*}$. Montrer l'équivalence entre
i) f est convexe et son gradient est L-lipschitzien,

ii) $\forall x,\ y \in \mathbf{R}^n$, $\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y\rangle \ge \frac{1}{L}\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|^2$.

136. [PLSR] On pose $V : x \in \mathbf{R}^n \mapsto \det\left(x_i^{j-1}\right)_{1\le i,j\le n}$. On note B la boule unité fermée de $\mathbf{R}^n$ pour la norme euclidienne standard, S la sphère unité, et H l'hyperplan d'équation $x_1 + \cdots + x_n = 0$. Montrer que V possède un maximum sur B, atteint en un point de $S \cap H$.

137. [P] · Montrer que la fonction $S \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R}) \mapsto \operatorname{tr}\left(e^S\right)$ est convexe.

Géométrie

138. [PLSR] ***a)*** Soit un polygone régulier à n sommets inscrit dans un cercle de rayon 1.
Calculer le produit des longueurs des cordes reliant un sommet fixé à tous les autres.

b) Pour α et β réels, on pose $E = \left\{\alpha\zeta + \beta\zeta^{-1},\ \zeta \in \mathbb{U}\right\}$.

Montrer que les points d'affixe dans E décrivent une ellipse.

c) On s'intéresse à l'image des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité par le paramétrage précédent.

Calculer le produit des longueurs des cordes reliant l'une de ces images à toutes les autres.

139. [P] Soient $d \in \mathbf{N}^*$, S une partie de $\mathbf{R}^d$ de cardinal $\ge d + 2$. Montrer qu'il existe deux parties disjointes A et B de S telles que $\mathrm{Conv}(A) \cap \mathrm{Conv}(B) \neq \varnothing$.

140. [PLSR] Une partie bornée P de $\mathbf{R}^n$ est un polyèdre si et seulement s'il existe $y_1,\dots,y_m \in \mathbf{R}^n$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbf{R}$ tels que $P = \{x \in \mathbf{R}^n; \forall i \in \{1,\dots,m\},\ \langle x, y_i\rangle \leqslant \alpha_i\}$.
Si P est un polyèdre, on dit que $x \in P$ est un sommet de P si et seulement si, pour tout $y,z \in P$, on a $y + z = 2x$ si et seulement $x = y = z$.

Montrer qu'un polyèdre a un nombre fini de sommets.

141. [L] · ***a)*** Soit $n \ge 3$. Si $A = (A_1,\dots,A_n)$ est un n-uplet de points du plan, on note $T(A) = (B_1, \dots, B_n)$, où B_i désigne, si $1 \le i \le n$, le milieu de $[A_i,A_{i+1}]$ (en convenant que $A_{n+1} = A_1$). Étudier la convergence de la suite $(T^k(A))_{k\ge 0}$.
b) Même question en fixant un élément α de $]0,1[$ et en considérant que, pour tout i, B_i est le barycentre de $((A_i,\alpha),(A_{i+1},1-\alpha))$.

142. [L] On se place dans $\mathbf{R}^2$. Les éléments de $\mathbf{Z}^2$ sont les points entiers. On appelle polygone entier un polygone dont les sommets sont des points entiers. Montrer que l'aire d'un polygone entier est égale à $i + \frac{k}{2} - 1$ où i est le nombre de points entiers à l'intérieur (strict) du polygone et k le nombre de points entiers sur le bord du polygone.

143. [PLSR] Soient E un espace euclidien, A une partie bornée non vide de E, d le diamètre de A, x un point de l'enveloppe convexe de A, $n \in \mathbf{N}^*$.
Montrer qu'il existe $(x_1,\dots,x_n) \in A^n$ tel que $\left\|x - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i\right\| \le \frac{d}{\sqrt{n}}$.

144. [L] ***a)*** Soit $(a,b,c,d,e,f) \in \mathbf{R}^6$ tel que $(a,b,c) \neq 0$. On considère la partie $\mathcal{C}$ de $\mathbf{R}^2$ définie par l'équation $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$. On suppose que $\mathcal{C}$ contient trois points non alignés et n'est pas incluse dans la réunion de deux droites. Montrer que, dans un repère orthonormal approprié, $\mathcal{C}$ possède une équation de l'une des trois formes suivantes : $\frac{X^2}{\alpha^2}+\frac{Y^2}{\beta^2}=1$ (ellipse), $\frac{X^2}{\alpha^2}-\frac{Y^2}{\beta^2}=1$ (hyperbole) ou $2pX - Y^2 = 0$ (parabole).

b) On considère un (vrai) triangle ABC de $\mathbf{R}^2$. On note A' (respectivement, B', C') le milieu de $[B, C]$ (respectivement, de $[C,A]$, de $[A,B]$). Montrer qu'une et une seule ellipse contient A', B', C' et est tangente à la droite (BC) (respectivement à (CA), à (AB)) en A' (respectivement en B', en C').

Probabilités

145. Une urne comporte n bulletins. On effectue des tirages avec remise de loi uniforme. Déterminer l'espérance M_n du nombre de tirages nécessaires pour avoir vu tous les bulletins. Donner un équivalent de M_n.

146. [PLSR] Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $(A_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ des variables aléatoires i.i.d. suivant la loi de Bernoulli de paramètre 1⁄2. Calculer l'espérance de $det(A - A^T)$ où A est la matrice $(A_{i,j})$.

147. [SR] On note $C_{n,k}$ le nombre de permutations de $\mathcal{S}_n$ qui ont k cycles à supports disjoints dans leur décomposition (en comptant les points fixes comme des cycles de longueur 1).

a) Calculer $C_{n,n}$ et $C_{n,1}$.

b) Montrer la relation de récurrence $C_{n+1,k} = nC_{n,k} + C_{n,k-1}$.

c) On note X_n la variable aléatoire qui donne le nombre de cycles d'une permutation tirée aléatoirement et de façon uniforme dans $\mathcal{S}_n$. Calculer la série génératrice de X_n.

d) Soient $(Y_i)_{1\leq i\leq n}$ des variables de Bernoulli indépendantes avec, pour $i \in\{1,\ldots,n\}$, $Y_i \sim \mathcal{B}(1/i)$. Montrer que $X_n \sim S_n$ où $S_n = Y_1 + \cdots + Y_n$.

e) Calculer $\mathbf{E}(S_n)$ et $\mathbf{V}(S_n)$. Que dire de ces valeurs lorsque $n \to +\infty$?

f) Étudier la convergence en probabilité de la suite $\left(\frac{X_n}{\ln n}\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$.

g) On pose $Z_n = \sum_{k=1}^{n} kY_k$. Exprimer, pour $\lambda > 0$, $\lim_{n\to+\infty}\mathbf{E}\left(\exp\left(-\lambda\frac{Z_n}{n}\right)\right)$ sous forme d'intégrale.

148. [SR] On définit la fonction de Moebius $\mu : \mathbf{N}^*\to\{0,1,-1\}$ par $\mu(1) = 1$, $\mu(n) = 0$ pour tout $n \geq 1$ divisible par le carré d'un nombre premier, et $\mu(n) = (-1)^{d_n}$ pour tout autre entier $n \geq 1$, où d_n est le nombre de diviseurs premiers de n.

a) Montrer que, pour tout $n \geq 2$, $\sum_{d|n}\mu(d) = 0$ (où la somme est étendue aux diviseurs *positifs* de n).

b) Soit $\alpha \in]0,1[$. Soit X_α, Y_α deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique de paramètre α. On note $q_k(\alpha) = \mathbf{P}(k \text{ divise } X_\alpha)$ pour $k \in \mathbf{N}^*$.

Déterminer $\lim_{\alpha\to 0^+} q_k(\alpha)$.

c) On note $f(\alpha) := \mathbf{P}(X_\alpha \wedge Y_\alpha = 1)$. Montrer que $f(\alpha) = \sum_{d=1}^{+\infty}\mu(d)\, q_d(\alpha)^2$.

149. [SR] Soit $\alpha \in]-1,1[$. On pose $f_\alpha : x \in \mathbf{R}\setminus\{-1/\alpha\} \longmapsto \frac{x+\alpha}{1+\alpha x}$.

Soit u le suite définie par récurrence par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f_\alpha(u_n)$ pour tout entier $n \in \mathbf{N}$.

a) Étudier les variations et les points fixes de f_α.

Que dire de la limite éventuelle de la suite u selon la valeur de α ?

b) Exprimer le terme général de la suite u en fonction de α et étudier sa limite.

c) Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle à valeurs dans $]-1,1[$. On pose $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f_{\alpha_n}(u_n)$. Que dire de la limite de u ?

d) Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $]-1,1[$. Que dire de la limite de u?

150. [SR] · Soit $a \in [0,1]$. Pour $z \in [0,1]$, on pose $\varphi_a(z) = 1-(1-z)^a$.
a) Montrer l'existence d'une variable aléatoire X_a valeurs dans $\mathbf{N}^*$ telle que

$\varphi_a(z) = \mathbf{E}(z^{X_a})$ pour $z \in [0,1]$.

b) Soit $(A_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une famille d'événements indépendants de l'espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{T},\mathbf{P})$ telle que $\forall k \in \mathbf{N}^*$, $\mathbf{P}(A_k) = \frac{a}{k}$. Montrer que X_a suit la même loi que la variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{P})$ par $I(\omega) = \inf\{n \in \mathbf{N}^*,\ \omega \in A_n\}$.

c) Soit (E) l'équation $\forall z \in [0,1],\ \varphi_a(z) = z\,\varphi(\varphi_a(z))$ d'inconnue φ, fonction génératrice d'une variable aléatoire.

i) Montrer que, si $a = \frac{1}{2}$, l'équation (E) admet une unique solution.

ii) Montrer que, si $a = \frac{1}{3}$, l'équation (E) n'a pas de solution.

151. [PLSR] · **a)** Soit $n \geq 1$, $\sigma > 0$ et $X_1,\dots,X_n$ des variables aléatoires réelles telles que $\forall t \in \mathbf{R},\ \forall i \in [\![1,n]\!]$, $\mathbf{E}(e^{tX_i}) \leq e^{t^2\sigma^2/2}$. Montrer qu'il existe un réel $C > 0$, indépendant de n et σ, tel que $\mathbf{E}(\max_{1\leq i\leq n}|X_i|) \leq C\sigma\sqrt{\ln(2n)}$.
b) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{Z}$. On suppose qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $\forall k \in \mathbf{Z}$, $\mathbf{P}(X = k) = \alpha\, e^{-k^2/2}$. Montrer que $\forall t \in \mathbf{R}, \mathbf{E}\left(e^{tX}\right) \leq e^{t^2/2}$.

152. [PLSR] Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$. On suppose qu'il existe $C > 0$ tel que $\forall n \in \mathbf{N}$, $\mathbf{P}(X = n) = \frac{e^{-n^2}}{C}$. Montrer que, pour $t \in [-1,1]$, $\mathbf{E}(e^{tX}) \leq e^{4t^2}$.

153. [PLSR] **a)** Soient $X_1,\dots,X_n$ des variables aléatoires réelles discrètes centrées admettant un moment d'ordre 2. Montrer que la matrice $(\mathrm{cov}(X_i,X_j))_{1\leq i,j\leq n}$ est symétrique positive.
b) Soit $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles discrètes centrées, admettant un moment d'ordre 2, et telles que $\mathrm{cov}(X_i,X_j)$ ne dépende que de $i-j$. On suppose que $\mathbf{V}(X_0) > 0$ et $\mathrm{cov}(X_n, X_0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, la matrice $(\mathrm{cov}(X_i,X_j))_{1\leq i,j\leq n}$ est symétrique définie positive.

154. [PLSR] · Soient f une fonction de $\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{R}$, $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles discrètes admettant un moment d'ordre 2, ayant toutes m pour espérance et telles que, si $(k, l) \in \mathbf{N}^{*2}$, $\mathrm{Cov}(X_k,X_l) = f(|k-l|)$.

a) On suppose que $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(k) \to 0$. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, soit $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$. Montrer que $(Y_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers m.

b) On suppose que la suite $(f(k))_{k\geq 0}$ est sommable. Montrer que la suite $(n\mathbf{V}(Y_n))_{n\geq 1}$ converge vers un nombre réel à préciser.

155. [PLSR] On construit une permutation aléatoire σ de $\mathfrak{S}_n$ de la manière suivante.
– On choisit d'abord x dans $[\![1,n]\!]$ aléatoirement en suivant la loi uniforme, et on pose $\sigma(1) := x$.

– Si $\sigma(1) \neq 1$, on choisit de même y dans $[\![1,n]\!] \setminus \{\sigma(1)\}$ et on pose $\sigma(\sigma(1)) := y$. Puis si $\sigma(\sigma(1)) \neq 1$, on choisit z aléatoirement dans $[\![1,n]\!] \setminus \{\sigma(1),\sigma^2(1)\}$ etc. On a ainsi obtenu un entier $k \in [\![1,n]\!]$ tel que $1,\ \sigma(1), \dots, \sigma^{k-1}(1)$

soient distincts, et $\sigma^k(1) = 1$.

– Si $k < n$, on répète le processus en construisant aléatoirement une permutation de $[\![1, n]\!] \setminus \{1, \sigma(1), \dots, \sigma^{k-1}(1)\}$.

Tous les tirages aléatoires sont supposés indépendants. Montrer que la permutation σ ainsi contruite suit la loi uniforme sur $\mathfrak{S}_n$.

156. [L] On considère une suite de variables aléatoires réelles (X_i) i.i.d. On suppose X_1 d'espérance finie avec $\mathbf{E}(X_1) > 0$. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on note $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Montrer que $\mathbf{P}(\forall n \in \mathbf{N}^*, \ S_n > 0) > 0$.

157. [PLSR] Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On prend deux variables aléatoires indépendantes X, Y suivant la loi uniforme sur $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Déterminer la probabilité de l'événement $(XY = 0)$.

158. [PLSR] · Soit n, m deux entiers naturels tels que $n \geq m$. On note A l'ensemble des injections de $[\![1, m]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$. On note B l'ensemble des surjections de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, m]\!]$. Comparer $\frac{|A|}{\left|[\![1,n]\!]^{[\![1,m]\!]}\right|}$ à $\frac{|B|}{\left|[\![1,m]\!]^{[\![1,n]\!]}\right|}$.
Ind. Considérer l'ensemble $\mathcal{P}$ des m-listes $(P_1, \dots, P_m)$ de parties non vides partitionnant $[\![1,n]\!]$, l'ensemble E des parties à m éléments de $[\![1,n]\!]$, et dénombrer de deux façons différentes les couples $((P_1, \dots, P_m), A)$ dans lesquels $(P_1, \dots, P_m) \in \mathcal{P}$, $A \in E$, et $A \cap P_i \neq \varnothing$ pour tout $i \in [\![1, m]\!]$.

159. [P] Soit X une variable aléatoire réelle discrète centrée. Montrer l'équivalence entre les trois conditions suivantes :
i) il existe $a > 0$ tel que $\forall \lambda \in \mathbf{R}, \mathbf{E}(e^{\lambda X}) \leq e^{a\lambda^2}$,

ii) il existe $b > 0$ tel que $\forall t > 0, \mathbf{P}(|X| \geq t) \leq 2e^{-bt^2}$,

iii) il existe $c > 0$ tel que $\mathbf{E}(e^{cX^2}) < +\infty$.

160. [SR] Soit $(\lambda, c) \in]0, 1[^2$. On se donne, sur un espace probabilisé, une suite $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de variables aléatoires, toutes à valeurs dans $[0, 1]$ et vérifiant les conditions suivantes :
i) $X_0 = c$;

ii) pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $x \in [0,1]$, $\mathbf{P}(X_{n+1} = \lambda + (1 - \lambda)X_n | X_n = x) = x$ et $\mathbf{P}(X_{n+1} = (1 - \lambda)X_n | X_n = x) = 1 - x$.

Pour $n \in \mathbf{N}$ et $p \in \mathbf{N}$, on note $u_n(p) := \mathbf{E}(X_n^p)$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe un ensemble $A_n \subset [0,1]$ de cardinal au plus 2^n tel que $\mathbf{P}(X_n \in A_n) = 1$.

b) Montrer que $u_n(1) = c$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

c) Montrer qu'il existe $\lambda_2 \in \mathbf{R}_+^*$ tel que $\forall n \in \mathbf{N}, |u_n(2) - c| \leq e^{-\lambda_2 n}$.

d) Montrer que $(1 - \lambda)^{p-1}(1 + (p - 1)\lambda) \in]0, 1[$ pour tout $p \geq 2$.

e) Montrer que pour tout $p \geq 2$, il existe $\lambda_p > 0$ tel que $u_n(p) - c \underset{n \to +\infty}{=} O(e^{-\lambda_p n})$.

161. [SR] ***a)*** Soit $n \geq 2$ et $k \in [\![1,n]\!]$. Dénombrer les manières de choisir k nombres dans $[\![1,n]\!]$ sans prendre deux nombres consécutifs.
b) On installe n couples, constitués d'un homme et d'une femme, autour d'une table ronde, en alternant hommes et femmes. Montrer que la probabilité que personne ne soit assis à côté de son partenaire est : $p_n =$

$$\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}(n-k)!\ .$$

c) Déterminer la limite de (p_n) quand n tend vers $+\infty$.

162. [PLSR] ***a)*** Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour toute variable aléatoire discrète X à valeurs dans $[0,1]$ non presque sûrement nulle, on dispose de l'inégalité $\sup_{t\geqslant 0} t\,\mathbf{P}(X \geq t) \geq C\,\frac{\mathbf{E}(X)}{\ln(2/\mathbf{E}(X))}$.

b) Montrer qu'il existe une constante $C' > 0$ et une suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de variables aléatoires à valeurs dans $[0, 1]$, non presque sûrement nulles, telle que $(\mathbf{E}(X_n))_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0 et $\forall n \in \mathbf{N}$, $\sup_{t\geqslant 0} t\,\mathbf{P}(X_n \geq t) \leq C'\,\frac{\mathbf{E}(X_n)}{\ln(2/\mathbf{E}(X_n))}$.

[Épreuves orales des concours]

[<]