Chapitre 17 : ESPACES VECTORIELS

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Ses éléments sont appelés « scalaires ».

Sauf précision, n désignera un naturel non nul.

I Structure d'espace vectoriel

I.1 Définitions

Définition

> *Soit E un ensemble. $(E, +, .)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ si :*
>
> *$+$ est une loi de composition interne sur E telle que $(E, +)$ est un groupe commutatif*
>
> *$.$ est une loi de composition externe sur E (une application de $\mathbb{K} \times E$ sur E) telle que :*
> *a) $\forall x \in E$, $1.x = x$,*
> *b) $\forall (x, y) \in E^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda.(x + y) = \lambda.x + \lambda.y$*
> *c) $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\forall x \in E$, $(\lambda + \mu).x = \lambda.x + \mu.x$*
> *d) $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\forall x \in E$, $\lambda.(\mu.x) = (\lambda\mu).x$*
>
> *Les éléments d'un espace vectoriel s'appellent des vecteurs, $\mathbb{K}$ est le corps de base de E, et on note 0_E (ou 0) l'élément neutre de $(E, +)$.*

| En général, on n'écrit pas le point de l'opération externe.

Proposition

> *Dans le même cadre :*
>
> *a) $\forall x \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda.x = 0_E \iff (\lambda = 0_{\mathbb{K}}$ ou $x = 0_E)$*
>
> *b) $\forall x \in E$, $-x = (-1).x$*

1▶

Théorème Définition :

> *Soit E_1, E_2, ..., E_n des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.*
>
> **Espace vectoriel produit** *de ces espaces : $(\prod_{i=1}^{n} E_i, +, .)$ où $+$ et $.$ sont définies par*
>
> $\forall (x_1, \dots, x_n) \in \prod_{i=1}^{n} E_i$, $\forall (y_1, \dots, y_n) \in \prod_{i=1}^{n} E_i$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$,
>
> $$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \text{ et}$$
>
> $$\lambda.(x_1, \dots, x_n) = (\lambda.x_1, \dots, \lambda.x_n)$$
>
> *En particulier, en notant $E = \prod_{i=1}^{n} E_i$, $0_E = (0_{E_1}, 0_{E_2}, \dots, 0_{E_n})$.*

2▶

I.2 Combinaison linéaire

Définition

• *Une* **combinaison linéaire d'un nombre fini de vecteurs** x_1, x_2, ...x_n *s'écrit :*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n$$

où les λ_i sont des scalaires.

• *Généralisation : une* **combinaison linéaire d'une famille de vecteurs** $(x_i)_{i\in I}$, *où I est un ensemble quelconque s'écrit :*

$$\sum_{j\in J} \lambda_j x_j$$

où J **est un sous-ensemble fini de** *I et où les λ_j sont des scalaires.*

Cela s'écrit aussi $\sum\limits_{i\in I} \lambda_i x_i$ où $(\lambda_i)_{i\in I}$ est une **famille presque nulle** *de scalaires, c'est-à-dire que les λ_i sont tous nuls sauf un nombre au plus fini d'entre eux.*

⚠ Une combinaison linéaire d'une famille de vecteurs est donc toujours une somme finie !

3▶

Pratique 1 :

1. Dans $\mathbb{R}^2$: montrer que $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ est combinaison linéaire de $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et de $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Y-a-t-il plusieurs possibilités ?

Mêmes questions avec u et $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$?

Quelles sont les combinaisons linéaires de (v_3, v_4) ?

2. Dans $\mathbb{R}^2$, donner une cns portant sur x et y pour que $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ soit proportionnel à (combinaison linéaire de) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Dessiner l'ensemble de ces vecteurs. Interpréter dans le plan complexe.

3. Dans $\mathbb{R}^3$, donner une cns portant sur x, y et z pour que $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ soit combinaison linéaire de $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est-il combinaison linéaire de (v_1, v_2) ?

I.3 Structure d'algèbre

Définition

$(A, +, ., \times)$ est une algèbre sur $\mathbb{K}$ si :

1) $(A, +, .)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$

2) $(A, +, \times)$ est un anneau

3) $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall (x, y) \in A^2$, $\lambda.(x \times y) = (\lambda.x) \times y = x \times (\lambda.y)$

4▶

I.4 Sous-espace vectoriel

$(E,+,.)$ désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

DÉFINITION

> *Une partie F de E est un sous-espace vectoriel de $(E,+,.)$ si $(F,+,.)$ forme un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.*

5▶

THÉORÈME

> *Une partie F incluse dans E est un sous-espace vectoriel de $(E,+,.)$ si, et seulement si,*
>
> *1) $0_E \in F$*
>
> *2) F est stable par combinaison linéaire : $\forall (x,y) \in F^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda x + y \in F$*

6▶

> Toujours préférer montrer que F est un « sous-espace vectoriel » plutôt qu'un espace vectoriel ! !
> Il faut donc avoir bien en tête les principaux « grands » espaces vectoriels de référence du cours !

THÉORÈME (INTERSECTION DE SOUS-ESPACES VECTORIELS) :

> *Toute intersection de sous-espaces vectoriels de $(E,+,.)$ en est un sous-espace vectoriel.*

7▶

⚠ En général, la réunion de deux sous-espaces vectoriels n'en est pas un ! !

8▶

THÉORÈME (SOUS-ESPACE VECTORIEL ENGENDRÉ PAR UNE PARTIE) :

> *Pour toute partie F de E, il existe un plus petit sous-espace vectoriel de $(E,+,.)$ (au sens de l'inclusion) qui contient F. C'est :*
>
> *- l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E qui contiennent F*
>
> *- l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de $F \cup \{0_E\}$.*
>
> *Ce sous-espace est appelé « sous-espace vectoriel de E engendré par F » et noté $\mathrm{Vect}(F)$.*
>
> *Inversement, si $G = \mathrm{Vect}(F)$, on dit que F est une* **partie génératrice** *du sous-espace vectoriel G de E.*

9▶

⚠ $\boxed{\text{Dès qu'on lit : } G = \mathrm{Vect}\, F \text{, c'est que } G \text{ est un sous-espace vectoriel !}}$

I.5 Sous-espaces affines

$(E,+,.)$ désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

10▶

Théorème Définition :

On appelle sous-espace affine de E toute partie $\mathcal{F}$ de E de la forme :

$$\mathcal{F} = x + F = \{x + f \mid f \in F\}$$

où x est un élément (point) de E et où F est un sous-espace vectoriel de E.

Le sous-espace vectoriel F ainsi associé à $\mathcal{F}$ est unique, c'est la direction de $\mathcal{F}$.

De plus, pour tout point A de $\mathcal{F}$ on a $\mathcal{F} = A + F$.

Deux sous-espaces affines de même direction sont dits parallèles.

Un sous-espace vectoriel de E est donc un sous-espace affine de E qui contient l'origine.
Les autres s'en déduisent par translations.

11▶

Pratique 2 :

1. Montrer que l'ensemble des $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$ tels que $x + 2y - z = 1$ forme un sous-espace affine de $\mathbb{R}^3$ de direction $\mathrm{Vect}(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$ et passant par le point $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (plan de l'espace $\mathbb{R}^3$).

2. Montrer que l'ensemble des $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$ tels que $\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ y - 3z = 1 \end{cases}$ est une droite ; en donner un point et la direction.

Proposition

Toute intersection de sous-espaces affines de E est soit vide soit un sous-espace affine de direction l'intersection de leurs directions.

12▶

II Familles de vecteurs

$(E,+,.)$ désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, et I désigne un ensemble.

II.1 Familles génératrices

Définition

Une famille $(x_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E est **génératrice de** E*, ou génère E, si l'ensemble de ses vecteurs forme une partie génératrice de E, c'est-à-dire que tout vecteur de E peut s'écrire comme combinaison linéaire des éléments de la famille.*

Si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice de E, alors pour tout vecteur x de E, **il existe au moins** une combinaison linéaire des vecteurs de la famille génératrice égale à x.
Autrement dit **il existe** une famille de scalaire $(\lambda_i)_{i\in I}$ presque nulle telle que $x = \sum\limits_{i\in I} \lambda_i x_i$.

13▶

Propriétés

1) Toute « sur-famille » d'une famille génératrice est génératrice.

2) La famille obtenue en enlevant un vecteur x d'une famille génératrice de E reste génératrice de E si, et seulement si, x est combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille.

3) On ne change pas le sous-espace engendré par une famille de vecteurs en permutant ces vecteurs ou en remplaçant un de ces vecteurs :
→ par un multiple non nul de lui-même,
→ par lui-même plus une combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille.

14▶

Pratique 3 :

1. Montrer que $((1,0);(0,1))$, $((1,0);(2,1))$ et $((1,0);(2,0);(1,3))$ génèrent $\mathbb{R}^2$.

2. Traduire en terme de famille génératrice :
- l'écriture générale d'un polynôme de $\mathbb{K}[X]$
- le théorème de Taylor pour les polynômes

II.2 Familles libres, familles liées

Définition

Une famille $(x_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E est libre s'il n'existe pas de combinaison linéaire nulle de ces vecteurs faisant intervenir un coefficient non nul.

Autrement dit : pour toute partie J finie incluse dans I et toute famille $(\lambda_j)_{j\in J}$ de scalaires,

$$\sum_{j\in J} \lambda_j x_j = 0_E \implies (\forall j \in J,\ \lambda_j = 0_{\mathbb{K}})$$

Si $(x_i)_{i\in I}$ est libre, on dit aussi que les x_i sont linéairement indépendants.

15▶

Proposition

Soit $x \in E$ et $(x_i)_{i\in I}$ une famille libre de vecteurs de E.

Si x peut s'écrire comme combinaison linéaire des éléments de la famille, alors cette écriture est unique.

Si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille libre de E, alors pour tout vecteur x de E, **il y a unicité en cas d'existence** d'une combinaison linéaire des vecteurs de la famille égale à x.

Autrement dit, **il existe au plus** une famille de scalaire $(\lambda_i)_{i\in I}$ presque nulle telle que $x = \sum\limits_{i\in I} \lambda_i x_i$.

16▶

⚠ Les familles libres permettent des identifications d'écritures, impossibles sinon !

Définition

Une famille de vecteurs est dite **liée** *si elle n'est pas libre.*

On dit aussi que ses vecteurs sont linéairement dépendants.

Proposition

Une famille de vecteurs est liée si, et seulement si, elle contient le vecteur nul, ou, un de ses éléments est combinaison linéaire des autres.

17▶

Propriétés

1) Toute « sous-famille » d'une famille libre est libre.

2) La famille obtenue en ajoutant un vecteur à une famille libre reste libre si, et seulement si, ce vecteur n'est pas combinaison linéaire des vecteurs de la famille de départ.

3) Une famille libre le reste si on remplace un de ses vecteurs :
→ par un multiple non nul de lui-même,
→ par lui-même plus une combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille.

18▶

Pratique 4 :

1. Montrer que $((1,0,1);(1,1,1))$ et $((1,0,1);(1,1,1);(0;0;1))$ sont deux familles libres de $\mathbb{R}^3$.

2. Qu'en est-il de $((1,0,1);(-2,0,-2))$ et de $((1,0,1);(1,1,1);(2;1;2))$?

3. Vérifier que $(1, X-a, (X-a)^2, \ldots, (X-a)^n, \ldots)$ forme une famille libre de $\mathbb{K}[X]$.

II.3 Bases

Définition

Une base de E est une famille de vecteurs de E libre et génératrice.

Si $\mathcal{B} = (e_i)_{i\in I}$ est une base de E, tout $x \in E$ se décompose de manière unique dans $\mathcal{B}$:
il existe une unique famille presque nulle $(\lambda_i)_{i\in I}$ telle que $x = \sum\limits_{i\in I} \lambda_i e_i$.

Les λ_i s'appellent les coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$.

19▶

Pratique 5 :

1. Vérifier que $\left(\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\right)$ forme une base de $\mathbb{R}^2$.

2. La famille $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-4\\1\end{pmatrix}\right)$ forme-t-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

3. Montrer que $\left(\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-3\\2\end{pmatrix}\right)$ est une base du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ formé des vecteurs $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ vérifiant $x+2y+3z=0$.

Théorème

Les bases de E sont les familles génératrices « minimales » : leur enlever un vecteur les empêche de générer E.

Les bases de E sont les familles libres « maximales » : leur ajouter un vecteur les rend liées.

20▶

III Espaces vectoriels de dimension finie

III.1 Définition, exemples

Définition

Un espace vectoriel est de dimension finie s'il existe une famille finie de vecteurs qui le génère.

Sinon, on dit qu'il est de dimension infinie.

21▶

III.2 Familles libres et familles génératrices

Théorème fondamental :

S'il existe une famille génératrice de E comptant n éléments, alors toute famille d'éléments de E de strictement plus de n éléments est liée.

Corollaire

(a) Si p vecteurs $e_1, \dots, e_p$ de E sont combinaisons linéaires de q vecteurs avec $p > q$, alors $(e_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ est une famille liée de E.

(b) Dans un espace vectoriel de dimension finie, le nombre d'éléments de toute famille libre est inférieur ou égal au nombre d'éléments de toute famille génératrice.

22▶

III.3 Bases, dimension

Soit $(E,+,.)$ un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$ non réduit au vecteur nul.

Théorème (Existence de bases et propriétés) :

> *(a) Il existe des bases dans E ; elles ont toutes même nombre d'éléments (ou cardinal), c'est la* **dimension de** E*, notée* $\dim E$*. Si $E=\{0_E\}$, on pose* $\dim E = 0$*.*
>
> *(b) Le cardinal d'une famille libre de E est toujours inférieur ou égal à* $\dim E$*.*
>
> *(c) Le cardinal d'une famille génératrice de E est toujours supérieur ou égal à* $\dim E$*.*

23▶

Pratique 6 :

Dans $\mathbb{R}_2[X]$, justifier rapidement que $(X-1,X+1)$ est libre, non génératrice, non basique, puis que $(X,X+1,(X-1)^2)$ est une base, puis que $(1,X-1,X^2,1+X+X^2)$ est génératrice, liée, non basique.

Construction d'une base :

→ par « extraction » d'éléments d'une partie génératrice, ou

→ par « adjonction » d'éléments à une partie libre.

Cela permet notamment de calculer une dimension.

Théorème de la base incomplète :

> *Soit $(l_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ une famille libre non basique de E et $(g_j)_{1\leqslant j\leqslant q}$ une famille génératrice de E. Il existe $j_1 ... j_r$ dans $[\![1,q]\!]$ tels que $(l_1,\dots,l_p,g_{j_1},\dots,g_{j_r})$ forme une base de E.*

> Autrement dit, on peut obtenir une base de E en ajoutant à toute famille libre certains éléments bien choisis d'une famille génératrice arbitraire de E.

24▶

Pratique 7 :

1. Compléter $e_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ en une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Compléter $(X(X-1),(X-1)(X+1))$ en une base de $\mathbb{R}_4[X]$.

Exemples à connaître :

$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2,\quad \dim \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) = pq,\quad \dim(E\times F) = \dim E + \dim F,\quad \boxed{\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n+1.}$

25▶

Proposition

> *Supposons* $\dim E = n$*. Alors :*
>
> $*$ *toute famille libre de n éléments de E forme une base de E*
>
> $*$ *toute famille génératrice de n éléments de E forme une base de E*
>
> $*$ *une famille de n vecteurs de E en est une base si, et seulement si, elle est libre ou génératrice*

26▶

Proposition

Supposons $\dim E = n$.

Tout sous-espace vectoriel F de E est de dimension finie, et $F = E$ ssi $\dim F = n$.

Plus généralement, si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E,

$$F = G \iff (G \subset F \text{ et } \dim F = \dim G)$$

27▶

III.4 Rang d'une famille de vecteurs

Soit $(E, +, .)$ un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et n un naturel non nul.

Définition

Le rang d'une famille $(x_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E est la dimension de $\mathrm{Vect}(\{x_i\}_{i\in I})$.

28▶

Proposition

Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille finie de vecteurs de E.

Alors le rang de $(x_1, \ldots, x_n)$ est inférieur ou égal à n ; il est égal à n si, et seulement si, cette famille est libre.

29▶

Définition

Soit $\mathcal{U} = (u_1, \ldots, u_n)$ une famille finie de vecteurs de E et $\mathcal{B}$ une base de E.

On appelle matrice de $\mathcal{U}$ dans la base $\mathcal{B}$ la matrice à n colonnes obtenue en plaçant en colonne j les coordonnées de u_j dans la base $\mathcal{B}$.

On la note : $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{U}) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u_1, \ldots, u_n)$

30▶

Pratique 8 :

Donner la matrice de $\mathcal{U} = (1, X-1, (X-1)^2)$ dans la base $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$.
Calculer les rangs de $\mathcal{U}$ et de cette matrice.

Théorème

Dans le cadre précédent, le rang de $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{U})$ est égal au rang de $\mathcal{U}$.
On note : $\mathrm{rg}(\mathcal{U}) = \mathrm{rg}(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{U}))$.

Ce rang se calcule donc par opérations élémentaires sur les lignes, ou sur les colonnes, ou les deux, de la matrice. Le rang d'une matrice est égal à celui de sa transposée.

En particulier, une matrice (carrée) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si, et seulement si, la famille de ses vecteurs colonnes (ou lignes) forme une base de $\mathbb{K}^n$.

31▶

Pratique 9 :

1. Donner le rang dans $\mathbb{R}^4$ de la famille finie de vecteurs $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

2. Rang de la famille donnée par sa matrice sur la base canonique de $\mathbb{K}^{2p}$: $\begin{pmatrix} \alpha & (0) & \alpha \\ & \ddots \quad \iddots & \\ & \iddots \quad \ddots & \\ \alpha & (0) & \alpha \end{pmatrix}$

3. Même chose avec les vecteurs colonnes de la matrice $[\sin(i+j)]_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$

Pour toute matrice M on a $\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}({}^{\mathrm{t}}M)$!
Les deux familles formées de ses vecteurs lignes et de ses vecteurs colonnes ont même rang.

III.5 Repères affines

Définition

Un repère affine de E est un couple $(A, (e))$ formé d'un point A de E appelé origine du repère et d'une base $(e) = (e_1, \ldots, e_n)$ de E.

Ainsi tout élément M (point) de E admet un unique n-uplet $(m_1, \ldots, m_n)$ de coordonnées (dites affines) dans ce repère, définies par :

$$\overrightarrow{AM} = \sum_{i=1}^{n} m_i e_i \text{ ou encore } M = A + \sum_{i=1}^{n} m_i e_i$$

32▶

Pratique 10 :

On note (i, j) la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
Donner les coordonnées du point $M = O + j$ dans le repère affine (A, e_1, e_2) où $\overrightarrow{OA} = i - j$, $e_1 = i + j$ et $e_2 = i - j$.

IV Somme de sous-espaces vectoriels

p désigne un naturel supérieur ou égal à 2.

Soit E_1, ..., E_p des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel $(E, +, .)$ sur $\mathbb{K}$.

IV.1 Somme

En général, $\bigcup\limits_{1 \leqslant i \leqslant p} E_i$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E ! ! !

33▶

DÉFINITION

$\sum_{i=1}^{p} E_i = \{x \in E \mid \exists (x_1, \dots, x_p) \in \prod_{i=1}^{p} E_i,\ x = \sum_{i=1}^{p} x_i\}$ *est l'ensemble des éléments de E pouvant s'écrire comme somme d'éléments des E_i.*

THÉORÈME

$\sum_{i=1}^{p} E_i$ *est un sous-espace vectoriel de E, c'est* $\mathrm{Vect}\left(\bigcup_{1\leqslant i\leqslant p} E_i\right)$.

Si les E_i sont de dimensions finies : $\dim \sum_{i=1}^{p} E_i \leqslant \sum_{i=1}^{p} \dim E_i$

34▶

IV.2 Somme directe de deux sous-espaces vectoriels

THÉORÈME DÉFINITION :

E_1 et E_2 sont en **somme directe**, *notée $E_1 \oplus E_2$, si on a une des conditions équivalentes :*

1) la décomposition de tout élément x de $E_1 + E_2$ sous forme $x = x_1 + x_2$, avec $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$, est unique

2) la décomposition de 0_E comme élément de $E_1 + E_2$: $0_E = 0_{E_1} + 0_{E_2}$, est unique

3) $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$

4) si E_1 et E_2 sont de dimensions finies : $\dim(E_1 + E_2) = \dim E_1 + \dim E_2$

35▶

DÉFINITION

E_1 et E_2 sont dits **supplémentaires dans** *E si $E = E_1 \oplus E_2$.*

En particulier, dans le cadre de la dimension finie :

THÉORÈME

$E = E_1 \oplus E_2$ si, et seulement si, 2 des 3 conditions suivantes sont vérifiées :

1) $E = E_1 + E_2$ *2) $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$* *3) $\dim E_1 + \dim E_2 = \dim E$*

36▶

PROPOSITION

Si E est de dimension finie, tout sous-espace vectoriel F de E admet des supplémentaires dans E.

Pour tout sous-espace vectoriel G tel que $E = F \oplus G$, on a : $\dim G = \dim E - \dim F$

37▶

Pratique 11 :

1. Soit $F = \text{Vect}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ et $G = \{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 3z = 0\}$. Montrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

2. Montrer que $\text{Vect}(1, X)$ est un supplémentaire de $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(1) = P'(1) = 0\}$ dans $\mathbb{R}_2[X]$.

3. Soit $F = \{(x, y, z, t, u) \in \mathbb{R}^5 \mid x - 2y + 3z - t - u = 0,\ 2x + y - z = 0,\ x + y + z - u = 0\}$. Donner une base et un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^5$.

Théorème (Formule de Grassmann) :

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de dimensions finies. Alors :

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim F \cap G.$$

38▶

IV.3 Généralisation : somme directe de sous-espaces vectoriels

39▶

Définition

* $\sum_{i=1}^{p} E_i$ *est directe (notée* $\bigoplus_{i=1}^{p} E_i = E_1 \oplus E_2 \oplus \ldots \oplus E_p$*) si la représentation de chacun de ses éléments comme somme d'éléments des* E_i *est unique.*

* E_1, …, E_p *sont supplémentaires dans* E *si* $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$ *c'est-à-dire si tout élément* x *de* E *s'écrit de manière unique sous la forme* $x = \sum_{i=1}^{p} x_i$ *avec* $x_i \in E_i$, $i \in [\![1, p]\!]$.

Théorème (caractérisations) :

$\sum_{i=1}^{p} E_i$ *est directe (on écrit* $\bigoplus_{i=1}^{p} E_i$*) si une des conditions suivantes équivalentes est vérifiée :*

1) la décomposition de tout élément x *de* $\sum_{i=1}^{p} E_i$ *sous la forme* $x = x_1 + \ldots + x_p$*, avec* $(x_1, \ldots, x_p) \in \prod_{i=1}^{p} E_i$*, est unique* *(définition)*

2) la décomposition de 0_E *comme élément de* $\sum_{i=1}^{p} E_i$: $0_E = 0_{E_1} + \ldots + 0_{E_p}$ *est unique* *(unicité de l'écriture de* 0_E*)*

3) $\boxed{\text{Pour } j \text{ de } 1 \text{ à } p-1,\ \left(\sum_{i=1}^{j} E_i\right) \cap E_{j+1} = \{0_E\}}$ *(géométrique)*

4) si les E_i *sont de dimension finie :* $\dim(\sum_{i=1}^{p} E_i) = \sum_{i=1}^{p} \dim E_i$ *(dimensions)*

40▶

Définition

Base adaptée à une décomposition en somme directe $E = \bigoplus_{j=1}^{p} E_j$ *: c'est une base* $(e_1, \ldots, e_{i_1}, \ldots, e_{i_p})$ *de* E *telle que* $(e_1, \ldots, e_{i_1})$ *forme une base de* E_1*,* $(e_{i_1+1}, \ldots, e_{i_2})$ *une base de* E_2*, etc.,* $(e_{i_{p-1}+1}, \ldots, e_{i_p})$ *une base de* E_p*.*

Pratique 12 :

Montrer que : $\mathbb{R}_2[X] = \text{Vect}(X) \oplus \text{Vect}(X-1) \oplus \text{Vect}(X(X-1))$

SAVOIR...

(1) *... démarrer une preuve montrant la liberté ou le caractère générateur d'une famille*

(2) *... trouver une base et un supplémentaire d'un sous-espace vectoriel donné par un système d'équations cartésiennes*

(3) *... les propriétés (dimensions, bases, etc.) des différents exemples d'espaces vectoriels et les utiliser pour construire des exemples et contre-exemples ($\mathbb{K}^n$, suites, matrices, polynômes, espaces de fonctions, etc.)*

(4) *... calculer le rang d'un système de vecteurs par opérations élémentaires*

(5) *... rédiger une preuve par analyse synthèse pour montrer qu'une somme est directe*

THÉORÈMES et PROPOSITIONS ...	**... OUTILS pour ...**
Théorème-Définition e.v. produit	*Calculs dans $\mathbb{K}^n$ ou autres produits*
Théorème de caractérisation des sous-espaces vectoriels	*Montrer qu'une partie forme un e.v. ou un s.e.v.*
Intersections de s.e.v. et s.e.v. engendré	*Identification d'une intersection et expression des éléments d'un s.e.v.*
Théorème-Définition des sous-espaces affines, intersections	*Expression et identification des sous-espaces affines*
Proposition sur les familles liées	*Traduction pratique du caractère lié d'une famille*
Théorème de caractérisation des bases parmi les familles libres ou génératrices	*Passage de libre ou génératrice à basique*
Théorème fondamental et corollaire	*Deviner qu'une famille est liée*
Théorème d'existence de bases en dimension finie	*Existence de bases en dimension finie*
Théorème de la base incomplète	*Construire une base*
Proposition famille libre ou génératrice + cardinal	*Identification de bases connaissant la dimension*
Proposition inclusion + dimension	*Montrer l'égalité entre deux s.e.v.*
Proposition et théorème sur rang d'une famille	*Calcul du rang d'une famille par celui d'une matrice*
Théorèmes de caractérisation d'une somme directe	*Montrer qu'une somme est directe*
Formule de Grassmann	*Calcul de la dimension d'une somme ou d'une intersection*