►► 9 : EQUA. DIFF.

1►

Tout ce qu'on a déjà vu plusieurs fois sans l'avoir forcément démontré.
Le deuxième point constitue ce qu'on appelle les théorèmes d'opérations pour les fonctions de classe C^k (resp. C^∞) sur un intervalle donné.

2►

$*$ Le nom "équation différentielle" : parce que l'équation dont on veut trouver les solutions notées x (fonctions de t) lie x et sa dérivée (ou ses dérivées plus tard).

$*$ L'adjectif "linéaire" : parce que l'application à t fixé $\varphi : x \mapsto a(t)x' + b(t)x$ est linéaire (on oublie le second membre $c(t)$ pour cela, comme on l'a fait pour les systèmes linéaires), c'est-à-dire que si x_1 et x_2 sont deux fonctions C^1 sur J et λ un scalaire, alors $\varphi(\lambda x_1 + x_2) = \lambda\varphi(x_1) + \varphi(x_2)$.
Autrement dit, toute combinaison linéaire de solutions sur J de l'équation homogène associée (H) : $a(t)x' + b(t) = 0$ est aussi solution de (H).

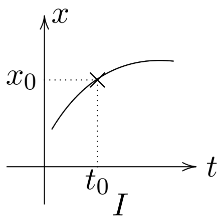
$*$ Pour l'instant, on cherche des fonctions solutions sur un sous-intervalle J de I à déterminer. Au départ, rien ne prouve que (E) admette des solutions, et s'il en existe, rien ne prouve qu'elles soient définies sur tout l'intervalle I.

En contrepartie, si la fonction $t \mapsto x(t)$ vérifie (E) pour tout $t \in J$ où J est un intervalle inclus dans I, alors pour tout intervalle K inclus dans J, la restriction de x à K est aussi une solution de (E), mais ça n'apporte pas grand chose de plus...

C'est pourquoi on cherche les solutions dite maximales : on ne peut pas prolonger une telle solution en une solution définie sur un intervalle plus grand qui contiendrait son domaine. Ou encore, une solution maximale n'est pas la restriction d'une autre solution définie sur un intervalle plus grand.

$*$ S'il existe une solution x de (E), alors il en existe une solution maximale : soit x est prolongeable en une solution sur un intervalle plus grand (et on recommence le raisonnement), soit elle est maximale...

$*$



Si x est solution de (E), on peut tracer son graphe.
En abscisse on repère l'intervalle I.
Le problème de Cauchy revient donc à se poser les deux questions suivantes :
a) pour une abscisse $t_0 \in I$ et une ordonnée x_0, passe-t-il en (t_0, x_0) une courbe de solution (maximale) ?
b) y a-t-il unicité d'une telle courbe de solution maximale, en cas d'existence ?

$*$ On voit par la forme de (E) que si on connaît la valeur d'une solution x en un point t_0, alors $x'(t_0)$ est imposé si $a(t_0) \neq 0$. C'est ce qui pousse à simplifier dans un premier temps le problème en traitant les équations résolues, de la forme (après division par $a(t)$ là où c'est possible) : $x' + \alpha(t)x = \beta(t)$

3►

Pour c constante, les solutions maximales de $x'(t) = c$ sont définies sur $\mathbb{R}$ par : $t \mapsto ct + cste$
Pour l'équation homogène associée (cas $c = 0$), on obtient les fonctions constantes sur $\mathbb{R}$.

L'ensemble des solutions s'écrit donc : $(t \mapsto ct) + \mathrm{Vect}(t \mapsto 1)$.

Sa structure se décrit ainsi : c'est le sous-espace affine de $C^1(\mathbb{R})$, de direction le sous-espace vectoriel de base $t \mapsto 1$ formant l'ensemble des solutions de l'équation homogène, et passant par la solution particulière $t \mapsto ct$.

On voit par calcul direct qu'il existe une unique solution maximale au problème de Cauchy en (t_0, x_0) qui est : $t \mapsto ct + (x_0 - ct_0) = c(t - t_0) + x_0$

4►

Clairement, $t \mapsto \mathrm{e}^t$ est solution, mais y-en-a-t-il d'autres ?

On peut ramener cette équation différentielle à la précédente en posant le changement de fonction : $x(t) = y(t)\mathrm{e}^t$, avec y de classe C^1 par théorème d'opérations puisque l'exponentielle ne s'annule pas, ce qui donne $y'\mathrm{e}^t + y\mathrm{e}^t = y\mathrm{e}^t$ et enfin $y' = 0$. Les solutions maximales de $x' = x$ sont donc définies sur $\mathbb{R}$ entier par : $t \mapsto cste.\mathrm{e}^t$

L'ensemble des solutions maximales de l'équation homogène $x' - x = 0$ est donc le sous-espace vectoriel de base exp. On peut le voir comme un sous-espace affine passant par la solution particulière nulle.

On voit par calcul direct qu'il existe une unique solution maximale au problème de Cauchy en (t_0, x_0) qui est : $t \mapsto x_0.\mathrm{e}^{-t_0}.\mathrm{e}^t = x_0\mathrm{e}^{t-t_0}$, définie sur $\mathbb{R}$.

En particulier, l'exponentielle est l'unique solution maximale de l'équation $x' = x$ vérifiant la condition initiale $x(0) = 1$.

5▶

Même principe !
En effectuant le changement de fonction : $x(y) = y(t).\mathrm{e}^{-at}$ possible avec y de classe C^1 puisque l'exponentielle ne s'annule pas, on adapte la preuve précédente pour obtenir le résultat.

6▶

$*$ Grâce au théorème fondamental et grâce aux théorèmes d'opérations, $\tilde{x}$ est de classe C^1 sur J puisque α est supposée continue et que exp est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, et il vient pour $t \in J$: $\tilde{x}'(t) = \tilde{x}(t).(-\alpha(t))$, donc on a bien : $\tilde{x}' + \alpha\tilde{x} = 0$. Ainsi $\tilde{x}$ est solution maximale (puisque sur J entier) de (H).

Reste à trouver d'éventuelles autres solutions maximales x de (H).

Pour cela, on effectue un changement de fonction en posant $x(t) = y(t).\tilde{x}(t)$ pour t dans l'intervalle de définition de x, possible puisque l'exponentielle ne s'annule pas et donne y de classe C^1.

Alors : $x'(t) + \alpha(t)x(t) = y'(t)\tilde{x}(t) + y(t).(-\alpha(t)\tilde{x}(t)) + \alpha(t).y(t).\tilde{x}(t) = 0$ puisque $\tilde{x}' = -\alpha x$. Il reste : $y' = 0$. Ainsi les solutions maximales de (H) sont les $t \mapsto cste.\tilde{x}(t)$, et cette expression étant possible sur J entier, ces solutions maximales sont définies sur J entier.

Ainsi $\mathcal{S}(H) = \mathrm{Vect}(\tilde{x})$, c'est le sous-espace vectoriel de $C^1(J, \mathbb{K})$ de base $\tilde{x}$.

$*$ Pour résoudre une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 1 résolue (entendez par là "qui fait partie d'une catégorie d'équations différentielles qu'on sait résoudre de manière générale"), on applique directement la formule du théorème : elle est donc à connaître, et il ne s'agit plus ensuite que de faire un calcul de primitive de $-\alpha$.

$*$ Êtes-vous convaincu du rôle crucial que joue l'exponentielle en analyse ? On ne voit d'ailleurs ici qu'un échantillon de ses possibilités...

Pratique 1 :

1. Équation différentielle linéaire d'ordre 1 résolue sur $\mathbb{R}$, homogène.
L'ensemble des solutions maximales est $\mathrm{Vect}(t \mapsto \mathrm{e}^{2t})$ (les solutions maximales s'écrivent $t \mapsto cste.\mathrm{e}^{2t}$).

2. Même description, ensemble des solutions maximales $\mathrm{Vect}(t \mapsto \mathrm{e}^{-3t^2/2})$.

3. Équation différentielle linéaire d'ordre 1 résolue sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$, homogène.
Ensembles de solutions maximales sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$: $\mathrm{Vect}(t \mapsto 1/t)$.

7▶

$*$ Effectuons encore le même changement de fonction (on a gardé la notation $\tilde{x}$ base de $\mathcal{S}(H)$) :
$x(t) = y(t).\tilde{x}(t)$ pour t dans l'intervalle de définition d'une solution maximale de (E) que l'on recherche. Par les mêmes arguments qu'en 6, on obtient :

$$y'(t).\tilde{x}(t) + y(t).(-\alpha(t)\tilde{x}(t)) + \alpha(t).y(t).\tilde{x}(t) = y'(t).\tilde{x}(t) = \beta(t)$$

Comme $\tilde{x}$ ne s'annule pas, $\beta/\tilde{x}$ est continue sur l'intervalle considéré, et on obtient :
$y(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} \frac{\beta(u)}{\tilde{x}(u)}\,\mathrm{d}u + cste$, où t_0 est un point choisi dans l'intervalle. Or cette expression est valide sur J entier, donc x est définie sur J entier, par la formule du théorème.

$*$ On retrouve pour le cas d'une équation homogène le résultat du théorème précédent lorsque $\beta = 0$...

$*$ La structure ainsi établie de l'ensemble des solutions est celle d'un sous-espace affine de $C^1(J,\mathbb{K})$ puisque toute solution maximale s'écrit comme la somme de la solution particulière $t \mapsto \tilde{x}(t)\displaystyle\int_{t_0}^{t} \frac{\beta(u)}{\tilde{x}(u)}\,\mathrm{d}u$ et de la solution générale de l'équation homogène.

$*$ La méthode utilisée pour toutes ces démonstrations est $\boxed{\text{la méthode de variation de la constante}}$.
Ce nom provocateur se comprend ainsi : les solutions de l'équation homogène s'écrivent $K.\tilde{x}$, pour K une constante quelconque. Pour obtenir la solution générale de (E), ou simplement une solution particulière, on a posé $x = K(t)\,\tilde{x}$ (on avait écrit $y(t)\tilde{x}$) avec K de classe C^1 sur J (par théorème d'opérations, l'exponentielle ne s'annulant pas), ce qui donne bien l'impression de faire varier la constante...

$*$ $\boxed{\text{En pratique}}$: on résout l'équation homogène grâce au théorème précédent, puis on cherche une solution particulière de l'équation avec second membre.
Bien souvent, comme on le verra plus loin, on devine ou on conjecture une forme de solution particulière, à partir de la forme de α et de β, et on vérifie en remplaçant dans l'équation.
<u>En cas d'échec, il faudra utiliser cette méthode de variation de la constante.</u>

8►

$*$ Le théorème de Cauchy-Lipschitz répond simplement aux questions de départ. Géométriquement, cela se traduit par le fait qu'en tout point (t_0, x_0) de la bande verticale de base J du plan $\mathbb{R}^2$, il passe une et une seule solution maximale de l'équation <u>résolue</u>, et que cette solution maximale est <u>définie sur J entier</u>.
Cette dernière propriété est propre aux équations différentielles linéaires (elle disparaît pour les équations différentielles non linéaires).
On "voit" donc qu'en traçant tous les graphes des solutions maximales de (E), on recouvre tous les points de cette bande verticale de base J (à cause de l'existence exprimée en chaque point), et ce sans jamais que deux courbes ne se croisent (on perdrait alors l'unicité).
$*$ Pour vérifier ce théorème, il suffit de montrer qu'il existe une unique constante K telle que $K\tilde{x}(t_0) + \tilde{x}(t_0)\displaystyle\int_{t_0}^{t} \frac{\beta(u)}{\tilde{x}(u)}\,\mathrm{d}u = x_0$. C'est vrai puisque $\tilde{x}$ ne s'annule pas, et en particulier $\tilde{x}(t_0) \neq 0$. Le fait de définir $\tilde{x}$ à partir de t_0 simplifie ce calcul...

La solution maximale solution au problème de Cauchy en (t_0, x_0) est donc : $t \mapsto x_0.\tilde{x}(t) + \tilde{x}(t).\displaystyle\int_{t_0}^{t} \frac{\beta(u)}{\tilde{x}(u)}\,\mathrm{d}u$ puisque $\tilde{x}(t_0) = 1$.

$*$ Si l'équation de départ n'est pas résolue, le théorème de Cauchy-Lipschitz tombe en défaut.
Par exemple, pour (E) : $0.x' + x = 0$, il n'y a pas de solution au problème de Cauchy en $(0,1)$.

9►

$*$ Ce paragraphe recouvre de nombreux cas : pour $u = 0$, le second membre est polynomial ; pour $P = 1$ c'est une exponentielle ; une fonction trigonométrique hyperbolique peut s'exprimer avec des exponentielles ; une fonction trigonométrique circulaire avec des exponentielles complexes...

$*$ *Preuve* : Posons $P(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$ de degré n.

Cherchons une solution particulière de la forme $t \mapsto \mathrm{e}^{ut}Q(t)$ avec $Q(t) = \sum\limits_{k=0}^{m} b_k t^k$ de degré m.

On reporte dans l'équation : $\mathrm{e}^{ut}(Q' + (u+\alpha)Q) = \mathrm{e}^{ut}P$ donne $Q' + (u+\alpha)Q = P$. Il y a deux cas :
- Si $u + \alpha \neq 0$, l'égalité des degrés donne $m = n$, puis :

$$(u+\alpha)b_n = a_n \text{ et } \sum_{k=0}^{n-1}((k+1)b_{k+1} + (u+\alpha))b_k)t^k = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k$$

ce qui donne un système linéaire triangulaire de $n+1$ équations aux $n+1$ inconnues b_k, et à coefficients diagonaux non nuls (égaux à $(u+\alpha)$), d'où l'unicité de la solution de cette forme.
- Si $u + \alpha = 0$, c'est-à-dire si $t \mapsto \mathrm{e}^{-\alpha t}$ est solution de (H), le terme $t \mapsto b_0\mathrm{e}^{-\alpha t}$ est solution de l'équation homogène et "disparaît" (il ne peut permettre d'"attraper" le second membre...), et on doit avoir $m = n + 1$ puisque $Q' = P$. On obtient une unique solution Q si on impose $Q(0) = 0$ (Q est l'unique primitive de P qui s'annule en 0), une infinité sinon puisque b_0 peut être choisi quelconque.

Pratique 2 :

1. $\mathcal{S}(H) = \text{Vect}(t \mapsto \mathrm{e}^{-t})$.
Solution particulière constante (puisque $u = 0$) : on obtient $t \mapsto 1$.
Donc : $\mathcal{S}(E) = (t \mapsto 1) + \text{Vect}(t \mapsto \mathrm{e}^{-t})$

2. On cherche une solution de forme $t \mapsto at + b$. Les solutions de (E) s'écrivent : $t \mapsto cste.\mathrm{e}^{-t} - t + 1$

3. Solution particulière : $t \mapsto (\frac{t}{3} - \frac{1}{9})\,\mathrm{e}^{2t}$ **4.** Solution particulière : $t \mapsto \frac{t^2}{2}\,\mathrm{e}^{-t}$

10▶

Ce qui est clair ; si $x_1' + \alpha x_1 = \beta_1$, $x_2' + \alpha x_2 = \beta_2$, ..., $x_k' + \alpha x_k = \beta_k$, alors en sommant :

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)' + \alpha(x_1 + x_2 + \ldots + x_k) = \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_k$$

Pratique 3 :

$\mathcal{S}(H) = \text{Vect}(t \mapsto e^{-2t})$.
Solution particulière pour le second membre 1 : $t \mapsto 1/2$.

Solution particulière pour le second membre $\sin(t)$: comme sin est une combinaison linéaire de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ et de $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}$, on superpose les conclusions du cas simple, et on cherche donc une solution particulière comme combinaison linéaire de ces deux exponentielles ; ou plutôt, pour retrouver une forme réelle, comme combinaison linéaire de cos et de sin, sous la forme $A\cos + B\sin$, et on obtient : $t \mapsto \frac{1}{5}(-\cos + 2\sin)$.

Solution particulière pour le second membre e^{-2t} : attention, c'est une solution de l'équation homogène, on cherche la solution particulière sous la forme $t \mapsto at\mathrm{e}^{-2t}$, et on trouve $a = 1$.

Les solutions s'écrivent : $t \mapsto K.\mathrm{e}^{-2t} + \frac{1}{2} + \frac{1}{5}(-\cos t + 2\sin t) + t\mathrm{e}^{-2t}$.

11▶

C'est ce qui est expliqué au point 7, et c'est ce que l'on a utilisé dans la plupart des preuves depuis le début de ce chapitre.

Pratique 4 :

L'équation est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$, avec : $\mathcal{S}(H) = \text{Vect}(t \mapsto 1/t)$
On applique la méthode de variation de la constante en cherchant une solution particulière sous la forme $t \mapsto K(t)/t$ avec K de classe C^1 sur l'un ou l'autre des deux intervalles. On obtient : $K'(t) = t\mathrm{e}^t$
Finalement : $\mathcal{S}(E) = (t \mapsto (1 - 1/t)\mathrm{e}^t) + \text{Vect}(t \mapsto 1/t)$

12▶

$*$ On revient ici à l'équation de départ (E) : $a(t)x' + b(t)x = c(t)$, une fois connues les solutions maximales des équations résolues définies sur les sous-intervalles de I où a ne s'annule pas.
Imaginons par exemple que t_0 soit un point isolé où a s'annule.

Une solution maximale x_1 de (ER) définie sur un intervalle de type $]t_1, t_0[$ est clairement une solution de (E). De même pour une solution maximale x_2 de (ER) définie sur un intervalle de type $]t_0, t_2[$.

Toutefois, rien ne prouve que x_1, ou que x_2, comme solutions de (E), soient maximales. En particulier, si les limites suivantes existent et vérifient : $\lim\limits_{t \to t_0^-} x_1 = \lim\limits_{t \to t_0^+} x_2$ et $\lim\limits_{t \to t_0^-} x_1' = \lim\limits_{t \to t_0^+} x_2'$, alors on peut définir une fonction x de restriction x_1 à gauche de t_0, et x_2 à droite de t_0, de classe C^1 sur $]t_1, t_2[$ grâce au théorème de prolongement, et qui est solution de (E) sur cet intervalle. Dans ce cas, x_1 et x_2 ne sont pas des solutions maximales de (E) !

Inversement, si x est une solution maximale de (E) sur un intervalle $]t_1, t_2[$ qui contient t_0, ses restrictions à $]t_1, t_0[$ et à $]t_0, t_2[$ sont des solutions de (ER) (si a ne s'annule qu'en t_0 sur $]t_1, t_2[$).

Conclusion : connaissant les solutions maximales de (ER), on cherche à les "raccorder" pour construire les solutions maximales de (E).

$*$ Exemple de (E) : $tx' - 2x = t$

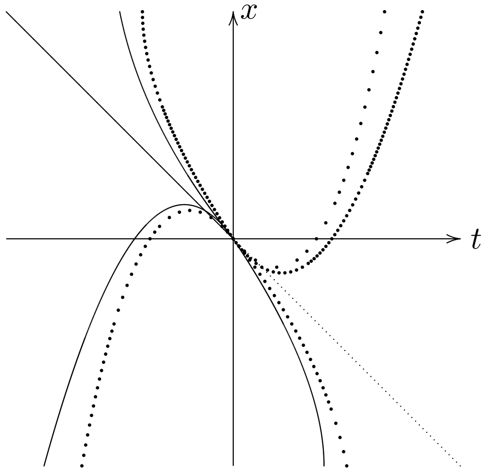
Cette équation différentielle linéaire d'ordre 1 est bien définie sur $\mathbb{R}$, résolue sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.

Sur ces intervalles, $\mathcal{S}(H) = \mathrm{Vect}(t \mapsto t^2)$, et on trouve $t \mapsto -t$ comme solution particulière.

On étudie donc d'éventuels raccordements entre une solution maximale définie à gauche de 0 par x_1 : $t \mapsto K_1 t^2 - t$, et une solution maximale définie à droite de 0 par x_2 : $t \mapsto K_2 t^2 - t$.
Les conditions de "raccordements C^1" sont vérifiées ici sans contraintes sur les constantes : $0 = 0$ (limites en 0) et $-1 = -1$ (limites des dérivées en 0).

Ainsi toute solution de type x_1 se raccorde à toute solution de type x_2 en 0. Les solutions maximales de (E) s'écrivent donc : $t \mapsto (K_1 \mathbb{1}_{\mathbb{R}_-}(t) + K_2 \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t))t^2 - t$ où K_1 et K_2 sont des constantes arbitraires.

Pour représenter les differentes types de solutions, on se rappelle que :
- sur les intervalles $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$, les courbes des solutions ne se coupent pas
- $t \mapsto -t$ est simple à tracer, c'est une bonne "séparatrice"
- en 0, les courbes solutions passent toutes pas l'origine avec une pente -1.



Étude du problème de Cauchy en (t_0, x_0) :
- si $t_0 \neq 0$, il passe par le point (t_0, x_0) une solution maximale au moins (existence) puisqu'on peut appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz à (ER) sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ suivant le signe de t_0. Localement (au voisinage de t_0), on a même une seule courbe solution d'après le même théorème. Mais cette solution se prolonge en $t = 0$ de multiples manières en une solution maximale définie sur $\mathbb{R}$ (il n'y a pas unicité).
- si $t_0 = 0$ et $x_0 \neq 0$: il n'y a pas de solution au problème puisqu'en 0 toutes les solutions maximales passent par la valeur 0.
- si $t_0 = 0$ et $x_0 = 0$: toutes les solutions maximales prennent la valeur 0 en 0. Il y a donc existence mais non unicité.

13►

$*$ Attention, le cadre du programme est moins général que pour l'ordre 1 puisque les coefficients de l'équation homogène sont constants. De plus, l'ordre 2 nécessite $a \neq 0$, donc une telle équation est toujours "résolue". Vous en saurez davantage l'an prochain pour le cas général ...

$*$ L'adjectif linéaire traduit la linéarité de $x \mapsto ax'' + bx' + cx$ (partie homogène) sur $C^2(I, \mathbb{K})$.

$*$ Les définitions sont calquées sur celles de l'ordre 1 : solution, solution maximale, équation homogène associée, second membre.

$*$ Attention à la formulation du problème de Cauchy : dans une telle équation, en un point t_0, il faut bloquer la valeur de x **et** celle de x' pour bloquer celle de x''. Une "condition initiale" en t_0 passe donc par l'imposition de $x(t_0)$ **et** de $x'(t_0)$.

14►

$*$ Si $d = 0$, l'équation correspond à l'équation homogène du cas général, de solutions maximales définies sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto A + Bt$ où A et B sont deux constantes arbitraires.

On écrit cela : $\mathcal{S}(H) = \text{Vect}(t \mapsto 1, t \mapsto t)$, c'est un sous-espace vectoriel de $C^2(\mathbb{R})$ de base $(t \mapsto 1, t \mapsto t)$, que l'on dit de dimension 2.

$*$ Dans le cas général, les solutions maximales (puisque définies sur I entier) s'écrivent :
$t \mapsto \displaystyle\int \left(\int d(u)\,\mathrm{d}u \right) \mathrm{d}t + At + B$ où A et B sont deux constantes arbitraires. Ce sont les sommes d'une solution particulière et d'une solution de l'équation homogène (et inversement). La structure de l'ensemble est celle d'un sous-espace affine de direction $\mathcal{S}(H)$:

$$\mathcal{S}(E) = \left(t \mapsto \int \left(\int d(u)\,\mathrm{d}u \right) \mathrm{d}t \right) + \text{Vect}(t \mapsto 1, t \mapsto t)$$

15▶

$*$ $\boxed{\text{Ces deux exemple sont les plus courants, bien les connaître !}}$

$*$ Traitons ici (E) : $x'' - x = 0$, l'autre équation se traitant de façon très similaire. Une solution "évidente" est donnée par l'exponentielle.
On applique la méthode de variation de la constante en cherchant une solution maximale x sur un intervalle J sous la forme $x(t) = K(t).\mathrm{e}^t$ avec K de classe C^2 sur J par théorème d'opérations, l'exponentielle ne s'annulant pas. En reportant on obtient : $K''+2K' = 0$. Ainsi, K' est solution d'une équation linéaire d'ordre 1, de solutions $K' : t \mapsto A\mathrm{e}^{-2t}$ avec A constante arbitraire, puis $K : t \mapsto B\mathrm{e}^{-2t} + C$ avec B et C deux constantes arbitraires.
Finalement, ces expressions étant définies sur $\mathbb{R}$, on trouve les solutions maximales définies sur $\mathbb{R}$ par : $t \mapsto B\mathrm{e}^{-t} + C\mathrm{e}^t$, soit $\mathcal{S}(H) = \text{Vect}(t \mapsto e^t, t \mapsto \mathrm{e}^{-t})$.
Comme $\text{ch}(t) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t})$ et $\text{sh}(t) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t})$, ch et sh sont des solutions maximales de (E). Comme ces formules s'inversent, on a également : $\mathcal{S}(H) = \text{Vect}(\text{ch}, \text{sh})$

16▶

Compte tenu de ce qui précède, on cherche une solution de (H) sous la forme $t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda t}$. C'est un peu empirique, mais ça marche, et vous verrez l'an prochain un argument plus élégant.
En remplaçant dans l'équation, on voit qu'il s'agit bien d'une solution (maximale puisque définie sur $\mathbb{R}$) si, et seulement si, λ est solution de l'équation caractéristique.

Soit λ_1 une solution de l'équation caractéristique. Appliquons une fois de plus la méthode de variation de la constante en cherchant les autres solutions maximales sous la forme : $t \mapsto K(t).\mathrm{e}^{\lambda_1 t}$. En remplaçant dans l'équation, on obtient : $a(K'' + 2K'\lambda_1 + \lambda_1^2 K) + b(K' + \lambda_1 K) + cK = 0$. Comme λ_1 est solution de l'équation caractéristique, il reste : $aK'' + (2a\lambda_1 + b)K' = 0$. C'est une équation différentielle en K', linéaire d'ordre 1, résolue, et homogène.

- Si $2a\lambda_1 + b = 0$, c'est que λ_1 est racine double de l'équation caractéristique (puisque $2\lambda_1 = -b/a$). On obtient $K(t) = K_1 t + K_2$ et donc $x(t) = K_1 t\mathrm{e}^{\lambda_1 t} + K_2\mathrm{e}^{\lambda_1 t}$ et finalement $\mathcal{S}(H) = \text{Vect}(t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda_1 t}, t \mapsto t\mathrm{e}^{\lambda_1 t})$.

- Si $2a\lambda_1 + b \neq 0$, on obtient : $K'(t) = A.\exp((-2\lambda_1 - \frac{b}{a})t)$, puis $K(t) = K_2 \exp((-2\lambda_1 - \frac{b}{a})t) + K_1$, puis $x(t) = K_1\mathrm{e}^{\lambda_1 t} + K_2\mathrm{e}^{\lambda_2 t}$ où λ_2 est la deuxième racine (distincte de λ_1) puisque $\lambda_1 + \lambda_2 = -b/a$ (relations coefficients-racines).

C'est le résultat du théorème.

17▶

$*$ La preuve est établie au point précédent.

$*$ Toute solution maximale de (E) est définie sur $\mathbb{R}$ et, suivant que (Ec) admet deux racines distinctes ou pas, de la forme : $t \mapsto K_1\mathrm{e}^{\lambda_1 t} + K_2\mathrm{e}^{\lambda_2 t}$, ou $t \mapsto K_1\mathrm{e}^{\lambda t} + K_2 t\mathrm{e}^{\lambda t}$, avec K_1 et K_2 scalaires arbitraires.

$*$ Étudions le problème de Cauchy en (t_0, x_0, x_1) : on cherche x solution telle que $x(t_0) = x_0$ et $x'(t_0) = x_1$.
Dans le cas où (Ec) admet deux racines distinctes λ_1 et λ_2, on résout le système linéaire :

$$\begin{cases} K_1\mathrm{e}^{\lambda_1 t_0} + K_2\mathrm{e}^{\lambda_2 t_0} = x_0 \\ \lambda_1 K_1\mathrm{e}^{\lambda_1 t_0} + \lambda_2 K_2\mathrm{e}^{\lambda_2 t_0} = x_1 \end{cases}$$

C'est un système de Cramer (le déterminant de la matrice associée est non nul égal à $e^{(\lambda_1+\lambda_2)t_0}(\lambda_2-\lambda_1)$) donc admet une unique solution en (K_1, K_2). Il y a donc existence et unicité de la solution maximale de (E) vérifiant les conditions initiales $x(t_0) = x_0$ et $x'(t_0) = x_1$.

Dans le cas où (E_c) admet une racine double $\lambda = -\dfrac{b}{2a}$, on résout le système linéaire :

$$\left\{\begin{array}{r} K_1 e^{\lambda t_0} + K_2 t_0 e^{\lambda t_0} = x_0 \\ \lambda K_1 e^{\lambda t_0} + (\lambda t_0 + 1) K_2 e^{\lambda t_0} = x_1 \end{array}\right.$$

C'est à nouveau un système de Cramer (le déterminant de la matrice associée est non nul et égal à $e^{2\lambda t_0}(\lambda t_0 + 1 - \lambda t_0) = e^{2\lambda t_0}$), donc il admet une unique solution en (K_1, K_2). Il y a donc aussi existence et unicité de la solution maximale de (E) vérifiant les conditions initiales $x(t_0) = x_0$ et $x'(t_0) = x_1$.

$*$ Géométriquement, il y a une grande différence avec l'ordre 1. Si l'on trace tous les graphes des solutions maximales, on recouvre le plan $\mathbb{R}^2$, mais ces courbes se croisent ! En effet, en tout point du plan (t_0, x_0) passe une telle courbe (existence), mais en fait une infinité puisqu'on a une solution pour chaque coefficient directeur de tangente x_1 imposé...

C'est pourquoi les dessins intéressants concernent l'ordre 1. On ne trace pas les graphes des solutions pour l'ordre 2, sauf cas particulier.

$*$ Est-il encore besoin de souligner l'importance de la fonction exponentielle ?

Pratique 5 :

1. Formes $t \mapsto K_1 e^t + K_2 e^{3t}$ avec K_1 et K_2 complexes,
ou encore ensemble de solutions maximales $\mathrm{Vect}(t \mapsto e^t, t \mapsto e^{3t})$.

2. $\mathrm{Vect}(t \mapsto e^{-it}, t \mapsto te^{-it})$ **3.** $\mathrm{Vect}(t \mapsto e^{jt}, t \mapsto e^{j^2 t})$

18▶

$*$ Quand l'équation différentielle est à coefficients réels, on aimerait sélectioner les solutions réelles... On peut les chercher en ajustant les coefficients des solutions complexes, ou procéder plus directement comme le propose ce théorème.

$*$ La preuve pour les deux premiers cas est identique à celle du théorème précédent, mais en utilisant des constantes réelles.

Pour le dernier cas (avec $\Delta < 0$), l'équation caractéristique étant à coefficients réels, ses deux racines distinctes sont conjuguées, disons $\alpha \pm i\beta$.
L'ensemble des solutions complexes est $\mathrm{Vect}(t \mapsto e^{\alpha t + i\beta t}, t \mapsto e^{\alpha t - i\beta t})$. Par demi-somme et différence divisée par 2i, on voit que $t \mapsto e^{\alpha t}\cos(\beta t)$ et $t \mapsto e^{\alpha t}\sin(\beta t)$ sont des solutions maximales de (E).
Inversement, $t \mapsto e^{\alpha t + i\beta t}$ et $t \mapsto e^{\alpha t - i\beta t}$ sont bien combinaisons linéaires des deux solutions précédentes (formules d'Euler...), donc finalement $\mathcal{S}(H) = \mathrm{Vect}(t \mapsto e^{\alpha t}\cos(\beta t), t \mapsto e^{\alpha t}\sin(\beta t))$. En n'utilisant que les combinaisons linéaires réelles, on récupère exactement les solutions réelles.
Dans ce dernier cas, toute solution réelle maximale de (E) s'écrit : $t \mapsto e^{\alpha t}\left(K_1\cos(\beta t) + K_2\sin(\beta t)\right)$ pour des constantes K_1 et K_2 réelles.

Pratique 6 :

1. $t \mapsto K_1 e^t + K_2 e^{-t}$ ou par combinaisons $t \mapsto K_1\,\mathrm{ch}(t) + K_2\,\mathrm{sh}(t)$, avec K_1 et K_2 constantes réelles.

2. $t \mapsto K_1\cos(t) + K_2\sin(t)$ avec K_1 et K_2 constantes réelles.

3. $t \mapsto e^{-t/2}(K_1\cos(\sqrt{3}t/2) + K_2\sin(\sqrt{3}t/2))$ avec K_1 et K_2 constantes réelles.

19▶

$*$ *Preuve :* On utilise à nouveau une méthode de variation de constante, en cherchant x solution maximale de (E) sous la forme $x(t) = K(t)e^{\lambda_1 t}$, où λ_1 est une racine de (Ec), et où par théorème d'opérations on a K de classe C^2 sur I.

En reportant dans (E) il vient, comme au point 16 : $aK'' + (2a\lambda_1 + b)K' = d$. C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 en K' résolue sur I, qui admet une solution particulière ; par calcul de primitive on obtient une solution particulière K, donc une solution x pour (E). Notons-la f.

Si x est une solution de l'équation homogène, alors en sommant $ax''+bx'+cx = 0$ et $af''+bf'+cf = d$, on voit que $x+f$ est solution de (E) (c'est la linéarité qui joue).

Inversement, soit x_1 et x_2 deux solutions de (E). En soustrayant $ax_1''+bx_1'+cx_1 = d$ et $ax_2''+bx_2'+cx_2 = d$, on obtient $x_1 - x_2$ solution de (H). □

∗ $\boxed{\text{En pratique}}$: pour résoudre (E), on résout (H), puis on cherche une solution particulière de (E) (comme pour les équations différentielles linéaires d'ordre 1). C'est le sujet du paragraphe suivant.

20▶

Même preuve qu'au point 17 pour les équations homogènes, et même interprétation géométrique.

21▶

∗ *Preuve* : on adapte la preuve du point 9 (c'est juste un peu plus technique). On utilise que :

- u est racine simple de (Ec) lorsque $2au + b \neq 0$ ($P(u) = 0$ et la dérivée de $P = aX^2 + bX + c$ ne s'annule pas en u)

- u est racine double de (Ec) lorsque $P(u) = 0$ et $2au + b = 0$, soit $u = -\dfrac{b}{2a}$. □

∗ Comme pour l'ordre 1, penser aux seconds membres polynomiaux, exponentiels, trigonométriques, trigonométriques hyperboliques, ils rentrent dans ce cadre.

Pratique 7 :

1. $\mathcal{S}(E) = (t \mapsto -\frac{1}{4}) + \mathrm{Vect}(t \mapsto \mathrm{e}^{2t}, t \mapsto \mathrm{e}^{-2t})$.

2. Même chose mais avec la solution particulière $t \mapsto -\mathrm{e}^t/3$.

3. Idem avec la solution particulière $t \mapsto t\mathrm{e}^t/4$.

22▶

Même preuve que pour le cas de l'ordre 1, c'est la linéarité de $f \mapsto af''+bf'+cf$ qui permet ce résultat...

Pratique 8 :

$\mathcal{S}(H) = \mathrm{Vect}(t \mapsto \cos(2t), t \mapsto \sin(2t))$.

Solution particulière avec le second membre 1 : $t \mapsto 1/4$

Solution particulière avec le second membre $\sin(t)$: $t \mapsto \sin(t)/3$

Solution particulière avec le second membre $\cos(2t)$: $t \mapsto t\sin(2t)/4$

Les solutions s'écrivent : $t \mapsto \dfrac{1}{4} + \dfrac{\sin t}{3} + \dfrac{t\sin(2t)}{4} + K_1\cos(2t) + K_2\sin(2t)$
avec K_1 et K_2 scalaires quelconques.