Chapitre 8 : CALCUL DE PRIMITIVES

I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Généralités

I.1 Primitive

Définition

Soit f continue de I dans $\mathbb{K}$.

La fonction g est une primitive de f sur I si g est de classe C^1 sur I et vérifie sur I : $g' = f$

Théorème

Deux primitives sur I d'une fonction continue sur I diffèrent d'une constante.

1▶

I.2 Intégrale d'une fonction complexe sur un segment

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction.

a) f est continue sur I si les fonctions $\mathcal{R}\mathrm{e}(f)$ et $\mathcal{I}\mathrm{m}(f)$ le sont. On écrit alors : $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{C})$.

b) Si f est continue sur $[a, b] \subset I$, on appelle intégrale de f sur $[a, b]$ le complexe : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \mathcal{R}\mathrm{e}(f)(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{i}\int_a^b \mathcal{I}\mathrm{m}(f)(t)\,\mathrm{d}t$.

Autrement dit, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est le nombre complexe tel que

$$\mathcal{R}\mathrm{e}\Big(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\Big) = \int_a^b \mathcal{R}\mathrm{e}(f)(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \mathcal{I}\mathrm{m}\Big(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\Big) = \int_a^b \mathcal{I}\mathrm{m}(f)(t)\,\mathrm{d}t.$$

2▶

Propriétés

f et g désignent deux fonctions de $\mathcal{C}(I,\mathbb{C})$; a, b, c sont trois points de I et λ est un complexe.

1) **Linéarité** : $\displaystyle\int_a^b (\lambda f(t)+g(t))\,\mathrm{d}t = \lambda\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$

2) **Inégalité de la moyenne (avec $a \leqslant b$)** : $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant (b-a)\sup_{t\in[a,b]}|f(t)|$

3) **Relation de Chasles** : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$

4) Si f et g sont à valeurs réelles et $a \leqslant b$:

Croissance : si $f \leqslant g$ sur $[a,b]$, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$

Positivité : si $f \geqslant 0$ sur $[a,b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$

Critère de nullité : soit f continue et à valeurs positives sur $[a,b]$.

Alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ si, et seulement si, f est nulle sur $[a,b]$.

3▶

I.3 Application intégrale

Définition

Soit $f \in \mathcal{C}(I,\mathbb{C})$, et a un point de I.

F_a définie pour tout x de I par $F_a(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est une application intégrale de f sur I.

Théorème fondamental :

(1) Soit $f \in \mathcal{C}(I,\mathbb{C})$ et a un point de I.

* *f admet des primitives sur I : ce sont les applications $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t +$ constante.*
* *Toute primitive g de f sur I vérifie en tout x de I : $g(x)-g(a) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.*
* *F_a est la seule primitive de f sur I qui s'annule en a.*

(2) Pour toute fonction g de classe C^1 sur I et tout x de I : $g(x)-g(a) = \displaystyle\int_a^x g'(t)\,\mathrm{d}t$.

4▶

Notation : $\displaystyle\int f(t)\,\mathrm{d}t$ est un raccourci pour désigner une primitive de f sur un intervalle où elle est continue, donc définie seulement à une constante près.

Exemple : $\displaystyle\int \sin(t)\,\mathrm{d}t = -\cos(t) + \textit{constante}.$

Pratique 1 :

1. Donner les primitives de $t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ sur $\mathbb{R}$.

2. Calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{2\pi} |\sin(t)|\,\mathrm{d}t$.

II Calcul de primitives

II.1 Cas simples : par le tableau des dérivées

a est un réel non nul. Les primitives se calculent sur les intervalles de continuité des fonctions. On utilise le tableau des dérivées usuelles et on ajoute certains cas simples :

(1) $\displaystyle\int \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^t + cste$ et $\displaystyle\int \mathrm{e}^{at}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{at}}{a} + cste$ (pour a complexe non nul)

(2) $\displaystyle\int t^a\,\mathrm{d}t = \frac{t^{a+1}}{a+1} + cste$ si $a \neq -1$ et $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln(|t|) + cste$

(3) $\displaystyle\int \cos(t)\,\mathrm{d}t = \sin(t) + cste$ et $\displaystyle\int \sin(t)\,\mathrm{d}t = -\cos(t) + cste$

(4) $\displaystyle\int \mathrm{ch}(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{sh}(t) + cste$ et $\displaystyle\int \mathrm{sh}(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{ch}(t) + cste$

(5) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \mathrm{Arctan}\,x + cste$ et plus généralement : $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\,\mathrm{Arctan}\,\frac{x}{a} + cste$.

(6) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \mathrm{Arcsin}\,x + cste$ et plus généralement : $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \mathrm{sgn}(a).\,\mathrm{Arcsin}\,\frac{x}{a} + cste$.

(7) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \tan x + cste$ et $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\,\mathrm{cotan}\,x + cste$.

II.2 Cas simples se ramenant au précédent

En utilisant la linéarité de l'intégrale, on sait calculer des primitives de :

$*$ combinaisons linéaires (sommes et multiples par des scalaires) des fonctions précédentes

$*$ sommes de produits de fonctions cos et sin : il « suffit » de linéariser

$*$ sommes de produits de fonctions ch et sh, par le même principe

$*$ fractions rationnelles simples : $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x+a} = \ln(|x+a|) + cste$,
$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+a)^r} = \frac{1}{(1-r)(x+a)^{r-1}} + cste$ pour r réel distinct de 1, $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \mathrm{Arctan}\,x + cste$.

En pratique, on ne peut pas toujours exprimer les primitives d'une fonction à l'aide des fonctions usuelles. Lorsque c'est possible, divers outils conduisent en général aux cas simples ou à un calcul de primitive d'une fraction rationnelle. Voyons ces outils...

II.3 Un premier outil : le changement de variable

Théorème

> *Soit f continue de I dans $\mathbb{C}$ et ϕ de $[a,b]$ dans I de classe C^1.*
> *Alors :* $\displaystyle\int_a^b f(\phi(u)).\phi'(u)\,\mathrm{d}u = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t.$

5▶

Applications :

- Si f est continue, paire ($\varepsilon = 1$) ou impaire ($\varepsilon = -1$) sur $[-a,a]$: $\displaystyle\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t = \varepsilon \int_{-a}^0 f(t)\,\mathrm{d}t.$
- Si f est continue et T-périodique sur $\mathbb{R}$: pour tout réel α, $\displaystyle\int_\alpha^{\alpha+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t.$

6▶

Pratique 2 :

1. Calculer : $\displaystyle\int_0^\pi \sin^2(t)\cos(t)\,\mathrm{d}t.$

2. Primitives de : a) $t \mapsto \dfrac{2t+1}{t^2+t+2}$ b) $t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{t}$ c) $t \mapsto t^2\mathrm{e}^{t^3}$ d) $t \mapsto \dfrac{t\,\mathrm{Arctan}(t^2)}{1+t^4}$

3. Montrer que $\displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \pi/2$

(faites disparaître le radical grâce à une formule trigonométrique)

II.4 Un deuxième outil : l'intégration par parties

Théorème

> *Soit $f \in C^1([a,b],\mathbb{K})$ et $g \in C^1([a,b],\mathbb{K})$.*
> *Alors :* $\displaystyle\int_a^b f'(t).g(t)\,\mathrm{d}t = [fg]_a^b - \int_a^b f(t).g'(t)\,\mathrm{d}t$ *où* $[fg]_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(a)$

7▶

Pratique 3 :

1. Calculer $\displaystyle\int_0^\pi t\cos(t)\,\mathrm{d}t.$

2. Primitives de $t \mapsto t\mathrm{e}^t$. Les retrouver par une autre méthode.

3. Primitives de $t \mapsto \mathrm{e}^t\cos(at)$ et $t \mapsto \mathrm{e}^t\sin(bt)$. Les retrouver par deux autres méthodes.

Revenons alors aux fractions rationnelles....

II.5 Parenthèse sur les fractions rationnelles

Définition

> *Une* **fraction rationnelle** *est un quotient* $F = \dfrac{P}{Q}$ *de deux polynômes.*

Pour tout polynôme non nul R (en particulier un scalaire non nul), on a alors : $F = \dfrac{PR}{QR}$
L'écriture de F n'est donc pas unique.

Inversement, $\dfrac{U}{V}$ est une **forme irréductible** de F si on ne peut pas la «simplifier» (U et V sont **premiers entre eux**).

Les autres formes irréductibles sont $\dfrac{\lambda U}{\lambda V}$ avec λ scalaire non nul.

Les racines de V sont appelées **pôles** de F, et le degré de F est la différence entre le degré de U et celui de V.

On se ramène d'abord à une forme plus simple par **division euclidienne** de P par Q (voir le théorème suivant) : $F = E + \dfrac{U_1}{V}$ où E est un polynôme appelé **partie entière** de F, et où U_1 est nul ou le degré de $\dfrac{U_1}{V}$ est strictement négatif.

Théorème de la division euclidienne :

> $\mathbb{K}[X]$ *est un anneau euclidien : si* V *est un polynôme non nul, pour tout polynôme* U *il existe un unique couple* (Q, R) *de polynômes tels que* $U = VQ + R$*, avec* $R = 0$ *ou* $\deg R < \deg V$.
>
> Q *et* R *sont respectivement les quotient et reste de la division euclidienne de* U *par* V.

Exemple : $X^2 = (X + 1)Q + R$ avec $Q = X - 1$ et $R = 1$, où $\deg(R) < \deg(X + 1)$

$*$ Ensemble des **multiples de** P : $P.\mathbb{K}[X] = \{S \in \mathbb{K}[X] \mid \exists Q \in \mathbb{K}[X], S = PQ\}$ (ce sont les polynômes dont le reste dans la division euclidienne par P est le polynôme nul).

$*$ **Diviseurs de** P : polynômes dont P est multiple.

$*$ **Polynôme irréductible** : polynôme de degré $\geqslant 1$ qui admet comme seuls diviseurs 1 et lui-même à une constante multiplicative non nulle près.

Exemple : X^2 et $X(X + 1)$ sont multiples de X, ou X divise X^2 et $X(X + 1)$

$*$ **Irréductibles unitaires de** $\mathbb{C}[X]$: les monômes $X - \alpha$ (par le **théorème de D'Alembert**).

$*$ **Irréductibles de** $\mathbb{R}[X]$: les monômes ($X - \alpha$, à une constante multiplicative non nulle près) et les polynômes de degré 2 à discriminant strictement négatif.

$*$ **Factorisation :** Tout polynôme non nul de $\mathbb{K}[X]$ s'écrit de manière unique à l'ordre près des facteurs comme produit d'une constante et d'irréductibles unitaires.

Exemple : $3(X + 1)(X - 2/3)$ est cette factorisation de $3X^2 + X - 2$.

$*$ α est **racine simple** de P si $X - \alpha$ divise P mais pas $(X - \alpha)^2$: $P(\alpha) = 0$ et $P'(\alpha) \neq 0$.

$*$ α est **racine d'ordre de multiplicité algébrique** k si $(X-\alpha)^k$ divise P mais pas $(X-\alpha)^{k+1}$, ou encore $P(\alpha) = \ldots = P^{(k-1)}(\alpha) = 0$ et $P^{(k)}(\alpha) \neq 0$.

THÉORÈME (RÉDUCTION EN ÉLÉMENTS SIMPLES D'UNE FRACTION RATIONNELLE F SUR $\mathbb{C}$) :

> *F s'écrit de manière unique à l'ordre près des termes comme somme de sa partie entière et des fractions rationnelles de la forme $\frac{\alpha_k}{(X-a)^k}$ où a décrit l'ensemble des pôles complexes de F et k décrit l'intervalle de naturels compris entre 1 et l'ordre de multiplicité du pôle a de F, et les α_k sont des complexes.*

9▶

Pratique 4 :

Appliquer le théorème à : **1.** $\frac{2X^3+X^2+X-1}{X^2+X+1}$ **2.** $\frac{X^4-1}{(X-1)(X-2)(X-3)^3}$

Méthodes pour réduire en éléments simples sur $\mathbb{C}$ une fraction rationnelle
(détermination des coefficients α_k)

a) (long) on reforme la fraction rationnelle et on identifie les coefficients du polynôme numérateur

b) (plus astucieux) on multiplie F par $(X-a)$ à la puissance l'ordre de multiplicité de a et on évalue en $X=a$, on soustrait le terme obtenu et on recommence

c) (avec encore plus d'astuces) on mélange la méthode précédente avec des évaluations en des points simples, voire à l'infini.

d) **pour réduire le nombre de calculs**, utilisez l'unicité du théorème : si la fraction est paire, impaire, ou réelle (égale à sa conjuguée) il en est de même de sa réduction !

10▶

Pratique 5 :

Réduire en éléments simples sur $\mathbb{C}$: **1.** $\frac{X+1}{X(X-1)(X-2)}$ **2.** $\frac{X^2}{(X-1)^2}$ **3.** $\frac{X-1}{(X^2+1)X}$

11▶

THÉORÈME (RÉDUCTION EN ÉLÉMENTS SIMPLES D'UNE FRACTION RATIONNELLE $F=\frac{U}{V}$ IRRÉDUCTIBLE SUR $\mathbb{R}$) :

> *F s'écrit de manière unique à l'ordre près des termes comme somme de :*
>
> *$*$ sa* **partie entière**,
>
> *$*$ des fractions rationnelles de la forme $\frac{\alpha_k}{(X-a)^k}$ où a décrit l'ensemble des* **pôles réels** *de F, k varie entre 1 et l'ordre de multiplicité du pôle a de F et les α_k sont des réels.*
>
> *$*$ des fractions rationnelles de la forme $\frac{\beta_k X+\gamma_k}{(X^2+bX+c)^k}$ où $X^2+bX+c=(X-d)(X-\bar{d})$ décrit l'ensemble des* **irréductibles de degré 2** *de V, k varie entre 1 et l'ordre de multiplicité du pôle complexe non réel d de F, et les β_k et γ_k sont des réels.*

12▶

Pratique 6 :

Appliquer le théorème précédent pour donner la forme de la réduction en éléments simples sur $\mathbb{R}$ des fractions : **1.** $\dfrac{X+1}{X(X-1)^2(X^2+X+1)}$ **2.** $\dfrac{2X^8+1}{(X^2-1)^2(X^2+2)^2}$

Il ne reste plus qu'à savoir donner une primitive des termes intervenant dans la réduction en éléments simples d'une fraction rationnelle.

• À partir d'une réduction sur $\mathbb{C}$:

1) Pour a réel : $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x+a} = \ln(|x+a|) + cste$,

2) Pour a complexe non réel : $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x-a} = \ln(|x-a|) + \mathrm{i}\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{x-\Re(a)}{\Im(a)}\right) + cste$,

3) Pour r entier distinct de 1 : $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+a)^r} = \frac{1}{(1-r)(x+a)^{r-1}} + cste$.

Pour le cas d'une fraction rationnelle réelle, on obtient les primitives réelles en regroupant les termes conjugués deux à deux.

• À partir d'une réduction sur $\mathbb{R}$:

Il reste à savoir calculer $\displaystyle\int \frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x$ où $p^2-4q<0$. En deux étapes :

(a) faire apparaître au numérateur la dérivée $u' = 2x+p$ de $u = x^2+px+q$, en écrivant $ax+b = \frac{a}{2}(2x+p)+K$; le premier terme conduit en posant $u = x^2+px+q$ à un logarithme,

(b) calculer ensuite une primitive de $K/(x^2+px+q)^n$; pour cela, on ramène x^2+px+q à t^2+1 en passant par la forme canonique : $x^2+px+q = (x+p/2)^2+q-p^2/4$, et poser $t = (x+\frac{p}{2})/\sqrt{(q-\frac{p^2}{4})}$.

On est ramené ainsi au calcul d'une primitive J_n de $t \mapsto \dfrac{1}{(t^2+1)^n}$, que l'on rencontre en général que pour $n=1$ ou 2... Deux méthodes sont alors possibles :

$*$ par récurrence : $\dfrac{1}{(1+t^2)^{n+1}} = \dfrac{1+t^2-t^2}{(1+t^2)^{n+1}}$ donc $J_{n+1} = J_n - \displaystyle\int \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}t$, puis une intégration par parties en posant $v=t$ et $\mathrm{d}u = \dfrac{t}{(1+t^2)^{n+1}}$ conduit à

$J_{n+1} = J_n + \left(\dfrac{t}{2n(1+t^2)^n} - \dfrac{J_n}{2n}\right)$, etc.,

$*$ par changement de variable : $t = \tan\varphi$, et il reste à linéariser $\cos^{2n-2}\varphi$ ...

13▶

Pratique 7 :

Donner les primitives de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+x+1}$

Il reste enfin quelques cas avec lesquels on sait se débrouiller...

II.6 Fractions rationnelles en cos et sin, ou en ch et sh

(a) Soit à calculer $\int F(\cos t, \sin t)\,\mathrm{d}t$. (Voir les deux premiers exemples de la pratique suivante).

Si F est polynomiale, on essaie les changements de variables $u = \cos t$, $u = \sin t$ ou $u = \sin 2t$, et la linéarisation permet en général de conclure.

Si F est une fraction rationnelle, la **règle de Bioche** propose les changements de variables suivants, liés à des invariants pour la fonction $\Phi : t \mapsto F(\cos t, \sin t)\,\mathrm{d}t$

(ne pas oublier dt qui change de signe si l'on change t en $-t$ ou en $\pi - t$)

$*$ si $\Phi(-t) = \Phi(t)$: poser $u = \cos t$, $\quad *$ si $\Phi(\pi - t) = \Phi(t)$: poser $u = \sin t$,

$*$ si $\Phi(\pi + t) = \Phi(t)$: poser $u = \tan t$, $\quad *$ sinon poser $u = \tan(t/2)$.

Il est donc impératif de bien connaître les formules trigonométriques :

$$\boxed{\cos(t) = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \quad \sin(t) = \frac{2u}{1+u^2} \quad \text{et} \quad \tan(t) = \frac{2u}{1-u^2}}$$

(b) Pour $\int F(\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t)\,\mathrm{d}t$ avec F fraction rationelle, on utilise $\Phi : t \mapsto F(\cos t, \sin t)\,\mathrm{d}t$:

$*$ si $\Phi(-t) = \Phi(t)$: poser $u = \operatorname{ch} t$, $\quad *$ si $\Phi(\pi - t) = \Phi(t)$: poser $u = \operatorname{sh} t$,

$*$ si $\Phi(\pi + t) = \Phi(t)$: poser $u = \operatorname{th}(t)$, $\quad *$ sinon poser $u = \mathrm{e}^t$.

> **Pratique 8** :
>
> Donner le changement de variable approprié pour le calcul de :
>
> **1.** $\displaystyle\int \frac{\cos^2(x)}{1+\sin(x)}\,\mathrm{d}x$ $\quad$ **2.** $\displaystyle\int \frac{\tan(x)}{\cos(x)+\sin^2(2x)}\,\mathrm{d}x$ $\quad$ **3.** $\displaystyle\int \frac{\operatorname{ch}(x)^2 + \operatorname{sh}(2x)}{\operatorname{th}(x)}\,\mathrm{d}x$

II.7 Expressions faisant intervenir des radicaux de trinômes de degré 2

$\boxed{\text{Éliminer } \sqrt{\cdots} \text{ en transformant } ax^2+bx+c \text{ en } t^2+1,\ t^2-1 \text{ ou } 1-t^2 \text{ par une formule trigo}}$

à partir de la factorisation canonique du trinôme (faire apparaître le début d'un carré) :

Cas t^2+1 : poser $t = \operatorname{sh}\varphi$ ou $t = \tan\varphi$ $\qquad$ (on utilise que $\sqrt{1+\operatorname{sh}^2} = \operatorname{ch}$)

Cas t^2-1 : poser $t = \operatorname{signe}(t)\operatorname{ch}\varphi$ $\qquad$ (on utilise que $\sqrt{\operatorname{ch}^2 - 1} = |\operatorname{sh}|$)

Cas $1-t^2$: poser $t = \sin\varphi$ $\qquad$ (on utilise que $\sqrt{1+\sin^2} = |\cos|$)

Exemple : $\sqrt{2x^2+x-1} = \sqrt{2}\sqrt{\left(x+\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{9}{16}}$ se ramène à $\sqrt{t^2-1}$ par $t = \frac{4}{3}\left(x+\frac{1}{4}\right)$ ·

14▶

> **Pratique 9** :
>
> Donner le changement de variable approprié pour le calcul de :
>
> **1.** $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{1-2x^2}}\,\mathrm{d}x$ $\quad$ **2.** $\displaystyle\int (x^2+x)\sqrt{3x^2-x+1}\,\mathrm{d}x$ $\quad$ **3.** $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+x-1}}\,\mathrm{d}x$

II.8 Récapitulatif des primitives à connaître

c désigne une constante quelconque.

Fonction $x \mapsto$	**Primitives** $x \mapsto$
e^x	$e^x + c$
x^r, $r \neq -1$	$\dfrac{x^{r+1}}{r+1} + c$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln(\lvert x \rvert) + c$
$\ln(x)$	$x\ln(x) - x + c$

Fonction $x \mapsto$	**Primitives** $x \mapsto$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{Arctan} x + c$
$\dfrac{1}{1-x^2}$	$\dfrac{1}{2}\ln\left\lvert \dfrac{1+x}{1-x} \right\rvert + c$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{Arcsin} x + c$
compléments	
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a}}$, a réel non nul	$\ln(x + \sqrt{x^2+a}) + c$

Fonction $x \mapsto$	**Primitives** $x \mapsto$
$\sin x$	$-\cos x + c$
$\cos x$	$\sin x + c$
$\tan x$	$-\ln(\lvert \cos x \rvert) + c$
$\operatorname{cotan} x$	$\ln(\lvert \sin x \rvert) + c$
$\dfrac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan x + c$
$\dfrac{1}{\sin^2(x)}$	$-\operatorname{cotan} x + c$
compléments	
$\dfrac{1}{\sin x}$	$\ln\left\lvert \tan \dfrac{x}{2} \right\rvert + c$
$\dfrac{1}{\cos x}$	$\ln\left\lvert \tan\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right) \right\rvert + c$

Fonction $x \mapsto$	**Primitives** $x \mapsto$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x + c$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x + c$
$\operatorname{th} x$	$\ln(\operatorname{ch} x) + c$
$\operatorname{coth} x$	$\ln(\operatorname{sh} x) + c$
$\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2(x)}$	$\operatorname{th} x + c$
$\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2(x)}$	$-\operatorname{coth} x + c$
compléments	
$\dfrac{1}{\operatorname{sh} x}$	$\ln\left\lvert \operatorname{th} \dfrac{x}{2} \right\rvert + c$
$\dfrac{1}{\operatorname{ch} x}$	$2\arctan e^x + c$

SAVOIR...

(1) *... le plan du cours pour le calcul d'une primitive :*

Base I : tableau des dérivées	*Base II : primitive d'une fraction rationnelle*
Toutes les méthodes ramènent aux bases I ou II via deux outils : CV ou IPP	
1) Forme $f(\Phi)\,\Phi'$ *(chercher* Φ' *visible)*	$\to$ *CV* $u = \Phi$
2) Fractions rationnelles en $\sin$, $\cos$	$\to$ *CV en* $\cos$, $\sin$, $\tan$ *ou* $\tan(x/2)$ *(Bioche)*
3) Fractions rationnelles en sh, ch	$\to$ *CV en* ch, sh, th *ou* $\exp$ *(Bioche)*
4) Radical de trinôme	$\to$ *forme can. vers* $1+t^2$ *ou* $\pm(1-t^2)$ *puis carré par trigo, CV*
5) Fct avec $\ln$, Arcsin, Arctan...	$\to$ *IPP*
6) Autres cas	$\to$ *CV* $u =$ *ce qui gêne (radical, exponentielle...)*

(2) *... obtenir la décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle, sur* $\mathbb{C}$, *sur* $\mathbb{R}$

(3) *... le tableau des primitives usuelles*

(4) *... qu'il existe deux outils principaux pour faire aboutir un calcul de primitives, et savoir les appliquer : le changement de variable et l'intégration par parties*

THÉORÈMES et PROPOSITIONS	**... outils pour ...**
Théorème fondamental de l'analyse	*Existence et expression des primitives*
Changement de variable et Intégration par parties	*Calculs pratiques de primitives*
Théorème de la division euclidienne	*Calcul partie entière d'une fraction rationnelle*
Théorème de réduction d'une fraction sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$	*Forme réduite, calculs de primitives*