Chapitre 11 : LIMITES ET CONTINUITÉ

I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$, D une partie de $\mathbb{R}$, et sauf précision, f une fonction de D dans $\mathbb{R}$.
$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Vocabulaire

Soit a un réel.

• V est un **voisinage** de a s'il existe $r > 0$ tel que $[a-r, a+r] \subset V$.
Extensions : V est un voisinage de $+\infty$ s'il contient un intervalle de type $[r, +\infty[$
V est un voisinage de $-\infty$ s'il contient un intervalle de type $]-\infty, r]$

1▶

a est un **point intérieur** à D si D est un voisinage de a, autrement dit :
il existe $r > 0$ tel que $]a-r, a+r[\subset D$.
On note $\overset{\circ}{D}$ l'intérieur de D : c'est l'ensemble des points intérieurs à D.

2▶

• a est un **point adhérent** à D si pour tout $r > 0$ on a $D \cap]a-r, a+r[\neq \varnothing$.
On note $\overline{D}$ l'adhérence de D : c'est l'ensemble des points adhérents à D, et également l'ensemble des limites des suites convergentes d'éléments de D (caractérisation séquentielle).

3▶

• Une fonction $f : D \to \mathbb{K}$ «vérifie une propriété $\mathcal{P}$ au voisinage de $a \in \bar{D}$» s'il existe un voisinage V de a tel que f vérifie $\mathcal{P}$ sur $V \cap D$.
Extension : pour $a = +\infty$ et pour $a = -\infty$.

4▶

II Limites

II.1 Définitions : limite d'une fonction en un point

Définition

> *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction, $a \in \bar{\mathbb{R}}$ adhérent à D et $l \in \overline{\mathbb{R}}$.*
>
> *f admet l pour limite en a (ou tend vers l en a) si pour tout voisinage V_l de l il existe un voisinage V_a de a tel que $f(V_a \cap D) \subset V_l$.*
>
> *On note alors : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ ou $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l$.*

5▶

Voici les définitions équivalentes de $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ traduites suivant les cas :

1) Si a et l réels : $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D, |x-a| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x) - l| \leqslant \varepsilon$ (déf. «en (ε, η)»)

2) Si a réel et $l = +\infty$: $\forall B \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0, \forall x \in D, |x-a| \leqslant \eta \Longrightarrow f(x) \geqslant B$

3) Si a réel et $l = -\infty$: $\forall B \in \mathbb{R}$, $\exists \eta > 0$, $\forall x \in D$, $|x - a| \leqslant \eta \Longrightarrow f(x) \leqslant B$

4) Si $a = +\infty$ et l réel : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists A \in \mathbb{R}$, $\forall x \in D$, $x \geqslant A \Longrightarrow |f(x) - l| \leqslant \varepsilon$

5) Si $a = -\infty$ et l réel : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists A \in \mathbb{R}$, $\forall x \in D$, $x \leqslant A \Longrightarrow |f(x) - l| \leqslant \varepsilon$

6) Si $a = +\infty$ et $l = +\infty$: $\forall B \in \mathbb{R}$, $\exists A \in \mathbb{R}$, $\forall x \in D$, $x \geqslant A \Longrightarrow f(x) \geqslant B$

7) Si $a = -\infty$ et $l = +\infty$: $\forall B \in \mathbb{R}$, $\exists A \in \mathbb{R}$, $\forall x \in D$, $x \leqslant A \Longrightarrow f(x) \geqslant B$

8) Si $a = +\infty$ et $l = -\infty$: $\forall B \in \mathbb{R}$, $\exists A \in \mathbb{R}$, $\forall x \in D$, $x \geqslant A \Longrightarrow f(x) \leqslant B$

9) Si $a = -\infty$ et $l = -\infty$: $\forall B \in \mathbb{R}$, $\exists A \in \mathbb{R}$, $\forall x \in D$, $x \leqslant A \Longrightarrow f(x) \leqslant B$

6▶

Pratique 1 :

1. Écrire que $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 3$ puis que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, où f est définie sur un domaine D.

2. Vérifier que si $f(a)$ est défini, la seule limite possible de f en a est $f(a)$.

3. Soit $k > 0$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction k-lipschitzienne : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|$.

Donner des exemples de telles fonctions. Montrer que pour tout x_0 réel, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

4. Montrer que la fonction caractéristique de $\mathbb{Q}$ n'admet de limite en aucun point.

Définition

> *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction définie à gauche (resp. à droite) de a réel et adhérent à D, et soit $l \in \overline{\mathbb{R}}$.*
>
> *f admet l pour* **limite à gauche** *en a (ou tend vers l à gauche en a) si la restriction de f à $D \cap]-\infty, a[$ tend vers l en a.*
>
> *On note alors : $\lim\limits_{x \to a_-} f(x) = l$, ou $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = l$, ou $f(x) \underset{x \to a_-}{\longrightarrow} l$*
>
> *f admet l pour* **limite à droite** *en a (ou tend vers l à droite en a) si la restriction de f à $D \cap]a, +\infty[$ tend vers l en a.*
>
> *On note alors : $\lim\limits_{x \to a_+} f(x) = l$, ou $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = l$, ou $f(x) \underset{x \to a_+}{\longrightarrow} l$.*

7▶

II.2 Propriétés et caractérisations

Théorème de caractérisation de la limite par limites à droite et à gauche :

> *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction définie à gauche et à droite de a réel et adhérent à D.*
>
> *Si f est définie en a alors : $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe si, et seulement si, $\lim\limits_{x \to a_-} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to a_+} f(x)$ existent et sont égales à $f(a)$, (toutes ces limites sont alors égales à $f(a)$).*
>
> *Si f n'est pas définie en a alors : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ équivaut à $\lim\limits_{x \to a_-} f(x) = \lim\limits_{x \to a_+} f(x) = l$.*

8▶

THÉORÈME (CARACTÉRISATION SÉQUENTIELLE DE LA LIMITE) :

> *f tend vers $l \in \overline{\mathbb{R}}$ quand x tend vers $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D si, et seulement si, pour toute suite (u_n) de réels de D qui tend vers a la suite $(f(u_n))$ tend vers l.*

9▶

Pratique 2 :

Montrer que $x \mapsto \cos(1/x)$ n'a pas de limite en 0^+

PROPRIÉTÉS

1) Si f admet une limite en a, celle-ci est unique.

2) Si f admet une limite finie en $a \in \overline{\mathbb{R}}$, alors f est bornée au voisinage de a.
La réciproque est fausse.

3) Théorème d'opérations sur les limites de fonctions : on a les mêmes résultats concernant les limites de combinaisons linaires, produits, quotients de fonctions que pour les suites, ainsi que les mêmes cas d'indéterminations.

4) Théorème de composition de limites : on suppose que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x \to b} g(x) = l$ et que $g \circ f$ a un sens au voisingage de a. Alors $\lim\limits_{x \to a} (g \circ f)(x) = l$.

10▶

Pratique 3 :

Justifier l'existence et donner les limites des fonctions suivantes aux points donnés :

1. $x \mapsto \mathrm{e}^{1/(1+x)}$ en 0, en $+\infty$, à droite et à gauche en -1

2. $x \mapsto \ln\left(\dfrac{x + \sin^2(x)}{2x - 1}\right)$ en $+\infty$ et à droite en $1/2$

II.3 Passages à la limite dans les inégalités

Comme pour les suites, les passages à la limite dans les inégalités conservent les inégalités larges mais transforment les inégalités strictes en inégalités larges.

• **Comparaison avec une constante** : passage à la limite dans les inégalités

On suppose que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$, et soit A un réel.

Si f est majorée par A au voisinage de a, alors : $l \leqslant A$
Si f est minorée par A au voisinage de a, alors : $l \geqslant A$

11▶

• **Comparaisons entre fonctions** : Théorème d'encadrement ou « des gendarmes »

Soit f, g et h trois fonctions telles qu'au voisinage de a on ait : $g \leqslant f \leqslant h$.

a) Si g et h admettent la même limite l réelle en a, alors f tend vers l en a.

b) Si g tend vers $+\infty$ en a, alors il en est de même de f.

c) Si h tend vers $-\infty$ en a, alors il en est de même de f.

12▶

En particulier, on se ramène souvent à montrer qu'une limite est nulle par majoration :

Théorème de majoration :

> *Soit f une fonction définie sur un voisinage V de a, et l un scalaire.*
>
> *S'il existe une fonction g de limite 0 en a telle que sur V on ait : $|f-l| \leqslant g$, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$.*

Pratique 4 :

1. Montrer que si f tend vers $+\infty$ en a et g est bornée au voisinage de a, alors $f+g$ tend vers $+\infty$ en a.

2. Adapter la propriété pour le cas où on suppose que f tend vers $-\infty$ en a.

3. Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{2+\sin(1/x)} = 0$.

Inversement...

Proposition

> *Soit $l \in \overline{\mathbb{R}}$ et $f : D \to \mathbb{R}$, qui tend vers l en $a \in \bar{D}$.*
>
> *Si M est un réel tel que $l < M$, alors il existe un voisinage V de a tel que :*
>
> $$\forall x \in D \cap V,\ f(x) < M$$
>
> *Si m est un réel tel que $l > m$, alors il existe un voisinage V de a tel que :*
>
> $$\forall x \in D \cap V, f(x) > m$$

13▶

II.4 Le théorème de la limite monotone

Théorème de la limite monotone :

> *Soit f une fonction réelle croissante sur $[a,b[$, avec $a < b$ (et b peut être $+\infty$). Alors :*
>
> *1) $\lim\limits_{x\to a_+} f(x)$ existe et est finie, et de plus : $f(a) \leqslant \lim\limits_{x\to a_+} f(x)$*
>
> *2) Pour tout c dans $]a,b[$, $\lim\limits_{x\to c_-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to c_+} f(x)$ existent et : $\lim\limits_{x\to c_-} f(x) \leqslant f(c) \leqslant \lim\limits_{x\to c_+} f(x)$*
>
> *3) f tend en b vers une limite finie ou $+\infty$.*

> Autrement dit, la monotonie donne l'existence des limites à droite et à gauche en tout point où cela a un sens, et aux extrémités dans $\overline{\mathbb{R}}$.

14▶

II.5 Extension aux fonctions complexes

On étudie f définie de $D \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

Pas de relation d'ordre dans $\mathbb{C}$, donc ni monotonies ni comparaisons (sauf à utiliser le module)...

• f est bornée s'il existe un réel M tel que : $\forall x \in D$, $|\,f(x)\,| \leqslant M$

• Soit a adhérent à D et l complexe. f admet l pour limite en a si $\lim\limits_{x \to a} |\,f(x) - l\,| = 0$, ce qui s'écrit : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0$, $\forall x \in D$, $|\,x - a\,| \leqslant \eta \Longrightarrow |\,f(x) - l\,| \leqslant \varepsilon$

Théorème de caractérisation de la limite par parties réelles et imaginaires :

> *Soit $f : D \to \mathbb{C}$, $a \in \bar{D}$ (éventuellement a infini), alors f admet $l = l_1 + \mathrm{i}l_2$ pour limite en a si, et seulement si, $\mathfrak{Re}(f)$ et $\mathfrak{Im}(f)$ tendent respectivement vers l_1 et l_2.*

15▶

Pratique 5 :

Montrer que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{1 + x} = 0$

Via ce théorème, toutes les propriétés vues pour les fonctions réelles et qui ne font intervenir ni $\pm\infty$ dans $\mathbb{C}$, ni la relation d'ordre dans $\mathbb{R}$, restent vraies : unicité de la limite si elle existe, caractérisation séquentielle de la limite, théorèmes d'opérations. On perd en particulier les théorèmes de comparaison et le théorème de la limite monotone.

III Continuité

f désigne maintenant une fontion d'une partie D de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

III.1 Définition

• f **est continue en** $a \in D$ si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Ou encore : $\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in D,\ |\,x - a\,| \leqslant \eta \Longrightarrow |\,f(x) - f(a)\,| \leqslant \varepsilon}$

f est continue à gauche (resp. à droite) en a si $\lim\limits_{x \to a_+} f(x) = f(a)$ (resp. $\lim\limits_{x \to a_-} f(x) = f(a)$).

• f **est continue sur** D si f est continue en tout point de D.

L'ensemble des fonctions continues sur D à valeurs dans $\mathbb{K}$ est noté $C(D, \mathbb{K})$ ou $C^0(D, \mathbb{K})$.

Fonctions usuelles continues <u>sur leur domaine de définition</u> :

a) Les fonctions constantes, l'identité

b) La partie entière est continue à droite sur $\mathbb{R}$, continue sur chaque intervalle $]n, n+1[$ pour n naturel, à droite mais pas à gauche aux points naturels

c) Les fonctions k-lipschitziennes, notamment la fonction valeur absolue

d) Les fonctions exponentielles, puissances, trigonométriques et trigonométriques hyperboliques

e) Les fonctions $\ln$, $\mathrm{Arc}\tan$, $\mathrm{Arc}\sin$, $\mathrm{Arc}\cos$

16▶

III.2 Propriétés déduites directement de celles des limites

1) f est continue en a si, et seulement si, elle est continue à droite et à gauche en a

2) Caractérisation séquentielle de la continuité : f est continue en a si, et seulement si, pour toute suite (u_n) de points de D qui converge vers a la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(a)$.

17▶

3) Théorème d'opérations sur les fonctions continues en a (puis dans $C(D, \mathbb{K})$) :

$*$ si f et g sont continues en a et si λ est un scalaire, $\lambda f + g$, fg, $|f|$ et $\bar{f}$ sont continues en a

$*$ si g ne s'annule pas en a, alors g ne s'annule pas au voisinage de a et f/g est continue en a

$*$ si f est continue en a et g en $f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a

18▶

> **Pratique 6** :
>
> Donner les domaines de définition et de continuité des fonctions suivantes, en justifiant :
>
> **1.** $x \mapsto \mathrm{e}^{x^2}$ **2.** $x \mapsto \sqrt{\ln(|\operatorname{th}(x)|+1)}$ **3.** $x \mapsto \dfrac{\tan x}{x^2+1}$ **4.** $x \mapsto \operatorname{Arctan}(\dfrac{x}{\sqrt{x+1}})$

4) Si $a \in \bar{D}$ et $f(a)$ n'est pas défini, f se prolonge par continuité en a à la condition que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ soit un réel : on définit ce prolongement g par $g(x) = f(x)$ si $x \in D$ et $g(a) = l$.
On note en général f ce prolongement par continuité.

19▶

III.3 Image d'un intervalle par une fonction continue à valeurs réelles

THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES :

> *Soit f une fonction réelle continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.*
>
> *Soit a et b deux points de I. Alors toute valeur l comprise entre $f(a)$ et $f(b)$ est atteinte par f sur $[a, b]$: il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = l$.*
>
> *Autrement dit, l'image d'un intervalle par une fonction continue réelle est un intervalle.*

20▶

Ce théorème n'a pas de sens pour une fonction à valeurs complexes !

> **Pratique 7** :
>
> Un théorème de point fixe :
>
> Montrer que toute fonction de $C([0, 1], [0, 1])$ admet un point fixe (considérer $x \mapsto f(x) - x$).

Un cas particulier simple : l'image d'un segment par une fonction continue...

Théorème des bornes atteintes :

> *Une fonction réelle continue sur un segment y est bornée et atteint ses bornes.*
>
> *En particulier, l'image d'un segment par une fonction réelle continue est un segment.*

> Dans ce cadre, la borne inférieure de la fonction sur ce segment existe et c'est son minimum ; de même, la borne supérieure existe et c'est son maximum.

21▶

III.4 Continuité, injectivité et monotonie

22▶

Proposition

> *Soit f une fonction réelle continue sur un intervalle I.*
>
> *Alors f est injective si, et seulement si, elle est strictement monotone.*

23▶

On en déduit deux théorèmes :

Théorème de l'homéomorphisme :

> *Soit f réelle, continue et strictement monotone sur un intervalle I.*
>
> *Alors f induit une bijection de I sur $f(I)$, et sa réciproque est aussi continue.*
>
> *(Cette bijection est continue de réciproque continue, on dit que c'est un homéomorphisme).*

Conséquence :

Théorème

> *Soit f réelle continue et strictement monotone sur un intervalle I.*
>
> *Alors $f(I)$ est un intervalle de même nature que I.*

24▶

Pratique 8 :

Montrer que $f : x \mapsto \sqrt{x} + \ln(x+1)$ définit un homéomorphisme de $\mathbb{R}_+$ sur un intervalle à préciser.

SAVOIR...

(1) *... la définition « en (ε, η) » de la limite et de la continuité, avec les extensions pour les points ou limites à l'infini.*

2) *... utiliser les théorèmes de limite monotone pour montrer l'existence d'une limite*

3) *... utiliser la caractérisation séquentielle de la limite ou de la continuité pour montrer qu'une limite n'existe pas ou qu'une fonction n'est pas continue*

4) *... utiliser les théorèmes d'opérations pour prouver l'existence d'une limite ou la continuité en un point ou sur un domaine*

5) *... utiliser la continuité sur un segment pour montrer qu'une borne sup ou inf est atteinte*

THÉORÈMES et PROPOSITIONS...	**... OUTILS pour...**
Théorèmes d'opérations limites/continuité	*Montrer l'existence d'une limite/continuité*
Caractérisation limite/continuité par limites droite/gauche	*Étude limite/continuité par calculs*
Caractérisation séquentielle limite/continuité	*Montrer qu'il n'y a pas de limite/continuité en un point*
Théorème d'encadrement, de majoration	*Calcul de limite par encadrement*
Proposition d'obtention d'inégalités depuis une limite	*Évaluation locale d'après limite/valeur*
Théorème de la limite monotone	*Existence de limites par monotonie*
Caractérisation de limite/continuité pour fonctions complexes	*Se ramener aux fonctions à valeurs réelles*
Théorème des valeurs intermédiaires	*image d'un intervalle, valeur atteinte*
Théorème du point fixe	*Solutions d'équations, de problèmes par la méthode des approximations successive*
Théorème des bornes atteintes	*Identier un Sup comme un Max, un Inf comme un Min*
Théorème de l'homéomorphisme	*Bijectivité, continuité d'une réciproque, image d'un intervalle*