

Notations.

On note \wedge le pgcd et \vee le ppcm, par ailleurs on préfère la notation $a \equiv b \pmod{n}$ pour exprimer que a est congru à b modulo n .

Exercice 1.

Soit $n \geq 2$. Calculer :

1. $n \wedge (2n + 1)$
2. $n \vee (2n + 1)$
3. $(n - 1) \wedge (2n + 1)$
4. $(n - 1) \vee (2n + 1)$

Ma solution

$n \wedge (2n + 1)$?

Comme le reste de la division euclidienne entre les deux nombres vaut 1, alors $n \wedge (2n + 1) = 1$

$n \vee (2n + 1)$?

Comme $n \wedge (2n + 1) = 1$ alors $n \vee (2n + 1) = n \times (2n + 1)$

$(n - 1) \wedge (2n + 1)$?

La division euclidienne de $(2n + 1)$ par $(n - 1)$ vaut 3. Donc $(n - 1) \wedge (2n + 1) = 3$

$$(n-1) \vee (2n+1) ?$$

On a trois cas qui se présente à nous.

1. Lorsque $n \equiv 1 \pmod{3}$, on a $(n-1) \equiv 0 \pmod{3}$ et $(2n+1) \equiv 0 \pmod{3}$.

Donc $(n-1) \vee (2n+1)$ vaut $(n-1) \times (2n+1)$

2. Lorsque $n \equiv 2 \pmod{3}$, on a $(n-1) \equiv 1 \pmod{3}$ et $(2n+1) \equiv 2 \pmod{3}$.

Donc $(n-1) \vee (2n+1)$ vaut $\frac{(n-1) \times (2n+1)}{3}$

3. Lorsque $n \equiv 0 \pmod{3}$, on a $(n-1) \equiv 2 \pmod{3}$ et $(2n+1) \equiv 1 \pmod{3}$.

Donc $(n-1) \vee (2n+1)$ vaut $\frac{(n-1) \times (2n+1)}{3}$

Solution, proposée par le manuel, de l'exercice 1.

1. $n \wedge (2n+1) ?$

La division euclidienne de $2n+1$ par n s'exprime par l'égalité $2n+1 = 2 \times n + 1$, c'est-à-dire $2n+1 - 2n = 1$ d'où on conclut que les entiers $(2n+1)$ et n sont premiers entre eux.

2. $n \vee (2n+1) ?$

Comme le pgcd de $(2n+1)$ et n vaut 1, alors le ppcm de $(2n+1)$ et n est le produit $(2n+1) \times n$.

3. $(n-1) \wedge (2n+1) ?$

La division euclidienne de $2n+1$ par $n-1$ s'exprime par l'égalité $2n+1 = 2 \times (n-1) + 3$, d'où on conclut que le pgcd de $(n-1)$ et $(2n+1)$ est un diviseur de 3, donc est égal à 3 ou bien 1.

— Dans le cas où $n \not\equiv 1 \pmod{3}$ implique $n-1 \not\equiv 0 \pmod{3}$ c'est-à-dire $n-1$ n'est pas divisible par 3 et donc $(n-1) \wedge (2n+1) = 1$.

- Dans le cas où $n \equiv 1 \pmod{3}$, on a alors $2n + 1 \equiv 2 \times 1 + 1 \equiv 3 \pmod{3}$ c'est-à-dire $2n + 1 \equiv 0 \pmod{3}$, donc 3 divise $2n + 1$.
 $n \equiv 1 \pmod{3}$ implique $n - 1 \equiv 0 \pmod{3}$ c'est-à-dire 3 divise $n - 1$ et donc $(n - 1) \wedge (2n + 1) = 3$.

4. $(n - 1) \vee (2n + 1)$?

Les calculs des pgcd ci-dessus permettent de trouver aisément les ppcm. En conclusion on a :

- si $n \equiv 1 \pmod{3}$, alors $(n - 1) \vee (2n + 1) = \frac{(n - 1)(2n + 1)}{3}$;
- si $n \not\equiv 1 \pmod{3}$, alors $(n - 1) \vee (2n + 1) = (n - 1)(2n + 1)$.

Exercice 2.

Soit $(a, b, c) \in (\mathbb{N}^*)^3$ tel que $a^2 + b^2 = c^2$ et $a \wedge b \wedge c = 1$.

Montrer que $a \wedge b = a \wedge c = b \wedge c = 1$.

Solution de l'exercice 2.

Exercice 3.

Soit $(a, b, c) \in (\mathbb{N}^*)^3$ tel que $a^2 + b^2 = c^2$ et $a \wedge b = 1$.

Montrer que a et b ne sont pas de même parité.

Indication. On pourra utiliser des congruences modulo 4.

Solution de l'exercice 3.