Chapitre 13 : ANALYSE ASYMPTOTIQUE

On cherche à comparer deux suites entre elles au niveau asymptotique, ou deux fonctions entre elles au voisinage d'un point. Par exemple :

∗ laquelle des deux converge (ou diverge) le plus vite ? Une expression simplifiée renseignera à une certaine précision sur la vitesse de convergence, ou de divergence ;

∗ toutes les deux se comportent peut-être de manière équivalente en un certain sens ;

∗ on essaie de ramener une suite ou une fonction à une suite ou localement à une fonction de référence que l'on connaît bien.

On obtiendra des résultats qui généraliseront certains points déjà établis, par exemple :

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e^{-n}}{n^p} = 0, \quad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x^2} = -\dfrac{1}{2},$

ce qu'on écrira

$e^{-n} = \underset{n\to+\infty}{o}(n^p), \quad \sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x, \quad \cos(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2},$

mais aussi, pour tout naturel n : $\quad e^x = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$

I Négligeabilité : la relation o

I.1 Définition - Exemples à connaître

Définition

> • *Soit f et g deux fonctions définies sur un même voisinage V de $a \in \overline{\mathbb{R}}$.*
>
> *f est* **négligeable** *devant g au voisinage de a et on note $f = \underset{a}{o}(g)$ ou $f(x) = \underset{x\to a}{o}(g(x))$ s'il existe une fonction ε définies sur V et telle que : $f = g\varepsilon$ et $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$*
>
> *Si g ne s'annule pas (sauf peut-être en a) sur V, $f = \underset{a}{o}(g)$ signifie : $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$*
>
> *On dit aussi que f est un petit o de g au voisinage de a.*
>
> • *Soit (u_n) et (v_n) deux suites complexes.*
>
> *(u_n) est* **négligeable** *devant (v_n) et on note $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$ s'il existe une suite (ε_n) de limite nulle telle que : $u_n = v_n\varepsilon_n$*
> *Autrement dit, si v_n ne s'annule pas, $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$ (ou $u_n = o(v_n)$) signifie : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 0$*
>
> *On dit aussi que u_n est un petit o de v_n.*

1▶

Pratique 1 :

1. Que signifie $f = \underset{a}{o}(1)$? $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(1)$?

2. À l'aide de la relation o, comparer si possible les couples de fonctions ou de suites suivants :
a) $x \mapsto x$ et $x \mapsto x^2$ en 0, en $+\infty$, en 1
b) $(1/n)_{n\geqslant 1}$ et $(1/n^2)_{n\geqslant 1}$ c) $x \mapsto e^{-1/x}$ et $x \mapsto x^2$ en 0^+ **3.** ln et $x \mapsto 1/x$ en 0^+

On reformule ainsi les théorèmes de croissances comparées déjà vus :

Théorème de croissances comparées :

Soit a et b des réels.

- *Pour $a < b$:* $x^a \underset{x\to+\infty}{=} o(x^b)$ *et* $x^b \underset{x\to 0_+}{=} o(x^a)$
- *Pour $0 < a < b$,* $a^x \underset{x\to+\infty}{=} o(b^x)$
- *Pour $a > 0$:* $(\ln x)^b \underset{x\to+\infty}{=} o(x^a)$ *et* $x^a \underset{x\to 0_+}{=} o(|\ln x|^b)$
- *Pour $a > 0$:* $\mathrm{e}^{-ax} \underset{x\to+\infty}{=} o(x^b)$ *et* $\mathrm{e}^{ax} \underset{x\to-\infty}{=} o\left(|x|^b\right)$

2▶

On en déduit des relations de comparaisons entre suites, et on en ajoute d'autres déjà vues :

- Pour $a < b$: $n^a = o(n^b)$
- Pour $0 < a < b$: $a^n = o(b^n)$
- Pour $a > 0$: $(\ln n)^b = o(n^a)$
- Pour $a > 0$: $\mathrm{e}^{-an} = o(n^b)$
- Pour $a > 1$: $n^a = o(a^n)$, $a^n = o(n!)$ et $n! = o(n^n)$

3▶

I.2 Calculs avec les petits o

f, g, h et φ sont des fonctions, λ un scalaire non nul, (u_n), (v_n), (w_n) et (t_n) des suites, $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

- Si $f = \underset{a}{o}(g)$, alors $f = \underset{a}{o}(|g|)$
- Si $u_n = o(v_n)$, alors $u_n = o(|v_n|)$
- Si $f = \underset{a}{o}(g)$, alors $\lambda f = \underset{a}{o}(\lambda g) = \underset{a}{o}(g)$
- Si $u_n = o(v_n)$, alors $\lambda u_n = o(\lambda v_n) = o(v_n)$

4▶

- Si $f = \underset{a}{o}(h)$ et $g = \underset{a}{o}(h)$, alors $f + g = \underset{a}{o}(h)$
  Si $u_n = o(w_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $u_n + v_n = o(w_n)$

5▶

- Si $f = \underset{a}{o}(g)$ et $g = \underset{a}{o}(h)$, alors $f = \underset{a}{o}(h)$
  Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $u_n = o(w_n)$

6▶

- Si $f = \underset{a}{o}(h)$ et $g = \underset{a}{o}(\varphi)$, alors $fg = \underset{a}{o}(h\varphi)$ et $fg = \underset{a}{o}(gh)$
  Si $u_n = o(w_n)$ et $v_n = o(t_n)$, alors $u_n v_n = o(w_n t_n)$ et $u_n v_n = o(v_n w_n)$

7▶

- Théorème (Composition à gauche) :

  Si $f = \underset{a}{o}(g)$ et si f et g sont à valeurs strictement positives au voisinage de a (sauf peut-être nulles en a), alors pour tout réel $r > 0$, $f^r = \underset{a}{o}(g^r)$

  Si $u_n = o(v_n)$ et si u_n et v_n sont strictement positives à partir d'un certain rang, alors pour tout réel $r > 0$, $u_n^r = o(v_n^r)$.

8▶

Schématiquement : $o(\lambda f) = o(f)$ et $o(\lambda u_n) = o(u_n)$,
$o(f) + o(f) = o(f)$ et $o(u_n) + o(u_n) = o(u_n)$,
$o(o(f)) = o(f)$ et $o(o(u_n)) = o(u_n)$,
$f = o(g)$ et $r > 0$ implique $f^r = o(g^r)$

⚠ On ne peut pas composer à gauche !!
Ex : $x^2 = \underset{x\to 0}{o}(x)$ mais $\ln(x^2) = 2\ln(x)$ n'est pas un petit o de $\ln x$ en 0.

9▶

II Équivalence : la relation $\sim$

II.1 Définitions

10▶

Définition

• Soit f et g deux fonctions définies sur un même voisinage V de $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

On dit que f est **équivalente** *à g au voisinage de a et on note $f \underset{a}{\sim} g$ ou $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ s'il existe une fonction ε telle que sur V : $f = g(1+\varepsilon)$ et $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$, ou encore $f - g = o(g)$.*

Si g ne s'annule pas (sauf peut-être en a) sur V, $f \underset{x\to a}{\sim} g$ signifie : $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$

• Soit (u_n) et (v_n) deux suites complexes.

On dit que (u_n) est **équivalente** *à (v_n) et on note $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ s'il existe une suite (ε_n) de limite nulle telle que : $u_n = v_n(1+\varepsilon_n)$, ou encore $u_n - v_n = o(v_n)$.*
Autrement dit, si (v_n) ne s'annule pas, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ (ou $u_n \sim v_n$) signifie : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$

11▶

Pratique 2 :
1. Que signifie $f \underset{a}{\sim} 1$? $f \underset{a}{\sim} 2$? $u_n \sim 3$? $f \underset{a}{\sim} 0$? $u_n \sim 0$?
2. Donner un équivalent simple de la fonction ou de la suite :
a) $x + x^2$ en 0, en $+\infty$, en 1.
b) $(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3})_{n\geqslant 1}$ c) $x \mapsto \ln(x) + 1 + x$ en 0_+, en 1, en $+\infty$? d) $(n + 2^n)$

II.2 Calculs avec les équivalents

f, g, h et φ sont des fonctions, λ un scalaire non nul, (u_n), (v_n), (w_n) et (t_n) des suites, $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

• Les relations $\underset{a}{\sim}$ et $\sim$ sont des relations d'équivalence

12▶

• $f \underset{a}{\sim} \lambda$ équivaut à $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lambda$ et $u_n \sim \lambda$ équivaut à $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lambda$

13▶

• Si $f \underset{a}{\sim} h$ et $g \underset{a}{\sim} \varphi$ alors $fg \underset{a}{\sim} h\varphi$ et si $u_n \sim w_n$ et $v_n \sim t_n$, alors $u_n v_n \sim w_n t_n$.

14▶

• Si $f \underset{a}{\sim} g$ et si f ne s'annule pas au voisinage de a (sauf peut-être en a), alors il en est de même de g et : $\dfrac{1}{f} \underset{a}{\sim} \dfrac{1}{g}$

Si $u_n \sim v_n$ et u_n est non nul à partir d'un certain rang, il en est de même de v_n et : $\dfrac{1}{u_n} \sim \dfrac{1}{v_n}$

15▶

• Théorème (Composition à gauche) :

> *Si $f \underset{a}{\sim} g$ et si f est strictement positive au voisinage de a (sauf peut-être en a), alors il en est de même de g, et pour tout $r \in \mathbb{R}$: $f^r \underset{a}{\sim} g^r$*
>
> *Si $u_n \sim v_n$ et u_n est strictement positif à partir d'un certain rang, alors il en est de même de v_n et pour tout réel r : $u_n^r \sim v_n^r$*

16▶

• Si $f = \underset{a}{o}(g)$ et $g \underset{a}{\sim} h$, alors $f = \underset{a}{o}(h)$ et si $f = \underset{a}{o}(g)$ et $f \underset{a}{\sim} h$, alors $h = \underset{a}{o}(g)$

Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n \sim w_n$, alors $u_n = o(w_n)$ et si $u_n = o(v_n)$ et $u_n \sim w_n$, alors $w_n = o(v_n)$

17▶

> Schématiquement : calculs « naturels » avec produit, inverse, puissances « fixes ».

⚠ On ne peut pas composer à gauche ! !

On ne peut pas sommer sans précaution ! !

18▶

Comment calculer l'équivalent d'une somme ?

étape 1 : dans la somme S écrite avec des o, on élimine les termes négligeables devant d'autres

étape 2 : il ne reste alors qu'une somme T d'équivalents proportionnels (de même ordre) :

i) si cette somme est non nulle, c'est l'équivalent cherché (clairement S/T est de limite 1)

(c'est le seul cas où la somme d'équivalents donne l'équivalent)

ii) sinon on soustrait à chaque terme de S son équivalent et on recommence (c'est rare...)

19▶

Propriétés

Si $f \underset{a}{\sim} g$, f et g ont même signe et s'annulent simultanément au voisinage de a.

Si $u_n \sim v_n$, alors u_n et v_n ont même signe et s'annulent simultanément pour n assez grand.

20▶

⚠ $f \underset{a}{\sim} 0$ signifie que f est nulle au voisinage de a !

$u_n \sim 0$ signifie que (u_n) est stationnaire à 0 !

Si vous trouvez un équivalent nul, c'est en général que votre calcul est faux...

II.3 Équivalents à connaître

À connaître par cœur :

$\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x \qquad e^x - 1 \underset{0}{\sim} x \qquad (1+x)^r - 1 \underset{0}{\sim} rx$ (r réel)

$\sin x \underset{0}{\sim} x \qquad \tan x \underset{0}{\sim} x \qquad \operatorname{Arcsin} x \underset{0}{\sim} x \qquad \operatorname{Arctan} x \underset{0}{\sim} x$

$\operatorname{sh} x \underset{0}{\sim} x \qquad \operatorname{th} x \underset{0}{\sim} x$

$1 - \cos x \underset{0}{\sim} \dfrac{x^2}{2} \qquad \operatorname{ch} x - 1 \underset{0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$

Soit (u_n) une suite qui converge vers 0. Alors :

$\ln(1+u_n) \sim u_n \qquad e^{u_n} - 1 \sim u_n \qquad (1+u_n)^r - 1 \sim ru_n$ (r réel)

$\sin u_n \sim u_n \qquad \tan u_n \sim u_n \qquad \operatorname{Arcsin} u_n \sim u_n \qquad \operatorname{Arctan} u_n \sim u_n$

$\operatorname{sh} u_n \sim u_n \qquad \operatorname{th} u_n \sim u_n$

$1 - \cos u_n \sim \dfrac{u_n^2}{2} \qquad \operatorname{ch} u_n - 1 \sim \dfrac{u_n^2}{2}$

21▶

II.4 Comment calculer en pratique un équivalent quand x tend vers a ?

a) $\boxed{\text{Toujours se ramener au voisinage de 0 par changement de variable}}$:

$\rightarrow$ on pose $u = x - a$ si a fini, $u = 1/x$ sinon.

b) Les règles de calcul qui gèrent produits, sommes, etc. décomposent le calcul en sous-calculs, jusqu'à aboutir aux formules simples ou à des fonctions non simplifiables.

c) $\boxed{\text{On revient en } x \text{ pour présenter le résultat}}$.

d) Ce résultat doit être constitué d'**un seul terme à droite de $\sim$**, formé en pratique d'une puissance de $x - a$ si a fini ou de $1/x$ sinon, éventuellement multipliée par ce qui ne s'y ramène pas (par exemple en 0 une puissance de $\ln|x|$ et/ou $\exp(1/x)$ à cause des règles de croissance comparées, $\sin(1/x)$, etc.)

Pratique 3 :

Calculer un équivalent simple pour l'expression ou la suite suivantes :

1. $\sin(2x)$ en $\frac{\pi}{2}$ **2.** $\tan(x)\ln(1+\sin x)$ en 0 **3.** $\sqrt{1+x} - 2$ en 3

4. $\sqrt{1+x+x^2} + \cos x - 2$ en 0 **5.** $\cos(2\pi x) + \sin(3\pi x) + \cos(\pi x)$ en 3

6. $(\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2+1})$ **7.** $\left(\exp(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}) - \cos(\frac{1}{n})\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$

III Domination : la relation O

III.1 Définitions

Définition

- *Soit f et g deux fonctions définies sur un même voisinage V de $a \in \overline{\mathbb{R}}$.*

  On dit que f est **dominée** *par g au voisinage de a et on note $f = \underset{a}{O}(g)$ ou $f(x) = \underset{x \to a}{O}(g(x))$ s'il existe une fonction bornée B telle que sur V : $f = gB$*

  Si g ne s'annule pas (sauf peut-être en a) sur V, $f = \underset{x \to a}{O}(g)$ signifie que $\dfrac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a.

  On dit aussi que f est un grand O de g au voisinage de a.

- *Soit (u_n) et (v_n) deux suites complexes.*

  On dit que (u_n) est **dominée** *par (v_n) et on note $u_n = \underset{n \to +\infty}{O}(v_n)$ s'il existe une suite bornée (B_n) telle que : $u_n = v_n B_n$*

  Si v_n ne s'annule pas, $u_n = \underset{n \to +\infty}{O}(v_n)$ (ou $u_n = O(v_n)$) signifie que $\dfrac{u_n}{v_n}$ est bornée.

  On dit aussi que u_n est un grand o de v_n.

22▶

Propriétés

- Si $f = \underset{a}{o}(g)$ alors $f = \underset{a}{O}(g)$, l'inverse est faux.

  Si $u_n = o(v_n)$, alors $u_n = O(v_n)$, l'inverse est faux.
- Si $f = \underset{a}{O}(g)$ et si g tend vers 0 en a, alors f tend vers 0 en a.

  Si $u_n = O(v_n)$ et si (v_n) tend vers 0, alors (u_n) tend vers 0.

23▶

III.2 Calculs avec les grands O

Mêmes calculs possibles et impossibles qu'avec la relation o, reprendre le paragraphe en changeant o en O.

IV Développements limités

Dans tout ce paragraphe, f et g désignent des fonctions définies sur un intervalle I non vide et non réduit à un point, n est un naturel, et a est un point adhérent à I.

On généralise ce qui précède dans la recherche d'une approximation locale de f au voisinage de a par une expression polynomiale. Par exemple, on établit, pour n naturel quelconque :

$\mathrm{e}^x = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} + \underset{x \to 0}{o}(x^n)$ ou encore :

$\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \underset{x \to 0}{o}(x^{2n+2})$

IV.1 Définitions

Définition

f admet un développement limité en a à l'ordre n s'il existe des scalaires $(a_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ tels que :

$$f(a+h) = a_0 + a_1 h + \ldots + a_n h^n + \underset{h\to 0}{o}(h^n)$$

24▶

Exemple : pour $x \in]-1,1[$, $\sum\limits_{k=0}^{n} x^k = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$ donc

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + \frac{x^{n+1}}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + \underset{x\to 0}{o}(x^n) \quad \text{et aussi} \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + \underset{x\to 0}{O}(x^{n+1})$$

IV.2 Unicité si existence

Proposition

Si f admet un développement limité en a à l'ordre n, alors celui-ci est unique.
On appelle **partie régulière** *sa partie polynomiale.*

25▶

Conséquences :

1) Si f est paire et admet un d.l. en 0 à l'ordre n, sa partie régulière est paire

2) Si f est impaire et admet un d.l. en 0 à l'ordre n, sa partie régulière est impaire

3) Si f admet un développement limité en a à l'ordre n, f admet un d.l. en a à tout ordre inférieur à n, que l'on déduit par troncature

4) Un développement limité de partie régulière non nulle procure un équivalent simple :
si $f(x) = \sum\limits_{k=p}^{n} a_k(x-a)^k + \underset{x\to a}{o}(x-a)^n$ avec $a_p \neq 0$, alors $f(x) \underset{x\to a}{\sim} a_p(x-a)^p$.

26▶

Pratique 4 :

Utiliser ce qui précède pour donner un développement limité de :

1. $x \mapsto (x-1)^4$ en 1 à l'ordre 3 et à l'ordre 5 **2.** sin en 0 à l'ordre 4 **3.** sin en π à l'ordre 3

4. $x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$ en 0 à l'ordre 5 **5.** $x \mapsto (1+x)^k$ en 0 à l'ordre n (k naturel)

IV.3 Existence

THÉORÈME

On suppose que $a \in I$ et f définie sur I.

• *f admet un développement limité en a à l'ordre 0 si, et seulement si, f est continue en a, et dans ce cas : $f(a+h) = f(a) + \underset{h\to 0}{o}(1)$*

• *f admet un développement limité en a à l'ordre 1 si, et seulement si, f est dérivable en a, et dans ce cas : $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \underset{h\to 0}{o}(h)$*

• **Théorème de Taylor-Young** *: on suppose f de classe C^n. Alors f admet le développement limité en a à l'ordre n suivant :*

$$f(a+h) = f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2!}f^{(2)}(a)+\ldots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a)+\underset{h\to 0}{o}(h^n) = \sum_{k=0}^{n}\frac{h^k}{k!}f^{(k)}(a)+\underset{h\to 0}{o}(h^n)$$

27▶

Pratique 5 :

Calculer les développements limités en 0 à tout ordre des fonctions suivantes :

1. exp **2.** $x \mapsto (1+x)^\alpha$ pour α non naturel **3.** sin et cos

IV.4 Intégration (et dérivation) « terme à terme » d'un développement limité

THÉORÈME D'INTÉGRATION « TERME À TERME » D'UN DÉVELOPPEMENT LIMITÉ :

Soit f continue sur I et $a \in I$.
On suppose que f admet un développement limité en a à l'ordre n :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k + \underset{x\to a}{o}(x-a)^n$$

Alors toute primitive F de f admet un développement limité en a à l'ordre $n+1$ obtenu par intégration terme à terme de sa partie régulière :

$$F(x) = F(a) + \sum_{k=0}^{n} a_k\frac{(x-a)^{k+1}}{k+1} + \underset{x\to a}{o}(x-a)^{n+1}$$

28▶

⚠ Pas de vrai théorème de dérivation ! !

29▶

Pratique 6 :

Calculer le développement limité de :

1. $x \mapsto \ln(1-x)$ en 0 à l'ordre n **2.** Arctan en 0 à l'ordre 6

IV.5 Opérations usuelles sur les développements limités

On opére des combinaisons linéaires, produits donc puissances naturelles, et compositions « naturellement », puisqu'on manipule des égalités et qu'on dispose de régles de calculs simples sur les petits o qui donnent les précisions à ne pas dépasser...

⚠ Ne pas oublier notamment les doubles-produits dans les carrés de développements limités !

30▶

Seul cas un peu plus délicat, l'inversion :

> Si f qui admet un développement limité à l'ordre n en $a \in I$: $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k + \underset{x\to 0}{o}(x-a)^n$, alors f ne s'annule pas au voisinage de a si, et seulement si, $a_0 \neq 0$, et dans ce cas $1/f$ admet un développement limité en a à l'ordre n.
> On calcule ce développement à l'aide de celui de $u \mapsto \dfrac{1}{1-u}$ en 0.

31▶

IV.6 Développements limités usuels à connaître

<u>En pratique</u> : la formule de Taylor-Young donne les premiers développements limités ; tous les autres s'en déduisent :

- $\mathrm{e}^x = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$
- $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\,x^2 + \ldots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}\,x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$
- $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+1})$
- $\mathrm{ch}\, x = 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \ldots + \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+1})$
- $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+2})$
- $\mathrm{sh}\, x = x + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \ldots + \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+2)}$

On calcule alors tout développement limité par changement de variable pour se ramener en 0, puis par opérations usuelles et intégration/dérivation.
C'est plus confortable de connaître par cœur les développements limités suivants :

- $\tan x = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2}{15}x^5 + \underset{x\to 0}{o}(x^6)$
- $\mathrm{th}\, x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2}{15}x^5 + \underset{x\to 0}{o}(x^6)$
- $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$
- $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^n x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$
- $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n} + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$

32▶

Pratique 7 :

Calculer les développements limités des fonctions suivantes aux points et à l'ordre précisés :

1. $x \mapsto \ln(\frac{\tan x}{x})$ en 0 à l'ordre 5

2. $x \mapsto \sqrt{1+\sqrt{1+x}}$ en 0 à l'ordre 2

3. $x \mapsto x^x$ en 2 à l'ordre 2

IV.7 Généralisation : les développements asymptotiques

Définition

- *f admet un développement asymptotique au voisinage de $a \in \bar{I}$ s'il existe des fonctions f_0, f_1, ..., f_n telles que : pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, $f_{k+1} = \underset{0}{o}(f_k)$, et des scalaires a_0, a_1, ...,a_n tels que $f(a+h) = a_0 f_0(h) + a_1 f_1(h) + \ldots + a_n f_n(h) + \underset{h \to 0}{o}(f_n(h))$.*
- *f admet un développement asymptotique au voisinage de $+\infty$ s'il existe des fonctions f_0, f_1, ..., f_n telles que : pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, $f_{k+1} = \underset{+\infty}{o}(f_k)$, et des scalaires a_0, a_1, ...,a_n tels que $f(x) = a_0 f_0(x) + a_1 f_1(x) + \ldots + a_n f_n(x) + \underset{x \to +\infty}{o} f_n(x)$.*
(même chose en $-\infty$).

33▶

Méthodes d'obtention d'un développement asymptotique d'une expression :

1) on factorise l'expression par son équivalent « simple », ce qui ramène en général à un calcul de développement limité

2) si c'est une expression intégrale, penser à des intégrations par parties successives

3) s'appuyer sur l'existence du développement limité d'une partie de l'expression (formule de Taylor-Young) et utiliser son unicité dans une équation fonctionnelle

4) déterminer un équivalent, le retrancher à l'expression et recommencer ainsi de suite

Pratique 8 :

1. Calculer un développement asymptotique de $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\sqrt{x}}$ en 0_+ à l'ordre 3.

2. Montrer que $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n \mathrm{e}^{t-1}\,\mathrm{d}t = a_0 + \frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n^2} + \underset{n \to +\infty}{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)$

3. Montrer que $x \mapsto x\mathrm{e}^x$ définit une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur lui-même.
Donner un développement asymptotique de sa réciproque en $+\infty$ à deux termes.

V Exemples d'applications

V.1 Calculs de limites

Pratique 9 :

Calculer la limite en 0 de : $x \mapsto \dfrac{1}{\tan^2 x} - \dfrac{1}{\mathrm{th}^2\, x}$

V.2 Études des branches infinies d'une courbe

On cherche les branches infinies du graphe de la fonction f définie sur I.

Rappel du chapitre 6 :

$*$ $f(x)$ tend vers $\pm\infty$ quand x tend vers $x_0 \in \overline{I}$: asymptote verticale d'équation $x = x_0$.

$*$ $f(x)$ tend vers l réel quand x tend vers $\pm\infty$: asymptote horizontale d'équation $y = l$.

$*$ $f(x)$ tend vers ∞ quand x tend vers $+\infty$, on étudie $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ quand $x \to +\infty$:

$\dfrac{f(x)}{x}$ tend vers 0 : branche parabolique de direction $(0x)$ (horizontale)

$\dfrac{f(x)}{x}$ tend vers l'infini : branche parabolique de direction $(0y)$ (verticale)

$\dfrac{f(x)}{x}$ tend vers a fini, on étudie $x \mapsto f(x) - ax$:

$f(x) - ax$ tend vers b fini quand x tend vers $+\infty$: asymptote oblique $y = ax + b$

$f(x) - ax$ tend vers ∞ : branche parabolique dans la direction $y = ax$

Même terminologie quand x tend vers $-\infty$.

Ces calculs de limites peuvent se faire à l'aide d'équivalents.

L'étude d'une éventuelle asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ se ramène en général à :

Si $f(x) = ax + b + \frac{c}{x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right)$, avec $a \neq 0$ et $c \neq 0$, la courbe admet pour asymptote oblique la droite d'équation $y = ax + b$ et se situe au-dessus d'elle si $c > 0$, en dessous si $c < 0$.

34▶

Pratique 10 :

1. Montrer que la courbe d'équation : $y = \dfrac{x^2}{x+1}$ admet une asymptote oblique, préciser la position de la courbe par rapport à elle en $+\infty$ et $-\infty$.

2. Montrer que la courbe d'équation : $y = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{1/x} - 1}$ admet une asymptote oblique, et préciser la position de la courbe par rapport à elle au voisinage de $+\infty$.

V.3 Formule de Stirling

Formule de Stirling : $n! \sim n^n \mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n}$

35▶

SAVOIR...

(1) *... le formulaire des équivalents et des développements limités*

2) *... factoriser par «le terme prépondérent» dans tout calcul de limite ou de développement posant problème, pour se ramener aux équivalents et développements connus*

3) *... utiliser équivalents et développements asymptotiques pour calculer des limites, obtenir l'équation d'une asymptote et la position de la courbe étudiée par rapport à elle*

THÉORÈMES et PROPOSITIONS...	**... Outils pour...**
Théorème de croissances comparées	*Levée d'indéterminées*
Théorème de compositions à gauche pour les relations de comparaison	*Puissances et relations de comparaisons*
Théorème de Taylor-Young	*Existence, unicité, calcul d.l.*
Théorème d'intégration terme à terme d'un dl	*Calculs de dl de primitives et de dérivées*