Chapitre 3 : ENSEMBLES-APPLICATIONS

I Ensembles

I.1 Appartenance - Description

• **Ensemble et appartenance** (notions intuitives (premières)) :

Un ensemble E est une collection d'objets, et ces objets sont ses éléments.
Si un objet x appartient à E, on note : $x \in E$, et sinon $x \notin E$.

L'ensemble qui ne contient aucun élément s'appelle l'ensemble vide : noté $\varnothing$.

• **Égalité** : deux ensembles sont identiques (ou égaux) si leurs éléments sont les mêmes.

• **Descriptions** d'un ensemble :

$*$ **en extension** : en donnant tous ses éléments (cas finis), sans répétition, en ordre quelconque.

$$E = \{2; 5; 3\} \qquad E = \{\tfrac{1}{2}\} \text{ (un \underline{singleton})} \qquad E = \{\mathbb{R}; 2; \varnothing\}$$

$*$ **en compréhension** : $\{\, x \in E \mid P(x)\,\}$ est l'ensemble des éléments x de l'ensemble E tels que la propriété $P(x)$ soit vraie (où P est un prédicat sur E).

Définir $E = \{\, n \in \mathbb{N} \mid \exists\, k \in \mathbb{N},\ n = 2k\,\}$ équivaut à dire que E est l'ensemble des naturels pairs.
Autre notation possible : $E = \{2k\}_{k\in\mathbb{N}}$

> **Pratique 1** :
>
> **1.** Donner en extension et en compréhension l'ensemble des racines carrées de l'unité (1).
>
> **2.** Même chose avec l'ensemble des naturels qui sont des carrés.
>
> **3.** Soit $E = \{\, x \in \mathbb{R} \mid (x-1)(x-3) < 0\,\}$ (lire à haute voix). A-t-on : $2 \in E$?
> Décrire E différemment.

I.2 Inclusion, ensemble des parties d'une ensemble

• F est une **partie de** E (on dit aussi : E contient F, ou : F est inclus dans E) si tous les éléments de F sont aussi des éléments de E.

Notation : $F \subset E$, qui signifie : $\forall x \in F,\ x \in E$ (Négation : $F \not\subset E$)

Pour montrer $F \subset E$, on écrit : « Soit x appartenant à F... finalement : x appartient à E ».

• Égalité : $E = F$ équivaut donc à $E \subset F$ et $F \subset E$ (*double inclusion*).

⚠ Ne confondez pas appartenance (symbole $\in$) et inclusion (symbole $\subset$) !

1▶

Pratique 2 :

1. Choisir le ou les bons symboles (remplacer $*$) : $\mathbb{N} * \mathbb{Z}$, $\dfrac{2}{3} * \mathbb{Q}$, $\mathrm{i} * \mathbb{R}$, $\mathbb{Z} * \mathbb{N}$

2. Soit $E = \{\mathbb{R}; 3; \{3; 4\}\}$.
A-t-on $\varnothing \subset E$? $\varnothing \in E$? $4 \in E$? $\{3\} \in E$? $3 \in E$? $\{3; 4\} \subset E$? $\{3; 4\} \in E$?

• $\mathcal{P}(E)$ désigne l'**ensemble des parties** de E : $F \in \mathcal{P}(E) \Longleftrightarrow F \subset E$.

En particulier, E et $\varnothing$ sont toujours des parties de E donc des éléments de $\mathcal{P}(E)$.

2▶

Pratique 3 :

1. Donner $\mathcal{P}(\{1; 2; 3\})$.

2. Posons $E = \varnothing$. Donner $\mathcal{P}(E)$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$ et $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(E)))$.

I.3 Opérations sur les ensembles

F et G désignent deux ensembles.

• **Réunion (ou union)** : $F \cup G = \{x \mid x \in F \text{ **ou** } x \in G\}$.

$F \cup G$ est l'ensemble des éléments qui sont dans F ou dans G (ou les deux !)

• **Intersection** : $F \cap G = \{x \mid x \in F \text{ **et** } x \in G\}$. Quand $F \cap G = \varnothing$, F et G sont <u>disjoints</u>.

$F \cap G$ est l'ensemble des éléments qui sont dans F et dans G.

• **Différence** ou **Complémentaire** : $F \setminus G = \complement_F G = \{x \in F \mid x \notin G\}$.

$F \setminus G = \complement_F G$ est l'ensemble des éléments de F qui ne sont pas dans G.
Si E est l'ensemble dans lequel on travaille implicitement, et $F \subset E$, on note $\complement_E F = \overline{F}$.

• **Différence symétrique** :

$$F \Delta G = (F \setminus G) \cup (G \setminus F) = (F \cup G) \setminus (F \cap G) = \{x \mid x \in F \text{ (ou exclusif) } x \in G\}.$$

$F \Delta G$ est l'ensemble des éléments qui sont dans F ou dans G mais pas les deux !

• **Produit cartésien** : $F \times G = \{(x, y) \mid x \in F \text{ et } y \in G\}$.

$F \times G$ est donc l'**ensemble des couples** de première composante un élément de F, de seconde composante un élément de G.

Si $G = F$, on note : $F^2 = F \times F$

3▶

Pratique 4 :

1. Donner $A \cup B$ et $A \cap B$ pour les couples (A, B) d'ensembles :

a) $(\{2;3;6\}, \{2;5;9\})$ b)(ens. des naturels pairs, ens. des naturels multiples de 4)

c) (ens. des fonctions impaires sur $\mathbb{R}$, ens. des fonctions paires sur $\mathbb{R}$)

d) (une droite du plan, une droite du plan)

2. Donner $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[$ et $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [0, n]$.

3. Donner le complémentaire dans $\mathbb{N}$ de l'ensemble :

a) des pairs b) des multiples de 2 et de 3

4. Décrire le produit cartésien $F \times G$ pour les couples (F, G) suivants :

(a) $(\{1;2\}, \{a;b;c\})$ (b) $(\varnothing, \varnothing)$ (c) $(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ (d) $([0,1], [0,2])$

PROPRIÉTÉS

Soit A_i des parties d'un ensemble E, pour i parcourant un ensemble I, et B un ensemble.

1) Distributivités : $\displaystyle\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap B = \bigcup_{i\in I}(A_i \cap B)$ et $\displaystyle\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup B = \bigcap_{i\in I}(A_i \cup B)$

2) Complémentation : $\displaystyle\complement_E\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I}\complement_E A_i$ et $\displaystyle\complement_E\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I}\complement_E A_i$

3) $\complement_E\left(\complement_E B\right) = B$.

4▶

II Applications

II.1 Définitions

Une **relation** $\mathcal{R}$ est donnée par un **ensemble de départ** E, un **ensemble d'arrivée** F, et un **graphe** G qui est une partie de $E \times F$, au sens où :
un élément x de E est en relation avec un élement y de F par la relation $\mathcal{R}$, et on note $x\,\mathcal{R}\,y$, quand (x, y) appartient au graphe G. On dit alors que y est une **image par** $\mathcal{R}$ de x et que x est un **antécédent par** $\mathcal{R}$ de y.

Si tout élément x de E a une et une seule image y par $\mathcal{R}$ dans F, on dit que $\mathcal{R}$ est une **application** de E vers F, et on peut alors noter : $y = \mathcal{R}(x)$.

Ensemble des applications de E **vers** F : noté F^E ou encore $\mathcal{F}(E, F)$.

Notation usuelle d'une application : $\left|\begin{array}{rcl} f \; : \; E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}\right.$

⚠ Regardez bien les différentes flèches utilisées !

Exemples :

$*$ **Identité** sur un ensemble E : $\left|\begin{array}{rcl} \mathrm{Id}_E : E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{array}\right.$

$*$ **Fonction caractéristique** d'une partie F de E : $\left|\begin{array}{rcl} \mathbb{1}_F : E & \longrightarrow & \{0\,;1\} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in F \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}\right.$

Pour vérifier l'égalité entre deux fonctions f et g, on montre qu'elles ont :

a) même ensemble de départ E

b) même ensemble d'arrivée F

c) même graphe : $\forall x \in E,\ f(x) = g(x)$

5▶

Pratique 5 :

1. $\left|\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \sqrt{x^2} \end{array}\right.$ et $\left|\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x \end{array}\right.$ sont elles égales ?

Que pourrait-on changer pour avoir égalité ?

2. A et B désignent deux parties de E. Calculer $\mathbb{1}_{A\cap B}$, $\mathbb{1}_{A\cup B}$ et $\mathbb{1}_{\overline{A}}$ en fonction de $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$.

II.2 Image directe, image réciproque

Soit $f : E \to F$ une application de E vers F.

- **Image directe d'une partie** A **de** E **par** f :

  c'est la partie de F : $f(A) = \{\, f(x) \mid x \in A\,\} = \{\, y \in F \mid (\exists\, x \in A, y = f(x))\,\}$.

  En particulier : $\underline{f(E) = \mathrm{Im}\, f}$ s'appelle l'**image de** f.

6▶

Pratique 6 :

1. Soit f définie de $E = \{1;\ 2\,;\ 3\}$ vers $\mathbb{N}$ par $f(1) = f(2) = 5$ et $f(3) = 6$.
Donner $\mathrm{Im}(f)$ et $f(\{2\,;3\})$.

2. La fonction exponentielle exp est définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Donner son image. Donner $\exp([0, 1])$.

3. Donner l'image de $\mathbb{N}$ par f définie sur $\mathbb{N}$ par : $f(n) \mapsto \lfloor n/2 \rfloor$.

- **Image réciproque d'une partie** B **de** F **par** f :

  C'est la partie de E : $f^{-1}(B) = \{\, x \in E \mid f(x) \in B\,\}$, ou encore : $x \in f^{-1}(B) \Longleftrightarrow f(x) \in B$

⚠ Notation « ensembliste » : la fonction f^{-1} est définie sur les parties de F, pas sur ses éléments !

7▶

Pratique 7 :

1. Soit f définie de $E = \{1;2;3\}$ vers $\mathbb{N}$ par $f(1) = f(2) = 5$ et $f(3) = 6$.
Donner $f^{-1}(\{5\})$, $f^{-1}(\{6\})$ et $f^{-1}(\mathbb{N})$.

2. Donner $\exp^{-1}(\mathbb{R})$ et $\exp^{-1}(\mathbb{R}_+)$.

3. Soit f définie de E vers F, A une partie de E, et B une partie de F.
Comparer $f^{-1}(f(A))$ à A, et comparer $f(f^{-1}(B))$ à B.

DÉFINITION

Soit f une application de E vers F. Soit A une partie de E et B une partie de F.

$*$ **Restriction de f à A** *: c'est l'application* $\left| \begin{array}{rcl} f_{|A} : A & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$

$*$ *g est un* **prolongement** *de f si f est une restriction de g.*

$*$ *Si $f(E) \subset B$, la* **corestriction de f à B** *est l'application* $\left| \begin{array}{rcl} f_{|^B} : E & \longrightarrow & B \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$

$*$ *Si $f(A) \subset B$, on note $f_{|_A^B}$ l'application de A vers B qui est la corestriction de $f_{|A}$ à B*

Pratique 8 :

La valeur absolue est définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Quelle est son image ? sa restriction à $\mathbb{R}_+$? sa restriction à $\mathbb{R}_+$ corestreinte à $\mathbb{R}_+$?

II.3 Composition

DÉFINITION

Soit E, F et G trois ensembles, et soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$, deux applications.

La composée $g \circ f$ de f par g est définie de E vers G par : $\forall x \in E$, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

⚠ Même dans le cas où $f \circ g$ a un sens, on n'a pas en général $f \circ g = g \circ f$! !

PROPOSITION : La composition est toujours associative.

8▸

Pratique 9 :

1. Soit $f : E \to F$. Que sont $f \circ \mathrm{Id}_E$ et $\mathrm{Id}_F \circ f$?

2. Soit f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x + 1$.
Pour tout naturel n, calculer f^n (au sens de la composition).

3. Écrire $\left| \begin{array}{rcl} f : [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \exp(\sqrt{1-x^2}) \end{array} \right.$ comme la composée de trois applications.

4. Même chose avec : $\left| \begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} + \frac{1}{x} \end{array} \right.$ puis avec : $\left| \begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \end{array} \right.$

II.4 Injectivité

Définition

Soit $f : E \to F$.
f est **injective** *si tout élément de F a au plus un antécédent dans E par f.*
Ainsi : pour tout y de F, l'équation $y = f(x)$ d'inconnue x a au plus une solution dans E.

Exemple :

Si $A \subset E$, $\left| \begin{array}{rcl} f : A & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{array} \right.$ s'appelle l'injection canonique de A dans E.

Proposition

$f : E \to F$ est injective si, et seulement si, : $\forall (x_1, x_2) \in E^2,\ [f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2]$
Ou par contraposée : $\forall (x_1, x_2) \in E^2$, $[x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)]$.

9▶

Proposition

(1) La composée de deux injections est une injection.

(2) Inversement, si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.

10▶

Pratique 10 :

1. Dessiner trois applications de $E = \{1; 2; 3\}$ vers $F = \{1; 2; 3; 4\}$, deux injectives , l'autre pas. Peut-on faire de même avec $F = \{1; 2\}$?

2. Parmi les fonctions définies de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, dire lesquelles sont injectives :

(a) $x \mapsto x^2$ (b) $x \mapsto x^3$ (c) $x \mapsto \mathrm{e}^{x+2}$ (d) $x \mapsto \cos(x + 1)$

Comment le « voir » à partir de leurs graphes ?

II.5 Surjectivité

Définition

Soit $f : E \to F$.
f est **surjective** *si tout élément de F a au moins un antécédent dans E par f.*
Ainsi : pour tout y de F, l'équation $y = f(x)$ d'inconnue x a au moins une solution dans E.

Proposition : $f : E \to F$ est surjective si, et seulement si, $f(E) = F$.

f induit ainsi toujours une surjection de E sur $f(E)$ (regarder $f_{|f(E)}$).

11▶

Proposition

(1) La composée de deux surjections est une surjection.

(2) Inversement, si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

12▶

Pratique 11 :

1. Dessiner trois applications de $E = \{1; 2; 3\}$ vers $F = \{1; 2\}$, deux surjectives , l'autre pas. Peut-on faire de même avec $F = \{1; 2; 3; 4\}$?

2. Parmi les fonctions définies de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, dire lesquelles sont surjectives :

(a) $x \mapsto x^2$ (b) $x \mapsto x^3$ (c) $x \mapsto \ln((x^2 + 1)e^x)$ (d) $x \mapsto x \cos x$

Comment le « voir » à partir du graphe ?

II.6 Bijectivité

Définition

Soit $f : E \to F$

f est **bijective** *(ou est une bijection) si tout élément de F a* **un et un seul antécédent** *dans E par f.*

Autrement dit : f est bijective si, et seulement si, f est injective et surjective.

Ainsi, pour tout y de F, l'équation $y = f(x)$ d'inconnue x a exactement une solution dans E.

On peut alors poser : $x = f^{-1}(y)$, ce qui définit l'application f^{-1} de F vers E, appelée **application réciproque (ou inverse)** *de f. Enfin : $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$ et $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$*

Si f est injective de E vers F, alors f induit une bijection de E sur $f(E)$.

13▶

Proposition

(1) La composée $g \circ f$ de deux bijections est une bijection ; dans ce cas : $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

(2) Si $g \circ f$ est bijective, alors f est injective et g est surjective.

(3) Soit $f : E \to F$ et $g : F \to E$.

Si $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$, alors f et g sont bijectives, $f^{-1} = g$ et $g^{-1} = f$.

On retrouve ainsi que si f est bijective, alors f^{-1} l'est aussi et son inverse est f : $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$

14▶

Pratique 12 :

1. Donner trois applications de $E = \{1; 2; 3\}$ vers $F = \{2; 3; 4\}$, deux bijectives, l'autre pas. Peut-on faire de même avec $F = \{1; 2; 3; 4\}$ ou $F = \{2; 3\}$?

2. Parmi les fonctions définies de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, dire lesquelles sont bijectives :

(a) $x \mapsto x^2$ (b) $x \mapsto x^3$ (c) $x \mapsto x \cos x$

Comment le « voir » à partir de leurs graphes ?

III Relation binaire sur un ensemble

III.1 Définitions

• Une relation binaire $\mathcal{R}$ sur E est une relation qui admet E pour ensemble de départ et ensemble d'arrivée ; elle est caractérisée par son graphe : $G_{\mathcal{R}} = \{(x, y) \in E^2 \mid x \,\mathcal{R}\, y\}$.

Exemples :

∗ $\leqslant$, $>$, $=$ sont des relations binaires sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$.

∗ La divisibilité est une relation binaire sur $\mathbb{N}$.

∗ L'orthogonalité $\perp$, le parallélisme $\parallel$ définissent des relations binaires sur l'ensemble des droites du plan.

∗ L'inclusion définit une relation binaire sur $\mathcal{P}(E)$.

Une relation binaire $\mathcal{R}$ sur E est dite :

• **réflexive** si : $\forall x \in E,\ x \,\mathcal{R}\, x$ (tout élément de E est en relation avec lui-même)

• **symétrique** si : $\forall (x, y) \in E^2,\ [x \,\mathcal{R}\, y \Longrightarrow y \,\mathcal{R}\, x]$ (graphe symétrique)

• **antisymétrique** si : $\forall (x, y) \in E^2,\ [(x \,\mathcal{R}\, y \text{ et } y \,\mathcal{R}\, x) \Longrightarrow x = y]$

• **transitive** si : $\forall (x, y, z) \in E^3,\ [(x \,\mathcal{R}\, y \text{ et } y \,\mathcal{R}\, z) \Longrightarrow x \,\mathcal{R}\, z]$.

| Seule l'égalité sur E est à la fois symétrique et antisymétrique !

III.2 Relation d'équivalence

Définition

∗ *Une relation binaire $\mathcal{R}$ sur E est une* **relation d'équivalence** *si elle est :*

1) réflexive, *2) symétrique,* *3) transitive.*

∗ *Si $x \,\mathcal{R}\, y$, on dit que x est y sont équivalents modulo $\mathcal{R}$. On écrit aussi : $x \equiv y\ [\mathcal{R}]$*

∗ *Soit x un élément de E : la* **classe d'équivalence** *de x (modulo $\mathcal{R}$) est l'ensemble des y en relation avec x. On la note : $Cl(x) = \bar{x} = \{y \in E \mid x \,\mathcal{R}\, y\}$*

Pratique 13 :

1. Parmi les relations binaires données en exemples, donner les relations d'équivalence.

2. Donner les classes d'équivalence pour l'égalité sur un ensemble E.

3. On définit sur $\mathbb{N}$ la relation de congruence modulo 2 par :

$$p \equiv q\ [2] \text{ si, et seulement si, } p - q \text{ est multiple de deux.}$$

Vérifier qu'il s'agit d'une relation d'équivalence.
Quelle est la classe d'équivalence de 0, de 1 ? Y en-a-t-il d'autres ?

4. Même chose avec la congruence modulo 3.

Théorème

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E.

L'ensemble des classes d'équivalence modulo $\mathcal{R}$ forme une partition de E :

a) aucune classe d'équivalence n'est vide

b) deux classes d'équivalence sont disjointes ou égales

c) leur réunion est égale à E.

Ainsi, chaque élément x d'une classe d'équivalence C en est un représentant : $C = Cl(x)$

15▶

III.3 Relation d'ordre

• Définition

∗ *Une relation binaire $\mathcal{R}$ sur E est une* **relation d'ordre** *si elle est :*

1) réflexive, 2) antisymétrique, 3) transitive.

∗ *le couple $(E, \mathcal{R})$ est alors dit : ensemble ordonné.*

∗ *x est y sont dits* **comparables** *(suivant $\mathcal{R}$) si $x \,\mathcal{R}\, y$ ou $y \,\mathcal{R}\, x$; sinon, ils sont non comparables.*

∗ *Si tous les éléments de E sont comparables, $\mathcal{R}$ est une* **relation d'ordre total** *; sinon, c'est une* **relation d'ordre partiel**.

Pratique 14 :

1. Parmi les relations binaires données en exemples, donner celles qui sont des relations d'ordre. Préciser si l'ordre est partiel ou total.

2. Montrer que si $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur E, alors $\mathcal{R}'$, obtenue en symétrisant le graphe de $\mathcal{R}$, est aussi une relation d'ordre sur E.

• Relation d'ordre et parties :

Théorème Définition :

Soit F une partie d'un ensemble ordonné $(E, \leqslant)$.

∗ *F est* **majorée** *s'il existe a dans E tel que : $\forall x \in F$, $x \leqslant a$.* *(a est un majorant de F)*

∗ *F est* **minorée** *s'il existe a dans E tel que : $\forall x \in F$, $x \geqslant a$.* *(a est un minorant de F)*

∗ *F est* **bornée** *si F est majorée et minorée.*

∗ *F admet un* **maximum** *s'il existe un majorant de F qui appartient à F.*
Il est alors unique, noté $\max F$.

∗ *F admet un* **minimum** *s'il existe un minorant de F qui appartient à F.*

Il est alors unique, noté $\min F$.

∗ *F admet une* **borne supérieure** *si l'ensemble de ses majorants admet un plus petit élément.*

C'est alors la borne supérieure de F, notée $\sup F$. Si $\max F$ existe alors $\max F = \sup F$.

∗ *F admet une* **borne inférieure** *si l'ensemble de ses minorants admet un plus grand élément.*

C'est alors la borne inférieure de F, notée $\inf F$. Si $\min F$ existe alors $\min F = \inf F$.

16▶

Pratique 15 :

1. Dans $(\mathbb{Z}, \leqslant)$, éléments remarquables de $F_1 = \{2; 3; 4\}$? de $F_2 = \mathbb{N}^*$? de $F_3 = \{3k\}_{k\in\mathbb{Z}}$?

2. Dans $(\mathbb{R}, \leqslant)$, idem avec $F_1 =]0, 1]$? $F_2 = [0, 2] \cup]3, +\infty[$? $F_3 =]-\infty, \pi[$? $F_4 =]0, 1[\cap \mathbb{Q}$?

3. Dans $(\mathcal{P}(\{1; 2; 3\}), \subset)$, idem avec $F_1 = \{\varnothing\}$? $F_2 = \{\{1\}\}$? $F_3 = \{\{1\}; \{2\}\}$?

• Relation d'ordre et applications :

Définition

$*$ *Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné.*

On appelle relation d'ordre strict sur E associée à $\leqslant$ la relation $<$ définie par :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ [x < y \Longleftrightarrow (x \leqslant y \text{ et } x \neq y)].$$

$*$ *Soit $(E, \leqslant)$ et $(F, \preceq)$ deux ensembles ordonnés, et f une fonction de E vers F.*

f est **croissante** *si :* $\forall (x, y) \in E^2$, $[x \leqslant y \Longrightarrow f(x) \preceq f(y)]$

f est **décroissante** *si :* $\forall (x, y) \in E^2$, $[x \leqslant y \Longrightarrow f(x) \succeq f(y)]$

f est **monotone** *si f est croissante ou décroissante.*

On obtient les définitions de stricte croissance, stricte décroissance et stricte monotonie en remplaçant toutes les inégalités par les inégalités strictes correspondantes.

Exemple :

Une fonction définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$, à valeurs réelles, et strictement monotone, est injective.
La réciproque est fausse !

Proposition

Soit E un ensemble et $(F, \leqslant)$ un ensemble ordonné.

Sur $F^E = \mathcal{F}(E, F)$, la relation $\preceq$ définie par : $[f \preceq g$ si, et seulement si, $\forall x \in E,\ f(x) \leqslant g(x)]$

est une relation d'ordre.

Pratique 16 :

1. Le vérifier. L'ordre est-il total ou partiel ?

2. On aura des inégalités classiques entre fonctions à connaître par cœur. Notamment :

(1) $\forall x \in]-1, +\infty[$, $\ln(1 + x) \leqslant x$,

(2) $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\sin x| \leqslant |x|$,

(3) $\forall x \in [0, \pi/2]$, $\frac{2}{\pi}x \leqslant \sin(x) \leqslant x$.

Comment démontre-t-on cela ?

SAVOIR...

(1) *... manipuler les opérations ensemblistes*

(2) *... démarrer une preuve :*

- *pour montrer $A \subset B$, écrire « soit $x \in A$... » et terminer par « ... $x \in B$ »*
- *pour montrer une propriété qui commence par $\forall x \in A$..., écrire « soit $x \in A$... »*
- *pour montrer une égalité entre ensembles, procéder par double inclusion*
- *pour traduire $x \in f(A)$, écrire « il existe $a \in A$ tel que $x = f(a)$ »*
- $\boxed{\textit{pour traduire } x \in f^{-1}(B), \textit{ écrire } f(x) \in B}$
- *pour montrer f injective sur E, écrire « soit $(x, y) \in E^2$ tel que $f(x) = f(y)$ » et terminer par « ... $x = y$ »*
- *pour montrer $f : E \to F$ surjective, écrire « soit $y \in E$ » et terminer par « ... $y = f(x)$ » pour un x à construire*

(3) *... les définitions d'injectivité, surjectivité et bijectivité*

(4) *... utiliser sans confusion la notation f^{-1}*

(5) *... ce qu'est une relation d'équivalence, savoir qu'elle sert à grouper les éléments d'un ensemble suivant un critère, et avoir en tête les différents exemples*

(6) *... ce qu'est une relation d'ordre, partiel ou total, et avoir en tête les différents exemples*

THÉORÈMES et PROPOSITIONS	**... outils pour ...**
Injections (caractérisation, composée d'injections, composée injective)	*problèmes d'« unicité »*
Surjections (idem)	*problèmes d'« existence »*
Bijections (idem)	*problèmes d'« existence et unicité »*
Théorème des classes d'équivalence	*« Découper » un ensemble suivant un critère*
Éléments remarquables d'un ensemble ordonné	*Recherche de bornes, bornes atteintes*