▶ ▶ 8 : CALCUL DE PRIMITIVES

1▶

$*$ Si g_1 et g_2 sont deux primitives de f sur l'intervalle I, alors $g_1' - g_2' = f - f = 0$, c'est-à-dire $(g_1 - g_2)' = 0$ sur l'intervalle I. Vous savez (mais on le redémontrera plus tard) qu'alors $g_1 - g_2$ est une fonction constante sur I.

Ce résultat est faux si I n'est pas un intervalle !

Par exemple, si $I = [0,1] \cup [2,3]$, la fonction g_1, définie par $x \mapsto 0$ si $x \in [0,1]$ et $x \mapsto 1$ si $x \in [2,3]$, est continue et dérivable en tout point de I, c'est une primitive de $x \mapsto 0$ sur I, tout comme $g_2 : x \mapsto 2$, mais $g_1 - g_2$ n'est pas constante sur I...

$*$ Exemples : a) pour p naturel, $x \mapsto \dfrac{x^{p+1}}{p+1}$ est une primitive de $x \mapsto x^p$ sur $\mathbb{R}$.

b) pour $\alpha \neq 0$, $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{\alpha}$ est une primitive de $x \mapsto \mathrm{e}^{\alpha x}$ sur $\mathbb{R}$

c) ln est **la** primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ qui s'annule en 1

d) Arctan est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$, les autres sont de la forme $x \mapsto \mathrm{Arctan}(x) + cste$.

e) $f \circ g = f(g)$ procure une primitive de $f'(g).g'$ (quand ces expressions ont un sens).

$*$ Ainsi le tableau des dérivées, "inversé", procure des primitives pour la plupart des fonctions usuelles. Mais existe-t-il, peut-on calculer, peut-on exprimer à l'aide des fonctions usuelles une primitive par exemple de $x \mapsto x\mathrm{e}^x$ sur $\mathbb{R}$, ou de $x \mapsto 2x + \dfrac{x^3}{1-x}\ln(x)$ sur les intervalles $]0,1[$ et $]1,+\infty[$ formant son domaine ? Les réponses dans la suite...

2▶

$*$ Cette définition ramène le calcul d'une intégrale d'une fonction à valeurs complexes à celui de deux intégrales de fonctions à valeurs réelles (numériques), sa partie réelle et sa partie imaginaire.

$*$ Rappel : une fonction f à valeurs complexes définie sur I est dite dérivable lorsque $\mathcal{R}\mathrm{e}(f)$ et $\mathcal{I}\mathrm{m}(f)$ le sont, avec alors : $f' = (\mathcal{R}\mathrm{e}(f))' + \mathrm{i}(\mathcal{I}\mathrm{m}(f))'$. Ainsi, une primitive g_1 de $\mathcal{R}\mathrm{e}(f)$ et une primitive g_2 de $\mathcal{I}\mathrm{m}(f)$ sur I procurent une primitive de f sur I : $g_1 + \mathrm{i}g_2$.

$*$ On se concentre donc sur le calcul de primitive d'une fonction à valeurs réelles, ce qui suffit pour traiter de même les fonctions à valeurs complexes.

3▶

$*$ Linéarité : se traduit par le fait que l'intégrale sur $[a,b]$ d'une combinaison linéaire de fonctions continues sur $[a,b]$ est la même combinaison linéaire de leurs intégrales...

C'est la linéarité de $f \mapsto \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ sur l'espace vectoriel $C([a,b],\mathbb{R})$, nous le reverrons plus tard.

$*$ Inégalité de la moyenne : c'est un outil majeur pour approcher par majoration le module d'une intégrale (qu'on ne saurait pas calculer, et c'est fréquent...), à mettre en haut de la boîte à outils...

$*$ La croissance implique la positivité (utiliser $0 \leqslant f$) ; aucun sens pour les fonctions à valeurs complexes...

$*$ Ne pas oublier l'hypothèse de continuité dans le critère de nullité : on saura étendre au fonctions "continues par morceaux" le calcul d'intégrales, mais on perdra alors ce critère...

$*$ Toutes ces propriétés seront démontrées lorsqu'on "construira" rigoureusement le concept d'intégrale dans un chapitre ultérieur.

4▶

$*$ On montrera ce théorème plus tard. On l'a déjà utilisé au chapitre 6 pour construire la fonction ln.

$*$ Ce théorème répond à la question de l'existence d'une primitive pour une fonction continue sur un intervalle : toute application intégrale de f (voir la définition) en est une ! En revanche, le théorème ne dit pas comment se débarasser du signe intégrale et exprimer une primitive à l'aide de fonctions usuelles.

En fait, ce calcul n'est pas toujours possible. Par exemple, impossible de donner une primitive de $t \mapsto e^{t^2}$ sur $\mathbb{R}$ plus simplement que par $x \mapsto \displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,dt + cste$. Mais c'est mieux que rien...

$*$ Interprétation en terme d'aires pour le cas d'une fonction f à valeurs réelles définie sur I :

Pour $a \in I$ et $h > 0$ tels que $a+h \in I$, $A(a+h) = \displaystyle\int_a^{a+h} f(t)\,dt$ s'interpréte comme l'aire algébrique du domaine délimité par le segment horizontal $[a, a+h]$, la partie du graphe de f relative à ce segment, et les segments verticaux les reliant aux abscisses a et $a+h$. Pour h petit, cette aire est de valeur proche de $hf(a)$. Ainsi $(A(a+h) - A(a))/h$ tend vers $f(a)$ quand h tend vers 0_+. Un travail similaire étant possible pour $h < 0$, on peut écrire : $A'(a) = f(a)$, qui traduit que A est une primitive de f sur I. C'est bien le sens de (1) du théorème fondamental.

$*$ Attention à ce genre de question : dans le cadre du théorème fondamental, que dire de la dérivée de $g : x \mapsto \displaystyle\int_x^{x^2} f(t)\,dt$ par exemple, aux points x tels que x et x^2 soient dans I ?

Revenez à la définition ! Comme suit...

Soit F une primitive de f sur I. On a pour x convenable et d'après le théorème fondamental que $g(x) = F(x^2) - F(x)$. Par hypothèse F est de classe C^1 sur I, donc g également sur son domaine, par théorèmes d'opérations.

Enfin, pour x dans le domaine de g : $g'(x) = F'(x^2).2x - F'(x) = f(x^2).2x - f(x)$.

$*$ ⚠ Erreur classique : si g désigne $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$, alors pour $x \in I$, on a : $g'(x) = f(x)$ et non pas $g'(x) = f(x) - f(a)$... (voir le théorème ou le point précédent).

Pratique 1 :

1. Pour $t \in \mathbb{R}$, par définition : $e^{it} = \cos(t) + i\sin(t)$, donc les primitives demandées sont :

$$t \mapsto \sin(t) - i\cos(t) = \frac{e^{it}}{i} + cste$$

2. Avec 1. : $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{it}\,dt = \left[e^{it}/i\right]_0^{2\pi} = 0$

$\displaystyle\int_0^{2\pi} |\sin(t)|\,dt = \int_0^{\pi} \sin(t)\,dt + \int_{\pi}^{2\pi} (-\sin(t))\,dt = 4$ par calcul direct à l'aide d'une primitive $-\cos$ de sin, éventuellement en utilisant la symétrie du graphe de sin par rapport à $x = \pi$.

5▶

$*$ *Preuve* : Montrons que $g_1 : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(\phi(u)).\phi'(u)\,du$ et $g_2 : x \mapsto \displaystyle\int_{\phi(a)}^{\phi(x)} f(t)\,dt$ sont deux primitives de $f(\phi).\phi'$ sur $[a, b]$.

Les deux intégrales portent sur des fonctions continues sur $[a, b]$ puisque ϕ est de classe C^1 (à valeurs dans I), donc de dérivée continue, et on conclut par les théorèmes d'opérations sur les fonctions continues.

La dérivée de g_1 est bien $f(\phi).\phi'$ d'après le théorème fondamental.

Par ailleurs, si F désigne une primitive de f sur I, on a pour tout $x \in I$: $g_2(x) = F(\phi(x)) - F(\phi(a))$, donc $g_2'(x) = F'(\phi(x)).\phi'(x) - 0$, soit $g_2' = f(\phi).\phi' = g_1'$.

Sur l'intervalle I, g_1 et g_2 diffèrent donc d'une constante. Comme $g_1(a) = g_2(a) = 0$, $g_1 = g_2$.

En écrivant en b que $g_1(b) = g_2(b)$, on obtient alors le résultat du théorème. $\square$

$*$ Un changement de variable (ou plusieurs...) permettra (peut-être) de se ramener à des calculs de primitives connus.

Pour l'effectuer, on procède mécaniquement, ce qui justifie le dt de la notation $\displaystyle\int f(t)\,dt$:

$\boxed{\text{on écrit : } t=\phi(u) \text{ donc } \mathrm{d}t=\phi'(u)\mathrm{d}u}$ et $\boxed{\text{on n'oublie pas de changer les bornes de l'intégrale !}}$
Dans l'exemple du théorème, $t=\phi(a)$ correspond à $u=a$, et $t=\phi(b)$ correspond à $u=b$...

$*$ Exemple : soit à calculer $J=\displaystyle\int_0^{\pi/4}\tan(t)\,\mathrm{d}t$. Cette intégrale est bien définie puisque tan est continue sur $[0,\frac{\pi}{4}]$· On peut l'écrire : $J=\displaystyle\int_0^{\pi/4}\frac{\sin t}{\cos t}\,\mathrm{d}t$, et on remarque que sin est la dérivée de cos, au signe près... on devine u'/u... Posons : $u=\cos(t)$ donc $\mathrm{d}u=-\sin(t)\mathrm{d}t$, et on change les bornes :

$$J=\int_1^{\sqrt{2}/2}\frac{-1}{u}\,\mathrm{d}u=-\int_1^{1/\sqrt{2}}\frac{1}{u}\,\mathrm{d}u=\ln(\sqrt{2})$$

6▸

$*$ f paire (resp. impaire) se traduit par : $\forall x\in[-a,a],\ f(-x)=\varepsilon f(x)$ avec $\varepsilon=1$ (resp. $\varepsilon=-1$).
Dans $\displaystyle\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$ on effectue le changement de variable : $t=-u$ donc $\mathrm{d}t=-\mathrm{d}u$ et on change les bornes :

$$\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t=-\int_0^{-a}f(-u)\,\mathrm{d}u=\int_{-a}^0\varepsilon f(u)\,\mathrm{d}u=\varepsilon\int_{-a}^0 f(u)\,\mathrm{d}u \text{ (par linéarité de l'intégrale)}$$

$*$ La T-périodicité de f s'écrit : $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x+T)=f(x)$. Soit un réel α. On utilise la relation de Chasles : $\displaystyle\int_\alpha^{\alpha+T}f(t)\,\mathrm{d}t=\int_\alpha^0 f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t+\int_T^{\alpha+T}f(t)\,\mathrm{d}t$. Il ne reste plus qu'à montrer que : $\displaystyle\int_\alpha^0 f(t)\,\mathrm{d}t=-\int_T^{\alpha+T}f(t)\,\mathrm{d}t$. Dans la première intégrale, on pose le changement de variable $u=t+T$ donc du=dt et on change les bornes : $\displaystyle\int_\alpha^0 f(t)\,\mathrm{d}t=\int_{\alpha+T}^T f(u-T)\,\mathrm{d}u=-\int_T^{\alpha+T}f(u)\,\mathrm{d}u$

Pratique 2 :

1. On remarque que cos est la dérivée de sin, on pose donc : $u=\sin(t)$, donc $\mathrm{d}u=\cos(t)\mathrm{d}t$
pour obtenir : $\displaystyle\int_0^0 u^2\,\mathrm{d}u=0$.
On peut aussi utiliser directement que le graphe de $x\mapsto\sin^2(t)\cos(t)$ présente une symétrie par rapport au point $(\pi/2,0)$.

2. a) On remarque que le numérateur s'obtient en dérivant le dénominateur, on pose : $u=t^2+t+2$, donc $\mathrm{d}u=(2t+1)\mathrm{d}t$ pour obtenir : $\displaystyle\int^t\frac{2t+1}{t^2+t+2}\,\mathrm{d}t=\int^u\frac{1}{u}\,\mathrm{d}u=\ln|u|+cste=\ln(t^2+t+2)+cste$

b) De même, ln est de dérivée $t\mapsto 1/t$, on pose : $u=\ln t$ donc $\mathrm{d}u=\frac{1}{t}\mathrm{d}t$ pour obtenir les primitives : $\dfrac{u^2}{2}+cste=\dfrac{(\ln(t))^2}{2}+cste$

c) Ici, $u=t^3$ donc $\mathrm{d}u=3t^2\mathrm{d}t$, les primitives sont : $\frac{1}{3}\mathrm{e}^u+cste=\frac{1}{3}\mathrm{e}^{t^3}+cste$

d) $u=\operatorname{Arctan}t^2$ donc $\mathrm{d}u=\dfrac{2t}{1+t^4}\mathrm{d}t$, d'où les primitives : $\dfrac{(\operatorname{Arctan}(t^2))^2}{4}+cste$

3. On pense à $1-\sin^2=\cos^2$ par exemple, car obtenir ainsi un carré permettra d'éliminer la racine carrée, donc on pose : $t=\sin(u)$ pour $u\in[-\pi/2,\pi/2]$, donc $\mathrm{d}t=\cos(u)\mathrm{d}u$, et on obtient, du fait que $|\cos|=\cos$ sur $[-\pi/2,\pi/2]$:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2(u)\,\mathrm{d}u=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1+\cos(2u)}{2}\,\mathrm{d}u=\left[\frac{u+\sin(2u)/2}{2}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}=\pi/2$$

7▶

$*$ *Preuve* : par la formule de dérivation d'un produit de fonctions de classe C^1 sur $[a,b]$: $(fg)' = f'g+fg'$, ou encore $f'g = (fg)' - fg'$. On applique le théorème fondamental avec la primitive fg de $(fg)'$. □

$*$ Comme le calcul des primitives sur un intervalle s'effectue toujours à une constante près, on écrit, pour f et g de classe C^1 sur I :

$$\int^x f'(t).g(t)\,\mathrm{d}t = [f(t)g(t)]^x - \int^x f(t).g'(t)\,\mathrm{d}t \text{ ou encore } \int f'(t).g(t)\,\mathrm{d}t = f(x)g(x) - \int f(t).g'(t)\,\mathrm{d}t$$

$*$ C'est très utile pour passer d'un calcul de primitive de fonction de type ln ou Arctan à dérivées rationnelles à un calcul de primitive de fonctions rationnelles...

Par exemple : $\displaystyle\int \operatorname{Arctan} x\,\mathrm{d}x = x\operatorname{Arctan} x - \int \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = x\operatorname{Arctan} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + cste$ en posant pour l'i.p.p. $f' = 1$ et $g = \operatorname{Arctan}$.

$*$ N'hésitez pas, tant que vous n'êtes pas à l'aise, à $\boxed{\text{bien poser pour effectuer une ipp}}$:

$$f' = ... \text{ et } g = ..., \text{ d'où } f = ... \text{ et } g' = ...$$

Pratique 3 :

1. Pour faire disparaître t, on va intégrer cos et dériver t, en posant $f' = \cos$ et $g(t) = t$.
$\displaystyle\int_0^\pi t\cos(t)\,\mathrm{d}t = [t\sin(t)]_0^\pi - \int_0^\pi \sin(t)\,\mathrm{d}t = [\cos(t)]_0^\pi = -2.$

2. Même principe ! $\displaystyle\int t\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = t\mathrm{e}^t - \int \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = (t-1)\mathrm{e}^t + cste$

3. Supposons a et b non nuls. Par deux i.p.p. on retrouve la même fonction :

$$\int \mathrm{e}^t\cos(at)\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^t\cos(at) + a\int \mathrm{e}^t\sin(at)\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^t\cos(at) + a\mathrm{e}^t\sin(at) - a^2\int \mathrm{e}^t\cos(at)\,\mathrm{d}t$$

On en déduit que : $\displaystyle\int \mathrm{e}^t\cos(at)\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^t}{1+a^2}(\cos(at) + a\sin(at)) + cste$
On procède de la même manière pour la deuxième primitive.

Autre possibilité : $\displaystyle\int \mathrm{e}^t\cos(at)\,\mathrm{d}t = \mathfrak{Re}\left(\int \mathrm{e}^{t(1+\mathrm{i}a)}\,\mathrm{d}t\right)$ et le calcul est très simple.

Enfin, on peut deviner la forme d'une primitive : $t \mapsto \mathrm{e}^t.(\alpha\cos(at)+\beta\sin(at))$, expression que l'on dérive alors pour retrouver $t \mapsto \mathrm{e}^t\cos(at)$ en ajustant les constantes (un système 2x2 à résoudre...).

8▶

$*$ Par exemple les fractions rationnelles $F = \dfrac{X^2+2X+1}{X^2+3X+2} = \dfrac{(X+1)^2}{(X+1)(X+2)} = \dfrac{X+1}{X+2} = \dfrac{2(X+1)}{2(X+2)}$ sont les mêmes. Les deux dernières écritures en sont des formes dites irréductibles sur $\mathbb{R}$ (resp. sur $\mathbb{C}$) car $X+1$ est $X+2$ sont sans racine commune réelle (resp. complexe) donc premiers entre eux. Les pôles de F s'obtiennent à partir d'une forme irréductible : ici, F a un seul pôle qui est -2.

$*$ Une division euclidienne se pose ou se devine : c'est ce que nous faisons régulièrement depuis le début de l'année lorsqu'on connaît une racine α d'un polynôme P en factorisant P par $X-\alpha$.

Par exemple, effectuons la division euclidienne de $2X^3+X^2+X-1$ par X^2+X+1.

On la "pose" comme on pose une division euclidienne entre naturels.

$$\begin{array}{llll|l}
2X^3 & +X^2 & +X & -1 & \underline{X^2+X+1} \\
-2X^3 & -2X^2 & -2X & & 2X-1 \\
 & -X^2 & -X & -1 & \\
 & X^2 & +X & +1 & \\
 & & & 0 &
\end{array}$$

soit : $2X^3+X^2+X-1=(X^2+X+1)(2X-1)$, le reste étant nul, le quotient étant $(2X-1)$. On en déduit que $1/2$ est racine de $2X^3+X^2+X-1$, ainsi que j et j^2 puisque de même $1+X+X^2$ le divise.

Autre exemple, avec la division euclidienne de X^4-1 par $2X^3+X^2+X-1$:

$$\begin{array}{llllll|l}
X^4 & & & & & -\ 1 & \underline{2X^3+X^2+X-1} \\
-X^4 & -\dfrac{X^3}{2} & -\dfrac{X^2}{2} & +\dfrac{X}{2} & & & \dfrac{X}{2}-\dfrac{1}{4} \\
 & -\dfrac{X^3}{2} & -\dfrac{X^2}{2} & +\dfrac{X}{2} & & -\ 1 & \\
 & \dfrac{X^3}{2} & +\dfrac{X^2}{4} & +\dfrac{X}{4} & & -\dfrac{1}{4} & \\
 & & -\dfrac{X^2}{4} & +\dfrac{3X}{4} & & -\dfrac{5}{4} &
\end{array}$$

soit : $X^4-1=(2X^3+X^2+X-1)(\frac{X}{2}-\frac{1}{4})-\frac{X^2}{4}+\frac{3X}{4}-\frac{5}{4}$, où le quotient se lit à droite $(\frac{X}{2}-\frac{1}{4})$ et le reste, de degré strictement inférieur à celui du diviseur $2X^3+X^2+X-1$, se lit en bas à gauche $(-\frac{X^2}{4}+\frac{3X}{4}-\frac{5}{4})$.

$*$ Ainsi, la partie entière de $\dfrac{X^4-1}{2X^3+X^2+X-1}=\dfrac{X}{2}-\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4}\dfrac{X^2-3X+5}{2X^3+X^2+X-1}$ est $\dfrac{X}{2}-\dfrac{1}{4}$.

$*$ Bien souvent, il n'est pas utile de poser la division euclidienne pour obtenir la partie entière. Par exemple : $\dfrac{X+1}{X+2}=\dfrac{X+2-1}{X+2}=1-\dfrac{1}{X+2}$, donc la partie entière de cette fraction rationnelle est 1.

$*$ La preuve du théorème est admise, tout comme celle de la factorisation à l'aide d'irréductibles unitaires (de coefficient dominant 1), nous y reviendrons dans le chapitre consacré aux polynômes.

9▶

$*$ C'est le théorème de réduction d'expression la plus simple : on utilise la factorisation dans $\mathbb{C}$ du dénominateur de la forme irréductible de la fraction étudiée.
Ce théorème donne l'existence et la forme de cette réduction en éléments simples. Cependant, son calcul effectif nécessite de connaître la factorisation dans $\mathbb{C}$ du dénominateur. D'autre part, le théorème n'explique pas comment calculer les coefficients α_k, ce que nous allons détailler plus loin.

$*$ La preuve du théorème est plus technique qu'intéressante, elle est admise ici.

$*$ Par exemple : $\dfrac{X+1}{X+2}=1-\dfrac{1}{X+2}$ est déjà réduite puisque $X+2$ est irréductible sur $\mathbb{C}$.

Autre exemple : $\dfrac{X^2+2}{(X-1)(X+1)^2(X-\mathrm{i})}=0+\dfrac{a}{X-1}+\dfrac{b}{X+1}+\dfrac{c}{(X+1)^2}+\dfrac{d}{X-\mathrm{i}}$ (la partie entière est nulle à cause des degrés...) où a, b, c et d sont des complexes (à déterminer).

Pratique 4 :

1. Pour la partie entière : $\dfrac{2X^3+X^2+X-1}{X^2+X+1}=\dfrac{(2X^3+2X^2+2X)-(X^2+X+1)}{X^2+X+1}=2X-1$, ce qui finalement donne la forme réduite de la fraction.

2. $\dfrac{X^4-1}{(X-1)(X-2)(X-3)^3}=\dfrac{X^3+X^2+X+1}{(X-2)(X-3)^3}=0+\dfrac{a}{X-2}+\dfrac{b}{(X-3)^3}+\dfrac{c}{(X-3)^2}+\dfrac{d}{(X-3)}$

10▶

$*$ On ne reforme qu'extrêmement rarement la fraction depuis sa forme réduite par mise au même dénominateur... C'est trop long...

De même, on évite (sauf cas très simple) d'évaluer la fraction en des points choisis au hasard (hors les pôles !!) car cela conduit à un système en général plus long à résoudre.

$*$ Appliquons b) et c) sur l'exemple : $F = \dfrac{X^3}{(X-1)(X-2)^2} = 1 + \dfrac{a}{X-1} + \dfrac{b}{X-2} + \dfrac{c}{(X-2)^2}$

Pour trouver a, on multiplie F par $X-1$ puis on évalue en $X = 1$:

$$(X-1)F = \frac{X^3}{(X-2)^2} = (X-1) + a + \frac{b(X-1)}{X-2} + \frac{c(X-1)}{(X-2)^2} \quad \underline{\text{puis en } X = 1 :} \quad \frac{1}{1} = 1 = a$$

Pour trouver c, on multiplie F par $(X-2)^2$ puis on évalue en $X = 2$:

$$(X-2)^2 F = \frac{X^3}{X-1} = (X-2)^2 + \frac{a(X-2)^2}{X-1} + b(X-2) + c \quad \text{puis en } X = 2 : \quad \frac{8}{1} = 8 = c$$

Remarquez que si on calcule $(X-2)F$, on ne peut aboutir avec $X = 2$ à cause du terme $\dfrac{c}{X-2}$!

À ce stade, il ne reste plus que b à calculer. On pourrait retrancher à F les trois premiers termes, simplifier, et la technique fonctionnerait alors, mais c'est long...

On peut plus rapidement évaluer en 0 : $0 = 1 - a - \frac{b}{2} + \frac{c}{4}$ d'où $b = 4$.

La réduction en éléments simples sur $\mathbb{C}$ de F est donc : $F = 1 + \dfrac{1}{X-1} + \dfrac{4}{X-2} + \dfrac{8}{(X-2)^2}$

Pratique 5 :

1. Par le théorème de réduction : $\dfrac{X+1}{X(X-1)(X-2)} = \dfrac{a}{X} + \dfrac{b}{X-1} + \dfrac{c}{X-2}$

En multipliant par X puis en faisant $X = 0$: $a = 1/2$

En multipliant par $X-1$ puis en faisant $X = 1$: $b = -2$

En multipliant par $X-2$ puis en faisant $X = 2$: $c = 3/2$

Finalement : $\dfrac{X+1}{X(X-1)(X-2)} = \dfrac{1}{2X} - \dfrac{2}{X-1} + \dfrac{3}{2(X-2)}$

2. Par le théorème de réduction : $\dfrac{X^2}{(X-1)^2} = 1 + \dfrac{a}{X-1} + \dfrac{b}{(X-1)^2}$

En multipliant par $(X-1)^2$ puis en faisant $X = 1$: $b = 1$

En choisissant $X = 0$: $0 = 1 - a + b$ donc $a = 2$.

3. Par le théorème de réduction : $\dfrac{X-1}{(X^2+1)X} = 0 + \dfrac{a}{X} + \dfrac{b}{X-\mathrm{i}} + \dfrac{c}{X+\mathrm{i}}$

La fraction est réelle : en passant aux conjugué, c'est la même expression en membre de gauche, donc en membre de droite aussi, donc $\bar{b} = c$.

En multipliant par X puis en faisant $X = 0$: $a = -1$

En multipliant par $X - \mathrm{i}$ puis en faisant $X = \mathrm{i}$: $\dfrac{\mathrm{i}-1}{-2} = b$ donc $b = \dfrac{1-\mathrm{i}}{2}$ et $c = \dfrac{1+\mathrm{i}}{2}$.

11▶

Reprenons le calcul de la Pratique 5 pour la dernière réduction en éléments simples sur $\mathbb{C}$ de

$$F = \frac{X-1}{(X^2+1)X} = 0 - \frac{1}{X} + \frac{1}{2}\left(\frac{1-\mathrm{i}}{X-\mathrm{i}} + \frac{1+\mathrm{i}}{X+\mathrm{i}}\right)$$

Cette réduction ne reflète pas le fait que F est une fraction rationnelle réelle (sinon qu'en écrivant $F = \bar{F}$, l'unicité de la réduction sur $\mathbb{C}$ donne que les constantes relatives aux pôles i et $-$i sont conjuguées).

Regroupons les parties relatives aux pôles conjugués i et $-\mathrm{i}$, ce qui fait apparaître X^2+1 irréductible sur $\mathbb{R}$: $F = -\dfrac{1}{X} + \dfrac{X+1}{X^2+1}$

L'intérêt est que les coefficients intervenant sont tous réels. La forme est un peu plus compliquée, du fait que le numérateur relatif à X^2+1 irréductible sur $\mathbb{R}$ est de degré 1 (ce n'est pas une constante). C'est la décomposition en éléments simples de F sur $\mathbb{R}$, sujet du théorème suivant.

12▶

∗ Par rapport à la réduction sur $\mathbb{C}$: les irréductibles sur $\mathbb{R}$ étant de degré 1 ou 2, les numérateurs relatifs à ces derniers ne sont plus des constantes mais sont de degré au plus 1.

∗ Le théorème se déduit du précédent par regroupement des termes conjugués obtenus avec la réduction sur $\mathbb{C}$, du fait que la fraction étudiée est réelle.

∗ Les méthodes de détermination des coefficients sont adaptables. En particulier, pour trouver β_k et γ_k relatifs à un pôle lié à la plus grande puissance d'un irréductible $(X^2+bX+c)^k$, on multiplie F par ce polynômes puis on évalue en une de ses racines.

Exemple du point 11 : par théorème, $F = \dfrac{a}{X} + \dfrac{\alpha X+\beta}{X^2+1}\cdot$ Pour a le calcul est identique : $a=1$.

On calcule alors $(X^2+1)F = \dfrac{X-1}{X} = -\dfrac{X^2+1}{X} + \alpha X + \beta$ puis on évalue en $X = \mathrm{i}$:

$\mathrm{i}-1 = \mathrm{i}(\alpha\mathrm{i}+\beta) = -\alpha + \mathrm{i}\beta$ d'où $\alpha=\beta=1$ et on retrouve : $F = -\dfrac{1}{X} + \dfrac{X+1}{X^2+1}$

Pratique 6 :

1. $\dfrac{X+2}{(X(X+1)(X^2+X+1)} = \dfrac{a}{X} + \dfrac{b}{X+1} + \dfrac{cX+d}{X^2+X+1}$ puisque la partie entière est nulle.

2. $\dfrac{2X^8+1}{(X^2-1)^2(X^2+2)^2} = 2 + \dfrac{a}{X-1} + \dfrac{b}{(X-1)^2} + \dfrac{c}{X+1} + \dfrac{d}{(X+1)^2} + \dfrac{eX+f}{X^2+2} + \dfrac{gX+h}{(X^2+2)^2}$. Comme la fraction est paire, par unicité de la décomposition, celle-ci est également paire, donc $c=-a$, $d=b$, $e=g=0$.

13▶

∗ Vérifions le calcul 2) pour $a = \alpha + \mathrm{i}\beta$:

$$\int \frac{1}{x-a}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x-\alpha+\mathrm{i}\beta}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\,\mathrm{d}x =$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{2(x-\alpha)}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\,\mathrm{d}x + \mathrm{i}\int \frac{1/\beta}{1+((x-\alpha)/\beta)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln|x-a|^2 + \mathrm{i}\ \mathrm{Arctan}\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right) + cste$$

∗ Par exemple, calculons $I = \displaystyle\int \frac{x}{(x-1)(x^2+1)}\,\mathrm{d}x$ par les deux méthodes.

D'une part, la fraction dont on cherche les primitives est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ et ses formes réduites en élements simples sont respectivement sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$:

$$\frac{x}{(x-1)(x^2+1)} = 0 + \frac{1/2}{x-1} - \frac{1}{4}\frac{1+\mathrm{i}}{x-\mathrm{i}} - \frac{1}{4}\frac{1-\mathrm{i}}{x+\mathrm{i}} = 0 + \frac{1/2}{x-1} + \frac{1}{2}\frac{1-x}{x^2+1}$$

Le calcul utilisant la réduction complexe donne sur les intervalles de continuité :

$$I = \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1+\mathrm{i}}{4}(\ln|x-\mathrm{i}| + \mathrm{i}\,\mathrm{Arctan}(x/1)) - \frac{1-\mathrm{i}}{4}(\ln|x+\mathrm{i}| + \mathrm{i}\,\mathrm{Arctan}(x/(-1))) + cste$$

Si on veut une jolie forme réelle (attendue...), il "suffit" d'extraire la partie réelle, la partie imaginaire étant nulle. On obtient : $I = \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\mathrm{Arctan}(x) + cste.$

Plus rapidement, depuis la réduction réelle : $I = \frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\mathrm{Arctan}(x) - \frac{1}{4}\ln(x^2+1) + cste.$

Quelle méthode préférez-vous ?

Pratique 7 :

$x^2+x+1=(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}=\frac{3}{4}\left(\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right).$

On pose $t=\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}$ donc $\mathrm{d}t=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{d}x$.

$I=\displaystyle\int \frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x=\frac{4}{3}\int \frac{1}{t^2+1}\frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{d}t=\frac{2}{\sqrt{3}}\ \mathrm{Arctan}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+cste.$

Pratique 8 :

1. Pas d'invariance... On pose $t=\tan(x/2)$. **2.** Invariance par $x\mapsto -x$, on pose : $t=\cos x$.

3. On passe en cos et sin, invariance par $x\mapsto x+\pi$, on pose donc $t=\mathrm{th}\,x$.

14▶

$*$ La simplification du radical passe par la transformation de son argument en un carré : ce sont les formules trigonométriques qui le permettent ! Pour choisir la bonne, le domaine de définition est une bonne piste. Précisez les domaines des variables, et attention à l'extraction de la racine carrée !

Par exemple pour simplifier $\sqrt{1-t^2}$, qui n'a de sens que pour $t\in[-1,1]$, on utilise que $1-\sin^2 u=\cos^2 u$. En posant $t=\sin u$ (donc $\mathrm{d}t=\cos(u)\mathrm{d}u$) avec $u\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, $\sqrt{\cos^2 u}=\cos u$ puisque sur le domaine choisi $\cos u$ est positif. Les autres cas sont semblables.

$*$ Exemple : pour calculer $I=\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}}\,\mathrm{d}x$, on transforme x^2+x+1 en un carré via une formule trigonométrique. Laquelle ?

$x^2+x+1=(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}=\frac{3}{4}\left(\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right)$, donc on veut transformer t^2+1 en un carré. La formule $1+\mathrm{sh}^2=\mathrm{ch}^2$ est choisie en posant : $\left(\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)=\mathrm{sh}(u)$ avec u réel, donc $\dfrac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{d}x=\mathrm{ch}(u)\mathrm{d}u$, et $\sqrt{x^2+x+1}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{ch}\,u$ car $\mathrm{ch}\,u$ est positif. Puis, sur les intervalles de continuité :

$$I=\int \frac{\sqrt{3}\,\mathrm{sh}(u)-1}{\sqrt{3}\,\mathrm{ch}\,u}\,\frac{\sqrt{3}\,\mathrm{ch}\,u}{2}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int\left(\sqrt{3}\,\mathrm{sh}(u)-1\right)\mathrm{d}u$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{ch}\left(\mathrm{sh}^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\right)-\frac{1}{2}\,\mathrm{sh}^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+cste=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(1+\frac{(2x+1)^2}{3}\right)-\frac{1}{2}\,\mathrm{sh}^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+cste$$

Retournez-vous... En début de chapitre, saviez-vous calculer cette primitive ?

On pouvait aussi utiliser la formule : $1+\tan^2=1/\cos^2$, et poser : $\left(\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)=\tan(u)$ avec $u\in\,]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, donc $\dfrac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\cos^2 u}\mathrm{d}u$, et $\sqrt{x^2+x+1}=\dfrac{\sqrt{3}}{2\cos u}$ car $\cos u$ est positif sur le domaine précisé.

On obtiendrait alors sur les intervalles de continuité :

$$I=\int \frac{\sqrt{3}\tan(u)-1}{\sqrt{3}}\,\frac{\sqrt{3}}{2\cos u}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int \frac{\sin(u)}{\cos^2 u}\,\mathrm{d}u-\frac{1}{2}\int\frac{1}{\cos u}\,\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{2\cos u}-\frac{1}{2}\ln\left(\left|\tan(\tfrac{u}{2}+\tfrac{\pi}{4})\right|\right)+cste$$

comme nous allons le voir un peu plus loin. Il reste alors à remplacer u par $\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$.

Pratique 9 :

1. $1-2x^2 = 1-(\sqrt{2}x)^2$: poser $\sqrt{2}x = \sin t$ avec $t \in [-\pi/2, \pi/2]$, puisque $1-\sin^2 = \cos^2$.

2. $3x^2 - x + 1 = (\sqrt{3}x - \frac{1}{2\sqrt{3}})^2 + \frac{11}{12} = \frac{11}{12}\left(\left(\frac{6x-1}{\sqrt{11}}\right)^2 + 1\right)$, on pose $\frac{6x-1}{\sqrt{11}} = \operatorname{sh} t$ (puis $1+\operatorname{sh}^2 = \operatorname{ch}^2$).

3. $x^2 + x - 1 = (x+1/2)^2 - \frac{5}{4} = \frac{5}{4}\left((2x+1)/\sqrt{5})^2 - 1\right)$, donc on pose $\frac{2x+1}{\sqrt{5}} = \varepsilon \operatorname{ch} t$ pour $t \geqslant 0$ et ε qui désigne le signe de $2x+1$. On utilisera alors $\operatorname{ch}^2 - 1 = \operatorname{sh}^2$.

15▶

Toutes les primitives de ce tableau final ont été obtenues par les méthodes précédentes.
Par exemple, pour vérifier par dérivation les deux dernières primitives des compléments :

$$\frac{1}{\tan(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})}\,\frac{1}{2\cos^2(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})} = \frac{1}{2\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})\cos(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})} = \frac{1}{\sin(2(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}))} = \frac{1}{\cos x}$$

et

$$2\frac{1}{1+\mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{e}^x = \frac{2}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} = \frac{1}{\operatorname{ch}(x)}$$