

Лабораторна робота №4

ФОРМУЛИ АЛГЕБРИ ВИСЛОВЛЕНЬ. РІВНОСИЛЬНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ.

ДИЗ'ЮНКТИВНІ ТА КОН'ЮНКТИВІ НОРМАЛЬНІ ФОРМИ

Мета: Ознайомитися з основними поняттями алгебри висловлювань, навчитися будувати та трансформувати формули, а також застосовувати знання до розв'язання логічних завдань. Вивчити основні закони алгебри висловлювань, навчитися виконувати рівносильні перетворення формул та зводити їх до нормальних форм. Опанувати навички роботи з логічними виразами.

Зміст роботи

Завдання 1. Перетворити до ДНФ формули.

4	$(A \rightarrow B) \vee \neg(B \wedge C)$
---	---

Перетворити до ДНФ формулу:

$$F = (A \rightarrow B) \vee \neg(B \wedge C)$$

Розкриємо імплікацію:

$$(A \rightarrow B) = (\neg A \vee B)$$

Тоді:

$$F = (\neg A \vee B) \vee \neg(B \wedge C)$$

Застосуємо закон де Моргана:

$$\neg(B \wedge C) = (\neg B \vee \neg C)$$

Тоді:

$$F = (\neg A \vee B) \vee (\neg B \vee \neg C)$$

Об'єднаємо в одну диз'юнкцію:

$$F = \neg A \vee B \vee \neg B \vee \neg C$$

Використаємо тотожність:

$$B \vee \neg B = 1$$

Отже:

$$F = \neg A \vee 1 \vee \neg C = 1$$

Відповідь (ДНФ):

$$F = 1$$

(Тобто формула є тотожно істинною.)

Написати програмне забезпечення для представлення змінних завдання і перевірки еквівалентності початкової функції і ДНФ для всіх можливих ситуацій:

4	Туризм	A: Клієнт бронює квитки. B: Клієнт отримує візу. C: Клієнт бронює готель.	(Якщо $A \rightarrow B$) АБО неправда, що $(B \wedge C)$.
---	---------------	--	--

https://github.com/ShadowGhost31/DSKMLabs/tree/main/Lab4_Task1

					ДУ «Житомирська політехніка». 22.121.04.000 – Пр1 Змн. Арк. № докум. Підпис Дата Розроб. Бігун Р.В. Перевір. Керівник Н. контр. Зав. каф.		
Звіт з лабораторної роботи							

Завдання 2. Перетворити до КНФ формули:

4	$((P \vee Q) \rightarrow (P \wedge Q)) \rightarrow R$
---	---

$$F = (((P \vee Q) \rightarrow (P \wedge Q)) \rightarrow R)$$

Розкриваємо імплікації:

$$(P \vee Q) \rightarrow (P \wedge Q) = \neg(P \vee Q) \vee (P \wedge Q)$$

Застосуємо де Моргана:

$$\neg(P \vee Q) = (\neg P \wedge \neg Q)$$

Тоді:

$$(P \vee Q) \rightarrow (P \wedge Q) = (\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q)$$

Тепер вся формула:

$$F = \neg((\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q)) \vee R$$

Інверсія диз'юнкцій:

$$\neg(X \vee Y) = \neg X \wedge \neg Y$$

Отже:

$$\neg((\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q)) = \neg(\neg P \wedge \neg Q) \wedge \neg(P \wedge Q)$$

Розкриваємо інверсії кон'юнкцій:

$$\neg(\neg P \wedge \neg Q) = (P \vee Q)$$

$$\neg(P \wedge Q) = (\neg P \vee \neg Q)$$

Тоді:

$$\neg((\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q)) = (P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)$$

Підставляємо:

$$F = R \vee ((P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q))$$

Дистрибутивність для КНФ:

$$X \vee (A \wedge B) = (X \vee A) \wedge (X \vee B)$$

Отже КНФ:

$$F = (R \vee (P \vee Q)) \wedge (R \vee (\neg P \vee \neg Q))$$

Фінальна КНФ (акуратно):

$$F = (R \vee P \vee Q) \wedge (R \vee \neg P \vee \neg Q)$$

Завдання 3. Мінімізувати формули:

4	$((A \rightarrow (B \wedge C)) \wedge \neg((B \wedge C) \rightarrow A))$
---	--

$$G = ((A \rightarrow (B \wedge C)) \wedge \neg((B \wedge C) \rightarrow A))$$

Розкриваємо імплікації:

$$A \rightarrow (B \wedge C) = \neg A \vee (B \wedge C)$$

$$(B \wedge C) \rightarrow A = \neg(B \wedge C) \vee A = (\neg B \vee \neg C \vee A)$$

Інвертуємо другу частину:

$$\neg((B \wedge C) \rightarrow A) = \neg(\neg B \vee \neg C \vee A)$$

За де Морганом:

$$\neg(\neg B \vee \neg C \vee A) = B \wedge C \wedge \neg A$$

Підставляємо в G:

$$G = (\neg A \vee (B \wedge C)) \wedge (B \wedge C \wedge \neg A)$$

Оскільки $(B \wedge C \wedge \neg A)$ вже гарантує $\neg A$, то $(\neg A \vee (B \wedge C))$ автоматично істинне.

Тому мінімізована форма:

		Бігун Р.В.			ДУ «Житомирська політехніка». 22.121.04.000 – Пр1	Арк.
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		
2						

$$G = \neg A \wedge B \wedge C$$

Відповідь (мінімум):

$$\neg A \wedge B \wedge C$$

Завдання 4. Для заданих функцій отримати ДДНФ

№	f
4	10111001

Задані функції мають 8 символів, що відповідає функції від трьох змінних ($2^3=8$ комбінацій). Задамо сценарій, де логічна функція від трьох змінних (X,Y,Z) може бути використана для прийняття рішення: «Система контролю якості виробництва».

Визначимо,

чи потрібно продукт ВІДХИЛИТИ ($f=1$) чи СХВАЛИТИ ($f=0$).

Логічні змінні:

Змінна	Біт	Значення (1 -True)	Опис
X	4-й	Критичний дефект	Виявлено дефект, що впливає на безпеку або функціональність.
Y	2-й	Проблема з естетикою	Наявні незначні подряпини або нерівності покриття.
Z	1-й	Тест пройдено	Продукт успішно пройшов тестування.

Завдання. Використовуйте задану функцію для отримання ДДНФ і реалізуйте код:

1. Визначає, які комбінації (X,Y,Z) призводять до результату $f=1$ (ВІДХИЛИТИ).
2. На основі отриманих комбінацій згенеруйте ДДНФ
3. Сплануйте відображення результату, який фактично є логічним правилом для системи створюваної системи.

Виконання:

Дано вектор значень функції:

$$f = 10111001 \text{ (8 значень} \Rightarrow 3 \text{ змінні X,Y,Z)}$$

Приймаємо стандартний порядок наборів (X — старший біт, Z — молодший):

$$XYZ = 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111$$

Тоді відповідність “набір \rightarrow значення f” така:

$$\begin{aligned} 000 &\rightarrow 1 \\ 001 &\rightarrow 0 \\ 010 &\rightarrow 1 \\ 011 &\rightarrow 1 \\ 100 &\rightarrow 1 \\ 101 &\rightarrow 0 \\ 110 &\rightarrow 0 \\ 111 &\rightarrow 1 \end{aligned}$$

Комбінації (X,Y,Z), на яких $f = 1$ (тобто “ВІДХИЛИТИ”)

$f = 1$ для наборів:

$$(0,0,0), (0,1,0), (0,1,1), (1,0,0), (1,1,1)$$

ДДНФ (досконала диз'юнктивна нормальна форма)

ДДНФ — це диз'юнкція всіх мінтермів, де $f=1$.

		Бігун Р.В.			ДУ «Житомирська політехніка».22.121.04.000 – Пр1	Арк.
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		

Позначення:

0 означає заперечення (\neg), 1 означає змінну без заперечення.

Мінтерми:

$XYZ=000: \neg X \wedge \neg Y \wedge \neg Z$

$XYZ=010: \neg X \wedge Y \wedge \neg Z$

$XYZ=011: \neg X \wedge Y \wedge Z$

$XYZ=100: X \wedge \neg Y \wedge \neg Z$

$XYZ=111: X \wedge Y \wedge Z$

Отже ДДНФ:

$$f(X, Y, Z) = (\neg X \wedge \neg Y \wedge \neg Z) \vee (\neg X \wedge Y \wedge \neg Z) \vee (\neg X \wedge Y \wedge Z) \vee (X \wedge \neg Y \wedge \neg Z) \vee (X \wedge Y \wedge Z)$$

План відображення “логічного правила” для системи контролю якості

Сенс змінних (зі сценарію “Контроль якості”):

X = True: Критичний дефект

Y = True: Проблема з естетикою

Z = True: Тест пройдено

Рішення: $f=1 \rightarrow \text{ВІДХИЛИТИ}, f=0 \rightarrow \text{СХВАЛИТИ}$

Правило з ДДНФ (людською мовою, по випадках “ВІДХИЛИТИ”):

Якщо $(X=0, Y=0, Z=0) \rightarrow \text{ВІДХИЛИТИ}$

Якщо $(X=0, Y=1, Z=0) \rightarrow \text{ВІДХИЛИТИ}$

Якщо $(X=0, Y=1, Z=1) \rightarrow \text{ВІДХИЛИТИ}$

Якщо $(X=1, Y=0, Z=0) \rightarrow \text{ВІДХИЛИТИ}$

Якщо $(X=1, Y=1, Z=1) \rightarrow \text{ВІДХИЛИТИ}$

В інших випадках $\rightarrow \text{СХВАЛИТИ}$

GIT додатку: https://github.com/ShadowGhost31/DSKMLabs/tree/main/Lab4_Task4

Завдання 5. Для заданих функцій отримати МДНФ.

№	f
4	00101111

Дано вектор значень:

$f = 00101111$

(функція від трьох змінних X, Y, Z; порядок наборів: XYZ = 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111)

Знайдемо набори, на яких $f = 1$

Вектор: 0 0 1 0 1 1 1 1

Отже $f = 1$ на наборах №: 2, 4, 5, 6, 7

Бігун Р.В.					Арк.
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата	ДУ «Житомирська політехніка».22.121.04.000 – Пр1

Відповідні набори:

- 2: 010 → (X=0, Y=1, Z=0)
- 4: 100 → (X=1, Y=0, Z=0)
- 5: 101 → (X=1, Y=0, Z=1)
- 6: 110 → (X=1, Y=1, Z=0)
- 7: 111 → (X=1, Y=1, Z=1)

ДДНФ (для контролю)

$$f = (\neg X \wedge Y \wedge \neg Z) \vee (X \wedge \neg Y \wedge \neg Z) \vee (X \wedge \neg Y \wedge Z) \vee (X \wedge Y \wedge \neg Z) \vee (X \wedge Y \wedge Z)$$

Мінімізація (групування)

Набори 100 і 101 відрізняються тільки Z ⇒ дають терм: X ∧ ¬Y

Набори 110 і 111 відрізняються тільки Z ⇒ дають терм: X ∧ Y

Тоді:

$$(X \wedge \neg Y) \vee (X \wedge Y) = X \wedge (\neg Y \vee Y) = X$$

Залишається ще набір 010 ⇒ ($\neg X \wedge Y \wedge \neg Z$).

Разом:

$$f = X \vee (\neg X \wedge Y \wedge \neg Z)$$

Спрощуємо за поглинанням:

$$X \vee (\neg X \wedge Y \wedge \neg Z) = X \vee (Y \wedge \neg Z)$$

Відповідь (МДНФ)

МДНФ:

$$f(X, Y, Z) = X \vee (Y \wedge \neg Z)$$

Завдання 6. Бульова функція $f(x, y, z)$ задана формулою алгебри логіки. Спростити її за допомогою карт Карно (Таблиці істинності були побудовані у лабораторній роботі №3).

4	$f = ((x \rightarrow (y \vee z)) \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z)))$
---	--

Дано формулу:

$$f = ((x \rightarrow (y \vee z)) \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z)))$$

З лабораторної №3 (таблиця істинності) маємо:

$f = 0$ лише для набору $x=1, y=1, z=0$ (тобто 110).

На всіх інших 7 наборах $f = 1$.

Карта Карно (3 змінні). Візьмемо стандарт:

рядки: $x = 0, 1$

стовпці: $yz = 00, 01, 11, 10$

Заповнення:

$$x=0: yz00=1, yz01=1, yz11=1, yz10=1$$

$$x=1: yz00=1, yz01=1, yz11=1, yz10=0$$

		<i>Бігун Р.В.</i>			<i>ДУ «Житомирська політехніка». 22.121.04.000 – Пр1</i>	<i>Арк.</i>
<i>Змн.</i>	<i>Арк.</i>	<i>№ докум.</i>	<i>Підпис</i>	<i>Дата</i>		

Групування одиниць:

Весь рядок $x=0$ (4 одиниці) дає терм: $\neg x$

Всі клітинки з $y=0$ ($yz=00$ і 01 в обох рядках) дають терм: $\neg y$

Всі клітинки з $z=1$ (стовпці $yz=01$ і 11 в обох рядках) дають терм: z

Отже мінімізована МДНФ:

$$f = \neg x \vee \neg y \vee z$$

Еквівалентний запис:

$$f = \neg(x \wedge y \wedge \neg z)$$

Відповідь (спрощена функція):

$$f(x,y,z) = \neg x \vee \neg y \vee z$$

Завдання 7. Реалізувати завдання 6 програмно

https://github.com/ShadowGhost31/DSKMLabs/tree/main/Lab4_Task7

		<i>Бігун Р.В.</i>			ДУ «Житомирська політехніка». 22.121.04.000 – Пр1	Арк.
Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата		6