Лабораторна робота №1
ТЕОРІЯ МНОЖИН

Мета: сформувати у студентів поняття множини, числової множини, познайомити з різними операціями над множинами, відпрацювати навички та вміння задавати множини різними способами.

Зміст роботи

Завдання 1. Операції з множинами. Використовуючи теоретичні відомості, розв'язати наступні задачі за варіантом.

4	A={1, 2, 3, 4}, B={3, 4, 5, 6}, C={1, 3, 5, 7}, U={1, .., 7}. Знайти множину, яку задано за допомогою операцій: а) (A∩B)∪C'; б) A\(BΔC).

Дано:
A = {1, 2, 3, 4}
B = {3, 4, 5, 6}
C = {1, 3, 5, 7}
U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}

а) (A ∩ B) ∪ C'
Знайдемо перетин множин A і B:
A ∩ B = {1, 2, 3, 4} ∩ {3, 4, 5, 6} = {3, 4}

Знайдемо доповнення множини C відносно універсальної множини U:
C' = U \ C = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} \ {1, 3, 5, 7} = {2, 4, 6}

Знайдемо об'єднання:
(A ∩ B) ∪ C' = {3, 4} ∪ {2, 4, 6} = {2, 3, 4, 6}

Відповідь: {2, 3, 4, 6}

б) A \ (B Δ C)
Симетрична різниця визначається як:
B Δ C = (B \ C) ∪ (C \ B)

Знайдемо B \ C:
B \ C = {3, 4, 5, 6} \ {1, 3, 5, 7} = {4, 6}

Знайдемо C \ B:
C \ B = {1, 3, 5, 7} \ {3, 4, 5, 6} = {1, 7}

Об'єднаємо результати:
B Δ C = {4, 6} ∪ {1, 7} = {1, 4, 6, 7}

Знайдемо різницю A \ (B Δ C):
A \ (B Δ C) = {1, 2, 3, 4} \ {1, 4, 6, 7} = {2, 3}

Відповідь: {2, 3}

Завдання 2. На основі множин A, B і C із завдання 1 потрібно визначити нову множину (за варіантом). Потім знайти її булеан і порахувати його потужність.

4	$A \cap (B' \cup C)'$

Потрібно знайти множину:
$X = A \cap (B' \cup C)'$

Дано (із завдання 1):
$A = \{1, 2, 3, 4\}$
$B = \{3, 4, 5, 6\}$
$C = \{1, 3, 5, 7\}$
$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

Знайдемо доповнення множини B відносно U:
$B' = U \setminus B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \setminus \{3, 4, 5, 6\} = \{1, 2, 7\}$

Знайдемо об'єднання B' і C:
$B' \cup C = \{1, 2, 7\} \cup \{1, 3, 5, 7\} = \{1, 2, 3, 5, 7\}$

Знайдемо доповнення (B' ∪ C)':
$(B' \cup C)' = U \setminus (B' \cup C) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \setminus \{1, 2, 3, 5, 7\} = \{4, 6\}$

Знайдемо перетин з A:
$X = A \cap (B' \cup C)' = \{1, 2, 3, 4\} \cap \{4, 6\} = \{4\}$

Отже, $X = \{4\}$

Булеан множини X (P(X)) — всі підмножини X:
$P(X) = \{ \emptyset, \{4\} \}$

Потужність булеана:
$|X| = 1$
$|P(X)| = 2^{|X|} = 2^1 = 2$

Відповідь:
$X = \{4\}$
$P(X) = \{ \emptyset, \{4\} \}$
$|P(X)| = 2$

Завдання 3. Перевірити вірність тверджень

4	а) $\{-1, 1\} \subset N$; б) $R \setminus Q = Q$; в) $(A \setminus B) \cap C = A \setminus (B \cup C)$; г) $A \cup (A \cap B) = A$; д) якщо $A \subseteq B$, то $A \cap C \subseteq B \cap C$.

а) $\{-1, 1\} \subset N$.

Твердження хибне.
Пояснення: N — множина натуральних чисел (1, 2, 3, …), тобто не містить 0 і від'ємних чисел. Число −1 не належить N, отже множина {−1, 1} не може бути підмножиною N.

Висновок: твердження НЕвірне.

б) $R \setminus Q = Q$.

Твердження хибне.
Пояснення: $R \setminus Q$ — це множина дійсних чисел, які не є раціональними (ірраціональні числа).
Вона не може дорівнювати Q (раціональним).
Контрприклади:

$\sqrt{2} \in R \setminus Q$, але $\sqrt{2} \notin Q$.

$1/2 \in Q$, але $1/2 \notin R \setminus Q$.

Висновок: твердження НЕвірне.

в) $(A \setminus B) \cap C = A \setminus (B \cup C)$.

Твердження хибне.
Контрприклад:
Нехай $A = \{1\}$, $B = \emptyset$, $C = \{1\}$.
Ліва частина:
$(A \setminus B) \cap C = (A \setminus \emptyset) \cap \{1\} = A \cap \{1\} = \{1\}$.
Права частина:
$A \setminus (B \cup C) = A \setminus (\emptyset \cup \{1\}) = A \setminus \{1\} = \emptyset$.
Оскільки $\{1\} \neq \emptyset$, рівність не виконується.

Висновок: твердження НЕвірне.

г) $A \cup (A \cap B) = A$.

Твердження вірне (закон поглинання).
Доведення (метод елемента):
Нехай x — довільний елемент.

Якщо $x \in A \cup (A \cap B)$, то $x \in A$ або ($x \in A$ і $x \in B$). В обох випадках $x \in A$. Отже, $A \cup (A \cap B) \subseteq A$.

Якщо $x \in A$, то x автоматично належить $A \cup (A \cap B)$. Отже, $A \subseteq A \cup (A \cap B)$.
Маємо включення в обидва боки, тому множини рівні.

Висновок: твердження ВІРНЕ.

д) Якщо $A \subseteq B$, то $A \cap C \subseteq B \cap C$.

Твердження вірне.
Доведення (метод елемента):
Нехай $x \in A \cap C$. Тоді $x \in A$ і $x \in C$.
Оскільки $A \subseteq B$, то з $x \in A$ випливає $x \in B$.
Разом маємо $x \in B$ і $x \in C$, тобто $x \in B \cap C$.
Отже, $A \cap C \subseteq B \cap C$.

Висновок: твердження ВІРНЕ.

Завдання 4. Логічним методом довести тотожність

4	$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

Потрібно довести:
$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

Доведення (логічним методом).

Нехай x — довільний елемент.
Доведемо включення: $A \setminus (B \cap C) \subseteq (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$
Нехай $x \in A \setminus (B \cap C)$.
За означенням різниці множин це означає:
$x \in A$ і $x \notin (B \cap C)$.

За означенням перетину:
$x \notin (B \cap C)$ означає, що НЕ виконується ($x \in B$ і $x \in C$),
тобто ($x \notin B$) або ($x \notin C$).

Отже, маємо:
$x \in A$ і ($x \notin B$ або $x \notin C$).

Розглянемо два випадки:

якщо $x \notin B$, то $x \in A$ і $x \notin B$, тобто $x \in A \setminus B$;
якщо $x \notin C$, то $x \in A$ і $x \notin C$, тобто $x \in A \setminus C$.

У будь-якому випадку x належить ($A \setminus B$) або ($A \setminus C$), тобто:
$x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.
Отже, $A \setminus (B \cap C) \subseteq (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

Доведемо включення: $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) \subseteq A \setminus (B \cap C)$
Нехай $x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.
Тоді за означенням об'єднання:
$x \in (A \setminus B)$ або $x \in (A \setminus C)$.

Розглянемо два випадки:

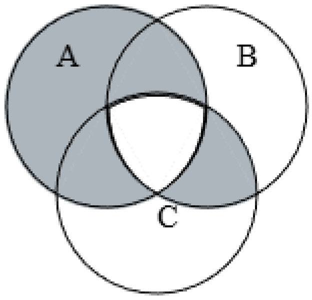
Випадок 1: $x \in A \setminus B$.
Тоді $x \in A$ і $x \notin B$.
Звідси випливає, що x не може належати $B \cap C$ (бо для цього потрібно $x \in B$).
Отже, $x \notin (B \cap C)$.
Тобто $x \in A$ і $x \notin (B \cap C)$, а це означає $x \in A \setminus (B \cap C)$.

Випадок 2: $x \in A \setminus C$.
Тоді $x \in A$ і $x \notin C$.
Звідси випливає, що x не може належати $B \cap C$ (бо для цього потрібно $x \in C$).
Отже, $x \notin (B \cap C)$.
Тобто $x \in A \setminus (B \cap C)$.
У будь-якому випадку отримуємо:
$x \in A \setminus (B \cap C)$.
Отже, $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) \subseteq A \setminus (B \cap C)$.
Висновок:

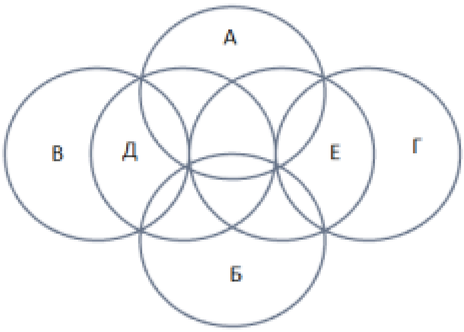
Оскільки виконуються обидва включення:
A \ (B ∩ C) ⊆ (A \ B) ∪ (A \ C)
і
(A \ B) ∪ (A \ C) ⊆ A \ (B ∩ C),
то множини рівні, тобто тотожність доведено:
A \ (B ∩ C) = (A \ B) ∪ (A \ C).

Завдання 5. Зобразити на діаграмі Ейлера-Венна множину

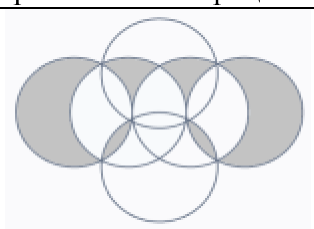
4	AΔ(B∩C)



Завдання 6. Дано множини А, Б, В, Г, Д, Е



Визначте, які операції між відповідають цим областям. Запишіть результат у вигляді виразу з використанням операцій ∪,∩,\,Δ.

4	

Відповідь: (В \ (Д \ Б)) ∪ (Г \ (Е \ Б)) ∪ (А ∩ (Д \ (Е ∪ В))) ∪ (А ∩ (Е \ (Г ∪ Д)))

Завдання 7. Спростити вираз, застосовуючи закони алгебри множин (у відповідь множини можуть входити не більше одного разу)

Самостійна робота

ЗАВДАННЯ 1. Записати множину, перелічивши всі її елементи

1. F = {x | x – улюблені свята вашої родини}
F = {Новий рік; Різдво; Великдень; день народження мами; день народження тата}

2. A = {n | n ∈ N, n – кратне 3 і n < 25}
Кратні 3, менші за 25: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24
A = {3; 6; 9; 12; 15; 18; 21; 24}

3. B = {n | n ∈ N, n – прості числа, менше за 20}

Прості числа < 20: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19
B = {2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19}

4. C = {x | x ∈ N, x^2 – 4x + 3 = 0}
Розв'язання: x^2 – 4x + 3 = 0
(x – 1)(x – 3) = 0, тому x = 1 або x = 3 (обидва ∈ N)
C = {1; 3}

5. D = {x | x ∈ R, x + 1/x ≤ 2 і x > 0}
Для x > 0 маємо: x + 1/x ≥ 2 (нерівність AM-GM), рівність лише при x = 1
Щоб виконувалось x + 1/x ≤ 2, потрібно x + 1/x = 2, тобто x = 1
D = {1}

6. E = {x | x ∈ N, 3 ≤ x < 14}
Натуральні x від 3 до 13:
E = {3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13}

7. G = {x | x = y^2, y ∈ Z}
Це множина всіх квадратів цілих чисел (невід'ємні квадрати):
G = {0; 1; 4; 9; 16; 25; 36; 49; 64; 81; 100; …}

ЗАВДАННЯ 2. Описати множини за допомогою характеристичної властивості

1. A = {березень; квітень; травень}
A = {x | x – весняний місяць}

2. B = {1; 5; 25; 125; 625; …}
Це степені числа 5: 5^0, 5^1, 5^2, …
B = {x | x = 5^n, n ∈ N ∪ {0}}

3. C = {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37}
Це прості числа, не більші за 37
C = {x | x ∈ N, x – просте число, x ≤ 37}

4. D = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}
D = {x | x ∈ Z, 0 ≤ x ≤ 9}

5. E = {0; 1}
E = {x | x ∈ Z, 0 ≤ x ≤ 1}

6. F = {2, 4, 6, …}
Парні натуральні числа
F = {x | x ∈ N, x = 2n, n ∈ N}

7. G = {(3, 5, 7), (7, 11, 13), (11, 13, 17), …}
Це трійки послідовних простих чисел (кожна трійка — три прості підряд)
G = {(p_i, p_{i+1}, p_{i+2}) | p_i – i-те просте число, i ∈ N}

ЗАВДАННЯ 3. Перевірити, чи рівні множини

A – множина з 30 стільців, B – множина з 30 студентів

Множини не рівні, бо мають різні елементи (стільці $\neq$ студенти), навіть якщо потужності однакові.
Висновок: $A \neq B$.

$A = \{x \mid x \in R, x(x+3)=0\}$, $B = \{-3; 0\}$
Розв'язання: $x(x+3)=0 \Rightarrow x=0$ або $x=-3$
Отже $A = \{-3; 0\} = B$
Висновок: $A = B$.

$A = R$, $B = \{x \mid x \in R, (x-1)^2=0\}$
$(x-1)^2=0 \Rightarrow x=1$, тому $B = \{1\}$
$A = R$ містить всі дійсні числа, а B лише 1 число
Висновок: $A \neq B$.

$A = \{1, \{2, 5\}, 6\}$, $B = \{1, \{5, 2\}\}$
У множині B немає елемента 6, тому множини не можуть бути рівні.
Також $\{2,5\} = \{5,2\}$, але це не рятує рівність.
Висновок: $A \neq B$.

$A = \{1, \{2, 5\}, 6\}$, $B = \{1, 2, 5, 6\}$
У A є елемент $\{2,5\}$ (це один елемент-множина), а в B окремо є 2 і 5.
Отже склад елементів різний.
Висновок: $A \neq B$.

$A = \{7, 2, 5, 8\}$, $B = \{2, 7, 8, 5\}$
Елементи ті самі, порядок у множині не важливий.
Висновок: A = B.

$A = \{x \mid x \in R, x^2/(x-1) > 2\}$, $B = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$

Перевіримо нерівність:
$x^2/(x-1) > 2$, де $x \neq 1$
Перенесемо в один дріб:
$(x^2 - 2(x-1)) / (x-1) > 0$
$(x^2 - 2x + 2) / (x-1) > 0$
Чисельник: $x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1 > 0$ для всіх $x \in R$ (ніколи не дорівнює нулю)

Отже знак дробу визначається тільки знаменником $(x-1)$:
Дріб > 0 тоді і тільки тоді, коли $x-1 > 0$, тобто $x > 1$

Тому:
$A = (1; +\infty)$

А $B = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$ містить ще й всі $x < 1$

Висновок: $A \neq B$, бо $A = (1; +\infty)$, а $B = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.