Homework 7

Name: 詹远瞩, Number: 17300180094

2020 年 12 月 12 日

1 (1)

原问题的对偶形式为拉格朗日函数的极大极小问题，拉格朗日函数为：

$$L(w,b,\xi,\alpha,\mu)=\frac{1}{2}\|w\|^2+C\sum_{i=1}^{N}\xi_i^2-\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\big[y_i(w\cdot X_i+b)-1+\xi_i\big]-\sum_{i=1}^{N}\mu_i\xi_i$$

对偶问题可以写成：

$$\max_{\alpha_i\geq 0,\mu_i\geq 0}\min_{w,b,\xi_i}L(w,b,\xi,\alpha,\mu)$$

首先关于 w,b,ξ_i 求极小：

$$\begin{aligned}\nabla_w L&=w-\sum_{i=1}^{N}\alpha_i y_i X_i=0\\ \nabla_b L&=\sum_{i=1}^{N}\alpha_i y_i=0\\ \nabla_{\xi_i}L&=2C\xi_i-\alpha_i-\mu_i=0\\ \therefore w&=\sum_{i=1}^{N}\alpha_i y_i X_i\quad \xi_i=\frac{\alpha_i+\mu_i}{2C}\end{aligned}$$

将上述结果代入 $L(w,b,\xi,\alpha,\mu)$，得到：

$$\begin{aligned}Q(\alpha,\mu)&=\min_{w,b,\xi_i}L(w,b,\xi,\alpha,\mu)\\ &=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\alpha_i\alpha_j y_i y_j X_i\cdot X_j+\frac{1}{4C}\sum_{i=1}^{N}(\alpha_i+\mu_i)^2-\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\alpha_i\alpha_j y_i y_j X_i\cdot X_j\\ &\quad -b\sum_{i=1}^{N}\alpha_i y_i+\sum_{i=1}^{N}\alpha_i-\frac{1}{2C}\sum_{i=1}^{N}(\alpha_i+\mu_i)^2\\ &=-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\alpha_i\alpha_j y_i y_j X_i\cdot X_j-\frac{1}{4C}\sum_{i=1}^{N}(\alpha_i+\mu_i)^2+\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\end{aligned}$$

因此对偶问题为：

$$\begin{aligned}
&\max \quad Q(\alpha,\mu) \\
s.t. \quad &\sum_{i=1}^{N}\alpha_i y_i = 0 \\
&\alpha_i \geq 0 \quad i=1,\cdots,N \\
&\mu_i \geq 0 \quad i=1,\cdots,N
\end{aligned}$$

等价于

$$\begin{aligned}
\max \quad & -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\alpha_i\alpha_j y_i y_j X_i \cdot X_j - \frac{1}{4C}\sum_{i=1}^{N}(\alpha_i+\mu_i)^2 + \sum_{i=1}^{N}\alpha_i \\
s.t. \quad &\sum_{i=1}^{N}\alpha_i y_i = 0 \\
&\alpha_i \geq 0 \quad i=1,\cdots,N \\
&\mu_i \geq 0 \quad i=1,\cdots,N
\end{aligned}$$

等价于

$$\begin{aligned}
\min \quad & \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\alpha_i\alpha_j y_i y_j X_i \cdot X_j + \frac{1}{4C}\sum_{i=1}^{N}(\alpha_i+\mu_i)^2 - \sum_{i=1}^{N}\alpha_i \\
s.t. \quad &\sum_{i=1}^{N}\alpha_i y_i = 0 \\
&\alpha_i \geq 0 \quad i=1,\cdots,N \\
&\mu_i \geq 0 \quad i=1,\cdots,N
\end{aligned}$$

2 (2)

找到映射 ϕ 使得 $K(x,z)=\phi(x)\cdot\phi(z)$ 即可，下面用归纳法来找到映射 ϕ：
对 p 进行归纳，对 $p=1$ 情况，$K(x,z)=x\cdot z$，令 $\phi_1(x)=x$ 即可，假设对 $p=k$ 有 $\phi_k(x)$ 使得

$K(x,z)=\phi_k(x)\cdot\phi_k(z)$ 是正定核函数，设 $\phi_k(x)=(g_1(x),\cdots,g_l(x))$ 下面考虑 $p=k+1$ 的情况：

$$
\begin{aligned}
K(x,z) &= (x\cdot z)^{p+1} \\
&= (x\cdot z)^p(x\cdot z) \\
&= \phi_k(x)\cdot\phi_k(z)x\cdot z \\
&= \sum_{j=1}^{l} g_j(x)g_j(z)\sum_{i=1}^{m} x_i z_i \\
&= \sum_{j=1}^{l} \left[g_j(x)g_j(z)\sum_{i=1}^{m} x_i z_i\right] \\
\phi_{k+1}(x) &\triangleq (g_1(x)x_1,\cdots,g_1(x)x_m,g_2(x)x_1,\cdots,g_2(x)x_m,\cdots,g_l(x)x_m,\cdots,g_l(x)x_m)^T \\
K(x,z) &= \phi_{k+1}(x)\cdot\phi_{k+1}(x)
\end{aligned}
$$

所以对 $p=k+1$ 情况，也有映射 $\phi_{k+1}(x)$ 满足 $K(x,z)=\phi_{k+1}(x)\cdot\phi_{k+1}(z)$，因此内积的正整数幂函数是正定核函数

3 (3)

支持向量有 (2),(3),(6) 三个，分别对应了三种不同情形:

(2) 对应 $\alpha_i^*=C, 0<\xi_i<1$ 的情形，分类正确但在间隔边界和分类边界之间;

(3) 对应 $\alpha_i^*=C, \xi_i>1$ 的情形，位于误分类一侧;

(6) 对应 $\alpha_i^*\le C, \xi_i=0$ 的情形，位于间隔边界上;