VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
FAKULTA STAVEBNÍ

JOSEF WEIGEL

TEORIE CHYB A VYROVNÁVACÍ POČET I

GE04_M02

Základní druhy vyrovnání (1. část)

STUDIJNÍ OPORY
PRO STUDIJNÍ PROGRAMY S KOMBINOVANOU FORMOU STUDIA

Tento text neprošel jazykovou ani redakční úpravou. Za jazykovou stránku odpovídá autor

OBSAH

1 Úvod

1.1 Cíle

Cílem tohoto modulu je seznámit studenty oboru geodézie a kartografie se základními druhy vyrovnávacích úloh používaných v tomto oboru. Studenti poznají význam nadbytečných měření pro kontrolu a zvyšování přesnosti a spolehlivosti výsledků měření a výpočtů. Dále se seznámí s hlavními vlastnostmi metody nejmenších čterců (MNČ), která bude použita ve všech vyrovnávacích úlohách tohoto modulu. V začátcích by studenti měli v kapitole „Vyrovnání přímých měření“ pochopit rozdíly mezi jednoduchým a obecným aritmetickým průměrem a to nejen z hlediska způsobu jejich výpočtu, ale zejména z hlediska výpočtu jejich charakteristik přesnosti. Výsledky přímých měření tvoří obvykle vstupní veličiny do dalších dvou druhů vyrovnání, „Vyrovnání zprostředkujících měření“ a „Vyrovnání podmínkových měření“. První druh je podrobně popsán v kapitole 4, neboť patří ke klíčovým postupům, používaným při řešení velkého množství geodetických úloh. Zvládnutí uvedených teoretických principů a praktických postupů by mělo usnadnit studium v dalších navazujících předmětech, které tyto teoretické základy využívají.

1.2 Požadované znalosti

U studentů se předpokládají dobré znalosti z předmětu Matematika I a současně studovaného předmětu Matematika II. V matematice se jedná o problematiku lineární algebry (práce s vektory a maticemi, řešení linearních systémů rovnic), dále musí znát derivace funkcí jedné a více proměnných (parciální derivace) a jejich využití při rozvoji funkcí v řady (zejména Taylorova řada). Znalosti z předmětů Geodézie I a Geodézie II jsou nutné především k pochopení praktických příkladů. Nezbytná je rovněž znalost terminologie definované v modulu 01 – Měřické chyby.

1.3 Doba potřebná ke studiu

Obsah modulu je sestaven tak, že je využíván jak v předmětu „Teorie chyb a vyrovnávací počet I“ (kap. 2 až 4) a částečně i v navazujícím předmětu „Teorie chyb a vyrovnávací počet II“ .

Celkový rozsah doby studia tohoto modulu lze odhadnout na 50 hod, z toho 30 hodin na zvládnutí příkladů. 2. kapitola – 5 hodiny, 3. kapitola.–15 hodin, 4. kapitola – 30 hodin. Časy jsou pouze orientační, neboť záleží na tom, jaké výpočetní prostředky student použije a jak je umí ovládat. Časy jsou odhadnuty pro základní znalosti tabulkového procesoru Excel.

1.4 Klíčová slova

Zde jsou uvedena jen hlavní klíčová slova. Podrobnější členění je uvedeno na začátku každé kapitoly.

Vyrovnávací počet, redundantní měření, MNČ - metoda nejmenších čtverců, váhy měření, jednotková střední chyba, apriorní střední chyba, aposteriorní střední chyba, druhy vyrovnání, vyrovnání přímých měření, jednoduchý aritmetický průměr, obecný aritmetický průměr, měřické dvojice, vyrovnání zprostředkujících měření.

Metodický návod na práci s textem

Text a příklady v něm uvedené jsou seřazeny tak, aby se postupovalo od jednodušších příkladů k příkladům složitějším. Vzorové příklady jsou ve většině případů doplněny postupem výpočtu. Výpočty jsou sestaveny do přehledných tabulek tak, aby mohly být počítány na kalkulačkách. Doporučuji studentům, aby si každý příklad nejprve vypočítali ručně (na kalkulačce se zápisem mezivýsledků na papír) a teprve potom jej realizovali například v tabulkovém procesoru Excel. Cílem totiž není jen vypočítat správný výsledek, ale pochopit detailně jeho jednotlivé fáze. Zvláště doporučuji, aby si student všímal velikosti každého čísla, počtu jeho cifer a jak se které číslo uplatní ve výsledku. V některých příkladech je možno sledovat vliv zaokrouhlování na celkový výsledek. Počet platných cifer má velký význam při výpočtech charakteristik přesnosti – středních chyb a vah. Musíme si uvědomit, že se jedná o čísla přibližná, neboť střední chyby středních chyb (charakteristiky druhého řádu) bývají u těchto empirických odhadů dosti pesimistické.

Pokud student ovládá nějaký programovací jazyk, nebo pracuje s programovacími systémy typu MATCAD, MATLAB a pod., je vhodné věnovat tvorbě programů v těchto systémech více času, neboť si tak student ušetří čas při výpočtech jednotlivých aplikací vyrovnávacího počtu v navazujících odborných předmětech. Samozřejmě orientační čas uvedený ve stati 1.3 pro studium tohoto modulu pak bývá překročen i vícenásobně.

2 Metoda nejmenších čtverců oprav

Cílem této kapitoly je objastnit dva hlavní pojmy. První je pojem „nadbytečná (redundantní) měření“, druhý pojem je „vyrovnání“, tj. zpracování dat, které obsahují nadbytečná měření. V kapitole je dále uveden ve zjednodušené podobě hlavní princip metody nejmenších čtverců. Význam metody student obvykle hlouběji pochopí až po prostudování ostatních kapitol tohoto modulu.

Studium této úvodní kapitoly zabere asi 3 až 5 hodin.

Počet nutných měření, počet nadbytečných měření, vyrovnání, skutečné chyby, opravy, váhy měření, MNČ - metoda nejmenších čtverců, princip MNČ, vlastnosti MNČ, druhy vyrovnání

V předcházejícím modulu Měřické chyby byl stručně vysvětlen pojem nadbytečná (redundantní) měření. Existují dva hlavní důvody používání nadbytečných měření:

- kontrola měření
- zvýšení přesnosti výsledků měření

Z kontrolních důvodů se měří nejen jednotlivé veličiny vícekrát (opakovaně), ale měří se též další veličiny (např. se změří v trojúhelníku nadbytečně i třetí úhel, neboť součet všech tří úhlů má být 180^{o}, a pod.).

Opakovaně změřené veličiny mají obvykle vyšší přesnost a veličiny z nich určované, mají po společném zpracování (vyrovnání) obvykle také vyšší přesnost, než veličiny určené jen jednou. Při vyrovnání můžeme rovněž vypočítat odhady těchto přesností.

> *Vyrovnáním* budeme nazývat proces společného zpracování většího počtu veličin než je nutných pro jednoznačné určení výsledků.

Kontrolní otázky 2.1:

Při měření polygonového pořadu se obvykle měří z kontrolních důvodů délky mezi dvěma sousedními polygonovými body vždy dvakrát (TAM a ZPĚT). Výsledky dvojího měření stejné délky se vlivem měřických chyb v malých mezích navzájem liší.

a) Kterému měření mám dát při výpočtu polygonového pořadu přednost, měření TAM nebo měření ZPĚT ?

b) Pokud chci použít obě měření, jakou hodnotu mám ve výpočtu použít? Bude to aritmetický průměr z obou hodnot ?

c) Jakým způsobem vzít při výpočtu polygonového pořadu v úvahu, že jednotlivé polygonové strany mají různou délku a tedy mohou mít i různou přesnost ?

d) Jaká bude přesnost nově vypočtených souřadnic polygonových bodů ?

e) Který ze způsobů rozdělení úhlové a polohové odchylky při klasickém výpočtu polygonového pořadu dává nejlepší řešení?

f) Která z měření jsou vlastně nadbytečná a jaký výpočet je nejlepší ?

Odpovědi 2.1:

a) b) Použiji průměrnou hodnotu. c) Vaši odpověď si zapište a pokuste se znovu odpovědět na tuto otázku po prostudování třetí kapitoly a znovu po prostudování i čtvrté kapitoly. d) Vaši odpověď si rovněž zapište a pokuste se znovu odpovědět na tuto otázku po prostudování čtvrté kapitoly.

e) f) Nelze jednoznačně rozhodnout dokud nedefinujeme co je to nejlepší řešení. Nejčastěji budeme za nejlepší řešení považovat výsledek vyrovnání získaný metodou nejmenších čtverců.

Obdobných otázek bychom mohli vymyslet ještě několik. Kdyby všechna měření byla absolutně přesná (bezchybná), což je z hlediska teorie chyb nemožné, žádný problém by neexistoval. Stačilo by „změřit = zjistit“ každou pro výpočet nezbytnou veličinu jen jednou. Veličinám nezbytným pro výpočet říkáme *veličiny nutné.*

Nelze jednoznačně definovat, která konkrétní měření jsou nadbytečná (redundantní). Změříme-li v trojúhelníku všechny tři úhly (α, β, γ), je jeden z nich nadbytečný, i když nemůžeme konkrétně určit který z nich. Každý (nadbytečný) třetí úhel lze totiž vypočítat z ostatních dvou (nutných) úhlů.

V dalším textu budeme nejčastěji označovat:

n ... počet všech měření

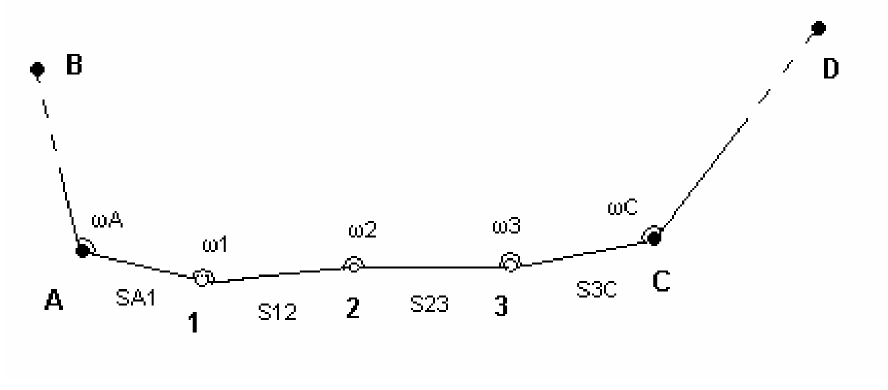
k ... počet nutných měření

$r = n - k$ ... *počet nadbytečných měření* (2.1)

Kontrolní otázky 2.2:

a) Kolik je nutných a kolik nadbytečných měření v oboustranně připojeném i oboustranně orientovaném polygonovém pořadu, když všechny veličiny (úhly ω a délky s) byly změřeny právě jednou ? Zadané (známé) jsou souřadnice Y, X bodů A, B, C a D. Mají se vypočítat souřadnice bodů 1, 2 a 3 . Schema sítě je nakresleno na obrázku č. 1.

b) Kolik by bylo nadbytečných měření, kdybychom změřili každou veličinu 2x ?



Obrázek 2.1 Schéma polygonového pořadu

Odpovědi 2.2 :

Celkem bylo změřeno n *= 9 veličin (5 úhlů* ω *a 4 délky* s*). Nutných veličin je* k *= 6 (tři nově určované body, každý má dvě neznámé souřadnice). Nadbytečných veličin je tedy* r *= 3.*

b) n *= 2.9 = 18,* k *= 6,* r *= 18 – 6 = 12*

Stanovení počtu nutných a nadbytečných měření nemusí být vždy jednoduchou úlohou. Při tvorbě projektu (plánu) měření musíme do něj nezbytně zařadit ty veličiny, které jsou nutné ke korektnímu řešení zadaného problému (výpočetní úlohy). Tyto nutné veličiny musí být změřeny minimálně jednou. Samozřejmě může existovat více kombinací nutných veličin, jejich počet je však v zadané úloze stejný. V příkladu v kontrolních otázkách 2.2 lze např. vypočítat souřadnice bodu *1, 2,* a *3* volným polygonovým pořadem orientovaným na bodě *A*. Nutnými veličinami jsou v tomto případě tři úhly ω_A, ω_1 a ω_2 a tři délky s_{A1}, s_{12} a s_{23}., tj. k = 6. Jinou variantou je např. výpočet bodů *1* a *2* volným orientovaným pořadem z bodu *A* a výpočet bodu *3* volným orientovaným pořadem z bodu *C* (nutné veličiny ω_A, ω_1, s_{A1}, s_{12}, ω_C, s_{3C}), tj. opět k = 6. Ostatní měřené veličiny lze považovat za nadbytečné. Z předcházejícího textu je zřejmé, že rozhodnout jednoznačně, zda konkrétní naměřená veličina je nutná nebo nadbytečná nemusí být jednoduché. Naštěstí třídit jednotlivé veličiny na nutné a nadbytečné není ve vyrovnávacím počtu ani potřeba. Musíme ale vždy přesně vědět, kolik je veličin nutných a kolik nadbytečných.

2.1 Princip a vlastnosti metody

Teoreticky mohou při řešení nějakého výpočetního problému nastat tři případy:

a) Počet vstupních veličin (měření) je roven právě počtu nezbytně nutných měření, tj. $k = n$. V tomto případě existuje právě jedno řešení.

b) Je-li počet n měřených veličin větší než počet k veličin nutných, $n > k$, jde o matematické řešení tzv. *přeurčeného problému*, neboť existuje více řešení

c) Je-li $k < n$ úloha nemá korektní řešení.

Nejednoznačnost řešení v případě přeurčených úloh ($n > k$) řeší právě vyrovnávací počet. Ten hledá takové řešení zadané úlohy, které by bylo v nějakém smyslu nejlepší. Existuje několik metod k řešení přeurčených úloh. Dominantní metodou řešení tohoto problému se v geodézii, ale i ve většině technických disciplín, stala *metoda nejmenších čtverců (MNČ)* Historie vzniku této metody je datována na přelom 18. a 19. století a je spjata se třemi slavnými muži: francouzem A.M.Legendrem, američanem R.Adrainem a němcem C. F. Gaussem. Podrobněji viz. [2].

2.1.1 Princip metody

Předpokládejme n nezávislých opakovaných měření téže veličiny. Označme je $l_1, l_2, ..., l_n$. Nejpravděpodobnější hodnotu měřené veličiny označme *M*.

Jednotlivé odchylky naměřených hodnot od hodnoty M nazveme *opravami* (rezidui). Pro jednotlivé opravy v_i platí:

$$v_i = M - l_i. \tag{2.2}$$

Pokud nejsou jednotlivé výsledky měření zatíženy systematickými chybami, ale jen chybami náhodnými, mají normální rozdělení pravděpodobnosti. Protože hodnota M je konstanta, mají stejný typ rozdělení i opravy. Funkce hustoty pravděpodobností pro opravy bude

$$f(v) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-v^2/2\sigma^2}. \tag{2.3}$$

Pravděpodobnost výskytu opravy v_i na nekonečně malém intervalu Δv se vypočítá

$$P_i = f(v_i)\Delta v = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-v_i^2/2\sigma^2}\right)\Delta v. \tag{2.4}$$

Pro pravděpodobnost výskytu všech n oprav současně bude platit věta o násobení pravděpodobností

$$P = P_1 P_2 \ldots P_n = f(v_1)\, f(v_2) \ldots f(v_n)(\Delta v)^n =$$
$$= \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n (\Delta v)^n e^{-(v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2)/2\sigma^2}.$$

Vyberme ze všech možností takovou hodnotu M, aby její pravděpodobnost P byla maximální. Tato skutečnost nastane, když mocnitel u exponenciální funkce bude minimální, to znamená, když bude platit

$$\boxed{\Omega = v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2 = \sum v^2 = \min. \qquad (2.5)}$$

Po dosazení (2.2) do rovnice (2.5) položíme pro nalezení minima funkce Ω její první derivaci podle M rovnu nule.

$$\Omega = \sum v^2 = v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2 = (M - l_1)^2 + (M - l_2)^2 + \ldots + (M - l_n)^2.$$
$$\frac{d\Omega}{dM} = 2(M - l_1) + 2(M - l_2) + \ldots + 2(M - l_n) = 0.$$

Po úpravách dostaneme vzorec pro výpočet M.

$$\begin{aligned} &(M - l_1) + (M - l_2) + \ldots + (M - l_n) = 0, \\ &nM - \sum l = 0, \\ &M = \frac{\sum l}{n}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Poslední vztah je vzorec pro výpočet *jednoduchého aritmetického průměru*. Pro zjištění, zda se jedná o minimum nebo maximum funkce, použijeme její druhou derivaci.

$$\frac{d^2\Omega}{dM^2} = 2n > 0.$$

Druhá derivace je pro $n > 0$ kladné číslo, nalezený extrém je proto minimem funkce.

Uvedené vztahy byly odvozeny za předpokladu stejně přesných a nezavislých opakovaných měření. V takových případech přisuzujeme obvykle všem měřením stejnou váhu rovnu jedné, $p_i = 1$.

V případě rozdílných přesností můžeme jednotlivým měřením přisoudit různé váhy p_i. Základní princip metody nejmenších čtverců pro různě přesná měření můžeme vyjádřit vztahem

$$\Omega = \sum pv^2 = p_1 v_1{}^2 + p_2 v_2{}^2 + \ldots + p_n v_n{}^2 = \min . \qquad (2.7)$$

Odvození tohoto vztahu je analogické odvození vztahu *(2.5)* a nebude proto uvedeno. Student se o to může pokusit sám, nebo nahlédnout do [2] či [3].

Uspořádáme-li opravy do vektoru oprav a označíme ho symbolem $\boldsymbol{v}$ a váhy měření do diagonální matice vah a označíme ji symbolem $\boldsymbol{P}$, můžeme oba základní vztahy metody nejmenších čtverců psát:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}^T \boldsymbol{v} &= \sum v^2 = \min, \\ \boldsymbol{v}^T \boldsymbol{P} \boldsymbol{v} &= \sum pv^2 = \min \end{aligned} \quad , \qquad (2.8)$$

kde

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \text{ je } \textit{vektor oprav} \text{ a } \quad \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_n \end{pmatrix} \text{ je } \textit{matice vah.}$$

Vztahy *(2.8)* je možno ještě více zobecnit s využitím kovarianční matice $\boldsymbol{\Sigma}$ měřených veličin

$$\boldsymbol{v}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{v} = \min . \qquad (2.9)$$

2.1.2 Vlastnosti metody

Metoda nejmenších čtverců má následující *základní vlastnosti*:

- jsou-li naměřené veličiny zatíženy jen náhodnými chybami a je-li jich dostatečně velký počet, poskytuje *nestranné odhady* pravých hodnot,
- přesnější měření se ve výsledcích uplatní větší vahou než méně přesná měření,
- metoda poskytuje jednoznačné výsledné hodnoty i když je úloha matematicky přeurčena,
- konečné rovnice pro neznámé jsou lineární,
- metoda poskytuje kromě vyrovnaných hodnot i jejich charakteristiky přesnosti.

2.2 Základní druhy vyrovnání

Ve vyrovnávacím počtu podle MNČ budeme rozeznávat tři základní druhy vyrovnávacích úloh:

- vyrovnání přímých měření
- vyrovnání zprostředkujících měření
- vyrovnání podmínkových měření

Všechny tři druhy jsou založeny na výše uvedeném principu MNČ. Uvedené členění je klasické a vystihuje nejčastější případy zeměměřické praxe. Protože v principu vychází z jedné metody (MNČ), jedná se vlastně o řešení jedné obecné úlohy vyjádřitelné souborem funkcí ve tvaru

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{L}, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{k}) = \boldsymbol{0}, \qquad (2.10)$$

kde $\boldsymbol{L}$ jsou *měřené parametry*, $\boldsymbol{X}$ *určované parametry* (tzv. *neznámé*) a $\boldsymbol{k}$ jsou vhodné konstanty.

Vyrovnání přímých měření je případ, kdy určovaný parametr nebo parametry je možno přímo měřit. Pro jednotlivá měření a jeden určovaný parametr bude mít funkce *(2.10)* tvar

$$L_i = X. \qquad (2.11)$$

Při *vyrovnání zprostředkujících měření* měříme jednu skupinu parametrů (např. úhly a délky) a jinou skupinu parametrů určujeme - počítáme (např. souřadnice bodů). Funkce *(2.10)* budou mít v tomto případě tvar

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{k}). \qquad (2.12)$$

Vyrovnání podmínkových měření je případ, kdy skupina měřených parametrů musí splňovat předem dané matematické podmínky (například součet úhlů v trojúhelníku musí být roven 2π, resp. 180° nebo 200gon). Funkce *(2.10)* budou mít v tomto případě tvar

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{L}, \boldsymbol{k}) = \boldsymbol{0}. \qquad (2.13)$$

Uvedené tři druhy vyrovnání patří k základním, přičemž první metoda (vyrovnání přímých měření) je triviálním případem metody druhé (vyrovnání zprostředkujících měření). Složitější případy vyrovnání budou řešeny v předmětu Teorie chyb a vyrovnávací počet II.

Většinu úloh vyrovnávacího počtu je možno řešit jak metodou vyrovnání zprostředkujících měření tak metodou vyrovnání podmínkových měření. Obě metody vedou k identickým výsledkům. Praxe však dává většinou přednost té metodě, která je pro daný typ úloh jednodušší nebo je méně náročnější na výpočty.

Kontrolní otázka 2.3:

a) V modulu 01 Měřické chyby byla měření rozdělena na přímá a nepřímá. Do kterého druhu vyrovnání lze zařadit nepřímá měření ?

Odpověď 2.3: je uvedena v klíči na konci modulu.

3 Vyrovnání přímých měření

Cílem této kapitoly je naučit studenty vyrovnávat opakovaně změřené veličiny, tj. nalézt nejpravděpodobnější hodnotu výsledku (vyrovnanou hodnotu ve smyslu MNČ) a z rozptylu jednotlivých měření od této vyrovnané hodnoty odhadovat přesnosti jak měřených tak vyrovnaných hodnot.

Doba potřebná ke zvládnutí této kapitoly je asi 15 hodin, z toho přibližně polovinu času zaberou výpočty. Doporučuji si zejména rozepsat vzorce v maticovém tvaru, což pomůže při pochopení složitějších maticových zápisů v dalších kapitolách.

Přímá měření, nepřímá měření, váhy měření, jednotková váha, vyrovnání přímých měření stejné přesnosti, jednoduchý aritmetický průměr, vyrovnání přímých měření různé přesnosti, obecný aritmetický průměr, opravy, střední chyba jednoho měření, střední chyba aritmetického průměru, přibližná hodnota, doplněk, jednotková střední chyba, měřické dvojice, mezní střední chyba, mezní odchylka, vyrovnání měřických dvojic stejné přesnosti, vyrovnání měřických dvojic různé přesnosti.

Vyrovnání přímých měření použijeme tehdy, je-li n-krát opakováno měření jedné a téže veličiny. Je-li při opakovaném měření použita stejná metoda měření, tzn. že přesnost jednotlivých měření lze charakterizovat stejnou základní střední chybou $\overline{m}$ použité metody, pak budeme pro odhad výsledků používat postup tzv. *vyrovnání přímých měření stejné přesnosti.* Tento postup vede na *jednoduchý (prostý) aritmetický průměr*.

Mají-li jednotlivá opakovaná měření různou přesnost, tzn. že byla např. získána různými metodami měření nebo za odlišných podmínek, použijeme obecný (*vážený) aritmetický průměr*, neboli *vyrovnání přímých měření různé přesnosti.* Třetím typem vyrovnání přímých měření jsou tzv. *měřické dvojice.*

Volbou metody měření a podmínkami při měření jsme z měřené veličiny učinili veličinu náhodnou, neboť na měřický proces v každé metodě měření působí náhodné a případně i systematické chyby. Výsledek jednoho měření je proto jedna z realizací této náhodné veličiny. Tato náhodná veličina má svůj konkrétní typ rozdělení pravděpodobnosti (v tomto případě nejčastěji normální rozdělení) i s konkrétními parametry (střední hodnota a disperze). Typ rozdělení pravděpodobnosti a parametry existují vlastně ještě před provedením náhodného pokusu tj. před měřením. Při opakovaných měřeních stejné přesnosti předpokládáme, že jsou typ a parametry náhodné veličiny stejné. Při opakovaných měřeních různé přesnosti předpokládáme obvykle stejný typ rozdělení i stejnou střední hodnotu, ale různou disperzi příslušných náhodných veličin. Naším úkolem je nyní postupně:

a) zjistit, zda některý z jednotlivých výsledků měření není zatížen omylem nebo hrubou chybou,

b) odhadnout ve smyslu MNČ nejpravděpodobnější hodnotu určované veličiny – průměrnou hodnotu,

c) odhadnout přesnost jednotlivých měření,

d) odhadnout přesnost průměrné hodnoty.

Úkol uvedený pod bodem a) bude podrobně studován až v rámci předmětu Teorie chyb a vyrovnávací počet II, kde se budeme zabývat testováním odlehlých hodnot. V dalším budeme proto předpokládat, že všechna měření jsou zatížena jen náhodnými chybami a jsou vzájemně nezávislá. Budeme rovněž předpokládát, že náhodné veličiny mají normální rozdělení pravděpodonbností.

3.1 Vyrovnání přímých měření stejné přesnosti

Opakujeme-li *n*-krát měření téže veličiny stejnou metodou a za přibližně stejných podmínek dostaneme *n* výsledků měření, které označíme $l_1, l_2, ..., l_n$.

Předpokládejme, že se jedná o náhodnou veličinu s normálním rozdělením pravděpodobnosti $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Parametry této náhodné veličiny obvykle neznáme. Kdybychom znali např. střední hodnotu μ, nemuseli bychom vůbec měřit. Rovněž směrodatnou odchylku σ obvykle neznáme a nahrazujeme ji základní střední chybou $\overline{m}$. Avšak ani tato hodnota nemusí být před měřením přesně známa.

3.1.1 Jednoduchý aritmetický průměr

Odhad střední hodnoty μ z n opakovaných měření provedeme pomocí funkce jednoduchého aritmetického průměru, důkaz viz *(2.5)*

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \quad . \tag{3.1}$$

Uvedený aritmetický průměr je rovněž náhodnou veličinou.

Při opakovaném měření získáme n výsledků (realizace) $l_1, l_2, ..., l_n$, u kterých předpokládáme, že všechny mají stejnou přesnost. Je zřejmé, že jiná skupina výsledků opakovaných měření téže veličiny (o stejném rozsahu n) by poskytla poněkud odlišné výsledky a další skupina zase poněkud odlišné výsledky.

a) Výběrový jednoduchý (prostý) aritmetický průměr

Dosadíme-li do vzorce *(3.1)* naměřené hodnoty, obdržíme pouze odhad parametru polohy veličiny $\overline{X}$ jako reálné číslo, které označíme $\overline{x}$ a nazveme je *výběrový aritmetický průměr*. Praxe obvykle slovo „výběrový“ vynechává.

$$\boxed{\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (l_1 + l_2 + ... + l_n) = \frac{\sum l}{n} \quad . \qquad (3.2)}$$

Pokud bychom uspořádali výsledky jednotlivých měření do vektoru $\boldsymbol{l}^T = (l_1, l_2, ..., l_n)$ a zavedli součtový vektor $\boldsymbol{s}^T = (1,1,...,1)$ o n prvcích, je možno vzorec *(3.2)* zapsat v maticovém tvaru:

$$\bar{x} = \frac{\boldsymbol{s}^T \boldsymbol{l}}{\boldsymbol{s}^T \boldsymbol{s}} \ . \qquad (3.3)$$

b) Výpočet oprav

Nyní již můžeme vypočítat odchylky (opravy) jednotlivých měření od aritmetického průměru:

$$\boxed{v_i = \bar{x} - l_i \ . \qquad (3.4)}$$

c) Kontrola součtem oprav

Součet oprav pro všech n měření se rovná nule, což je pro praxi velmi důležitý kontrolní vztah správného výpočtu aritmetického průměru. :

$$\sum_{i=1}^{n} v_i = \sum v = n\bar{x} - \sum_{i=1}^{n} l_i = n\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} l_i - \sum_{i=1}^{n} l_i = 0 \ .$$

V dalším textu budou indexy u jednotlivých sum pro přehlednost vzorců i textu vynechávány. Odvozený kontrolní vztah lze pak psát

$$\boxed{\sum v = v_1 + v_2 + \ldots + v_n = 0 \qquad (3.5)}$$

a při označení vektoru oprav $\boldsymbol{v}^T = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ bude kontrolní vztah *(3.5)* mít tvar

$$\boldsymbol{s}^T \boldsymbol{v} = 0 \ . \qquad (3.6)$$

Pokud bychom se při výpočtu dopustili nějaké chyby a aritmetický průměr by byl vypočítán chybně o hodnotu Δ, obdrželi bychom místo správné hodnoty $\bar{x}$ chybnou hodnotu $x' = \bar{x} + \Delta$ a chybné by byly i všechny opravy z tohoto průměru vypočítané

$$v_i' = x' - l_i = \bar{x} + \Delta - l_i = v_i + \Delta \ .$$

Součet chybných oprav podle vztahu *(3.5)* pak nebude roven nule, ale

$$\sum v' = \sum v + n\Delta = n\Delta \ . \qquad (3.7)$$

Aritmetické průměry při výpočtu obvykle vhodně zaokrouhlujeme, dopustíme se tak v aritmetickém průměru chyby Δ (zaokrouhlovací chyby) a kontrolní součet oprav se proto bude lišit od nuly o hodnotu $n\Delta$.

d) Použití přibližné hodnoty

V mnoha případech je výhodné počítat s čísly o malém počtu cifer. Při výpočtu aritmetického průměru toho dosáhneme tím, že měřené hodnoty l_i vyjádříme jako součet vhodně zvolené přibližné hodnoty hledaného aritmetického průměru x_o a doplňků δ_i , *t.j.*

$$l_i = x^o + \delta_i \ . \qquad (3.8)$$

Sečteme-li naměřené hodnoty ve vzorci *(3.8)* dostaneme

$$\sum l = nx^{\mathrm{o}} + \sum \delta .$$

Aritmetický průměr pak bude roven součtu zvolené přibližné hodnoty x^{o} a aritmetického průměru z příslušných doplňků.

$$x = \frac{1}{n}\sum l = x^{\mathrm{o}} + \frac{1}{n}\sum \delta . \qquad (3.9)$$

Kontrolní otázky 3.1

a) Může být přibližná hodnota volena libovolně ?

b) Když se podaří zvolit přibližnou hodnotu rovnu přímo hledanému aritmetickému průměru, jakou podmínku budou splňovat příslušné doplňky?

c) Budou v případě uvedeném pod bodem b) všechny opravy nulové ?

d) Může nastat situace, že by byly všechny opravy nulové ?

Odpovědi 3.1:

a) V případě aritmetického průměru může být přibližná hodnota volena libovolně, neboť aritmetický průměr je funkce.lineární
b) Součet doplňků se bude rovnat nule a tudíž i z nich vypočtený aritmeticý průměr se bude rovnat nule a vyrovnaná hodnota se bude rovnat přibližné hodnotě.
c) Nebudou, hodnoty oprav souvisí s rozptylem jednotlivých naměřených hodnot.
d) Ano, pokud budou všechny naměřené hodnoty stejné.

3.1.2 Charakteristiky přesnosti

a) střední chyba jednoho měření

Předpokládejme nyní, že známe skutečnou (pravou) hodnotu měřené veličiny, kterou jsme již dříve označili μ . Odchylky naměřených hodnot $l_1, l_2, ..., l_n$ od této skutečné hodnoty budou *skutečné chyby* $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n$ jednotlivých naměřených hodnot.

$$\varepsilon_i = \mu - l_i . \qquad (3.10)$$

Skutečné chyby ε_i se liší od oprav v_i o skutečnou chybu ε_x aritmetického průměru $\bar{x}$

$$\varepsilon_x = \mu - \bar{x} . \qquad (3.11)$$

$$v_i = \bar{x} - l_i = \bar{x} - \mu + \varepsilon_i = \varepsilon_i - \varepsilon_x ,$$

$$\varepsilon_i = v_i + \varepsilon_x . \qquad (3.12)$$

Umocníme-li rovnice *(3.12)* na druhou a sečteme je přes všechna *i* obdržíme

$$\sum \varepsilon^2 = \sum v^2 + 2\varepsilon_x \sum v + n\varepsilon_x^2 .$$

Uvážíme-li dále, že $\varepsilon_x = \frac{\sum \varepsilon}{n}$ *a* $\sum v = 0$ bude

$$\sum \varepsilon^2 = \sum v^2 + \frac{(\sum \varepsilon)^2}{n} = \sum v^2 + \frac{\sum \varepsilon^2}{n} + \frac{2(\varepsilon_1 \varepsilon_2 + .. + \varepsilon_{n-1}\varepsilon_n)}{n} \,. \quad (3.13)$$

Působí-li v měření jen náhodné chyby, tak poslední člen ve vztahu *(3.13)* se pro rostoucí n blíží k nule, takže můžeme psát

$$n\sum \varepsilon^2 = n\sum v^2 + \sum \varepsilon^2,$$

$$(n-1)\sum \varepsilon^2 = n\sum v^2,$$

$$\frac{\sum v^2}{n-1} = \frac{\sum \varepsilon^2}{n}.$$

<u>Výběrová střední chyba jednoho měření</u> vypočtená ze skutečných chyb ε_i bude

$$m = \sqrt{\frac{\sum \varepsilon^2}{n}} \quad (3.14)$$

a z oprav v_i

$$s = \sqrt{\frac{\sum v^2}{n-1}} \;. \quad (3.15)$$

Uspořádáme-li skutečné chyby ε_i do vektoru $\boldsymbol{\varepsilon}^T = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n)$ a opravy v_i do vektoru oprav $\boldsymbol{v}^T = (v_1, v_2, ..., v_n)$, lze vztahy *(3.14)* a *(3.15)* zapsat v maticové podobě

$$m = \sqrt{\frac{\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon}}{n}} \;, \qquad s = \sqrt{\frac{\boldsymbol{v}^T \boldsymbol{v}}{n-1}} \;. \quad (3.16)$$

Protože předpokládáme, že jsou všechna měření stejně přesná, odhadujeme výběrovou střední chybou přesnost kteréhokoliv z nich a platí

$$s_1 = s_2 = ... = s_n = s \;. \quad (3.17)$$

Výběrová střední chyba se spolehlivě určí jen z většího počtu opakovaných měření (počet měření má být větší než 25 až 30). Pokud nemáme tak velký počet měření, používáme k vyjádření přesnosti jednotlivých měření základní střední chybu $\bar{m}$ (pokud ji známe). Pokud ji neznáme, pracujeme dále s jejími výběrovýni odhady m nebo s a upozorníme na to ve výsledcích.

b) střední chyba aritmetického průměru

Odhadněme nyní přesnost výsledného aritmetického průměru $\bar{x}$. Obecně lze předpokládat, že aritmetický průměr vypočítaný z většího počtu měření bude určen přesněji než průměr z menšího počtu měření. Protože předpokládáme, že měřené veličiny jsou vzájemně nezávislé, lze k výpočtu *střední chyby aritmetického průměru* použít zákon hromadění středních chyb.

$$\bar{m}_x^2 = (\frac{1}{n}\bar{m})^2 + (\frac{1}{n}\bar{m})^2 + .. + (\frac{1}{n}\bar{m})^2 = \frac{\bar{m}^2}{n} \quad .$$

Střední chyba aritmetického průměru se tak vypočte ze střední chyby jednoho měření:

$$\bar{m}_x = \frac{\bar{m}}{\sqrt{n}} \quad . \qquad (3.18)$$

V případě neznámé základní střední chyby $\bar{m}$ jednoho měření používáme pro odhad střední chyby aritmetického průměru její výběrové charakteristiky vypočtené z *(3.14)* nebo *(3.15)*.

$$m_x = \frac{m}{\sqrt{n}} \quad , \qquad s_x = \frac{s}{\sqrt{n}} \quad . \qquad (3.19)$$

Poznámka 3.1: Střední chyby $\bar{s}_i$ vyrovnaných měření $\bar{l}_i = l_i + v_i$ jsou totožné se střední chybou aritmetického průměru s_x, neboť $\bar{l}_i = \bar{x}$ pro všechna *i*.

Úkol 3.1:

Vykreslete graf funkce $1/\sqrt{n}$ a odpovězte na otázku: Kolik budu muset vykonat opakovaných měření, aby střední chyba aritmetického průměru klesla na polovinu, třetinu, čtvrtinu, pětinu a desetinu střední chyby jednoho měření ? Na grafu si zejména povšimněte velmi pomalého poklesu přesnosti pro větší hodnoty n .

Kontrolní otázky 3.2:

a) *Má měření, kterému přísluší z vyrovnání větší oprava i větší apriorní střední chybu ?*

b) *Změní se po přičtení příslušné opravy k příslušné měřené veličině nejen její hodnota, ale i její přesnost (střední chyba) ?*

c) *Pokud ano, bude tato přesnost vyšší nebo nižší ?*

d) *Aritmetický průměr byl vypočítán z devíti měření $n_1 = 9$. Z kolika měření n_2 musí být vypočítán jiný aritmetický průměr, aby jeho střední chyba byla poloviční než u předcházejícího aritmetického průměru ? Předpokládejme u obou případů stejnou základní střední chybu jednoho měření.*

Odpovědi 3.2: budou uvedeny po následujícím příkladu.

3.1.3 Příklad

Příklad 3.1

Teodolitem postaveným na bodě A byl dvanáctkrát (ve 12 skupinách) změřen úhel mezi směry na body B a C. Výpočet je společně se zadanými hodnotami uspořádán v následující tabulce 3.1, která je s úpravami převzata z [2].

Tabulka 3.1:

Pořadí i	Výsledky měření l_i	Doplňky $\delta_i = l_i - x^o$	Opravy $v_i = \bar{x} - l_i$	Kvadráty $v_i^2 = v_i v_i$
1	47^o 24´ 44´´	04´´	+ 0,7´´	0,49
2	47^o 24´ 40´´	00´´	+ 4,7´´	22,09
3	47^o 24´ 43´´	03´´	+ 1,7´´	2,89
4	47^o 24´ 45´´	05´´	- 0,3´´	0,09
5	47^o 24´ 46´´	06´´	- 1,3´´	1,69
6	47^o 24´ 43´´	03´´	+ 1,7´´	2,89
7	47^o 24´ 48´´	08´´	- 3,3´´	10,89
8	47^o 24´ 45´´	05´´	- 0,3´´	0,09
9	47^o 24´ 48´´	08´´	- 3,3´´	10,89
10	47^o 24´ 46´´	06´´	- 1,3´´	1,69
11	47^o 24´ 47´´	07´´	- 2,3´´	5,29
12	47^o 24´ 41´´	01´´	+ 3,7´´	13,69
Součet		**56´´**	**+ 0,4´´**	**72,68**

Výpočetní postup:

1. Volba přibližné hodnoty $x^o = 47^o\ 24´\ 40´´$ (např. nejmenší hodnota),

2. Výpočet doplňků $\delta_i = l_i - x^o$ *(viz tabulka 3.1),*

3. Aritmetický průměr (vyrovnaná hodnota)

$$\bar{x} = x^o + \frac{1}{n}\sum\delta = x^o + 56´´/12 = x^o + 4{,}667´´ = 47^o\ 24´\ 44{,}7´´ \ ,$$

4. Výpočet oprav $v_i = \bar{x} - l_i$ *(viz. tabulka 3.1),*

5. Kontrola $\sum v = 0{,}4´´ \neq 0$,

chyba ze zaokrouhlení je 0,4´´/12 = 0,033´´ ,

6. Střední chyba jednoho měření = jednotková střední chyba

$$s = \sqrt{\frac{\sum v^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{72{,}68}{11}} = 2{,}57´´ = 2{,}6´´ \ ,$$

7. Střední chyba aritmetického průměru

$$s_x = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{2{,}57´´}{\sqrt{12}} = 0{,}74´´ = 0{,}7´´ \ ,$$

8. Výsledek

$\bar{x} = 47^o\ 24´\ 44{,}7´´ \pm 0{,}7´´$ ($n´ = 11$) .

Poznámka 3.2: U výsledku je pro informaci uveden i počet nadbytečných měření $n´ = n - 1$

Odpovědi 3.2 :

a) *Ne, přesnost měření přímo nesouvisí s velikostí jednotlivých oprav. Ty by měly mít normální rozdělení četností, tzn. menší opravy by měly být četnější než větší opravy, počet kladných hodnot by měl být přibližně stejný jako počet záporných hodnot atd.*

b) *Ano změní*

c) *Přesnost bude vyšší a bude rovna střední chybě aritmetického průměru (viz. poznámka 3.1).*

d) $n_1 = 9$, $n_2 = 36$.

Úkol 3.2:

a) Změní se výsledky vyrovnání, když vypočítáte předcházející příklad s jinou volbou přibližné hodnoty x_o ? Ověřte výpočtem.

b) Jak se změní vypočítané charakteristiky přesnosti, když aritmetický průměr zaokrouhlíte před výpočtem oprav na celé vteřiny ?

3.2 Vyrovnání přímých měření různé přesnosti

Opakujeme-li n-krát měření téže veličiny různými metodami, dostaneme n výsledků měření, které označíme $l_1, l_2, ..., l_n$.

Předpokládejme, že se jedná o náhodné veličiny s normálním rozdělením pravděpodobnosti $X_i \sim N(\mu, \sigma_i^{\,2})$.

Směrodatné odchylky σ_i obvykle neznáme a nahrazujeme je základními středními chybami $\overline{m}_i$. Avšak ani tyto hodnoty nemusí být před měřením přesně známy. Praxe dává v tomto případě přednost použití vah místo středních chyb. Obecně je váha definována jako

$$p_i = \frac{\sigma_o^2}{\sigma_i^2}, \qquad \text{resp.} \qquad p_i = \frac{\overline{m}_o^{\,2}}{\overline{m}_i^{\,2}}, \qquad (3.20)$$

kde $\overline{m}_o$ je *apriorní střední chyba pro jednotkovou váhu* (*apriorní jednotková střední chyba*) , $\overline{m}_i$ základní střední chyba i – tého měření, kde $i = 1,2,...,n$, a n je počet všech měření. Apriorní zde znamená určená předem, tj. před výpočtem aritmetického průměru (před vyrovnáním). O problematice volby vah bylo detailněji pojednáno v modulu 01 Měřické chyby

3.2.1 Obecný aritmetický průměr

Odhad střední hodnoty μ z n opakovaných měření provedeme pomocí funkce obecného aritmetického průměru

$$\overline{X} = \frac{\sum p_i X_i}{\sum p_i}. \qquad \text{pro} \quad i = 1,2,...,n \qquad (3.21)$$

Uvedený obecný aritmetický průměr bude rovněž náhodnou veličinou. Vzorec lze odvodit z podmínky MNČ *(2.8).*

a) Výběrový obecný (vážený) aritmetický průměr

Při opakovaném měření získáme n výsledků (realizace) $l_1, l_2, ..., l_n$, u kterých předpokládáme, že mají různou přesnost (různé střední chyby). Tyto přesnosti budou ve výpočtech representovány vahami $p_1, p_2, ..., p_n$.

Dosadíme-li do vzorce *(3.21)* naměřené hodnoty, obdržíme odhad parametru polohy veličiny $\overline{X}$ jako reálné číslo, které označíme $\overline{x}$ a nazveme *výběrový obecný (vážený) aritmetický průměr*. Praxe obvykle slovo „výběrový“ vynechává.

$$\overline{x} = \frac{p_1 l_1 + p_2 l_2 + ... + p_n l_n}{p_1 + p_2 + ... + p_n} = \frac{\sum pl}{\sum p} \; . \tag{3.22}$$

Pokud bychom uspořádali výsledky jednotlivých měření do vektoru $\boldsymbol{l}^T = (l_1, l_2, ..., l_n)$ a použili součtový vektor $\boldsymbol{s}^T$ a matici vah $\boldsymbol{P}$, je možno vzorec *(3.22)* napsat v maticovém tvaru:

$$\overline{x} = \frac{\boldsymbol{s}^T \boldsymbol{Pl}}{\boldsymbol{s}^T \boldsymbol{Ps}} \; . \tag{3.23}$$

b) Výpočet oprav

Nyní již můžeme vypočítat odchylky (opravy) jednotlivých měření od aritmetického průměru

$$v_i = \overline{x} - l_i \; . \tag{3.24}$$

Vzorec *(3.24)* je stejný jako vzorec *(3.4)* pro vypočet oprav v jednoduchém aritmetickém průměru.

c) Kontrola výpočtu

Součet oprav násobený jejich vahami se rovná nule, což je pro praxi velmi důležitý kontrolní vztah správného výpočtu obecného aritmetického průměru. Jednotlivé členy ve vzorci *(3.24)* vynásobíme zleva vahou p_i a realizujeme jejich součet pro všech *n* měření, dále uvážíme vztah *(3.22)* a dostaneme

$$\sum pv = \overline{x} \sum p - \sum pl = 0 \; .$$

Odvozený kontrolní vztah lze pak psát

$$\sum pv = p_1 v_1 + p_2 v_2 + ... + p_n v_n = 0 \tag{3.25}$$

V maticové podobě lze kontrolní vztah *(3.25)* zapsat

$$\boldsymbol{s}^T \boldsymbol{Pv} = 0 \, . \tag{3.26}$$

d) Použití přibližné hodnoty

Při výpočtu obecného aritmetického průměru můžeme rovněž použít vhodně volené přibližné hodnoty hledaného aritmetického průměru x^o (stať 3.1.1- d)

$$l_i = x^o + \delta_i \; .$$

Aritmetický průměr pak bude roven součtu zvolené přibližné hodnoty x^{o} a obecného aritmetickému průměru z příslušných doplňků.

$$\sum pl = x^{o}\sum p + \sum p\delta \,,$$

$$\bar{x} = \frac{\sum pl}{\sum p} = x^{o} + \frac{\sum p\delta}{\sum p}. \qquad (3.27)$$

Kontrolní otázky 3.3:

a) *Jakou váhu přiřadíme měřenému směru, který byl vypočten ze 6 skupin a jakou směru, který byl vypočten ze tří skupin ? Přesnost měřeného směru v jedné skupině byla pro obě měření stejná.*

b) *Můžeme při výpočtu podle vzorce (3.27) zvolit jiné jednotky pro přibližnou hodnotu* x_{o} (např. metry) a jiné pro doplňky δ (např. centimetry) ?

Odpovědi 3.3: jsou uvedeny v klíči na konci učebnice

3.2.2 Charakteristiky přesnosti

a) aposteriorní jednotková střední chyba

Pod pojmem *aposteriorní střední chyba* budeme rozumět chybu určenou z výsledků vyrovnání. Jednotková střední chyba je fiktivní bezrozměrná hodnota, která svojí velikostí odpovídá přesnosti takového měření, kterému jsme přisoudili váhu jedna (jednotkovou váhu). Takové měření se samozřejmě nemusí v naměřených hodnotách vůbec vyskytovat.V dalším budeme slovo aposteriorní (určená po) vynechávat.

Jednotková střední chyba se vypočte:

$$s_{o} = \sqrt{\frac{p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + \ldots + p_n v_n^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum pv^2}{n-1}} \qquad (3.28)$$

Pokud bychom znali skutečnou (pravou) hodnotu měřené veličiny, můžeme vypočítat místo oprav v_{i} skutečné chyby ε_{i} a jednotková střední chyba se vypočte:

$$m_{o} = \sqrt{\frac{p_1 \varepsilon_1^2 + p_2 \varepsilon_2^2 + \ldots + p_n \varepsilon_n^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum p\varepsilon^2}{n}} \qquad (3.29)$$

V maticové podobě lze oba předcházející vzorce psát:

$$s_{o} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{v}^{T}\boldsymbol{P}\boldsymbol{v}}{n-1}} \,, \qquad m_{o} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{\varepsilon}^{T}\boldsymbol{P}\boldsymbol{\varepsilon}}{n}} \,. \qquad (3.30)$$

Testování apriorní jednotkové střední chyby (apriorní = určené před vyrovnáním) a aposteriorní jednotkové střední chyby (vypočtené z vyrovnání) bude věnován jiný modul. Zde můžeme jen poznamenat, že rozdíl mezi apriorní chybou a aposteriorní chybou by měl být statisticky nevýznamný.

Aposteriorní chybu vypočtenou podle vztahu *(3.28)* použijeme v dalších výpočtech jen tehdy, když počet měření n byl dostatečně velký (25-30 a více), nebo když nemáme jinou (dostatečně spolehlivou) informaci o apriorní přesnosti a ve výsledcích na to upozorníme (viz. Poznámka 3.2 na str. 19).

a) střední chyby jednotlivých měření

Výpočet středních chyb měřených veličin $l_1, l_2, ..., l_n$ se provádí tehdy, když je neznáme již před vyrovnáním (známe např. jen jejich váhy), nebo když jejich apriorní přesnost byla vyrovnáním zpochybněna (např. nedodržena předpokládaná apriorní přesnost). Výpočet vychází ze základního vztahu pro výpočet vah *(3.20)*:

$$s_i = \frac{s_0}{\sqrt{p_i}} = s_0\sqrt{q_i} \quad , \qquad \text{resp.} \qquad m_i = \frac{m_0}{\sqrt{p_i}} = m_0\sqrt{q_i} \quad , \tag{3.31}$$

kde $q_i = p_i^{-1}$ jsou váhové koeficienty (kofaktory).

Vztahy *(3.31)* lze též rozepsat:

$$s_\mathrm{i} = \sqrt{\frac{\sum pv^2}{p_i(n-1)}} \quad , \quad \text{resp.} \quad m_\mathrm{i} = \sqrt{\frac{\sum p\varepsilon^2}{p_i n}} \quad . \tag{3.32}$$

b) střední chyba aritmetického průměru

Střední chybu $\overline{m}_x$ obecného aritmetického průměru odvodíme ze zákona hromadění vah, aplikovaného na funkci *(3.22)* pro výpočet tohoto průměru

$$\frac{1}{p_x} = \left(\frac{p_1}{\sum p}\right)^2 \frac{1}{p_1} + \left(\frac{p_2}{\sum p}\right)^2 \frac{1}{p_2} + ... + \left(\frac{p_n}{\sum p}\right)^2 \frac{1}{p_n} = \frac{\sum p}{\left(\sum p\right)^2} = \frac{1}{\sum p} \, ,$$

$$p_x = p_1 + p_2 + ... + p_n = \sum p \tag{3.33}$$

kde p_x je váha aritmetického průměru. Střední chyba aritmetického průměru se pok vypočte z následujícího vztahu *(3.34)*

$$\overline{m}_x = \frac{\overline{m}_0}{\sqrt{p_x}} = \frac{\overline{m}_0}{\sqrt{\sum p}} \tag{3.34}$$

Pokud apriorní jednotkovou střední chybu $\overline{m}_0$ neznáme, použijeme její aposteriorní odhady *(3.28)* nebo *(3.29)*

$$s_x = \frac{s_0}{\sqrt{p_x}} = \frac{s_0}{\sqrt{\sum p}} \quad , \quad \text{resp.} \quad m_x = \frac{m_0}{\sqrt{p_x}} = \frac{m_0}{\sqrt{\sum p}} \quad , \tag{3.35}$$

které lze psát též ve tvaru:

$$s_x = \sqrt{\frac{\sum pv^2}{(n-1)\sum p}}\,, \quad \text{resp.} \quad m_x = \sqrt{\frac{\sum p\varepsilon^2}{n\sum p}}\ . \qquad (3.36)$$

3.2.3 Příklad

Příklad 3.2

K určení nadmořské výšky H bodu P byly na okolních trigonometrických bodech P_1, P_2 a P_3 (jejichž nadmořské výšky H_i jsou známy) změřeny výškové úhly β_1, β_2 a β_3 a z nich vypočteny výškové rozdíly h_1, h_2 a h_3 mezi těmito body a bodem P. K výpočtu výškových rozdílů byly potřebné také délky záměr s_1, s_2, a s_3. Z každého trigonometrického bodu P_i byla vypočtena nadmořská výška $l_i = H_i + h_i$ bodu P . Tyto tři výšky bodu P se vlivem měřických chyb navzájem liší. Úkolem je vypočítat průměrnou výšku tohoto bodu P tak, aby byla vzata v úvahu přesnost výškových rozdílů (výšky trigonometrických bodů budeme považovat za bezchybné). Příklad je s úpravami převzat z [2]. Výpočty jsou uspořádány v tabulce 3.2.

Tabulka 3.2:

Pořadí i	Měření l_i	Délky s_i	Váhy p_i	Doplňky $\delta_i = l_i - x^o$	Opravy $v_i = \bar{x} - l_i$	Kvadráty $p_i v_i^2 = p_i v_i v_i$
	[m]	[km]		[m]	[m]	
1	348,62	2,4	0,17	0,08	-0,060	0,000 612
2	348,54	1,2	0,69	0,00	+0,020	0,000276
3	348,57	1,8	0,31	0,03	-0,010	0,000031
Součty			1,17			0,000919

Výpočetní postup:

1. Volba přibližné hodnoty $x^o = 348{,}54$ m (opět nejmenší hodnota),

2. Výpočet doplňků $\delta_i = l_i - x^o$ (viz tabulka 3.2),

3. Výpočet vah

U trigonometrického určování výškových rozdílů se váhy obvykle volí podle vztahu $p_i = 1/s_i^2$, kde délky s_i se dosazují v km. Jednotkovou váhu bude tak mít fiktivní výškový rozdíl, příslušející délce mezi body 1 km.

3. Výpočet aritmetického průměru (vyrovnané hodnoty)

$$\bar{x} = x^o + \frac{\sum p\delta}{\sum p} = x^o + 0{,}0229/1{,}17 = x^o + 0{,}020 = 348{,}560 \text{ m} .$$

4. Výpočet oprav $v_i = \bar{x} - l_i$ *(viz tabulka 3.2),*

5. Kontrola $\sum pv = 0{,}0005 \neq 0$.

liší se od nuly vlivem zaokrouhlení aritmetického průměru a oprav jen na tři desetinná místa.

6. Jednotková střední chyba

$$s_0 = \sqrt{\frac{\sum pv^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{0{,}000919}{2}} = 0{,}021 \quad .$$

7. Střední chyba aritmetického průměru

$$s_x = s_H = \frac{s_0}{\sqrt{\sum p}} = \frac{0{,}021}{\sqrt{1{,}17}} = 0{,}019 = 0{,}02 \text{ m} \quad .$$

8. Střední chyby s_i jednotlivých měření $l_i = h_i$

$$s_i = \frac{s_0}{\sqrt{p_i}}, \quad s_1 = 0{,}051 \text{ m},\ s_2 = 0{,}025 \text{ m},\ s_3 = 0{,}038 \text{ m} .$$

9. Výsledek vyrovnání

$\bar{x}$ = H = 348,56 m ± 0,02 m (n´= 2)

Vyrovnaná výška H bodu P byla zaokrouhlena na dvě desetinná místa (na centimetry) s ohledem na velikost její střední chyby (také v centimetrech).

Poznámka 3.3: Střední chyby vyrovnaných měření se rovnají střední chybě aritmetického průměru – viz. poznámka 3.1.

Úkol 3.3:

Ověřte u příkladů 3.1 a 3.2 platnost dalších kontrolních vztahů

$$\sum vv = -\sum v\delta = -\sum vl, \quad \text{resp.} \quad \sum pvv = -\sum pv\delta = -\sum pvl . \qquad (3.37)$$

Příklady přepočítejte v Excelu s maximální možnou přesností mezivýsledků.

3.3 Měřické dvojice

Zvláštním případem vyrovnání přímých měření je matematické zpracování souboru měřických dvojic. V geodézii platí známá zásada „jedno měření - žádné měření“. Proto se z kontrolních důvodů většina veličin měří minimálně dvakrát. Existuje řada příkladů na použití měřických dvojic: nejčastěji se dvakrát měří délky v polygonových pořadech (TAM a ZPĚT), převýšení v nivelačních oddílech (TAM a ZPĚT), dvakrát určujeme planimetry obsahy ploch na mapách apod.

3.3.1 Diference *d* a jejich vlastnosti

Dva nezávislé výsledky měření téže veličiny umožní zjistit omyl nebo hrubou chybu. Omyl se zřetelně projeví tím, že se oba výsledky navzájem značně liší. Označíme-li první měření (např. měření TAM) symbolem l' a druhé měření (např. ZPĚT) symbolem l'' vypočítáme nejprve z kontrolních důvodů jejich rozdíl (diferenci) d

$$d = l' - l'' \qquad (3.38)$$

a porovnáme jej s *mezní odchylkou* d_{mez} , která bývá stanovena pro jednotlivé druhy měřických prací příslušnými technickými předpisy (normami, vyhláškami, směrnicemi aj.).

Platí-li $|\, d \,| \le d_{mez}$ předpokládáme, že ani jedno z obou měření není zatíženo hrubou chybou nebo omylem . Je-li $|\, d \,| > d_{mez}$ je jedno z těchto měření zatíženo hrubou chybou nebo omylem (nebo obě rozdílně). V tomto případě vykonáme další měření, které rozhodne, který z předcházejících dvou výsledků je chybný nebo opakujeme obě měření.

V naprosté většině případů je první měření (TAM) vykonáno stejnou metodou jako měření druhé (ZPĚT). Byla-li obě měření vykonána se stejnou základní střední chybou $\bar{m}$ pak této metodě přísluší (na zvolené hladině významnosti) mezní střední chyba m_{mez} , která nám podle zákona hromadění středních chyb umožní vypočítat hodnotu d_{mez}:

$$d_{mez} = \sqrt{m_{mez}^2 + m_{mez}^2} = m_{mez}\sqrt{2} \quad . \tag{3.39}$$

Mají-li obě měřené veličiny normální rozdělení $L' = L'' = L \sim N(\mu\,,\,\bar{m}^2)$, pak diference D má rovněž normální rozdělení $D \sim N(0\,,\,2\bar{m}^2)$. Při realizaci dvojice měření bude platit

$$\mu = l' + \varepsilon' = l'' + \varepsilon''$$

a rozdíl

$$d = l' - l'' = (\mu - \varepsilon') - (\mu - \varepsilon'') = \varepsilon'' - \varepsilon' \tag{3.40}$$

má tudíž charakter skutečné chyby (rozdíl dvou skutečných chyb je rovněž skutečná chyba). Pokud působí při měření jen náhodné chyby a obě měření jsou nezávislá, je střední hodnota diference nulová. Pro její varianci pak platí

$$m_d^2 = \bar{m}^2 + \bar{m}^2 = 2\bar{m}^2 \quad . \tag{3.41}$$

Předpokládejme nyní, že jsme zaměřili n měřických dvojic (n polygonových stran, n nivelačních oddílů apod.). Nepřekročí-li diference d_i v i - té měřické dvojici mezní odchylku d_{mez} , vypočteme výsledek měření pomocí jednoduchého aritmetického průměru

$$\bar{x}_i = \frac{l_i' + l_i''}{2} \quad . \tag{3.42}$$

Z jednotlivých diferencí d_i nemůžeme usuzovat na přesnost měření. Přesnost měření můžeme počítat teprve ze souboru většího počtu těchto diferencí. V případě, že jednotlivé měřické dvojice mají stejnou přesnost (např. při přibližně stejných délkách polygonových stran či nivelačních oddílů) budeme mluvit o souboru měřických dvojic stejné přesnosti, v případě rozdílných přesností (různé délky polygonových stran apod.) o souboru měřických dvojic různé přesnosti.

?

Kontrolní otázky 3.4:

a) *Známe pravé hodnoty diferencí d ?*

b) *Lze za měřickou dvojici považovat délku změřenou 2x elektronickým dálkoměrem (při dvojím stisknutím tlačítka přístroje ihned po sobě) ?*

Odpovědi 3.4 :

a) Ano, pravé hodnoty všech diferencí známe, neboť musí být rovny nule.

b) Jen výjimečně, neboť takové dvě naměřené hodnoty nelze považovat za zcela nezávislé. Vznikly totiž měřením za prakticky identických podmínek, takže mají vysokou vnitřní přesnost (liší se jen velmi málo). Přednost dáváme dvojímu nezávislému měření délek (např. měření TAM a ZPĚT).

3.3.2 Soubor měřických dvojic stejné přesnosti

a) měřené veličiny

$$l'_1, l''_1 \;;\; l'_2, l''_2 \;;\; \dots \;;\; l'_n, l''_n \quad ,$$

kde n je počet měřických dvojic, počet všech měření je tedy $2n$. Všechna měření mají stejnou přesnost (stejnou váhu).

b) výpočet diferencí a středních hodnot

Nejprve vypočteme jednotlivé diference d_i

$$d_1 = l'_1 - l''_1 \;;\; d_2 = l'_2 - l''_2 \;;\; \dots \;;\; d_n = l'_n - l''_n$$

a porovnáme je s mezní odchylkou podle vztahu $|\, d_i \,| \le d_{\mathrm{mez}}$. Pokud jsou tato kritéria splněna, vypočítáme střední hodnoty (aritmetické průměry jednotlivých dvojic měření).

$$\bar{x}_1 = \frac{l'_1 + l''_1}{2} \;;\; \bar{x}_2 = \frac{l'_2 + l''_2}{2} \;;\; \dots \;;\; \bar{x}_n = \frac{l'_n + l''_n}{2} \;. \qquad (3.43)$$

c) střední chyba jednoho měření

Umocníme-li členy ve vzorci *(3.40)* na druhou a sečteme přes všechna n bude

$$\frac{\sum d^2}{n} = \frac{\sum \varepsilon'^2}{n} + \frac{\sum \varepsilon''^2}{n} - 2\frac{\sum \varepsilon'\varepsilon''}{n} \quad . \qquad (3.44)$$

Poslední člen pravé strany rovnice *(3.44)*, za předpokladu působení jen náhodných chyb a jejich velkého počtu (velký počet dvojic), bude konvergovat k nule a může být zanedbán. Potom

$$\frac{\sum d^2}{n} = \frac{\sum \varepsilon'^2}{n} + \frac{\sum \varepsilon''^2}{n} = \bar{m}'^2 + \bar{m}''^2 = \bar{m}^2 + \bar{m}^2 = 2\bar{m}^2 \qquad (3.45)$$

Ze vztahu *(3.45)* pak odvodíme střední chybu jednoho měření

$$\boxed{\bar{m} = \sqrt{\frac{\sum d^2}{2n}} \qquad \text{pro } n \to \infty \qquad (3.46)}$$

Protože měřických dvojic máme v praxi jen omezený počet, vypočítáme podle vzorce *(3.46)* jen výběrovou střední chybu pro jedno měření m jako odhad základní střední chyby $\bar{m}$.

$$m = \sqrt{\frac{\sum d^2}{2n}} \quad . \qquad (3.47)$$

Střední chyba jednoho měření vyjadřuje přesnost kteréhokoliv měření v souboru měřických dvojic např. měření l_1'' nebo l_n' a všech ostatních.

d) střední chyba aritmetických průměrů

Střední chybu aritmetického průměru vypočítáme ze vztahu *(3.47)*, kam dosadíme n = 2 (počet měření v jedné dvojici).

$$m_x = \frac{m}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sum d^2}{n}} \quad . \qquad (3.48)$$

Tato chyba vyjadřuje přesnost kteréhokoliv z n aritmetických průměrů *(3.43)*, neboťvšechny jsou stejně přesné.

Příklad 3.3:

Na mapě byly změřeny obsahy ploch pěti přibližně stejně velkých obrazců (parcel). Každý obsah plochy byl určen dvakrát. Jaká je střední chyba jednoho měření a střední chyba aritmetického průměru z dvojice měření? Přiklad je opět s drobnými úpravami převzat z [2]. Výpočet je uspořádán v tabulce 3.3. Příklad je jen metodický, pro seriozně jší odhady přesnosti by měřických dvojic muselo být víc než jen 5, obecně alespoň 25 až 30.

Tabulka 3.3:

Obrazec	Obsahy ploch [mm^2]		Diference	Kvadráty
číslo	l'	l''	$d = l' - l''$	$d\,d = d^2$
1	2 546	2 549	- 3	9
2	2 916	2 910	+ 6	36
3	2 329	2 328	+ 1	1
4	2 630	2 635	- 5	25
5	2 726	2 728	- 2	4
Součty			**- 3**	**75**

Střední chyba jednoho měření (jedenkrát určené plochy)

$$m = \sqrt{\frac{\sum d^2}{2n}} = \sqrt{\frac{75}{10}} = 2{,}74 = 2{,}7 \text{ mm}^2 \ .$$

Střední chyba aritmetického průměru (z dvou měření)

$$m_x = \frac{m}{\sqrt{2}} = \frac{2{,}74}{1{,}414} = 1{,}94 = 1{,}9 \text{ mm}^2 \ .$$

3.3.3 Soubor měřických dvojic různé přesnosti

a) měřené veličiny

l_1', l_1'' ; l_2', l_2'' ; ... ; l_n', l_n'' , s vahami

p_1 ; p_2 ; ... ; p_n .

kde n je počet měřických dvojic, počet měření je tedy $2n$. Přesnost měření je stejná jen uvnitř každé dvojice (měření TAM je stejně přesné jako měřeni ZPĚT) a liší se mezi dvojicemi. Přesnost je vyjádřená vahami p_i .

b) výpočet diferencí a středních hodnot

Nejprve vypočteme jednotlivé diference d

$$d_1 = l_1' - l_1'' \;;\; d_2 = l_2' - l_2'' \;;\; \dots \;;\; d_n = l_n' - l_n'' \qquad (3.49)$$

a porovnáme je s mezními odchylkami podle vztahu $|d_i| \le d_{\mathrm{i\,mez}}$. Povšimněme si, že pro každou diferenci d_i je stanovena jiná hodnota mezní odchylky $d_{\mathrm{i\,mez}}$.

Pokud jsou tato kritéria splněna, vypočítáme vyrovnané hodnoty (aritmetické průměry) jednotlivých dvojic měření.

$$\bar{x}_1 = \frac{l_1' + l_1''}{2} \;;\; \bar{x}_2 = \frac{l_2' + l_2''}{2} \;;\; \dots \;;\; \bar{x}_n = \frac{l_n' + l_n''}{2} \;. \qquad (3.50)$$

c) střední chyba měření o váze rovné jedné (jednotková střední chyba)

Bez odvození uveďme vztah pro jednotkovou střední chybu

$$m_{\mathrm{o}} = \sqrt{\frac{\sum pd^2}{2n}} \;, \qquad (3.51)$$

která vyjadřuje přesnost (fingovaného) měření, kterému jsme přisoudili váhu jedna.

d) jednotková střední chyba aritmetického průměru

Jednotková střední chyba aritmetického průměru vypočteného v měřické dvojici vyjadřuje přesnost (fingovaného) aritmetického průměru, ve kterém mají obě měření váhu jedna a vypočítá se ze vztahu:

$$m_{\mathrm{o,x}} = \frac{m_{\mathrm{o}}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sum pd^2}{n}} \;. \qquad (3.52)$$

e) střední chyby jednotlivých měření a jejich průměrů

Střední chyba jednoho měření v i – té dvojici je dána vzorcem:

$$m_i = \frac{m_{\mathrm{o}}}{\sqrt{p_i}} \;. \qquad (3.53)$$

Střední chyba i – tého aritmetického průměru bude analogicky k předcházejícímu vzorci:

$$m_{x_i} = \frac{m_{o,x}}{\sqrt{p_i}} \quad . \qquad (3.54)$$

Příklad 3.4

V nivelačním pořadu bylo změřeno celkem 6 převýšení a to TAM a ZPĚT v nestejně dlouhých oddílech. Naměřené údaje a délky oddílů jsou sestaveny s polu s některými výsledky do tabulky č. 3.4. Vypočítejte vyrovnaná převýšení v jednotlivých oddílech, jejich přesnost (střední chyby), celkové převýšení pořadu a jeho střední chybu, tj. střední chybu vyrovnaného převýšení mezi prvním a posledním bodem nivelačního pořadu. Příklad je opět s úpravami převzat z [2].

Tabulka 3.4

Pořadí i	TAM l' [m]	ZPĚT l'' [m]	Průměr [m]	s [km]	$p = 1/s$	d_{mez} [mm]	d [mm]	pd^2
1	+ 2,5003	- 2,5002	+ 2,5002	0,31	3,23	0,83	+ 0,1	0,0323
2	+ 0,4350	- 0,4358	+ 0,4354	0,58	1,72	1,14	- 0,8	1,1008
3	- 2,0647	+ 2,0641	- 2,0644	0,65	1,54	1,21	- 0,6	0,5544
4	+ 2,4527	- 2,4519	+ 2,4523	0,69	1,45	1,25	+ 0,8	0,9280
5	+ 2,7924	- 2,7926	+ 2,7925	0,39	2,56	0,94	- 0,2	0,1024
6	- 1,7352	+ 1,7356	- 1,7354	0,62	1,61	1,18	+ 0,4	0,2576
Součty	**+ 4,3805**	**- 4,3808**	**+4,3806**	**3,24**	**12,11**			**2,9755**

Výpočetní postup:

a) *vypočet diferencí d_i a jejich porovnání s mezními odchylkami $d_{i\,mez}$*

$$d_i = l_i' + l_i'' \quad , \quad |\, d_i \,| \le d_{\mathrm{i\,mez}} \; ,$$

Mezní odchylky v nivelačních pořadech I. řádu se vypočítají ze vzorce $d_{\mathrm{i\,mez}} = 1{,}50\sqrt{R_i}$, kde R_i je délka nivelačního oddílu, která se dosazuje se vzorce v kilometrech, odchylka pak vyjde v milimetrech. V našem příkladě $R_i = S_i$. Výpočet viz tabulka 3.4.

Protože nivelační převýšení TAM má opačné znaménko než převýšení ZPĚT, vypočítá se diference jako součet obou měření a ne jako jejich rozdíl (3.49).

b) *výpočet vyrovnaných převýšení (aritmetických průměrů)*

$\bar{x}_i = \dfrac{l_i' + l_i''}{2}$ *, ve vzorci je opačné znaménko než ve (3.50) ze stejných důvodů jako v předcházejícím odstavci.*

c) *výpočet vah*

V nivelaci se váhy počítají jako reciproké hodnoty délek nivelačních oddílů

$$p_i = \frac{1}{S_i} \quad .$$

d) jednotková střední chyba jednoho měření a jednotková střední chyba aritmetického průměru

$$m_o = \sqrt{\frac{\sum pd^2}{2n}} = \sqrt{\frac{2{,}9755}{12}} = 0{,}50 \quad , \qquad m_{o,x} = \frac{m_o}{\sqrt{2}} = 0{,}35 \quad .$$

Uvedené chyby vyjadřují přesnost převýšení s jednotkovou váhou, tj. pro fiktivní délku nivelačního oddílu 1 km. Nazývají se proto střední kilometrové chyby.

e) střední chyby jednotlivých převýšení a střední chyby vyrovnaných převýšení

Pro jeden nivelační oddíl je přesnost měřeného převýšení TAM stejná jako u měření ZPĚT . Přesnosti se liší až mezi oddíly, neboť oddíly mají různou délku.

$$m_i = \frac{m_o}{\sqrt{p_i}} \quad , \quad m_{x_i} = \frac{m_{o,x}}{\sqrt{p_i}} \quad .$$

Výsledky jsou uvedeny v sousední tabulce.

i	1	2	3	4	5	6
m_i [mm]	0,28	0,38	0,40	0,42	0,31	0,39
m_{x_i} [mm]	0,19	0,27	0,28	0,29	0,22	0,28

f) převýšení celého nivelačního pořadu a jeho přesnost

Vyrovnané převýšení celého nivelačního pořadu vypočítáme jako součet vyrovnaných převýšení jednotlivých nivelačních oddílů

$$\bar{x} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + ... + \bar{x}_6 = +\,4{,}3806 \text{ m}$$

Střední chyba celkového převýšení se vypočte pomocí zákona hromadění středních chyb

$$m_x^2 = m_{x_1}^2 + m_{x_2}^2 + ... + m_{x_6}^2 = \frac{m_{x_o}^2}{p_1} + \frac{m_{x_o}^2}{p_2} + ... + \frac{m_{x_o}^2}{p_6} = m_{x_o}^2 \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + ... + \frac{1}{p_2} \right) .$$

Protože $p_i = 1 / S_i$ bude

$$m_x^2 = m_{x_o}^2 \left(S_1 + S_2 + ... + S_6 \right) = m_{x_o}^2 \sum S$$

a střední chyba celkového převýšení

$$m_x = m_{x_o} \sqrt{\sum S} = 0{,}35\sqrt{3{,}24} = 0{,}63 \, \text{mm} \, .$$

***Výsledek vyrovnání* :** $\bar{x} \pm m_x = +\,4{,}3806 \, \text{m} \pm 0{,}63 \, \text{mm}$

Kontrolní otázky 3.5:

a) Jaký rozměr má jednotková střední chyba ?

b) Jakou střední chybu má měření, které má váhu rovnu jedné (pokud existuje) ?

c) Jak by se změnily výsledky v příkladě 3.4, kdyby nivelační pořad byl počítán v opačném směru (koncový bod pořadu by byl nyní počátečním bodem pořadu) ?

d) *Určitá střední chyba se v nivelaci počítá podle vzorce:*

$$m_o = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{n_R}\sum\left(\frac{\rho^2}{R}\right)},$$

kde n_R *je počet nivelačních oddílů, R jsou délky nivelačního oddílu a* ρ *jsou diference mezi měřením TAM a ZPĚT v jednotlivých oddílech. Kterou střední chybu tento vzorec vyjadřuje ?*

Odpovědi 3.5:

a) *Je bezrozměrná, neboť je bezrozměrný součin* $\sum pv^2$ *či* $\sum pd^2$.

b) *Je číselně rovno jednotkové střední chybě.*

c) *Diference* d_i *by měly opačné znaménko. Opačné znaménko by měla rovněž jednotlivá průměrná převýšení i celkové převýšení. Všechny charakteristiky přesnosti (střední chyby) by byly stejné.*

d) *Vzorec odpovídá vztahu (3.52) kde* $d_i = \rho_i$ *, váhy* $p_i = 1/R_\mathrm{i}$ a $n_\mathrm{R} = n$. Vzorec tak vyjadřuje jednotkovou střední chybu aritmetického průměru, neboli střední kilometrovou chybu obousměrné nivelace.

4 Vyrovnání zprostředkujících měření

Cílem této kapitoly je naučit studenty řešit úlohy, kdy přímo měřené veličiny „zprostředkují" určení neznamých veličin. Neznámé veličiny nemůžeme totiž určit přímým měřením, ale musíme je určit pomocí známého funkčního vztahu k měřeným veličinám. Je-li měřených veličin více než jen nezbytně nutný počet pro vyřešení všech neznámých, použijem opět metodu nejmenších čtverců oprav, tj. vyrovnání.

Doba potřebná ke studiu této kapitoly byla odhadnuta na 17 hodin, z toho asi 10 hodin je čas věnovaný procvičování jednotlivých příkladů. Čas je opět silně závislý na použitých výpočetních prostředcích a schopnosti studenta je využívat. Jedná se zejména o řešení rozsáhlejších systémů lineárních rovnic.

Vyrovnání zprostředkujících měření, zprostředkující funkce, rovnice oprav, matice vah, matice plánu, normální rovnice, inverzní matice, matice váhových koeficientů, kovarianční matice, střední chyby neznámých, střední chyby funkcí, střední chyby vyrovnaných hodnot.

4.1 Podstata a princip řešení, použitá symbolika

Typickým příkladem na použití vyrovnání zprostředkujících měření je v geodézii úloha určení neznámých souřadnic geodetických bodů, které nelze přímo měřit, pomocí (prostřednictvím) jiných veličin, které měřit můžeme (úhly, délky aj.). Měřených veličin je nadbytečný počet, takže použijeme vyrovnání. Měřené veličiny se nazývají *zprostředkující veličiny*. Měřené (zprostředkující) veličiny jsou obvykle určeny s nějakou přesností (např. jako aritmetické průměry z vyrovnání přímých měření), jsou tedy zatíženy měřickými chybami. Nepřesnosti v měřených veličinách (úhlech a délkách) se tak přenášejí do výsledných neznámých (souřadnic).

Cílem vyrovnání je:

a) určit vyrovnané hodnoty neznámých (za daných podmínek nejlepší řešení ve smyslu MNČ).

b) posoudit přesnost měřených i vyrovnaných hodnot (určit střední chyby neznámých a střední chyby vyrovnaných měření).

V principu se jedná o řešení rovnice *(2.12)* při splnění podmínky MNČ $\sum v^2 = \min$, nebo $\sum pv^2 = \min$.

V dalším textu bude používána následující symbolika:

n .... počet měření (počet měřených veličin)

k .... počet neznámých veličin (počet určovaných parametrů)

r .... počet nadbytečných měření ($r = n - k$)

$\boldsymbol{L}$ .... vektor pravých hodnot měřených veličin $\boldsymbol{L}^T = (L_1, L_2, ..., L_n)$

$\boldsymbol{l}$ .... vektor měření (naměřených hodnot) $\boldsymbol{l}^T = (l_1, l_2, ..., l_n)$

$\boldsymbol{v}$	vektor oprav	$\boldsymbol{v}^T = (v_1, v_2, ..., v_n)$
$\bar{\boldsymbol{l}} = \boldsymbol{l} + \boldsymbol{v}$	vektor vyrovnaných měření	$\bar{\boldsymbol{l}}^T = (\bar{l}_1, \bar{l}_2, ..., \bar{l}_n)$
$\boldsymbol{X}$	vektor pravých hodnot neznámých	$\boldsymbol{X}^T = (X_1, X_2, ..., X_k)$
.$\boldsymbol{x}^{\mathrm{o}}$	vektor přibližných hodnot neznámých	$\boldsymbol{x}^{\mathrm{o}T} = (x_1^{\mathrm{o}}, x_2^{\mathrm{o}}, ..., x_k^{\mathrm{o}})$
$\delta\boldsymbol{x}$	vektor přírustků neznámých	$\delta\boldsymbol{x}^T = (\delta x_1, \delta x_2, ..., \delta x_k)$
$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{o}} + \delta\boldsymbol{x}$ ..	vektor neznámých	$\boldsymbol{x}^T = (x_1, x_2, ..., x_k)$
$\boldsymbol{P}$	matice vah	
.$\boldsymbol{A}$	matice plánu	
.$\boldsymbol{N}$	matice koeficientů normálních rovnic	
$\boldsymbol{Q}_x$	matice váhových koeficientů neznámých	
$\boldsymbol{Q}_{\bar{l}}$	matice váhových koeficientů vyrovnaných měření	

4.2 Zprostředkující funkce a jejich linearizace

Sestavme nejprve n zprostředkujících funkcí, které definují matematický vztah mezi měřenými L_i a určovanými parametry X_j (kde $i = 1, 2, ... , n$ a $j = 1, 2, ... , k$). Počet měření je přitom větší než je počet neznámých ($n > k$). Vztah *(2.12)* definujme pro všechny měřené veličiny:

$$\begin{aligned} L_1 &= f_1(X_1, X_2, ..., X_k) \\ L_2 &= f_2(X_1, X_2, ..., X_k) \\ &\vdots \\ L_n &= f_n(X_1, X_2, ..., X_k) \end{aligned} \qquad (4.1)$$

Funkcím v rovnicích *(4.1)* říkáme *zprostředkující funkce* a měřeným veličinám *zprostředkující veličiny.*

Poznámka 4.1: Klasické geodetické výpočty jsou vlastně definovány obráceně, určované veličiny (např. souřadnice) jsou funkcí měřených veličin (úhlů a délek).

Příklad 4.1

V geodézii *mají fukce pro výpočet neznámých přírustků souřadnic ΔX a ΔY ze známé délky S a známého směrníku σ tvar:*

$\Delta X = S \cos\sigma$, $\Delta Y = S \sin\sigma$.

Ve vyrovnávacím počtu *budou mít zprostředkující funkce tvar jiný (opačný, inverzní):*

$$S = \sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2}, \qquad \sigma = \mathrm{arctg}\left(\frac{\Delta Y}{\Delta X}\right) \quad .$$

Možná se zdá poněkud podivné sestavovat funkce, kde na levé straně rovnice jsou známé veličiny a na pravé straně rovnice neznámé veličiny. Příklad 4.1 však ukázal, že je to možné a záhy uvidíme, že i velmi účelné. Zprostředkující funkce mohou mít jak lineární, tak i nelineární tvar. V příkladu 4.1 jsou obě zprostředkující funkce (jedna pro výpočet S, druhá pro výpočet σ) nelineární.

Kontrolní otázka 4.1

V nivelaci se měří jednotlivá převýšení mezi body a počítají se z nich neznámé výšky nových bodů. Jak budou vypadat zprostředkující funkce ?

Odpověď 4.1

Měřenými veličinami jsou jednotlivá převýšení vždy mezi dvěma nivelačními body, určovanými veličinami (neznámými parametry) jsou výšky bodů těchto bodů. Zprostředkující funkce počítají převýšení jako rozdíly výšek $h_k=H_i-H_j$

Zprostředkující funkce *(4.1)* vyjadřují *matematický model* úlohy, popisující vztah pravých hodnot L_i a X_j. Protože měřené veličiny jsou ale náhodnými veličinami, můžeme definovat *stochastický model*, obdobný matematickému modelu *(4.1)*, ve kterém místo pravých hodnot L_i a X_j jsou náhodné veličiny L_i a X_j . V dalším textu nebudeme rozlišovat symboliku veličin v obou modelech (oba případy budou značeny velkými písmeny). Vykonáním měření a jejich dosazením do zprostředkujících funkcí (do modelu) dostáváme *realizační model*. Nahraďme náhodné veličiny L_i a X_j v stochastickém modelu zatím neurčenými vyrovnanými hodnotami $\bar{l}_i$ a x_j . Vyrovnané hodnoty měření $\bar{l}_i$ získáme přičtením zatím neurčených oprav v_i k měřeným veličinám l_i :

$$\begin{aligned} \bar{l}_1 &= l_1 + v_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_k) \\ \bar{l}_2 &= l_2 + v_2 = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_k) \\ &\vdots \\ \bar{l}_n &= l_n + v_n = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_k) \end{aligned} \qquad (4.2)$$

V maticovém zápise lze soustavu funkcí *(4.2)* vyjádřit

$$\bar{\boldsymbol{l}} = \boldsymbol{l} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}^T\right).$$

4.3 Rovnice oprav

Každá měřená veličina l_i je určena s nějakou přesností, která je vyjádřena buď její základní střední chybou $\bar{m}_i$ nebo její váhou p_i . Obě veličiny jsou spolu úzce spjaty přes vhodně volenou konstantu $\bar{m}_o$ - viz. *(3.20)*, kterou nazýváme *apriorní jednotková střední chyba*.

$$p_i = \frac{\bar{m}_o^2}{\bar{m}_i^2} .$$

Tato konstanta $\bar{m}_o$ vyjadřuje číselně velikost střední chyby fingovaného měření, kterému bychom přisoudili jednotkovou váhu. Jednotková chyba je obecně bezrozměrná. (podrobnosti jsou uvedeny v modulu Měřické chyby).

Mějme n výsledků měření $l_1, l_2, \ldots, l_n$ s jejich vahami $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Rovnice *(4.2)* můžeme pak přepsat:

$$\begin{aligned} v_1 &= f_1(x_1, x_2, \ldots, x_k) - l_1 = \bar{l}_1 - l_1 \\ v_2 &= f_2(x_1, x_2, \ldots, x_k) - l_2 = \bar{l}_2 - l_2 \\ &\vdots \\ v_n &= f_n(x_1, x_2, \ldots, x_k) - l_n = \bar{l}_n - l_n \end{aligned} \quad . \qquad (4.3)$$

Rovnice *(4.3)* definují tzv. *původní rovnice oprav*. Z nich je zřejmé, že oprava v je opět definována jako rozdíl mezi vyrovnanou hodnotou $\bar{l}$ a měřenou hodnotou l (podle pravidla má býti mínus jest).

Pokud je systém zprostředkujících funkcí nelineární, musíme jej nejprve *linearizovat*. Pro ten účel vypočteme (odhadneme) nejprve přibližné hodnoty neznámých veličin a označíme je x_j^o . Rovnice oprav *(4.2)* přepišme na tvar

$$\begin{aligned} v_1 &= f_1(x_1, x_2, \ldots, x_k) - l_1 = f_1\left(x_1^o + \delta x_1, x_2^o + \delta x_2, \ldots, x_k^o + \delta x_k\right) - l_1 \\ v_2 &= f_2(x_1, x_2, \ldots, x_k) - l_2 = f_2\left(x_1^o + \delta x_1, x_2^o + \delta x_2, \ldots, x_k^o + \delta x_k\right) - l_2 \\ &\vdots \\ v_n &= f_n(x_1, x_2, \ldots, x_k) - l_n = f_n\left(x_1^o + \delta x_1, x_2^o + \delta x_2, \ldots, x_k^o + \delta x_k\right) - l_n \end{aligned} \quad , \qquad (4.4)$$

kde každá hledaná (neznámá) veličina x byla rozdělena na přibližnou hodnotu x^o (známou hodnotu) a její doplněk δx (neznámý). Pokud určíme přibližné hodnoty dostatečně blízko neznámým hodnotám, budou přírustky dostatečně malé a rovnice *(4.4)* můžeme rozvinou prostřednictvím Taylorovy řady, ve které ponecháme jen členy prvního řádu. Pro i – tou rovnici bude tento rozvoj vypadat následovně:

$$\begin{aligned} v_i &= f_i\left(x_1^o + \delta x_1, x_2^o + \delta x_2, \ldots, x_k^o + \delta x_k\right) - l_i \\ &= f_i(x_1^o, x_2^o, \ldots, x_k^o) + \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1}\right)_{\mathbf{x}^o} \delta x_1 + \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_2}\right)_{\mathbf{x}^o} \delta x_2 + \ldots + \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\right)_{\mathbf{x}^o} \delta x_k - l_i \\ &= f_i(x_1^o, x_2^o, \ldots, x_k^o) + a_i \delta x_1 + b_i \delta x_2 + \ldots + k_i \delta x_k - l_i \end{aligned}$$

Příslušné parciální derivace jednotlivých funkcí jsou počítány v přibližném bodě $\mathbf{x}^o$, tj. pro přibližné hodnoty $x_1^o, x_2^o, \ldots, x_k^o$. V dalším textu budou jednotlivé parciální derivace značeny písmeny a_i , b_i až k_i , kde

$$a_i = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1}\right)_{\mathbf{x}^o} , \quad b_i = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_2}\right)_{\mathbf{x}^o} , \quad \ldots , \quad k_i = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\right)_{\mathbf{x}^o} .$$

Rovnice *(4.4)* budou mít pak tvar

$$\begin{aligned} v_1 &= f_1(x_1^o, x_2^o, \ldots, x_k^o) + a_1 \delta x_1 + b_1 \delta x_2 + \ldots + k_1 \delta x_k - l_1 = a_1 \delta x_1 + b_1 \delta x_2 + \ldots + k_1 \delta x_k + l_1^o - l_1 \\ v_2 &= f_2(x_1^o, x_2^o, \ldots, x_k^o) + a_2 \delta x_1 + b_2 \delta x_2 + \ldots + k_2 \delta x_k - l_2 = a_2 \delta x_1 + b_2 \delta x_2 + \ldots + k_2 \delta x_k + l_2^o - l_2 \\ &\vdots \\ v_n &= f_n(x_1^o, x_2^o, \ldots, x_k^o) + a_n \delta x_1 + b_n \delta x_2 + \ldots + k_n \delta x_k - l_n = a_n \delta x_1 + b_n \delta x_2 + \ldots + k_n \delta x_k + l_n^o - l_n \end{aligned}$$

.

Při úpravě bylo použito označení $f_i\left(x_1^o, x_2^o, ..., x_n^o\right) = l_i^o$, neboť se vlastně jedná o přibližné hodnoty měřených veličin, počítaných z přibližných neznámých. Pokud budou přibližné veličiny x_j^o dostatečně blízko hledaným veličinám x_j budou malé i rozdíly přibližných hodnot měřených veličin a naměřených hodnot. Tyto rozdíly (označené s čarou) se vypočtou podle:

$$l_i^o - l_i = l_i' \ . \qquad (4.5)$$

Původní rovnice oprav *(4.3)* tak linearizací přejdou do tzv. *přetvořených rovnic oprav (4.6)*

$$\begin{aligned} v_1 &= a_1\delta x_1 + b_1\delta x_2 + ... + k_1\delta x_k + l_1' \\ v_2 &= a_2\delta x_1 + b_2\delta x_2 + ... + k_2\delta x_k + l_2' \\ &\vdots \\ v_n &= a_n\delta x_1 + b_n\delta x_2 + ... + k_n\delta x_k + l_n' \end{aligned} \qquad (4.6)$$

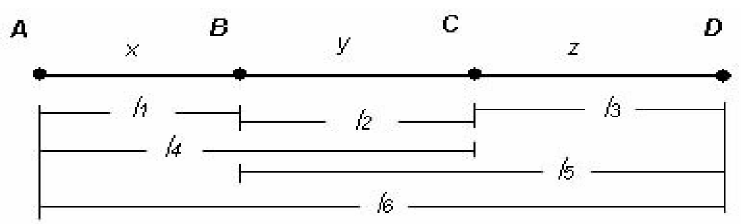
Přetvořené rovnice oprav jsou důležitými výchozími rovnicemi pro další řešení a jejich správné sestavení je základem úspěchu celého řešení vyrovnávací úlohy.
Než si odvodíme další postup vyrovnání, bude na jednoduchém příkladu ukázán postup sestavení a výpočtu přetvořených rovnic oprav. Pro jednoduchost jsou v příkladu voleny jen lineární zprostředkující funkce s kterými budeme ale zacházet, jako by byly nelineární.

Příklad 4.2

Pro kontrolu dálkoměrů byla vybudována testovací základna, tvořená čtyřmi body A, B, C, a D, přibližně stejně vzdálenými jeden od druhého (viz obr. 4.1). Každý testovaný přístroj má za úkol změřit všech šest v úvahu přicházejících délek (l_1, l_2, ... , l_6) a jejich vyrovnáním určit tři délky x, y, z mezi jednotlivými body AB, BC, CD. Testovaným dálkoměrem byly naměřeny následující hodnoty vodorovných délek v metrech:

l_1 [m]	l_2 [m]	l_3 [m]	l_4 [m]	l_5 [m]	l_6 [m]
140,211	150,035	159,816	290,245	309,845	450,052

Dále předpokládejme, že všechny naměřené hodnoty byly určeny se stejnou přesností.



Obrázek 4.1: Schema měřených veličin na testovací základně

Řešení příkladu 4.1

a) Volba neznámých a určení počtu nadbytečných měření:

Jako neznámé volíme tři vzdálenosti AB, BC, CD vždy mezi dvěma sousedními body. Na obr. 4.1 jsou tyto neznámé veličiny označeny x, y, z (náhodné veličiny X, Y, Z). V úvahu připadá i jiná volba neznámých, např. (AB, AC, AD). Počet měření $n = 6$, počet nutných měření $k = 3$, počet nadbytečných měření $r = n - k = 6 - 3 = 3$. Počet nutných měření je roven počtu neznámých veličin (x, y, z).

b) Sestavení zprostředkujících funkcí:

$L_1 = f_1(X, Y, Z) = X$, $\quad L_4 = f_4(X, Y, Z) = X + Y$,

$L_2 = f_2(X, Y, Z) = Y$, $\quad L_5 = f_5(X, Y, Z) = Y + Z$,

$L_3 = f_3(X, Y, Z) = Z$, $\quad L_6 = f_6(X, Y, Z) = X + Y + Z$.

c) Původní rovnice oprav

$v_1 = x - l_1$, $\quad v_4 = x + y - l_4$,

$v_2 = y - l_2$, $\quad v_5 = y + z - l_5$,

$v_3 = z - l_3$, $\quad v_6 = x + y + z - l_6$.

Po dosazení naměřených hodnot mají původní rovnice oprav tvar:

$v_1 = x - 140{,}211$, $\quad v_4 = x + y - 290{,}245$,

$v_2 = y - 150{,}035$, $\quad v_5 = y + z - 309{,}845$,

$v_3 = z - 159{,}816$, $\quad v_6 = x + y + z - 450{,}052$.

V rovnicích zatím neznáme ani hodnoty x, y , z , ani opravy v_1 až v_6 .

d) Volba přibližných hodnot pro neznámé x, y, z (hodnoty blízké hledanému řešení):

$x^o = 140{,}000$ m, $\quad y^o = 150{,}000$ m, $\quad z^o = 160{,}000$ m.

e) Výpočet parciálních derivací a přibližných hodnot měřených veličin (výsledky jsou sestaveny do následující tabulky)

i	$a_i = \frac{\partial f_i}{\partial x}$	$b_i = \frac{\partial f_i}{\partial y}$	$c_i = \frac{\partial f_i}{\partial z}$	l_i^o [m]	$l_i' = l_i^o - l_i$ [m]
1	+ 1	0	0	140,000	- 0,211
2	0	+ 1	0	150,000	- 0,035
3	0	0	+ 1	160,000	+ 0,184
4	+ 1	+ 1	0	290,000	- 0,245
5	0	+ 1	+ 1	310,000	+ 0,155
6	+ 1	+ 1	+ 1	450,000	- 0,052

Parciální derivace jsou v tomto příkladě bezrozměrné.

f) Přetvořené rovnice oprav

Přetvořené rovnice oprav budou mít po dosazení koeficientů (parciálních derivací) tvar

$$v_1 = +1\delta x \qquad - 0{,}211\,, \qquad v_4 = +1\delta x + 1\delta y \qquad - 0{,}245\,,$$

$$v_2 = \qquad +1\delta y \qquad - 0{,}035\,, \qquad v_5 = \qquad + 1\delta y + 1\delta z + 0{,}155\,,$$

$$v_3 = \qquad + 1\,\delta z + 0{,}184\,, \qquad v_6 = + 1\delta x + 1\delta y + 1\delta z - 0{,}052\,.$$

Doplňky s nulovými koeficienty nejsou uváděny. První rovnice má vlastně tvar $v_1 = + 1\delta x + 0\,\delta y + 0\,\delta z - 0{,}211$*, atd.*

Příklad na sestavení rovnic oprav u nelineárních zprostředkujících funkcí bude uveden později, až po vysvětlení dalšího postupu vyrovnání.

Přetvořené rovnice oprav *(4.6)* můžeme napsat též v maticovém tvaru, což nám poskytne jednak zjednodušený zápis, jednak možnost využít některých maticových operací při odvozování některých složitějších vztahů. Pro tento účel uspořádáme koeficienty rovnic oprav (parciální derivace) do matice $\boldsymbol{A}$. Tuto matici budeme v dalším nazývat *maticí plánu*. Tato matice je vlastně lineárním zobrazením mezi vektorovým prostorem neznámých parametrů a vektorovým prostorem měřených parametrů. Prvky matice $\boldsymbol{A}$ jsou parciální derivace zprostředkujících funkcí podle jednotlivých neznámých parametrů. Obecně bude mít matice $\boldsymbol{A}$ tolik řádků, kolik je měřených veličin (n) a tolik sloupců, kolik je neznámých (k). Dále definujme vektor měřených hodnot $\boldsymbol{l}$, vektor neznámých $\boldsymbol{x}$, vektor přibližných hodnot neznámých $\boldsymbol{x}^{\mathrm{o}}$, vektor přírustků neznámých $\delta\boldsymbol{x}$, vektor oprav $\boldsymbol{v}$, vektor přibližných hodnot měřených veličin $\boldsymbol{l}^{\mathrm{o}}$, vektor absolutních členů $\boldsymbol{l}'$ a diagonální matici vah $\boldsymbol{P}$.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & \dots & k_1 \\ a_2 & b_2 & \cdots & k_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & b_n & \cdots & k_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{l} = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}^{\mathrm{o}} = \begin{pmatrix} x_1^{\mathrm{o}} \\ x_2^{\mathrm{o}} \\ \vdots \\ x_k^{\mathrm{o}} \end{pmatrix}, \quad \delta\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \vdots \\ \delta x_k \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{l}^{\mathrm{o}} = \begin{pmatrix} l_1^{\mathrm{o}} \\ l_2^{\mathrm{o}} \\ \vdots \\ l_n^{\mathrm{o}} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{l}' = \begin{pmatrix} l_1' \\ l_2' \\ \vdots \\ l_n' \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$$

Přetvořené rovnice oprav *(4.6)* budou mít v maticovém zápise tvar

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}\delta\boldsymbol{x} + \boldsymbol{l}' \quad , \qquad (4.7)$$

kde

$$\boldsymbol{l}' = \boldsymbol{l}^{\mathrm{o}} - \boldsymbol{l} \quad . \qquad (4.8)$$

Vyrovnané hodnoty neznámých dostaneme jako součet přibližných hodnot a jejich přírustků, což se vyjádří v maticové podobě následovně:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{o}} + \delta\boldsymbol{x} \quad . \qquad (4.9)$$

V lineárních funkcích můžeme volit přibližné hodnoty neznámých $\boldsymbol{x}^{o}$ libovolně. Pokud je volíme například rovny nule, budou řešeny přímo neznáme hodnoty $\boldsymbol{x}$.

Kontrolní otázka 4.2:

Jak budou v příkladu 4.2 vypadat všechny v úvahu připadající matice a vektory a zejména maticový zápis přetvořených rovnic oprav ?

Odpověď 4.2

V odpovědi uvedeme v maticovém tvaru jen přetvořené rovnice oprav.

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0{,}211 \\ -0{,}035 \\ +0{,}184 \\ -0{,}245 \\ +0{,}155 \\ -0{,}052 \end{pmatrix} .$$

4.4 Normální rovnice a jejich řešení

V rovnicích oprav jsou neznámými veličinami nejen přírustky δx_j , ale i dosud neurčené opravy v_i Pro odstranění této nejednoznačnosti použijeme opět MNČ, která nalezne ze všech možných řešení takové, pro které bude $\Omega = \sum v^2 = \min$, (případ stejně přesných měření), nebo $\Omega = \sum pv^2 = \min$ v případě různě přesných měření vyjádřených vahami. V maticové podobě jsou tyto vztahy uvedeny v *(2.8)* respektive ve *(2.9)*. Pro nalezení minima položíme první derivaci maticové funkce *(2.8)* s uvážením vztahu *(4.7)* rovnu nule (nulovému vektoru)

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \delta \boldsymbol{x}} = \frac{\partial \boldsymbol{v}^T \boldsymbol{P} \boldsymbol{v}}{\partial \delta \boldsymbol{x}} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \delta \boldsymbol{x}^T} \right)^T 2\boldsymbol{P}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}^T 2\boldsymbol{P}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} .$$

Po jednoduché úpravě můžeme psát tzv. *normální rovnice ve zkráceném tvaru*,

$$\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{P}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} , \qquad (4.10)$$

které mají při výpočtu kontrolní funkci, která bude objasněna později.

Dosadíme-li nyní do vztahu *(4.10)* vztah *(4.7)* obdržíme

$$\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{P}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}\delta\boldsymbol{x} + \boldsymbol{l}') = \boldsymbol{0}$$

a z toho

$$\boxed{\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\delta\boldsymbol{x} + \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{P}\boldsymbol{l}' = \boldsymbol{0} \qquad . \qquad (4.11)}$$

Systém *(4.11)* se nazývá *systémem normálních rovnic* a jeho stěžejní vlastností je, že minimalizuje kvadratickou formu Ω, neboli zajišťuje splnění podmínky MNČ.

Zavedeme-li dále označení:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{P}\boldsymbol{A} &= \boldsymbol{N} \\ \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{P}\boldsymbol{l}' &= \boldsymbol{y} \end{aligned} \quad , \qquad (4.12)$$

obdržíme *normální rovnice* ve tvaru

$$\boldsymbol{N}\delta\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{0} \quad . \qquad (4.13)$$

Normální rovnice vytváří lineární systém rovnic, jehož řešení lze nalézt více způsoby (Gaussovou eliminační metodou, Choleského metodou, orogonalizačními metodami, iteračními metodami aj.) Nejčastější je použití *inverzní matice* $\boldsymbol{N}^{-1}$ k matici koeficientů normálních rovnic $\boldsymbol{N}$:

$$\delta\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{y} = -\left(\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\right)^{-1} \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{P}\boldsymbol{l}' \qquad (4.14)$$

Neznámé hodnoty $\boldsymbol{x}$ pak lze vypočítat ze vztahu *(4.9)*

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{o}} + \delta\boldsymbol{x} \quad .$$

Odvození a sestavení normálních rovnic v klasické podobě lze nalézt v [2]. Normální rovnice *(4.11)* či *(4.13)* budou mít v rozepsané podobě tvar:

$$\begin{aligned} &\left(\sum paa\right)\delta x_1 + \left(\sum pab\right)\delta x_2 + \ldots + \left(\sum pak\right)\delta x_k + \left(\sum pal'\right) = 0 \\ &\left(\sum pba\right)\delta x_1 + \left(\sum pbb\right)\delta x_2 + \ldots + \left(\sum pbk\right)\delta x_k + \left(\sum pbl'\right) = 0 \\ &\quad\vdots \\ &\left(\sum pka\right)\delta x_1 + \left(\sum pkb\right)\delta x_2 + \ldots + \left(\sum pkk\right)\delta x_k + \left(\sum pkl'\right) = 0 \end{aligned} \quad . \qquad (4.15)$$

Na několika následujících ukázkách bude objasněn způsob sestavování sumačních členů v systému *(4.15)*:

$$\begin{aligned} &\sum paa = p_1 a_1 a_1 + p_2 a_2 a_2 + \ldots + p_n a_n a_n = p_1 a_1{}^2 + p_2 a_2{}^2 + \ldots + p_n a_n{}^2 = [paa] \\ &\sum pab = p_1 a_1 b_1 + p_2 a_2 b_2 + \ldots + p_n a_n b_n = \sum pba = [pab] \\ &\sum pal' = p_1 a_1 l_1' + p_2 a_2 l_2' + \ldots + p_n a_n l_n' = [pal'] \end{aligned}$$

atd.

Označení součtových členů malými hranatými závorkami zavedl slavný německý matematik *C.F. Gauss* a ve vyrovnávacím počtu se vžilo. V současné době se však od něho již opouští, neboť se se ve stále větší míře používá maticového zápisu. Ve starší symbolice budou normální rovnice *(4.15)* psány ve tvaru:

$$\begin{aligned} &[paa]\delta x_1 + [pab]\delta x_2 + \ldots + [pak]\delta x_k + [pal'] = 0 \\ &[pab]\delta x_1 + [pbb]\delta x_2 + \ldots + [pbk]\delta x_k + [pbl'] = 0 \\ &\quad\vdots \\ &[pak]\delta x_1 + [pbk]\delta x_2 + \ldots + [pkk]\delta x_k + [pkl'] = 0 \end{aligned} \qquad (4.16)$$

Kontrolní otázky 4.3:

a) *Jak bude vypadat v rozepsaném tvaru matice koeficientů normálních rovnic, označená* $\boldsymbol{N}=\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{PA}$?

b) *Jak bude vypadat v rozepsaném tvaru vektor absolutních členů* $\boldsymbol{y}$?

c) *Jak bude matice koeficientů normálních rovnic vypadat, když budou všechna měření stejně přesná, což znamená, že matici vah* $\boldsymbol{P}$ *nahradí matice jednotková* $\boldsymbol{I}$?

Odpověď 4.3:

a) $$\boldsymbol{N}=\begin{pmatrix}[paa] & [pab] & \cdots & [pak]\\ [pab] & [pbb] & \cdots & [pbk]\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ [pak] & [pbk] & \cdots & [pkk]\end{pmatrix}, \qquad (4.17)$$

b) $$\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}[pal']\\ [pbl']\\ \vdots\\ [pkl']\end{pmatrix} \qquad (4.18)$$

c) $$\boldsymbol{N}=\begin{pmatrix}[aa] & [ab] & \cdots & [ak]\\ [ab] & [bb] & \cdots & [bk]\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ [ak] & [bk] & \cdots & [kk]\end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}[al']\\ [bl']\\ \vdots\\ [kl']\end{pmatrix} \qquad (4.19)$$

Úkol 4.1:

a) Rozepište do klasické podoby normální rovnice ve zkráceném tvaru *(4.10).*

b) *Roznásobte výraz* $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{PA}$ a ověřte, že se rovná $\boldsymbol{N}$.

Příklad 4.2 - pokračování:

Pokračujme v řešení příkladu 4.2

g) *sestavení normálních rovnic*

Pro sestavení normálních rovnic musíme vypočítat všechny součtové výrazy. S výhodou využijeme skutečnosti, že je systém soustavy symetrický a také, že jsou všechna měření stejně přesná, což znamená, že matice vah bude jednotková $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{I}$. *Doporučuji si vypočítat koeficienty matic ručně i maticově např. v Excelu. Uvedené matice budou mít tvar:*

$$\boldsymbol{N}=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}-0{,}508\\ -0{,}177\\ +0{,}287\end{pmatrix}$$

a představují vlastně lineární systém tří rovnic o třech neznámých, který můžeme přepsat do klasické podoby následovně:

$$
\begin{aligned}
3\delta x + 2\delta y + 1\delta z - 0{,}508 &= 0\\
2\delta x + 4\delta y + 2\delta z - 0{,}177 &= 0\ .\\
1\delta x + 2\delta y + 3\delta z + 0{,}287 &= 0
\end{aligned}
$$

Systém má jednoznačné řešení, neboť se dá ověřit, že jeho determinant soustavy je různý od nuly.

h) Řešení systému normálních rovnic a výpočet neznámých

Řešením soustavy normálních rovnic získáme neznámé přírustky δx, δy, δz. K výpočtu můžeme použít libovolnou metodu řešení systému lineárních rovnic. Výsledky předběžně zaokrouhlíme na desetiny milimetru. Výsledné hodnoty hledaných přírustků jsou:

$\delta x = 0{,}2098\ m,\ \delta y = 0{,}0332\ m,\ \delta z = -0{,}1878\ m$

a vyrovnané délky pak budou:

$x = x^o + \delta x = 140{,}2098m,\ y = y^o + \delta y = 150{,}0332m,\ z = z^o + \delta z = 159{,}8122m.$

Pokud použijeme k řešení inverzní matici, vypočteme neznámé podle (4.14) a (4.9):

$$
\delta\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{y} = -\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} -0{,}508\\ -0{,}177\\ +0{,}287\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} +0{,}50 & -0{,}25 & 0\\ -0{,}25 & +0{,}50 & -0{,}25\\ 0 & -0{,}25 & +0{,}50\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -0{,}508\\ -0{,}177\\ +0{,}287\end{pmatrix}
$$

$$
\delta\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} +0{,}20975\\ +0{,}03325\\ -0{,}18775\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^{0} + \delta\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 140{,}000\\ 150{,}000\\ 160{,}000\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} +0{,}20975\\ +0{,}03325\\ -0{,}18775\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 140{,}2098\\ 150{,}0332\\ 159{,}8122\end{pmatrix}.
$$

V tomto okamžiku by mohl být výpočet ukončen, protože jsme nalezli vyrovnané hodnoty neznámých veličin *x*, *y* a *z* . My se však budeme ještě zabývat výpočtem vyrovnaných měření a charakteristikami přesnosti celého vyrovnání.

4.5 Opravy a jejich kontrola, vyrovnaná měření

Opravy počítáme nezávisle dvakrát. Poprvé z přetvořených rovnic oprav *(4.6)*

$$v_i = a_i\delta x_1 + b_i\delta x_2 + \ldots + k_i\delta x_k + l_i'$$

(v maticové podobě viz *(4.7)* $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}\delta\boldsymbol{x} + \boldsymbol{l}'$),
podruhé z původních rovnic oprav *(4.3)*, tj. jak rozdíl hodnot vyrovnaných minus hodnot naměřených

$$v_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_k) - l_i \quad .$$

Opravy z obou výpočtů musí vzájemně souhlasit, případné malé rozdíly mohou být způsobeny jen zaokrouhlovacími chybami. Oba postupy se liší v tom, že v prvním jsou použity vyrovnané hodnoty δx_j v linearizovaném systému rovnic a ve druhém již vyrovnané neznámé x_j v původních zprostředkujících rovnicích. Případný rozdíl mezi oběma řešeními by mohl být proto způsoben i ne dosti „blízkým“ odhadem přibližných hodnot neznámých. Protože při linearizaci zanedbáváme derivace vyšších řádů, mohly by nepřesné přibližné hodnoty způsobit rozdíl mezi lineárním a nelineárním řešením. Je-li rozdíl obou výpočtů oprav podezřele velký, celý dosavadní výpočet opakujeme s tím, že vyrovnané hodnoty neznámých nyní použijeme jako přibližné hodnoty v tomto opakovaném výpočtu. Jde vlastně o iterační postup, který bývá úspěšný jen tehdy, když opakovaná řešení konvergují.

Výpočet oprav kontrolujeme též pomocí normálních rovnic ve zkráceném tvaru *(4.10)*, které v rozepsaném tvaru budou:

$$\sum pav = 0, \qquad \sum pbv = 0, \quad \ldots\ldots \quad , \sum pkv = 0. \tag{4.20}$$

Rovnice *(3.5)* $\sum v = 0$ a *(3.25)* $\sum pv = 0$, používané při kontrole vyrovnání přímých měření, jsou tedy zjednodušenou variantou rovnice *(4.20)*.

Přičteme-li k jednotlivým měřeným hodnotám l_i jejich opravy v_i , dostaneme vyrovnané hodnoty měřených veličin $\bar{l}_i$:

$$\bar{l}_i = l_i + v_i \quad , \tag{4.21}$$

nebo v maticové podobě vektor vyrovnaných měření obdržíme jako součet vektoru měřených veličin a vektoru oprav:

$$\bar{\boldsymbol{l}} = \boldsymbol{l} + \boldsymbol{v} \ . \tag{4.22}$$

4.6 Charakteristiky přesnosti

Výchozí informací pro odhad přesnosti celého vyrovnání je aposteriorní jednotková střední chyba. Připomeňme, že při vyrovnání přímých měření se určovala ze vztahu *(3.15)*, resp. *(3.28)*. Výraz n - 1 ve jmenovateli obou vzorců vyjadřuje počet nadbytečných veličin. V případě vyrovnání zprostředkujících měření je počet nadbytečných měření roven číslu $n - k$. Vzorec pro výpočet jednotkové střední chyby uvedeme bez odvození. Toto odvození lze nalézt ve řadě učebnic vyrovnávacího počtu např. v [2] nebo [4].

4.6.1 Jednotková střední chyba

V případě, že bychom znaly pravé (skutečné) hodnoty neznámých veličin, vypočítala by se aposteriorní jednotková střední chyba ze vztahu:

$$m_o = \sqrt{\frac{\sum p\varepsilon^2}{n}} \ , \tag{4.20}$$

pro měření s různou přesností, nebo

$$m_o = \sqrt{\frac{\sum \varepsilon^2}{n}} \tag{4.21}$$

pro stejně přesná měření.

Ve většině případů neznáme pravé chyby neznámých, počítáme proto výběrovou *aposteriorní jednotkovou střední chybu(směrodatnou odchylku)*:

$$s_o = \sqrt{\frac{\sum pv^2}{n-k}} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{v}^T \boldsymbol{P}\boldsymbol{v}}{n-k}}\,, \qquad (4.22)$$

pro různě přesná měření a

$$s_o = \sqrt{\frac{\sum v^2}{n-k}} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{v}^T \boldsymbol{v}}{n-k}}\,, \qquad (4.23)$$

pro stejně přesná měření. Připomeňme, že jednotkové střední chyby jsou bezrozměrné veličiny.

4.6.2 Střední chyby měřených veličin

V 3. kapitole byly uvedeny vztahy *(3.20)* mezi váhou a střední chybou jednoho měření. Reciproké hodnoty vah nazýváme *váhovými koeficienty* a označujeme je q_i, přičemž platí $q_i = 1 / p_i$.

Variance (čtverec střední chyby) jednotlivých měření vypočteme:

$$s_i^2 = \frac{s_o^2}{p_i} = s_o^2 q_i$$

a vlastní střední chyby (výběrové směrodatné odchylky)

$$s_i = \frac{s_o}{\sqrt{p_i}} = s_o\sqrt{q_i} \quad . \qquad (4.24)$$

Váhy jsme již dříve uspořádali do diagonální matice vah $\boldsymbol{P}$. Nyní můžeme vytvořit *matici váhových koeficientů* $\boldsymbol{Q}$ (též se nazývá *matice kofaktorů*) jako inverzní matici k matici vah (a naopak).

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{P}^{-1}, \qquad \boldsymbol{P} = \boldsymbol{Q}^{-1} \qquad (4.25)$$

V maticové podobě budou výběrové variance měřených veličin ležet na diagonále *kovarianční matice měřených veličin* $\boldsymbol{S}_l$

$$\boldsymbol{S}_l = s_o^2 \boldsymbol{P}^{-1} = s_o^2 \boldsymbol{Q} \quad , \qquad (4.26)$$

kde

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_n \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} q_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & q_n \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{S}_l = \begin{pmatrix} s_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & s_n^2 \end{pmatrix}.$$

Pokud není aposteriorní jednotková střední chyba s_o určena dostatečně spolehlivě (je určena z malého počtu nadbytečných měření), nahrazujeme ji ve vzorcích *(4.24)* a *(4.26)* apriorní jednotkovou střední chybou $\overline{m_o}$.

4.6.3 Střední chyby neznámých

Z předcházejících výpočtů obdržíme jako hlavní výsledek vyrovnané hodnoty neznámých parametrů x_1 , x_2 , ... , x_k a samozřejmě nás zajímá, jakou mají tyto parametry přesnost ? Lineární zobrazení, které nám popisuje vztah mezi měřenými veličinami $\boldsymbol{l}$ (a také $\boldsymbol{l'}$) a neznámými parametry $\boldsymbol{x}$ (a také $\delta\boldsymbol{x}$) je podle *(4.14)*vyjádřeno rovnicí :

$$\delta\boldsymbol{x} = -\left(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{PA}\right)^{-1}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{Pl'} = -\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{Pl'} = \boldsymbol{Hl'} \quad ,$$

kde označíme $\boldsymbol{H} = -\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}$. Přesnost jednotlivých měření je vyjádřena jejich vahami, resp. maticí vah $\boldsymbol{P}$. Na uvedený vztah aplikujeme zákon hromadění váhových koeficientů (podrobnosti viz. modul Měřické chyby)

$$\boldsymbol{Q}_x = \boldsymbol{HP}^{-1}\boldsymbol{H}^T = (-\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P})\boldsymbol{P}^{-1}(-\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P})^T = \boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{PP}^{-1}\boldsymbol{PAN}^{-1} .$$

Uvážíme-li dále, že $\boldsymbol{PP}^{-1} = \boldsymbol{I}$ a podle *(4.12)* $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{PA} = \boldsymbol{N}$, bude

$$\boldsymbol{Q}_x = \boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{PAN}^{-1} = \boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{NN}^{-1} = \boldsymbol{N}^{-1} . \qquad (4.27)$$

Odvodili jsme důležitý vztah z kterého vyplývá, že $\boldsymbol{Q}_x$ jako matice váhových koeficientů (kofaktorů) neznámých se rovná inverzní matici koeficientů normálních rovnic $\boldsymbol{N}^{-1}$. Označení prvků je zřejmé z následujícího rozepsání této matice

$$Q_x = \begin{pmatrix} Q_{x_1x_1} & Q_{x_1x_2} & \cdots & Q_{x_1x_k} \\ Q_{x_2x_1} & Q_{x_2x_2} & \cdots & Q_{x_2x_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{x_kx_1} & Q_{x_kx_2} & \cdots & Q_{x_kx_k} \end{pmatrix},$$

Kovarianční matici neznámých pak dostaneme vynásobením matice kofaktorů jednotkovou variancí

$$\boldsymbol{S}_x = s_o^2\boldsymbol{Q}_x \quad . \qquad (4.28)$$

Označení prvků této matice je následují

$$\boldsymbol{S}_x = \begin{pmatrix} s_o^2Q_{x_1x_1} & s_o^2Q_{x_1x_2} & \cdots & s_o^2Q_{x_1x_k} \\ s_o^2Q_{x_2x_1} & s_o^2Q_{x_2x_2} & \cdots & s_o^2Q_{x_2x_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_o^2Q_{x_kx_1} & s_o^2Q_{x_kx_2} & \cdots & s_o^2Q_{x_kx_k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{x_1}^2 & s_{x_1x_2} & \cdots & s_{x_1x_k} \\ s_{x_2x_1} & s_{x_2}^2 & \cdots & s_{x_2x_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{x_kx_1} & s_{x_kx_2} & \cdots & s_{x_k}^2 \end{pmatrix}.$$

Na diagonále této matice jsou variance jednotlivých neznámých a na nediagonálních prvcích jejich kovariance. Protože matice $\boldsymbol{N}$ je symetrická, jsou symetrické i matice $\boldsymbol{N}^{-1}$, $\boldsymbol{Q}_x$ a $\boldsymbol{S}_x$.

Střední chyby neznámých dostaneme odmocněním diagonálních prvků matice $\boldsymbol{S}_x$, nebo přímo využitím diagonálních kofaktorů a jednotkové střední chyby:

$$s_{x_j} = \sqrt{s_{x_j}^2} = s_o \sqrt{Q_{x_j x_j}} \quad . \tag{4.29}$$

4.6.4 Střední chyby funkcí neznámých

Pokud vyrovnané neznámé veličiny vstupují do dalších funkčních vztahů, nelze je již považovat za vzájemně nezávislé (byly vypočítány v rámci společného vyrovnání) a při odhadech charakteristik přesnosti z nich počítaných, musíme brát v úvahu tuto závislost. Dále budou bez důkazů uvedeny některé další vzorce pro výpočet charakteristik přesnosti:

Střední chyby vyrovnaných měření

Přičtením oprav k naměřeným hodnotám se tyto již stávají vzájemně závislými. Matice váhových koeficientů vyrovnaných měření a jejich kovarianční matici lze potom vypočítat podle

$$\boldsymbol{Q}_{\bar{l}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_x\boldsymbol{A}^T , \quad \boldsymbol{S}_{\bar{l}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{S}_x\boldsymbol{A}^T , \tag{4.30}$$

kde matice $\boldsymbol{A}$ je matice parciálních derivací zprostředkujících funkcí (matice plánu), neboť $\bar{\boldsymbol{l}} = \boldsymbol{l} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}^T\right)$. Kovarianční matice v rozepsaném tvaru:

$$\boldsymbol{S}_{\bar{l}} = \begin{pmatrix} s_o^2 Q_{\bar{l}_1\bar{l}_1} & s_o^2 Q_{\bar{l}_1\bar{l}_2} & \cdots & s_o^2 Q_{\bar{l}_1\bar{l}_n} \\ s_o^2 Q_{\bar{l}_2\bar{l}_1} & s_o^2 Q_{\bar{l}_2\bar{l}_2} & \cdots & s_o^2 Q_{\bar{l}_2\bar{l}_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_o^2 Q_{\bar{l}_n\bar{l}_1} & s_o^2 Q_{\bar{l}_n\bar{l}_2} & \cdots & s_o^2 Q_{\bar{l}_n\bar{l}_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{\bar{l}_1}^2 & s_{\bar{l}_1\bar{l}_2} & \cdots & s_{\bar{l}_1\bar{l}_n} \\ s_{\bar{l}_2\bar{l}_1} & s_{\bar{l}_2}^2 & \cdots & s_{\bar{l}_2\bar{l}_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{\bar{l}_n\bar{l}_1} & s_{\bar{l}_n\bar{l}_2} & \cdots & s_{\bar{l}_n}^2 \end{pmatrix},$$

Obdobně jako v *(4.29)* lze střední chyby vyrovnaných měření vypočítat ze vztahů *(4.30)*.

Střední chyby oprav

Pokud je některá oprava větší než jsme očekávali, může to signalizovat hrubou chybu v měření. Takové měření by bylo žádoucí z vyrovnání vyřadit a celý výpočet opakovat. Vylučování měření s většími opravami bychom neměli dělat bez znalosti jejich přesnosti (středních chyb oprav). Ty se určí z jejich kovarianční matice $\boldsymbol{S}_v$, která se vypočítá podle :

$$\boldsymbol{Q}_v = \boldsymbol{P}^{-1} - \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{P}^{-1} - \boldsymbol{Q}_{\bar{l}} , \quad \boldsymbol{S}_v = s_o^2\boldsymbol{Q}_v \tag{4.31}$$

Střední chyby funkcí neznámých

Obdobně řešíme výpočet charakteristik přesností funkcí neznámých parametrů

$$\boldsymbol{Q}_f = \boldsymbol{F}\boldsymbol{Q}_x\boldsymbol{F}^T , \quad \boldsymbol{S}_f = \boldsymbol{F}\boldsymbol{S}_x\boldsymbol{F}^T , \qquad (4.32)$$

kde matice $\boldsymbol{F}$ je matice parciálních derivací těchto funkcí podle jednotlivých vyrovnaných neznámých. Takovým případem jsou i rovnice *(4.30)*, ve kterých matice $\boldsymbol{A}$ je maticí parciálních derivací zprostředkujících funkcí, definující vztah mezi vyrovnanými měřeními a vyrovnanými neznámými.

Příklad 4.2 - pokračování:

Pokračujeme dále v řešení příkladu 4.2

i) výpočet oprav a výpočet vyrovnaných měření

První výpočet oprav bude z přetvořených rovnic oprav (4.6). Podruhé je vypočítáme z původních rovnic oprav (4.3). Oba výpočty se mírně liší v důsledku zaokrouhlení vyrovnaných neznámých na desetiny milimetru.

i	${}^1v_i$ [m]	${}^2v_i$ [m]	l_i [m]	$\bar{l}_i = l_i + v_i$ [m]
1	- 0,00125	- 0,0012	140,211	140,2098
2	- 0,00175	- 0,0018	150,035	150,0332
3	- 0,00378	- 0,0038	159,816	159,8122
4	- 0,00200	- 0,0020	290,245	290,2430
5	+ 0,00050	+ 0,0005	309,845	309,8455
6	+ 0,00325	+ 0,0032	450,052	450,0552

Ke kontrole oprav můžeme použít také normální rovnice ve zkráceném tvaru, které se mají přesně rovnat nule (rozdíl je opět způsoben zaokrouhlením)

$$\sum pav = 0{,}0000 \ , \quad \sum pbv = -0{,}0001 \ , \quad \sum pcv = -0{,}0001 \ .$$

j) výpočet charakteristik přesnosti

jednotková střední chyba

$$s_o = \sqrt{\frac{\sum v^2}{n-k}} = \sqrt{\frac{0{,}0000335}{6-3}} = \sqrt{\frac{0{,}0000335}{3}} = 0{,}00334 \ ,$$

střední chyby jednotlivých měření

Vzhledem k tomu, že neznáme základní střední chybu, použijeme v dalších výpočtech její aposteriorní odhad s_o. Všechna měření jsou stejně přesná a proto budou mít stejnou střední chybu s_i.

$$s_i = \frac{s_o}{\sqrt{p_i}} = s_o\sqrt{q_i} = \frac{0{,}00334}{\sqrt{1}} = 0{,}00334\,\mathrm{m} = 3{,}3\,\mathrm{mm} \ .$$

střední chyby neznámých

vypočteme s využitím matice váhových koeficientů $\boldsymbol{Q}_x$

$$s_{x_j} = s_o \sqrt{Q_{x_j x_j}}\ ,$$

$$kde \quad \boldsymbol{Q}_x = \boldsymbol{N}^{-1} = \begin{pmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xz} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{yz} \\ Q_{zx} & Q_{zy} & Q_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +0{,}50 & -0{,}25 & 0 \\ -0{,}25 & +0{,}50 & -0{,}25 \\ 0 & -0{,}25 & +0{,}50 \end{pmatrix},$$

$$s_x = s_o \sqrt{Q_{xx}} = 0{,}00334\sqrt{0{,}50} = 0{,}0024\,\text{m} = 2{,}4\,\text{mm},$$

$$s_y = s_o \sqrt{Q_{yy}} = 0{,}00334\sqrt{0{,}50} = 0{,}0024\,\text{m} = 2{,}4\,\text{mm},$$

$$s_z = s_o \sqrt{Q_{zz}} = 0{,}00334\sqrt{0{,}50} = 0{,}0024\,\text{m} = 2{,}4\,\text{mm}.$$

střední chyby vyrovnaných měření

můžeme vypočítat z matice jejich váhových koeficientů (4.30). V tomto případě však můžeme místo toho využít skutečnosti, že všechna měření jsou stejně přesná a že první tři měřené veličiny byly voleny za neznámé, jejichž přesnosti již nyní po vyrovnání známe.

$$s_{\bar{l}_1} = s_{\bar{l}_2} = \dots = s_{\bar{l}_6} = s_x = s_y = s_z = 2{,}4\,\text{mm}\,.$$

Pro úplnost tuto matici rovněž uvedeme

$$\boldsymbol{Q}_{\bar{l}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_x\boldsymbol{A}^T = \begin{pmatrix} 0{,}50 & -0{,}25 & 0 & 0{,}25 & -0{,}25 & 0{,}25 \\ -0{,}25 & 0{,}50 & -0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}25 & 0 \\ 0 & -0{,}25 & 0{,}50 & -0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}25 \\ 0{,}25 & 0{,}25 & -0{,}25 & 0{,}50 & 0 & 0{,}25 \\ -0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}25 & 0 & 0{,}50 & 0{,}25 \\ 0{,}25 & 0 & 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}50 \end{pmatrix}.$$

k) přehled výsledků k příkladu 4.2

- *počet měření* $n = 6$, *počet neznámých* $k = 3$,

  počet nadbytečných měření $r = 3$.

- *aposteriorní střední jednotková chyba*

  $s_0 = 0{,}00334$

- *měřené veličiny a jejich přesnost*

  $l_1 \pm s_{l_1} = 140{,}211\,\text{m} \pm 3{,}3\,\text{mm}, \quad l_4 \pm s_{l_4} = 290{,}245\,\text{m} \pm 3{,}3\,\text{mm},$

  $l_2 \pm s_{l_2} = 150{,}035\,\text{m} \pm 3{,}3\,\text{mm}, \quad l_5 \pm s_{l_5} = 309{,}845\,\text{m} \pm 3{,}3\,\text{mm},$

  $l_3 \pm s_{l_3} = 159{,}816\,\text{m} \pm 3{,}3\,\text{mm},. \quad l_6 \pm s_{l_6} = 450{,}052\,\text{m} \pm 3{,}3\,\text{mm}$

  Přesnost měřených veličin jsme před vyrovnáním neznali, jen jsme předpokládali, že byly určeny se stejnou přesností.

- *vyrovnané měřené veličiny a jejich přesnost:*

$\bar{l}_1 \pm s_{\bar{l}_1} = 140{,}210\ \text{m} \pm 2{,}4\ \text{mm},\quad \bar{l}_4 \pm s_{\bar{l}_4} = 290{,}243\ \text{m} \pm 2{,}4\ \text{mm},$

$\bar{l}_2 \pm s_{\bar{l}_2} = 150{,}033\ \text{m} \pm 2{,}4\ \text{mm},\quad \bar{l}_5 \pm s_{\bar{l}_5} = 309{,}845\ \text{m} \pm 2{,}4\ \text{mm},$

$\bar{l}_3 \pm s_{\bar{l}_3} = 159{,}812\ \text{m} \pm 2{,}4\ \text{mm},\quad \bar{l}_6 \pm s_{\bar{l}_6} = 450{,}055\ \text{m} \pm 2{,}4\ \text{mm}.$

- ***vyrovnané neznámé veličiny a jejich přesnost:***

$x \pm s_x$ = 140,210 m ± 2,4 mm,

$y \pm s_y$ = 150,033 m ± 2,4 mm,

$z \pm s_z$ = 159,812 m ± 2,4 mm.

Vyrovnané veličiny byly zaokrouhleny na milimetry vzhledem k velikosti jejich středních chyb.

Poznámka k příkladu 4.2 : Při podrobnějším studiu výsledků vyrovnání vznikne podezření, že měřené veličiny jsou zatíženy nějakou systematickou chybou. Důvodem k vyslovení této hypotézy je převaha záporných oprav nad kladnými opravami. Problematice bude věnován samostatný úkol.

Kontrolní otázky 4. 4

?

a) Jak bude vypadat přetvořená rovnice oprav pro měřenou délku v příkladu 4.1 ? Připomínáme, že koeficienty rovnic oprav budou parciální derivace zprostředkujících funkcí. V tomto případě je zprostředkující funkcí Pythagorova věta.

b) Mají koefienty matice plánu obecně nějaký rozměr ?

c) Jak se vypočítá koeficient na čtvtém řádku a ve třetím sloupci matice normálních rovnic ?

d) Jak bude vypadat prvek téže matice z otázky b), který se nachází na třetím řádku a ve čtvtém sloupci ?

e) Kolik prvků matice koeficientů normálních rovnic musíme vypočítat při jejím sestavení v případě, že k = 5 ?

f) Mohou mít jednotlivé prvky matice koeficientů normálních rovnic libovolné znaménko ?

g) Musíme znát před každým vyrovnáním apriorní jednotkovou střední chybu ?

h) Je postup vyrovnání zprostředkujících měření použitelný pro případ, že k = n ?

i) Jaký je vztah mezi libovolným prvkem kovarianční matice a příslušnou směrodatnou odchylkou ?

j) K čemu nám mohou být dobré nediagonální prvky v maticích váhových koeficientů či v kovariančních maticích ?

Odpovědi na tyto otázky jsou uvedeny v klíči

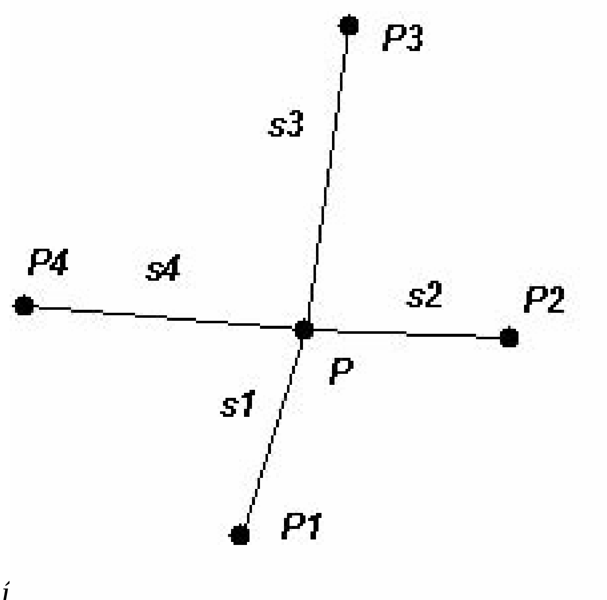
4.7 Příklady

Příklad 4.3: *Vyrovnání souřadnic bodu z měřených délek*

Dány jsou rovinné souřadnice bodů P_1, P_2, P_3 a P_4. Pro určení souřadnic bodu P byly změřeny délky s_1, s_2, s_3 a s_4 - viz obr 4.2. Předpokládáme stejnou přesnost u všech čtyř měřených délek. Souřadnice bodů považujeme za bezchybné. Příklad je s menšími úpravami převzat z [2].

Zadané souřadnice bodů a naměřené délky jsou sestaveny do společné tabulky:

Bod	X [m]	Y [m]	s_i [m]
P_1	5 327 496,58	3 494 487,38	10 337,583
P_2	5 335 513,94	3 496 354,59	9 047,662
P_3	5 351 803,14	3 489 629,12	17 009,573
P_4	5 333 492,51	3 468 326,91	19 053,527



Obrázek 4.2 Schema měření

Řešení příkladu 4.3:

a) Volba neznámých a určení počtu nadbytečných měření:

Neznámými budou souřadnice X a Y nově urřovaného bodu P,

tzn. $k = 2$, $n = 4$, $r = n - k = 2$

b) Sestavení zprostředkujících funkcí:

Pro každou měřenou veličinu sestavíme zprostředkující funkci ve tvaru $S_i = f_i(X,Y) = \sqrt{(X - X_i)^2 + (Y - Y_i)^2}$ *. Tyto rovnice budou celkem čtyři.*

c) Původní rovnice oprav

$v_i = \sqrt{(x - X_i)^2 + (y - Y_i)^2} - s_i$. *Rovněž tyto rovnice budou čtyři.*

d) Výpočet přibližných hodnot pro neznámé x, y

Přibližné hodnoty byly vypočteny z protínání z délek s_1 , s_2 a mají hodnoty

x^o= 5 334 950,36 m , y^o = 3 487 324,50 m .

e) Výpočet parciálních derivací a přibližných hodnot měřených veličin

i	$a_i = \dfrac{\partial f_i}{\partial x}$	$b_i = \dfrac{\partial f_i}{\partial y}$	s_i^o [m]	$l_i' = s_i^o - s_i$ [m]
1	+ 0,7210	- 0,6929	10 337,586	+ 0,003
2	-0,0623	- 0,9981	9 047,660	- 0,002
3	- 0,9908	- 0,1355	17 009,629	+ 0,056
4	+ 0,0765	+ 0,9971	19 053,445	- 0,082

f) Přetvořené rovnice oprav

Přetvořené rovnice oprav budou mít obecně tvar

$$v_i = \left(\frac{x^o - X_i}{s_i^o}\right)\delta x + \left(\frac{y^o - Y_i}{s_i^o}\right)\delta y + \left(s_i^o - s_i\right) = a_i \delta x + b_i \delta y + l_i' \ .$$

Výrazy v závorkách jsou parciální derivace zprostředkujících funkcí. Jejich číselné hodnoty jsou uvedeny v předcházející tabulce.

g) Normální rovnice

$$\boldsymbol{N}\delta\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}, \qquad \boldsymbol{N} = \begin{pmatrix} +1,5113 & -0,2269 \\ -0,2269 & +2,4887 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} -0,0591 \\ -0,0896 \end{pmatrix}$$

h) výpočet neznámých

$$\delta\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{y}, \qquad \boldsymbol{N}^{-1} = \begin{pmatrix} +0,6709 & +0,0612 \\ +0,0612 & +0,4074 \end{pmatrix}, \qquad \delta\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} +0,045 \\ +0,040 \end{pmatrix} \ .$$

$x = x^o + \delta x$ = 5 334 950,405 m , $y = y^o + \delta y$ = 3 487 324,540 m

i) výpočet oprav

i	${}^1v_i$ [m]	${}^2v_i$ [m]	s_i [m]	$\bar{s}_i = s_i + v_i$ [m]
1	+ 0,008	+ 0,008	10 337,583	10 337,591
2	- 0,045	- 0,045	9 047,662	9 047,617
3	+ 0,006	+ 0,006	17 009,573	17 009,579
4	- 0,039	- 0,039	19 053,527	19 053,488

j) charakteristiky přesnosti

jednotková střední chyba

$$s_o = \sqrt{\frac{\sum v^2}{n-k}} = \sqrt{\frac{0,00365}{4-2}} = \sqrt{\frac{0,00365}{2}} = 0,0427$$

střední chyba jednotlivých měření (jsou stejně přesná)

$$s_i = \frac{s_0}{\sqrt{p_i}} = s_0\sqrt{q_i} = \frac{0{,}0427}{\sqrt{1}} = 0{,}043\,\mathrm{m}\ .$$

střední chyby neznámých

$$s_x = s_o\sqrt{Q_{xx}} = 0{,}0427\sqrt{0{,}6709} = 0{,}035\,\mathrm{m}$$
$$s_y = s_o\sqrt{Q_{yy}} = 0{,}0427\sqrt{0{,}4074} = 0{,}027\,\mathrm{m}$$

Výpočet dalších charakteristik ponecháme již na čtenáři.

Výsledek vyrovnání

Souřadnice bodu P

x = (5 334 950,41 ± 0,035) m , y = (3 487 324,54 ± 0,027) m .

Příklad 4.4:

Vypočítejte vyrovnáním zprostředkujících měření příklad 3.2 ze strany 24.

Uvedený příklad je na vyrovnání přímých měření různé přesnosti.

Zprostředkující rovnice budou mít tvar: $L_1 = X$, $L_2 = X$, $L_3 = X$.

Rovnice oprav v původním tvaru budou: $v_1 = x - l_1$, $v_2 = x - l_2$, $v_3 = x - l_3$

Zvolíme přibližnou hodnotu x^o = 348,54 m *a vypočítáme absolutní členy* l'*, které mají opačné znaménko než hodnoty* δ *v příkladu 3.2.*

$$l_1' = x^o - l_1 = -0{,}08m,\quad l_2' = x^o - l_2 = 0{,}00m, ..\, l_3' = x^o - l_3 = -0{,}03m,$$

Přetvořené rovnice oprav a matice vah

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}\delta\boldsymbol{x} + \boldsymbol{l}' = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\delta\boldsymbol{x} + \begin{pmatrix} -0{,}09 \\ 0{,}00 \\ -0{,}03 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0{,}17 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}69 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}31 \end{pmatrix}.$$

Normální rovnice a jejich řešení

$$\boldsymbol{N}\delta\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{0},\qquad \boldsymbol{N} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{PA} = (1{,}17) = \sum p,\qquad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{Pl}' = (-0{,}0229) = \sum pl'$$
$$\delta\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{y} = \text{-}(1{,}17)^{-1}.(\text{-}0{,}0229) = -(0{,}885).(\text{-}0{,}0229) = +0{,}020\,\mathrm{m}\ ,$$

$x = x^o + \delta x$ = 384,54 +0,020 = 384,560 m.

Výsledek je totožný s řešením příkladu 3.2. Charakteristiky přesnosti si již čtenář laskavě dopočítá sám.

Příklad 4.4

V příkladu 4.2 jsme se pokusili odhadnout přesnost dálkoměru na testovací základně. Testovací (srovnávací) základny mají délky obvykle určeny s vyšší přesností (z dlouhodobějších měření nebo z měření přesnější metodou). Tyto hodnoty můžeme považovat za hodnoty skutečné. V našem příkladě jsou skutečné délky základny rovny:

X = 140,2082 m , Y = 150,0297 m, Z = 159,8103 m .

Jak se vypočítá přesnost dálkoměru nyní ? Na tuto otázku je snadná odpověď. Pro výpočet střední chyby dálkoměru použijeme (4.21), do kterého dosadíme skutečné chyby. Skutečné chyby všech šesti měřených délek vypočítáme jako rozdíl skutečné hodnoty a naměřené hodnoty :

$\varepsilon_1 = X - l_1 = -2{,}8$ mm, $\varepsilon_2 = Y - l_2 = -5{,}3$ mm , ... , $\varepsilon_6 = X+Y+Z - l_6 = -3{,}8$ mm.

Naše podezření vyslovené v příkladu 4.2, že působí nějaká systematická chyba se potvrdilo. Skutečné chyby jsou všechny záporné, to znamená, že naměříme vždy delší hodnoty (v průměru asi o 5 mm). Vypočítejte jednotkovou střední chyby podle vzorce (4.21) a střední chyby jednotlivých měření podle (4.24). Všechny chyby budou číselně stejné.

Příklad 4.5: *Určení systematické chyby dálkoměru*

V příkladu 4.2 byl kontrolován dálkoměr na testovací základně tvořené čtyřmi body. Podle velikosti a znamének oprav jsme usoudili, že by jednotlivá měření mohla být zatížena nějakou systematickou chybou. Příklad 4.4 nás o tom přesvědčil. Můžeme určit tuto systematickou chybu bez znalosti skutečných délek základny ?

Vytvoříme hypotézu, že se jedná o zatím neurčenou konstantu hranolu (další neznámou v systému zprostředkujících rovnic). Předpokládejme, že konstanta hranolu, jejíž pravou hodnotu označíme např. W, zatíží každou měřenou délku stejně. Upozorňuji, že v tomto případě bude $k = 2$.

Zprostředkující funkce budou mít tvar

$L_1 = f_1(X, Y, Z, W) = X + W$, $\qquad L_4 = f_4(X, Y, Z, W) = X + Y + W$,

$L_2 = f_2(X, Y, Z, W) = Y + W$, $\qquad L_5 = f_5(X, Y, Z, W) = Y + Z + W$,

$L_3 = f_3(X, Y, Z, W) = Z + W$, $\qquad L_6 = f_6(X, Y, Z, W) = X + Y + Z + W$.

*Matice plánu **A** bude rozšířena o čtvrtý sloupec*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Úkol 4.2:

Dopočítejte příklady 4.4 a 4.5 a odhadněte nejen konstantu hranolu *w* , ale i jednotlivé charakteristiky přesnosti. Před vlastním výpočtem se pokuste velikost konstanty hranolu odhadnout od oka, jednak přímo z měřených dat, jednak z výsledných oprav v tabulce na str. 48. Výsledky z řešení tohoto příkladu 4.5 si porovnejte s výsledky z příkladu 4.2.

Závěrem se pokuste sami sobě odpovědět na následující otázku. Jak vlastně měří přesně váš dálkoměr ?

Můžeme vyslovit řadu dalších hypotéz, např. zpochybníme předpoklad, že přesnost dálkoměru nezávisí na měřené délce. Vyrovnávací počet nám poskytuje jen kvalitní matematický nástroj. Jaký zvolíme výpočetní postup (hypotézu) a jak kvalitní data do výpočtu vložíme, záleží jen na nás.

5 Závěr

5.1 Shrnutí

Tento studijní text je již druhým modulem zajišťujícím předmět **Teorie chyb a vyrovnávací počet I**. Studijní text **Základní druhy vyrovnání – 1. část** seznamuje studenta se základní úlohou vyrovnávacího počtu a sice **vyrovnáním zprostředkujících měření**. Tomuto druhu vyrovnání je věnována až čtvrtá kapitola. Předcházející třetí kapitola, zabývající se **vyrovnáním přímých měření,** je vlastně jednoduchým případem (variantami) vyrovnání zprostředkujících měření. Má pomoci studentovi postupně proniknout do odborné terminologie, takže vlastní pochopení textu by již nemuselo být tak obtížné. Obě druhy vyrovnání vycházejí z **metody nejmenších čtverců oprav**, která je stručně uvedena v 2. kapitole. Doporučuji, aby se student po prostudování 4. kapitoly vrátil k předcházejícím dvěma kapitolám a pokusil se pochopit a interpretovat předložený text a příklady z pohledu znalostí vyrovnání zprostředkujících měření. Na tento modul by měl navazovat modul Základní druhy vyrovnání – 2. část, který zpracovává **vyrovnání podmínkových měření**, které patří s oběma předcházejícími do skupiny základních druhů vyrovnání. Obsahově je však již zařazen do předmětu Teorie chyb a vyrovnávací počet II.

Studium teorie vyrovnání není možné bez praktických příkladů. Bohužel úspornost této formy výkladu neumožňuje uvést více konkrétních příkladů a variant řešení. Zde musím bohužel studenta odkázat na některé sbírky příkladů a studijní texty. Rozsah textu rovněž neumožňuje věnovat se některým specifickým otázkám podrobněji. Řada méně významnějších informací musela být z textu vypuštěna. Čtenáře proto odkazuji na některé učebnice a odborné texty.

5.2 Studijní prameny

5.2.1 Seznam použité literatury

[1] Hampacher, M.- Radouch V.: *Teorie chyb a vyrovnávací počet 10* skripta Vydavatelství ČVUT , Praha 1997, 159 stran,

[2] Chmelík, M.:*Vyrovnávací počet – Přehled vyrovnání metodou nejmenších čtverců,* skripta Vojenská akademie, Brno 1996, 14 stran.

[3] Vykutil, J.: *Teorie chyb a vyrovnávací počet*, skripta ES VUT, Brno 1988, 309 stran.

[4] Wolf, P.R. Ghilani, - Ch.D.:*Adjustment Computations – Statistics and Least Squares in Surveying and GIS,* John Wiley & Sohn, Inc. , 1997, 564 pp.

5.2.2 Seznam doplňkové studijní literatury

[5] Hampacher, M.- Radouch V.: *Teorie chyb a vyrovnávací počet (příklady a návody ke cvičením),* skripta Vydavatelství ČVUT , Praha 1995, 164 stran

[6] Koch, K. R.: *Parameter Estimation and Hypothesis Testing in Linear Models.* Springer 1999, 333 pp.

[7] Koutková, H. – Moll,I.:*Úvod do pravděpodobnosti a matematické statistiky*, skripta CERM, Brno 2000, 192 stran.

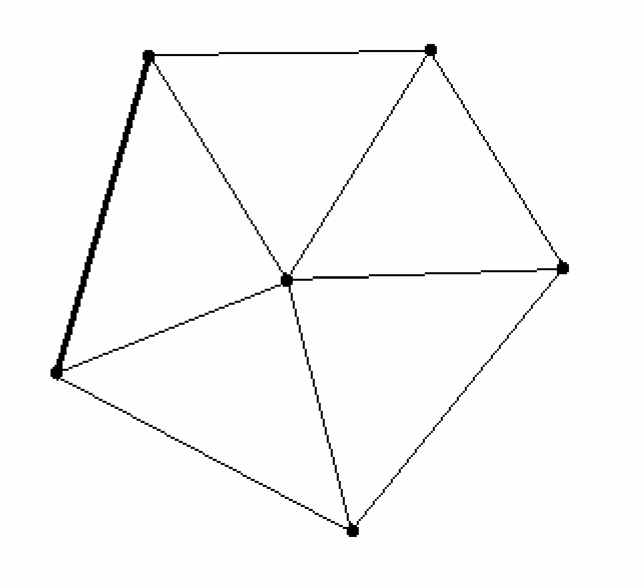
[8] Koutková, H. – Dlouhý, O.: Sbírka příkladů z pravděpodobnosti a matematické statistiky, skripta CERM, Brno 2001, 58 stran.

[9] Wolf, H.: *Ausgleichungsrechnung, Formeln zur praktishen Anwendung,* Dűmmler Bonn, 1975

[10] Wolf, H.: *Ausgleichungsrechnung II, Aufgaben und Beispiele zur praktishen Anwendung,* Dűmmler Bonn, 1979

5.3 Autotest

5.1 Kolik je nutných měření (k = ?) a kolik nadbytečných měření (r = ?) v rovinném obrazci tvořeném pěti trojúhelníky s jedním centrálním bodem (obrázek 5.1), ve kterém byla změřena jedna délka (vyznačena silněji) a všech 15 úhlů (v každém trojúhelníku byly změřeny všechny tři úhly) ? Celkem tedy bylo změřeno 16 prvků (n = 16).



Obrázek 5.1

5.2 Kolik je nutných měření (k = ?) a kolik nadbytečných měření (r = ?) v rovinném obrazci (stejný obrázek 5.1), ve kterém bylo tentokrát změřeno všech 10 délek, ale žádný úhel ?

5.3 Kolik je nutných měření (k = ?) a kolik nadbytečných měření (r = ?) v rovinném čtyřúhelníku, ve kterém byly změřeny všechny čtyři délky i obě úhlopříčky ? Celkem tedy bylo změřeno 6 délek (n = 6).

5.4 Úhel byl změřen čtyřmi různými teodolity (různě přesnými) a v různém počtu opakování. V následující tabulce jsou uvedeny průměrné hodnoty úhlů vypočtených vždy z příslušného počtu n jeho opakování, počty opakování n a pro každý přístroj jeho základní střední chyba $\overline{m}_o$ *vyjadřující přesnost jedenkrát měřeného úhlu (Příklad je částečně převzat ze sbírky* [5]*).*

č.	Průměr	*n*	$\overline{m}_o$
1	62°43´07´´	7	4´´
2	62°43´12´´	11	6´´
3	62°43´08´´	6	5´´
4	62°43´14´´	9	7´´

Vypočítejte:

1. Nejpravděpodobnější hodnotu měřeného úhlu.

2. Proveďte úvahu o přesnosti tohoto úhlu.

5.4 Klíč

3.3 Nepřímá měření je jiný výraz pro parametry určované z přímých měření, např. vyrovnáním zprostředkujících měření.

3.3 a) Pokud přiřadíme směru měřenému v jedné skupině váhu jedna, pak váha směru měřeného v šesti skupinách (vypočítaného jednoduchým aritmetickým průměrem z výsledků šesti měření) bude šest a váha směru měřeného ve 3 skupinách bude 3.

3.3 b) Velmi často se tento způsob používá pro zjednodušení výpočtu. Vyžaduje však zvýšenou obezřetnost při výpočtech charakteristik přesnosti.

4.4 a) Rovnice oprav byla použita v příkladu 4.3. Její odvození není obtížné ale vyžaduje znalosti derivování složených funkcí.

4.4b) Koeficienty jsou parcální derivace a po dosazení číselných hodnot a jejich výpočtu mají konkrétní velikost, znaménko a ve většině případů i rozměr.

4.4 c) Při zvoleném způsobu značení, kdy první neznámé je přiřazeno písmeno *a*, druhé písmeno *b* atd., bude prvek na čtvrtém řádku a ve třetím sloupci označen jako $\sum pdc$

4.4. d) Matice je symetrická, proto je koeficient stejný jako v předcházejícím příkladě a platí pro něj $\sum pdc = \sum pcd$

4.4 e) Prvků v matici 5 x 5 je celkem 25. Protože je matice symetrická, postačí vypočítat jen její horní nebo dolní trojúhelníkovou část. V tomto případě postačí vypočítat 15 koeficientů.

4.4 f) Diagonální prvky matice koeficientů normálních rovnic jsou vždy kladné, neboť se počítají jako součet čtverců příslušných koeficientů, násobených případně kladnými vahami. Nediagonální prvky mohou mít různá znaménka nebo mohou být nulové.

4.4. g) Apriorní jednotkovou střední chybu znát před vyrovnáním nemusíme, pokud jsou měření stejně přesná, nebo jsme váhy určili jiným způsobem, např. z délek pořadu (viz. příklad 3.4 aj.).

4.4 h) Pokud je měřených veličin stejný počet jako určovaných parametrů a úloha má korektní řešení, obdržíme vyrovnávacím postupem jednoznačné výsledky pro neznámé parametry. Protože nejsou při tomto „vyrovnání“ žádné nadbytečné veličiny, budou všechny opravy nulové. Nemůžeme proto v těchto případech počítat žádné aposteriorní charakteristiky přesnosti.

4.4 i) Směrodatná odchylka je definována jako odmocnina z variance a má tedy význam jen pro diagonální prvky kovarianční matice, protože na nich leží právě variance. Aplikace této definice na nediagonální prvky, tj. na kovariance, není reálná, neboť kovariance mohou mítí různá znaménka a pro záporné hodnoty by v oboru reálných čísel nebyla tato odmocnina definována.

4.4 j) Používají se pro výpočet dalších charakteristik přesnosti jako jsou elipsy a elipsoidy chyb. Rovněž v sobě skrývají míru korelace mezi veličinami. Této problematice se budeme věnovat v dalším semestru.

5.1 počet měřených veličin n = 16 (1 délka a 15 úhlů), počet nutných veličin k = 9, počet nadbytečných veličin $r = n - k = 7$. Důkaz je možno získat graficky, když si nakreslíme vždy dva úhly k určení každého bodu.

5.2 $n = 10$, $k = 9$, $r = 1$

5.3 $n = 6$, $k = 5$, $r = 1$

5.4 $\bar{x} = 62^{o}\,43'09{,}6''$ $s_x = 1{,}6''$

5.5 Korespondenční úkoly

Studenti budou zpracovávat z tohoto studijního textu dvě korespondenční úlohy, z nichž první bude na vyrovnání přímých měření (3 příklady), druhá na vyrovnání zprostředkujících měření (3 příklady). Příklady budou zadány studentům v průběhu konzultací.

Ostatní úkoly zadané v textu nebudou učitelem kontrolovány a je v zájmu studentů si příslušné téma procvičit. Případné nejasnosti je možno řešit v rámci řádných konzultací.

Místo pro poznámky