VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
FAKULTA STAVEBNÍ

JOSEF WEIGEL

TEORIE CHYB A VYROVNÁVACÍ POČET II

GE08_M01

Základní druhy vyrovnání (2. část)

STUDIJNÍ OPORY
PRO STUDIJNÍ PROGRAMY S KOMBINOVANOU FORMOU STUDIA

Tento text neprošel jazykovou ani redakční úpravou. Za jazykovou stránku odpovídá autor

OBSAH

1 Úvod

1.1 Cíle

Cílem tohoto modulu je seznámit studenty oboru geodézie a kartografie se základními druhy vyrovnávacích úloh používaných v tomto oboru. Učební text navazuje na předcházející dva moduly. Modul „Měřické chyby“, který pojednává o základních pojmem teorie chyb, definuje jednotlivé druhy měřických chyb a podrobně se zabývá charakteristikami přesnosti. V další části definuje zákony hromadění (přenášení) měřických chyb. Modul „Základní druhy vyrovnání 1. část“ se zabývá metodou nejmenších čtverců (MNČ) a podrobně popisuje postup při vyrovnání přímých měření (stejné i rozdílné přesnosti) a při vyrovnání zprostředkujících měření.

Tento text s názvem „Základní druhy vyrovnání 2. část“ navazuje na předcházející modul vyrovnáním podmínkových měření a některými dalšími druhy vyrovnání, především takovými, které základní druhy kombinují. Celá čtvrtá kapitola je věnována přehledu matematických vztahů týkajících se vektorů a matic a práci s nimi. Jejich cílem je soustředit hlavní poznatky z této oblasti matematiky do jedné části tak, aby student při aplikacích maticových zápisů ve vyrovnávacím počtu se mohl ihned podívat na jejich matematické základy. Proto jsou v některých částech doplňovány tyto přehledy případy jejich užití ve vyrovnávacím počtu. Rozsah informací v této čtvrté kapitole překračuje požadavky na studenta v předmětu Teorie chyb a vyrovnávací počet. Student se s nimi ale setká při aplikacích vyrovnávacího počtu v dalších odborných předmětech, případně při studiu odborných textů z této oblasti. Celý výběr je zaměřen na finální část čtvté kapitoly, tj. na problematiku pseudoinverzních matic, které se v geodézii stále častěji uplatňují zejména při vyrovnání volných sítí.

1.2 Požadované znalosti

U studentů se předpokládají dobré znalosti z předmětů Matematika I a Matematika II. V matematice se jedná o problematiku lineární algebry (práce s vektory a maticemi, řešení linearních systémů rovnic), dále musí znát derivace funkcí jedné a více proměnných (parciální derivace) a jejich využití při rozvoji funkcí v řady (zejména Taylorova řada). Znalosti z předmětů Geodézie I a Geodézie II jsou nutné především k pochopení praktických příkladů. Nezbytná je rovněž znalost terminologie definované v modulu „Měřické chyby“ a modulu Základní druhy vyrovnání 1. část“ .

1.3 Doba potřebná ke studiu

Obsah modulu je sestaven tak, že je využíván v předmětu „Teorie chyb a vyrovnávací počet II“.

Celkový rozsah doby studia tohoto modulu lze odhadnout na 50 hod, z toho 25 hodin na zvládnutí příkladů. 2. kapitola – 30 hodin, 3. kapitola.–10 hodin, 4.

kapitola – (10 hodin – při základních znalostech matematiky). Časy jsou pouze orientační, neboť záleží na tom, jaké výpočetní prostředky student použije a jak je umí ovládat. Časy jsou odhadnuty pro základní znalosti tabulkového procesoru Excel.

1.4 Klíčová slova

Zde jsou uvedena jen hlavní klíčová slova. Podrobnější členění je uvedeno na začátku každé kapitoly.

Vyrovnání podmínkových měření, podmínkové rovnice, odchylkové rovnice, přetvořené podmínkové rovnice, normální rovnice pro koreláty, koreláty, charakteristiky přesnosti, smíšené vyrovnání, vyrovnání podmínkových měření s neznámými, vyrovnání zprostředkujících měření s dalšími neznámými.

1.5 Metodický návod na práci s textem

Text a příklady v něm uvedené jsou seřazeny tak, aby se postupovalo ve shodě s výpočetním postupem vyrovnání podmínkových měření. Vzorové příklady jsou proto doplněny detailním postupem výpočtu. Výpočty jsou převážně sestaveny tak, aby mohly být počítány na kalkulačkách. Doporučuji studentům, aby si každý příklad nejprve vypočítali ručně (na kalkulačce se zápisem mezivýsledků na papír) a teprve potom jej realizovali například v tabulkovém procesoru Excel. Cílem totiž není jen vypočítat správný výsledek, ale pochopit detailně jeho jednotlivé fáze. Text je doplněn velmi podrobným Dodatkem A, který umožňuje studentovi konfrontovat vzorce v klasické podobě s jejich zápisem v maticové podobě. Pochopení základních operací s maticemi výrazně usnadní studium složitějších maticových zápisů v některých odvozeních.

Pokud student ovládá nějaký programovací jazyk, nebo pracuje s programovacími systémy typu MATCAD, MATLAB a pod., je vhodné věnovat tvorbě programů v těchto systémech více času, neboť si tak student ušetří čas při výpočtech jednotlivých aplikací vyrovnávacího počtu v navazujících odborných předmětech. Samozřejmě orientační čas uvedený ve stati 1.3 pro studium tohoto modulu pak bývá překročen i vícenásobně.

2 Vyrovnání podmínkových měření

Cílem této kapitoly je seznámit studenty s třetím z hlavních druhů vyrovnání, a to s vyrovnáním podmínkových měření. Jak již bylo uvedeno v předcházejícím modulu [6] rozeznáváme ve vyrovnávacím počtu tři základní druhy vyrovnávacích úloh:

- vyrovnání přímých měření
- vyrovnání zprostředkujících měření
- vyrovnání podmínkových měření

Všechny tři druhy jsou založeny na dříve uvedeném principu MNČ. Uvedené členění je klasické a vystihuje nejčastější případy zeměměřické praxe. Protože v principu vychází z jedné metody (MNČ), jedná se vlastně o řešení jedné obecné úlohy vyjádřitelné souborem funkcí ve tvaru

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{L}, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{k}) = \boldsymbol{0}, \qquad (2.1)$$

kde $\boldsymbol{L}$ jsou *měřené parametry*, $\boldsymbol{X}$ *určované parametry* (tzv. *neznámé*) a $\boldsymbol{k}$ jsou vhodné konstanty.

Vyrovnání přímých měření je případ, kdy určovaný parametr nebo parametry je možno přímo měřit. Pro jednotlivá měření a jeden určovaný parametr bude mít funkce (2.1) tvar

$$L_i = X. \qquad (2.2)$$

Při *vyrovnání zprostředkujících měření* měříme jednu skupinu parametrů (např. úhly a délky) a jinou skupinu parametrů určujeme - počítáme (např. souřadnice bodů). Funkce (2.1) budou mít v tomto případě tvar

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{k}). \qquad (2.3)$$

Vyrovnání podmínkových měření je případ, kdy skupina měřených parametrů musí splňovat předem dané matematické podmínky (například součet úhlů v trojúhelníku musí být roven 2π, resp. 180^o nebo 200gon). Funkce (2.1) budou mít v tomto případě tvar

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{L}, \boldsymbol{k}) = \boldsymbol{0}. \qquad (2.4)$$

Konstanty $\boldsymbol{k}$ často v zápise funkcí vynecháváme. Konstantou je např. výše uvedených 180^o a pod. V této kapitole bude řešen problém nadbytečných měření sestavením vhodných podmínek.

Studium této úvodní kapitoly zabere asi 25 až 30 hodin.

Vyrovnání podmínkových měření, podmínkové rovnice, odchylkové rovnice, přetvořené podmínkové rovnice, normální rovnice, koreláty, charakteristiky přesnosti, V modulu Měřické chyby [5] byl stručně vysvětlen pojem nadbytečná (redundantní) měření. Existují dva hlavní důvody používání nadbytečných měření:

- kontrola měření
- zvýšení přesnosti výsledků měření

Opakovaně změřené veličiny mají obvykle vyšší přesnost a veličiny z nich určované, mají po společném zpracování (vyrovnání) obvykle také vyšší přesnost, než veličiny určené jen jednou. Při vyrovnání můžeme rovněž vypočítat odhady těchto přesností.

Z kontrolních důvodů se měří nejen jednotlivé veličiny vícekrát (opakovaně), ale měří se též další veličiny (např. se změří v trojúhelníku nadbytečně i třetí úhel, neboť součet všech tří úhlů má být 180^o, a pod.).

Měříme-li veličiny v nadbytečném počtu (např. třetí úhel v trojúhelníku) nebude vlivem měřických chyb v jednotlivých naměřených úhlech splněn teoretický vztah, že součet všech tří úhlů má být přesně 180^o. Abychom tento nesoulad odstranili, musíme použít nějakou metodu vyrovnání, tj. přiřadit k měřeným veličinám (třem úhlům) takové tři opravy, aby podmínka 180^o byla po jejich zavedení splněna. Uvedeným postupem využívajícím metodu nejmenších čtverců se zabývá právě tato kapitola.

2.1 Podstata úlohy, použitá symbolika a postup řešení

V geodetické praxi se často z opakovaných měření určují hodnoty veličin, které mají splňovat předem dané (známé) matematické podmínky. Klasickým příkladem je již dříve uvedený součet tří úhlů v trojúhelníku. Jiným příkladem je součet nivelačních převýšení v nivelačním pořadu, který je vložen mezi dva nivelační body o známých (zadaných) výškách. Kdybychom veličiny nevyrovnali, dostali bychom např. při výpočtu nivelačního pořadu různé výšky, pokud by byly počítány různými cestami

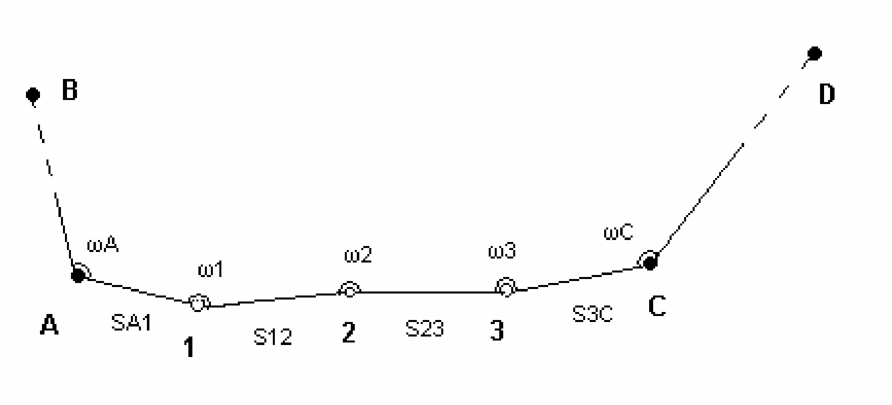
Cílem vyrovnání podmínkových měření je určit opravy v_i, o které je třeba opravit naměřené hodnoty l_i, aby byly přesně splněny předem dané matematické podmínky vyplývající z dané úlohy vyrovnání. Současně musí být splněna základní podmínka metody nejmenších čtverců $\sum pv^2 = \min$, definovaná vztahem (2.9), resp. vztahy (2.7) a (2.8) uvedených v modulu [6].

Nelze jednoznačně definovat, která konkrétní měřená veličina je nadbytečná (redundantní). Změříme-li v trojúhelníku všechny tři úhly (α, β, γ), je jeden z nich nadbytečný, i když nemůžeme konkrétně určit který z nich. Každý (nadbytečný) třetí úhel lze totiž vypočítat z ostatních dvou (nutných) úhlů.

Kontrolní otázky 2.1:

a) Kolik je nutných a kolik nadbytečných měření v oboustranně připojeném i oboustranně orientovaném polygonovém pořadu, když všechny veličiny (úhly ω a délky s) byly změřeny právě jednou ? Zadané (známé) jsou souřadnice Y, X bodů A, B, C a D. Mají se vypočítat souřadnice bodů 1, 2 a 3 . Schema sítě je nakresleno na obrázku č. 1.

b) Kolik by bylo nadbytečných měření, kdybychom změřili každou veličinu 2x ?



Obrázek 2.1 Schéma polygonového pořadu

c) Kolik je nadbytečných měření v uzavřeném nivelačním pořadu, tvořeném osmi nivelačními oddíly, ve kterém známe nadmořskou výšku jednoho nivelačního bodu ?

d) Kolik je nadbytečných měření v uzavřeném nivelačním pořadu, tvořeném osmi nivelačními oddíly, přičemž žádná nivelační značka nemá známou (zadanou) výšku ?

e) Kolik je nadbytečných měření v uzavřeném nivelačním pořadu, tvořeném osmi nivelačními oddíly, ve kterém známe nadmořskou výšku dvou nivelačních bodů ?

Odpovědi 2.1 :

a) Celkem bylo změřeno $n = 9$ *veličin (5 úhlů* ω *a 4 délky* s*). Nutných veličin je* $k = 6$ *(tři nově určované body, každý má dvě neznámé souřadnice). Nadbytečných veličin je tedy* $r = 3$.

b) $n = 2.9 = 18$, $k = 6$, $r = 18 - 6 = 12$

c) počet nivelačních oddílů (naměřených převýšení) $n = 8$ *, počet nutných měření* $k = 7$ *je dán počtem nově určovaných výšek 7 bodů (jedna výška je známa), počet nadbytečných měření* $r = n - k = 1$ *je shodný s možností vytvoření jednoho kontrolního součtu (uzávěru) všech naměřených převýšení.*

d) počet všech měření, nutných měření a nadbytečných měření bude identický s předcházející variantou c), neboť lze sestavit jeden kontrolní uzávěr, aniž bychom museli znát výšku některého z bodů.

e) $n = 8$, $k = 6$, $r = 2$.

Stanovení počtu nutných a nadbytečných měření nemusí být vždy jednoduchou úlohou. Při tvorbě projektu (plánu) měření musíme do něj nezbytně zařadit ty veličiny, které jsou nutné ke korektnímu řešení zadaného problému (výpočetní úlohy). Tyto nutné veličiny musí být změřeny minimálně jednou. Samozřejmě může existovat více kombinací nutných veličin, jejich počet je však v zadané úloze stejný. V příkladu v kontrolních otázkách 2.1 lze např. vypočítat souřadnice bodu *1, 2,* a *3* volným polygonovým pořadem orientovaným na bodě *A*. Nutnými veličinami jsou v tomto případě tři úhly ω_A, ω_1 a ω_2 a tři délky s_{A1}, s_{12} a s_{23}., tj. k = 6. Jinou variantou je např. výpočet bodů *1* a *2* volným orientovaným pořadem z bodu *A* a výpočet bodu *3* volným orientovaným pořadem (rajonem) z bodu *C* (nutné veličiny ω_A, ω_1, s_{A1}, s_{12}, ω_C, s_{3C}), tj. opět k = 6. Ostatní měřené veličiny lze považovat za nadbytečné. Z předcházejícího textu je zřejmé, že rozhodnout jednoznačně, zda konkrétní naměřená veličina je nutná nebo nadbytečná nemusí být jednoduché. Naštěstí třídit jednotlivé veličiny na nutné a nadbytečné není ve vyrovnávacím počtu ani potřeba. Musíme ale vždy přesně vědět, kolik je veličin nutných a kolik nadbytečných.

2.1.1 Použitá symbolika

V dalším textu bude používána následující symbolika:

n	počet měření (počet měřených veličin)	
k	počet neznámých veličin (počet určovaných parametrů)	
r	počet nadbytečných měření ($r = n - k$)	
$\tilde{\boldsymbol{l}}$	vektor pravých hodnot měřených veličin	$\tilde{\boldsymbol{l}}^T = (\tilde{l}_1, \tilde{l}_2, ..., \tilde{l}_n)$
$\boldsymbol{l}$	vektor měření (naměřených hodnot)	$\boldsymbol{l}^T = (l_1, l_2, ..., l_n)$
$\boldsymbol{v}$	vektor oprav	$\boldsymbol{v}^T = (v_1, v_2, ..., v_n)$
$\hat{\boldsymbol{l}} = \boldsymbol{l} + \boldsymbol{v}$	vektor vyrovnaných měření	$\hat{\boldsymbol{l}}^T = (\hat{l}_1, \hat{l}_2, ..., \hat{l}_n)$
$\boldsymbol{u}$	vektor odchylek	$\boldsymbol{u}^T = (u_1, u_2, ..., u_r)$
$\boldsymbol{k}$	vektor korelát	$\boldsymbol{k}^T = (k_1, k_2, ..., k_r)$
$\boldsymbol{P}$	matice vah	
$\boldsymbol{B}$	matice plánu – matice koeficientů přetvořených podmínkových rovnic	
$\boldsymbol{N}$	matice koeficientů normálních rovnic	
$\boldsymbol{Q}_{\hat{l}\hat{l}}$	matice váhových koeficientů vyrovnaných měření	
$\overline{m}_o$	apriorní jednotková střední chyba	
σ_o^2	apriorní variance	
$\hat{m}_o$	aposteriorní jednotková střední chyba	
$\hat{\sigma}_o^2$	aposteriorní variance	

2.1.2 Postup řešení

Při řešení geodetické úlohy s nadbytečnými veličinami použijeme nejčastěji následující výpočetní postup s využitím tzv. <u>*korelátového řešení*</u> :

1. Stanovení počtu nadbytečných měření a sestavení (původních) podmínkových rovnic
2. Sestavení odchylkových rovnic
3. Linearizace úlohy se sestavením přetvořených podmínkových rovnic
4. Sestavení normálních rovnic pro koreláty
5. Řešení normálních rovnic – výpočet korelát
6. Výpočet oprav a vyrovnaných hodnot pro měřené veličiny
7. Kontrola splnění podmínkových rovnic
8. Výpočet charakteristik přesnosti

Uvedený postup popisuje chronologicky jednotlivé kroky výpočetního algoritmu, jehož cílem je nalezení vyrovnaných hodnot měřených veličin, které již budou přesně splňovat zadané matematické podmínky které, vlivem měřických chyb, nebyly před vyrovnáním přesně splněny. Po bodě 3 tohoto postupu, existuje alternativní postup pomocí <u>*přechodu na metodu vyrovnání zprostředkujících měření*</u>:

4. volba neznámých a sestavení rovnic oprav
5. sestavení normálních rovnic pro zvolené neznámé a jejich řešení
6. Výpočet oprav a vyrovnaných hodnot měřených veličiny
7. Kontrola splnění podmínkových rovnic
8. Výpočet charakteristik přesnosti

2.2 Sestavení podmínkových rovnic

Je-dáno n měření $l_1, l_2, ..., l_n$ s jejich vahami $p_1, p_2, ..., p_n$. Pravé hodnoty měřených veličin označme $\tilde{l}_1, \tilde{l}_2, ..., \tilde{l}_n$. Každá nadbytečná veličina umožňuje sestavit jednu podmínkovou rovnici, celkem tedy musíme sestavit r <u>*původních podmínkových rovnic,*</u> ve tvaru:

$$
\begin{aligned}
&\varphi_a\left(\tilde{l}_1, \tilde{l}_2, \cdots, \tilde{l}_n\right) = 0\,, \\
&\varphi_b\left(\tilde{l}_1, \tilde{l}_2, \cdots, \tilde{l}_n\right) = 0\,, \\
&\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
&\varphi_r\left(\tilde{l}_1, \tilde{l}_2, \cdots, \tilde{l}_n\right) = 0\,.
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

Pro odlišení od pořadí měření $i = 1, 2, \dots , n$ budeme pořadí jednotlivých rovnic označovat písmeny $j = a, b, \dots , r$.

Jednotlivé podmínkové rovnice musí být vzájemně nezávislé, to znamená, že není možno žádnou podmínkovou rovnici vypočítat z ostatních podmínkových rovnic.

Rovnice (2.5) lze zapsat v maticovém tvaru

$$\varphi\left(\tilde{\boldsymbol{l}}^{T}\right)=\boldsymbol{0} \quad , \tag{2.6}$$

kde $\tilde{\boldsymbol{l}}^{T}=\left(\tilde{l}_1,\tilde{l}_2,\dots,\tilde{l}_n\right)$ je vektor pravých hodnot měřených veličin a symbolem $\boldsymbol{\varphi}(\ .\ )$ je vyjádřeno r podmínkových funkcí $\varphi_j\ (\ .\ )$ z rovnic (2.5). Protože pravé hodnoty měřených veličin neznáme, budeme požadovat splnění těchto vztahů pro veličiny vyrovnané, které jsme označili $\widehat{l}_1,\widehat{l}_2,\dots,\widehat{l}_n$. Podmínkové rovnice (2.5) budou tedy platit i pro vyrovnané hodnoty měřených veličin:

$$\begin{aligned}
&\varphi_a\left(\widehat{l}_1,\widehat{l}_2,\cdots,\widehat{l}_n\right)=0\ ,\\
&\varphi_b\left(\widehat{l}_1,\widehat{l}_2,\cdots,\widehat{l}_n\right)=0\ ,\\
&\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots\\
&\varphi_r\left(\widehat{l}_1,\widehat{l}_2,\cdots,\widehat{l}_n\right)=0\ .
\end{aligned} \tag{2.7}$$

V maticové podobě budou mít rovnice (2.7) tvar:

$$\varphi(\widehat{\boldsymbol{l}}^{T})=\boldsymbol{0}\ . \tag{2.8}$$

Vyrovnané hodnoty $\widehat{l}_i$ dostaneme tak, že k naměřeným hodnotám l_i přičteme opravy v_i , získané v rámci dále popsaného postupu vyrovnání. Rovnice (2.7) lze tedy psát též ve tvaru

$$\begin{aligned}
&\varphi_a\left(l_1+v_1,l_2+v_2,\cdots,l_n+v_n\right)=0\ ,\\
&\varphi_b\left(l_1+v_1,l_2+v_2,\cdots,l_n+v_n\right)=0\ ,\\
&\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots\\
&\varphi_r\left(l_1+v_1,l_2+v_2,\cdots,l_n+v_n\right)=0\ .
\end{aligned} \tag{2.9}$$

?

Kontrolní otázka 2.2

V rovinném trojúhelníku byla změřena jedna strana a všechny tři vnitřní úhly. Kolik bude nutno sestavit podmínkových rovnic a jaký budou mít tvar?

✓

Odpověď 2.2

Předpokládejme, že byly změřeny následující veličiny: délka strany c, *úhly* α, β, γ. *Úhly byly změřeny v šedesátinné úhlové míře, tj. ve stupních.*

Rovinný trojúhelník je jednoznačně zadán třemi prvky, z nichž alespoň jeden je délkový. Protože byly v trojúhelníku změřeny čtyři prvky, je jeden z nich nadbytečný, neboť n = 4, k = 3, r = n – k = 1 a je proto možno sestavit jednu podmínkovou rovnici tvaru (2.5):

$$\varphi_a\left(\tilde{c},\tilde{\alpha},\tilde{\beta},\tilde{\gamma}\right)=\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}+\tilde{\gamma}-180^o=0\,.$$

Je zřejmé, že podmínkovou rovnici pro součet tří úhlů v trohúhelníku je možno sestavit i bez znalosti kterékoliv délky v tomto trojúhelníku. Řešení trojúhelníku bez definované délky by ale nebylo jednoznačné.

Kontrolní otázka 2.3

Předpokládejme, že v rovinném trojúhelníku byly tentokrát změřeny všechny prvky, tj. všechny tři úhly a všechny tři délky. Kolik bude původních podmínkových rovnic a jaký budou mít tvar?

Odpověď 2.3

n = 6, k = 3, r = n – k = 3. Sestavíme tři podmínkové rovnice, např. ve tvaru:

$$\varphi_a\left(\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c},\tilde{\alpha},\tilde{\beta},\tilde{\gamma}\right)\equiv\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}+\tilde{\gamma}-180^o=0,$$
$$\varphi_b\left(\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c},\tilde{\alpha},\tilde{\beta},\tilde{\gamma}\right)\equiv\tilde{a}\sin\tilde{\beta}-\tilde{b}\sin\tilde{\alpha}=0,$$
$$\varphi_c\left(\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c},\tilde{\alpha},\tilde{\beta},\tilde{\gamma}\right)\equiv\tilde{a}\sin\tilde{\gamma}-\tilde{c}\sin\tilde{\alpha}=0.$$

Zatímco první podmínková rovnice je v lineárním tvaru, ostatní dvě jsou nelineární a vznikly ze sinových vět, které platí v rovinném trojúhelníku. Samozřejmě mohly být napsány i v jiné podobě, např. jako kosinovy věty. Při jejich sestavení musíme dbát na jejich vzájemnou nezávislost.

2.3 Odchylkové a přetvořené podmínkové rovnice

Dosadíme-li do rovnic (2.5) místo pravých hodnot hodnoty naměřené nebudou tyto podmínky přesně splněny, neboť v naměřených hodnotách se vyskytují měřické chyby. Na pravé straně rovnic místo nulových hodnot obdržíme nějaké odchylky u, proto budeme takto vzniklé rovnice nazývat <u>odchylkové rovnice</u>:

$$\begin{aligned}\varphi_a(l_1,l_2,\cdots,l_n)&=u_a\,,\\ \varphi_b(l_1,l_2,\cdots,l_n)&=u_b\,,\\ \vdots\qquad\qquad&\quad\vdots\\ \varphi_r(l_1,l_2,\cdots,l_n)&=u_r\,.\end{aligned}\qquad(2.10)$$

V maticové podobě bude systém odchylkových rovnic mít tvar

$$\varphi(\boldsymbol{l}^T)=\boldsymbol{u}\,.\qquad(2.11)$$

V některých případech odchylky u nazýváme _uzávěry_, zejména když mají charakter uzávěru např. polygonového či nivelačního pořadu, uzávěru trojúhelníku a pod. Úkolem vyrovnání je nyní najít takové opravy v_i k naměřeným hodnotám l_i, aby odchylkové rovnice (2.10) přešly na rovnice (2.9) resp. (2.7), ve kterých podmínky nulových pravých stran jsou již splněny. Takovýchto řešení je nekonečně mnoho, protože počet hledaných oprav (tj. počet měření n je větší než počet podmínkových rovnic $n > r$.

Původní podmínkové rovnice mohou být lineární i nelineární. V dalším postupu musí být linearizovány. K linearizaci využijeme Taylorovy řady s uvážením členů pouze 1. řádu. To předpokládá, že v rovnicích (2.9) budou i opravy malé vzhledem k naměřeným hodnotám.

$$
\begin{aligned}
\varphi_a(l_1+v_1, l_2+v_2, \cdots, l_n+v_n) &= \varphi_a(l_1, l_2, \cdots, l_n) + \frac{\partial \varphi_a}{\partial l_1} v_1 + \frac{\partial \varphi_a}{\partial l_2} v_2 + \cdots + \frac{\partial \varphi_a}{\partial l_n} v_n = 0\,, \\
\varphi_b(l_1+v_1, l_2+v_2, \cdots, l_n+v_n) &= \varphi_a(l_1, l_2, \cdots, l_n) + \frac{\partial \varphi_b}{\partial l_1} v_1 + \frac{\partial \varphi_b}{\partial l_2} v_2 + \cdots + \frac{\partial \varphi_b}{\partial l_n} v_n = 0\,, \\
\vdots \qquad\qquad & \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
\varphi_r(l_1+v_1, l_2+v_2, \cdots, l_n+v_n) &= \varphi_a(l_1, l_2, \cdots, l_n) + \frac{\partial \varphi_r}{\partial l_1} v_1 + \frac{\partial \varphi_r}{\partial l_2} v_2 + \cdots + \frac{\partial \varphi_r}{\partial l_n} v_n = 0\,.
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

Označíme-li parciální derivace

$$
\frac{\partial \varphi_a}{\partial l_i} = a_i \quad , \quad \frac{\partial \varphi_b}{\partial l_i} = b_i \quad , \quad \cdots \quad , \quad \frac{\partial \varphi_r}{\partial l_i} = r_i \quad , \quad (\, i = 1, 2, \cdots, n) \tag{2.13}
$$

napíšeme, s uvážením rovnic (2.10), rovnice (2.12) ve tvaru

$$
\boxed{
\begin{aligned}
& a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n + u_a = 0 \quad , \\
& b_1 v_1 + b_2 v_2 + \cdots + b_n v_n + u_b = 0 \quad , \\
& \vdots \\
& r_1 v_1 + r_2 v_2 + \cdots + r_n v_n + u_r = 0 \quad .
\end{aligned}
\qquad (2.14)
}
$$

Rovnice (2.14) nazýváme _přetvořené podmínkové rovnice_ a můžeme je stručně zapsat:

$$
\sum (av) + u_a = 0 \quad , \sum (bv) + u_b = 0 \quad , \cdots , \sum (rv) + u_r = 0 \quad . \tag{2.15}
$$

Vytvořme nyní _matici koeficientů přetvořených podmínkových rovnic_ a označme ji $\boldsymbol{B}$. Dále sestavme opravy v_i do _vektoru oprav_ $\boldsymbol{v}$ a odchylky u_j do _vektoru odchylek (uzávěrů)_ $\boldsymbol{u}$:

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_1 & r_2 & \cdots & r_n \end{pmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_a \\ u_b \\ \vdots \\ u_r \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} . \tag{2.16}$$

Přetvořené podmínkové rovnice (2.14) budou mít v maticovém zápisu tvar:

$$\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \quad . \tag{2.17}$$

Matice B se též nazývá matice plánu. Počet jejich řádků je roven počtu podmínkových rovnic r a počet sloupců počtu měřených veličin n. Jejími prvky jsou parciální derivace podmínkových funkcí podle jednotlivých měření.

Kontrolní otázka 2.4

Jakých rozměrů bude matice $\boldsymbol{B}$ *z příkladu uvedeném v kontrolní otázce 2.1 a jak budou vypočteny její prvky?*

Odpověď 2.4

$n = 6$, $r = 3$. Matice B bude mít 18 prvků uspořádaných do 3 řádků a 6 sloupců. Jejími prvky jsou parciální derivace vypočtené podle (2.13)

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \sin\beta & -\sin\alpha & 0 & -b\cos\alpha & a\cos\beta & 0 \\ \sin\gamma & 0 & -\sin\alpha & -c\cos\alpha & 0 & a\cos\gamma \end{pmatrix}$$

Po dosazení naměřených hodnot do vztahů uvedených pro jednotlivé prvky matice a jejich výpočtu je matice určenai číselně. Obdobně můžeme vypočítat i vektor odchylek $\boldsymbol{u}$ *z odchylkových rovnic.*

V rovnicích (2.14) známe tedy hodnoty parciálních derivací a hodnoty odchylek. Zatím nejsou známy hodnoty oprav. Počet těchto rovnic je při vyrovnání (při nadbytečných měřeních) menší než počet oprav ($r < n$). Kdyby bylo $n = r$, bylo by v přetvořených podmínkových rovnicích jen tolik oprav, kolik je rovnic a opravy bychom mohli jednoznačně vypočítat, neboť by se nejednalo o přeurčenou úlohu vyrovnání. Protože je oprav obecně více než rovnic, je úloha matematicky neurčitá a pro jednoznačné řešení přidáme další podmínku pro určované opravy, a to podmínku definovanou metodou nejmenších čtverců, tj. $\boldsymbol{v}^T \boldsymbol{P}\,\boldsymbol{v} = \min$.

Opravy je možno vypočítat dvěma způsoby:

1. řešením pomocí tzv. korelát (korelátovým vyrovnáním)
2. přechodem na metodu vyrovnání zprostředkujících měření

Druhému způsobu, který se používá zřídka, bude věnována až stať 2.11.

V dalším se proto budeme podrobně věnovat korelátovému vyrovnání.

2.4 Normální rovnice pro koreláty

Pro jednoznačné řešení přetvořených podmínkových rovnic doplníme systém těchto rovnic o další hlavní podmínku MNČ, kterou musí splňovat opravy v_i. Z matematického hlediska jde o tzv. vázaný extrém, tj. určení extrémní hodnoty (minima součtu čtverců oprav) vázaného podmínkami (2.14). V takových případech se používá Lagrangeova postupu, kdy násobíme vedlejší podmínky (2.14) zatím neurčenými Lagrangeovými koeficienty, které nazval Gauss koreláty. Přesněji řečeno násobíme tyto podmínky koeficienty $-2\,k_j$ a přičteme k funkci $\sum pv^2$:

$$\overline{\Omega} = \sum pv^2 - 2k_a(\sum av + u_a) - 2k_b(\sum bv + u_b) - \cdots - 2k_r(\sum rv + u_r) = \min . \qquad (2.18)$$

Pro lepší názornost si funkci (2.18) rozepišme

$$\overline{\Omega} = p_1v_1^2 + p_2v_2^2 + \cdots + p_nv_n^2 - 2k_a(a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n + u_a) -$$
$$- 2k_b(b_1v_1 + b_2v_2 + \cdots + b_nv_n + u_b) - \cdots - 2k_r(r_1v_1 + r_2v_2 + \cdots + r_nv_n + u_r) = \min$$

V maticové podobě lze podmínku (2.18) psát ve tvaru (2.19)

$$\boxed{\overline{\Omega} = \boldsymbol{v}^T \boldsymbol{P} \boldsymbol{v} - 2\boldsymbol{k}^T(\boldsymbol{B}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}) = \min . \qquad (2.19)}$$

Ve vztahu (2.19) se nově vyskytuje vektor korelát $\boldsymbol{k}$ pro který platí

$$\boldsymbol{k}^T = \begin{pmatrix} k_a & k_b & \cdots & k_r \end{pmatrix}. \qquad (2.20)$$

K určení minima funkce (2.18) položíme její parciální derivace podle proměnných v_i rovny nule, tj.

$$\begin{aligned} \frac{\partial\overline{\Omega}}{\partial v_1} &= 2p_1v_1 - 2a_1k_a - 2b_1k_b - \cdots - 2r_1k_r = 0 \quad , \\ \frac{\partial\overline{\Omega}}{\partial v_2} &= 2p_2v_2 - 2a_2k_a - 2b_2k_b - \cdots - 2r_2k_r = 0 \quad , \\ &\vdots \\ \frac{\partial\overline{\Omega}}{\partial v_n} &= 2p_nv_n - 2a_nk_a - 2b_nk_b - \cdots - 2r_nk_r = 0 \quad . \end{aligned} \qquad (2.21)$$

Z rovnic (2.21) vyjádříme postupně opravy v_i pomocí korelát k_j

$$
\begin{aligned}
v_1 &= \frac{1}{p_1} a_1 k_a + \frac{1}{p_1} b_1 k_b + \cdots + \frac{1}{p_1} r_1 k_r \quad , \\
v_2 &= \frac{1}{p_2} a_2 k_a + \frac{1}{p_2} b_2 k_b + \cdots + \frac{1}{p_2} r_2 k_r \quad , \\
&\vdots \\
v_n &= \frac{1}{p_n} a_n k_a + \frac{1}{p_n} b_n k_b + \cdots + \frac{1}{p_n} r_n k_r \quad .
\end{aligned}
\tag{2.22}
$$

K určení neznámých koeficientů (korelát) k_a až k_r dosadíme opravy z rovnic (2.22) do přetvořených podmínkových rovnic (2.14). Po dosazení a uspořádání dostaneme systém rovnic, který se nazývá <u>*normální rovnice pro koreláty*</u>

$$
\boxed{
\begin{aligned}
&(\sum \frac{aa}{p}) k_a + (\sum \frac{ab}{p}) k_b + \cdots + (\sum \frac{ar}{p}) k_r + \quad u_a = 0 \quad , \\
&(\sum \frac{ba}{p}) k_a + (\sum \frac{bb}{p}) k_b + \cdots + (\sum \frac{br}{p}) k_r + \quad u_b = 0 \quad , \\
&\qquad \vdots \\
&(\sum \frac{ra}{p}) k_a + (\sum \frac{rb}{p}) k_b + \cdots + (\sum \frac{rr}{p}) k_r + \quad u_r = 0 \quad .
\end{aligned}
\qquad (2.23)}
$$

Pro zjednodušení zápisu zavedeme místo vah p_i jejich reciproké hodnoty (tzv. váhové koeficienty či kofaktory – viz [5]) $q_i = 1/p_i$. Dále si uvědomíme, že pro součiny platí komutativní zákon, tj. např. $ba = ab$. Obdobně jako při vyrovnání zprostředkujících použijeme pro vyjádření součtů tzv. Gaussovy sumační znaky [6]. Normální rovnice pro koreláty pak přepíšeme do tvaru:

$$
\boxed{
\begin{aligned}
&[qaa] k_a + [qab] k_b + \cdots + [qar] k_r + u_a = 0 \quad , \\
&[qab] k_a + [qbb] k_b + \cdots + [qbr] k_r + u_b = 0 \quad , \\
&\quad \vdots \\
&[qar] k_a + [qbr] k_b + \cdots + [qrr] k_r + u_r = 0 \quad .
\end{aligned}
\qquad (2.24a)}
$$

Mají-li všechna měření stejnou přesnost můžeme ji zvolit za jednotkovou a dosadit za všechny váhy číslo 1, tj. $p_i = q_i = 1$ pro všechna $i = 1, 2, \ldots, n$.

$$
\begin{aligned}
&[aa] k_a + [ab] k_b + \cdots + [ar] k_r + u_a = 0 \quad , \\
&[ab] k_a + [bb] k_b + \cdots + [br] k_r + u_b = 0 \quad , \\
&\quad \vdots \\
&[ar] k_a + [br] k_b + \cdots + [rr] k_r + u_r = 0 \quad .
\end{aligned}
\tag{2.24b}
$$

Normální rovnice můžeme psát i v maticovém tvaru. Pro jejich odvození zderivujeme maticovou funkci (2.19) a tuto derivaci položíme rovnu nule

$$\frac{\partial \overline{\Omega}}{\partial \boldsymbol{v}} = 2\boldsymbol{Pv} - 2\boldsymbol{B}^T \boldsymbol{k} = \boldsymbol{0}$$

a odtud tzv. rovnice oprav (2.22) v maticovém tvaru

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}^T \boldsymbol{k} \quad . \tag{2.25a}$$

V případě všech stejně přesných měření bude rovnice (2.25a) zjednodušena na

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{k} \quad . \tag{2.25b}$$

Po dosazení rovnic (2.25a) do (2.17) dostaneme normální rovnice pro koreláty v maticovém tvaru

$$\boldsymbol{BP}^{-1}\boldsymbol{B}^T \boldsymbol{k} + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \quad , \tag{2.26a}$$

který je maticovou podobou klasického zápisu (2.23) či (2.24a).

V případě stejně přesných měření přejde (2.26a) na

$$\boldsymbol{BB}^T \boldsymbol{k} + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \quad , \tag{2.26b}$$

Ve vzorci (2.26a) označme součin

$$\boldsymbol{BP}^{-1}\boldsymbol{B}^T = \boldsymbol{N} \tag{2.27a}$$

a matici $\boldsymbol{N}$ nazvěme <u>*matici koeficientů normálních rovnic*</u> pro koreláty.

$$\boldsymbol{N} = \begin{pmatrix} \sum qaa & \sum qab & \cdots & \sum qar \\ \sum qab & \sum qbb & \cdots & \sum qbr \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum qar & \sum qbr & \cdots & \sum qrr \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [qaa] & [qab] & \cdots & [qar] \\ [qab] & [qbb] & \cdots & [qbr] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [qar] & [qbr] & \cdots & [qrr] \end{pmatrix}. \tag{2.28a}$$

V případě stejně přesných měření přejde rovnice (2.27a) na (2.27b)

$$\boldsymbol{BB}^T = \boldsymbol{N} \tag{2.27b}$$

a v klasickém zápise (2.28a) na (2.28b)

$$N = \begin{pmatrix} \sum aa & \sum ab & \cdots & \sum ar \\ \sum ab & \sum bb & \cdots & \sum br \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum ar & \sum br & \cdots & \sum rr \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [aa] & [ab] & \cdots & [ar] \\ [ab] & [bb] & \cdots & [br] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [ar] & [br] & \cdots & [rr] \end{pmatrix}. \qquad (2.28b)$$

2.5 Řešení normálních rovnic – výpočet korelát

Systém normálních rovnic (2.23) či (2.24) je lineární systém, který je možno řešit více způsoby. Velmi efektivní jsou zejména eliminační metody, iterační metody, ortogonalizační metody aj. Při řešení tohoto systému lze s výhodou využít skutečnosti, že se jedná o systém symetrický, tzn. že matice koeficientů normálních rovnic je maticí symetrickou. S výhodou lze proto použít např. Choleského metodu – podrobnosti viz. Dodatek A ve 4. kapitole. V dalším budeme nejčastěji používat řešení normálních rovnic pomocí inverzní matice.

Při použití matice $\boldsymbol{N}$ můžeme přepsat normální rovnice (2.26) na jednoduchou maticovou rovnici vyjadřující lineární systém rovnic s počtem r neznámých (neznámými veličinami v tomto systému rovnic jsou nově zavedené koeficienty k tzv. koreláty).

$$\boldsymbol{N}\,\boldsymbol{k} + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}\ . \qquad (2.29)$$

Takovýto systém je výhodné řešit např. s využitím inverzní matice k matici koeficientů normálních rovnic $\boldsymbol{N}^{-1}$. Touto maticí vynásobíme zleva systém rovnic (2.29) a vypočítáme vektor korelát $\boldsymbol{k}$

$$\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{N}\boldsymbol{k} + \boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0},$$

$$\boldsymbol{k} = -\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{u}.$$

Po dosazení z rovnice (2.27) můžeme napsat maticovou funkci pro výpočet neznámých korelát

$$\boldsymbol{k} = -\,(\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}^{T})^{-1}\,\boldsymbol{u}\ . \qquad (2.30a)$$

Mají-li všechny měřené veličiny stejnou přesnost bude matice vah jednotková a ze systému ji můžeme vypustit. Vektor korelát se pak vypočítá ze zjednodušeného vztahu:

$$\boldsymbol{k} = -\,(\,\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{B}^{T}\,)^{-1}\,\boldsymbol{u}\ . \qquad (2.30b)$$

Koreláty jsou jen pomocné koeficienty, které nemají samostatné uplatnění ve vyrovnání. Tvoří jen mezivýsledek a jsou při tomto postupu použity při výpočtu oprav.

2.6 Výpočet oprav a vyrovnaných měření

2.6.1 Výpočet oprav

Známe-li koreláty k_j , můžeme je dosadit do rovnic oprav (2.22). Pokud pracujeme místo vah s váhovými koeficienty přejdou rovnice (2.22) na tvar:

$$\begin{aligned} v_1 &= q_1(a_1k_a + b_1k_b + \cdots + r_1k_r) \quad , \\ v_2 &= q_2(a_2k_a + b_2k_b + \cdots + r_2k_r) \quad , \\ &\vdots \\ v_n &= q_n(a_nk_a + b_nk_b + \cdots + r_nk_r) \quad , \end{aligned} \qquad (2.31a)$$

respektive

$$\begin{aligned} v_1 &= a_1k_a + b_1k_b + \cdots + r_1k_r \quad , \\ v_2 &= a_2k_a + b_2k_b + \cdots + r_2k_r \quad , \\ &\vdots \\ v_n &= a_nk_a + b_nk_b + \cdots + r_nk \quad , \end{aligned} \qquad (2.31b)$$

v případě stejných vah.

V maticové podobě jsou rovnice oprav vyjádřeny maticovou rovnicí (2.25a) (2.25b). Dosadíme-li do vztahu (2.25a) rovnici (2.30a) můžeme vypočítat vektor oprav podle

$$\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}^T\left(\boldsymbol{B}\ \ \boldsymbol{P}^{-1}\ \boldsymbol{B}^T\right)^{-1}\boldsymbol{u} \quad . \qquad (2.32a)$$

Rovnice (2.32a) v sobě zahrnuje hlavní část výpočetního postupu, kdy při znalosti vstupních hodnot vyjádřených maticí plánu $\boldsymbol{B}$, maticí vah $\boldsymbol{P}$ a vektorem odchylek $\boldsymbol{u}$ získáme přímo vektor oprav $\boldsymbol{v}$ k měřeným veličinám $\boldsymbol{l}$.

V případě stejných vah přejde (2.32a) na (2.32b)

$$\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{B}^T\left(\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{B}^T\right)^{-1}\boldsymbol{u} \quad . \qquad (2.32b)$$

Rovnici (2.32b) jsme získali dosazením (2.25b) do (2.30b) nebo vypuštěním inverzní matice k matici vah z rovnice (2.32a).

2.6.2 Výpočet vyrovnaných měření

Sečteme-li vektor $\boldsymbol{v}$ s vektorem měřených hodnot $\boldsymbol{l}$ obržíme *vektor vyrovnaných měření* (vektor vyrovnaných hodnot měřených veličin) $\widehat{\boldsymbol{l}}$.

$$\hat{\boldsymbol{l}} = \boldsymbol{l} + \boldsymbol{v} \quad , \qquad (2.33)$$

nebo v rozepsaném tvaru

$$\begin{pmatrix} \hat{l}_1 \\ \hat{l}_2 \\ \vdots \\ \hat{l}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \quad , \text{ či } \quad \begin{matrix} \hat{l}_1 = l_1 + v_1 \quad , \\ \hat{l}_2 = l_2 + v_2 \quad , \\ \vdots \\ \hat{l}_n = l_n + v_n \quad . \end{matrix} \qquad (2.34)$$

Pokud nás nezajímá výpočet charakteristik přesnosti, mohli bychom po závěrečné kontrole dosazením vyrovnaných měření do podmínkových rovnic výpočet ukončit. Získali jsme totiž vyrovnané hodnoty, které již splňují zadané matematické (geometrické) podmínky, tj. např. že vyrovnané úhly v trojúhelníku již dávají při jejich součtu přesně 180^{o}.

2.7 Kontroly

V průběhu výpočtu je vhodné provádět nezbytné kontroly. Typ a rozsah kontrolních výpočtů záleží na tom, jaké výpočetní pomůcky byly při řešení použity (kalkulátor, tabulkový procesor apod.).

V plném rozsahu jsou vstupní veličiny, tj. matice plánu $\boldsymbol{B}$ a vektor $\boldsymbol{u}$ kontrolovány závěrečnou kontrolou dosazením vyrovnaných hodnot měřených veličin do původních podmínkových rovnic.

a) V případě ručního výpočtu je vhodné kontrolovat již sestavení přetvořených podmínkových rovnic, které můžeme kontrolovat ihned po linearizaci podmínkových rovnic (tj. po výpočtu parciálních derivací). Tato kontrola spočívá v následujícím postupu:

1. všechny naměřené veličiny zvětšíme o jednotku v řádech počítaných oprav

$$\dot{l}_1 = l_1 + 1 \quad , \quad \dot{l}_2 = l_2 + 1 \quad , \quad \cdots \quad , \quad \dot{l}_n = l_n + 1 \quad .$$

2. vypočítáme odchylky (uzávěry) $\boldsymbol{w}$ s takto změněnými hodnotami

$$\varphi_a\left(\dot{l}_1, \dot{l}_2, \cdots, \dot{l}_n\right) = w_a \quad , \quad \varphi_b\left(\dot{l}_1, \dot{l}_2, \cdots, \dot{l}_n\right) = w_b \quad , \cdots , \quad \varphi_r\left(\dot{l}_1, \dot{l}_2, \cdots, \dot{l}_n\right) = w_r \quad .$$

3. porovnáme původní uzávěry $\boldsymbol{u}$ s nově vypočítanými uzávěry $\boldsymbol{w}$, přičemž by mělo platit:

$$w_a \doteq u_a + \sum a \quad , w_b \doteq u_b + \sum b \quad , \quad \cdots \quad , w_r \doteq u_r + \sum r \quad . \qquad (2.35)$$

b) Kontrola koeficientů normálních rovnic při ručním výpočtu je velmi vhodným opatřením proti numerické chybě při jejich sestavování. K tomuto účelu vypočteme pomocné koeficienty s_1, s_2, ... , s_n podle:

$$s_i = -(a_i + b_i + \cdots + r_i) \quad , \quad i = 1, 2, \cdots, n \quad .$$

Společně s koeficienty normálních rovnic vypočteme součtové členy i pro kontrolní koeficienty s_i. Kontrolní vztahy pak budou mít tvar:

$$\begin{aligned} &\sum qaa + \sum qab + \cdots + \sum qar + \sum qas = 0 \quad , \\ &\sum qab + \sum qbb + \cdots + \sum qbr + \sum qbs = 0 \quad , \\ &\quad \vdots \\ &\sum qar + \sum qbr + \cdots + \sum qrr + \sum qrs = 0 \quad . \end{aligned} \qquad (2.36)$$

c) Kontrola řešení normálních rovnic, výpočtu korelát a výpočtu oprav. Kontroly postupu řešení lineárního systému normálních rovnic při řešení Gaussovou eliminační metodou jsou velmi podrobně popsány ve většině učebnic vyrovnávacího počtu. Zde je již nebudeme uvádět, protože se v současnosti používá ruční výpočet neznámých ze systémů lineárních rovnic jen velmi zřídka a pro velmi malý počet neznámých.

Použijeme-li při výpočtu postup, jehož výsledkem je inverzní matice k matici normálních rovnic můžeme se o správnosti jejího výpočtu přesvědčit např. jejím vynásobením s původní maticí normálních rovnic, neboť výsledkem těchto součinů je jednotková matice

$$\mathbf{N}\mathbf{N}^{-1} = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{N} = \mathbf{I} \qquad .$$

Výpočet korelát a výpočet oprav můžeme zkontrolovat pomocí tzv. _Sigmových zkoušek_:

$$\overline{\Sigma}_I = -\boldsymbol{u}^T \boldsymbol{k} = -\boldsymbol{k}^T \boldsymbol{u} \quad , \quad \overline{\Sigma}_{III} = \sum \boldsymbol{v}^T \boldsymbol{P}\, \boldsymbol{v} \quad , \text{kdy} \quad \overline{\Sigma}_I = \overline{\Sigma}_{III} \qquad (2.37)$$

Další podrobnosti lze nalézt v učebnicích [2] a [4] a mnoha dalších.

d) Nejdůležitější kontrolou je _závěrečná kontrola_ dosazením vyrovnaných hodnot měřených veličin do původních podmínkových rovnic! – viz. (2.7).

$$\begin{aligned} &\varphi_a\left(\widehat{l}_1, \widehat{l}_2, \cdots, \widehat{l}_n\right) = 0 \,, \\ &\varphi_b\left(\widehat{l}_1, \widehat{l}_2, \cdots, \widehat{l}_n\right) = 0 \,, \\ &\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ &\varphi_r\left(\widehat{l}_1, \widehat{l}_2, \cdots, \widehat{l}_n\right) = 0 \,. \end{aligned}$$

Tato kontrola musí být splněna až na případné chyby ze zaokrouhlení, které při rozsáhlejších výpočtech mohou dosáhnout signifikatních hodnot. Jisté diference mohou být způsobeny i zanedbáním členů druhých a vyšších řádů při linearizaci Taylorovým rozvojem.

Tato závěrečná kontrola bohužel nekontroluje špatné sestavení podmínkových rovnic, kterým musíme proto již od počátku věnovat mimořádnou pozornost.

2.8 Příklady

V této stati budou uvedeny dva vzorové příklady, z nichž první již byl řešen vyrovnáním zprostředkujících měření. Protože metoda vyrovnání podmínkových měření vychází ze stejných principů, tj. z metody nejmenších čtverců, musí obě metody dát identické výsledky, proto i zadání prvního příkladu je identické s příkladem uvedeným ve vyrovnání zprostředkujících měření viz. modul [6].

2.8.1 Vyrovnání délek

Jako první vzorový příklad použijeme příklad 4.2 z modulu [6], kde byl tento příklad řešen metodou vyrovnání zprostředkujících měření.

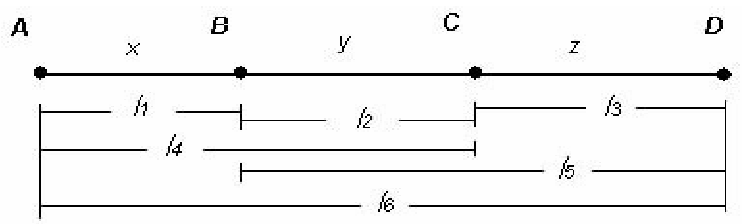
Příklad 2.1

Zadání:

Pro kontrolu dálkoměrů byla vybudována testovací základna, tvořená čtyřmi body A, B, C, a D, přibližně stejně vzdálenými jeden od druhého (viz obr. 4.1). Každý testovaný přístroj má za úkol změřit všech šest v úvahu přicházejících délek (l_1, l_2, ... , l_6) a jejich vyrovnáním určit tři délky x, y, z mezi jednotlivými body AB, BC, CD. Testovaným dálkoměrem byly naměřeny následující hodnoty vodorovných délek v metrech:

l_1 [m]	l_2 [m]	l_3 [m]	l_4 [m]	l_5 [m]	l_6 [m]
140,211	150,035	159,816	290,245	309,845	450,052

Dále předpokládejme, že všechny naměřené hodnoty byly určeny se stejnou přesností.



Obrázek 2.1: Schéma měřených veličin na testovací základně

a) Určení počtu nadbytečných měření (počtu podmínkových rovnic):

Počet měření n = 6, počet nutných měření k = 3, počet nadbytečných měření r = n – k = 6 – 3 = 3. Počet nadbytečných měření je roven počtu podmínkových rovnic. Pro porovnání s vyrovnáním metodou zprostředkujících měření bylo v obrázku ponecháno značení neznámých veličin x, y, z.

b) Sestavení podmínkových rovnic:

Z více možností sestavení tří vzájemně nezávislých podmínkových rovnic vybereme například:

$$\varphi_a(\tilde{l}_1,\tilde{l}_2,\tilde{l}_3,\tilde{l}_4,\tilde{l}_5,\tilde{l}_6) \equiv \tilde{l}_1+\tilde{l}_2-\tilde{l}_4=0 \quad ,$$
$$\varphi_b(\tilde{l}_1,\tilde{l}_2,\tilde{l}_3,\tilde{l}_4,\tilde{l}_5,\tilde{l}_6) \equiv \tilde{l}_2+\tilde{l}_3-\tilde{l}_5=0 \quad ,$$
$$\varphi_a(\tilde{l}_1,\tilde{l}_2,\tilde{l}_3,\tilde{l}_4,\tilde{l}_5,\tilde{l}_6) \equiv \tilde{l}_1+\tilde{l}_2+\tilde{l}_3-\tilde{l}_6=0 \quad .$$

c) Sestavení odchylkových rovnic a výpočet odchylek

Odchylkové rovnice získáme dosazením naměřených hodnot do podmínkových rovnic:

$$l_1 + l_2 - l_4 = 140{,}211 + 150{,}035 - 290{,}245 = +\,0{,}001\ m\,,$$
$$l_2 + l_3 - l_5 = 150{,}035 + 159{,}816 - 309{,}845 = +\,0{,}006\ m\,,$$
$$l_1 + l_2 + l_3 - l_6 = 140{,}211 + 150{,}035 + 159{,}816 - 450{,}052 = +\,0{,}010\ m\,.$$

Číselné údaje na pravé straně rovnic jsou odchylky (uzávěry) a můžeme z nich sestavit vektor uzávěrů:

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +0{,}001 \\ +0{,}006 \\ +0{,}010 \end{pmatrix}.$$

d) Sestavení přetvořených podmínkových rovnic

Koeficienty přetvořených podmínkových rovnic jsou parciální derivace podmínkových rovnic podle jednotlivých měřených veličin

$$a_1 = +1,\quad a_2 = +1,\quad a_3 = 0,\quad a_4 = -1,\quad a_5 = 0,\quad a_6 = 0\,,$$
$$b_1 = 0,\quad b_2 = +1,\quad b_3 = +1,\quad b_4 = 0,\quad b_5 = -1,\quad b_6 = 0\,,$$
$$c_1 = +1,\quad c_2 = +1,\quad c_3 = +1,\quad c_4 = 0,\quad c_5 = 0,\quad c_6 = -1\,.$$

Přetvořené podmínkové rovnice v klasické podobě vypadají následovně:

$$+1v_1 + 1v_2 + 0v_3 - 1v_4 + 0v_5 + 0v_6 + 0{,}001 = 0 \quad ,$$
$$+0v_1 + 1v_2 + 1v_3 + 0v_4 - 1v_5 + 0v_6 + 0{,}006 = 0 \quad ,$$
$$+1v_1 + 1v_2 + 1v_3 + 0v_4 + 0v_5 - 1v_6 + 0{,}010 = 0 \quad .$$

V maticové podobě potom

$$\boldsymbol{Bv} + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}\ ,$$

kde

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} +1 & +1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & +1 & 0 & -1 & 0 \\ +1 & +1 & +1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{pmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} +0{,}001 \\ +0{,}006 \\ +0{,}010 \end{pmatrix} \quad .$$

e) Sestavení normálních rovnic pro koreláty

Protože jsou všechna měření stejně přesná (viz. zadání), můžeme jim přisoudit stejné váhy, nejlépe rovny jedničce.

$p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = p_6 = 1$.

Pokud bychom přece jen chtěli sestavit matici vah, byla by to jednotková matice:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I} \ .$$

Inverzní matice $\boldsymbol{P}^{-1}$, která má na diagonále reciproké váhy bude v tomto případě rovněž maticí jednotkovou:

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{p_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{p_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{p_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{p_4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{p_5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{p_6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}$$

Protože se jedná o jednotkové matice, nebudeme váhy v dalším výpočtu uvádět.

Dále vypočítáme koeficienty normálních rovnic pro koreláty tak, že vypočteme jednotlivé sumační členy podle (2.24b)

Normální rovnice tedy budou:

$+ 3\ k_a + 1\ k_b + 2\ k_c + 0{,}001 = 0$,

$+ 1\ k_a + 3\ k_b + 2\ k_c + 0{,}006 = 0$,

$+ 2\ k_a + 2\ k_b + 4\ k_c + 0{,}010 = 0$.

V maticové podobě:

$$\boldsymbol{BP}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{k} + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{BB}^T\boldsymbol{k} + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{Nk} + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \ ,$$

*kde matice koeficientů normálních rovnic **N** bude:*

$$\boldsymbol{N} = \begin{pmatrix} +3 & +1 & +2 \\ +1 & +3 & +2 \\ +2 & +2 & +4 \end{pmatrix} \quad a \quad \boldsymbol{k} = \begin{pmatrix} k_a \\ k_b \\ k_c \end{pmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{B}^T = \begin{pmatrix} +1 & 0 & +1 \\ +1 & +1 & +1 \\ 0 & +1 & +1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

f) Výpočet korelát = řešení normálních rovnic

Libovolnou metodou pro řešení systému tří lineárních rovnic pro tři neznámé nyní vypočteme z normálních rovnic neznámé parametry čili koreláty.

$k_a = +0{,}00200$; $k_b = -0{,}00050$; $k_c = -0{,}00325$.

Pokud budeme pracovat s maticemi musíme nejprve vypočítat inverzní matici $\boldsymbol{N}^{-1}$ k matici $\boldsymbol{N}$. K výpočtu použijeme vhodný výpočetní program, kterým bývá vybavena většina tabulkových procesorů nebo matematických počítačových knihoven.

$$\boldsymbol{N}^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 & -0{,}25 \\ 0 & 0{,}5 & -0{,}25 \\ -0{,}25 & -0{,}25 & 0{,}5 \end{pmatrix} .$$

O správném výpočtu inverzní matice se můžeme přesvědčit jejím vynásobením s původní maticí, výsledkem součinu obou matic musí být matice jednotková, neboť platí:

$$\boldsymbol{N}\boldsymbol{N}^{-1} = \boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{N} = \boldsymbol{I} \quad .$$

Koreláty vypočteme z rovnice $\boldsymbol{k} = -\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{u}$

$$\boldsymbol{k} = \begin{pmatrix} +0{,}00200 \\ -0{,}00050 \\ -0{,}00325 \end{pmatrix} .$$

g) Výpočet oprav

Výpočet provedeme pro některé opravy klasicky

$$v_1 = a_1 k_a + b_1 k_b + \cdots + r_1 k_r = +1k_a + 0k_b + 1k_c = -0{,}00125m \quad ,$$

$$v_2 = a_2 k_a + b_2 k_b + \cdots + r_2 k_r = +1k_a + 1k_b + 1k_c = -0{,}00175m \quad ,$$

$$\vdots$$

$$v_6 = a_6 k_a + b_6 k_b + \cdots + r_6 k_r = +0k_a + 0k_b - 1k_c = +0{,}00325m \quad .$$

a pro všechny opravy maticově:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +0{,}00200 \\ -0{,}00050 \\ -0{,}00325 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}00125 \\ -0{,}00175 \\ -0{,}00375 \\ -0{,}00200 \\ +0{,}00050 \\ +0{,}00325 \end{pmatrix} \quad \textit{v metrech.}$$

h) Výpočet vyrovnaných měření

Opravy přičteme k měřeným veličinám a dostaneme vyrovnané hodnoty měřených veličin

$$\begin{pmatrix} \hat{l}_1 \\ \hat{l}_2 \\ \hat{l}_3 \\ \hat{l}_4 \\ \hat{l}_5 \\ \hat{l}_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \\ l_5 \\ l_6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 140{,}20975 \\ 150{,}03325 \\ 159{,}81225 \\ 290{,}24000 \\ 309{,}84550 \\ 450{,}05525 \end{pmatrix}, \text{ v metrech.}$$

Po kontrole splnění podmínkových rovnic výsledky vhodně zaokrouhlíme, v tomto případě na milimetry. Velikost zaokrouhlení je dána přesností měření o jejímž výpočtu bude pojednáno později.

i) Kontrola splnění podmínkových rovnic

Vyrovnané hodnoty měřených veličin dosadíme do původních podmínkových rovnic a přesvědčíme se o splnění stanovených podmínek:

$$\hat{l}_1 + \hat{l}_2 - \hat{l}_4 = 140{,}20975 + 150{,}03325 - 290{,}24300 = 0{,}00000 \quad ,$$

$$\hat{l}_2 + \hat{l}_3 - \hat{l}_5 = 150{,}03325 + 159{,}81225 - 309{,}84550 = 0{,}00000 \quad ,$$

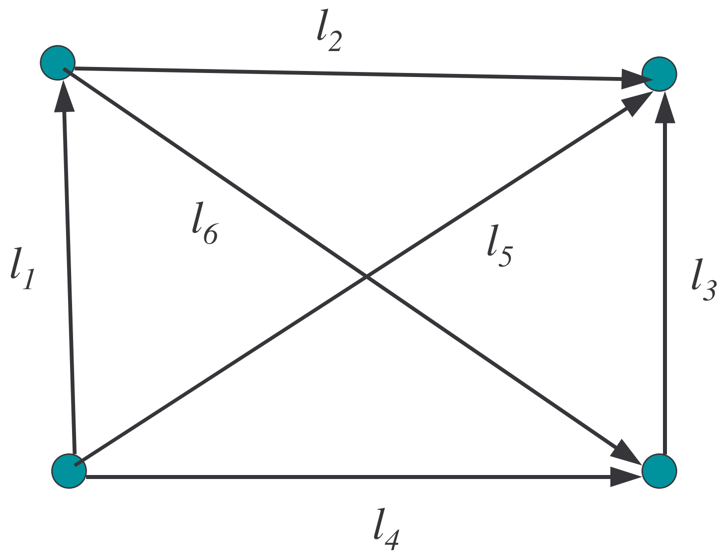
$$\hat{l}_1 + \hat{l}_2 + \hat{l}_3 - \hat{l}_6 = 140{,}20975 + 150{,}03325 + 159{,}81225 - 450{,}05525 = 0{,}00000 \quad .$$

Další postup ve výpočtu tohoto příkladu bude uveden ve stati 2.10.

2.8.2 Vyrovnání nivelační sítě

Příklad 2.2

Na obrázku 2.2 je nakreslena schématicky malá nivelační síť tvořená 4 body, ve které byla změřena nivelační převýšení mezi všemi body navzájem. Celkem tedy bylo změřeno 6 převýšení (výškových rozdílů) l_1 , l_2 , ... , l_6 metodou geometrické nivelace ze středu. *Šipky na obrázku označují směr stoupání jednotlivých převýšení. V příkladu bude vysvětlen jen postup a nebudou v něm proto uváděny konkrétní číselné hodnoty naměřených výškových rozdílů.*



Obrázek 2.2 Schéma nivelační sítě

a) Určení počtu nadbytečných měření = počtu podmínkových rovnic:

K určení vzájemné výškové polohy stačí určit 3 výškové rozdíly. Protože celkem bylo změřeno 6 výškových rozdílů, jsou 3 z nich nadbytečné.

Počet všech měření n = *6,*

počet nutných měření k = *3,*

počet nadbytečných měření r = n – k = *3* .

b) Sestavení podmínkových rovnic

Každé nadbytečné měření umožňuje sestavit jednu podmínkovou rovnici. Musíme tedy sestavit 3 podmínkové rovnice podle zásady, že v uzavřeném nivelačním pořadu musí být součet převýšení roven nule.

$$\tilde{l}_1 + \tilde{l}_2 - \tilde{l}_5 = \hat{l}_1 + \hat{l}_2 - \hat{l}_5 = 0 \quad ,$$
$$\tilde{l}_5 - \tilde{l}_3 - \tilde{l}_4 = \hat{l}_5 - \hat{l}_3 - \hat{l}_4 = 0 \quad ,$$
$$\tilde{l}_1 + \tilde{l}_6 - \tilde{l}_4 = \hat{l}_1 + \hat{l}_6 - \hat{l}_4 = 0 \quad .$$

c) Sestavení odchylkových rovnic a výpočet odchylek

$$l_1 + l_2 - l_5 = u_a \quad ,$$
$$l_5 - l_3 - l_4 = u_b \quad ,$$
$$l_1 + l_6 - l_4 = u_c \quad .$$

d) Sestavení přetvořených podmínkových rovnic

$$1v_1 + 1v_2 + 0v_3 + 0v_4 - 1v_5 + 0v_6 + u_a = 0 \quad ,$$
$$0v_1 + 0v_2 - 1v_3 - 1v_4 + 1v_5 + 0v_6 + u_b = 0 \quad ,$$
$$1v_1 + 0v_2 + 0v_3 - 1v_4 + 0v_5 + 1v_6 + u_c = 0 \quad .$$

e) Sestavení normálních rovnic pro koreláty

$$+3k_a - 1k_b + 1k_c + u_a = 0 \quad ,$$
$$-1k_a + 3k_b + 1k_c + u_b = 0 \quad ,$$
$$+1k_a + 1k_b + 3k_c + u_c = 0 \quad .$$

Další postup spočívá v řešení normálních rovnic, tj. ve výpočtu neznámých korelát, následném výpočtu oprav a vyrovnaných měření. Jejich dosazením do podmínkových rovnic ověříme splnění zadaných matematických podmínek. Číselně je příklad řešen v 3. kapitole.

Kontrolní otázka 2.5

Co si myslíte že se stane při vyrovnání podmínkových měření, když zavedeme méně podmínkových rovnic, než je jejich stanovený počet?

Kontrolní otázka 2.6

Co si myslíte že se stane při vyrovnání podmínkových měření, když zavedeme více podmínkových rovnic, než je jejich stanovený počet? Pokuste se sestavit v obou vzorových příkladech jiné(nebo další) podmínky než byly v příkladech použity.

Kontrolní otázka 2.7

Jak určím výšky bodů v příkladu 2.2, když nebyla žádná výška zadána?

Kontrolní otázka 2.8

Změní se počet podmínkových rovnic v příkladu 2.2, když budeme znát výšku jednoho bodu, případně dvou bodů v uvedené nivelační síti?

Odpovědi na uvedené otázky jsou uvedeny v klíči

2.9 Výpočet charakteristik přesnosti

Obdobně jako při vyrovnání zprostředkujících měření tvoří výpočty charakteristik přesnosti významnou část výpočetního postupu, neboť nám umožňují posoudit přesnost výsledků vyrovnání, případně přesnost funkcí vyrovnaných veličin (vyrovnaných měření).

2.9.1 Jednotková střední chyba po vyrovnání (aposteriorní)

Měřené veličiny l_i vstoupily do vyrovnání s *apriorní přesností* vyjádřenou buď směrodatnými odchylkami σ_i nebo základními středními chybami $\overline{m}_i$. Slovem *apriorní* zde rozumíme „určeny před vyrovnáním" a slovem *aposteriorní* „určeny v rámci vyrovnání". Tyto veličiny můžeme sestavit do příslušných kovariančních matic. V mnoha případech se přesnost měřených veličin vyjadřuje vahami p_i . Mezi charakteristikami přesnosti a váhami platí vztahy vyplývající z definice váhy, kdy se do výpočtu vah zavádí vhodná konstanta $\sigma_o{}^2$ - apriorní jednotková varianci, či $\overline{m}_o^2$ - apriorní úplná variance. Váhy p_i , respektive váhové koeficienty q_i vypočítáme podle známých vztahů, definovaných již v předcházejícím modulu [5].

$$p_i = \frac{\sigma_o^2}{\sigma_i^2} \quad , \quad p_i = \frac{\overline{m}_o^2}{\overline{m}_i^2} \quad , \text{ resp. } \quad q_i = \frac{\sigma_i^2}{\sigma_o^2} \quad , \quad q_i = \frac{\overline{m}_i^2}{\overline{m}_o^2} \quad .$$

Připomeňme, že váhový koeficient q_i je vlastně reciproká váha. V mnoha praktických aplikacích se váhy měřených veličin stanoví jiným způsobem, např. z délky nivelačních oddílů, počtu měřených skupin apod. Variance (v případě korelovaných veličin i kovariance) můžeme sestavit do kovarinční matice ($\boldsymbol{\Sigma}$ nebo $\boldsymbol{C}$) , váhy do váhové matice $\boldsymbol{P}$ a váhové koeficienty (kofaktory) do kofaktorové matice $\boldsymbol{Q}$. Mezi těmito maticemi platí již dříve uvedené vztahy

$$\boldsymbol{\Sigma} = \sigma_o^2 \boldsymbol{P}^{-1} = \sigma_o^2 \boldsymbol{Q} \quad , \quad \boldsymbol{P} = \boldsymbol{Q}^{-1} .$$

Abychom rozlišili kovarianční a další uvedené matice pro měřené veličiny od kovariančních a dalších matic pro vyrovnané veličiny, doplníme v tomto textu tyto matice příslušnými indexy. Protože jsou tyto matice čtvercové, budou indexy příslušně zdvojeny.

Pro vyjádření apriorní přesnosti měřených veličin l_i budeme používat označení:

$\boldsymbol{\Sigma}_{ll}$ - apriorní kovarianční matici měřených veličin,

$\boldsymbol{Q}_{ll}$ - apriorní matice váhových koeficientů (kofaktorů).

Z vyrovnání jsme obdrželi opravy k měřeným veličinám, které svojí velikostí jsou významným zdrojem informace o přesnosti měření. Velké opravy svědčí o větším rozptylu měřených hodnot, než opravy malé. Pro výpočet odhadu této přesnosti z oprav vypočteme <u>*aposteriorní jednotkovou varianci*</u> $\hat{\sigma}_o^2$ podle

$$\hat{\sigma}_o^2 = \frac{\sum pv^2}{n-k} = \frac{\sum pv^2}{r} \quad , \qquad (2.38a)$$

$$\hat{\sigma}_o^2 = \frac{\sum v^2}{n-k} = \frac{\sum v^2}{r} \quad . \qquad (2.38b)$$

Vzorec (2.38b) se používá v případě stejné přesnosti měřených veličin ($p_i = 1$).

<u>*Jednotkovou střední chybu(aposteriorní)*</u> vypočteme podle obdobných vztahů:

$$\hat{m}_o = \sqrt{\frac{\sum pv^2}{n-k}} = \sqrt{\frac{\sum pv^2}{r}}$$
$$\hat{m}_o = \sqrt{\frac{\sum v^2}{n-k}} = \sqrt{\frac{\sum v^2}{r}} \quad . \qquad (2.39)$$

V maticové podobě budou vzorce (2.38) vyjádřeny:

$$\hat{\sigma}_o^2 = \frac{\boldsymbol{v}^T \boldsymbol{P}\, \boldsymbol{v}}{n-k} = \frac{\boldsymbol{v}^T \boldsymbol{P}\, \boldsymbol{v}}{r} = -\frac{\boldsymbol{k}^T \boldsymbol{u}}{r}, \qquad \hat{\sigma}_o^2 = \frac{\boldsymbol{v}^T\, \boldsymbol{v}}{n-k} = \frac{\boldsymbol{v}^T\, \boldsymbol{v}}{r} \tag{2.40}$$

a vzorce (2.39)

$$\hat{m}_o = \sqrt{\frac{\boldsymbol{v}^T \boldsymbol{P}\, \boldsymbol{v}}{n-k}} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{v}^T \boldsymbol{P}\, \boldsymbol{v}}{r}}, \qquad \hat{m}_o = \sqrt{\frac{\boldsymbol{v}^T\, \boldsymbol{v}}{n-k}} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{v}^T\, \boldsymbol{v}}{r}}. \tag{2.41}$$

Vztahy bez matice vah $\boldsymbol{P}$ platí pro stejně přesná měření.

V uvedených vzorcích je součet čtverců oprav dělen číslem r, tj. počtem nadbytečných měření, což je počet podmínkových rovnic. V statistické terminologii se vlastně jedná o počet stupňů volnosti.

Aposteriorní jednotková variance nebo aposteriorní jednotková střední chyba jsou (na rozdíl od jejich apriorních hodnot) náhodné veličiny. Obecně lze předpokládat, že s větším počtem nadbytečných veličin budou tyto aposteriorní hodnoty určeny spolehlivěji. Pokud nebyla měření zatížena hrubými chybami nebo omyly a předpokládáme normální rozdělení měřických chyb, pak

$$\text{pro } n \to \infty \text{ bude } \hat{\sigma}_o^2 \to \sigma_o^2 \tag{2.42}$$

Problematice testování apriorní a aposteriorní jednotkové variance bude věnována samostatná stať v dalším studijním modulu. Pokud je takovýmto testem prokázáno, že nebyla nedodržena předpokládaná apriorní přesnost, budeme v další výpočtech charakteristik přesností používat apriorní jednotkovou varianci (či apriorní jednotkovou střední chybu). Pokud se aposteriorní jednotková variance statisticky významně liší od apriorní hodnoty a počet měření je dostatečně velký, lze v dalších výpočtech používat aposteriorní hodnotu. V každém případě je ale vhodné zabývat se příčinami tohoto rozdílu.

V případech, kdy byly použity přímo váhy měřených veličin bez znalosti apriorní přesnosti měření (např. váhy jako délky nivelačních oddílů) je použití aposteriorních hodnot velmi cennou informací o přesnosti použité metody nebo použitých metod.

2.9.2 Střední chyby měřených veličin (aposteriorní)

Dojde-li k rozhodnutí dále používat aposteriorní odhad jednotkové variance, můžeme vypočítat aposteriorní přesnosti měřených veličin podle

$$\hat{\sigma}_{l_i} = \frac{\hat{\sigma}_o}{\sqrt{p_i}} = \hat{\sigma}_o \sqrt{q_i} \quad , \quad \hat{m}_{l_i} = \frac{\hat{m}_o}{\sqrt{p_i}} = \hat{m}_o \sqrt{q_i} \quad . \tag{2.43}$$

Při maticovém vyjádření nalezneme kvadráty těchto hodnot na diagonále příslušných kovariančních matic:

$$\hat{\boldsymbol{C}}_{ll} = \hat{\sigma}_o^2 \boldsymbol{P}^{-1} = \hat{\sigma}_o^2 \boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_{l_1}^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \hat{\sigma}_{l_2}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \hat{\sigma}_{l_n}^2 \end{pmatrix}, \tag{2.44}$$

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{ll} = \hat{m}_o^2 \boldsymbol{P}^{-1} = \hat{m}_o^2 \boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} \hat{m}_{l_1}^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \hat{m}_{l_2}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \hat{m}_{l_n}^2 \end{pmatrix}. \tag{2.45}$$

V případě, že matice $\boldsymbol{Q}$ nejsou jen diagonální (při závislých měřeních), budou výsledné kovarianční matice ve vztazích (2.44) a (2.45) maticemi plnými.

2.9.3 Střední chyby vyrovnaných veličin

Odvození matice váhových koeficientů $\boldsymbol{Q}_{\hat{l}\hat{l}}$ vyrovnaných měřených veličin $\hat{l}_i$ vychází ze zákona hromadění váhových koeficientů (odvozeného v modulu [5]). Tento zákon umožňuje vypočítat matici váhových koeficientů funkčních hodnot, známe-li matici váhových koeficientů vstupních veličin.

Pro $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{H}\ \boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{Q}_{xx}$ bude $\boldsymbol{Q}_{yy} = \boldsymbol{H}\ \boldsymbol{Q}_{xx}\ \boldsymbol{H}^T$.

Nejprve si odvodíme funkční vztah mezi opravami a měřenými veličinami. Pro jeho odvození vyjdeme ze vztahu (2.17)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Bv} + \boldsymbol{u} &= \boldsymbol{0} \quad , \\ \boldsymbol{u} = -\boldsymbol{Bv} &= -\boldsymbol{B}\left(\hat{\boldsymbol{l}} - \boldsymbol{l}\right) = \boldsymbol{Bl} \quad , \end{aligned} \tag{2.46}$$

neboť $\boldsymbol{B}\hat{\boldsymbol{l}} = \boldsymbol{0}$.

V dalším využijeme vztahu (2.32a) ve kterém označíme inverzní matici vah $\boldsymbol{P}^{-1}$ pro měřené veličiny jejich maticí váhových koeficientů $\boldsymbol{Q}_{ll}$:

$$\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{Q}_{ll} \boldsymbol{B}^T \left(\boldsymbol{B}\ \boldsymbol{Q}_{ll}\ \boldsymbol{B}^T\right)^{-1} \boldsymbol{u} \quad . \tag{2.47}$$

Dosazením (2.46) do (2.47) obdržíme přímý vztah mezi opravami a měřenými veličinami, který bývá někdy využíván ke studiu vlivu působení chyby v některé měřené veličině na jednotlivé opravy, tj. vlastně na vyrovnané veličiny.

$$\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{Q}_{ll}\boldsymbol{B}^T\left(\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{Q}_{ll}\;\boldsymbol{B}^T\right)^{-1}\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{l} = \boldsymbol{H}\;\boldsymbol{l} \quad . \qquad (2.48)$$

Nejprve si odvodíme matici váhových koeficientů oprav

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Q}_{vv} &= \boldsymbol{H}\boldsymbol{Q}_{ll}\boldsymbol{H}^T \\ &= (-\boldsymbol{Q}_{ll}\boldsymbol{B}^T\left(\boldsymbol{B}\;\boldsymbol{Q}_{ll}\;\boldsymbol{B}^T\right)^{-1}\boldsymbol{B})\,\boldsymbol{Q}\,(-\boldsymbol{Q}_{ll}\boldsymbol{B}^T\left(\boldsymbol{B}\;\boldsymbol{Q}_{ll}\;\boldsymbol{B}^T\right)^{-1}\boldsymbol{B})^T \\ &= \boldsymbol{Q}_{ll}\boldsymbol{B}^T\left(\boldsymbol{B}\;\boldsymbol{Q}_{ll}\;\boldsymbol{B}^T\right)^{-1}\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{Q}\,\boldsymbol{B}^T\left(\boldsymbol{B}\;\boldsymbol{Q}_{ll}\;\boldsymbol{B}^T\right)^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_{ll} \\ &= \boldsymbol{Q}_{ll}\boldsymbol{B}^T\left(\boldsymbol{B}\;\boldsymbol{Q}_{ll}\;\boldsymbol{B}^T\right)^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_{ll} \quad .\end{aligned}$$

Výraz v závorce je matice koeficientů normálních rovnic pro koreláty (2.27a).

Matici kofaktorů oprav $\boldsymbol{v}$ lze pak psát:

$$\boldsymbol{Q}_{vv} = \boldsymbol{Q}_{ll}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{Q}_{ll} \quad . \qquad (2.49a)$$

Při stejně přesných měřeních

$$\boldsymbol{Q}_{vv} = \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}^T\left(\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{B}^T\right)^{-1}\boldsymbol{B} \quad . \qquad (2.49b)$$

<u>*Matice kofaktorů oprav*</u> se využívá při testování velikosti jednotlivých oprav. Tento způsob testování bude objasněn až v dalším modulu. Tato matice bude nyní využita pro závěrečné odvození matice kofaktorů vyrovnaných hodnot měřených veličin.

$$\hat{\boldsymbol{l}} = \boldsymbol{l} + \boldsymbol{v} = \left(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q}_{ll}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{B}\right)\boldsymbol{l} \quad , \qquad (2.50a)$$

kde $\boldsymbol{I}$ je jednotková matice.

Při stejně přesných měřeních bude vztah (2.50a) vyjádřen bez matice kofaktorů

$$\hat{\boldsymbol{l}} = \boldsymbol{l} + \boldsymbol{v} = \left(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}^T\left(\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{B}^T\right)^{-1}\boldsymbol{B}\right)\boldsymbol{l} \quad , \qquad (2.50b)$$

<u>Matice kofaktorů vyrovnaných hodnot měřených veličin</u> $\widehat{\boldsymbol{l}}$ tedy bude

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{Q}_{\widehat{l}\widehat{l}} &= (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{Q}_{ll}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{B})\,\boldsymbol{Q}_{ll}\,(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{Q}_{ll}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{B})^T \\
&= (\boldsymbol{Q}_{ll}-\boldsymbol{Q}_{ll}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_{ll})(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_{ll}) \\
&= \boldsymbol{Q}_{ll}-\boldsymbol{Q}_{ll}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_{ll}-\boldsymbol{Q}_{ll}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_{ll}+\boldsymbol{Q}_{ll}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_{ll}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_{ll} \\
&= \boldsymbol{Q}_{ll}-\boldsymbol{Q}_{ll}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_{ll}-\boldsymbol{Q}_{ll}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_{ll}+\boldsymbol{Q}_{ll}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{N}\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_{ll} \\
&= \boldsymbol{Q}_{ll}-\boldsymbol{Q}_{ll}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_{ll} \quad .
\end{aligned}$$

$$\boxed{\boldsymbol{Q}_{\widehat{l}\widehat{l}} = \boldsymbol{Q}_{ll}-\boldsymbol{Q}_{vv} = (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{Q}_{ll}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{B})\boldsymbol{Q}_{ll} \quad . \qquad (2.51a)}$$

A pro případ stejně přesných měření

$$\boxed{\boldsymbol{Q}_{\widehat{l}\widehat{l}} = \boldsymbol{Q}_{ll}-\boldsymbol{Q}_{vv} = \boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}^T(\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{B}^T)^{-1}\boldsymbol{B} \quad . \qquad (2.51b)}$$

Jak matice kofaktorů oprav, tak i matice kofaktorů vyrovnaných měření jsou matice symetrické a obvykle plné tzn., že mívají obsazeny i nediagonální prvky.

$$\begin{pmatrix} Q_{\widehat{l}_1\widehat{l}_1} & Q_{\widehat{l}_1\widehat{l}_2} & \cdots & Q_{\widehat{l}_1\widehat{l}_n} \\ Q_{\widehat{l}_2\widehat{l}_1} & Q_{\widehat{l}_2\widehat{l}_2} & \cdots & Q_{\widehat{l}_2\widehat{l}_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{\widehat{l}_n\widehat{l}_1} & Q_{\widehat{l}_n\widehat{l}_2} & \cdots & Q_{\widehat{l}_n\widehat{l}_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{l_1l_1} & Q_{l_1l_2} & \cdots & Q_{l_1l_n} \\ Q_{l_2l_1} & Q_{l_2l_2} & \cdots & Q_{l_2l_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{l_nl_1} & Q_{l_nl_2} & \cdots & Q_{l_nl_n} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} Q_{v_1v_1} & Q_{v_1v_2} & \cdots & Q_{v_1v_n} \\ Q_{v_2v_1} & Q_{v_2v_2} & \cdots & Q_{v_2v_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{v_nv_1} & Q_{v_nv_2} & \cdots & Q_{v_nv_n} \end{pmatrix}$$

<u>Střední chyby oprav,</u> resp. <u>směrodatné odchylky oprav</u> získáme vynásobením jednotkové střední chyby (směrodatné odchylky) odmocninou z příslušného diagonálního prvku kofaktorové matice oprav

$$\boxed{m_{v_i} = \overline{m}_o\sqrt{Q_{v_iv_i}} \quad , \quad \sigma_{v_i} = \sigma_o\sqrt{Q_{v_iv_i}} \quad . \qquad (2.52)}$$

Stejným způsobem určíme i <u>střední chyby vyrovnaných měření</u>, resp. <u>směrodatné odchylky vyrovnaných měření</u>:

$$\boxed{m_{\widehat{l}_i} = \overline{m}_o\sqrt{Q_{\widehat{l}_i\widehat{l}_i}} \quad , \quad \sigma_{\widehat{l}_i} = \sigma_o\sqrt{Q_{\widehat{l}_i\widehat{l}_i}} \quad . \qquad (2.53)}$$

Pokud použijeme při výpočtu středních chyb či směrodatných odchylek aposteriorní odhady, nahradíme ve vzorcích (2.52) a (2.53) apriorní hodnoty $\overline{m}_o$ a σ_o hodnotami $\widehat{m}_o$ a $\widehat{\sigma}_o$.

Příslušné kovarianční matice získáme obdobně <u>Kovarianční matice oprav</u> bude pro apriorní jednotkovou varianci označena $\boldsymbol{\Sigma}_{vv}$ a pro její aposteriorní odhad $\boldsymbol{C}_{vv}$. Pro střední chyby (úplné variance) budou matice doplněny pruhem:

$$\boldsymbol{\Sigma}_{vv} = \sigma_o^2 \, \boldsymbol{Q}_{vv} \quad , \quad \overline{\boldsymbol{\Sigma}}_{vv} = \overline{m}_o^2 \, \boldsymbol{Q}_{vv} \quad ,$$
$$\boldsymbol{C}_{vv} = \widehat{\sigma}_o^2 \, \boldsymbol{Q}_{vv} \quad , \quad \overline{\boldsymbol{C}}_{vv} = \widehat{m}_o^2 \, \boldsymbol{Q}_{vv} \quad . \tag{2.54}$$

Kovarianční matice vyrovnaných hodnot měřených veličin se vypočtou obdobně

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\widehat{l}\widehat{l}} = \sigma_o^2 \, \boldsymbol{Q}_{\widehat{l}\widehat{l}} \quad , \quad \overline{\boldsymbol{\Sigma}}_{\widehat{l}\widehat{l}} = \overline{m}_o^2 \, \boldsymbol{Q}_{\widehat{l}\widehat{l}} \quad ,$$
$$\boldsymbol{C}_{\widehat{l}\widehat{l}} = \widehat{\sigma}_o^2 \, \boldsymbol{Q}_{\widehat{l}\widehat{l}} \quad , \quad \boldsymbol{C}_{\widehat{l}\widehat{l}} = \widehat{m}_o^2 \, \boldsymbol{Q}_{\widehat{l}\widehat{l}} \quad . \tag{2.55}$$

Na diagonále příslušných matic se nacházejí variance nebo čtverce středních chyb. Na mimodiagonálních prvcích příslušné kovariance. Struktura těchto matic je stejná jako u matic (2.44) nebo (2.45), ale jejich prvky se týkají tentokrát vyrovnaných měření.

2.9.4 Střední chyby funkcí vyrovnaných měření

U vyrovnání podmínkových měření jsou hlavním výsledkem vyrovnání hodnoty vyrovnaných měření (například vyrovnaná převýšení v nivelační síti – viz. příklad 2.1 ve stati 2.8.2). Tyto hodnoty obvykle vstupují do dalších výpočetních vztahů. V uvedené nivelační síti bude nutno vypočítat výšky bodů. Budeme-li znát (nebo zvolíme-li) výšku jednoho bodu, lze ostatní výšky vypočítat jako funkci jednoho nebo více vyrovnaných převýšení. Protože vyrovnané hodnoty nelze již pokládat za vzájemně nezávislé, neboť prošly společným vyrovnáním, není možno použít zákony hromadění chyb pro nezávislé veličiny.

Při odvozování matice kofaktorů pro funkční hodnoty použijeme stejný postup jako při odvození středních chyb vyrovnaných měření.

Pro jednoduchost uvažujme pouze dvě lineární funkce n vyrovnaných měření

$$\begin{aligned} y_1 &= f(\widehat{l}_1, \widehat{l}_2, \cdots, \widehat{l}_n) = f_1 \, \widehat{l}_1 + f_2 \, \widehat{l}_2 + \cdots + f_n \, \widehat{l}_n \\ y_2 &= g(\widehat{l}_1, \widehat{l}_2, \cdots, \widehat{l}_n) = g_1 \, \widehat{l}_1 + g_2 \, \widehat{l}_2 + \cdots + g_n \, \widehat{l}_n \end{aligned} .$$

Tyto funkce lze zapsat v maticovém tvaru

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ g_1 & g_2 & \cdots & g_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{l}_1 \\ \widehat{l}_2 \\ \vdots \\ \widehat{l}_n \end{pmatrix} \quad , \textit{ nebo též} \quad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{F} \, \widehat{\boldsymbol{l}} \quad . \tag{2.56}$$

Dále předpokládejme, že známe charakteristiky přesnosti vyrovnaných měření vyjádřené např. kovarianční matici $\boldsymbol{\Sigma}_{\widehat{l}\widehat{l}}$ nebo maticí váhových koeficientů $\boldsymbol{Q}_{\widehat{l}\widehat{l}}$. Obdobně jako ve stati 2.9.3 aplikujeme na funkci (2.56) zákon hromadění váhových koeficientů čímž získáme *matici kofaktorů funkčních hodnot vyrovnaných měření*:

$$\boldsymbol{Q}_{ff} = \boldsymbol{Q}_{yy} = \boldsymbol{F}\,\boldsymbol{Q}_{\hat{l}\hat{l}}\,\boldsymbol{F}^T \quad . \tag{2.57}$$

V tomto případě bude mít matice $\boldsymbol{Q}_{ff}$ dva sloupce a dva řádky. Na její diagonále se budou nacházet kofaktory příslušných funkčních hodnot.

$$\boldsymbol{Q}_{ff} = \begin{pmatrix} Q_{ff} & Q_{fg} \\ Q_{gf} & Q_{gg} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{y_1 y_1} & Q_{y_1 y_2} \\ Q_{y_2 y_1} & Q_{y_2 y_2} \end{pmatrix} \quad .$$

Směrodatné odchylky (střední chyby) funkčních hodnot se vypočtou známým způsobem s využitím buď apriorních nebo aposteriorních jednotkových hodnot (směrodatných odchylek, středních chyb):

$$\begin{aligned} \sigma_{y_1} &= \sigma_o \sqrt{Q_{y_1 y_1}} \quad , \quad \sigma_{y_2} = \sigma_o \sqrt{Q_{y_2 y_2}} \\ \hat{\sigma}_{y_1} &= \hat{\sigma}_o \sqrt{Q_{y_1 y_1}} \quad , \quad \hat{\sigma}_{y_2} = \hat{\sigma}_o \sqrt{Q_{y_2 y_2}} \\ m_{y_1} &= \overline{m}_o \sqrt{Q_{y_1 y_1}} \quad , \quad m_{y_1} = \overline{m}_o \sqrt{Q_{y_1 y_1}} \\ \hat{m}_{y_1} &= \hat{m}_o \sqrt{Q_{y_1 y_1}} \quad , \quad m_{y_1} = \hat{m}_o \sqrt{Q_{y_1 y_1}} \end{aligned} \tag{2.58}$$

Obdobně je možno určit příslušné *<u>kovarianční matice funkcí vyrovnaných veličin</u>*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Sigma}_{ff} &= \sigma_o^2\,\boldsymbol{Q}_{ff} \quad , \quad \overline{\boldsymbol{\Sigma}}_{ff} = \overline{m}_o^2\,\boldsymbol{Q}_{ff} \quad , \\ \boldsymbol{C}_{ff} &= \hat{\sigma}_o^2\,\boldsymbol{Q}_{ff} \quad , \quad \boldsymbol{C}_{\hat{l}\hat{l}} = \hat{m}_o^2\,\boldsymbol{Q}_{ff} \quad . \end{aligned} \tag{2.59}$$

Při odvození jsme předpokládali, že obě uvedené funkce jsou lineární. Pokud by lineární nebyly, bylo by nutno je linearizovat standardním postupem použitým již dříve, tj. jejich rozvojem do Taylorovy řady se zanedbáním derivací vyšších řádů. Maticí $\boldsymbol{F}$ ve vytahu (2.57) pak bude matice příslušných parciálních derivací, což lze zjednodušeně zapsat

$$\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial \hat{l}_1} & \dfrac{\partial f}{\partial \hat{l}_2} & \cdots & \dfrac{\partial f}{\partial \hat{l}_n} \\ \dfrac{\partial g}{\partial \hat{l}_1} & \dfrac{\partial g}{\partial \hat{l}_2} & \cdots & \dfrac{\partial g}{\partial \hat{l}_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ g_1 & g_2 & \cdots & g_n \end{pmatrix} \tag{2.60}$$

2.10 Příklad 2.1 (vyrovnání délek) - pokračování

Ve stati 2.8.1 byl počítán příklad 2.1 na vyrovnání délek. Výpočet byl ukončen určením vyrovnaných hodnot měřených veličin, které již splňovaly stanovené podmínky. Zde bude následovat výpočet charakteristki přesností.

jednotková střední chyba

$$\widehat{m}_o = \sqrt{\frac{\sum v^2}{n-k}} = \sqrt{\frac{0{,}0000335}{6-3}} = \sqrt{\frac{0{,}0000335}{3}} = 0{,}00334 \ ,$$

střední chyby jednotlivých měření

Vzhledem k tomu, že neznáme základní střední chybu, použijeme v dalších výpočtech její aposteriorní odhad $\widehat{m}_o$ *. Všechna měření jsou stejně přesná a proto budou mít stejné střední chyby* $\widehat{m}_i$

$$\widehat{m}_i = \frac{\widehat{m}_{\mathrm{o}}}{\sqrt{p_i}} = \widehat{m}_{\mathrm{o}}\sqrt{q_i} = \frac{0{,}00334}{\sqrt{1}} = 0{,}00334\ \mathrm{m} = 3{,}3\ \mathrm{mm} \quad .$$

střední chyby vyrovnaných měření

Nejprve vypočteme matici kofaktorů oprav

$$\boldsymbol{Q}_{vv} = \boldsymbol{B}^T(\boldsymbol{B}\ \boldsymbol{B}^T)\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} +0{,}50 & +0{,}25 & 0 & -0{,}25 & +0{,}25 & -0{,}25 \\ +0{,}25 & +0{,}50 & +0{,}25 & -0{,}25 & -0{,}25 & 0 \\ 0 & +0{,}25 & +0{,}50 & +0{,}25 & -0{,}25 & -0{,}25 \\ -0{,}25 & -0{,}25 & +0{,}25 & +0{,}50 & 0 & -0{,}25 \\ +0{,}25 & -0{,}25 & -0{,}25 & 0 & +0{,}50 & -0{,}25 \\ -0{,}25 & 0 & -0{,}25 & -0{,}25 & -0{,}25 & +0{,}50 \end{pmatrix}$$

a po ní matici kofaktorů vyrovnaných měření. Na její diagonále se nacházejí váhové koeficienty jednotlivých měřených veličin.

$$\boldsymbol{Q}_{\widehat{l}\widehat{l}} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}^T(\boldsymbol{B}\ \boldsymbol{B}^T)\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} +0{,}50 & -0{,}25 & 0 & +0{,}25 & -0{,}25 & +0{,}25 \\ -0{,}25 & +0{,}50 & -0{,}25 & +0{,}25 & +0{,}25 & 0 \\ 0 & -0{,}25 & +0{,}50 & -0{,}25 & +0{,}25 & +0{,}25 \\ +0{,}25 & +0{,}25 & -0{,}25 & +0{,}50 & 0 & +0{,}25 \\ -0{,}25 & +0{,}25 & +0{,}25 & 0 & +0{,}50 & +0{,}25 \\ +0{,}25 & 0 & +0{,}25 & +0{,}25 & +0{,}25 & +0{,}50 \end{pmatrix}$$

Protože všechny koeficienty na diagonále této matice jsou stejné (+0,5), je zřejmé, že všechna vyrovnané měření budou mít stejnou přesnost.

$$\widehat{m}_1 = \widehat{m}_o \sqrt{Q_{\widehat{l}_1 \widehat{l}_1}} = \widehat{m}_o \sqrt{Q_{11}} = 0{,}00334\ \sqrt{0{,}5} = 0{,}00236m = 2{,}4mm$$

$$\widehat{m}_2 = \widehat{m}_o \sqrt{Q_{22}} = 2.4mm, \cdots, \widehat{m}_6 = \widehat{m}_o \sqrt{Q_{66}} = 2.4mm.$$

střední chyby funkcí vyrovnaných měření

Pro ilustraci výpočtu střední chyby funkce určíme střední chybu délky s = x+y (viz obr. 2.1). Tato délka může být vypočtena různými postupy, např. jako součet prvního a druhého měření, nebo jako rozdíl šestého a třetího měření. Ukažme si, že oběma postupy obdržíme stejný výsledek

1. funkce $\qquad s = \widehat{l}_1 + \widehat{l}_2 = 290{,}24300m \quad ,$

2. funkce $\qquad s = \widehat{l}_6 - \widehat{l}_3 = 290{,}24300m \quad ,$

který je samozřejmě identický, neboť délky již jsou vyrovnány a splňují proto podmínkové rovnice. V našem případě byla uvažovaná délka s také přímo měřena a vyrovnána (čtvrté vyrovnané měření).

$$s = \widehat{l}_4 \ .$$

Chceme-li vypočítat přesnost obou funkcí, musíme nejprve určit matici $\boldsymbol{F}$ *jejich parciálních derivací (2.60). V tomto příkladě jsou obě funkce lineární:*

$$\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} +1 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & +1 \end{pmatrix} .$$

Matici kofaktorů funkčních hodnot vypočítáme ze vztahu (2.57)

$$\boldsymbol{Q}_{ff} = \boldsymbol{F}\ \boldsymbol{Q}_{\widehat{l}\,\widehat{l}}\ \boldsymbol{F}^T = \begin{pmatrix} +0{,}5 & +0{,}5 \\ +0{,}5 & +0{,}5 \end{pmatrix} .$$

Oba diagonální prvky v matici kofaktorů funkcí mají stejnou hodnotu. Střední chyby $\widehat{m}_{s_1}$, $\widehat{m}_{s_2}$ *funkcí* s_1 *a* s_2 *budou tedy stejné, neboť se jedná o jednu veličinu*

$$\begin{aligned} \widehat{m}_{s_1} &= \widehat{m}_o \sqrt{Q_{11}} = 2{,}4mm \\ \widehat{m}_{s_2} &= \widehat{m}_o \sqrt{Q_{22}} = 2{,}4mm \end{aligned} .$$

Výsledky jsou shodné i se střední chybou čtvrtého vyrovnaného měření .

2.11 Přechod na vyrovnání zprostředkujících měření

Jak bylo uvedeno ve stati 2.1.2 popisující obecný postup vyrovnání podmínkových měření, může po sestavení přetvořených rovnic oprav následovat dvojí postup. Při prvním tzv. korelátovém řešení, se přejde na normální rovnice pro koreláty. Tento postup byl detailně popsán v předcházejících statích. Alternativní postup je přechod na vyrovnání zprostředkujících měření, který bude rámcově popsán v této stati.

Výchozími rovnicemi pro přechod na vyrovnání zprostředkujících měření jsou přetvořené rovnice oprav (2.14). resp. (2.17):

$$
\begin{aligned}
&a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n + u_a = 0 \quad ,\\
&b_1 v_1 + b_2 v_2 + \cdots + b_n v_n + u_b = 0 \quad ,\\
&\quad\vdots\\
&r_1 v_1 + r_2 v_2 + \cdots + r_n v_n + u_r = 0 \quad .
\end{aligned}
$$

V této soustavě je n neznámých oprav vázaných r rovnicemi (podmínkami). V této soustavě zvolíme $k = n - r$ oprav jako zprostředkující neznámé. Zbylých r oprav určíme z podmínkových rovnic jako funkce zvolených zprostředkujících neznámých.

$$
\begin{aligned}
v_1 &= 1x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_k + 0\\
v_2 &= 0x_1 + 1x_2 + \cdots + 0x_k + 0\\
&\vdots\\
v_k &= 0x_1 + 0x_2 + \cdots + 1x_k + 0\\
v_{k+1} &= A_{k+1}x_1 + B_{k+1}x_2 + \cdots + K_{k+1}x_k + L_{k+1}\\
v_{k+2} &= A_{k+2}x_1 + B_{k+2}x_2 + \cdots + K_{k+2}x_k + L_{k+2}\\
&\vdots\\
v_{k+r} &= A_{k+r}x_1 + B_{k+r}x_2 + \cdots + K_{k+r}x_k + L_{k+r}
\end{aligned}
\tag{2.61}
$$

V rovnicích (2.61) je tedy celkem n oprav, neboť $k + r = n$

Rovnice (2.61) jsou vlastně přetvořené rovnice oprav jak jsme je definovali při vyrovnání zprostředkujících měření. Použití MNČ na systém rovnic oprav vede k normálním rovnicím. V případě stejných vah bude systém normálních rovnic mít tvar:

$$
\begin{aligned}
&\left(\sum AA\right)x_1 + \left(\sum AB\right)x_2 + \cdots + \left(\sum AK\right)x_k + \left(\sum AL\right) = 0 \quad ,\\
&\left(\sum AB\right)x_1 + \left(\sum BB\right)x_2 + \cdots + \left(\sum BK\right)x_k + \left(\sum BL\right) = 0 \quad ,\\
&\left(\sum AK\right)x_1 + \left(\sum BK\right)x_2 + \cdots + \left(\sum KK\right)x_k + \left(\sum KL\right) = 0 \quad .
\end{aligned}
\tag{2.62}
$$

Jejich řešením získáme neznámé x_1, x_2 , ... , x_k a tím i s nimi identické opravy

$$v_1 = x_1 \ , \ v_2 = x_2 \ , \ \ldots \ , \ v_k = x_k \ .$$

Zbývajících r oprav vypočteme ze zbývajících rovnic oprav v soustavě (2.61), přesněji řečeno všechny opravy vypočteme z této soustavy rovnic.

V případě různě přesných měření použijeme při výpočtu koeficientů normálních rovnic váhy. Koeficienty pak budou mít tvar

$$\sum pAA \quad , \quad \sum pAB \quad , \cdots , \sum pAL \quad atd.$$

Výpočet vyrovnaných hodnot měřených veličin, kontrolu splnění podmínkových rovnic a výpočet charakteristik přesnosti již provádíme dříve popsaným postupem.

Příklad 2.3

Použití metody přechodu na vyrovnání zprostředkujících měření si ukážeme na příkladu 2.1 ze stati 2.8.1, ve kterém po sestavení přetvořených podmínkových rovnic použijeme místo korelátového řešení právě postup přechodem na vyrovnání zprostředkujících měření.

Přetvořené podmínkové rovnice z příkladu 2.1 mají tvar:

$$+ 1v_1 + 1v_2 + 0v_3 - 1v_4 + 0v_5 + 0v_6 + 0{,}001 = 0 \quad ,$$

$$+ 0v_1 + 1v_2 + 1v_3 + 0v_4 - 1v_5 + 0v_6 + 0{,}006 = 0 \quad ,$$

$$+ 1v_1 + 1v_2 + 1v_3 + 0v_4 + 0v_5 - 1v_6 + 0{,}010 = 0 \quad .$$

Nejprve určíme počet neznámých. Ten bude roven počtu nutných měření k. *V tomto případě je počet všech měření* $n = 6$, *počet nadbytečných měření* $r = 3$ *a tedy počet nutných* $k = 3$.

Zvolíme např. první tři opravy jako neznámé tj.

$$v_1 = x_1 \ , \ v_2 = x_2 \ , \ v_3 = x_3 \ .$$

Z přetvořených podmínkových rovnic vypočteme zbylé tři opravy. Absolutní členy v těchto rovnicích jsou uzávěry u_j *podmínkových rovnic.*

$$v_4 = v_1 + v_2 + u_a \ , \ v_5 = v_2 + v_3 + u_b \ , \ v_6 = v_1 + v_2 + v_3 + u_c \ .$$

Nově vytvořené rovnice oprav uspořádáme do jejich maticového tvaru

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0{,}001 \\ 0{,}006 \\ 0{,}010 \end{pmatrix} \ , tj. \quad \mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{L} \ .$$

Z rovnic oprav již sestavíme normální rovnice podle (2.62), tj

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \ \mathbf{x} + \mathbf{A}^T \mathbf{L} = \mathbf{0} \quad .$$

V číselném vyjádření budou mít tvar:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}011 \\ 0{,}016 \\ 0{,}017 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad .$$

Jejich řešením získáme neznámé:

$x_1 = -0{,}00125m = v_1$, $x_2 = -0{,}00175m = v_2$, $x_3 = -0{,}00375\ m = v_3$.

Zbylé tři opravy vypočteme z výše uvedených rovnic oprav:

$v_4 = -0{,}00200m$, $v_5 = +0{,}00050m$, $v_6 = +0{,}00325$.

Protože jsou opravy identické s opravami z příkladu 2.1, nebude další výpočet již prováděn a odkazuji čtenáře na postup uvedený v tomto příkladu.

3 Smíšené druhy vyrovnání

Cílem této kapitoly je seznámit studenty s komplikovanějšími případy vyrovnání, než dosud uvedené dva základní druhy, tj. vyrovnání zprostředkujících měření a vyrovnání podmínkových měření. V této kapitole budou uvedeny dva další druhy vyrovnání a to vyrovnání zprostředkujících měření splňující další podmínky a vyrovnání podmínkových měření doplněné dalšími neznámými. Tyto metody budou uvedeny jen ve svých principech a ukázány budou jen na jednom příkladu. Pro jeho lepší pochopení bude jeden příklad řešen více metodami současně. Student tak má možnost porovnat náročnost výpočtu při vyrovnání zprostředkujících měření a při vyrovnání podmínkových měření.

Doba potřebná ke zvládnutí této kapitoly je asi 10 hodin. V této době doporučuji si zejména rozepsat vzorce v maticovém tvaru, což pomůže při pochopení složitějších maticových zápisů.

Vyrovnání zprostředkujících měření s neznámými, vyrovnání podmínkových měření s dalšími neznámými, volné sítě.

Rozvoj výpočetní techniky výrazně rozšířil možnosti praktického použití složitějších vyrovnávacích úloh. V této kapitole budou představeny dva druhy smíšeného vyrovnání, které se stále častěji používají v sofwarovém zabezpečení přeurčených geodetických úloh. První uvedená metoda vyrovnání zprostředkujících měření s dalšími podmínkami nalezla široké uplatnění zejména v problematice řešení tzv. volných sítí.

3.1 Vyrovnání zprostředkujících měření s podmínkami

Předpokládejme standardní případ vyrovnání zprostředkujících měření ve kterém bylo změřeno n zprostředkujících veličin pro k určovaných parametrů (neznámých.). Nejprve se sestaví n zprostředkujících funkcí, tj funkcí které popisují matematický vztah mezi zprostředkujícími veličinami (měřeními) a určovanými parametry (neznámými). Po zavedení přibližných hodnot neznámých a linearizaci celého systému zprostředkujících rovnic, získáme přetvořené rovnice oprav ve tvaru:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}\delta\boldsymbol{x} + \boldsymbol{l}' \quad ,$$

které doplníme příslušnou maticí vah měřených veličin $\boldsymbol{P}$. Na podrobnosti odkazuji čtenáře na modul [6], který se zabývá podrobně vyrovnáním zprostředkujích měření.

Tento systém rovnic oprav nyní doplníme dalším systémem r podmínkových rovnic, kterými budou mezi sebou vázány určované parametry (neznámé veličiny). Pro ně budou platit podmínky

$$\varphi(\tilde{\boldsymbol{x}}^T) = \boldsymbol{0} \ ,$$

které můžeme po linearizaci přepsat na tvar

$$\boldsymbol{B}^T \delta\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \quad , \quad kde \quad \boldsymbol{u} = \varphi\left(\boldsymbol{x}^{oT}\right) \quad .$$

Při n měření, k neznámých a r podmínkách dostáváme soubor $(n + r)$ rovnic, přičemž musí platit $n > k > r$.

Pro jednoduchost uvažujme jen tři neznámé x, y, z a dvě podmínkové rovnice označené α a β. V tomto případě bude $k = 3$ a $r = 2$. Počet měření ponecháme n . Pro názornost si uvedené systémy rovnic rozepišme.

Rovnice oprav:

$$\begin{aligned} v_1 &= a_1\delta x + b_1\delta y + c_1\delta z + l'_1 \quad , \\ v_2 &= a_2\delta x + b_2\delta y + c_2\delta z + l'_2 \quad , \\ &\vdots \\ v_n &= a_n\delta x + b_n\delta y + c_n\delta z + l'_n \quad . \end{aligned} \tag{3.1}$$

Podmínkové rovnice:

$$\begin{aligned} \alpha_1\delta x + \alpha_2\delta y + \alpha_3\delta z + \alpha_o &= 0 \quad , \\ \beta_1\delta x + \beta_2\delta y + \beta_3\delta z + \beta_o &= 0 \quad . \end{aligned} \tag{3.2}$$

Příslušné vektory a matice budou:

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}, \delta\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \boldsymbol{l}' = \begin{pmatrix} l'_1 \\ l'_2 \\ \vdots \\ l'_n \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \alpha_o \\ \beta_o \end{pmatrix}, \boldsymbol{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Úlohu lze řešit třemi různými postupy. Zde uvedeme jeden, který vyplývá z Lagrangeova řešení pro vázané extrémy, který již byl použit ve stati 2.4 a při němž jsou určovány další neznámé parametry, které jsme nazvali koreláty.

Základní podmínka MNČ je doplněna o další podmínky, takže se hledá minimum funkce

$$\overline{\Omega} = \boldsymbol{v}^T \boldsymbol{P}\, \boldsymbol{v} + 2\boldsymbol{k}^T (\boldsymbol{B}^T \delta\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}) = \min \quad . \tag{3.3}$$

Tento postup vede na rozšířený systém normálních rovnic, ve kterém se vyskytují blokové matice

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{P}\, \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B}^T & \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta\boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{k} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{P}\, \boldsymbol{l}' \\ \boldsymbol{u} \end{pmatrix} = \boldsymbol{0} \quad . \tag{3.4}$$

Další postup je již zřejmý. Řešením uvedeného systému normálních rovnic obdržíme nejen neznámé veličiny δx, δy, δz , ale též koreláty k_α a k_β .

Neznámé veličiny samozřejmě musí splňovat zadané podmínky. Aposteriorní jednotková variance se v tomto druhu vyrovnání vypočte podle:

$$\hat{\sigma}_o^2 = \frac{\boldsymbol{v}^T \boldsymbol{P} \, \boldsymbol{v}}{n-k+r} \quad . \tag{3.5}$$

3.2 Vyrovnání podmínkových měření s neznámými

Tato úloha se v geodézii vyskytuje v případech, když v podmínkových rovnicích vystupují kromě vyrovnaných měření ještě další, přímo neměřené neznámé, které chceme vyrovnáním rovněž určit. Může to být případ, kdy všechna měření jsou zatížena systematickou chybou způsobenou nějakým faktorem (funkci působení musíme znát). Druhým případem je situace, kdy neznámé parametry vstupují do podmínkových rovnic individuálně. Označíme-li opět písmeny n počet měření, r počet podmínkových rovnic a k počet neznámých parametrů, musí pro ně platit

$$n > r > k \ , \ n > r + k \ . \tag{3.6}$$

Předpokládejme, že výsledky měření l_i jsou zatíženy chybami, způsobenými dvěma parametry x a y (první případ). Označíme-li výsledky nezatížené vlivem těchto parametrů jako $\bar{l}_i$, bude (v případě lineární funkce pro oba parametry) pro měřené veličiny platit

$$l_i = \bar{l}_i + \alpha_i x + \beta_i y \quad . \tag{3.7}$$

Příkladem tohoto působení může být neznámá součtová a násobná konstanta dálkoměru, koeficient teplotní roztažnosti, refrakční koeficient apod.

V maticovém vyjádření a při zobecnění funkce parametrů $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^T)$ lze soustavu podmínkových rovnic psát

$$\varphi(\hat{\bar{\boldsymbol{l}}}^T) = \boldsymbol{0} \quad , \quad kde \quad \hat{\bar{\boldsymbol{l}}} = \boldsymbol{l} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \bar{\boldsymbol{l}} + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^T) \, . \tag{3.8}$$

V druhém případě lze soustavu podmínkových rovnic psát

$$\varphi(\hat{\bar{\boldsymbol{l}}}^T, \boldsymbol{x}^T) = \boldsymbol{0} \quad . \tag{3.9}$$

Přetvořené podmínkové rovnice pro uvedený příklad pak kromě n oprav měřených veličin obsahují další dvě neznámé x a y a mají tvar:

$$
\begin{aligned}
&a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n + \alpha_a \delta x + \beta_a \delta y + u_a = 0 \quad , \\
&b_1 v_1 + b_2 v_2 + \cdots + b_n v_n + \alpha_b \delta x + \beta_b \delta y + u_b = 0 \quad , \\
&\;\vdots \\
&r_1 v_1 + r_2 v_2 + \cdots + r_n v_n + \alpha_r \delta x + \beta_r \delta y + u_r = 0 \quad .
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

Koeficienty a_i , b_i , ... , r_i v přetvořených podmínkových rovnicích určíme jako parciální derivace podmínkových rovnic podle jednotlivých měřených veličin u kterých zavedeme přibližné hodnoty neznámých parametrů $\boldsymbol{f}(\ \boldsymbol{x}^{oT}\ )$. Koeficienty α_a .... β_r jsou parciální derivace podmínkových rovnic podle x a y opět s uvážením přibližných hodnot $\boldsymbol{f}(\ \boldsymbol{x}^{oT}\ )$. Odchylky u se vypočtou z příslušných odchylkových rovnic.

Systém přetvořených podmínkových rovnic (3.10) lze v maticovém tvaru psát:

$$
\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{v} + \boldsymbol{B}\delta\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \ , \tag{3.11}
$$

kde

$$
\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & \cdots & r_1 \\ a_2 & b_2 & \cdots & r_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & b_n & \ldots & r_n \end{pmatrix}, \quad
\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \alpha_a & \beta_a \\ \alpha_b & \beta_b \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_r & \beta_r \end{pmatrix}, \quad
\delta\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix}, \quad
\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_a \\ u_b \\ \vdots \\ u_r \end{pmatrix}.
$$

Při přímém řešení systému (3.11) využijeme opět Lagrangeova postupu řešením vázaných extrémů pomocí korelát. Hledáme tedy minimum funkce:

$$
\overline{\Omega} = \boldsymbol{v}^T \boldsymbol{P}\ \boldsymbol{v} + 2\boldsymbol{k}^T (\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{v} + \boldsymbol{B}\ \ \delta\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}) = \min , \tag{3.12}
$$

který vede na systém normálních rovnic, kde např. matice koeficientů normálních rovnic je čtvercová bloková matice, tvořená čtyřmi submaticemi.

$$
\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{P}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B}^T & \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{k} \\ \delta\boldsymbol{x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} = \boldsymbol{0} \qquad . \tag{3.13}
$$

Po vyřešení tohoto lineárního systému rovnic získáme neznámé koreláty $\boldsymbol{k}$ i neznámé parametry $\delta\boldsymbol{x}$. Z nich pak vypočítáme opravy a vyrovnané hodnoty již standardním postupem. Odhad aposteriorní přesnosti (jednotkové variance) bude u tohoto druhu vyrovnání určen podle vztahu:

$$\hat{\sigma}_o^2 = \frac{\boldsymbol{v}^T \boldsymbol{P}\, \boldsymbol{v}}{r-k} \quad . \tag{3.14}$$

3.3 Příklady

V této stati bude uveden v podstatě jeden příklad, který bude ilustrovat použití smíšeného vyrovnání. Nejprve tento příklad vypočteme klasickým vyrovnáním zprostředkujících měření. Poté jej vypočteme vyrovnáním podmínkových měření a následně vyrovnáním zprostředkujících měření s podmínkami, přičemž modifikujeme zadání příkladu přidáním další podmínky.

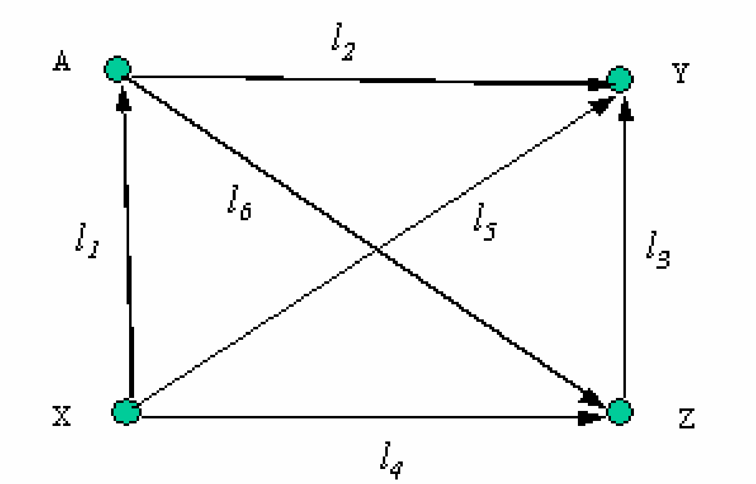
Příklad 3.1

Vypočítejme výšky bodů X , Y, Z je li zadána výška bodu A a jsou změřena nivelační převýšení l_1 , l_2, ... , l_6 .(viz obr.2.3). Šipky na obrázku vyznačují směr stoupání. Všechna měření jsou určena se stejnou přesností.

Zadáno:

A = 250,000 m

l_1 = 1,253m, l_2 = 2,080m, l_3 = 0,428m, l_4 = 2,900m, l_5 = 3,335m, l_6 = 1,650m.



Obrázek 3.1: Schema nivelační sítě

Řešení příkladu :

K řešení příkladu můžeme použít oba dříve uvedené základní druhy:

A) Vyrovnání zprostředkujících měření

B) Vyrovnání podmínkových měření

A) Vyrovnání zprostředkujících měření

a) Sestavení zprostředkujících funkcí

Obecně: $\tilde{l}_i = f_i(x^o, y^o, A)$

$$\tilde{l}_1 = -\tilde{X} + A, \quad \tilde{l}_2 = \tilde{Y} - A, \quad \tilde{l}_3 = \tilde{Y} - \widehat{Z}, \quad \tilde{l}_4 = -\tilde{X} + \tilde{Z}, \quad \tilde{l}_5 = -\tilde{X} + \tilde{Y}, \quad \tilde{l}_6 = \tilde{Z} - A$$

b) Výpočet (volba) přibližných hodnot

$$x^o \approx A - l_1, \quad y^o \approx A + l_2, \quad z^o \approx A + l_6.$$

$x^o = 248{,}750m$, $y^o = 252{,}080m$, $z^o = 251{,}650m$.

c) Výpočet přetvořených rovnic oprav

Obecně:

$$v_i = a_i \delta x + b_i \delta y + c_i \delta z + (l_i^o - l_i), \quad kde \quad l_i^o = f_i(x^o, y^o, A).$$

Význam jednotlivých koeficientů je následující (f_i jsou zprostředkující funkce):

$$a_i = \frac{\partial f_i}{\partial x^o}, \quad b_i = \frac{\partial f_i}{\partial y^o}, \quad c_i = \frac{\partial f_i}{\partial z^o}.$$

Přetvořené rovnice oprav jsou uvedeny v klasickém i maticovém vyjádření:

$$\begin{aligned}
v_1 &= -1\delta x + 0\delta y + 0\delta z - 0{,}003,\\
v_2 &= +0\delta x + 1\delta y + 0\delta z + 0{,}000,\\
v_3 &= +0\delta x + 1\delta y - 1\delta z + 0{,}002,\\
v_4 &= -1\delta x + 0\delta y + 1\delta z + 0{,}000,\\
v_5 &= -1\delta x + 1\delta y + 0\delta z - 0{,}005,\\
v_6 &= +0\delta x + 0\delta y + 1\delta z + 0{,}000.
\end{aligned}
\qquad \mathbf{v} = \mathbf{A}\,\boldsymbol{\delta x} + \mathbf{l}',$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 \\ 0 & +1 & -1 \\ -1 & 0 & +1 \\ -1 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0{,}003 \\ +0{,}000 \\ +0{,}002 \\ +0{,}000 \\ -0{,}005 \\ +0{,}000 \end{pmatrix}.$$

d) Výpočet normálních rovnic(již jen v maticovém vyjádření)

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{\delta x} + \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{l}' = \boldsymbol{0}. \qquad \begin{pmatrix} +3 & -1 & -1 \\ -1 & +3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} +8 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

e) Výpočet neznámých a vyrovnaných výšek

$$\boldsymbol{N}^{-1} = (\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})^{-1} = \begin{pmatrix} +0{,}50 & +0{,}25 & +0{,}25 \\ +0{,}25 & +0{,}50 & +0{,}25 \\ +0{,}25 & +0{,}25 & +0{,}50 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\delta x} = -\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{l}' = \begin{pmatrix} -0{,}00275 \\ 0{,}00000 \\ -0{,}00025 \end{pmatrix}$$

$$\widehat{X} = x^o + \delta x = 248{,}74725m, \quad \widehat{Y} = 252{,}08000m, \quad \widehat{Z} = 251{,}64975m.$$

f) Výpočet oprav a vyrovnaných měření

Opravy počítáme 2x. Jednou z přetvořených rovnic oprav a podruhé z původních rovnic oprav s nelinearizovanými zprostředkujícími funkcemi.

$$v_1 = -1\delta x + 0\delta y + 0\delta z - 0{,}003 = -0{,}00025, \quad v_1 = A - \widehat{x} - l_1 = -0{,}00025.$$
$$v_2 = +0\delta x + 1\delta y + 0\delta z + 0{,}000 = +0{,}00000, \quad v_2 = \widehat{y} - A - l_2 = 0{,}00000.$$
$$v_3 = +0\delta x + 1\delta y - 1\delta z + 0{,}002 = +0{,}00225, \quad v_3 = \widehat{y} - \widehat{z} - l_3 = +0{,}00225.$$
$$v_4 = -1\delta x + 0\delta y + 1\delta z + 0{,}000 = +0{,}00250, \quad v_4 = \widehat{z} - \widehat{x} - l_4 = +0{,}00250.$$
$$v_5 = -1\delta x + 1\delta y + 0\delta z - 0{,}005 = -0{,}00225, \quad v_5 = \widehat{y} - \widehat{x} - l_5 = -0{,}00225.$$
$$v_6 = +0\delta x + 0\delta y + 1\delta z + 0{,}000 = -0{,}00025, \quad v_6 = \widehat{z} - A - l_6 = -0{,}00025.$$

Výpočet vyrovnaných naměřených hodnot:

$$\widehat{l}_1 = l_1 + v_1 = 1{,}25275m, \quad \widehat{l}_2 = l_2 + v_2 = 2{,}08000m, \quad \widehat{l}_3 = l_3 + v_3 = 0{,}43025m,$$
$$\widehat{l}_4 = l_4 + v_4 = 2{,}90250m, \quad \widehat{l}_5 = l_5 + v_5 = 3{,}33275m, \quad \widehat{l}_6 = l_6 + v_6 = 1{,}64975m.$$

g) Výpočet charakteristik přesnosti

(aposteriorní) jednotková střední chyba:

$$\widehat{m}_o = \sqrt{\frac{\sum v^2}{n-k}} = \sqrt{\frac{0{,}0000165}{3}} = 0{,}002345$$

(aposteriorní) střední chyby měřených veličin:

$$\widehat{m}_{l_i} = \widehat{m}_o \frac{1}{\sqrt{p_i}} = \widehat{m}_o\sqrt{q_i} = \widehat{m}_o\sqrt{1} = 0{,}0023m$$

střední chyby vyrovnaných výšek bodů

$$\boldsymbol{Q}_{xx} = \boldsymbol{N}^{-1}, \quad \widehat{m}_{\widehat{X}} = \widehat{m}_o \sqrt{Q_{XX}} = \widehat{m}_o \sqrt{0{,}50} = 0{,}0017m,$$

$$\widehat{m}_{\widehat{Y}} = \widehat{m}_o \sqrt{Q_{YY}} = 0{,}0017m, \quad \widehat{m}_{\widehat{Z}} = \widehat{m}_o \sqrt{Q_{ZZ}} = 0{,}0017m.$$

střední chyby vyrovnaných měření

$$\boldsymbol{Q}_{\widehat{l}\,\widehat{l}} = \boldsymbol{A}\ \boldsymbol{Q}_{xx}\boldsymbol{A}^T = \begin{pmatrix} +0{,}50 & -0{,}25 & 0 & +0{,}25 & +0{,}25 & -0{,}25 \\ -0{,}25 & 0{,}50 & +0{,}25 & 0 & +0{,}25 & +0{,}25 \\ 0 & +0{,}25 & +0{,}50 & -0{,}25 & +0{,}25 & -0{,}25 \\ +0{,}25 & 0 & -0{,}25 & +0{,}50 & +0{,}25 & +0{,}25 \\ +0{,}25 & +0{,}25 & +0{,}25 & +0{,}25 & +0{,}50 & 0 \\ -0{,}25 & +0{,}25 & -0{,}25 & +0{,}25 & 0 & +0{,}50 \end{pmatrix}$$

$$\widehat{m}_{\widehat{l}_1} = \widehat{m}_o \sqrt{Q_{11}} = \widehat{m}_o \sqrt{0{,}5} = 0{,}0017m, \quad \widehat{m}_{\widehat{l}_2} = \widehat{m}_o \sqrt{Q_{22}} = 0{,}0017m, \quad atd.$$

Výsledek vyrovnání zprostředkujících měření *(po zaokrouhlení):*

$$\widehat{X} + \widehat{m}_{\widehat{X}} = 248{,}747m \pm 1{,}7mm, \widehat{Y} = 252{,}080m \pm 1{,}7mm, \widehat{Z} = 251{,}650m \pm 1{,}7mm.$$

B) <u>Vyrovnání podmínkových měření</u>

Tento příklad byl teoreticky řešen již v příkladě 2.2 začínajícím na str. 27.

Dosazením naměřených hodnot do podmínkových rovnic obdržíme odchylkové rovnice a vektor odchylek $\boldsymbol{u}$.

$$l_1 + l_2 - l_5 = u_a = -0{,}002m = -2mm \quad ,$$

$$l_5 - l_3 - l_4 = u_b = +0{,}007m = +7mm \quad , \quad \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ +7 \\ +3 \end{pmatrix}.$$

$$l_1 + l_6 - l_4 = u_c = +0{,}003m = +3mm \quad ,$$

Zadáme-li do dalších výpočtů odchylky v milimetrech, budou v milimetrech i opravy.

Matice koefientů přetvořených podmínkových rovnic:

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} +1 & +1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & +1 & 0 \\ +1 & 0 & 0 & -1 & 0 & +1 \end{pmatrix}.$$

Matice koeficientů normálních rovnic pro koreláty:

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^T = \begin{pmatrix} +3 & -1 & +1 \\ -1 & +3 & +1 \\ +1 & +1 & +3 \end{pmatrix}.$$

Inverzní matice k matici koefientů normálních rovnic:

$$\boldsymbol{N}^{-1} = (\boldsymbol{BB}^T)^{-1} = \begin{pmatrix} +0{,}50 & +0{,}25 & -0{,}25 \\ +0{,}25 & +0{,}50 & -0{,}25 \\ -0{,}25 & -0{,}25 & +0{,}25 \end{pmatrix} .$$

Koreláty nemusíme počítat, pokud jsme schopni vypočítat opravy přímo z rovnic (2.32b), tj.:

$$\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{B}^T(\boldsymbol{BB}^T)^{-1}\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} -0{,}25 \\ +0{,}00 \\ +2{,}25 \\ +2{,}50 \\ -2{,}25 \\ -0{,}25 \end{pmatrix} mm.$$

Opravy jsou identické s řešením A) tj. s předcházejím vyrovnáním metodou zprostředkujících měření, proto budou i identické vyrovnané hodnoty měřených veličin $\widehat{l_i} = l_i + v_i$ a nebudeme je zde znovu uvádět.

Na rozdíl od předcházejícího způsobu vyrovnání jsme tentokrát nezískali výšky bodů. Ty musíme vypočítat přičtením vyrovnaných měření (převýšení) ke známé výšce bodu A. Protože jsou splněny všechny podmínky v síti je lhostejné, jakou k výpočtu výšek nově určovaných bodů X, Y a Z použijeme cestu, tj. která převýšení se budou podílet na výpočtu jednotlivých výšek. Výsledné výšky zde opět nebudeme uvádět, neboť jsou identické s výsledky z předcházejícího vyrovnání zprostředkujících měření.

<u>Příklad 3.2:</u>

Předpokládejme obdobné zadání jako v předcházejícím příkladě 3.1, kde byla zaměřena síť 4 bodů A, X, Y, Z (viz obr. 3.1) prostřednictvím 6 naměřených převýšení mezi těmito body. Bod A měl jako jediný zadanou výšku, proto jsme ji použily jako vztažnou pro výpočet ostatních výšek. Předpokládejme nyní, že v této síti máme zadány 2 vztažné body, např. bod A a bod B = X.

<u>Zadání:</u>

Vypočítejte výšky bodů Y, Z jsou-li zadány výšky bodů A a B a jsou změřena nivelační převýšení l_1 , l_2, ... , l_6 (viz obr.2.3, kde místo označení bodu X označíme tento bod jako bod B). Šipky na obrázku vyznačují směr stoupání. Všechna měření jsou určena se stejnou přesností.

A = 250,000 m , B = 248,750 m.

l_1 = 1,253m, l_2 = 2,080m, l_3 = 0,428m, l_4 = 2,900m, l_5 = 3,335m, l_6 = 1,650m.

Problém lze řešit 2 způsoby

A) výpočet vázané sítě s body A a B jako body pevnými, tzn. že se jim vyrovnáním nezmění výšky a naměřená převýšení se vyrovnáním přizpůsobí jejich zadaným výškám. Ve svém důsledku to znamená, že se síť naměřených nivelačních převýšení deformuje sítí pevných bodů.

B) *vyrovnání volné sítě, kde budeme body A a B považovat za body vztažné a síť se výškově vyrovná mezi tyto body tak, že jejich zadaným výškám přisoudí také korekci. Při tomto vyrovnání nedochází k deformaci naměřených převýšení vlivem pevně daných výšek bodů.*

Úkol 3.1 *Vypočítejte variantu A oběma metodami, tj. vyrovnáním zprostředkujících měření a vyrovnáním podmínkových měření. Při vyrovnání zprostředkujících měření musíte sestavit systém 5 zprostředkujících rovnic pro 2 neznámé veličiny Y a Z. Počet měřených převýšení bude o jedno menší (bude to měření l_1, které má nyní jen kontrolní význam - jako kontrolní převýšení mezi zadanými pevnými výškami A a B).*

Do vyrovnání podmínkových měření může vstoupit jen 5 převýšení, neboť převýšení l_1 je kontrolní a nebude (nemusí) se na vyrovnání podílet. Proto musíte sestavit 3 podmínkové rovnice:

$$\tilde{l}_2 - \tilde{l}_3 - \tilde{l}_6 = 0, \quad \tilde{l}_5 - \tilde{l}_3 - \tilde{l}_4 = 0, \quad \tilde{l}_2 - \tilde{l}_3 - \tilde{l}_4 + A - B = 0.$$

Kontrolou správnosti výpočtu bude shoda obou způsobů řešení.

B) Zde si uvedeme řešení tohoto případu jako vyrovnání volné sítě.

Vyrovnání zprostředkujícíh měření s podmínkami

Problém řešíme nejprve jako vyrovnání zprostředkujících měření, ve kterém všechny 4 body (A, B, Y, Z) považujeme za nově určované (neznámé).

a) Nejprve sestavíme zprostředkující funkce pro 6 měřených převýšení a 4 neznámé parametry.

$$\tilde{l}_i = f_i(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{Y}, \tilde{Z}), \quad \tilde{l}_1 = \tilde{A} - \tilde{X}, \quad \tilde{l}_2 = \tilde{Y} - \tilde{A}, \quad \tilde{l}_3 = \tilde{Y} - \tilde{Z},$$
$$\tilde{l}_4 = \tilde{Z} - \tilde{B}, \quad \tilde{l}_5 = \tilde{Y} - \tilde{B}, \quad \tilde{l}_6 = \tilde{Z} - \tilde{A}.$$

b) Výpočet přibližných hodnot. Protože body A a B budeme považovat za body vztažné, musíme jejich známé výšky považovat za výšky přibližné. Přibližné výšky bodů Y a Z určíme libovolným způsobem.

$$A^o\text{=}250{,}000m\ , \quad B^o\text{=}248{,}750m\ , \quad y^o\text{=}252{,}080m\ , \quad z^o\text{=}251{,}650m\ .$$

c) Sestavení přetvořených rovnic oprav

$$\begin{pmatrix} +1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & +1 \\ 0 & -1 & +1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & +1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta A \\ \delta B \\ \delta y \\ \delta z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0{,}003 \\ 0{,}000 \\ +0{,}002 \\ 0{,}000 \\ -0{,}005 \\ 0{,}000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}\delta\boldsymbol{x} + \boldsymbol{l}' = \boldsymbol{0} \quad .$$

d) Sestavení normálních rovnic

$$(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})\delta\boldsymbol{x} + \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{l}' = \boldsymbol{N}\delta\boldsymbol{x} + \boldsymbol{h} = \begin{pmatrix} +3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & +3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & +3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & +3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta A \\ \delta B \\ \delta y \\ \delta z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0{,}003 \\ +0{,}008 \\ -0{,}003 \\ -0{,}002 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Uvedený systém normálních rovnic nemá jednoznačné řešení, neboť matice koeficientů normálních rovnic **N** *je singulární (viz. kap. 4 – Apendix,)neboť její řádky jsou lineárně závislé (viz. Dodatek A). O tom se snadno přesvědčíme součtem všech čtyř řádků (řádkových vektorů), který dává nulový vektor. K takové singulární matici neexistuje matice inverzní a problém musíme řešit jiným způsobem.*

e) rozšíření matice koeficientů normálních rovnic

*V Dodatku A (kap.4) jsou uvedeny způsoby řešení singulárních matic. Jedním z těchto způsobů je rozšíření invertované matice na blokovou matici o systém vhodně volených submatic. V našem případě je defekt matice d(**N**) = 1 (jeden lineárně závislý řádek) a submatice **B** bude mít 1 sloupec o 4 prvcích (bude to vlastně vektor). Singularita v matici normálních rovnic vznikla proto, že jsme nezadali do systému ani jednu pevnou výšku bodu. V nivelačních sítích potřebujeme k výpočtu výšek bodů alespoň jednu zadanou výšku některého z nich. My jsme ale všechny výšky považovali za přibližné. Dva body (A, B), které jsou v tomto systému, mají výjimečné postavení. Považuje je za body vztažné. Budeme chtít, aby se nivelační síť na tyto body navázala a přitom nedošlo k její deformaci.*

Stanovíme tedy dodatečnou podmínku, aby součet čtverců odchylek na těchto bodech byl minimální, tj. aby platilo:

$$\delta A^2 + \delta B^2 = min, \ \ tedy \ \ 2\,\delta A + 2\,\delta B = 0 \ \ nebo \ \ \delta A + \delta B = 0.$$

Tato podmínka vede na vektor $\boldsymbol{B}^T = (1\ \ 1\ \ 0\ \ 0)$ *a uzávěr* $\boldsymbol{u} = (0)$.

O tyto veličiny rozšíříme systém normálních rovnic na tvar, viz. (3.4)

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta\boldsymbol{x} \\ k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{h} \\ u \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}\,,$$

$$\begin{pmatrix} +3 & -1 & -1 & -1 & +1 \\ -1 & +3 & -1 & -1 & +1 \\ -1 & -1 & +3 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & +3 & 0 \\ +1 & +1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta A \\ \delta B \\ \delta y \\ \delta z \\ k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0{,}003 \\ +0{,}008 \\ -0{,}003 \\ +0{,}002 \\ 0{,}000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

f) řešení systému rozšířených normálních rovnic je nyní již jednoduché, protože matice koeficientů rozšířeného systému normálních rovnic je již regulární a lze k ní nalézt inverzní matici:

$$\begin{pmatrix} +3 & -1 & -1 & -1 & +1 \\ -1 & +3 & -1 & -1 & +1 \\ -1 & -1 & +3 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & +3 & 0 \\ +1 & +1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} +0{,}125 & -0{,}125 & 0 & 0 & +0{,}500 \\ -0{,}125 & +0{,}125 & 0 & 0 & +0{,}500 \\ 0 & 0 & +0{,}375 & +0{,}125 & +0{,}500 \\ 0 & 0 & +0{,}125 & +0{,}375 & +0{,}500 \\ +0{,}500 & +0{,}500 & +0{,}500 & +0{,}500 & 0 \end{pmatrix}$$

Výpočet neznámých se již provede obvyklým způsobem.

$\delta A = 0{,}001375m$, $\delta B = -0{,}001375m$, $\delta y = +0{,}001375m$, $\delta z = +0{,}001125m$, $k = 0$.

$$\widehat{A} = A^o + \delta A = 250{,}001375m, \quad \widehat{B} = B^o + \delta B = 248{,}748625m \quad ,$$

$$\widehat{Y} = y^o + \delta y = 252{,}081375m, \quad \widehat{Z} = z^o + \delta z = 251{,}651125m \quad .$$

g) výpočet oprav a vyrovnaných měření

$v_1 = -\ 0{,}00025m,\quad v_2 = 0{,}00000\ m,\quad v_3 = +0{,}00225m,$

$v_4 = +0{,}00250m,\quad v_5 = -0{,}00225m,\quad v_6 = -0{,}00025m.$

Opravy jsou stejné jako v příkladě 3.1, budou tedy stejná i vyrovnaná převýšení.

Výsledky:

$$\widehat{A} = 250{,}0014m \pm 0{,}8mm, \quad \widehat{B} = 248{,}7486m \pm 0{,}8mm,$$

$$\widehat{Y} = 252{,}0814m \pm 1{,}4mm, \quad \widehat{Z} = 251{,}6511m \pm 1{,}4mm.$$

Závěr: Vyrovnání volné nivelační sítě metodou zprostředkujících měření s podmínkou vazby na vztažné body A a B zachovalo stejné opravy jako u sítě vázané na jeden bod a celou síť umístilo do výškové úrovně mezi původní body A a B tak, že uvážilo jejich výšky i vyrovnané měření mezi těmito dvěma body.

Úkol 3.2

Rozepište normální rovnice (3.4) a (3.14) z maticového tvaru do klasického zápisu.

4 Dodatek A

4.1 Vektory

<u>Vektor</u> $\boldsymbol{x}$ je do sloupce uspořádaná n-tice čísel (ve vyrovnávacím počtu nejčastěji reálných). Jednotlivá čísla x_i se nazývají <u>prvky vektoru</u>. Jsou-li všechny prvky vektoru rovny nule, vytvoří nulový vektor $\boldsymbol{0}$. Vektor s opačnými znaménky u všech prvků se nazývá <u>opačný vektor</u> $\boldsymbol{-x}$ k vektoru $\boldsymbol{x}$.

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad -\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Na pořadí čísel (prvků) záleží, protože si je můžeme představit jako souřadnice bodu vzhledem k osám souřadného systému. Číslo n označuje <u>*typ vektoru*</u> (*rozměr vektoru*). Vektory jsou <u>*stejného typu*</u> (*stejného rozměru)*, když jsou tvořeny stejným počtem prvků. Dva vektory $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ jsou *stejné* (*totožné*), tj.

$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$, jestliže jsou stejného typu a všechny jejich odpovídající si prvky se navzájem rovnají, tzn. $x_i = y_i$ pro všechna i.

Součet a rozdíl vektorů:

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}, \tag{4.1}$$

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} = \boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - y_1 \\ x_2 - y_2 \\ \vdots \\ x_n - y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}.$$

Násobení vektoru reálným číslem (skalárem):

$$c.\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} = c.\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c.x_1 \\ c.x_2 \\ \vdots \\ c.x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}. \tag{4.2}$$

<u>*Lineární n-rozměrný vektorový prostor*</u> V^n je množina libovolných vektorů s n prvky splňující následující axiomy:

a) $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$,

b) $\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z}$,

c) $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{x}$,

d) $\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$,

e) $c.(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = c.\boldsymbol{x} + c.\boldsymbol{y}$, (4.3)

f) $(c_1 + c_2).\boldsymbol{x} = c_1.\boldsymbol{x} + c_2.\boldsymbol{x}$,

g) $c_1.(c_2.\boldsymbol{x}) = (c_1.c_2).\boldsymbol{x}$,

h) $1.\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$,

i) $0.\boldsymbol{x} = 0$.

Nejdůležitějším případem vektorových prostorů je <u>*n-rozměrný prostor*</u> E^n, který je tvořen všemi uspořádanými n-ticemi reálných čísel (vektory typu n, kde n je libovolné přirozené číslo).

Jsou-li vektory $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots ,\boldsymbol{x}_k$ stejného typu, potom jako <u>*lineární kombinací*</u> těchto vektorů je označován vektor $c_1.\boldsymbol{x}_1 + c_2.\boldsymbol{x}_2 + \ldots + c_k.\boldsymbol{x}_k$, kde $c_1, c_2, \ldots, c_k$ jsou libovolná reálná čísla.

Systém vektorů $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots , \boldsymbol{x}_k$ se nazývá <u>*lineárně závislý*</u>, když existují reálná čísla $c_1, c_2,\ldots,c_k$, z nichž alespoň jedno je různé od nuly, taková, že

$$c_1.\boldsymbol{x}_1 + c_2.\boldsymbol{x}_2 + \ldots + c_k.\boldsymbol{x}_k = 0. \qquad (4.4)$$

V opačném případě se systém vektorů $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots , \boldsymbol{x}_k$ nazývá <u>*lineárně nezávislý*</u>.

Každý systém vektorů obsahující nulový vektor je lineárně závislý. Systém nenulových vektorů $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots , \boldsymbol{x}_k$ je lineárně závislý právě tehdy, když některý z vektorů $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 , \ldots , \boldsymbol{x}_k$ je lineární kombinací ostatních.

Libovolná podmnožina V' lineárního vektorového prostoru V (splňující axiomy 4.3) se nazývá <u>*lineární podprostor*</u>. Každý lineární podprostor V' lineárního vektorového prostoru V je opět lineárním vektorovým prostorem.

<u>*Lineární obal*</u> množiny $A = \{ \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots , \boldsymbol{x}_k \}$; $k \geq 1$ je tvořen všemi možnými lineárními kombinacemi vektorů z množiny A.

<u>*Báze prostoru*</u> V je každý nezávislý systém vektorů prostoru V takový, že V je jeho lineárním obalem. Vektory dané báze se nazývají <u>*bázové vektory*</u>. Každý lineární vektorový prostor má nějakou bázi. Všechny báze prostoru V mají stejný počet vektorů. Základní používanou bází jsou bázové vektory tohoto typu:

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad ,\cdots, \quad \boldsymbol{e}_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{4.5}$$

Každý vektor $\boldsymbol{x} \in V$ se dá vyjádřit pomocí prvků dané báze (bázových vektorů) právě jediným způsobem. K výše uvedené bázi se vektor $\boldsymbol{x}$ vyjádří následovně:

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = x_1.\boldsymbol{e}_1 + x_2.\boldsymbol{e}_2 + ... + x_k \boldsymbol{e}_k =$$

$$= x_1.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2.\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + ... + x_k.\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{4.6}$$

<u>Transponovaný vektor</u> $\boldsymbol{x}^T$ k vektoru $\boldsymbol{x}$ vznikne transpozicí (záměnou sloupce a řádku).

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}^T = (x_1, x_2, \cdots, x_n). \tag{4.7}$$

Vektor $\boldsymbol{x}$ se nazývá *<u>sloupcový vektor</u>* a vektor $\boldsymbol{x}^T$ *<u>řádkový vektor</u>*. V dalším textu bude vždy odlišen řádkový vektor od sloupcového vektoru označením transpozice symbolem ^{T}. Transpozicí již transponovaného vektoru vznikne vektor původní. Pro transponování platí:

a) $(\boldsymbol{x}^T)^T = \boldsymbol{x}$,

b) $c.\boldsymbol{x}^T = c.(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (c.x_1, cx_2, \cdots, cx_n)$, (4.8)

c) $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})^T = \boldsymbol{x}^T + \boldsymbol{y}^T$.

<u>Skalárním součinem</u> dvou vektorů (stejného typu) se nazývá reálné číslo vzniklé jako součet součinů odpovídajících si prvků obou vektorů.

$$\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{y} = x_1.y_1 + x_2.y_2 + \cdots + x_n.y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i.y_i, \tag{4.9}$$

$$\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

V praxi vyrovnávacího počtu je velmi často používán součet čtverců oprav ve tvaru:

$$\sum v^2 = \boldsymbol{v}^T \boldsymbol{v} = v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2. \tag{4.10}$$

<u>*Součtovým vektorem*</u> $\boldsymbol{s}$ se bude nazývat vektor, jehož všechny prvky jsou rovny jedné. Název vyplývá z jeho součtové funkce při skalárním součinu.

$$\boldsymbol{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{4.11}$$

$$\text{pro } \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \quad \text{bude} \sum v = \boldsymbol{s}^T \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = v_1 + v_2 + \cdots + v_n.$$

Tímto způsobem lze vypočítat i číslo n jako $n = \boldsymbol{s}^T\boldsymbol{s}$, kde součtový vektor $\boldsymbol{s}$ je typu (n).

Pro součin vektorů stejného typu platí:

a) $\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^T \boldsymbol{x}$,

b) $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})^T \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{z} + \boldsymbol{y}^T \boldsymbol{z}$,

c) $(c.\boldsymbol{x})^T \boldsymbol{y} = (c.\boldsymbol{x}^T)\boldsymbol{y} = c(\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{y})$, pro libovolné reálné c, (4.12)

d) $\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{x} \geq 0$, pro libovolné $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{x} = 0$ právě tehdy, když $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

<u>*Norma vektoru*</u> *(euklidovská)* se vypočítá jako druhá odmocnina ze součtu čtverců jeho prvků, tj.:

$$\|\boldsymbol{x}\| = (\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{x})^{1/2} = \sqrt{\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{x}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\ . \tag{10.13}$$

Norma vektoru vyjadřuje <u>*délku vektoru*</u> $\boldsymbol{x}$, neboli vzdálenost bodu určeného souřadnicemi (prvky) $x_1, x_2, \ldots , x_n$ od počátku systému 0, 0,…, 0.

Pro normu vektoru platí:

$$
\begin{aligned}
&\text{a)} \quad \|\boldsymbol{x}\| \geq 0, \qquad \|\boldsymbol{x}\| = 0, \quad \text{právě když } \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0},\\
&\text{b)} \quad \|c.\boldsymbol{x}\| = c.\|\boldsymbol{x}\|, \quad \text{pro libovolné reálné číslo } c,\\
&\text{c)} \quad \|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|,\\
&\text{d)} \quad \left\|\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y}\right\| \leq \|\boldsymbol{x}\|.\|\boldsymbol{y}\|.
\end{aligned}
\tag{4.14}
$$

Úhel mezi dvěma vektory $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$ se vypočítá**:**

$$
\cos\alpha = \frac{\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{x}\|.\|\boldsymbol{y}\|}. \tag{4.15}
$$

Dva nenulové vektory $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ jsou na sebe *kolmé*, neboli *ortogonální,* právě když

$$
\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}, \tag{4.16}
$$

tj. když cos $\alpha = 0$. Pokud jsou vektory na sebe kolmé a délky těchto vektorů jsou rovny jedné, nazývají se takové vektory *ortonormálními vektory.*

Ortogonální skupina (*ortogonální systém*) *vektorů* je taková skupina vektorů, u které je každá dvojice různých vektorů navzájem kolmá (ortogonální). Pokud má ještě každý vektor jednotkovou délku, nazývá se taková skupina *ortonormální skupinou vektorů* (*ortonormálním systémem vektorů*).

Normování vektoru je postup, při kterým vytvoříme z vektoru x vektor jednotkové délky $\underline{x}$:

$$
\underline{\boldsymbol{x}} = \frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|}, \tag{4.17}
$$

$$
\underline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\underline{\boldsymbol{x}} = 1.
$$

Skupinu vektorů $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_s$ lze převést na skupinu vektorů ortogonálních $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_s$ např. pomocí *Grammovy-Schmidtovy ortogonalizační metody***:**

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{b}_1 &= \boldsymbol{a}_1,\\
\boldsymbol{b}_2 &= \boldsymbol{a}_2 - \frac{\boldsymbol{a}_2^T\boldsymbol{b}_1}{\|\boldsymbol{b}_1\|^2}\boldsymbol{b}_1,\\
\boldsymbol{b}_3 &= \boldsymbol{a}_3 - \frac{\boldsymbol{a}_3^T\boldsymbol{b}_1}{\|\boldsymbol{b}_1\|^2}\boldsymbol{b}_1 - \frac{\boldsymbol{a}_3^T\boldsymbol{b}_2}{\|\boldsymbol{b}_2\|^2}\boldsymbol{b}_2,
\end{aligned}
\tag{4.18}
$$

atd.

Skupinu ortogonálních vektorů $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_s$ převedeme na skupinu ortonormálních vektorů $\underline{\boldsymbol{b}}_1, \underline{\boldsymbol{b}}_2, \ldots, \underline{\boldsymbol{b}}_s$ normováním každého vektoru pomocí vztahu (4.17).

Jako *ortogonální báze (ortonormální báze)* se označuje taková báze, jejíž bázové vektory jsou vzájemně ortogonální (ortonormální).

4.2 Matice

Matice A je systém $n \,.\, m$ prvků (obvykle reálných čísel) uspořádaných do n řádků a m sloupců:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Čísla a_{ij} se nazývají *prvky matice* A. Uvedená matice $\boldsymbol{A}$ je *typu* (n,m). Bude-li užitečné zdůraznit typ matice, bude příslušná matice označována také typem $\boldsymbol{A}_{(n,m)}$. Matici lze též chápat jako uspořádanou množimu m (sloupcových) vektorů $a_1, a_2, \ldots, a_m$:

$$(\boldsymbol{a}_1 \quad \boldsymbol{a}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_m), \quad \text{kde} \quad \boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \cdots, \boldsymbol{a}_m = \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Vektor můžeme považovat za jednosloupcovou matici, tj. matici typu $(n,1)$.

4.2.1 Základní pojmy

Nulová matice je matice jejíž všechny prvky jsou nulové. Bude označována stejně jako nulový vektor, tj. symbolem $\boldsymbol{0}$. Např. nulová matice typu (4,3) bude

$$\boldsymbol{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Čtvercová matice je matice která má stejný počet sloupců jako řádků tj. $m = n$, např. matice $\boldsymbol{A}$ typu (4,4) bude

$$A_{(4,4)} = \begin{pmatrix} 1{,}2 & 2{,}7 & 5{,}2 & 1{,}8 \\ 5{,}6 & 4{,}2 & 8{,}6 & 5{,}8 \\ 5{,}0 & 4{,}3 & 9{,}5 & 1{,}1 \\ 7{,}2 & 10{,}3 & 5{,}9 & 2{,}0 \end{pmatrix}.$$

Symetrická matice je čtvercová matice, pro kterou platí, že $a_{ij} = a_{ji}$. Jako příklad je uvedena opět matice typu (4,4) se zvýrazněním symetrie jednoho z prvků $a_{31}=a_{13}$ = 3,8. Všechny mimodiagonální prvky jsou symetrické vzhledem k hlavní diagonále, která je symbolicky znázorněna plnými kroužky,

$$A_{(4,4)} = \begin{pmatrix} 5{,}8 & 4{,}1 & \mathbf{3{,}8} & 0{,}9 \\ 4{,}1 & 8{,}2 & 0{,}6 & 0 \\ \mathbf{3{,}8} & 0{,}6 & 11{,}6 & 3{,}1 \\ 0{,}9 & 0 & 3{,}1 & 9{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bullet & \circ & 3{,}8 & \circ \\ \circ & \bullet & \circ & \circ \\ 3{,}8 & \circ & \bullet & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \bullet \end{pmatrix}.$$

Prvky a_{ii} , kde i=1, 2, ... , n které se nacházejí na hlavní diagonále matice se nazývají diagonálními prvky, ostatní prvky mimo hlavní diagonálu mimodiagonálními prvky.

Diagonální matice je čtvercová matice u které jsou všechny mimodiagonální prvky rovny nule, tzn. $a_{ij} = 0$, pro všechna $i \neq j$.

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} = diag\boldsymbol{D} = diag(a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}).$$

Jednotková matice je diagonální matice, u které se všechny prvky hlavní diagonály rovnají jedné, tj. $a_{ii} = 1$, pro i = 1, ... , n. Jednotkové matice budeme označovat $\boldsymbol{I}$, nebo $\boldsymbol{I}_{(n)}$, případně $\boldsymbol{E}$ nebo $\boldsymbol{E}_{(n)}$.

$$\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = diag(1, 1, \ldots, 1).$$

Horní (pravá) trojúhelníková matice T_r je matice u které všechny prvky pod hlavní diagonálou jsou nulové, dolní (levá) trojúhelníková matice T_l je matice u které všechny prvky nad hlavní diagonálou jsou nulové:

$$\boldsymbol{T}_r = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{T}_l = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Bloková matice je matice vytvořená (rozdělená) *submaticemi* patřičných typů, např.:

$$\boldsymbol{A}_{(5,7)} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc:cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & a_{27} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & a_{37} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} & a_{47} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} & a_{57} \end{array}\right) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{D} & \boldsymbol{E} \end{pmatrix},$$

je - li matice $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}_{11}$ typu (2,3), pak jsou ostatní matice typů :
$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}_{12}$ typu (2,4), $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{A}_{21}$ typu (3,3) a $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{A}_{22}$ typu (3,4).

4.2.2 Operace s maticemi

Transponování matice

Transponovaná matice $\boldsymbol{A}^T$ k matici $\boldsymbol{A}$ vznikne záměnou (transpozicí) řádků a sloupců. Je-li matice $\boldsymbol{A}$ typu (n,m) je transponovaná matice $\boldsymbol{A}^T$ typu (m,n).

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{4.19}$$

Transponování blokové matice

$$\boldsymbol{A}_{(n,m)} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{D} & \boldsymbol{E} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}^T_{(m,n)} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}^T & \boldsymbol{D}^T \\ \boldsymbol{C}^T & \boldsymbol{E}^T \end{pmatrix}. \tag{4.20}$$

Samozřejmě se transponováním mění i typy odpovídajících submatic, např. je-li B typu (k,l) bude B^T typu (l,k) a pod.

Součet a rozdíl matic

Dvě matice $\boldsymbol{A}$**,** $\boldsymbol{B}$ stejného typu (n,m) se sečtou (odečtou) tak, že se sečtou (odečtou) jejich odpovídající prvky tj. $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ popř. $d_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$, pro $i = 1,2,...,n$, $j = 1,2,...,m.$

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1m} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2m}+b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \cdots & a_{nm}+b_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nm} \end{pmatrix}, \tag{4.21}$$

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & \cdots & a_{1n}-b_{1m} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & \cdots & a_{2m}-b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}-b_{n1} & a_{n2}-b_{n2} & \cdots & a_{nm}-b_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1m} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1} & d_{n2} & \cdots & d_{nm} \end{pmatrix}.$$

Součet a rozdíl blokových matic

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2 \\ \boldsymbol{A}_3 & \boldsymbol{A}_4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{B}_2 \\ \boldsymbol{B}_3 & \boldsymbol{B}_4 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{B}_2 \\ \boldsymbol{A}_3+\boldsymbol{B}_3 & \boldsymbol{A}_4+\boldsymbol{B}_4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{A}-\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1-\boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{A}_2-\boldsymbol{B}_2 \\ \boldsymbol{A}_3-\boldsymbol{B}_3 & \boldsymbol{A}_4-\boldsymbol{B}_4 \end{pmatrix}. \tag{4.22}$$

Všechny submatice musí být vhodného typu.

Pro součet dvou a více matic stejného typu a jejich transponování platí:

a) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}+\boldsymbol{A},$

b) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}),$

c) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^T = \boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{B}^T,$ (4.23)

d) $(\boldsymbol{A}^T)^T = \boldsymbol{A},$

e) pro symetrickou matici $\boldsymbol{A}$ platí $\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{A}.$

Rovnost matic

Dvě matice stejného typu se sobě rovnají

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}, \tag{4.24}$$

jestliže se sobě rovnají všechny jejich odpovídající si prvky,

tj. $a_{ij} = b_{ij}$, pro $i = 1,2,...,n$, $j = 1,2,...,m.$

Jestliže $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$, pak

$$A - B = B - A = 0$$

$$A - A = 0, \; A - 0 = A, \qquad (4.25)$$

kde $\boldsymbol{0}$ je nulová matice.

Násobení matice číslem

Matice se násobí reálným číslem tak, že se tímto číslem vynásobí všechny její prvky,tj.

$$b_{ij} = c.a_{ij}, \text{ pro } i = 1,2,...,n \,,\; j = 1,2,...,m. \qquad (4,26)$$

$$\boldsymbol{B} = c.\boldsymbol{A} = c.\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c.a_{11} & c.a_{12} & \cdots & c.a_{1m} \\ c.a_{21} & c.a_{22} & \cdots & c.a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c.a_{n1} & c.a_{n2} & \cdots & c.a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{pmatrix}$$

Násobení matic

Nechť existuje matice $\boldsymbol{A}$ typu (n,p) a matice $\boldsymbol{B}$ typu (p,m), pak pro prvky matice $\boldsymbol{C}$ typu (n,m), získané součinem $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B}$, platí pravidlo:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}, \text{ pro } i = 1,2,...,n \,,\; j = 1,2,...,m. \qquad (4.27)$$

Názorněji je operace součinu dvou matic $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ vyjádřena při odlišném označení jejich prvků:

$$\boldsymbol{A}_{(n,p)} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_p \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n_1 & n_2 & \cdots & n_p \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_{(p,m)} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \cdots & \mu_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \cdots & \mu_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_p & \beta_p & \cdots & \mu_p \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{C}_{(n,m)} = \boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} \sum a\alpha & \sum a\beta & \cdots & \sum a\mu \\ \sum b\alpha & \sum b\beta & \cdots & \sum b\mu \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum n\alpha & \sum n\beta & \cdots & \sum n\mu \end{pmatrix}. \qquad (4.28)$$

Při ručním výpočtu je vhodné uspořádat matice do tzv. Falkova schématu, ve kterém leží každý určovaný prvek matice $\boldsymbol{C}$ na průsečíku příslušného řádku matice $\boldsymbol{A}$ a sloupce matice $\boldsymbol{B}$, viz šipky v uvedeném schématu, kde $c_{22} = b_1.\beta_1$

$$\boldsymbol{B}_{(p,m)} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \cdots & \mu_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \cdots & \mu_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_p & \beta_p & \cdots & \mu_p \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\boldsymbol{A}_{(n,p)} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_p \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n_1 & n_2 & \cdots & n_p \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \circ & \circ & \cdots & \circ \\ \circ & c_{22} & \cdots & \circ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \circ & \circ & \cdots & \circ \end{pmatrix} = \boldsymbol{C}_{(n,m)} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nm} \end{pmatrix}$$

$+\ b_2.\beta_2 + \ldots + b_p.\beta_p.$

Uvedeným schématem lze postupně násobit i několik matic za sebou. Důležité je uvědomit si, že součin matic je definován jen pro takové dvě matice, u nichž počet sloupců matice první se rovná počtu řádků matice druhé, tzn, že např. pro první matici typu (n,p) a druhou matici typu (p,m) bude výsledná matice součinu první a druhé typu (n,m). Součin druhé a první bude definován jen v případě, kdy by platilo $n = m$. V dalším budeme vždy předpokládat, že při násobení matic jsou tyto matice patřičného typu.

Pro násobení matice vektorem platí stejný požadavek na jejich typy, neboť vektor můžeme považovat za matici typu $(m,1)$. Je-li matice $\boldsymbol{A}$ typu (n,m) a vektor $\boldsymbol{x}$ typu $(m,1)$ bude jejich součin $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ vektor typu $(n,1)$. Tímto způsobem je obvykle popsán systém n lineárních rovnic.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \qquad (4.29)$$

obecně tedy $b_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j$, pro $i = 1, 2, \cdots, n.$

<u>*Násobení vektoru maticí*</u> je možné s využitím transponované podoby vektoru. Samozřejmě musí být splněna podmínky správných typů. Je-li matice $\boldsymbol{A}$ opět typu (n,m) musí být vektor $\boldsymbol{y}$ tentokrát typu $(n,1)$, resp. transponovaný vektor (řádkový vektor) $\boldsymbol{y}^T$ typu $(1,n)$. Výsledkem součinu $\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{A} = \boldsymbol{c}^T$ je rovněž řádkový vektor $\boldsymbol{c}^T$ typu $(1,m)$.

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{A} = \boldsymbol{c}^T = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_m \end{pmatrix}, \quad (4.30)$$

$$\text{kde} \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 a_{11} + y_2 a_{21} + \cdots + y_n a_{n1} \\ y_1 a_{12} + y_2 a_{22} + \cdots + y_n a_{n2} \\ \vdots \\ y_1 a_{1m} + y_2 a_{2m} + \cdots + y_n a_{nm} \end{pmatrix},$$

$$\text{obecně tedy} \quad c_i = \sum_{j=1}^{n} y_j a_{ji}, \qquad \text{pro } i = 1, 2, \cdots, m.$$

Násobení dvou vektorů stejného typu $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y}$ (tzv. skalární součin) již bylo definováno v (4.9). Zde definujme součin dvou vektorů opět stejného typu $(n,1)$ ve tvaru $\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^T = \boldsymbol{Z}$,

případně $\boldsymbol{y}\boldsymbol{x}^T = \boldsymbol{Z}^T$, jehož výsledkem je matice typu (n,n):

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 & \cdots & x_1 y_n \\ x_2 y_1 & x_2 y_2 & \cdots & x_2 y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n y_1 & x_n y_2 & \cdots & x_n y_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{Z}. \quad (4.31)$$

Pro násobení matic (příslušných typů) platí:

a) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC}) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$,

b) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{AB} + \boldsymbol{AC}$,

c) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AC} + \boldsymbol{BC}$, (4.32)

d) $(\boldsymbol{ABC})^T = \boldsymbol{C}^T\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T$,

e) obecně $\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$ (jsou - li definovány),

f) $\boldsymbol{A0} = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{0A} = \boldsymbol{0}$, kde $\boldsymbol{0}$ jsou vhodné nulové matice,

g) $\boldsymbol{A}_{(n,m)}\boldsymbol{I}_{(m)} = \boldsymbol{A}_{(n,m)}$, $\boldsymbol{I}_{(n)}\boldsymbol{A}_{(n,m)} = \boldsymbol{A}_{(n,m)}$,

kde $\boldsymbol{I}_m$ a $\boldsymbol{I}_n$ jsou jednotkové matice.

Ve vyrovnávacím počtu jsou často používány součiny $\boldsymbol{A^T A = N}$, $\boldsymbol{A^T P A = N}$, či $\boldsymbol{A^T Q A = N}$.

Označíme-li:

$$\boldsymbol{A}_{(n,k)} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & \cdots & k_1 \\ a_2 & b_2 & \cdots & k_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & b_n & \cdots & k_n \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}^T_{(k,n)} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{N}_{(k,k)} = \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} & \cdots & n_{1k} \\ n_{21} & n_{22} & \cdots & n_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n_{k1} & b_{k2} & \cdots & k_{kk} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{P}_{(n,n)} = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_n \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{Q}_{(n,n)} = \begin{pmatrix} q_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & q_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & q_n \end{pmatrix}, \quad \text{kde} \quad \begin{matrix} \boldsymbol{P} = diag(p_1, p_2, \cdots, p_n) \\ \boldsymbol{Q} = diag(q_1, q_2, \cdots, q_n) \end{matrix},$$

budou součiny $\boldsymbol{A^T A = N}$, $\boldsymbol{A^T P A = N}$, či $\boldsymbol{A^T Q A = N}$ rovny:

$$\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & \cdots & k_1 \\ a_2 & b_2 & \cdots & k_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & b_n & \cdots & k_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum aa & \sum ab & \cdots & \sum ak \\ \sum ba & \sum bb & \cdots & \sum bk \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum ka & \sum kb & \cdots & \sum kk \end{pmatrix}, \qquad (4{,}33)$$

$$\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{P A} = \begin{pmatrix} \sum paa & \sum pab & \cdots & \sum pak \\ \sum pba & \sum pbb & \cdots & \sum pbk \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum pka & \sum pkb & \cdots & \sum pkk \end{pmatrix}, \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{Q A} = \begin{pmatrix} \sum qaa & \sum qab & \cdots & \sum qak \\ \sum qba & \sum qbb & \cdots & \sum qbk \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum qka & \sum qkb & \cdots & \sum qkk \end{pmatrix}$$

kde $\sum aa = \sum_{i=1}^{n} a_i a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i^2$, $\sum ab = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$, ... atd., $\sum pab = \sum_{i=1}^{n} p_i a_i b_i, ...atd.$

Matice $\boldsymbol{N}$ jsou symetrické, tedy $\boldsymbol{N}^T = \boldsymbol{N}$ a nazývají se *matice koeficientů normálních rovnic.*

Matice $\boldsymbol{A}$ se nazývá *matice plánu,* matice $\boldsymbol{P}$ *matice vah* a $\boldsymbol{Q}$ *matice váhových koeficientů (matice kofaktorů).*

Násobení blokových matic

Nechť matice $\boldsymbol{A}$ a matice $\boldsymbol{B}$ jsou blokové matice vhodných typů:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2 \\ \boldsymbol{A}_3 & \boldsymbol{A}_4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{B}_2 \\ \boldsymbol{B}_3 & \boldsymbol{B}_4 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{C}_2 \\ \boldsymbol{C}_3 & \boldsymbol{C}_4 \end{pmatrix}, \quad \text{kde}$$

$$\boldsymbol{C}_1 = \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_3, \boldsymbol{C}_2 = \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_2 + \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_4,$$
$$\boldsymbol{C}_3 = \boldsymbol{A}_3\boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{A}_4\boldsymbol{B}_3\ , \boldsymbol{C}_4 = \boldsymbol{A}_3\boldsymbol{B}_2 + \boldsymbol{A}_4\boldsymbol{B}_4,$$

tedy $$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_3 & \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_2 + \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_4 \\ \boldsymbol{A}_3\boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{A}_4\boldsymbol{B}_3 & \boldsymbol{A}_3\boldsymbol{B}_2 + \boldsymbol{A}_4\boldsymbol{B}_4 \end{pmatrix}. \tag{4.34}$$

Determinant matice

Determinantem čtvercové matice $\boldsymbol{A}_{(n,n)}$ budeme značit číslo $det(\boldsymbol{A})$, které se vypočítá:

$$\det(\boldsymbol{A}) = \sum_{\mathrm{k}=1}^{n} (-1)^{(j+k)} a_{jk} A_{jk}, \text{ nebo } \det(\boldsymbol{A}) = \sum_{\mathrm{j}=1}^{n} (-1)^{(j+k)} a_{jk} A_{jk}, \tag{4.35}$$

kde A_{jk} jsou *subdeterminanty* matic vzniklých vypuštěním j-tého řádku a k-tého sloupce.

Determinant matice typu (2,2)

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \det(\boldsymbol{A}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{4.36}$$

Determinant matice $\boldsymbol{A}$ typu (3,3)

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

se vypočítá

$$\det(\boldsymbol{A}) = a_{11}\det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12}\det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13}\det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}, \quad \text{tedy} \quad (4.37)$$

$$\det(\boldsymbol{A}) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Hodnota determinantu matice se nezmění, když k některému sloupci (řádku) matice přičteme lineární kombinaci jiných sloupců (řádků) této matice.

Násobíme-li některý sloupec (řádek) matice $\boldsymbol{A}$ číslem c, bude determinant takto vzniklé matice mít hodnotu

$$c.\det(\boldsymbol{A}).$$

Zaměníme-li v matici dva sloupce (řádky), determinant změní znaménko.

Pravidla pro práci s determinanty:

a) $\det(\boldsymbol{AB}) = \det(\boldsymbol{BA})$,

b) $\det(\boldsymbol{AB}) = \det(\boldsymbol{A})\det(\boldsymbol{B})$,

c) $\det(\boldsymbol{A}^T) = \det(\boldsymbol{A})$, (4.38)

d) $\det(\mathrm{diag}\boldsymbol{D}) = d_{11}d_{22}\cdots d_{nn}$,

e) $\det(\boldsymbol{I}) = 1,\ \det(\boldsymbol{0}) = 0$.

Regulární matice je čtvercová matice, která má nenulový determinant, tj. $\det(\boldsymbol{A}) \neq 0$.

Singulární matice je čtvercová matice, jejíž determinant se rovná nule, tj. $\det(\boldsymbol{A}) = 0$.

Hodnost matice

Hodnost matice $\boldsymbol{A}$ je číslo $h(\boldsymbol{A})$, které udává maximální počet lineárně nezávislých vektorů (sloupců) matice $\boldsymbol{A}_{(n,m)}$. Hodnost matice se současně rovná počtu lineárně nezávislých řádků (sloupců). Hodnost matice $\boldsymbol{A}_{(n,m)}$ je maximálně rovna menšímu z čísel n, m, tj. $h(\boldsymbol{A}) \leq min(n,m)$.

Jsou-li čtvercové matice $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ stejného typu (n,n) u nichž $h(\boldsymbol{A}) = r$, $h(\boldsymbol{B}) = s$, tak je

$$h(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = r + s - n. \quad (4.39)$$

Pro součin dvou matic $\boldsymbol{AB}$ platí, že hodnost součinu $h(\boldsymbol{AB}) \leq min\{h(\boldsymbol{A}),h(\boldsymbol{B})\}$.

Regulární matice $\boldsymbol{A}$ typu (n,n) má hodnost $h(\boldsymbol{A}) = n$.

Singulární matice $\boldsymbol{A}$ typu (n,n) má hodnost $h(\boldsymbol{A}) < n$.

Hodnost diagonální matice se rovná počtu nenulových prvků této matice.

Hodnost transponované matice je stejná jako u matice původní, tj.

$$h(\boldsymbol{A}^T) = h(\boldsymbol{A}). \tag{4.40}$$

Stopa matice

<u>*Stopa (čtvercové) matice*</u> je číslo $tr(\boldsymbol{A})$, které se vypočítá jako součet prvků hlavní diagonály matice $\boldsymbol{A}_{(n,n)}$ tj.:

$$tr(\boldsymbol{A}) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}. \tag{4.41}$$

Pro stopy matic platí:

$$\begin{aligned}
&\text{a)}\quad tr(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = tr(\boldsymbol{A}) + tr(\boldsymbol{B}),\\
&\text{b)}\quad \text{jsou - li definovány } \boldsymbol{AB} \text{ a } \boldsymbol{BA},\ \text{pak}\ \ tr(\boldsymbol{AB}) = tr(\boldsymbol{BA}),\\
&\text{c)}\quad tr(\boldsymbol{A}^T) = tr(\boldsymbol{A}).
\end{aligned} \tag{4.42}$$

<u>Idempotentní matice</u>

Idempotentní matice je taková matice pro kterou platí $\boldsymbol{AA} = \boldsymbol{A}$**.** Idempotentní matice je symetrická, tj. $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^T$. Hodnost idempotentní matice se rovná její stopě, tj. $h(\boldsymbol{A}) = tr(\boldsymbol{A})$.

<u>Norma matice</u>

Norma matice $\boldsymbol{A}_{(n,n)}$ se vypočítá jako odmocnina ze součtu čtverců diagonálních prvků tj:

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{A}\| &= \sqrt{a_{11}^2 + a_{22}^2 + \cdots + a_{nn}^2},\ \text{nebo}\\
\|\boldsymbol{A}\| &= \sqrt{tr(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})}.
\end{aligned} \tag{4.43}$$

4.2.3 Inverzní matice

Inverzní matice $\boldsymbol{A}^{-1}$ ke čtvercové regulární matici $\boldsymbol{A}$ je taková čtvercová matice, pro kterou platí:

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{I}, \qquad (4.44)$$

kde $\boldsymbol{I}$ je jednotková matice.

Existuje řada metod pro výpočet inverzní matice. Podrobně se jimi zabývá numerická matematika. Výpočet inverzní matice je součástí prakticky všech programových produktů, které pracují s maticemi, např. EXCEL, MATCAD, MATLAB aj.

Pro inverzi čtvercových regulárních matic stejného typu platí: (4.45a - e)

a) $(\boldsymbol{A}^T)^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})^T$,

b) $(\boldsymbol{ABC})^{-1} = (\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1})$,

c) je - li $\boldsymbol{A}$ symetrická tj. $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^T$, je i $\boldsymbol{A}^{-1}$symetrická, tj. $\boldsymbol{A}^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})^T$,

d) je - li $\boldsymbol{D} = \mathrm{d}iag(d_1, d_2, \cdots, d_n)$, je $\boldsymbol{D}^{-1} = diag(1/d_1, 1/d_2, \cdots, 1/d_n)$,

e) je - li $\boldsymbol{T}$ trojúhelníková matice (např. horní), je i $\boldsymbol{T}^{-1}$ trojúhelníková matice (horní).

Ortogonální matice

Regulární matice $\boldsymbol{C}$ typu (n,n) je ortogonální, když pro ni platí:

$$\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{C} = \boldsymbol{I}, \text{ nebo též } \boldsymbol{C}^{-1} = \boldsymbol{C}^T. \qquad (4.46)$$

Sloupce (řádky) matice $\boldsymbol{C}$ tvoří ortonormální skupinu vektorů, tj. jsou navzájem na sebe kolmé a všechny mají jednotkovou délku.

Příkladem ortogonální matice jsou známé matice rotace, např. $\boldsymbol{R}_{(2,2)}$:

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{R}^{-1} = \boldsymbol{R}^T = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}. \qquad (4.47)$$

Determinant ortogonální matice

$$det(\boldsymbol{C}) = det(\boldsymbol{C}^T) = det(\boldsymbol{C}^{-1}) = 1. \qquad (4.48)$$

Ve vyrovnávacím počtu se často používá diagonální matice vah $\boldsymbol{P}$ a k ní inverzní matice váhových koeficientů $\boldsymbol{Q}$, kde za předpokladu $p_i > 0$, $q_i > 0$ pro všechna i:

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_n \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{P}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{p_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{p_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{p_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & q_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & q_n \end{pmatrix}. \qquad (4.49)$$

Definujeme-li pro váhy $p_i > 0$ následující matice:

$$\boldsymbol{P}^{1/2} = \begin{pmatrix} \sqrt{p_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{p_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{p_n} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{P}^{-1/2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{p_1}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{p_2}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\sqrt{p_n}} \end{pmatrix} = \boldsymbol{Q}^{1/2},$$

pak platí:

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^{1/2}\boldsymbol{P}^{1/2}, \quad \boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{P}^{-1/2}\boldsymbol{P}^{-1/2}, \quad \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}^{1/2}\boldsymbol{Q}^{1/2}. \qquad (4.50)$$

a vztah $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}$,viz (5.32), lze psát jako

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}^{1/2}\boldsymbol{P}^{1/2}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B}, \text{ kde } \boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}^{1/2}\boldsymbol{A}. \qquad (4.51)$$

Obdobně

$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{A}$, lze psát jako $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{Q}^{1/2}\boldsymbol{Q}^{1/2}\boldsymbol{A}$.

Inverze blokové matice

Označme blokové matice:

$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \qquad X^{-1} = \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}, \qquad I = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

a předpokládejmě, že matice jsou vhodných typů a všechny k inverzi připadající submatice jsou regulární. Potom lze odvodit vztahy:

$$\begin{aligned} E &= A^{-1} + A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}, \\ H &= (D - CA^{-1}B)^{-1}, \\ F &= -A^{-1}BH = -A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1}, \\ G &= -HCA^{-1} = -(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}. \end{aligned} \tag{4.52}$$

Odvození vyplývá z definice inverzní matice, u níž platí:

$$X X^{-1} = I,$$

takže lze podle pravidel pro násobení blokových matic, viz. (4.34) psát:

$$AE + BG = I,\ AF + BH = 0,\ CE + DG = I,\ CF + DH = I.$$

Poměrně častým případem jsou symetrické blokové matice u nichž

$$C = B^T \text{ a } D = 0.$$

Samozřejmě musí platit, že všechny submatice připadající k inverzi jsou regulární.

Výsledná inverzní matice je rovněž symetrická.

$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ B^T & 0 \end{pmatrix}, \quad X^{-1} = \begin{pmatrix} E & F \\ F^T & H \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} E &= A^{-1} - A^{-1}B(B^T A^{-1}B)^{-1}B^T A^{-1}, \\ H &= -(B^T A^{-1}B)^{-1}, \\ F &= -A^{-1}BH, \quad F^T = -HB^T A^{-1}. \end{aligned} \tag{4.53}$$

4.2.4 Elementární matice

Elementárními maticemi budeme nazývat matice, pomocí kterých se realizují _elementární operace_ s maticemi (elementární úpravy řádků matice), při nichž se nemění typ matice ani její hodnost. Elementární matice jsou čtvercové a jejich typ je stejný jako počet řádků matice, kterou upravují. Pozor: elementární matice nejsou maticemi bázových vektorů, viz (4.66).

$$\boldsymbol{E}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{E}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{E}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \tag{4.54}$$

Elementární matice $\boldsymbol{E}_1$ zamění navzájem dva řádky matice (zde druhý a třetí řádek). Elementární matice $\boldsymbol{E}_2$ vynásobí řádek matice reálným číslem (zde druhý řádek číslem c). Elementární matice $\boldsymbol{E}_3$ vynásobí řádek reálným číslem a výsledek přičte k dalšímu řádku (zde vynásobí první řádek číslem c a přičte jej k druhému řádku. Násobení reálným číslem znamená vynásobit tímto číslem každý prvek příslušného řádku. Sečíst dva řádky znamená sečíst jejich odpovídající si prvky. Elementární matice $\boldsymbol{E}_2$ je diagonální a podle (4.45d) bude k ní inverzní matice rovnéž diagonální. Elementární matice $\boldsymbol{E}_3$ je trojúhelníková, bude podle (4.45e) k ní příslušející inverzní matice rovněž trojúhelníková.

$$\boldsymbol{E}_1^{-1} = \boldsymbol{E}_1,$$

$$\boldsymbol{E}_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/c & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{E}_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -c & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \tag{4.55}$$

Při elementárních operacích se upravovaná matice násobí elementárními maticemi zleva.

Mezi elementární matice lze zařadit i tzv. _matice zrcadlení_, které jsou zvláštním případem elementární matice $\boldsymbol{E}_2$ ve které konstanta $c = -1$.

Ve vektorovém prostoru E^3 se často užívají následující tři matice zrcadlení:

$$P_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \qquad (4.56)$$

Matice zrcadlení změní při násobení zleva znaménka všech prvků příslušného řádku násobené matice a tím vlastně mění orientaci příslušné osy souřadného systému. Matice zrcadlení tak mění <u>*levotočivý souřadný systém*</u> na <u>*pravotočivý souřadný systém*</u> a naopak..

Pro matice zrcadlení platí následující vztahy:

$$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2 = -\boldsymbol{P}_3, \quad \boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_3 = -\boldsymbol{P}_1, \quad \boldsymbol{P}_3\boldsymbol{P}_1 = -\boldsymbol{P}_2,$$
$$\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{P}_i = -\boldsymbol{P}_i, \quad \boldsymbol{P}_i^T = \boldsymbol{P}_i, \quad \boldsymbol{P}_i^{-1} = \boldsymbol{P}_i, \quad \text{pro } i = 1,2,3. \qquad (4.57)$$

Příklad 4.1

Příklad na použití matic zrcadlení:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 8 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 6 & 4 & 4 \\ 5 & 2 & 0 & -5 & 7 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{P}_3\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 8 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 6 & 4 & 4 \\ -5 & -2 & 0 & 5 & -7 \end{pmatrix}.$$

<u>Výpočet inverzní matice s použitím elementárních matic</u>

Jedním ze způsobů výpočtu inverzní matice $\boldsymbol{A}^{-1}$ k matici $\boldsymbol{A}$ je rozšířit tuto matici o blokovou matici jednotkovou a vytvořit tak blokovou matici $\boldsymbol{B}$.

U takto vytvořené matice $\boldsymbol{B}$ se vhodnými elementárními úpravymi řádků přemění matice $\boldsymbol{A}$ na matici jednotkovou a tím se přetvoří i matice jednotková $\boldsymbol{I}$ na matici inverzní $\boldsymbol{A}^{-1}$.

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{I}), \\ &\downarrow \quad \Downarrow \downarrow \\ &\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{I} \quad \boldsymbol{A}^{-1}). \end{aligned} \qquad (4.58)$$

Uvedený postup využívá tzv. <u>*Gaussovy eliminační metody*</u>, u které se nejprve přemění matice $\boldsymbol{A}$ na horní trojúhelníkovou matici (pod hlavní diagonálou má samé nuly), poté se eliminují prvky nad hlavní diagonálou (rovněž samé nuly), Diagonální matice se přetvoří na matici jednotkovou podělením každého řádku hodnotou jeho diagonálního prvku

Příklad 4.2

Příklad na použití elementárních matic při výpočtu inverzní matice

Je dána regulární matice $\boldsymbol{A}$ *, ke které se má vypočítat inverzní matice* $\boldsymbol{A}^{-1}$ *. Matice* $\boldsymbol{A}$ *se rozšíří přidáním jednotkové matice* $\boldsymbol{I}$ *na blokovou matici* $\boldsymbol{B}$ *.*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 10 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 10 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

Dále se realizují postupné součiny s využitím elementárních matic. Elementární matice jsou v příslušném součinu vždy nalevo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 10 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1/2 & 1 \end{array}\right),$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1/2 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1/2 & 1 \end{array}\right),$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1/2 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1/2 & 1 \end{array}\right),$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1/2 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1/2 & 1 \end{array}\right).$$

.

Závěrečná matice je již bloková matice $\boldsymbol{C}$ *obsahující inverzní matici* $\boldsymbol{A}^{-1}$*.*

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{A}^{-1} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1/2 & 1 \end{array}\right), \quad \boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Kontrola :

$$\boldsymbol{A}.\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 10 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

V uvedeném příkladě bylo k získání inverzní matice použito postupné násobení elementárními maticemi. Při označení postupně $\boldsymbol{T}_1$, $\boldsymbol{T}_2$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{T}_3$ *a* $\boldsymbol{T}_4$, *jsou matice* $\boldsymbol{T}_1$, $\boldsymbol{T}_2$ *dolní trojúhelníkové, matice* $\boldsymbol{D}$ *je diagonální a matice* $\boldsymbol{T}_3$, $\boldsymbol{T}_4$ *jsou horní trojúhelníkové matice.*

Inverzní matici A^{-1} lze rovněž získat jako součin elementárních matic (násobených postupně zleva) a původní matici A jako součin jejich inverzních podob.

Každou regulární matici A lze rozložit na součin tří matic (4.57) , z nichž K a M jsou dolní a horní trojúhelníkové matice a L je diagonální matice.

$$(T_4T_3DT_2T_1)I = T_4T_3DT_2T_1 = A^{-1},$$
$$(T_4T_3DT_2T_1)^{-1} = (A^{-1})^{-1} = A = T_1^{-1}T_2^{-1}D^{-1}T_3^{-1}T_4^{-1},$$
$$A = KLM, \tag{4.59}$$
kde $K = T_1^{-1}T_2^{-1}, L = D^{-1}, M = T_3^{-1}T_4^{-1}$.

Příklad 4.2 - pokračování

V uvedeném příkladě bude mít rozklad (4.2) podobu:

$$K = T_1^{-1}T_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M = T_3^{-1}T_4^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A = KLM = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 10 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pro symetrické a regulární matice $A = A^T$ platí rozklad:

$$A = CDC^T, \quad \text{nebo} \quad A = C^T DC, \tag{4.60}$$
$$A^T = (CDC^T)^T = (C^T DC) = A,$$
kde C je dolní (horní) trojúhelníková matice, D diagonální matice a C^T horní (dolní) trojúhelníková matice.

V případech, kdy všechny prvky na hlavní diagonále matice D jsou kladné, lze podle (4.50) rozložit tuto matici na součin dvou stejných matic

$D = D^{1/2}D^{1/2}$ a psát:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{D}^{1/2}\boldsymbol{D}^{1/2}\boldsymbol{C}^{T} = \boldsymbol{G}\boldsymbol{G}^{T}, \qquad (4.61)$$

kde $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{D}^{1/2}$.

Matice **G** je dolní trojúhelníková matice. Rozklad symetrické matice na součin (4.51) se nazývá <u>Choleského rozklad</u>. Choleského rozklad je používán pro výpočet inverzní matice nebo řešení lineárních systémů rovnic tzv. <u>Choleského metodou</u>.

Pro výpočet inverzní matice $\boldsymbol{A}^{-1}$ platí:

$$\boldsymbol{A}^{-1} = (\boldsymbol{G}\boldsymbol{G}^{T})^{-1} = (\boldsymbol{G}^{T})^{-1}\boldsymbol{G}^{-1} = (\boldsymbol{G}^{-1})^{T}\boldsymbol{G}^{-1}, \qquad (4.62)$$

$$\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{C}\boldsymbol{D}^{1/2}), \quad \boldsymbol{G}^{-1} = \boldsymbol{D}^{-1/2}\boldsymbol{C}^{-1},$$

$$\boldsymbol{A}^{-1} = (\boldsymbol{C}\boldsymbol{D}\boldsymbol{C}^{T})^{-1} = (\boldsymbol{C}^{T})^{-1}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}^{-1} = (\boldsymbol{C}^{-1})^{T}\boldsymbol{D}^{-1/2}\boldsymbol{D}^{-1/2}\boldsymbol{C}^{-1}.$$

Příklad 4.3

*Příklad na Choleského rozklad a inverzi symetrické matice **A***

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{D}\boldsymbol{C}^{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{G}\boldsymbol{G}^{T},$$

$$\text{kde } \boldsymbol{G} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{D}^{1/2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}^{-1} = (\boldsymbol{C}^{T})^{-1}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= (\boldsymbol{G}^{-1})^{T}\boldsymbol{G}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{2}} & -\frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

4.3 Lineární a kvadratické formy

Lineární transformací vektoru $\boldsymbol{x}$ na vektor $\boldsymbol{y}$ se nazývají vztahy:

$$\boldsymbol{y}_{(m,1)} = \boldsymbol{B}_{(m,n)}\boldsymbol{x}_{(n,1)}, \tag{4.63}$$

$$\boldsymbol{z}_{(\mathrm{m},1)} = \boldsymbol{y}_{(m,1)} + \boldsymbol{c}_{(m,1)} = \boldsymbol{B}_{(m,n)}\boldsymbol{x}_{(n,1)} + \boldsymbol{c}_{(m,1)}, \tag{4.64}$$

kde matice $\boldsymbol{B}$ typu (m,n) je *matice lineární transformace* a vektor $\boldsymbol{c}$ typu (m,1) je *vektor translace (posunu)*. Vztah (4.63) popisuje lineární zobrazení mezi dvěma vektorovými prostory, tj. transformaci vektoru $\boldsymbol{x}\in E^{\mathrm{n}}$ na vektor $\boldsymbol{y}\in E^{\mathrm{m}}$, popřípadě $z\in E^{\mathrm{m}}$ (4.64).

Bude-li matice $\boldsymbol{B}$ typu (n,n) bude ve vztahu (4.63) realizovat transformaci vektoru $\boldsymbol{x}$ typu (n,1) na vektor $\boldsymbol{y}$ (případně vektor z) stejného typu (n,1), tj. transformaci do stejného vektorového prostoru.

Délku transformovaného vektoru $\boldsymbol{y}$ můžeme vypočítat jako odmocninu ze skalárního součinu $\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{y}$ (viz 4.9 a 4.13), tedy:

$$\sqrt{\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{y}} = \sqrt{\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}} \quad . \tag{4.65}$$

Lineární transformace tedy mění délky tranformovanch vektorů Obecně totiž pro $\boldsymbol{B}$ platí:

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}, \tag{4.66}$$

zn., že transformace (4.63) změnila původní délku transformovaného vektoru $\boldsymbol{x}$. Taková transformace se nazývá *afinní transformace*. Protože se mění transformací délky, mění se při afinní transformaci i úhly mezi vektory.

V případě, že v rovnici (4.65) bude matice $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$, kde $\boldsymbol{C}$ je ortogonální matice, bude pro tuto transformaci platit:

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{C}^T\boldsymbol{C} = \boldsymbol{I},$$
$$\sqrt{\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{y}} = \sqrt{\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}} = \sqrt{\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}}. \tag{4.67}$$

Lineární transformace u níž je matice transformace ortogonální se nazývá *ortogonální transformace*. Ortogonální transformace zachovává v transformacích typu (4.63) délky vektorů a tím zachovává i úhly mezi vektory. Při ortogonální transformaci dochází k rotaci vektorů kolem jednotlivých os souřadného systému, v případě transformace (4.64) i k posunu počátku souřadného systému (translaci). Při této ortogonální transformaci jsou zachovány délky mezi dvěma libovolnými vektory tj. např. (z_1 - z_2). Délky vlastních transformovaných vektorů se mění vzhledem k nenulové translaci.

Mějme dva různé ortonormální systémy bázových vektorů patřící jednomu vektorovému prostoru V^n, viz (4.5) a vytvořme z nich *matice bázových vektorů* (*matice bází*):

$$\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \cdots & \boldsymbol{e}_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{E}^* = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1^* & \boldsymbol{e}_2^* & \cdots & \boldsymbol{e}_n^* \end{pmatrix}. \tag{4.68}$$

Součin:

$$\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{E}^*)^T \boldsymbol{E}, \tag{4.69}$$

je matice ortogonální transformace. Ortogonální transformace vlastně popisuje lineární transformaci mezi dvěma ortonormálními bázemi.

$$\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{E}^*)^T \boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{e}_1^*)^T \boldsymbol{e}_1 & (\boldsymbol{e}_1^*)^T \boldsymbol{e}_2 & \cdots & (\boldsymbol{e}_1^*)^T \boldsymbol{e}_n \\ (\boldsymbol{e}_2^*)^T \boldsymbol{e}_1 & (\boldsymbol{e}_2^*)^T \boldsymbol{e}_2 & \cdots & (\boldsymbol{e}_2^*)^T \boldsymbol{e}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\boldsymbol{e}_n^*)^T \boldsymbol{e}_1 & (\boldsymbol{e}_n^*)^T \boldsymbol{e}_2 & \cdots & (\boldsymbol{e}_n^*)^T \boldsymbol{e}_n \end{pmatrix}, \tag{4.70}$$

kde $c_{ij} = (\boldsymbol{e}_i^*)^T \boldsymbol{e}_j$, pro $i, j = 1,2,\cdots,n.$

Prvky c_{ij} ortogonální matice $\boldsymbol{C}$ jsou vektorové součiny vždy dvou bázových vektorů z různých ortonormálních bází. Podle (4.15) vyjadřují tedy kosiny úhlů mezi jednotlivými bázovými vektory, neboť ve jmenovateli výrazu (4.15) jsou normy těchto vektorů, které jsou u ortonormálních vektorů rovny jedné. Lze tedy psát:

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \cos\alpha_{11} & \cos\alpha_{12} & \cdots & \cos\alpha_{1n} \\ \cos\alpha_{21} & \cos\alpha_{22} & \cdots & \cos\alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos\alpha_{n1} & \cos\alpha_{n2} & \cdots & \cos\alpha_{nn} \end{pmatrix}. \tag{4.71}$$

Z uvedeného důvodu se prvky ortogonální matice nazývají <u>*směrové kosiny*</u>. Ortogonální transformace převádí jeden systém bázových vektorů na druhý systém bázových vektorů a jednotlivé prvky ortogonální matice $\boldsymbol{C}$ jsou pak směrové kosiny mezi původními a transformovanými bázovými vektory.

Ve vektorovém prostoru E^3 jsou standardně používány následující ortogonální <u>*matice rotací*</u>:

$$\boldsymbol{R}_1(\alpha)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \boldsymbol{R}_2(\beta)=\begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & -\sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix}, \boldsymbol{R}_3(\gamma)=\begin{pmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.72}$$

Úhly α, β, γ jsou <u>*úhly pootočení*</u> kolem jednotlivých os souřadného systému. Matice rotace $\boldsymbol{R}_1(\alpha)$ vyjadřuje pootočení kolem osy x_1, tj. v rovině x_2, x_3 o úhel α (v kladném smyslu), $\boldsymbol{R}_2(\beta)$ pootočení kolem osy x_2 , tj. v rovině x_1, x_3 o úhel β a $\boldsymbol{R}_3(\gamma)$ pootočení kolem osy x_3, tj. v rovině x_1, x_2 o úhel γ.

Jsou-li úhly pootočení dostatečně malé tj. $d\alpha$,, $d\beta$, $d\gamma$, lze dosadit do matic rotací (4.72)

$\sin d\alpha = d\alpha$, $\sin d\beta = d\beta$, $\sin d\gamma = d\gamma$ a $\cos d\alpha = \cos d\beta = \cos d\gamma = 1$. Matice rotací budou mít pak diferenciální podobu:

$$\boldsymbol{R}_1(d\alpha)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & d\alpha \\ 0 & -d\alpha & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{R}_2(d\beta)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -d\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ d\beta & 0 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{R}_3(d\gamma)=\begin{pmatrix} 1 & d\gamma & 0 \\ -d\gamma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{4.73}$$

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_1(d\alpha)\boldsymbol{R}_2(d\beta)\boldsymbol{R}_3(d\gamma) = \begin{pmatrix} 1 & d\gamma & -d\beta \\ -d\gamma & 1 & d\alpha \\ d\beta & -d\alpha & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.74}$$

Při násobení matic v rovnici (4.74) byly zanedbány součiny $d\alpha d\beta$, $d\alpha d\gamma$, $d\beta d\gamma$, *neboť se jejich hodnoty blíží nule*.

Násobíme-li dvě ortogonální matice je výsledná matice rovněž ortogonální, neboť pro ortogonální matice $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ platí:

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^T, \quad \boldsymbol{B}^{-1} = \boldsymbol{B}^T, \quad \boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB},$$
$$\boldsymbol{C}^{-1} = (\boldsymbol{AB})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T = (\boldsymbol{AB})^T = \boldsymbol{C}^T. \tag{4.75}$$

Jako <u>bilinearní formu</u> budeme označovat číslo vzniklé součinem:

$$a = \boldsymbol{y}^T \boldsymbol{A} z, \tag{4.76}$$

kde vektory i matice jsou vhodného typu, např $\boldsymbol{y}$ typu(n,1), $\boldsymbol{z}$ typu(m,1), $\boldsymbol{A}$ typu (n,m).

Zvláštní případ bilineární formy je tzv. <u>kvadratická forma</u> Ω vzniklá součinem:

$$\Omega = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{x}, \tag{4.77}$$

kde matice $\boldsymbol{B}$ je čtvercová a regulární typu (n,n) pro vektor $\boldsymbol{x}$ typu (n,1).

Příkladem kvadratické formy užívané ve vyrovnávacím počtu je součet čtverců oprav. Označíme-li vektor oprav $\boldsymbol{v}$ a diagonální matici vah $\boldsymbol{P}$ bude kvadratická forma (4.78) vyjadřovat vážený součet čtverců oprav:

$$\boldsymbol{v}^T = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{P} = diag\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix},$$
$$\Omega = \boldsymbol{v}^T \boldsymbol{P}\,\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} p_i v_i^2. \tag{4.78}$$

Je-li matice $\boldsymbol{P}$ jednotková bude kvadratická forma (4.79) vyjadřovat součet čtverců oprav:

$$\Omega = \boldsymbol{v}^T \boldsymbol{P}\, \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}^T \boldsymbol{I}\, \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}^T \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} v_i^2 . \quad (4.79)$$

<u>Metoda nejmenších čtverců</u> (*MNČ*) je metoda, která je založena na minimalizaci kvadratické formy (4.77), resp. (478) nebo (4.79).

Pro lineární transformaci (10.63) lze v případě regulární matice $\boldsymbol{B}$ napsat její inverzní podobu (zpětnou transformaci), která je vlastně řešením systému lineárních rovnic (4.63):

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{y}. \qquad (4.80)$$

Skalární součin $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}$ viz (4.9) je vlastně kvadratická forma s jednotkovou maticí. Podle (4.80) bude:

$$\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{x} = (\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{y})^T (\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}^T (\boldsymbol{B}^{-1})^T \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^T \boldsymbol{A}\, \boldsymbol{y}, \qquad (4.81)$$

kde matice $\boldsymbol{A}$ je symetrická matice, viz (4.33) vyjadřující vztah kvadratických forem v lineárním systému rovnic (4.80).

Je-li transformace (4.80) ortogonální jsou stejné i její kvadratické formy viz (4.67).

Symetrickou matici $\boldsymbol{A}$ typu (n,n) nazveme *<u>pozitivně definitní,</u>* jestliže kvadratická forma (10.82) je kladná (je kladné číslo):

$$\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A}\, \boldsymbol{x} > 0 \quad \text{pro všechny } \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}. \qquad (4.82)$$

Symetrickou matici $\boldsymbol{A}$ typu (n,n) nazveme *<u>pozitivně semidefinitní,</u>* jestliže kvadratická forma (4.83) je nezáporná:

$$\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A}\, \boldsymbol{x} \geq 0 \quad \text{pro všechny } \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}. \qquad (4.83)$$

Přesné definice pozitivně definitních matic a pozitivně semidefinitních matic viz (.84a) vycházejí z teorie vlastních čísel a vlastních vektorů, která je uvedena ve stati 4.4.

Pro pozitivně definitní a pozitivně semidefinitní matice platí: (4.84a –i)

a) symetrická matice je pozitivně definitní tehdy a jen tehdy, jestliže všechna její vlastní (charakteristická) čísla jsou kladná a pozitivně semidefinitní, jestliže jsou nezáporná, přičemž alespoň jedno je nulové,

b) je-li $\boldsymbol{A}$ pozitivně definitní, je i inverzní matice $\boldsymbol{A}^{-1}$ pozitivně definitní,

c) jestliže $\boldsymbol{B}$ je libovolná matice typu (n,m) s hodností m je matice $\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B}$ pozitivně definitní, při libovolné hodnosti je $\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B}$ pozitivně semidefinitní,

d) je-li $\boldsymbol{A}$ pozitivně definitní matice typu (n,n), pak i součin $\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ je pozitivně definitní pro všechny matice $\boldsymbol{B}$ typu (m,n) s hodností n . Při jiné hodnosti matice $\boldsymbol{B}$ je uvedený součin pozitivně semidefinitní,

e) determinant pozitivně definitní matice je kladné číslo

f) pozitivně definitní matice má všechny submatice na hlavní diagonále pozitivně definitní a platí tedy, že všechny diagonální prvky jsou kladné, tj.:

   $a_{ii} > 0$ a současně $a_{ii}\,a_{jj} > a_{ij}^2$, pro každé i a j.

g) symetrická matice je pozitivně definitní, když diagonální prvky při Gausově eliminaci příslušející diagonální matici $\boldsymbol{L}$ (4.59) jsou kladné,

h) symetrická matice je pozitivně definitní, když matice $\boldsymbol{G}$ Choleského rozkladu (4.61) je regulární dolní trojúhelníková matice,

i) pro stopu pozitivně definitní nebo pozitivně semidefinitní matice $\boldsymbol{A}$ platí:

   $tr\,(\boldsymbol{A}) > 0$ pro $\boldsymbol{A} \neq 0$.

4.4 Vlastní čísla a vlastní vektory

Vlastní číslo (též charakteristické číslo) čtvercové matice $\boldsymbol{A}$ typu (n,n) je takové číslo λ (skalár), že pro nenulový vektor x typu $(n,1)$ platí rovnice:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}, \tag{4.85}$$

kde vektor $\boldsymbol{x}$ se nazývá vlastní vektor (charakteristický vektor) příslušející k vlastnímu číslu λ.

Vlastní čísla λ_i matice A získáme řešením tzv. <u>*charakteristické rovnice*</u> (<u>*charakteristického polynomu*</u>)

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = 0,$$
$$\det\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix} = 0, \tag{4.86}$$
$$\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \cdots + p_{n-2}\lambda^2 + p_{n-1}\lambda + p_n = 0.$$

Vlastní čísla matice $\boldsymbol{A}$ typu (n,n) jsou kořeny algebraického polynomu (4.86) a je jich právě n a značí se $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Vlastní čísla mohou být reálná i komplexní, tj. i nulová Ve skupině vlastních čísel se mohou některá opakovat, což souvisí s vícenásobnými kořeny rovnice (4.86). Proto se někdy používá termínů <u>*jednoduchá vlastní čísla*</u>, <u>*dvojnásobná vlastní čísla*</u>, atd.

Vlastní vektory $\boldsymbol{x}_i$ příslušející vlastním číslům λ_i se vypočtou ze soustavy rovnic:

$$(\boldsymbol{A} - \lambda_i \boldsymbol{I})\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{0}. \tag{4.87}$$

Vlastních vektorů je rovněž n. Nulový vektor nemůže být vlastním vektorem.

Pro vlastní čísla a vlastní vektory platí: (4.88a-g)

a) symetrická matice má všechna vlastní čísla reálná,

b) pozitivně definitní matice má všechna vlastní čísla kladná, pozitivně semidefinitní má všechna vlastní čísla nezáporná, viz (4.84a),

c) vlastní čísla diagonální matice jsou její diagonální prvky,

d) u symetrické matice jsou vlastní vektory ortogonální,

e) počet nenulových vlastních čísel matice $\boldsymbol{A}$ je roven hodnosti této matice,

f) vlastní čísla matice jsou invariantní k její ortogonální transformaci,

g) stopa symetrické matice se rovná součtu jejich vlastních čísel $tr(\boldsymbol{A})=\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n$.

Příklad 4.4

Příklad na výpočet vlastních čísel a vlastních vektorů:

Uvedený příklad je jednoduchou ilustrací postupu výpočtu vlastních čísel a vlastních vektorů. Přímé použití charakteristického polynomu k řešení vlastních čísel u rozsáhlých matic je velmi problematické. Proto byly vyvinuty i další, zejména iterativní postupy. U rozsáhlejších programových systémů jako EXCEL, MATCAD, MATLAB a pod., je výpočet vlastních čísel a vlastních vektorů jejich součástí.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = 0,$$

$$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 1 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda) + 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0.$$

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 3,$$

1) $(\boldsymbol{A} - \lambda_1 \boldsymbol{I})\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{0},$

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda_1 & -2 \\ 1 & 4-\lambda_1 \end{pmatrix}\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} -x_{11} - 2x_{12} = 0, \\ x_{11} + 2x_{12} = 0, \end{matrix}$$

$$x_{11} = 2, \quad x_{12} = -1, \quad \boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

2) $(\boldsymbol{A} - \lambda_2 \boldsymbol{I})\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{0},$

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda_2 & -2 \\ 1 & 4-\lambda_2 \end{pmatrix}\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} -2x_{21} - 2x_{22} = 0, \\ x_{21} + 1x_{22} = 0, \end{matrix}$$

$$x_{21} = 1, \quad x_{22} = -1, \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Podle (4.88d) jsou vlastní vektory symetrické matice typu (n,n) ortogonální. Využitím vztahu (4.17) pro normování vektoru je můžeme převést na ortonormální skupinu vektorů. Uspořádáním normovaných vektorů do matice dostaneme ortogonální matici $\boldsymbol{X}$ typu (n,n):

$$\underline{\boldsymbol{x}}_i = \frac{\boldsymbol{x}_i}{\|\boldsymbol{x}_i\|}, \quad \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \underline{\boldsymbol{x}}_1 & \underline{\boldsymbol{x}}_2 & \cdots & \underline{\boldsymbol{x}}_n \end{pmatrix}, \tag{4.89}$$

která umožnuje *diagonizaci matice* $\boldsymbol{A}$ neboť platí:

$$\boldsymbol{X}^T \boldsymbol{A}\, \boldsymbol{X} = \boldsymbol{\Lambda}, \qquad \boldsymbol{X}^T \boldsymbol{X} = \boldsymbol{I}, \tag{4.90}$$

kde $\boldsymbol{\Lambda} = diag(\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \cdots \quad \lambda_n).$

Pro symetrickou matici $\boldsymbol{A}$ platí součin:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{X}\,\boldsymbol{\Lambda}\,\boldsymbol{X}^T, \tag{4.91}$$

kde $\boldsymbol{\Lambda}$ je diagonální matice vlastních čísel a $\boldsymbol{X}$ je ortogonální matice k nim příslušných normovaných vlastních vektorů.

Rozepsáním vzorce (4.91) pomocí sloupců matice $\boldsymbol{X}$ dostaneme tzv. <u>*spektrální rozklad*</u> symetrické matice $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{A} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \underline{\boldsymbol{x}}_i \underline{\boldsymbol{x}}_i^T . \tag{4.92}$$

Příklad 4.5

Příklad na výpočet symetrické matice podle (4.91)a její spektrální rozklad:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 6,\ \lambda_2 = -4, \qquad \boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} c \\ -c \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} d \\ d \end{pmatrix}, \quad \|\boldsymbol{x}_1\| = \sqrt{\boldsymbol{x}_1^T \boldsymbol{x}_1} = c\sqrt{2}, \quad \|\boldsymbol{x}_2\| = \sqrt{\boldsymbol{x}_2^T \boldsymbol{x}_2} = d\sqrt{2},$$

$$\underline{\boldsymbol{x}}_1 = \frac{\boldsymbol{x}_1}{\|\boldsymbol{x}_1\|} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \underline{\boldsymbol{x}}_2 = \frac{\boldsymbol{x}_2}{\|\boldsymbol{x}_2\|} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{X}\,\boldsymbol{\Lambda}\,\boldsymbol{X}^T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 1 \end{pmatrix},$$

Spektrální rozklad

$$\boldsymbol{A} = \lambda_1 \underline{\boldsymbol{x}}_1 \underline{\boldsymbol{x}}_1^T + \lambda_2 \underline{\boldsymbol{x}}_2 \underline{\boldsymbol{x}}_2^T = 6\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} =$$

$$= 6\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Známe-li vlastní čísla a vlastní vektory regulární symetrické matice $\mathbf{A}$, která má podle (4.88e) všechna vlastní čísla nenulová, lze využít jejího rozkladu (4.91) pomocí ortogonální matice $\mathbf{X}$ a diagonální matice vlastních čísel $\mathbf{\Lambda}$ k výpočtu inverzní matice:

$$\boldsymbol{A}^{-1} = (\boldsymbol{X}\,\boldsymbol{\Lambda}\,\boldsymbol{X}^T)^{-1} = (\boldsymbol{X}^T)^{-1}\,\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{X}^{-1} = (\boldsymbol{X}^T)^T\,\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{X}^T = \boldsymbol{X}\,\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{X}^T . \tag{4.93}$$

Singulární matice má některá vlastní čísla nulová a proto k ní není definována inverzní matice $\boldsymbol{A}^{-1}$, neboť v diagonální matici $\boldsymbol{\Lambda}^{-1}$ rozkladu (4.93) by se muselo dělit nulou.

Příklad 4.6

Příklad na výpočet inverzní matice pomocí rozkladu (4.93)

K výpočtu použije již jednou určené matice z předcházejícího příkladu

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -5\\ -5 & 1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}6 & 0\\ 0 & -4\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{X}\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{X}^{T}=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/6 & 0\\ 0 & -1/4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/24 & -5/24\\ -5/24 & -1/24\end{pmatrix}.$$

Kontrola

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -5\\ -5 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1/24 & -5/24\\ -5/24 & -1/24\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\boldsymbol{I}.$$

Dále platí:

a) jestliže matice $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ jsou regulární matice typu (n,n), potom matice $\boldsymbol{B}\ \boldsymbol{A}\ \boldsymbol{B}^{-1}$ má stejný charakteristický polynom, stejná vlastní čísla, stejnou stopu a stejnou hodnost jako má matice $\boldsymbol{A}$,

b) jestliže $\boldsymbol{C}$ je ortogonální matice, pak matice $\boldsymbol{A}$ a matice $\boldsymbol{C}^{T}\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{C}$ mají stejná charakteristická čísla.

Speciálním případem jsou <u>*idempotentní matice*</u>. Idempotentní matice $\boldsymbol{A}$ je taková čtvercová matice pro kterou platí

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^{2}=\boldsymbol{A}\,. \qquad (4.94)$$

Vlastnosti idempotentních matic: (4.95a-e)

a) idempotentní matice je symetrická, tj. $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^{T}$,

b) idempotentní matice má na diagonále jen kladné nebo nulové prvky,

c) vlastní čísla idempotentní matice jsou rovna jedné nebo nule,

d) hodnost idempotentní matice se rovná její stopě, tj. $h(\boldsymbol{A})=tr(\boldsymbol{A})$

e) je-li idempotentní matice $\boldsymbol{A}$ regulární, rovná se jednotkové matici $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$.

Vlastnost (4.95d) vyplývá z vlastnosti (10.95c), neboť počet vlastních čísel idempotentní matice, které se rovnají jedné , je dán hodností matice $h(A)$. Tato skutečnost vyplývá z definice vlastních čísel a definice idenpotentní matice:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\lambda\boldsymbol{x} = \lambda^2\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x},$$

Pro matici $\boldsymbol{A}^2$ platí také definice vlastních čísel

$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$, ale také $\quad \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x} = \lambda^2\boldsymbol{x}, \quad \Rightarrow \quad \lambda\boldsymbol{x} = \lambda^2\boldsymbol{x},$

$(\lambda^2 - \lambda)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0},$ pro $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ bude $(\lambda^2 - \lambda) = 0$ pro všechna λ_i,

$\lambda(\lambda - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_i = \left\langle \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \right.$ pro všechna i.

4.5 Pseudoinverzní matice

Inverzní matice je definována pro regulární, tj. čtvercové matice $\boldsymbol{A}$ typu (n,n) s plnou hodností $h(\mathbf{A}) = n$. Je-li matice $\boldsymbol{A}$ singulární tzn., že má některá vlastní čísla nulová, inverzní matice k ní neexistuje. Rovněž neexistuje možnost invertovat matice obdélníkové typu (n,m).

Uvažujme matici $\boldsymbol{A}$ typu (n,m) libovolné hodnosti. <u>*Pseudoinverzní maticí*</u> k matici $\boldsymbol{A}$ nazveme matici $\boldsymbol{A}^-$ typu (m,n), pro kterou platí:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}. \tag{4.96}$$

Takto definovaná <u>*zobecněná inverze*</u> vždy existuje, ale není jednoznačně určena. Známe-li alespoň jednu pseudoinverzní matici $\boldsymbol{A}^-$ k matici $\boldsymbol{A}$, potom všechny pseudoinverzní matice k matici $\boldsymbol{A}$ typu (n,m) jsou dány vztahem:

$$\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^- + (\boldsymbol{I}_{(m)} - \boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A})\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}(\boldsymbol{I}_{(n)} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^-), \tag{4.97}$$

kde $\boldsymbol{I}$ jsou jednotkové matice daného typu a $\boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{C}$ jsou libovolné matice typu (m,n). Důsledkem je skutečnost, že i pro symetrické matice $\boldsymbol{A}$ nemusí být její pseudoinverzní matice symetrické.

Splňuje-li matice $\boldsymbol{A}^-$ i další podmínky podle (4.98) nazývá se <u>*Mooreova-Penroseova pseudoinverzní matice*</u> a označuje se $\boldsymbol{A}^+$:

$$\begin{aligned} A A^{+} A &= A, \\ A^{+} A A^{+} &= A^{+}, \\ (A A^{+})^{T} &= A A^{+}, \\ (A^{+} A)^{T} &= A^{+} A. \end{aligned} \tag{4.98}$$

Mooreova-Penroesova inverze má jednoznačné řešení, tudíž matice A^{+} k matici A je právě jedna. Řada autorů rozlišuje i názvem matice A^{-} a A^{+}. . Vzhledem ktomu, že matice A^{+}.je jen zvláštním případem matice A^{-} budeme pro obě používat pojmenování pseudoinverzní matice a rozlišovat je budeme označením kladného nebo záporného znaménka v jejich indexu.

Pseudoinverzní matici A^{+} lze vypočítat s použitím zobecněné inverze podle:

$$A^{+} = A^{T} (A A^{T})^{-} A (A^{T} A)^{-} A^{T}. \tag{4.99}$$

Pro pseudoinverzní matice A^{+} vedle podmínek (4.98) též platí:

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad (A^{T})^{+} = (A^{+})^{T}, \\ &\text{b)} \quad (A^{+})^{+} = A, \\ &\text{c)} \quad \text{je - li} \quad A \quad \text{regulární} \qquad A^{-} = A^{+} = A^{-1}. \end{aligned} \tag{4.100}$$

K výpočtu matice A^{-}, resp. A^{+} existuje řada metod.

Jednou z metod jak vypočítat pseudoinverzní matici A^{-} je přeměnit matici A na vhodnou blokovou matici a k ní definovat A^{-}.
Přeměňme matici A typu (n,m) s hodností $h(A) = r < min(n,m)$ na blokovou matici, kde submatice B je čtvercová matice typu (r,r) s plnou hodností $h(B) = r$, tzn. že její sloupce (řádky) jsou lineárně nezávislé. Přeměna matice A se realizuje přeskládáním sloupců (řádků) matice tak, aby vzájemně nezávislé sloupce (řádky) byly v levé části matice.

Předpokládejme, že matice A již byla uvedeným postupem přeměněna a připomeňme, že existuje tedy inverzní matice B^{-1} k matici B:

$$A_{(n,m)} = \begin{pmatrix} B_{(r,r)} & C_{(r,m-r)} \\ D_{(n-r,r)} & E_{(n-r,m-r)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & C \\ D & E \end{pmatrix}. \tag{4.101}$$

Vzhledem k lineární závislosti zbylých sloupců matic C a E bude existovat matice M popisující tuto závislost:

$$C = B M, \quad E = D M, \qquad \text{tedy} \quad E = D B^{-1} C. \tag{4.102}$$

Jedna z množiny matic A^{-} k matici A bude i matice určená z následujícího vztahu (4.103):

$$A^{-}_{(m,n)} = \begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{kde} \quad A_{(n,m)} = \begin{pmatrix} B & C \\ D & E \end{pmatrix}. \tag{4.103}$$

Příklad 4.7

Příklad na výpočet pseudoinverzní matice $\boldsymbol{A}^{-}$:

*Matice **A** typu (3,2) má hodnost h(**A**) = 1, tzn., že druhý sloupec je lineárně závislý na sloupci prvním. Matice **M** ze vztahu (4.102) bude tedy typu (1,1).*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 2 \\ \hline 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{D} & \boldsymbol{E} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{B} = (1), \quad \boldsymbol{C} = (2), \quad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{C}, \quad \boldsymbol{B}^{-1} = (1),$$

$$\boldsymbol{A}^{-} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

*Chceme-li vypočítat pseudoinverzní matici $\boldsymbol{A}^{+}$ k matici **A** uplatníme postup (4.102) a (4.103) ve vztahu (4.99).*

Příklad 4.8

*Příklad na výpočet pseudoinverzní matice $\boldsymbol{A}^{+}$ k matici **A** :*

*Předpokládejme stejnou matici **A** jako v předešlém příkladě 4.7.*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}^{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}^{+} = \boldsymbol{A}^{T}(\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{A}^{T})^{-}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{T}\boldsymbol{A})^{-}\boldsymbol{A}^{T},$$

*Sestavíme nejprve matice $(\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{A}^{T})$ a $(\boldsymbol{A}^{T}\boldsymbol{A})$ a vypočteme jakoukoliv jejich pseudoniverzní matici, tedy i matici určenou (vypočtenou) podle (4.103). Připomeňme že h(**A**) = 1.*

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{A}^T = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -5 \\ 5 & 5 & -5 \\ -5 & -5 & 5 \end{pmatrix}, \qquad (\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{A}^T)^- = \begin{pmatrix} 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}, \qquad (\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})^- = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}^+ = \boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{A}^T)^-\boldsymbol{A}\,(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})^-\boldsymbol{A}^T = \begin{pmatrix} 1/15 & 1/15 & -1/15 \\ 2/15 & 2/15 & -2/15 \end{pmatrix}.$$

Snadno se lze přesvědčit, že výsledná matice **A** *splňuje podmínky (4.98). V případě, že by k pseudoinverzi připadající matice byly regulární, pseudoinverze se změní na klasickou inverzi, viz (4.100c). Následující příklad je ukázkou takového postupu.*

Příklad 4.9:

Vypočítejme pseudoinverzní matici A^+ k matici A typu (3,2) s hodností h(A)=2.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{A}^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{A}^T)^- = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}, \qquad (\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})^- = (\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})^{-1} = \begin{pmatrix} 3/6 & -3/6 \\ -3/6 & 5/6 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}^+ = \boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{A}^T)^-\boldsymbol{A}\,(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})^-\boldsymbol{A}^T = \begin{pmatrix} 0 & 3/6 & 3/6 \\ 2/6 & -1/6 & -5/6 \end{pmatrix}.$$

<u>Pseudoinverzne symetrických matic</u>

Ve vyrovnávacím počtu se velmi často pracuje se maticemi $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ (symetrickými), které tvoří koeficienty matice soustavy tzv. normálních rovnic viz.(4.33).
Výsledný součin obvykle označujeme $\boldsymbol{N}$ tedy:

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}. \tag{4.104}$$

Je-li matice $\boldsymbol{A}$ typu (n,m) shodností $h(\mathbf{A}) = r < min(n,m)$, bude podle (4.40c) matice $\boldsymbol{N}$ čtvercová a symetrická typu (m,m) s hodností $h(\boldsymbol{N}) = r$.

Matici pak označujeme jako <u>*matici s neúplnou hodností*</u>, jejíž tzv. <u>*defekt*</u> je číslo

$$d = m - r. \tag{4.105}$$

Defekt d vlastně vyjadřuje počet závislých sloupců (řádků, vektorů) symetrické matice $\boldsymbol{N}$, keré jsou lineární kombinací zbylých r nezávislých sloupců (vektorů).
V případě, že $r = m$, tj. $d = 0$, mluvíme o takové matici jako o <u>*matici s plnou hodností.*</u>

Protože při nenulovém defektu je $r < m$, je matice $\boldsymbol{N}$ singulární (matice má nulový determinant), neexistuje k takové matici inverzní matice $\boldsymbol{N}^{-1}$, definovaná vztahem (4.44). Můžeme však k takové matici vypočítat matice pseudoinverzní $\boldsymbol{A}^{-}$ nebo $\boldsymbol{A}^{+}$.

Při výpočtu pseudoinverzních matic k symetrickým maticím lze vedle postupu využívajícího inverze vhodně uspořádané blokové matice viz (4.103), využít i jiné postupy, např. doplnění matice $\boldsymbol{N}$ o matice odstraňující singularitu , či využití vlastních čísel matice $\boldsymbol{N}$.

Tyto tři naznačené postupy budou dále uvedeny.

A) <u>Použití blokových matic</u>

Tato metoda je vlastně úpravou postupu uvedeného v (4.99) pro symetrickou matici $\boldsymbol{N}$. Předpokládejme, že matice $\boldsymbol{N}$ typu (m,m) má nenulový defekt $d=m-r$.
Rozdělme matici $\boldsymbol{N}$ na čtyři submatice , $\boldsymbol{N}_{12}$, $\boldsymbol{N}_{21}$ a $\boldsymbol{N}_{22}$, přičemž vhodným přeskupením řádků (sloupců) bude matice $\boldsymbol{N}_{11}$ typu $(r,$r) s plnou hodností h($\boldsymbol{A}$) = r. Protože je matice $\boldsymbol{N}$ symetrická, bude matice $\boldsymbol{N}_{12}$ typu $(r,m-r)$ a matice $\boldsymbol{N}_{21}$ typu $(m-r,r)$, přičemž jedna je transponovanou podobou druhé. Matice $\boldsymbol{N}_{22}$ bude typu $(m-r,m-r)$ a může být i nulová.

$$\boldsymbol{N} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{N}_{11} & \boldsymbol{N}_{12} \\ \boldsymbol{N}_{21} & \boldsymbol{N}_{22} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{N}_{12} = \boldsymbol{N}_{21}^{T}, \tag{4.106}$$

$$\det(\boldsymbol{N}) = 0, \quad \text{ale} \quad \det(\boldsymbol{N}_{11}) \neq 0, \ \text{proto existuje} \ \boldsymbol{N}_{11}^{-1},$$

$$\text{podle (4.100) platí} \quad \boldsymbol{N}_{22} = \boldsymbol{N}_{21}\, \boldsymbol{N}_{11}^{-1}\, \boldsymbol{N}_{12}.$$

Podle vztahu (4.99) pro výpočet pseudoinverzních matic musíme nalézt matici $(\boldsymbol{N}\,\boldsymbol{N})^{-}$ .k matici $\boldsymbol{N}\,\boldsymbol{N}$. Podle pravidel pro násobení blokových matic (4.34) vypočteme součin $\boldsymbol{N}\,\boldsymbol{N}$, který bude rovněž blokovou maticí. Pro její levou horní submatici, která je typu (r,r) s plnou hodností a tudíž regulární, lze vypočítat inverzní matici $\boldsymbol{W}$. Zbylé tři submatice nemusíme počítat, neboť podle (4.103) budou v pseudoinverzní matici $(\boldsymbol{N}\ \boldsymbol{N})^-$ stejně nahrazeny nulovými maticemi.

$$(\boldsymbol{N}\,\boldsymbol{N}) = \left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{N}_{11}\boldsymbol{N}_{11} + \boldsymbol{N}_{12}\boldsymbol{N}_{21} & ? \\ \hline ? & ? \end{array}\right),$$

$$(\boldsymbol{N}\,\boldsymbol{N})^- = \left(\begin{array}{c|c} (\boldsymbol{N}_{11}\boldsymbol{N}_{11} + \boldsymbol{N}_{12}\boldsymbol{N}_{21})^{-1} & \boldsymbol{0} \\ \hline \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{array}\right) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{W} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}, \quad (4.107)$$

kde $\boldsymbol{W} = (\boldsymbol{N}_{11}\boldsymbol{N}_{11} + \boldsymbol{N}_{12}\boldsymbol{N}_{21})^{-1}$.

Označme výslednou pseudoinverzní matici k matici $\boldsymbol{N}$ jako matici $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{N}^+$. Tato matice vznikle výpočtem podle (4.99) s využitím pseudoinverze (4.107). Matice bude symetrická typu (m,m) s hodností $h(\boldsymbol{Q}) = r$ bude opět bloková a symetrická. V blokové podobě ji zobrazuje vztah (4.108).

$$\boldsymbol{N}^+ = \boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{N}_{11}\boldsymbol{W}\,\boldsymbol{N}_{11}\boldsymbol{W}\,\boldsymbol{N}_{11} & \boldsymbol{N}_{11}\boldsymbol{W}\,\boldsymbol{N}_{11}\boldsymbol{W}\,\boldsymbol{N}_{12} \\ \boldsymbol{N}_{21}\boldsymbol{W}\,\boldsymbol{N}_{11}\boldsymbol{W}\,\boldsymbol{N}_{11} & \boldsymbol{N}_{21}\boldsymbol{W}\,\boldsymbol{N}_{11}\boldsymbol{W}\,\boldsymbol{N}_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{Q}_{11} & \boldsymbol{Q}_{12} \\ \boldsymbol{Q}_{21} & \boldsymbol{Q}_{22} \end{pmatrix}, \quad (4.108)$$

kde $\boldsymbol{W} = (\boldsymbol{N}_{11}\boldsymbol{N}_{11} + \boldsymbol{N}_{12}\boldsymbol{N}_{21})^{-1}, \quad \boldsymbol{N}_{12} = \boldsymbol{N}_{21}^T, \quad \boldsymbol{Q}_{12} = \boldsymbol{Q}_{21}^T.$

Tato úprava pseudoinverze symetrické matice se nazývá *Helmertovou inverzí*. Pro velký počet maticových operací se používá v praktických aplikacích jen výjimečně.

B) Dopnění invertované matice na matici regulární

Symetrická matice $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ je při nenulovém defektu matice $\boldsymbol{A}$ singulární. Předložené řešení rozšiřuje matici $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ na blokovou symetrickou matici $\boldsymbol{D}$ s plnou hodností, která je již regulární a lze k ní proto vypočítat inverzní matice $\boldsymbol{D}^{-1.}$.
Je-li matice $\boldsymbol{A}$ typu (n,m) s hodností $h(\boldsymbol{A}) = r$, je matice $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ typu (m,m) *singulární* pokud $r < m$. Potom doplníme systém o vhodnou matici $\boldsymbol{B}$ typu (r,m) a matici $\boldsymbol{B}^T$:

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{N} & \boldsymbol{B}^T \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}^T \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}. \quad (4.109)$$

$$\det(\boldsymbol{N}) = 0, \quad \det(\boldsymbol{D}) \neq 0.$$

Matice $\boldsymbol{B}$ rozšiřující systém musí být zvolena tak, aby bloková matice $\boldsymbol{R}$ typu(m,m) měla plnou hodnost:

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} \end{pmatrix}, \quad h(\boldsymbol{R}) = m. \tag{4.110}$$

Volba matice $\boldsymbol{B}$ není jednoznačná. Nejednoznačnost řešení vázané na volbu matice $\boldsymbol{B}$ vede k hledání takové matice – označíme ji $\boldsymbol{E}$, která umožní vypočítat pseudoinverzní matici = $\boldsymbol{N}^+$. Samozřejmě musí být splněna základní podmínka (4.110) a rovněž:

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{E} \end{pmatrix}, \quad h(\boldsymbol{R}) = m, \quad \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{E}^T = \boldsymbol{0}, \text{ tedy i } \boldsymbol{A} \boldsymbol{E}^T = \boldsymbol{0}. \tag{4.111}$$

Způsob volby matice $\boldsymbol{E}$ bude popsán v následující kapitole zabývající se řešením lineárních rovnic. Rozložíme-li matici $\boldsymbol{N}$ na submatice $\boldsymbol{N}_{ii}$ podle (4.106) bude:

$$\boldsymbol{E} = \left(-\boldsymbol{N}_{21}\boldsymbol{N}_{11}^{-1} \quad \boldsymbol{I}\right). \tag{4.112}$$

Známe-li matici $\boldsymbol{E}$, lze vypočítat $\boldsymbol{N}^+ = (\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})^+$ podle:

$$\boldsymbol{D}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} & \boldsymbol{E}^T \\ \boldsymbol{E} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{Q}_e & \boldsymbol{E}^T(\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}^T)^{-1} \\ (\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}^T)^{-1}\boldsymbol{E} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \tag{4.113}$$

kde $\boldsymbol{Q}_\mathrm{e} = (\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})^+$.

Protože u matice $\boldsymbol{D}$ jsou na její hlavní diagonále i nulové prvky, je nutno volit výpočetní metodu, která umožňuje takové inverzní matice řešit. Jsou to zejména metody umožňující přeskládáním řádků (sloupců) dostat na diagonálu nenulové prvky.

Další možností je vypočítat pseudoinverzní matici $\boldsymbol{Q}_e$ z následujícího vztahu:

$$\boldsymbol{Q}_e = (\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E}^T\boldsymbol{E})^{-1} - \boldsymbol{E}^T(\boldsymbol{E}\,\boldsymbol{E}^T\boldsymbol{E}\,\boldsymbol{E}^T)^{-1}\boldsymbol{E}. \tag{4.114}$$

Praxe dává oběma řešením podle (4.113) a (4.114) přednost před Helmertovou inverzí podle (4.108).V geodetické praxi je tato metoda aplikována zejména ve vyrovnání tzv. *volných sítí*.

C) Výpočet pseudoinverze pomocí vlastních čísel a vlastních vektorů

Předpokládejme obdobně jako v předcházejících metodách singulární symetrickou matici $\boldsymbol{N}$ typu (m,m) s hodností $h(\boldsymbol{N}) = r < m$. Podle (4.88a, 4.88e) bude příslušet k matici $\boldsymbol{N}$ právě tolik nenulových vlastních čísel, jako je hodnost této matice, tj. právě r . Zbylá vlastní čísla budou nulová a bude jich stejně jako je defekt této matice, tj. $d = m - r$.

Metoda využívající vlastní čísla a vlastní vektory matice $\boldsymbol{N}$ pro nalezení její pseudoinverzní matice $\boldsymbol{N}^{+}$ vychází z rozkladu matice $\boldsymbol{N}$ podle (4.91), případně (4.92). Matice $\boldsymbol{X}$ ve vztahu (4.91) sestavená z vlastních vektorů však bude tentokráte sestavena <u>jen z vlastních vektorů příslušejících k nenulovým vlastním číslům.</u> Matici označme $\boldsymbol{V}$ a bude typu (m,r), diagonální matici vlastních nenulových čísel označme stejně jako v (4.91) $\boldsymbol{\Lambda}$. Tato matice bude typu (r,r). Pseudoinverzní matici pak získáme podle vztahu (4.93).

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{V}\,\boldsymbol{\Lambda}\,\boldsymbol{V}^{T},$$

kde $\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \cdots & \boldsymbol{v}_r\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\Lambda} = diag(\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \cdots \quad \lambda_r)$,

$$\boldsymbol{N}^{+} = \boldsymbol{V}\,\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{V}^{T}, \tag{4.115}$$

kde $\boldsymbol{\Lambda}^{-1} = diag(1/\lambda_1 \quad 1/\lambda_2 \quad \cdots \quad 1/\lambda_r)$.

Obdobně lze využít spektrálního rozkladu podle (4.92) s reciprokými (inverzními) hodnotami vlastních čísel matice $\boldsymbol{N}$.

Mimo výše uvedené tři metody řešení pseudoinverzních matic existují ještě další. Podrobněji se touto problematikou zabývají specializované publikace numerické matematiky.

Příklad 4.10

Příklad na výpočet pseudoinverzní matice k matici symetrické.

Pro zadanou matici $\boldsymbol{N}$ typu (2,2) s hodností $h(\boldsymbol{N}) = 1$ použijme postupy A), *B) a C).*

$$\boldsymbol{N} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

ad A)

Nejprve rozložíme matici $\boldsymbol{N}$ na submatice, $\boldsymbol{N}_{ii}$ tak, aby $\boldsymbol{N}_{11}$ byla regulární.

$$\boldsymbol{N} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{N}_{11} & \boldsymbol{N}_{12} \\ \boldsymbol{N}_{21} & \boldsymbol{N}_{22} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{array}\right), \qquad \det(\boldsymbol{N}_{11}) = 1 \neq 0, \qquad \boldsymbol{N}_{12} = \boldsymbol{N}_{21}^{T},$$

$$\boldsymbol{W} = (\boldsymbol{N}_{11}\boldsymbol{N}_{11} + \boldsymbol{N}_{12}\boldsymbol{N}_{21})^{-1} = (1+4)^{-1} = \frac{1}{5},$$

$$\boldsymbol{N}^{+} = \boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{N}_{11}\,\boldsymbol{W}\,\boldsymbol{N}_{11}\,\boldsymbol{W}\,\boldsymbol{N}_{11} & \boldsymbol{N}_{11}\,\boldsymbol{W}\,\boldsymbol{N}_{11}\,\boldsymbol{W}\,\boldsymbol{N}_{12} \\ \boldsymbol{N}_{21}\,\boldsymbol{W}\,\boldsymbol{N}_{11}\,\boldsymbol{W}\,\boldsymbol{N}_{11} & \boldsymbol{N}_{21}\,\boldsymbol{W}\,\boldsymbol{N}_{11}\,\boldsymbol{W}\,\boldsymbol{N}_{12} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1.\frac{1}{5}.1.\frac{1}{5}.1 & 1.\frac{1}{5}.1.\frac{1}{5}.2 \\ 2.\frac{1}{5}.1.\frac{1}{5}.1 & 2.\frac{1}{5}.1.\frac{1}{5}.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{25} & \frac{2}{25} \\ \frac{2}{25} & \frac{4}{25} \end{pmatrix}.$$

ad B)
Matici $\boldsymbol{N}$ *rozšíříme o vhodnou submatici* $\boldsymbol{E}$ *a submatice* $\boldsymbol{E}^T$ *a* $\boldsymbol{0}$ *tak , aby výsledná matice byla regulární a splňovala podmínky (4.111), resp. (4.112)*

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{N} & \boldsymbol{E}^T \\ \boldsymbol{E} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \\ \hline -2 & 1 & 0 \end{array}\right), \qquad \text{kde} \qquad \boldsymbol{E} = \left(-\boldsymbol{N}_{21}\boldsymbol{N}_{11}^{-1} \;\middle|\; \boldsymbol{I}\right) = \left(-2 \;\middle|\; 1\right),$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \\ \hline -2 & 1 & 0 \end{array}\right)^{-1} = \left(\begin{array}{cc|c} \frac{1}{25} & \frac{2}{25} & \frac{-10}{25} \\ \frac{2}{25} & \frac{4}{25} & \frac{5}{25} \\ \hline \frac{-10}{25} & \frac{5}{25} & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{N}^+ & \\ \hline & \boldsymbol{0} \end{array}\right), \qquad \boldsymbol{N}^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{25} & \frac{2}{25} \\ \frac{2}{25} & \frac{4}{25} \end{pmatrix}.$$

Druhou možností je využít vztahu (4.114)

$$\boldsymbol{N}^+ = \boldsymbol{Q}_e = (\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E}^T\boldsymbol{E})^{-1} - \boldsymbol{E}^T(\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}^T\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}^T)^{-1}\boldsymbol{E},$$

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{E}^T\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{E}\boldsymbol{E}^T = (5), \boldsymbol{E}\boldsymbol{E}^T\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}^T = (25),$$

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E}^T\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, (\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E}^T\boldsymbol{E})^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}, (\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}^T\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}^T)^{-1} = \left(\frac{1}{25}\right),$$

$$\boldsymbol{E}^T(\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}^T\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}^T)^{-1}\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} \frac{4}{25} & \frac{-2}{25} \\ \frac{-2}{25} & \frac{1}{25} \end{pmatrix}, \boldsymbol{N}^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{4}{25} & \frac{-2}{25} \\ \frac{-2}{25} & \frac{1}{25} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{25} & \frac{2}{25} \\ \frac{2}{25} & \frac{4}{25} \end{pmatrix}.$$

ad C)
K matici $\boldsymbol{N}$ *nalezneme vlastní čísla a vlastní vektory.*
Matice $\boldsymbol{N}$ *má vzhledem k její singularitě jedno číslo nulove. K oběma nenulovým číslům pak vypočteme příslušné normované vlastní vektory* $\boldsymbol{x}_1$ *a* $\boldsymbol{x}_2$*. Druhý vektor příslušejí nulovému vlastnímu číslu počítat již nemusíme, neboť se v rozkladu (4.115) neuplatní.*

$$\lambda_1 = 5, \;\; \lambda_2 = 0, \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Lambda} = (5), \quad \boldsymbol{\Lambda}^{-1} = \left(\frac{1}{5}\right),$$

$$\boldsymbol{N}^+ = \boldsymbol{V}\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{V}^T = \boldsymbol{v}_1\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{v}_1^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \frac{1}{5} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{25} & \frac{2}{25} \\ \frac{2}{25} & \frac{4}{25} \end{pmatrix}.$$

Uvedený příklad je sice velmi jednoduchý, ale dobře ilustruje všechny tři postupy. Složitější příklady by velmi znepřehlednily výpočty a obtížně by se při studiu kontrolovaly běžnými výpočetními prostředky.

5 Závěr

5.1 Shrnutí

Tento studijní text je již třetím modulem zajišťujícím předmět **Teorie chyb a vyrovnávací počet** Studijní text **Základní druhy vyrovnání – 2. část** seznamuje studenta s další základní úlohou vyrovnávacího počtu a sice s **vyrovnáním podmínkových měření**. Tomuto druhu vyrovnání je věnována celá druhá kapitola. Třetí kapitola objasňuje složitější druhy tzv. smíšených vyrovnání. Velmi rozsáhlá čtvrtá kapitola s názvem Dodatek A je věnována přehledu vzorců a pravidel pro počítání s vektory a maticemi. Jejím cílem je podat ucelenější přehled z maticového počtu, který student může použít při studiu nejen tohoto modulu a dalších problémů z vyrovnávacího počtu, ale i v dalších předmětech na vyrovnávací počet navazující. Jsou to zejména předměty Geodetické sítě, Fotogrammetrie a Inženýrská geodézie. Rozsah dodatku překračuje v některých částech osnovy matematiky pro bakalářské studium. Přesto tyto pasáže byly do modulu zařazeny, neboť na tuto základní literaturu se velmi často obracejí i studenti magisterského studia či doktorského studia. Studenti si z nich mohou vybrat jen ty pasáže, které potřebují pro pochopení konkrétní studované problematiky. Rovněž se málokdy při studiu jiného předmětu vracejí ke skriptům z matematiky (třeba je již prodali) a tak by jim tento dodatek mohl pomoci si rychle vzpomenout na dříve probíranou látku z maticového počtu a aplikovat ji při studiu vyrovnávacích úloh .

Studium teorie vyrovnání není možné bez praktických příkladů. Bohužel úspornost této formy výkladu neumožňuje uvést více konkrétních příkladů a variant řešení. Zde musím studenta odkázat na některé sbírky příkladů a studijní texty. Rozsah textu rovněž neumožňuje věnovat se některým specifickým otázkám podrobněji. Řada méně významnějších informací musela být z textu vypuštěna.

5.2 Studijní prameny

5.2.1 Seznam použité literatury

[1] Hampacher, M.- Radouch V.: *Teorie chyb a vyrovnávací počet 10* skripta Vydavatelství ČVUT , Praha 1997, 159 stran,

[2] Hampacher, M.- Radouch V.: *Teorie chyb a vyrovnávací počet 20* skripta Vydavatelství ČVUT , Praha 1997, 140 stran,

[3] Chmelík, M.:*Vyrovnávací počet – Přehled vyrovnání metodou nejmenších čtverců,* skripta Vojenská akademie, Brno 1996, 14 stran.

[4] Vykutil, J.: *Teorie chyb a vyrovnávací počet*, skripta ES VUT, Brno 1988, 309 stran.

[5] Weigel, J.: *Měřické chyby*, studijní opory GE04 – M01, VUT v Brně 2005

[6] Weigel, J.: *Základní druhy vyrovnání 1.část*, studijní opory GE04 – M02, VUT v Brně 2005

[7] Wolf, P.R. Ghilani, - Ch.D.:*Adjustment Computations – Statistics and Least Squares in Surveying and GIS*, John Wiley & Sohn, Inc. , 1997, 564 pp.

5.2.2 Seznam doplňkové studijní literatury

[8] Hampacher, M.- Radouch V.: *Teorie chyb a vyrovnávací počet (příklady a návody ke cvičením),* skripta Vydavatelství ČVUT , Praha 1995, 164 stran

[9] Koch, K. R.: *Parameter Estimation and Hypothesis Testing in Linear Models.* Springer 1999, 333 pp.

[10] Koutková, H. – Moll,I.:*Úvod do pravděpodobnosti a matematické statistiky*, skripta CERM, Brno 2000, 192 stran.

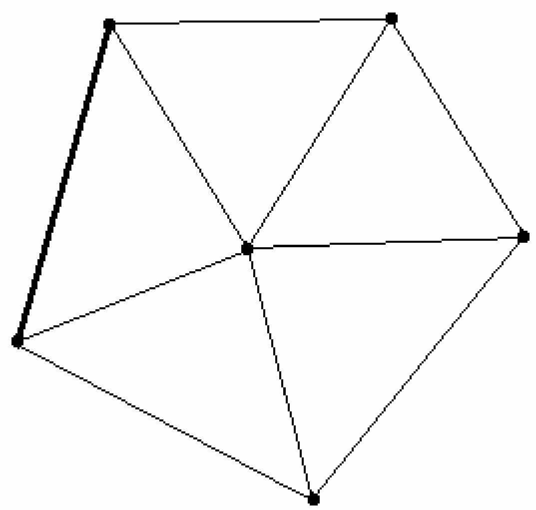
[11] Koutková, H. – Dlouhý, O.: Sbírka příkladů z pravděpodobnosti a matematické statistiky, skripta CERM, Brno 2001, 58 stran.

[12] Wolf, H.: *Ausgleichungsrechnung, Formeln zur praktishen Anwendung,* Dűmmler Bonn, 1975

[13] Wolf, H.: *Ausgleichungsrechnung II, Aufgaben und Beispiele zur praktishen Anwendung,* Dűmmler Bonn, 1979

5.3 Autotest

5.1 Kolik je nutných měření (k = ?) a kolik nadbytečných měření (r = ?) v rovinném obrazci tvořeném pěti trojúhelníky s jedním centrálním bodem (obrázek 5.1), ve kterém byla zadána jedna délka (vyznačena silněji) a všech 15 úhlů (v každém trojúhelníku byly změřeny všechny tři úhly) ? Celkem tedy bylo změřeno 16 prvků (n = 16). Kolik bude podmínkových rovnic ?



Obrázek 5.1

5.2 Kolik je nutných měření (k = ?) a kolik nadbytečných měření (r = ?) v rovinném obrazci (stejný obrázek 5.1), ve kterém bylo tentokrát změřeno všech 10 délek, ale žádný úhel ? Zamyslete se nad tím jak by mohly vypadat v tomto případě podmínkové rovnice.

5.3 Kolik je nutných měření (k = ?) a kolik nadbytečných měření (r = ?) v rovinném čtyřúhelníku, ve kterém byly změřeny všechny čtyři délky i obě úhlopříčky? Celkem tedy bylo změřeno 6 délek (n = 6). Kolik bude podmínkových rovnic?

5.4 Jakého typu bude výsledná matice D *, která vznikne vynásobením matic* $D = A\ B\ C$ *, když* A_{kl} *,* $B_{l,m}$ *,* C_{mk} *?*

5.5 Sestavte podmínkové rovnice pro trojúhelník ve kterém byly změřeny všechny tři úhly a všechny tři délky (viz kontrolní otázka 2.3 na str.13). Sestavte k nim koeficienty přetvořených podmínkových rovnic.

5.4 Klíč

2.5 Při menším počtu zadaných podmínek než daný problém vyžaduje zajistí výpočetní postup (vyrovnání) splnění jen zadaných podmínek. Ve vyrovnávací úloze tak vznikne riziko, že při dalším použití vyrovnaných hodnot (v dalších výpočtech s těmito hodnotami) se vyskytnou nejednoznačnosti řešení při volbě různých vyrovnaných veličin jako vstupních hodnot do těchto výpočtů.

2.6 V případě sestavení více podmínek než je jejich požadovaný počet vznikne mezi podmínkovými rovnicemi závislost, jejímž důsledkem je singularita matice koeficientů normálních rovnic. K této matici pak není definována inverzní matice a úloha nemá tímto způsobem řešení.

2.7 Výšky bodů vypočítáme tak, že alespoň jednomu z nich přisoudíme nějakou výšku. Výšky ostatních bodů vypočteme standardním způsobem jako součet výšky a příslušného převýšení.

2.8 Počet zadaných výšek v nivelační síti je významný pro stanovení počtu podmínek. Při jedné zadané výšce se počet podmínkových rovnic nemění, při dvou výškách je možno sestavit další podmínku pro převýšení propojující tyto výšky, při třech výškách dvě podmínky atd.Problém lze řešit jako vázanou či volnou síť.– podrobnosti viz příklady v 3. kapitole.

5.1) První trojúhelník (3 body sítě) je dán 3 prvky (délkou a dvěma úhly), každý další ze 3 bodů může být určen postupně protínáním z úhlů (vždy 2 úhly). Počet nutných veličin je tedy $k = 9$. Počet všech veličin $n = 16$, tedy počet nadbytečných veličin bude $r = n - k = 7$. Musíme tedy sestavit 7 podmínkových rovnic, z nichž bude 5 rovnic trojúhelníkových (splnění podmínky 180^o v každém trojúhelníku), 1 podmínka závěrová (součet středových úhlů musí dát 360^o) a 1 podmínka stranová, kterou sestavíme tak, že budeme požadovat, aby se rovnala zadaná délka délce vypočítané postupně sínovými větami přes všech 5 trojúhelníků z té samé zadané délky.

5.2 Počet měřených délek je n= 10, podle předcházejícího úkolu je počet nutných měření $k = 9$. Počet nadbytečných měření $r = n - k = 1$. Musíme sestavit jednu podmínkovou rovnici. Tato podmínka je poměrně komplikovaná a sestavuje se jako součet středových úhlů (360°), které vypočítáme vždy z příslušných tří délek z každého trojúhelníku, např kosínovou větou.

5.3 Obdobný problém jako v předcházející případě 5.2. Čtyřúhelník je dán pěti prvky a naměřeno bylo šest délek. Je tedy nutno sestavit 1 podmínkovou rovnici.

5.4 Součin matic je definován v (4.28). Postupným násobením získáme matici D_{kk} .

5.5 V trojúhelníku ve kterém bylo změřeno všech šest prvků (3 délky a 3 úhly) je možno sestavit 3 podmínkové rovnice. Obvykle se sestavují ve tvaru:

$$\tilde{\alpha} + \tilde{\beta} + \tilde{\gamma} - 180^o = 0, \quad \tilde{b}\sin\tilde{\alpha} - \tilde{a}\sin\tilde{\beta} = 0, \quad \tilde{c}\sin\tilde{\alpha} - \tilde{a}\sin\tilde{\gamma} = 0.$$

Přetvořené podmínkové rovnice budou mít tvar:

$$1v_\alpha + 1v_\beta + 1v_\gamma + 0v_a + 0v_b + 0v_c + u_a = 0,$$

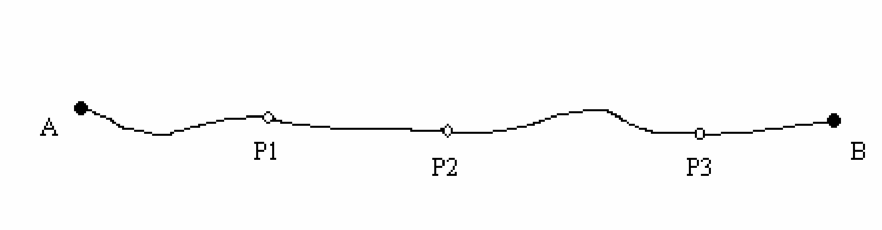
$$(b\cos\alpha)v_\alpha + (-a\cos\beta)v_\beta + 0v_\gamma + (-\sin\beta)v_a + (\sin\alpha)v_b + 0v_c + u_b = 0,$$

$$(c\cos\alpha)v_\alpha + 0v_\beta + (-a\cos\gamma)v_\gamma + (-\sin\gamma)v_a + 0v_b + (\sin\alpha)v_c + u_c = 0.$$

5.5 Korespondenční úkoly

Úkol 5.1

Určete vyrovnané výšky bodů P1, P2 a P3 zaměřené nivelačním pořadem o čtyřech nivelačních oddílech, který byl vetknutý mezi dva nivelační body o známých výškách A a B (viz obr. 3.2).



Obrázek 3.2: Schéma nivelačního pořadu

Převýšení		h	Délka oddílu
z bodu	na bod	[m]	[km]
A	P1	+14,335	0,52
P1	P2	+8,882	0,44
P2	P3	25,710	0,75
P3	B	16,028	0,32

Výška bodu A $H_A = 245{,}832m$,

Výška bodu B $H_B = 310{,}773m$.

Při vyrovnání nivelačního pořadu uvažujte váhy nepřímo úměrné délkám nivelačních oddílů, tj $p_i = 1 / s_{i\,[km]}$.

Vypočítejte:

a) Metodou vyrovnání zprostředkujících měření vyrovnané výšky bodů P1, P2 a P3, jednotkovou střední chybu, střední chyby vyrovnaných výšek, vyrovnaná měření a jejich střední chyby.

c) Metodou vyrovnání podmínkových měření vypočítejte vyrovnané výšky bodů P1, P2 a P3 a střední jednotkovou chybu.

Studenti budou dále zpracovávat z tohoto studijního textu dvě korespondenční úlohy, z nichž první bude na obecné sestavování přetvořených podmínkových rovnic u vyrovnání podmínkových měření (3 příklady), druhá na vyrovnání podmínkových měření (2 příklady). Příklady budou zadány studentům v průběhu konzultací.

Ostatní úkoly zadané v textu nebudou učitelem kontrolovány a je v zájmu studentů si příslušné téma procvičit. Případné nejasnosti je možno řešit v rámci řádných konzultací.

Místo pro poznámky