

数字滤波器的基本结构

数字信号处理第六讲讲义

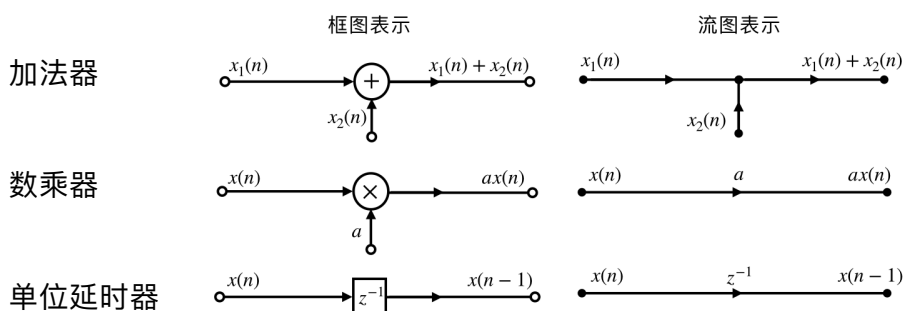
6.1.无限长单位冲激响应滤波器

6.1.1.数字系统滤波器的表示方法

■ 数字系统滤波器的表示方法

- 1.差分方程
- 2.单位序列响应 $h(n)$
- 3.系统函数 $H(z)$
- 4.系统框图

系统框图的几种基本运算单元：



6.1.2.IIR的定义和特点

■ 定义

无限长单位冲激响应滤波器简称IIR滤波器

■ 特点

1. 单位冲激响应 $h(n)$ 为无限长序列 (Infinite-duration Impulse Responses)

2. 系统函数 $H(z)$ 在有限 z 平面内存在极点，其一般形式为 $H(z) = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$ ；

3. 系统在结构上存在反馈，即系统符合递归型结构。

$$y(n) = \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{r=0}^M b_r x(n-r)$$

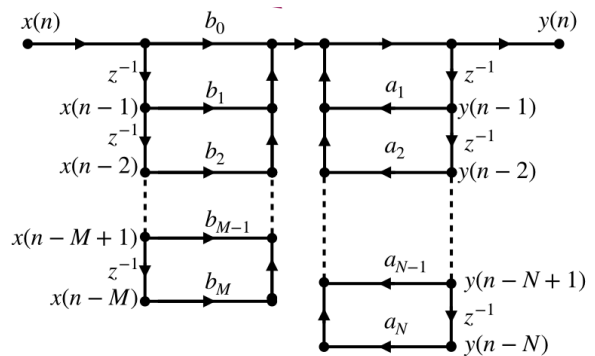
6.1.3. IIR的基本结构

■ 直接型

差分方程 $y(n) = \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{r=0}^M b_r x(n-r)$ ，系统函数 $H(z) = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$

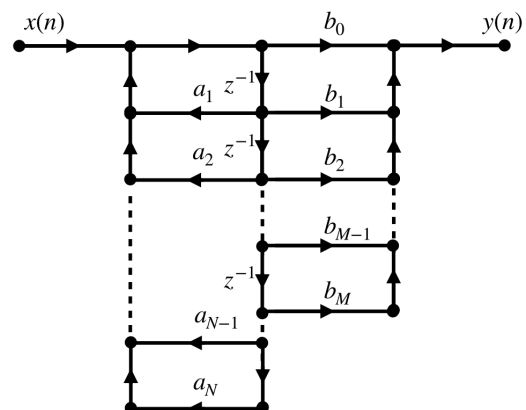
直接I型

1. 由两部分级联组成：第一部分提供零点，第二部分提供极点；
2. 该滤波器需要 $N+M$ 个延时单元；



直接II型（典范型）

1. 由两部分级联组成：第一部分提供极点，第二部分提供零点；
2. 该结构需要 N 个延时单元，比直接I型少用 M 个延时单元；
3. 该结构不改变系统的系统函数；



直接I型、直接II型结构的小结

优点：简单直观

缺点：系数对滤波器性能的控制关系不明显（零极点不明显，难以调整）；

极点对系数的变化过于灵敏，因此系统频率响应对系数的变化也会很灵敏。

■ 例题6-1

已知两系统的系统函数 $H_1(z) = \frac{z^2 + \frac{1}{3}z}{z^2 - \frac{3}{4}z + \frac{1}{8}}$, $H_2(z) = \frac{3 + 4.2z^{-1} + 0.8z^{-2}}{2 + 0.6z^{-1} - 0.4z^{-2}}$, 试作出其

直接II型结构的流图。

■ 例题6-2

已知系统函数 $H(z) = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{5}z^{-1} - \frac{3}{5}z^{-2} + z^{-3}}{1 - \frac{3}{5}z^{-1} + \frac{1}{5}z^{-2} + \frac{1}{2}z^{-3}}$, 试作出其直接I型与II型结构的流图。

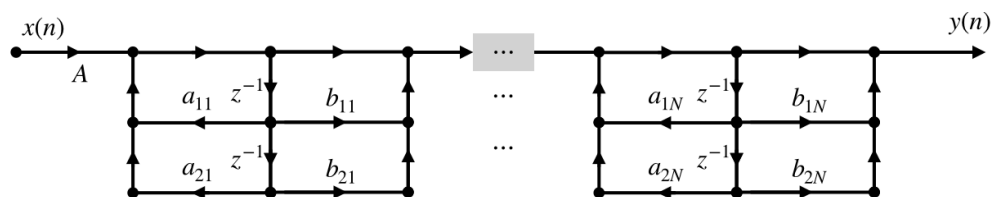
■ 级联型

将系统函数拆分成多个子函数乘积的形式，即 $H(z) = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} = A \prod_k H_k(z)$ ；

将 $H_k(z)$ 称为二阶基本节，它的一般形式为 $H_k(z) = \frac{1 + b_{1k}z^{-1} + b_{2k}z^{-2}}{1 - a_{1k}z^{-1} - a_{2k}z^{-2}}$ ，特点是两个

极点；

每一个实系数的二阶数字滤波器 $H_k(z)$ 的结构均可以用前面介绍的直接II型结构，将子函数所代，表的系统级联起来即可得到 $H(z)$ 的级联型结构。



级联型结构的特点：

1. 调整零极点结构方便；

2. 在级联型结构中，后面网络的输出不会流到前面，因此运算误差比直接型小；
3. 误差会逐级积累。

■ 例题6-3

已知系统函数 $H(z) = \frac{8 - 4z^{-1} + 11z^{-2} - 2z^{-3}}{1 - \frac{4}{5}z^{-1} + \frac{3}{4}z^{-2} - \frac{1}{8}z^{-3}}$ ，试作出其级联型结构的流图。

■ 例题6-3

设滤波器差分方程为 $y(n] = x(n) + x(n-1) + \frac{1}{3}y(n-1) + \frac{1}{4}y(n-2)$ ，试作出其级联型结构的流图。

■ 并联型

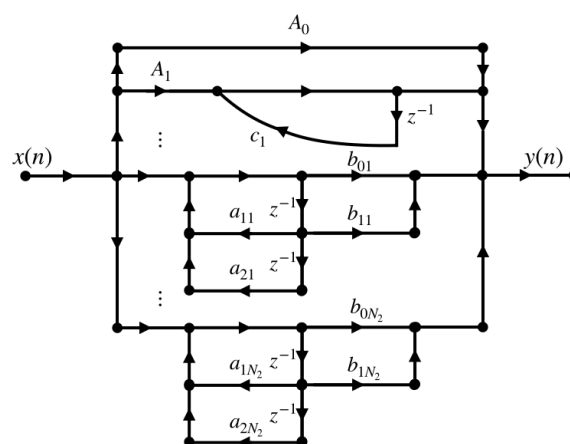
我们可以将系统函数拆分成多个子函数之和的形式，即

$$H(z) = A_0 + \sum_{k=1}^{N_1} \frac{A_k}{1 - c_k z^{-1}} + \sum_{k=1}^{N_2} \frac{b_{0k} + b_{1k} z^{-1}}{1 - a_{1k} z^{-1} - a_{2k} z^{-2}}$$

该系统由 N_1 个一阶基本节， N_2 个基本二阶节，与常数 A_0 并联而成。

并联型结构的特点：

1. 子系统的误差不相互影响
2. 并联可单独调整极点，但不能调整零点



■ 例题6-5

已知系统函数 $H(z) = \frac{-14 - 12z^{-1}}{1 - \frac{7}{8}z^{-1} + \frac{3}{32}z^{-2}} + \frac{24 + 26z^{-1}}{1 - z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}$ ，试作出其并联型结构流图。

■ 例题6-6

设滤波器差分方程为 $y(n) = x(n) + x(n-1) + \frac{1}{3}y(n-1) + \frac{1}{4}y(n-2)$ ，试作出其并联型结构的流图。

6.2.有限长单位冲激响应滤波器

6.2.1.FIR的定义和特点

■ 定义

有限长单位冲激响应滤波器简称FIR滤波器

■ 特点

- 1.单位冲激响应 $h(n)$ 为有限长序列 (Finite-duration Impulse Responses)
- 2.系统函数 $H(z)$ 在有限 z 平面内不存在极点，其一般形式为 关于 z 的多项式；

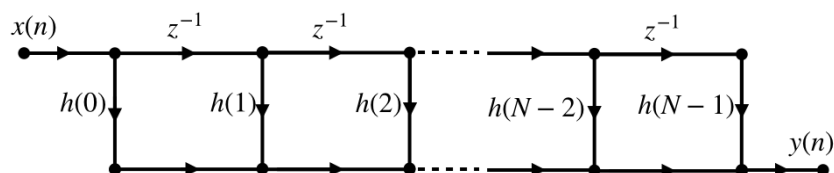
$$\text{FIR的一般形式为 } y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)x(n-k) ;$$

- 3.一般属于非递归系统，即不存在反馈；
- 4.可以设计成具有线性相位的形式。

6.2.2.FIR滤波器的基本结构

■ 直接型

根据 $y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)x(n-k) = h(0)x(n) + h(1)x(n-1) + \dots$ ，可作出其直接型框图：

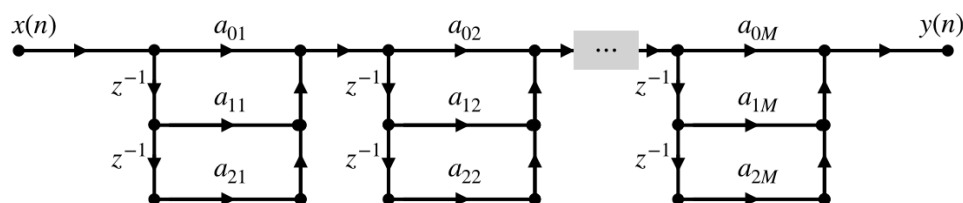


■ 例题6-7

已知单位序列响应 $h(n) = 2^n R_4(n)$ ，试作出其直接型结构。

■ 级联型

根据 $H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} = \prod_{i=1}^M (a_{0i} + a_{1i}z^{-1} + a_{2i}z^{-2})$ ，将系统转化为二阶基本节的级联：



优点：便于控制零点；

缺点：所需系数较多，所需乘法较多。

■ 例题6-8

已知系统函数 $H(z) = (1 + \frac{1}{2}z^{-1})(1 + 2z^{-1} + 4z^{-2})$ ，试作出其级联型结构的流图。

■ 例题6-9

已知FIR滤波器的单位序列响应为

$h(n) = \delta(n) + 0.3\delta(n-1) + 0.72\delta(n-2) + 0.11\delta(n-3) + 0.12\delta(n-4)$ ，试写出其系统函数并画出级联型结构流图。

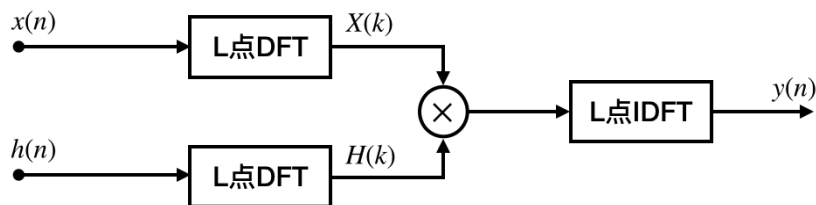
■ 快速卷积型

设 $x(n)$ 为 N_1 点序列， $h(n)$ 为 N_2 点序列，则输出 $y(n)$ 的点数为 $N_1 + N_2 - 1$ 。

此时 $y(n) = x(n) \textcircled{L} h(n) = x(n) * h(n)$ ，其中 $L \geq N_1 + N_2 - 1$ ；

根据快速卷积的算法原理， $y(n) = IDFT[X(k)Y(k)]$ ，其中 $X(k)$ ， $Y(k)$ 分别是 $x(n)$ ， $y(n)$ 的 L 点DFT；

因此快速卷积型结构如下：



■ 线性相位FIR滤波器

(6.2.3详细介绍)

6.2.3.线性相位FIR滤波器的结构

■ 定义

滤波器对不同频率的正弦波所产生的相移和正弦波的频率具有线性关系。

■ 单位序列响应特性

单位序列响应满足： $h(n) = \pm h(N-1-n)$ ， N 代表序列的长度。

其中， $h(n) = -h(N-1-n)$ 代表 $h(n)$ 关于 $\frac{N-1}{2}$ 奇对称；

$h(n) = h(N-1-n)$ 代表 $h(n)$ 关于 $\frac{N-1}{2}$ 偶对称；

■ FIR两种分类方法

$$1. \quad \begin{cases} \text{“+”} & h(n) = h(N-1-n) \\ \text{“-”} & h(n) = -h(N-1-n) \end{cases}$$

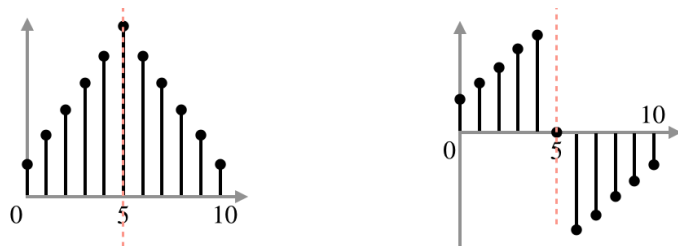
$$2. \quad \begin{cases} N \text{为奇数} \\ N \text{为偶数} \end{cases}$$

N为奇数时：

N 长序列 $h(n)$ 的点数范围是 $(0, 1, \dots, \frac{N-1}{2} - 1, \frac{N-1}{2}, \frac{N-1}{2} + 1, \dots, N-1)$

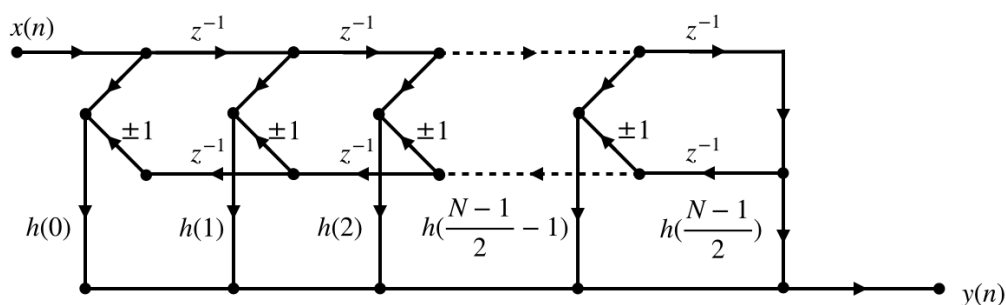
以序列长度 $N = 11$ 为例，此时 $\frac{N-1}{2} = 5$, $h(\frac{N-1}{2}) = 0$

偶对称 $h(n) = h(N-1-n)$ 奇对称 $h(n) = -h(N-1-n)$



系统函数可化为： $H(z) = \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h(n)[z^{-n} \pm z^{-(N-1-n)}] + h(\frac{N-1}{2})z^{-\frac{N-1}{2}}$ 。

信号流图如下图，可以根据奇偶性决定 ± 1 的符号，奇对称取负，偶对称取正。



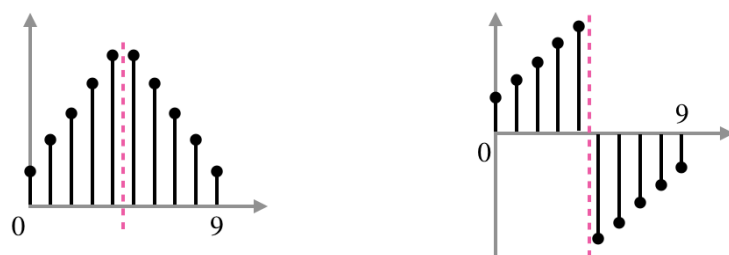
■ 例题6-10

已知FIR滤波器的系统函数为 $H(z) = \frac{1}{5}(1 + 3z^{-1} + 5z^{-2} + 3z^{-3} + z^{-4})$ ，试画出此滤波器的线性相位结构。

N为偶数时：

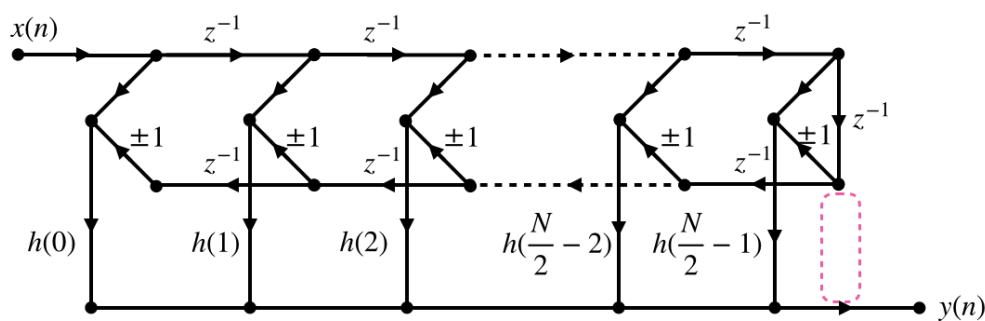
N 长序列 $h(n)$ 的点数范围是 $(0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1, \frac{N}{2}, \frac{N}{2} + 1, \dots, N-1)$

以序列长度 $N = 10$ 为例，此时 $\frac{N-1}{2} = 4.5$ ，没有样值；



系统函数可化为：
$$H(z) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n)[z^{-n} \pm z^{-(N-1-n)}]$$
。

信号流图如下图，可以根据奇偶性决定 ± 1 的符号，奇对称取负，偶对称取正。



■ 例题6-11

已知FIR滤波器的单位脉冲响应为

$$h_1(n) = \{1, 3, 3, 1\}, h_2(n) = \{1, 3, -3, -1\}, \text{画出此滤波器的线性相位结构。}$$

6.3.最小相位延迟系统和全通系统

6.3.1.系统的相位

■ 系统的相位

在研究系统频响时，主要用幅度平方函数，相位特性，群延时响应三个参量对其进行表征。

$$\text{若给定系统 } H(z) = \frac{\sum_{m=0}^M b_r z^{-m}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} = K \cdot z^{N-M} \frac{\prod_{m=1}^M (z - c_m)}{\prod_{k=1}^N (z - d_k)},$$

$$\text{则其频响为 } H(e^{j\omega}) = K \cdot e^{j\omega(N-M)} \frac{\prod_{m=1}^M (e^{j\omega} - c_m)}{\prod_{k=1}^N (e^{j\omega} - d_k)} = |H(e^{j\omega})| e^{j \arg[H(e^{j\omega})]},$$

$$\text{研究 } \frac{H(e^{j\omega})}{K} = e^{j\omega(N-M)} \frac{\prod_{m=1}^M (e^{j\omega} - c_m)}{\prod_{k=1}^N (e^{j\omega} - d_k)} \text{ 的相位特性,}$$

$$\text{其相位角为 } \arg\left[\frac{H(e^{j\omega})}{K}\right] = \omega(N-M) + \sum_{m=1}^M \arg(e^{j\omega} - c_m) - \sum_{k=1}^N \arg(e^{j\omega} - d_k)$$

零矢量辐角之和 极矢量辐角之和

数字频率 ω 从0变化至 2π 时:

对于位于单位圆内的零、极点, 其零矢量与极矢量在以对应的零极点为端点旋转一周时, 相位角变化为 2π 。

对于位于单位圆外的零、极点, 其零矢量与极矢量在以对应的零极点为端点旋转一周时, 相位角变化为0。

综上, 只有单位圆内的零、极点对相频特性有影响。

6.3.2.最小相位延迟系统

■ 系统相位的延迟

$$\arg\left[\frac{H(e^{j\omega})}{K}\right] = \omega(N-M) + \sum_{m=1}^M \arg(e^{j\omega} - c_m) - \sum_{k=1}^N \arg(e^{j\omega} - d_k)$$

零矢量辐角之和 极矢量辐角之和

假设系统有M个零点, N个极点, 进而假设:

$$\begin{array}{lll} m_i \text{ 单位圆内的零点数} & m_o \text{ 单位圆外的零点数} & m_i + m_o = M \\ p_i \text{ 单位圆内的极点数} & p_o \text{ 单位圆外的极点数} & p_i + p_o = N \end{array}$$

对于因果稳定系统, 其系统函数的全部极点都在单位圆内, 即 $p_i = N, p_o = 0$

当数字频率 ω 从0变化至 2π 时, 相位变化:

$$\Delta \arg\left[\frac{H(e^{j\omega})}{K}\right]\Big|_{\Delta\omega=2\pi} = 2\pi(N-M) + 2\pi(m_i - p_i)$$

此时辐角变化为负，因此相位产生了延时（或称为滞后），此时系统称为相位延时系统。

相位角的变化大小与单位圆外的零点数目有关：

$$1. \text{当零点全部位于单位圆之内时, } m_i = M, m_o = 0, \Delta \arg\left[\frac{H(e^{j\omega})}{K}\right] = 0$$

此时相位变化最小，称系统为最小相位延迟系统。

$$2. \text{当零点全部位于单位圆之外时, } m_i = 0, m_o = M, \Delta \arg\left[\frac{H(e^{j\omega})}{K}\right] = -2\pi M$$

此时相位变化最大，称系统为最大相位延迟系统。

■ 最小（大）相位延迟系统

名称	因果性	稳定性	零点	极点
最小相位延迟系统	因果	稳定	全部位于单位圆之内	全部位于单位圆之内
最大相位延迟系统	因果	稳定	全部位于单位圆之外	全部位于单位圆之内
混合相位延迟系统	因果	稳定	单位圆内、外均有	全部位于单位圆之内

■ 最小相位延迟系统的性质

- 1.在幅频响应相同的所有系统中，最小相位延迟系统的单位序列响应的能量集中在 $n=0$ 附近，即 $|h_{\min}(0)| > |h(0)| > |h_{\max}(0)|$ ；
- 2.在幅频响应相同的所有系统中，最小相位延迟系统具有最小的群延时；
- 3.任何因果稳定的非最小相位延时系统 $H(z)$ 都可以表示为全通系统与最小相位延时系统的级联。

■ 例题6-12

给出下列三个二阶系统，问哪个是最小相位系统？哪个是最大相位系统？哪个是混合相位系统？请判断并作出三个极点的零极点分布图，三个二阶系统的系统函数如下：

$$H_1(z) = \frac{(z^{-1} - a)(z^{-1} - b)}{(1 - 0.3e^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1})(1 - 0.6e^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1})}$$

$$H_2(z) = \frac{(1 - az^{-1})(1 - bz^{-1})}{(1 - 0.3e^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1})(1 - 0.6e^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1})}$$

$$H_3(z) = \frac{(1 - az^{-1})(z^{-1} - b)}{(1 - 0.3e^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1})(1 - 0.6e^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1})}$$

其中 $a = -0.5$, $b = 0.7$ 。

6.3.3.全通系统

■ 全通系统的定义与系统函数

系统频率响应的幅度在所有频率下均为1或常数，这样的系统称为全通系统。

设全通系统的频响函数为 $H_{ap}(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = H_{ap}(e^{j\omega})$ ，则其幅频响应为 $|H_{ap}(e^{j\omega})| = K$ 。

全通系统的系统函数：

$$H_{ap}(z) = \pm K \frac{z^{-N} + a_1 z^{-N+1} + a_2 z^{-N+2} + \cdots + a_N}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_N z^{-N}} = \pm K z^{-N} \frac{D(z^{-1})}{D(z)},$$

其中 $D(z) = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_N z^{-N}$ ，为关于 z^{-1} 的 N 次多项式，

N 为系统的阶数。

由于系数全部是实数，因此有 $D(e^{-j\omega}) = D^*(e^{j\omega})$ 。

$$\text{所以 } |H_{ap}(e^{j\omega})| = |K e^{-j\omega N} \frac{D(e^{-j\omega})}{D(e^{j\omega})}| = K。$$

即该系统满足全通系统的幅频特性要求。

一阶全通系统的系统函数：

$$H_{ap}(z) = K \frac{z^{-1} - a}{1 - a z^{-1}}, \quad 0 < |a| < 1$$

二阶全通系统的系统函数：

$$H_{ap}(z) = K \frac{z^{-1} - a}{1 - a z^{-1}} \cdot \frac{z^{-1} - a^*}{1 - a^* z^{-1}} = K \frac{z^{-2} + d_1 z^{-1} + d_2}{1 + d_1 z^{-1} + d_2 z^{-2}}, \quad 0 < |a| < 1$$

■ 全通系统的零极点关系

全通系统的形式：
$$H_{ap}(z) = \pm K z^{-N} \frac{D(z^{-1})}{D(z)}$$

若系统函数存在极点 $z = z_1 = r e^{j\theta}$ ，则系统函数一定存在零点 $z = \frac{1}{z_1} = \frac{1}{r} e^{-j\theta}$

系统函数分子分母的系数均为实数，因此零极点均以共轭对的形式出现。

故也会存在对应的共轭极点 $z = z_1^* = r e^{-j\theta}$ 与共轭零点 $z = \frac{1}{z_1^*} = \frac{1}{r} e^{j\theta}$ 。

因此全通系统可以写为
$$H_{ap}(z) = K \prod_{i=1}^N \frac{1 - \frac{1}{a_i} z^{-1}}{1 - a_i z^{-1}} \cdot \frac{1 - \frac{1}{a_i^*} z^{-1}}{1 - a_i^* z^{-1}}$$

系统的一对共轭极点为 $z = z_1 = r e^{j\theta}$ ， $z = z_1^* = r e^{-j\theta}$ ， $|r| < 1$

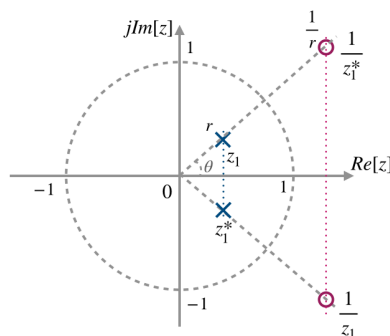
系统对应的共轭零点为 $z = \frac{1}{z_1} = \frac{1}{r} e^{-j\theta}$ ， $z = \frac{1}{z_1^*} = \frac{1}{r} e^{j\theta}$

将这两对零极点作成零极点分布图，如右图：

全通系统的零极点出现在共轭反演的位置上；

或者在镜像位置上，即以单位圆为镜面的镜像

对称关系。



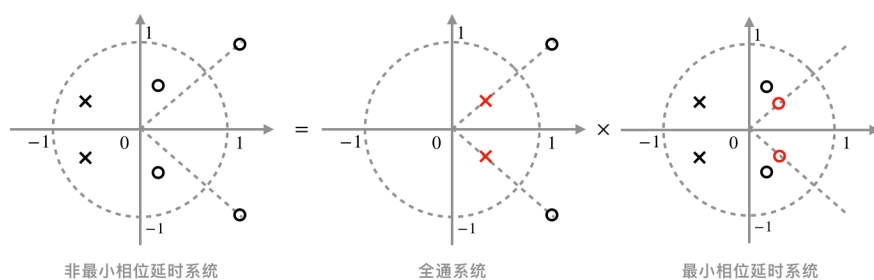
■ 例题6-13

已知一个因果稳定的线性时不变离散系统由方程 $y(n) = a y(n-1) - x(n) - b x(n-1)$ 给出；试确定能使该系统称为全通系统的b值（b与a不相等）。

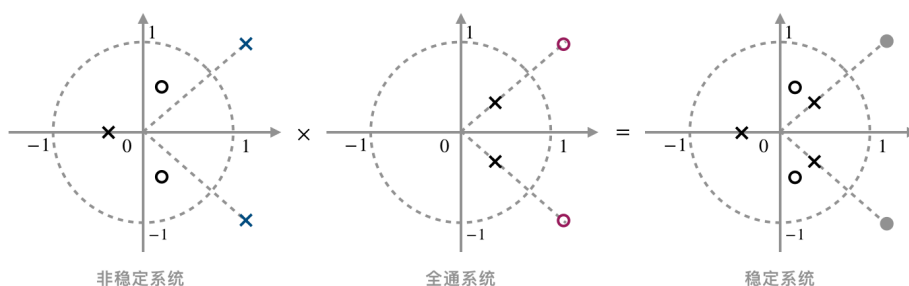
■ 全通系统的应用

可以通过零极点对消的方式，实现系统之间的转化。

1.任何因果稳定的非最小相位延时系统 都可以表示为全通系统与最小相位延时系统的级联；即 $H(z) = H_{ap}(z) \cdot H_{\min}(z)$ ，所得系统函数与最小相位系统的差别，只是频率响应的相位不同。



2. 可以使用级联全通系统的方法，使得一个非稳定的滤波器转化为稳定的系统。



■ 例题6-14

已知一个因果稳定的线性时不变离散系统函数为

$$H(z) = \frac{(1 - 1.25e^{j\frac{\pi}{3}}z^{-1})(1 - 1.25e^{-j\frac{\pi}{3}}z^{-1})(1 + 0.7z^{-1})}{(1 - 0.6e^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1})(1 - 0.6e^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1})}, \text{ 试求一个最小相位延时系统}$$

和一个全通系统，使得系统 $H(z)$ 可以表示为这两个系统的级联。

■ 例题6-15

已知实因果系统的单位冲激序列为 $h(n) = \{-\frac{1}{8}, -\frac{5}{24}, \frac{13}{12}, \frac{1}{3}\}$ ，该系统是否是最小相

位延时系统？若不是，请找出具有相同幅频响应特性的因果性最小相位延时序列 $h_{min}(n)$ 。