离散时间信号与系统

数字信号处理第一讲讲义

1.1.序列的运算

1.1.1.加法、乘法、累加、差分

■ **加法、乘法、累加、差分**

加法$x(n)+y(n)=z(n)$

乘法$x(n)\cdot y(n)=z(n)$

累加$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{n}x(k)$

前向差分$\Delta x(n)=x(n+1)-x(n)$

后向差分 $\nabla x(n)=x(n)-x(n-1)$

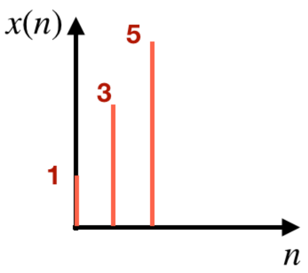
1.1.2.移位、翻转

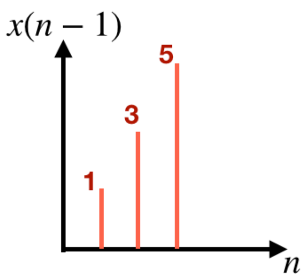
■ **移位、翻转**

移位$x(n)\rightarrow x(n+m)$或

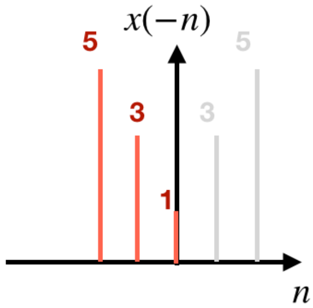
$x(n)\rightarrow x(n-m)$

移位遵循左加又减





翻转$x(n) \rightarrow x(-n)$



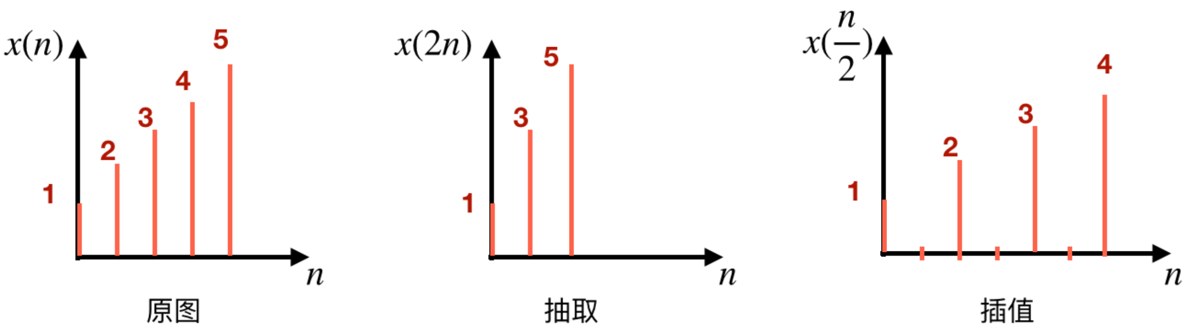
1.1.3.抽取、插值

■ 抽取、插值

时间上的尺度变换，假设有一个正整数D：

抽取序列$x(Dn)$是$x(n)$的抽取序列，即每D个样值抽取一个

差值序列$x(n/D)$是$x(n)$的抽取序列，即每两个样值中插入$(D-1)$个零



1.1.4.卷积

■ 卷积

序列的卷积的定义式：$x(n) * h(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m)$

设$x(n)$长度为N，$h(n)$长度为M，那么卷积后序列的长度为$N+M-1$。

对有限长序列，使用不进位乘法计算较为简便。

常用公式$x(n) * \delta(n) = x(n)$。

例题1-1

求下列两个序列的卷积结果？其长度为多少？

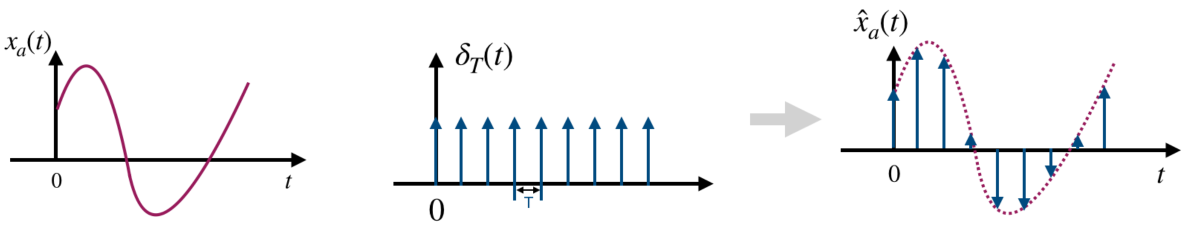
$x(n)=\{\,\underline{4}\quad 5\quad 2\quad 1\}$　　　$h(n)=\{\,1\quad \underline{3}\quad 6\,\}$

1.2.常见序列

1.2.1.单位抽样序列

单位抽样序列$\delta(n)$

连续时间信号抽样的过程：

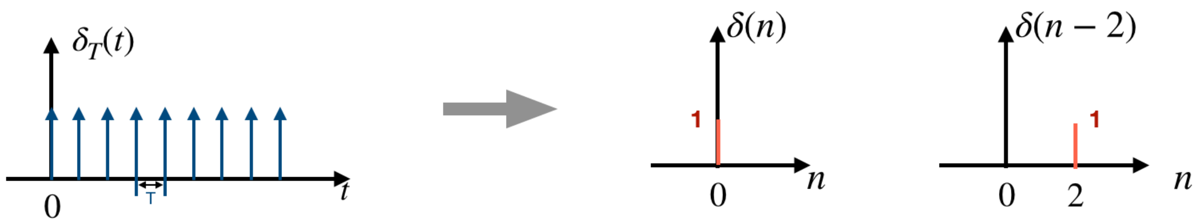


连续时间信号　　周期冲激序列　　理想采样信号

周期冲激序列：$\delta_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$

对连续时间信号采样后的理想采样序列：$\hat{x}_a(t)=x_a(t)\cdot\delta_T(t)=x_a(t)\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$

单位抽样序列是最基本的序列，可以用来表示任意序列。



周期冲激序列　　单位抽样序列

1.2.2.单位阶跃序列

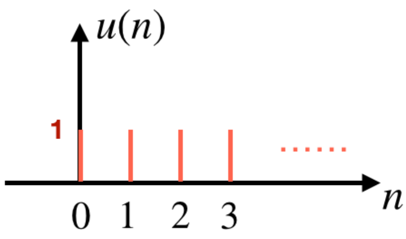
■ **单位阶跃序列**$u(n)$

单位阶跃序列类似阶跃函数。

单位抽样序列转化为单位阶跃序列：

$\delta(n) = u(n) - u(n-1)$；

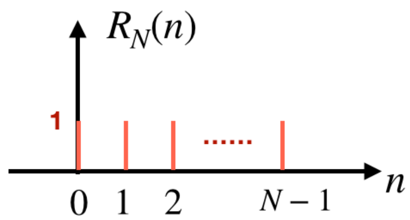
单位阶跃序列转化为单位抽样序列：



$$u(n) = \delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2) + \ldots = \sum_{m=0}^{\infty} \delta(n-m)。$$

1.2.3.矩形序列

■ **矩形序列**$R_N(n)$



单矩形序列的定义：$R_N(n) = \begin{cases} 1 & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & 其他 \end{cases}$

矩形序列与单位阶跃序列的关系：$R_N(n) = u(n) - u(n-N)$；

矩形序列与单位抽样序列的关系：

$$R_N(n) = \delta(n) + \delta(n-1) + \ldots + \delta(n-(N-1)) = \sum_{m=0}^{N-1} \delta(n-m)。$$

1.2.4.指数序列

■ **指数序列**

实指数序列$x(n) = a^n u(n)$，其中a为实数

若$|a| < 1$序列收敛，若$|a| > 1$序列发散

虚指数序列$x(n) = e^{(\sigma + j\omega_0)n} = e^{\sigma \cdot n} e^{j\omega_0 n} = e^{\sigma \cdot n}(\cos \omega_0 n + j \sin \omega_0 n)$

若$\sigma = 0$，则$x(n) = e^{j\omega_0 n}$

1.2.5.正弦序列

■ 正弦序列

正弦序列定义为$x(n)=A\sin(n\omega_0+\phi)$，其中$\omega_0$为数字频率，需要注意其与模拟频率的区别。

■ 周期序列及周期序列的周期

正弦序列$x(n)=A\sin(n\omega_0+\phi)$，其中$\omega_0$为数字频率

指数序列$x(n)=e^{j\omega_0 n}=\cos(\omega_0 n)+j\sin(\omega_0 n)$

对序列$x(n)$，若有$x(n)=x(n+N)$，则称其为周期序列，周期为N；

引入$\dfrac{2\pi}{\omega_0}$间接计算周期：(1) $\dfrac{2\pi}{\omega_0}=N$为整数时，$x(n)$为周期序列，周期为N；(2) $\dfrac{2\pi}{\omega_0}=\dfrac{P}{Q}$为有理数时，$x(n)$为周期序列，周期为$N=P$；(3) $\dfrac{2\pi}{\omega_0}$的结果为无理数（通常带有π）时，不是周期序列。

■ 例题1-2

判断下列序列是否为周期序列，若是，求其周期。

(1) $x_1(n)=\sin\left(\dfrac{\pi}{8}n\right)$　　　　(2) $x_2(n)=\sin\left(\dfrac{3\pi}{10}n\right)$

(3) $x_3(n)=\sin(0.4n)$

1.3.数字频率与模拟频率

1.3.1.数字频率与模拟频率的概念

■ 数字频率与模拟频率的概念

对于一个连续时间信号$x_a(t) = A\sin(\Omega_0 t + \phi)$，模拟角频率为$\Omega_0 = 2\pi f_0 = \dfrac{2\pi}{T_0}$;

其中Ω_0为模拟角频率，表示每秒经历多少弧度，单位为弧度/秒

f_0为模拟频率，表示每秒经过多少个周期，单位为Hz，即$1/s$

$T_0 = \dfrac{1}{f_0}$为周期，表示每个周期的时间，单位为秒(s)

对于正弦序列$x(n) = A\sin(n\omega_0 + \phi)$或指数序列$x(n) = e^{j\omega_0 n} = \cos(\omega_0 n) + j\sin(\omega_0 n)$，数字频率为$\omega_0$。

其中ω_0为数字域频率，表示每个采样点间隔之间的弧度，单位为弧度(rad)，取值范围$(0,2\pi]$

1.3.2.数字频率与模拟频率的关系

■ 模拟频率与抽样频率视角下的两者关系

对连续时间正弦信号以时间间隔T进行抽样：

其中，连续时间信号$x_a(t) = A\sin(\Omega_0 t + \phi)$中，对应模拟角频率$\Omega_0 = 2\pi f_0 = \dfrac{2\pi}{T_0}$;

而抽样信号$x(n) = x_a(t)\,|_{t=nT} = A\sin(\Omega_0 nT + \phi) = A\sin(\omega_0 n + \phi)$中，对应数字频率$\omega_0$。

数字域频率与模拟角频率的关系：$\omega_0 = \Omega_0 T = 2\pi f_0 \cdot T$;

抽样频率表示为$f_s = \dfrac{1}{T}$，将上式去除下标$\omega = \Omega T = 2\pi f \cdot T = 2\pi \dfrac{f}{f_s}$;

不难发现，数字域频率是一个相对频率，单位是弧度，与抽样频率f_s有关。数字域频率与模拟角频率的关系：$\omega = \Omega T = 2\pi f \cdot T = 2\pi \dfrac{f}{f_s}$；

当模拟频率与抽样频率相等$f = f_s$时，$\Omega = 2\pi f = 2\pi f_s = \Omega_s$，$\omega = 2\pi \dfrac{f}{f_s} = 2\pi$；

当模拟频率与抽样频率满足$f = \dfrac{1}{2} f_s$时，$\Omega = 2\pi f = 2\pi \cdot \dfrac{f_s}{2} = \dfrac{\Omega_s}{2}$，$\omega = 2\pi \dfrac{f}{f_s} = \pi$称之为折叠频率，折叠频率是抽样时不产生混叠的最高频率。

■ **周期与采样间隔视角下的两者关系**

引入$\dfrac{2\pi}{\omega_0}$间接计算周期，已知当$\dfrac{2\pi}{\omega_0}$为有理数时，抽样得到的序列是周期序列；

推导得$\dfrac{2\pi}{\omega_0} = \dfrac{2\pi}{\Omega_0 T} = \dfrac{2\pi}{2\pi f_0 T} = \dfrac{1}{f_0 T} = \dfrac{T_0}{T}$；

即正弦信号的周期T_0与采样间隔T互为素数的整数时，抽样得到的正弦序列是周期序列。

1.4.线性时不变系统

1.4.1.线性、时不变的定义

■ **线性系统与叠加原理**

叠加原理：包含可加性和齐次性，即：

$a_1 y_1(n) + a_2 y_2(n) = a_1 T[x_1(n)] + a_2 T[x_2(n)] = T[a_1 x_1(n)] + T[a_2 x_2(n)]$

线性系统：满足叠加原理的离散时间系统。

对于线性系统，因为满足叠加原理，零输入一定产生零输出。

■ **时不变系统**

时不变系统：参数不随时间而变化，即输入输出关系不随时间而变化的系统，若$T[x(n)] = y(n)$，则$T[x(n-n_0)] = y(n-n_0)$。

存在以下情况为时变系统：

1）系统有时变的增益，如：$y(n) = nx(n)$

2）系统在时间轴上有任何的压缩或扩展，如：$y(n) = x(2n)$

例题1-3

判断下列系统是否是线性时不变系统。

(1) $y(n) = x(-n)$　　(2) $y(n) = x(n^2)$　　(3) $y(n) = x(n - n_0)$

1.4.2.因果、稳定的定义

因果系统

因果系统指系统的输出不发生在输入之前的系统，即 n 时刻的输出只与 n 时刻及其以前的时刻有关；

因果系统的充要条件：单位冲激响应是因果序列，即在$n < 0$时$h(n) = 0$。

稳定系统

稳定系统指有界输入产生有界输出的系统；

稳定系统的充要条件：单位冲激响应绝对可和，即 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = P < \infty$。

例题1-4

判断下列系统是否是因果、稳定系统。

(1) $T[x(n)] = g(n)x(n)$　　(2) $T[x(n)] = x(n+5) + ax(n)$

(3) $T[x(n)] = 2nx(n)$