# 离散序列的频谱分析

## 数字信号处理第四讲讲义

## 4.1.频域采样定理

### 4.1.1.时域采样定理复习

■ **时域采样定理复习**

当采样频率大于等于奈奎斯特采样频率，即$f_s \geq 2f_h$时，可以从采样信号无失真地恢复出原信号。

采样信号的频谱是原信号频谱按照采样周期进行延拓后，进行幅度的加权而得到的。

$\omega_s \geq 2\omega_h$即$f_s \geq 2f_h$时，采样信号频谱在每一个重复周期内频谱与原信号频谱相同，此时采样信号保留了原信号的全部信息，因此可准确恢复原信号；

$\omega_s < 2\omega_h$即$f_s < 2f_h$时，采样信号频谱在重复过程中发生了频谱混叠，无法从中提取原信号的频谱，故不可准确恢复原信号。

### 4.1.2.频域采样定理

■ **频域采样的过程**

给定一个点数为$M$的有限长序列$x(n)$，则给出如下的频域采样过程：

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & \text{周期内} & & & & & \\ & & & N\text{点采样} & & & & & \\ x(n) & \Rightarrow & X(e^{j\omega}) & \Rightarrow & \tilde{X}(k) & \Rightarrow & \tilde{x}_N(n) & \Rightarrow & x_N(n) \\ M\text{点} & & \text{连续周期谱} & & \text{离散周期谱} & & \text{周期为}N & & N\text{点} \end{array}$$

我们希望找出频域进行$N$点采样后，能准确由频谱恢复原信号$x(n)$需要满足的条件。

根据频域采样的过程，为了得到不失真的序列，我们就需要理清$x(n)$、$\tilde{x}_N(n)$与$x_N(n)$的关系。

推导：令$\tilde{x}_N(n) = IDFS[\tilde{X}(k)]$，根据定义式：

$$\tilde{x}_N(n) = IDFS[\tilde{X}(k)] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)W_N^{-nk} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\Big[\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)W_N^{mk}\Big]W_N^{-nk}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\Big[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}W_N^{(m-n)k}\Big]$$

根据旋转因子的正交性$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}W_N^{nk}(W_N^{mk})^* = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}W_N^{(n-m)k} = \begin{cases}1 & n-m=iN\\ 0 & n-m\neq iN\end{cases}$

因此可求得$\tilde{x}_N(n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty}x(n+iN)$。

即频域每个周期$N$点采样，则时域中$x(n)$以$N$为周期进行延拓，与时域采样具有对偶关系。

已知$\tilde{x}_N(n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty}x(n+iN)$，$x_N(n) = \Big[\sum_{i=-\infty}^{\infty}x(n+iN)\Big]R_N(n)$；

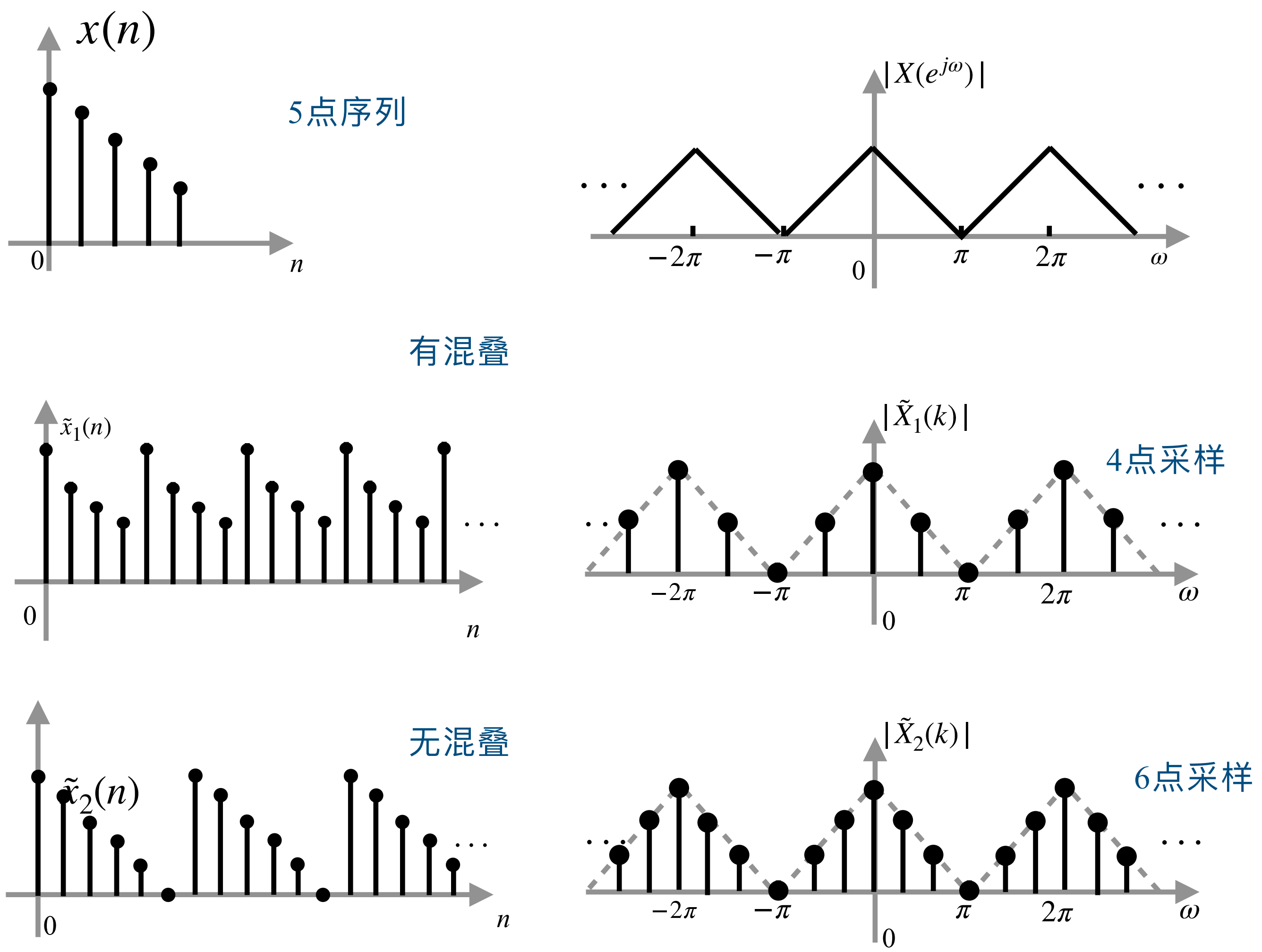
频域进行$N$点采样，则时域以$N$为周期进行延拓。

当$N \geq M$时，长度为$M$的序列$x(n)$周期延拓时不会发生样值的混叠，此时可以通过$x_N(n)$得到$x(n)$。

当$N < M$时，长度为$M$的序列$x(n)$周期延拓时会发生样值的混叠，此时不能通过$x_N(n)$得到$x(n)$。

因此，只有当$N \geq M$时，才可以通过频域的$N$点采样$X(k)$无失真的恢复出长度为$M$的原序列$x(n)$。

「示意图」




## ■ 频域采样定理

若时域序列长度为$M$，频域采样点数为$N$；

则只有当频率采样点数 $N$ 满足$N \geq M$时，才能由$X(k)$不失真的恢复出原信号；

若$N < M$，则会由于周期延拓而产生时域混叠现象，无法准确恢复原信号。

## 例题4-1

知序列$x(n) = R_8(n)$，$X(e^{j\omega}) = DTFT[x(n)]$，对频谱进行采样，得

$Y(k) = X(e^{j\omega})|_{\omega=\frac{2\pi}{6}k}$ ，$k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$；

试求序列$y(n) = IDFT[Y(k)]$。

# 4.2.离散序列的频谱分析

## 4.2.1.利用DFT逼近模拟信号

### ■ 利用DFT逼近模拟信号

在实际应用及计算机程序设计中，我们通常运用离散分析对信号进行处理；

因此，如要研究模拟信号的频谱，我们往往用其离散频谱对其进行逼近；

对于周期或非周期模拟信号，我们运用不同的思路进行频谱分析；

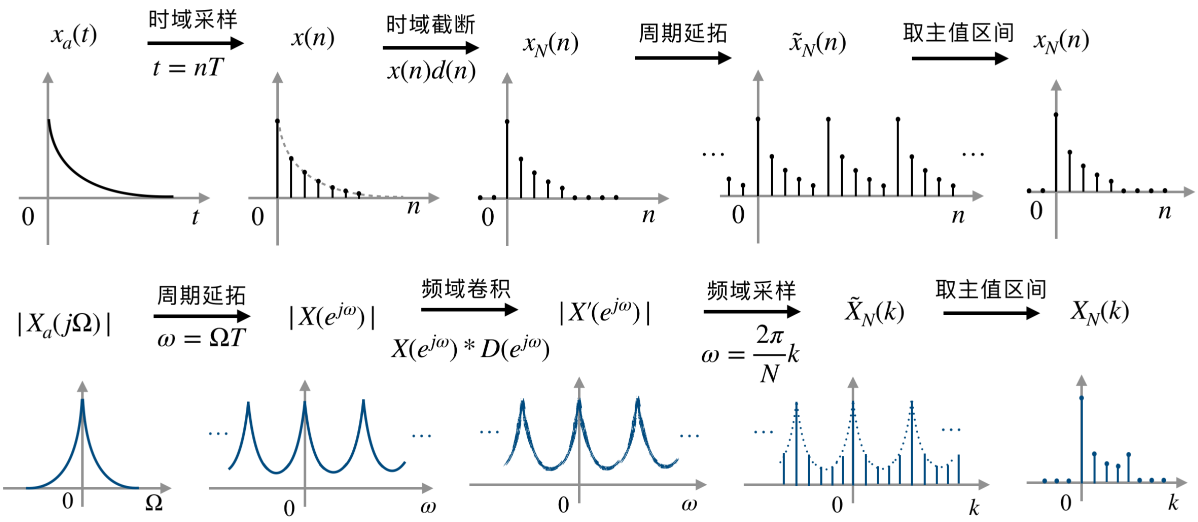
且在逼近过程中的采样、截断等操作，必然会导致一定的误差产生。

### ■ 利用DFT逼近模拟非周期信号的傅立叶变换

逼近过程：

时域采样 ⟶ 数据截断 ⟶ 频域采样 ⟶ 近似逼近模拟非周期信号频谱

$$
\begin{tikzcd}
x_a(t) \arrow[r, "\text{时域采样}", "t=nT"'] \arrow[d, leftrightarrow, "FT"] & x(n) \arrow[r, "\text{时域截断}", "x(n)d(n)"'] \arrow[d, leftrightarrow, "DTFT"] & x_N(n) \arrow[r, "\text{周期延拓}"] \arrow[d, leftrightarrow, "DTFT"] & \tilde{x}_N(n) \arrow[r, "\text{取主值区间}"] \arrow[d, leftrightarrow, "DFS"] & x_N(n) \arrow[d, leftrightarrow, "DFT"] \\
X_a(j\Omega) \arrow[r, "\text{周期延拓}", "\omega=\Omega T"'] & X(e^{j\omega}) \arrow[r, "\text{频域卷积}", "X(e^{j\omega})*D(e^{j\omega})"'] & X'(e^{j\omega}) \arrow[r, "\text{频域采样}", "\omega=\frac{2\pi}{N}k"'] & \tilde{X}_N(k) \arrow[r, "\text{取主值区间}"] & X_N(k)
\end{tikzcd}
$$



■ **利用DFT逼近模拟模拟周期信号**

逼近过程

时域采样 ⟶ 数据截断 ⟶ 利用离散频谱近似逼近模拟周期信号频谱

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=large]
x_{aT}(t) \arrow[r, "\text{时域采样}", "t=nT"'] \arrow[d, leftrightarrow, "CFS"] & x(n) \arrow[r, "\text{时域卷积}"] \arrow[d, leftrightarrow, "DFS"] & x_N(n) \arrow[d, leftrightarrow, "DFT"] \\
X_a(jk\Omega_0) \arrow[r, "\text{周期延拓}", "\omega=\Omega T"'] & \tilde{X}(k) \arrow[r, "\text{频域截短}", "\tilde{X}(k)D(k)"'] & X_N(k)
\end{tikzcd}$$

## 4.2.2.频谱分析中的三大问题

■ **频谱分析中的三大问题**

（1）混叠失真

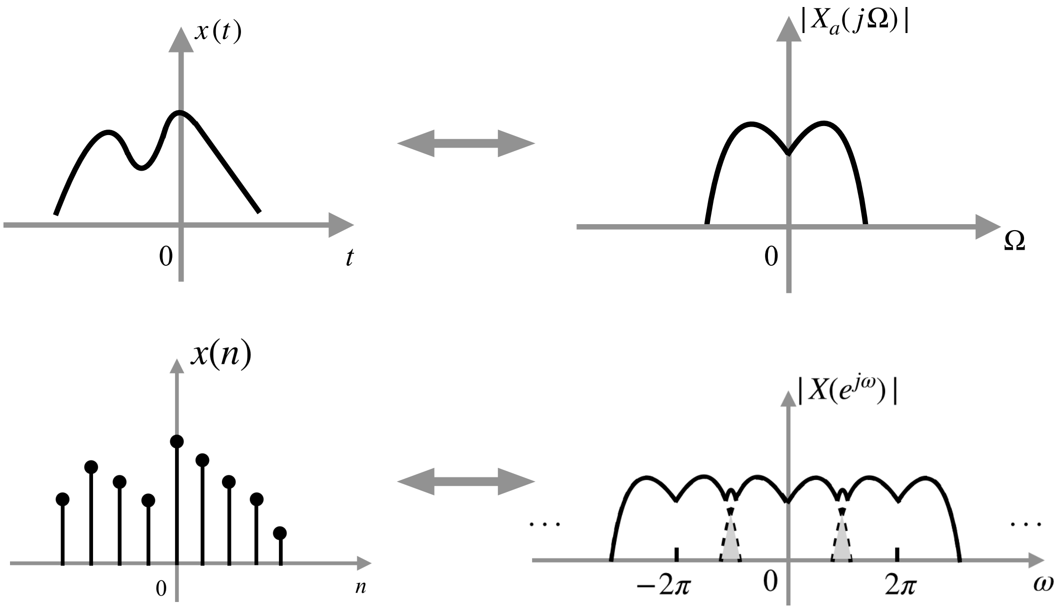
（2）频谱泄漏

（3）栅栏效应

■ **混叠失真「概念与成因」**

混叠失真是由于**时域采样**而引起的一类频域失真问题，表现为频谱发生混叠。

当采样频率小于奈奎斯特采样频率，即$f_s < 2f_h$时，采样信号的频谱会产生混叠失真。



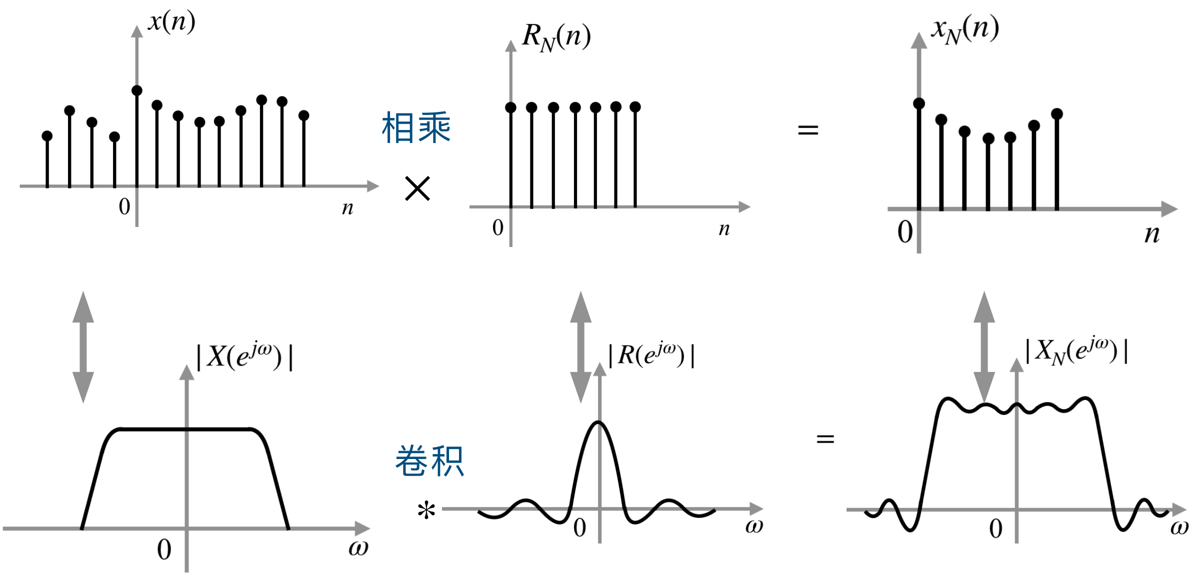
## ■ 混叠失真「解决方法」

（1）提高采样频率，使得$f_s \geq 2f_h$；

（2）加装抗混叠滤波器，使信号的最高频率低于折叠频率，即$f_h \leq \dfrac{f_s}{2}$。

## ■ 频谱泄漏「概念与成因」

频谱泄漏是由于**时域截断**引起的一类频域失真问题，表现为频谱分量从正常频谱扩展开来。




## ■ 频谱泄漏「解决方法」

（1）增大数据的截取长度；

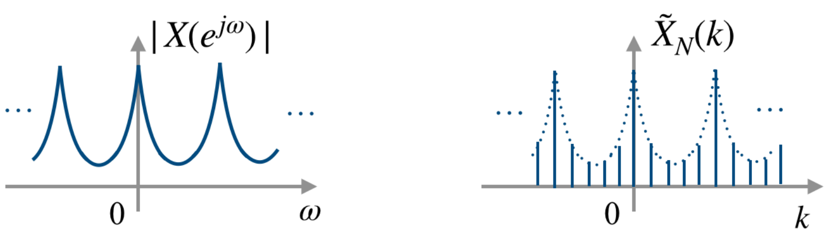
（2）不要突然截断，改变窗函数的形状，从而减小旁瓣能量。

注意：频谱泄漏只能减弱，不能消除。

## ■ 栅栏效应「概念与成因」

栅栏效应是由于**频域采样**而引起的一类频域失真问题，表现为频谱不是连续谱，而是离散谱；因此，在观察信号频谱时仿佛是在通过一个“栅栏”观察景象，“栅栏效应”因此得名。

栅栏效应是由于频域采样而引起的，这是利用DFT对信号进行谱分析的必然现象；



■ **栅栏效应「解决方法」**

（1）增加频域抽样点数；

（2）在不改变时域数据的情况下，在记录末端补零值。

注意：栅栏效应只能减弱，不能消除。

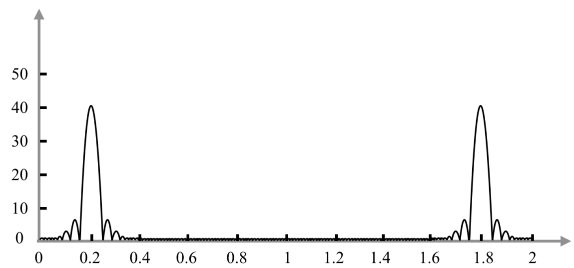
补零值不能提高实际的物理分辨力，只能提高计算分辨力。

■ **小结：三类频谱分析的问题**

| 名称 | 成因 | 解决方法 | 备注 |
|---|---|---|---|
| 混叠失真 | 时域采样 | 增大采样频率，加装防混叠滤波器 | 可以消除 |
| 频谱泄漏 | 时域截断 | 增加数据截取长度，改变窗函数形状（减小旁瓣） | 不可以消除，只可以降低 |
| 栅栏效应 | 频域采样 | 增加频率采样点数，在有效数据不变时尾部补零 | 不可以消除，只可以降低 |

■ **例题4-2**

已知信号$\cos\Omega_0 t$的理论频谱为$\pi[\delta(\Omega+\Omega_0)+\delta(\Omega-\Omega_0)]$，下图是一余弦序列的DFT结果。（横轴对$\pi$进行了归一化处理，如2对应$2\pi$）



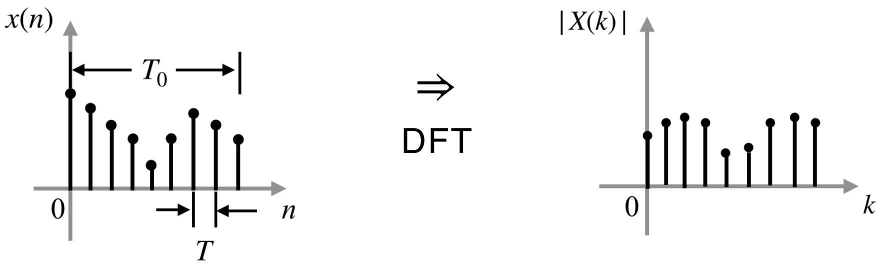

（1）试解释所得到的频谱为什么不是理论频谱中的冲激函数?

（2）若想降低频谱中的旁瓣，可采取什么方法?

（3）假设该余弦序列是由模拟余弦信号用10kHz的采样频率采样所得，则原模拟信号的频率是多少Hz?

## 4.2.3.频谱分析中的参数确定

### ■ 频谱分析中的主要参数




$T_0$： 信号记录长度

$T$ ： 时域采样间隔

$N$ ： 采样点数

$f_h$ ： 信号最高频率

$f_s$ ： 信号采样频率

$F_0$： 频率分辨力（单位是Hz）

### ■ 参数之间的关系

频率分辨力与信号记录长度有关：$F_0 = \dfrac{1}{T_0}$

频域周期与时域采样间隔有关：$f_s = \dfrac{1}{T}$

若要从频谱无失真恢复原信号，则采样频率需满足：$f_s \geq 2f_h$

采样点数的确定：$N = \dfrac{T_0}{T} = \dfrac{f_s}{F_0}$

### ■ 频率分辨力$F_0$的定义

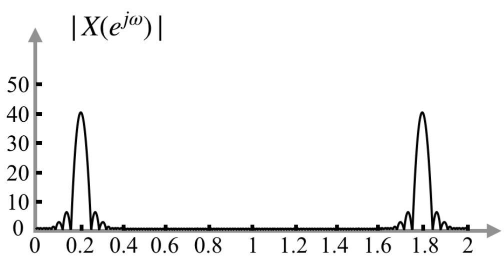
频率分辨力，指的是频谱中可分辨的两频率的最小谱线间距，表征频域的采样间隔。

频率分辨力$F_0$的值越小，频率分辨力越高，分辨频谱中各频率分量的能力就越强。

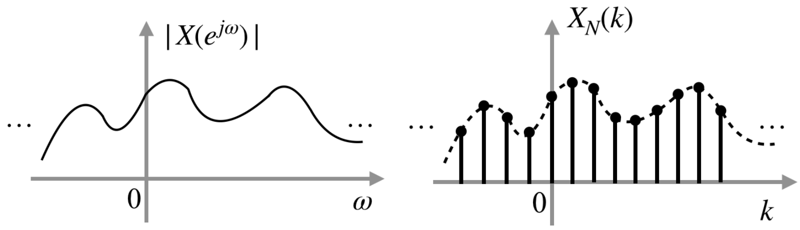
例如：某频谱的频率分辨力为5Hz，那么信号中频率值相差小于5Hz的两个频率分量，

在此频谱图就分辨不出来。

频率分辨力可以分为实际的物理频率分辨力和计算上的频率分辨力。




物理频率分辨力




计算上的频率分辨力

## ■ 提高频率分辨力的方法

（1）提高物理分辨力：$F_0 = \dfrac{1}{T_0}$，可以通过增加信号记录长度，从而提高物理分辨力。

（2）提高计算分辨力：$F_0 = \dfrac{f_s}{N}$ $\begin{cases} \text{时域补零；} \\ \text{信号记录长度不变时，同时提高采样频率和采样点数。} \end{cases}$

物理分辨力的提高，即频率分辨力的提高；

计算分辨力的提高，只是减小了栅栏效应，并不能提高实际的频率分辨力。

因此，想要提高频率分辨力，只能通过增加信号记录长度实现。

## ■ 频谱分析参数确定的步骤

（1）分析信号有哪些频率分量，根据频率分量确定最低频率分辨力$(F_0)_{\min}$与最高频率$f_h$；

（2）根据最低频率分辨力$(F_0)_{\min}$，可通过$F_0 = \dfrac{1}{T_0}$确定最短记录时间$(T_0)_{\min}$；

（3）根据最高频率$f_h$，可通过$f_s \geq 2f_h$确定最低采样频率$(f_s)_{\min} = 2f_h$或最大采样间隔$(T)_{\max} = \dfrac{1}{2f_h}$；

（4）从而可以求得最少采样点数$(N)_{\min} = \dfrac{(T_0)_{\min}}{(T)_{\max}}$；

（5）利用$F_0 = \dfrac{f_s}{N}$可对某一谱线所对应的频率进行计算，第$k$根谱线对应的频率为$f_k = k\dfrac{f_s}{N}$；

（6）若通过补零后重新做$N'$点DFT，频率分辨力不变；但第$k$根谱线对应的频率变为$f_k^{'} = k\dfrac{f_s}{N'}$。

■ **例题4-3**

一信号的最高频率为4kHz，对该信号作DFT，要求频率分辨力$F_0 \leq 10Hz$,为了快速运算要求采样点数为2的整数幂。

问：（1）最小记录长度是多少?

（2）采样点的最大时间间隔是多少?

（3）在一次记录中，最少记录点数是多少?

（4）在抽样频率不变的情况下，如何将频率分辨力提高一倍?

■ **例题4-4**

已知一调幅信号的表达式为$x_a(t) = [1 + \cos(2\pi \times 50t)] \cdot \cos(2\pi \times 2000t)$；

用DFT做频谱分析，要求能分辨此信号的所有频率分量，试确定以下参数：

（1）最小记录时间；

（2）最大取样间隔；

（3）最少取样点数；

（4）对该信号以6kHz的采样频率进行采样，然后作300点的DFT$X(k)$，求$X(k)$中$k = 100$处对应模拟信号的频谱频率；

# 4.3.序列的抽取与插值

## 4.3.1.序列的抽取

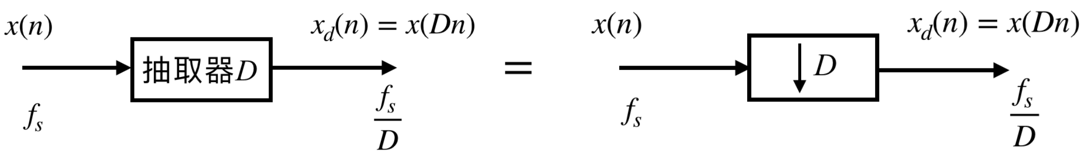
■ **序列的抽取与采样率的变化**

序列抽取的表达式为$x_d(n) = x(Dn)$，其中$D$为整数，此时称为序列的$D$抽取，$D$称为抽取因子；

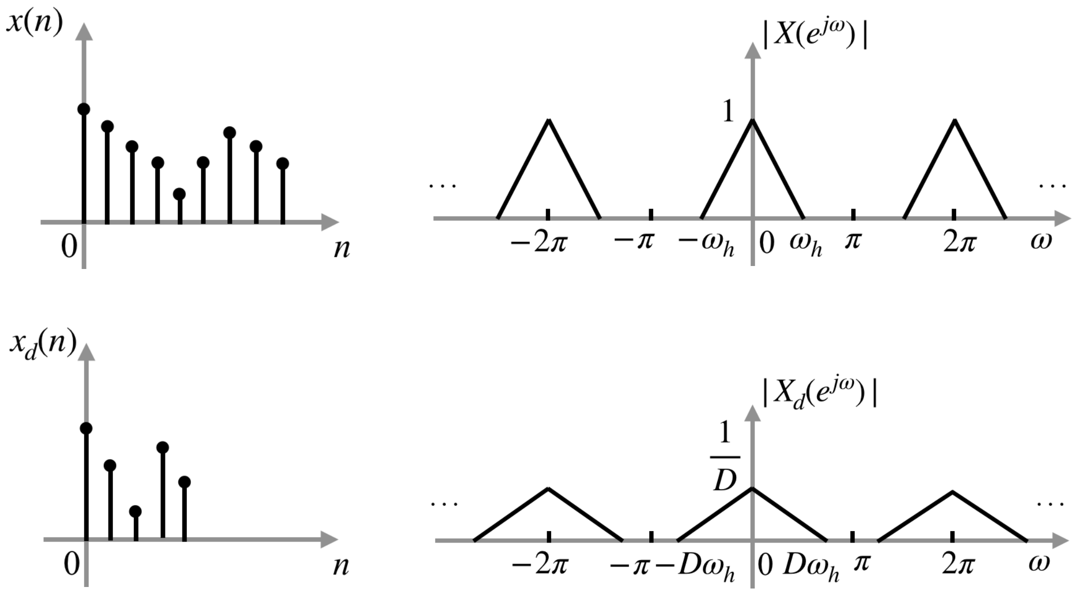
序列抽取的意义是：在每连贯的$D$个抽样中取出一个样值，以便减小数据量。

若原序列的采样频率为$f_s$，则$D$抽取后的序列$x_d(n)=x(Dn)$的采样频率为$\dfrac{f_s}{D}$；

因此序列抽取是降低采样频率的过程。




■ **序列的抽取与频谱的变化**




序列进行$D$抽取后，频谱具有如下特点：

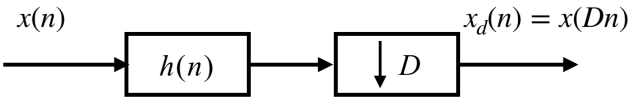
（1）频谱展宽至原来的$D$倍；

（2）幅度减小为原来的$\dfrac{1}{D}$(抽取后能量减小)。

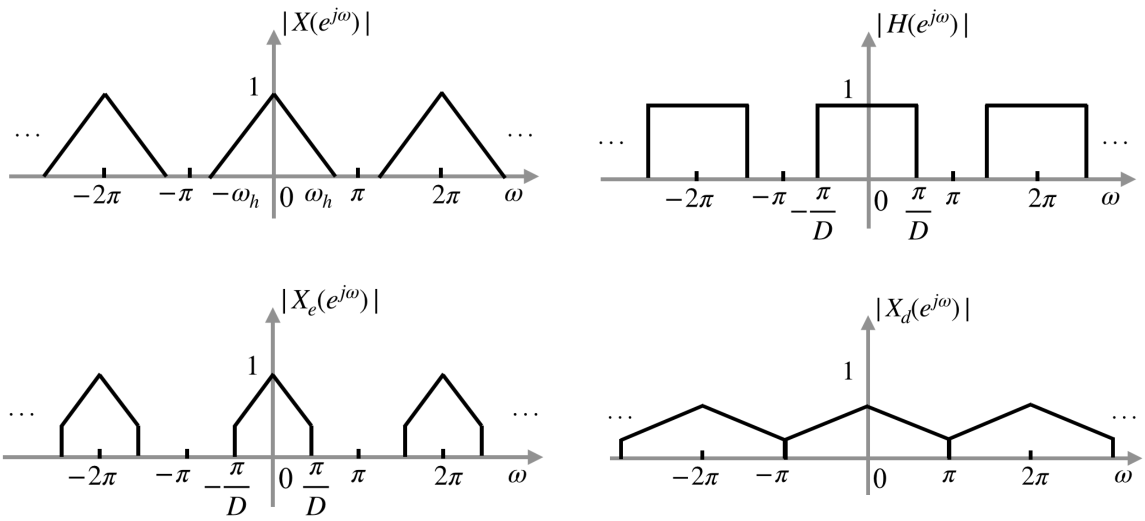
根据频谱图可知，序列在进行$D$抽取时，原序列的频率范围需满足$|\omega| \le \dfrac{\pi}{D}$，否则会产生频谱混叠的失真现象。

■ **防止混叠失真的措施**

在进行$D$抽取之前先加入抗混叠滤波器，使得信号的频谱先行满足$|\omega| \le \dfrac{\pi}{D}$，即可防止混叠。




抗混叠滤波器的频率响应特性应满足$|H(e^{j\omega})| = \begin{cases} 1 & |\omega| \le \frac{\pi}{D} \\ 0 & others \end{cases}$




## 4.3.2.序列的插值

■ **序列的插值与采样率的变化**

序列的插值包括两步：零值插值、数字低通滤波。

序列零值插值的表达式为$x_e(n) = x\left(\dfrac{n}{I}\right)$，称为序列的 $I$ 倍零值插值，$I$ 为整数，称为插值因子；

$I$倍零值插值的意义是：在序列相邻两点间插入$I$-1个零值；

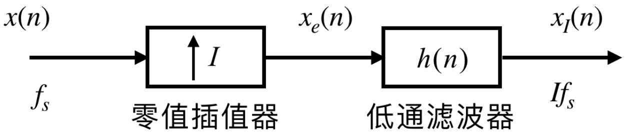
在插入零值以后，需进行数字低通滤波，使这些零值映射到对应的样值处，才实现最终的插值。

若原序列的采样频率为$f_s$，则 $I$ 插值后的序列$x_e(n) = x\left(\dfrac{n}{I}\right)$的采样频率为$I \cdot f_s$；

因此序列插值是提高采样频率的过程。

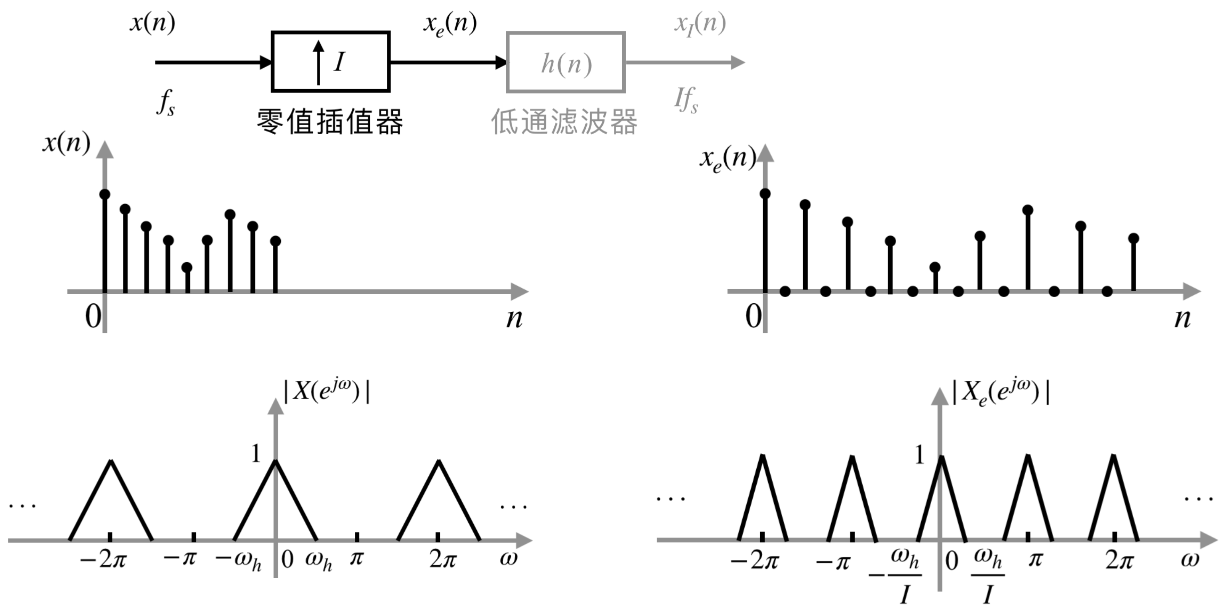
### ■ 序列的插值系统

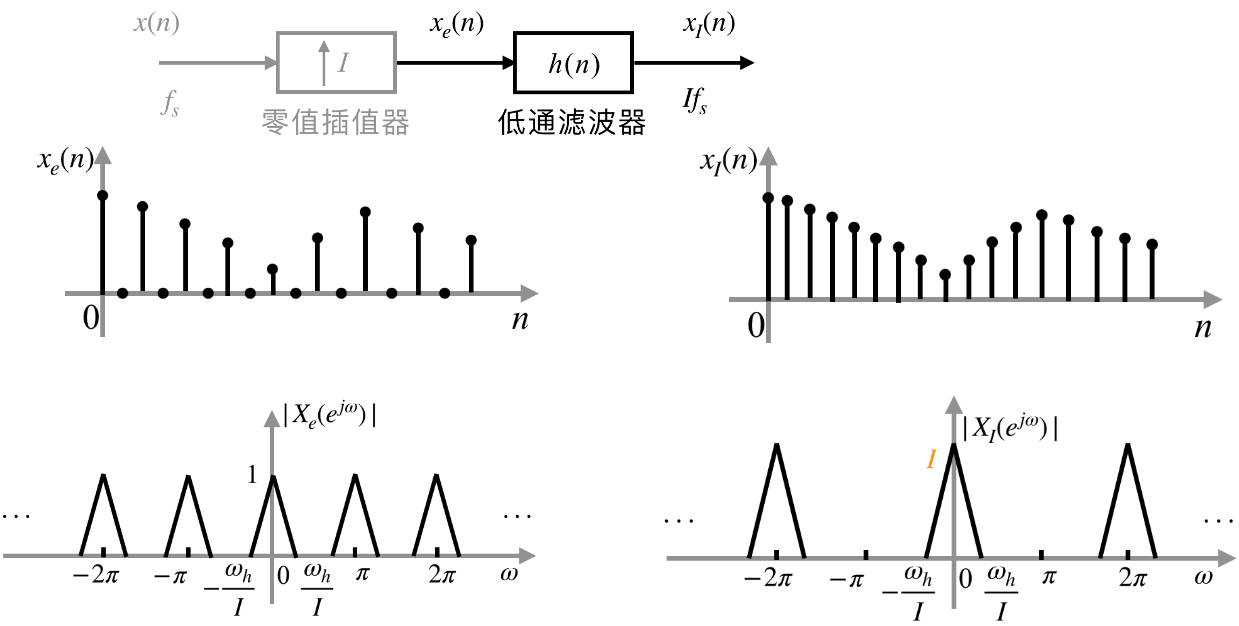
序列的插值系统如下图所示：




其中，数字低通滤波器的频率响应特性应满足 $|H(e^{j\omega})| = \begin{cases} I & |\omega| \le \frac{\pi}{I} \\ 0 & others \end{cases}$

### ■ 序列的插值与频谱的变化



序列进行$I$倍零值插值后，序列$x_e(n)$的频谱具有如下特点：

（1）频谱压缩至原来的$\dfrac{1}{I}$倍；

（2）幅度不变(零值插值后能量不变)；

（3）会有原先位于某一周期的频谱进入其他周期。

序列进行低通滤波后，序列$x_I(n)$的频谱具有如下特点：

（1）频谱压缩至原来的$\dfrac{1}{I}$倍；

（2）幅度变为原来的$I$倍；

（3）频谱在一个周期内的频带范围是$[-\dfrac{\omega_h}{I},\dfrac{\omega_h}{I}]$。

**例题4-5**

已知$X(k)=\{\underline{4}\ ,2\ ,0\ ,2\}$是4点序列$x(n)$的4点DFT，若给定8点序列

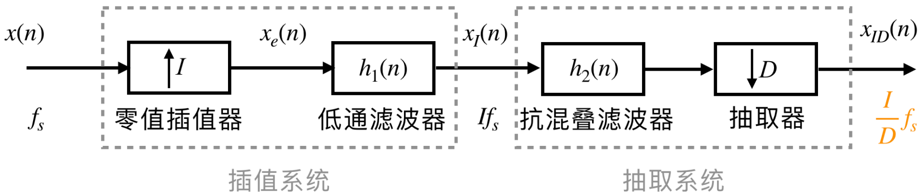
$$y(n)=\begin{cases}x(\frac{n}{2}) & n=2l\\ 0 & n\neq 2l\end{cases}\ ,\ l\text{ 为整数；}$$

试求其 8 点DFT$Y(k)$。

## 4.3.3.多抽样率转换系统

**利用有理数$\dfrac{I}{D}$实现采样率转换**

将插值系统与抽取系统级联起来，就可以利用某一非整数因子实现抽样率的转换。



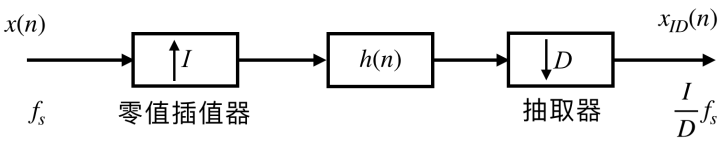
其中，低通滤波器与抗混叠滤波器的频率特性应分别满足：

$$|H_1(e^{j\omega})| = \begin{cases} I & |\omega| \le \frac{\pi}{I} \\ 0 & others \end{cases}$$

$$|H_2(e^{j\omega})| = \begin{cases} 1 & |\omega| \le \frac{\pi}{D} \\ 0 & others \end{cases}$$

选择合适的 $I$ 和 $D$，就能够任意改变抽样率。

将数字低通滤波器和抗混叠滤波器合并成一个低通滤波器，可实现系统的简化。




其中，低通滤波器的频率特性应满足：$|H_{(}(e^{j\omega})| = \begin{cases} I & |\omega| \le \min(\frac{\pi}{I}, \frac{\pi}{D}) \\ 0 & others \end{cases}$

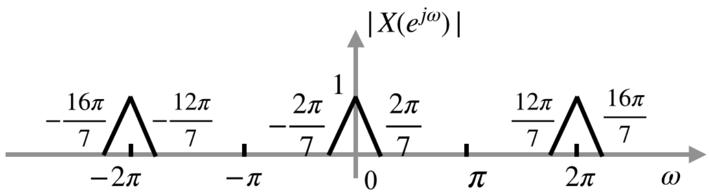
采样率转换后，$x_{ID}(n)$的数字频带宽度为$x(n)$的$\dfrac{D}{I}$倍 。

多采样率转换系统一般采取先插值后抽取的方法，不论是插值还是抽取，都属于时变系统。

注意：当通过抽取使信号频谱在一个周期内已扩展到$[-\pi, \pi]$时，就不可以继续减小采样率。

## 例题4-6

已知$x(n)$的频谱如右图所示，试选择新的抽样频率，使得数据的冗余度最低，并画出频谱变换图。



### 例题4-7

数字录音带(DAT)驱动器的采样频率为48kHz，而激光唱盘(CD)播放机则以44.1kHz的采样频率工作。为了直接把声音从CD录制到DAT，需要把采样频率从44.1kHz转换到48kHz，为此，考虑设计如图的采样率转换系统。

求$I$和$D$的值，并写出滤波器的幅频特性，并求采样率转换后序列的数字频带宽度与原序列数字频带宽度的关系。