离散傅立叶变换

数字信号处理第三讲讲义

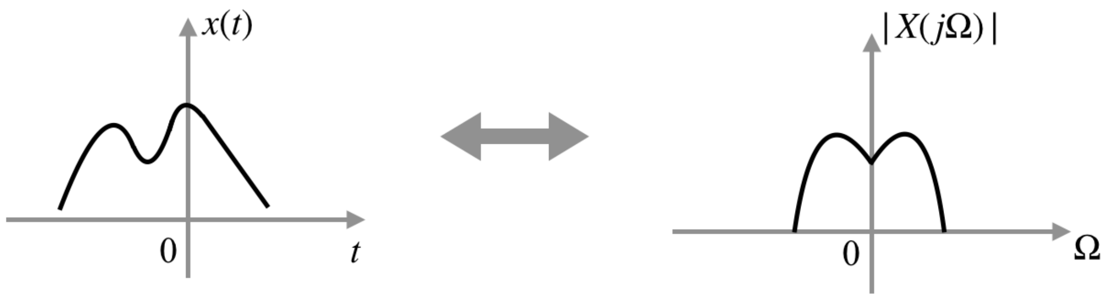
3.1.傅立叶变换的四种形式

3.1.1.连续时间函数的傅立叶变换

■ **连续时间傅立叶变换(CFT/FT)**

连续时间傅里叶正变换的定义式为：$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t}dt;$

连续时间傅里叶反变换的定义式为：$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega;$



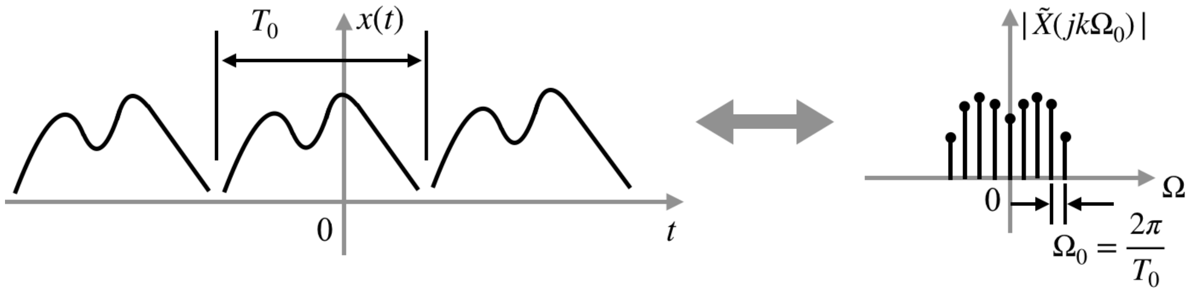
非周期、连续时间信号的傅里叶变换是关于模拟频率Ω的连续、非周期函数。

■ **连续傅立叶级数(CFS)**

连续时间周期信号可以用一系列谐波分量的线性组合来表征。

其傅立叶级数展开式为$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(jk\Omega_0)e^{jk\Omega_0 t}$，其中

$$X(jk\Omega_0)=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0}^{T_0}x(t)e^{-jk\Omega_0 t}dt;$$



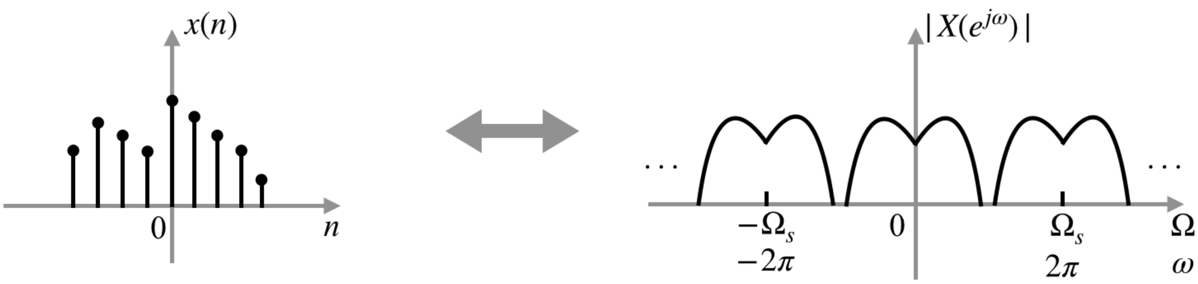
周期、连续时间信号的傅里叶级数是关于基波频率Ω_0的离散、非周期函数。

3.1.2.连续时间序列的傅立叶变换

■ **离散时间傅立叶变换(DTFT)**

离散时间傅里叶正变换的定义式为：$DTFT[x(n)]=X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n};$

离散时间傅里叶反变换的定义式为：$IDTFT[X(e^{j\omega})]=x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega;$



非周期、离散序列的离散时间傅里叶变换是关于数字频率ω的周期、连续函数，且周期为2π。

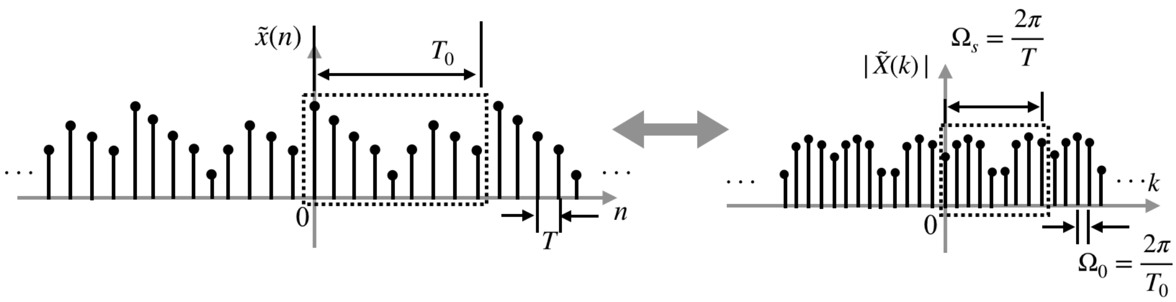
■ **离散傅立叶级数(DFS)**

对有限长序列的DTFT进行频域采样，则该序列会在时域中周期延拓；

则周期序列对应的频谱是离散且周期的，可以用一系列谐波分量的线性组合表征周期序列；

则周期序列的离散傅立叶级数为$\tilde{x}(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$，其中

$DFS[\tilde{x}(n)]=\tilde{X}(k)=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$ ；



周期、离散序列对应的频谱是离散、周期的，DFS将在第二模块进行具体介绍。

3.1.3.傅立叶变换的时、频域关系

■ **傅立叶变换的时、频域关系**

傅里叶变换指的是时间信号和频谱函数之间的变换关系。

名　称	时间函数	频率函数
傅里叶变换(FT / CFT)	连续时间，非周期	非周期，连续频谱
连续周期信号的傅里叶级数(CFS)	连续时间，周期	非周期，离散频谱
序列的连续时间傅里叶变换(DTFT)	离散时间，非周期	周期，连续频谱
周期序列的离散傅里叶级数(DFS)	离散时间，周期	周期，离散频谱

傅立叶变换的时域频域关系表明：

1. 若一个域为连续函数，则另一个域为非周期函数；若一个域为离散函数，则另一个域为周期函数；
2. 周期与采样间隔的关系：一个域的周期 = $\frac{2\pi}{\text{另一个域的取样间隔}}$。

3.2.周期序列的傅立叶变换DFS

3.2.1.离散傅立叶级数DFS

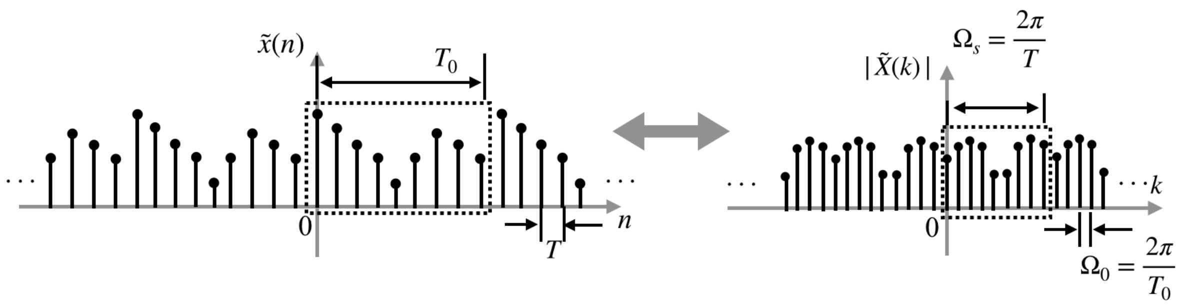
■ 离散傅立叶级数（DFS）——定义式

若已知周期序列$\tilde{x}(n)$，则周期序列的离散傅立叶级数变换为

$$\tilde{X}(k) = DFS[\tilde{x}(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk};$$

周期序列可表示为$\tilde{x}(n) = IDFS[\tilde{X}(k)] = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$;

称$\tilde{x}(n)$与$\tilde{Y}(k)$为一对离散傅立叶级数变换对，简记为$\tilde{x}(n) \Leftrightarrow \tilde{X}(k)$。



■ 离散傅立叶级数（DFS）——旋转因子的定义

将复数$e^{-j\frac{2\pi}{N}}$记为W_N，这个复数称为旋转因子，则离散傅立叶级数变换对可以进行如下代换：

$$\begin{cases} DFS[\tilde{x}(n)] = \tilde{X}(k) = \displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \\ IDFS[\tilde{X}(k)] = \tilde{x}(n) = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}nk} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} DFS[\tilde{x}(n)] = \tilde{X}(k) = \displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) W_N^{nk} \\ IDFS[\tilde{X}(k)] = \tilde{x}(n) = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) W_N^{nk} \end{cases}}$$

后续内容中我们一般都会用符号W_N来代替旋转因子$e^{-j\frac{2\pi}{N}}$。

■ **离散傅立叶级数（DFS）—— 旋转因子的性质**

旋转因子$e^{-j\frac{2\pi}{N}}=W_N$的性质：

①共轭对称性：$W_N^n=(W_N^{-n})^*$　$W_N^{-n}=e^{j\frac{2\pi}{N}\cdot n}\to(W_N^{-n})^*=(e^{j\frac{2\pi}{N}\cdot n})^*=e^{-j\frac{2\pi}{N}\cdot n}=W_N^n$

②可约性：$W_N^{in}=W_{N/i}^n$　$W_N^{in}=e^{-j\frac{2\pi}{N}\cdot in}\to e^{-j\frac{2\pi}{N/i}\cdot n}=W_{N/i}^n$

③周期性：$W_N^n=W_N^{n+iN}$

$W_N^{n+iN}=e^{-j\frac{2\pi}{N}\cdot(n+iN)}=e^{-j\frac{2\pi}{N}\cdot n}\cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}\cdot iN}=e^{-j\frac{2\pi}{N}\cdot n}\cdot e^{-j2\pi i}=e^{-j\frac{2\pi}{N}\cdot n}$

④正交性：$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}W_N^{nk}(W_N^{mk})^*=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}W_N^{(n-m)k}=\begin{cases}1, & n-m=iN\\0, & n-m\neq iN\end{cases}$

几个需要记忆的旋转因子系数：$W_N^0=1$，$W_N^N=1$，$W_N^{N/2}=-1$

3.2.2.变换间的关系

■ **DFS 与 z 变换、DTFT 的关系**

给定周期为 N 的周期序列$\tilde{x}(n)$，将其在第一个周期的序列记为$x(n)=\tilde{x}(n)R_N(n)$；

$x(n)$的 z 变换为$ZT[x(n)]=X(z)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)z^{-n}$；

$x(n)$的离散时间傅立叶正变换为$DTFT[x(n)]=X(e^{j\omega})=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\omega n}$；

$\tilde{x}(n)$的离散傅立叶级数变换为$DFS[\tilde{x}(n)]=\tilde{X}(k)=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$；

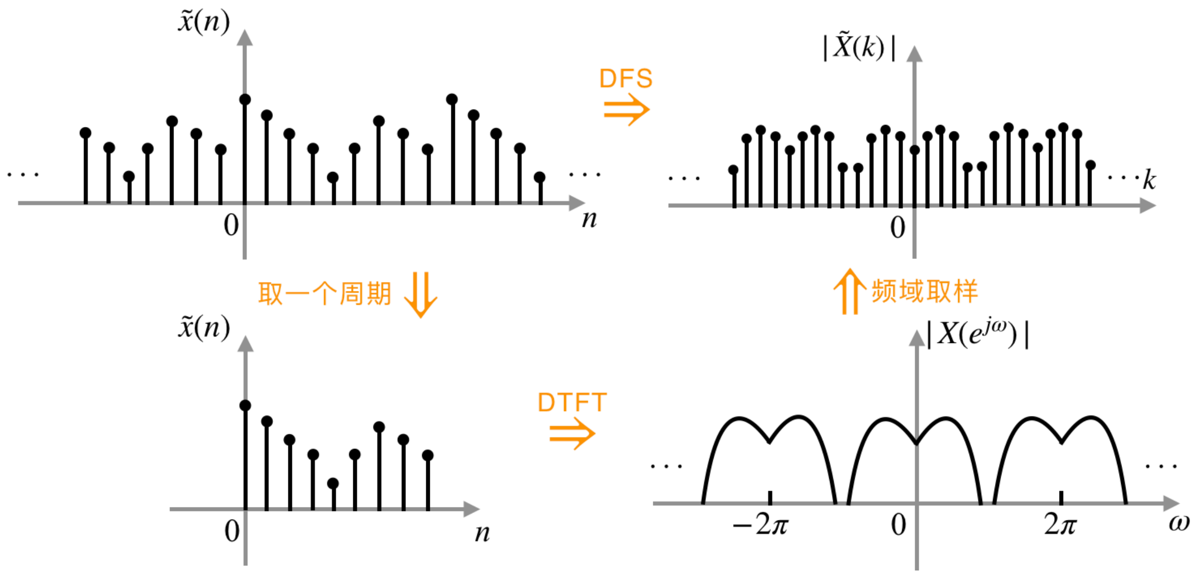
比较上述三式，可以得到z变换，DTFT与DFS之间的关系式：$\begin{cases}X(e^{j\omega})=X(z)\big|_{z=e^{j\omega}}\\\tilde{X}(k)=X(e^{j\omega})\big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}\\\tilde{X}(k)=X(z)\big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}}\end{cases}$

根据变换之间的关系式，$0\le k\le N-1$时，$\tilde{X}(k)$可视为对$\tilde{x}(n)$第一个周期内的序列$x(n)$取 z 变换后，将 z 变换在 z 平面单位圆上按间隔角度$\frac{2\pi}{N}$采样得到。

随着k的变化，$\tilde{X}(k)$在单位圆上呈现周期性变化。

DFS也可视为周期序列在一个周期内的有限序列DTFT在频域每个周期内的N点等间隔采样。

$$\tilde{x}(n) \overset{\text{取一个周期}}{\Rightarrow} x(n) \Rightarrow X(e^{j\omega}) \overset{\text{采样}}{\Rightarrow} \tilde{X}(k)$$



■ **例题3-1**

求序列$\tilde{x}(n)$的离散傅里叶级数$\tilde{X}(k)$，并讨论$\tilde{X}(k)$与$X(e^{j\omega})$的关系。

其中$\tilde{x}(n)$的一个周期为 $x(n) = \begin{cases} 1 & 0 \le n \le 4 \\ 0 & 5 \le n \le 9 \end{cases}$。

3.2.3.DFS的性质

DFS是周期离散序列的傅立叶变换，因此DFS具有一些可以类比CFT的性质。

■ **DFS 的性质 —— 线性性质**

给定两个周期均为N的序列$\tilde{x}_1(n)$，$\tilde{x}_2(n)$；

它们的离散傅立叶级数DFS分别为$\tilde{x}_1(n) \Leftrightarrow \tilde{X}_1(k)$，$\tilde{x}_2(n) \Leftrightarrow \tilde{X}_2(k)$；

则有$a\tilde{x}_1(n) + b\tilde{x}_2(n) \Leftrightarrow a\tilde{X}_1(k) + b\tilde{X}_2(k)$；

具有相同周期的序列的线性组合的DFS是它们对应的DFS的线性组合。

■ DFS 的性质 —— 移位性质

①时域移位性质：

给定周期为N的序列$\tilde{x}(n)$，它的离散傅立叶级数DFS为$\tilde{x}(n) \Leftrightarrow \tilde{X}(k)$；

则有$\tilde{x}(n+m) \Leftrightarrow \tilde{X}(k)e^{j\frac{2\pi}{N}km} = \tilde{X}(k)W_N^{-km}$。

周期序列时域移位，频域只会附加相位，幅度不会发生改变。

②频域移位性质（调制性质）：

给定周期为N的序列$\tilde{x}(n)$，它的离散傅立叶级数DFS为$\tilde{x}(n) \Leftrightarrow \tilde{X}(k)$；

则有$e^{-j\frac{2\pi}{N}nl}\tilde{x}(n) = W_N^{nl}\tilde{x}(n) \Leftrightarrow \tilde{X}(k+l)$。

周期序列时域调制，频域移位。

■ DFS 的性质 —— 对偶性质（互易性）

复习：连续时间信号傅立叶变换的对偶性质

给定连续信号$f(t)$，它的傅立叶变换为$F(j\Omega)$，则有$F(jt) \Leftrightarrow 2\pi f(-\Omega)$。

给定周期为N的序列$\tilde{x}(n)$，它的离散傅立叶级数DFS为$\tilde{x}(n) \Leftrightarrow \tilde{X}(k)$；

则有：$\tilde{X}(n) \Leftrightarrow N\tilde{x}(-k)$。

对偶性质表征了时域与频域函数通过一定的计算可以进行互换。

■ 周期卷积

给定两个周期均为N的序列$\tilde{x}_1(n)$，$\tilde{x}_2(n)$，

则对这两个序列在一个周期内进行卷积，则称为序列的周期卷积；

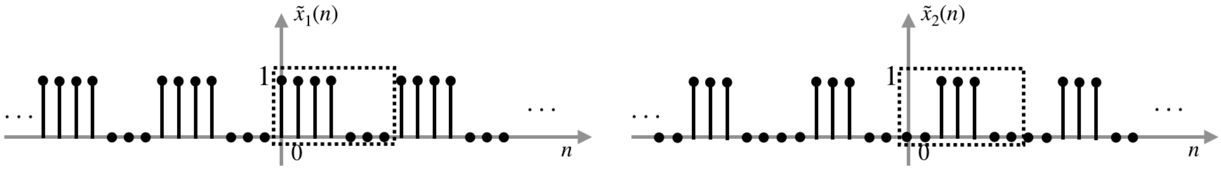
周期卷积的表达式为$\tilde{y}(n) = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1(m)\tilde{x}_2(n-m)$；

周期卷积的结果是一个周期序列，计算周期卷积时，只需在一个周期内进行反转后移位、累加求和，然后进行周期延拓即可。

步骤：变量置换，其中一个序列反转，移位，在$0 \sim N$-1范围内相乘，累加求和，周期延拓。

■ **例题3-2**

求解图示两周期序列的周期卷积。



■ **DFS 的性质 —— 周期卷积性质**

给定两个周期均为N的序列$\tilde{x}_1(n)$, $\tilde{x}_2(n)$,

它们的离散傅立叶级数DFS分别为$\tilde{x}_1(n) \ \Leftrightarrow \ \tilde{X}_1(k)$，$\tilde{x}_2(n) \ \Leftrightarrow \ \tilde{X}_2(k)$；

①时域卷积性质：

如果$\tilde{Y}(k) = \tilde{X}_1(k)\tilde{X}_2(k)$，那么$\tilde{y}(n) = IDFS[\tilde{X}_1(k)\tilde{X}_2(k)] = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1(m)\tilde{x}_2(n-m)$；

即频域内给定两个DFS的乘积，则时域内为两周期为N的序列的周期卷积。

②频域卷积性质

如果$\tilde{y}(n) = \tilde{x}_1(n)\tilde{x}_2(n)$，那么$\tilde{Y}(k) = DFS[\tilde{x}_1(n)\tilde{x}_2(n)] = \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} \tilde{X}_1(l)\tilde{x}_2(k-l)$；

即时域内给定两个周期为N的序列乘积，则频域内为DFS的周期卷积。

3.3.离散傅立叶变换DFT

3.3.1.离散傅立叶变换的定义

■ **DFT 的定义式**

给定一个长度为N的有限长序列 $x(n) = \begin{cases} x(n) & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & others \end{cases}$

离散傅立叶变换的正变换定义式为$DFT[x(n)] = X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk}$，$0 \le k \le N-1$

离散傅立叶变换的反变换定义式为$IDFT[X(k)] = x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-nk}$，

$0 \le n \le N-1$

■ **DFT 与DFS的联系**

符号约定：给定一个长度为N的有限长序列$x(n)$，给定一个周期为N的周期序列$\tilde{x}(n)$。

若 $x(n) = \begin{cases} \tilde{x}(n) & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & others \end{cases}$　　　$\tilde{x}(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(n+rN)$

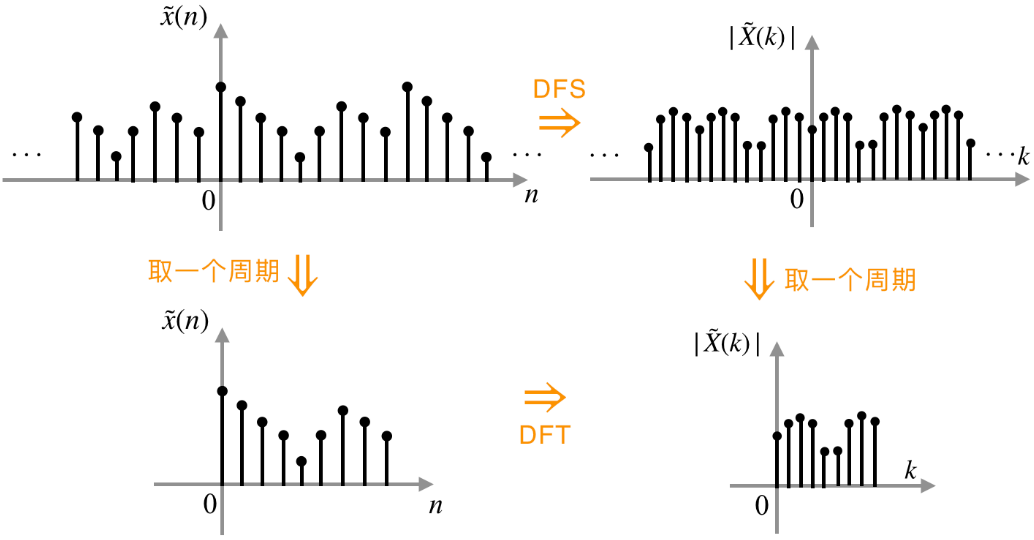
则称周期序列$\tilde{x}(n)$为有限长序列$x(n)$以N为周期的延拓，记为$\tilde{x}(n) = x((n))_N$ ；

有限长序列$x(n)$为周期序列$\tilde{x}(n)$取$0 \sim N$-1共N点的主值区间，记为$x(n) = \tilde{x}(n)R_N(n)$。

$$\begin{cases} DFS[\tilde{x}(n)] = \tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \\ IDFS[\tilde{X}(k)] = \tilde{x}(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k)e^{j\frac{2\pi}{N}nk} \end{cases} \xRightarrow{e^{-j\frac{2\pi}{N}} = W_N} \begin{cases} DFT[x(n)] = X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk} & 0 \le k \le N-1 \\ IDFT[X(k)] = x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-nk} & 0 \le n \le N-1 \end{cases}$$

因此，有限长序列的DFT可以视为周期序列在一个N点周期内的处理结果，即**隐含周期性质**。

■ **隐含周期性示意图**



3.3.2.DFT 与 z 变换、DTFT 的关系

■ DFT 与 z 变换、DTFT 的关系

给定长度为 N 的序列$x(n)$，

$x(n)$的 z 变换为$ZT[x(n)]=X(z)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)z^{-n}$；

$x(n)$的离散时间傅立叶正变换为$DTFT[x(n)]=X(e^{j\omega})=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\omega n}$；

$x(n)$的离散傅立叶变换为$DFT[x(n)]=X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$；

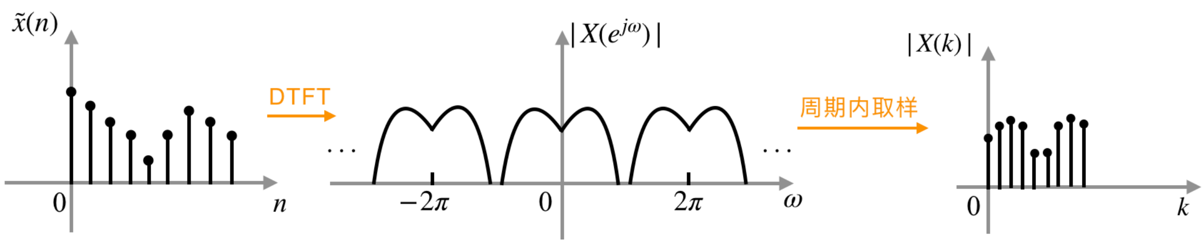
比较上述三式，可以得到 z 变换，DTFT与DFT之间的关系式：$\begin{cases} X(e^{j\omega})=X(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} \\ X(k)=X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} \\ X(k)=X(z)\Big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}} \end{cases}$

注意此时 k 的范围是$0\le k\le N-1$，这是与DFS最大的区别。

根据变换之间的关系式$X(k)$可视为对序列$x(n)$取 z 变换后，将z变换在z平面单位圆上按间隔角度$\dfrac{2\pi}{N}$采样得到。

此时**只在一个圆周内采样**，即须满足$0\le k\le N-1$。

DFT也可视为有限序列的DTFT只在频域第一个周期$[0,2\pi]$内的N点等间隔采样。



由此可见，变换点数N不同时，频谱的采样间隔和采样点数不同，序列的DFT结果也不同。

因此在作DFT变换时**必须注明点数**，一般称为“对序列作N点DFT”。

■ 例题3-3

求单位样值序列$\delta(n)$的N点DFT。

例题3-4

求序列$R_5(n)$的N点DFT，其中 $N=5$ 或 10。

3.3.3.离散傅立叶变换的性质

DFT 的性质 —— 线性性质

若两个有限长序列$x_1(n)$，$x_2(n)$的线性组合$x_3(n) = ax_1(n) + bx_2(n)$，

则$x_3(n)$的DFT为$X_1(k)$，$X_2(k)$的线性组合$X_3(k) = aX_1(k) + bX_2(k)$

若序列$x_1(n)$的长度为N_1，序列$x_2(n)$的长度为N_2

则$X_3(k)$的长度$N_3 = max[N_1, N_2]$，

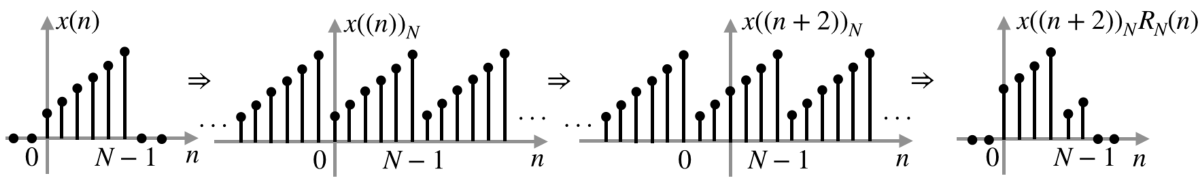
因此，$X_3(k)$必须做N_3长度的DFT，长度较短的序列需要补零值以达到N_3的长度。

DFT 的性质 —— 圆周移位性质

给定N长序列$x(n)$，其圆周移位定义为$x_m(n) = x((n+m))_N R_N(n)$，，序列经圆周移位后依然为$N$长序列。

圆周移位步骤是：周期延拓，线性移位，取主值区间。

$$x(n) \Rightarrow x((n))_N \Rightarrow x((n+m))_N \Rightarrow x((n+m))_N R_N(n)$$



圆周移位可视为有限长序列在主值区间内的变化。

若向左圆周移位，则最左边移出主值区间的样值加在主值区间的最右侧；

若向右圆周移位，则最右边移出主值区间的样值加在主值区间的最左侧。

①时域圆周移位性质

$$y(n) = x((n+m))_N R_N(n) \Leftrightarrow Y(k) = X(k)e^{j\frac{2\pi}{N}km} = X(k)W_N^{-km}$$

有限长序列的圆周移位，在离散频域中只引入线性相移，对频谱幅度没有影响。

②频域圆周移位性质（调制定理）

$$Y(k) = X((k+l))_N R_N(k) \Leftrightarrow y(n) = x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nl} = x(n)W_N^{nl}$$

时域序列的调制对应频域的圆周移位。

例题3-5

已知$x(n)=\{\underline{2},-1,0,1\}$，设$Y(k)=X(k)e^{j2\pi\frac{3}{5}k}$，其中，$X(k)$是$x(n)$的5点DFT，$Y(k)$是$y(n)$的5点DFT，试求$y(n)$。

例题3-6

已知$x(n)=\cos\left(\dfrac{n\pi}{6}\right)$是一个长度为12的有限长序列，试求其12点DFT$Y(k)$。

DFT 的性质 —— 圆周翻转序列的DFT

符号约定：给定N点序列$x(n)$，其圆周翻转序列定义为$x((-n))_N R_N(n)$

步骤：周期延拓，翻转，取主值区间。

圆周翻转序列可以简写为$x((N-n))_N R_N(n) \ \rightarrow\ x(N-n)$；

若$x(n) \ \Leftrightarrow\ X(k)$，则$x((-n))_N R_N(n) \ \Leftrightarrow\ X((-k))_N R_N(k)$，即可简写为

$DFT[x(N-n)]=X(N-k)$;

该性质表明：时域圆周翻转，频域圆周翻转。

DFT 的性质 —— 对偶性质

给定有限长序列$x(n)$，它的N点DFT为$X(k)$，

则有$X(n) \ \Leftrightarrow\ Nx((-k))_N R_N(k)=Nx((N-k))_N R_N(k)=Nx(N-k)$。

例：$\delta(n) \ \Longleftrightarrow\ R_N(k) \ \rightarrow\ R_N(n) \ \Longleftrightarrow\ N\delta(k)$

例题3-7

已知$x(n)=\{\underline{2},1,0,1,-1,0,4,3\}$，$X(k)$为$x(n)$的10点DFT。

试计算：(1) $X(0)$；　(2) $\sum_{n=0}^{9} X(k)$；　(3) $DFT[X(n)]$.

■ DFT 的性质 —— 圆周共轭对称性质

给定有限长序列$x(n)$，它可以分解为圆周共轭对称分量和圆周共轭反对称分量。

圆周共轭对称分量的表达式为

$$x_{ep}(n) = \frac{1}{2}[x((n))_N + x^*((N-n))_N]R_N(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(N-n)];$$

圆周共轭反对称分量的表达式为

$$x_{op}(n) = \frac{1}{2}[x((n))_N - x^*((N-n))_N]R_N(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(N-n)];$$

则有限长序列$x(n) = x_{ep}(n) + x_{op}(n)$。

圆周共轭（反）对称分量的点数与原序列相同，便于研究。

$x_{ep}(n) = x_{ep}*((N-n))_N R_N(n)$圆周共轭对称分量的特点：实部偶对称、虚部奇对称

$x_{op}(n) = -x_{op}*((N-n))_N R_N(n)$圆周共轭反对称分量的特点：实部奇对称、虚部偶对称

圆周共轭（反）对称分量与共轭（反）对称分量的关系：$x_{ep}(n) = x_e((n))_N R_N(n)$，

$x_{op}(n) = x_o((n))_N R_N(n)$

离散傅立叶变换$X(k)$也具有圆周共轭对称分量$X_{ep}(k)$与圆周共轭反对称分量$X_{op}(k)$，也具备上述性质。

例题3-8

已知$x(n) = \{\underline{2+j}, 4+2j, 3+3j\}$，试求$x_{ep}(n)$、$x_{op}(n)$。

例题3-9

已知$x(n)$的共轭对称分量$x_e(n) = \{1, 0, 0.5, \underline{2}, 0.5, 0, 1\}$，圆周共轭反对称分量$x_{op}(n) = \{\underline{0}, -0.5, 0, 0.5\}$，试求序列$x(n)$。

■ *DFT* 的性质 —— 圆周共轭对称性质：复数序列的*DFT*

$$\begin{array}{ccccccccc} x(n) & = & Re[x(n)] & + & j\cdot Im[x(n)] & = & x_{ep}(n) & + & x_{op}(n) \\ \Updownarrow & & \Updownarrow & & \Updownarrow & & \Updownarrow & & \Updownarrow \\ X(k) & = & X_{ep}(k) & + & X_{op}(k) & = & Re[X(k)] & + & j\cdot Im[X(k)] \end{array}$$

■ **例题3-10**

已知$x_1(n)$，$x_2(n)$都是N点实序列，$X_1(k)$ 为$x_1(n)$的N点DFT，$X_2(k)$为$x_2(n)$的N点DFT；试用一次N点DFT运算同时计算$X_1(k)$与$X_2(k)$。

■ **例题3-11**

已知$x(n)=\{\underline{1}\ ,2+j\ ,3-2j\}$，$X(k)$为$x(n)$的 3 点DFT，

$X(k)=\{\underline{6-j}\ ,1.1+1.4j\ ,\ -4.1-0.4j\}$，序列$y(n)$的DFT为$Y(k)=\{\underline{6}\ ,1.1\ ,4.1\}$，

序列$z(n)$的DFT为$Z(k)=\{\underline{-1}\ ,1.4\ ,0.4\}$，试求序列$y(n)$和$z(n)$。

■ **DFT 的性质 —— 圆周共轭对称性质：共轭对称性质**

$$x^*(n) \quad \Leftrightarrow \quad X^*((-k))_N R_N(k) = X^*((N-k))_N R_N(k) = X^*(N-k)$$

$$x^*((-n))_N R_N(n) = x^*((N-n))_N R_N(n) = x^*(N-n) \quad \Leftrightarrow \quad X^*(k)$$

时域共轭，频域圆周共轭反转；时域圆周共轭反转，频域共轭。

■ **DFT 的性质 —— 圆周共轭对称性质：虚实序列的DFT**

实序列的DFT，实部偶对称，虚部奇对称，满足$X(k)=X^*(N-k)$；

虚序列的DFT，实部奇对称，虚部偶对称，满足$X(k)=-X^*(N-k)$。

$$\begin{array}{ccccccccc} x(n) = & Re[x(n)] & + j\cdot & Im[x(n)] & = & x_{ep}(n) & + & x_{op}(n) \\ \Updownarrow & \Updownarrow & & \Updownarrow & & \Updownarrow & & \Updownarrow \\ X(k) = & X_{ep}(k) & + & X_{op}(k) & = & Re[X(k)] & + & j\cdot Im[X(k)] \end{array}$$

■ **DFT 的性质 —— 圆周共轭对称性质：圆周奇偶对称性质**

圆周偶对称序列的特点是$x(n)=x((N-n))_N R_N(n)$，即序列与圆周翻转序列相等；

圆周奇对称序列的特点是$x(n)=-x((N-n))_N R_N(n)$，即序列与圆周翻转序列互为相反数。

如$x(n)=\{\underline{1+j}\ ,2-j\ ,3+2j\ ,3+2j\ ,2-j\}$是圆周偶对称序列；

$x(n)=\{\underline{0}\ ,2-j\ ,3+2j\ ,\ -3-2j\ ,\ -2+j\}$是圆周奇对称序列。

圆周偶对称序列DFT圆周偶对称，即$x(n)=x(N-n) \quad \Longleftrightarrow \quad X(k)=X(N-k)$；

圆周奇对称序列DFT圆周奇对称，即$x(n)=-x(N-n) \quad \Longleftrightarrow \quad X(k)=-X(N-k)$。

■ **例题3-12**

已知序列$x(n)$的长度为5，其5点 DFT 为$X(k)=\{\underline{0}\ ,\ 1+4j\ ,\ 2+3j\ ,\ a\ ,\ b\}$；

(1)若$x(n)=x((-n))_5R_5(n)$，试求 a，b 的值；

(2)若$x(n)=x^*(n)$，试求 a，b 的值。

■ DFT 的性质 —— DFT 形式的帕塞瓦定理

DFT形式的帕塞瓦定理表达式为$\sum_{n=0}^{N-1}|x(n)|^2=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}|X(k)|^2$；

该定理表明：序列在时域内的能量与在频域内的能量相等。

■ **例题3-13**

已知$x(n)=\{\underline{1}\ ,2\ ,\ -3\ ,0\ ,C\ ,5\}$，其中 C 为未知常数，$X(k)$为$x(n)$的 6 点DFT。

(1)若频谱的直流分量为 0，试求 C 的值；

(2)若$\sum_{k=0}^{5}|X(k)|^2=288$，试求 C 的值。

■ DFT 的性质 —— 圆周卷积性质

给定N_1点序列$x_1(n)$，N_2点序列$x_2(n)$，

则定义两个序列的N点圆周卷积为：$x_1(n)\ Ⓝ\ x_2(n)=\sum_{m=0}^{N-1}x_1(m)x_2((n-m))_NR_N(n)$

算式中$x_2(n)$是圆周移位，故称此定义式为N点圆周卷积，记作 $x_1(n)\ Ⓝ\ x_2(n)$

圆周卷积的结果是一个N长有限序列，这是它与线性卷积和周期卷积本质的不同。

若参与圆周卷积的任一序列不足N点，则需在其尾部补零值至N点。

给定两个长度均为N 的序列$x_1(n)$，$x_2(n)$，

它们的离散傅立叶变换DFT分别为$x_1(n)\ \Leftrightarrow\ X_1(k)$，$x_2(n)\ \Leftrightarrow\ X_2(k)$；

①时域圆周卷积性质

$x_1(n)\ Ⓝ\ x_2(n)\quad\Leftrightarrow\quad X_1(k)X_2(k)$ 时域圆周卷积，频域相乘。

②频域圆周卷积性质

$x_1(n)x_2(n) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{N} X_1(k) Ⓝ X_2(k)$ 时域相乘，频域圆周卷积。

例题3-14

已知$x(n) = \delta(n) + 2\delta(n-1) + \delta(n-2) + 3\delta(n-3)$，$X(k)$为$x(n)$的 6 点DFT；

若序列$y(n)$的 6 点DFT为$Y(k) = X(k)e^{j\frac{\pi}{3}k}$，序列$z(n)$的 6 点DFT为$Z(k) = X(k)Y(k)$，试求$y(n)$与$z(n)$。

DFT 的性质 —— 圆周卷积和线性卷积、周期卷积

给定两个长度均为N的序列$x_1(n)$, $x_2(n)$，则它们的线性卷积、周期卷积、圆周卷积分别为

$$x_1(n) * x_2(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(m)x_2(n-m) = \sum_{n=0}^{N-1} x_1(m)x_2(n-m) \qquad \text{长度为}2N\text{-}1$$

$$\tilde{x}_1(n) * \tilde{x}_2(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1((m))_N x_2((n-m))_N = \sum_{n=0}^{N-1} x_1((m))_N x_2((n-m))_N \qquad \text{周期为}N$$

$$x_1(n) Ⓝ x_2(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m)x_2((n-m))_N R_N(n) \qquad \text{长度为}N$$

则圆周卷积、线性卷积、N点周期卷积三者的关系是：

线性卷积 $\xrightarrow{\text{以}N\text{为周期延拓}}$ 周期卷积 $\xrightarrow{\text{取}N\text{点主值区间}}$ 圆周卷积

因此，在求解两有限长序列的N点圆周卷积时，可以通过求线性卷积来进行转化。

给定N_1点序列$x_1(n)$，求两个序列的N点圆周卷积：

$N \geq N_1 + N_2 - 1$时，在周期延拓时没有样值混叠，故圆周卷积与线性卷积结果完全相同；

$N < N_1 + N_2 - 1$时，在周期延拓时会有样值混叠，故圆周卷积与线性卷积只有部分结果相同。

例题3-15

已知$x(n) = \delta(n) + 2\delta(n-5)$，$X(k)$为$x(n)$的10点DFT；$w(n) = R_7(n)$的10点DFT为$W(k)$；若10点序列$z(n)$的10点DFT为$Z(k) = X(k)W(k)$，试求序列$z(n)$。

例题3-16

已知序列$x(n)$的长度为$33(0 \le n \le 32)$，序列$y(n)$的长度为$36(0 \le n \le 35)$，

若序列$x(n)$的 64 点DFT为$X(k)$，序列$y(n)$的 64 点DFT为$Y(k)$，序列$z(n)$的 64 点DFT为

$Z(k) = X(k)Y(k)$；试求$z(n)$哪些点与$x(n) * y(n)$相同 。