z变换与离散时间傅立叶变换

数字信号处理第二讲讲义

2.1.离散时间傅立叶变换

2.1.1.定义和存在条件

■ **离散时间傅立叶变换（DTFT）的引入**

离散时间傅立叶变换的引入：

在分析信号的频谱，研究离散时间系统的频域特性以及信号通过系统后的频域的分析上，离散时间傅立叶变换即序列的傅立叶变换是主要的工具。

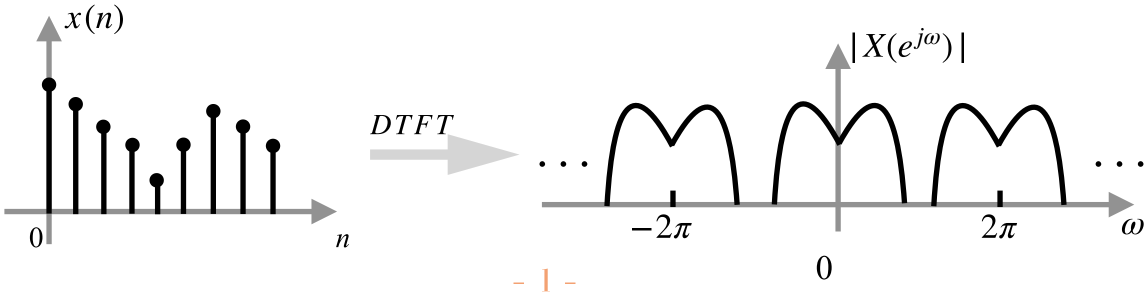
非周期性的信号，我们需要用无穷多不同频率的正弦曲线来表示，这对于计算机来说是不可能实现的。所以对于离散信号的变换只有离散时间傅里叶变换才能被适用，对于计算机来说只有离散的和有限长度的数据才能被处理。

■ **离散时间傅立叶变换（DTFT）的定义**

离散时间傅立叶变换的定义式：

给定非周期序列$x(n)$：
$$\begin{cases} X(e^{j\omega}) = DTFT[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega\cdot n} \\ x(n) = IDTFT[X(e^{j\omega})] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})\cdot e^{j\omega n}d\omega \end{cases}$$

$DTFT[x(n)] = X(e^{j\omega})$为$x(n)$的频谱密度，简称频谱。



■ 离散时间傅立叶变换（DTFT）的特点

$X(e^{j\omega})$的特点：

（1）$X(e^{j\omega})$为ω的连续函数：

$$X(e^{j\omega}) = DTFT[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega \cdot n};$$

（2）$X(e^{j\omega})$以2π为周期：

$$X(e^{j(\omega+2\pi)}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j(\omega+2\pi)\cdot n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega\cdot n} \cdot e^{-j2\pi n} = X(e^{j\omega})$$

$x(n)$与$X(e^{j\omega})$的之间的关系可以用四个字概括：非连周离

$x(n)$	$X(e^{j\omega})$
离散	周期
非周期	连续

■ 离散时间傅立叶变换（DTFT）的存在条件

定义式：$X(e^{j\omega}) = DTFT[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega\cdot n}$

傅立叶变换存在的前提条件：

（1）$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty$序列$x(n)$绝对可和，这是傅立叶变换存在的充分条件；

$$\because |X(e^{j\omega})| < \infty \qquad |X(e^{j\omega})| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| \cdot |e^{-j\omega\cdot n}| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty$$

（2）$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 < \infty$序列$x(n)$平方可和，说明该信号是能量有限信号。

2.1.2.常用序列的DTFT

■ 常用序列的DTFT

下表给出了一些常用序列的DTFT变换式：

$x(n)$	$X(e^{j\omega})$
$\delta(n)$	1
$\delta(n-n_0)$	$e^{-j\omega \cdot n_0}$
$R_N(n)$	$\dfrac{\sin(N\omega/2)}{\sin(\omega/2)} e^{-j(\frac{N-1}{2})\omega}$
$\dfrac{\sin \omega_c n}{\pi n}$	$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & \lvert\omega\rvert < \omega_c \\ 0 & \omega_c < \lvert\omega\rvert < \pi \end{cases}$ (理想低通滤波器)

例题2-1

计算以下序列的傅立叶变换。

(1) $x_1(n) = R_5(n)$

(2) $x_2(n) = \dfrac{\sin(\frac{3\pi}{5}n)}{n}$

2.1.3.DTFT的主要性质

■ DTFT的主要性质

（1）线性 $\quad ax(n) \pm by(n) \iff aX(e^{j\omega}) \pm bY(e^{j\omega})$

（2）时移性质 $\quad x(n-m) \iff e^{-j\omega m}X(e^{j\omega})$

（3）频移性质 $\quad e^{j\omega_0 n}x(n) \iff X(e^{j(\omega-\omega_0)})$

（4）时域卷积 $\quad x(n) * h(n) \iff X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$

（5）频域卷积 $\quad x(n) \cdot h(n) \iff \dfrac{1}{2\pi}X(e^{j\omega}) * H(e^{j\omega})$

（6）微分 $nx(n) \Longleftrightarrow j\dfrac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$

（7）帕塞瓦定理 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)|^2 = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|X(e^{j\omega})|^2 d\omega$

$$\left.\begin{array}{lll}（8）反转 & x(-n) \Longleftrightarrow X(e^{-j\omega}) \\ （9）共轭 & x^*(n) \Longleftrightarrow X^*(e^{-j\omega})\end{array}\right\} x^*(-n) \Longleftrightarrow X^*(e^{j\omega})$$

■ **例题2-2**

已知$x(n)$有傅立叶变换$X(e^{j\omega})$。利用傅立叶变换的性质，求以下序列的傅立叶变换。

(1) $x_1(n) = x(1-n) + x(-1-n)$

(2) $x_2(n) = x^*(-n) + x(n)$

(3) $y(n) = \cos(\omega_0 n) \cdot x(n)$

■ **例题2-3**

已知$x(n)$={-1,0,1,$\underline{2}$,1,0,1,2,1,0,-1}，它的傅立叶变换为$X(e^{j\omega})$。完成下列计算。

(1) $X(e^{j0})$ (2) $\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})d\omega$ (3) $\int_{-\pi}^{\pi}|X(e^{j\omega})|^2 d\omega$ (4) $\int_{-\pi}^{\pi}\left|\dfrac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}\right|^2 d\omega$

2.1.4.DTFT的对称性质

■ **DTFT的对称性质**

共轭对称序列：$x_e(n)$ $x_e(n) = x_e^*(-n)$ 实部偶对称，虚部奇对称

共轭反对称序列：$x_o(n)$ $x_o(n) = -x_o^*(-n)$ 实部奇对称，虚部偶对称

例：$x_e(n) = (1-j, 2+j, \underline{1}, 2-j, 1+j)$

$x_o(n) = (-1-j, -2+j, \underline{1}, 2+j, 1-j)$

对实序列而言，有如下特性：

（1）共轭对称序列：$x_e(n) = x_e(-n)$ 偶对称

（2）共轭反对称序列：$x_o(n) = -x_o(-n)$ 奇对称

任意信号$f(t)$都可以分为偶分量和奇分量：$f(t) = f_e(t) + f_o(t)$

类似的，任意序列$x(n)$总可以表示为共轭对称序列和共轭反对称序列的和:

$x(n) = x_e(n) + x_o(n)$。

利用共轭性质：$x^*(-n) = x_e^*(-n) + x_o^*(-n)$，$x^*(-n) = x_e(n) - x_o(n)$；

可以推导得到共轭对称序列、共轭反对称序列的计算式：

$$x_e(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(-n)]$$

$$x_o(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(-n)]$$

同理，对于序列的傅立叶变换，也有该性质：

$$X(e^{j\omega}) = X_e(e^{j\omega}) + X_o(e^{j\omega}) \rightarrow \begin{cases} X_e(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}[X(e^{j\omega}) + X^*(e^{-j\omega})] \\ X_o(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}[X(e^{j\omega}) - X^*(e^{-j\omega})] \end{cases}$$

根据DTFT的共轭性质，结合共轭（反）对称性质：

$$x(n) \iff X(e^{j\omega})$$

$$x^*(n) \iff X^*(e^{-j\omega})$$

$$x^*(-n) \iff X^*(e^{j\omega})$$

可以得到以下对应关系：

$$x_e(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(-n)] \iff Re[X(e^{j\omega})]$$

$$x_o(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(-n)] \iff jIm[X(e^{j\omega})]$$

$$\begin{array}{ccccccccc} x(n) & = & Re[x(n)] & + & jIm[x(n)] & = & x_e(n) & + & x_o(n) \\ \Updownarrow & & \Updownarrow & & \Updownarrow & & \Updownarrow & & \Updownarrow \\ X(e^{j\omega}) & = & X_e(e^{j\omega}) & + & X_o(e^{j\omega}) & = & Re[X(e^{j\omega})] & + & j \cdot Im[X(e^{j\omega})] \end{array}$$

例题2-4

求$x(n)$的共轭对称序列和共轭反对称序列。

$x(n)=\{\underline{1+j}\,,2-j\,,3+2j\,\}$

例题2-5

已知$x(n)=R_4(n)$的DTFT为$X(e^{j\omega})$，求IDTFT$[X_e(e^{j\omega})]$和IDTFT$\{Re[X(e^{j\omega})]\}$。

2.2.拉普拉斯变换、z变换和傅立叶变换之间的关系

2.2.1.三种变换间的关系

z变换、拉普拉斯变换和傅立叶变换DTFT的关系

$$
\begin{tikzcd}
\text{连续时间信号}x_a(t) & \text{拉普拉斯变换}X_a(s) \arrow[r, "X_a(j\Omega)=X_a(s)|_{s=j\Omega}"] \arrow[d, "\text{采样}"'] & \text{傅立叶变换}X_a(j\Omega) \arrow[d, "\text{周期延拓}"] \\
\text{采样信号}\hat{x}_a(t) & \text{拉普拉斯变换}\hat{X}_a(s) \arrow[r, "\hat{X}_a(j\Omega)=\hat{X}_a(s)|_{s=j\Omega}"] \arrow[d, "z=e^{sT}"'] & \text{傅立叶变换}\hat{X}_a(j\Omega) \arrow[d, "\text{周期延拓}"] \\
\text{序列}x(n) & \text{z变换 }X(z) \arrow[r, "X(e^{j\omega})=X(z)|_{z=e^{j\omega}}"] & \text{傅立叶变换}X(e^{j\omega})
\end{tikzcd}
$$

连续信号的傅立叶变换是虚轴上的拉普拉斯变换，即：$X_a(j\Omega)=X_a(s)|_{s=j\Omega}$。

序列的傅立叶变换是单位圆上的z变换，即：$X(e^{j\omega})=X(z)|_{z=e^{j\omega}}$

$z=e^{sT}$时，采样序列的z变换就等于理想采样信号的拉普拉斯变换，即：

$X(z)|_{z=e^{sT}}=X(e^{sT})=\hat{X}_a(s)$。

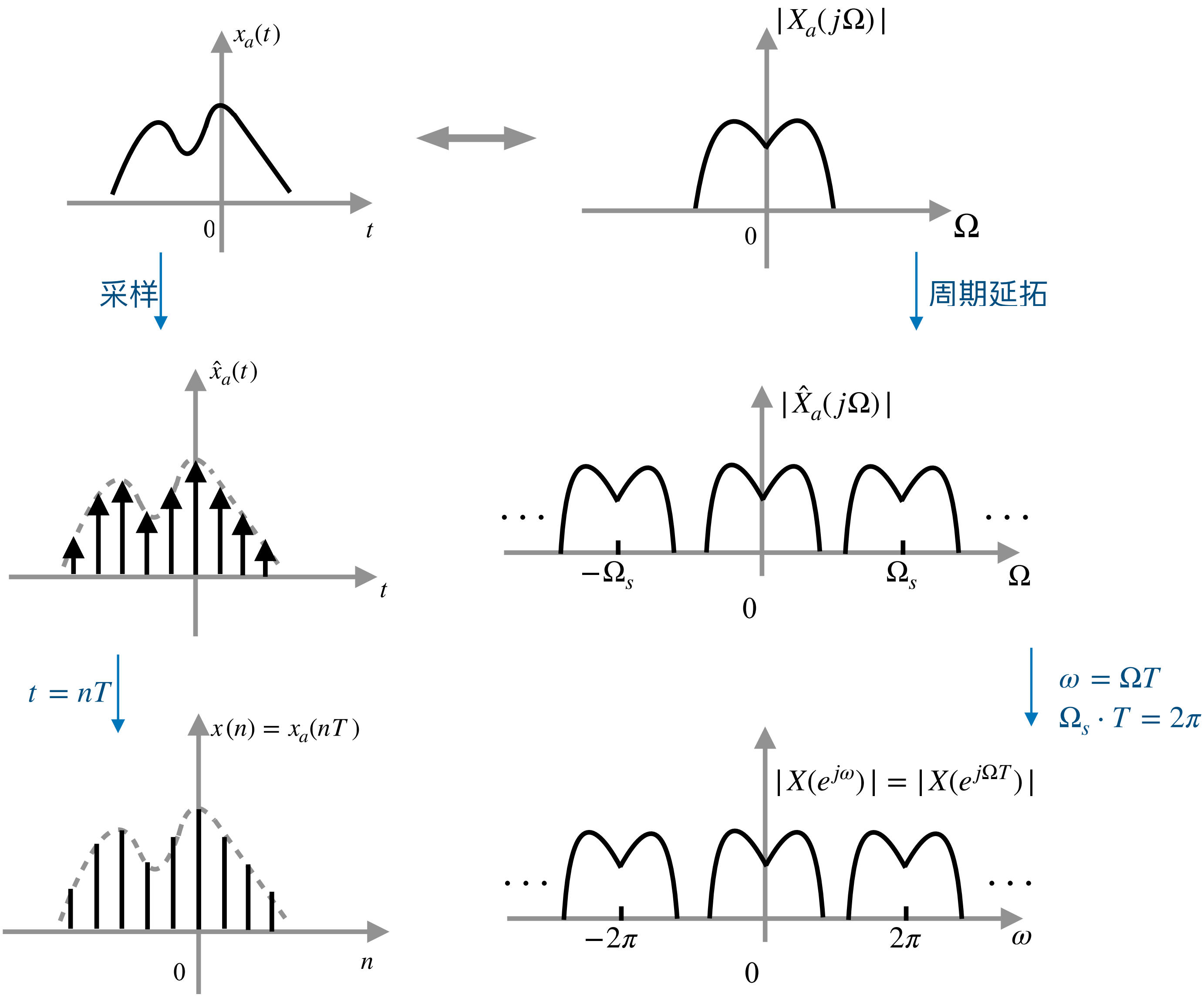
■ **例题2-6**

求以下序列的DTFT。

(1) $e^{-an}u(n)$　(2) $4\delta(n+3)+2\delta(n)+3\delta(n-3)$

2.2.2.抽样时频域的变化

■ **抽样时频域的变化**



2.3.离散系统的表示

2.3.1.离散系统的因果性与稳定性

■ 离散系统的因果性与稳定性——离散系统的表示方法

离散系统的表示方法:

(1) 单位序列响应$h(n)$ $y(n) = x(n) * h(x)$ 时域描述

(2) 常系数线性差分方程 $y(n) = \sum_{m=0}^{M} b_m x(n-m) - \sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k)$ 时域描述

(3) 系统函数$H(z)$ $H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) z^{-n}$ 复频域描述,此外还有零、极点图

(4) 频率响应$H(e^{j\omega})$ $H(e^{j\omega}) = H(z)|_{z=e^{j\omega}}$ 频域描述

因果系统:系统的输出不发生在输入之前的系统。

从时域判断:$h(n) = 0 \quad n < 0$

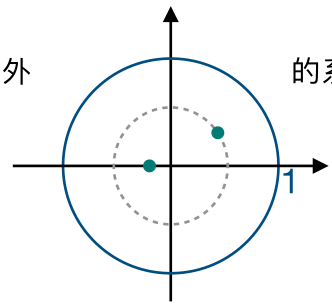
从变换域判断:$H(z)$收敛域在圆外,即$|z| > \rho_0$。 极点在收敛圆内部

稳定系统:有界输入产生有界输出的系统。

从时域判断:$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = P < \infty$ 单位冲激响应绝对可和

从变换域判断:$H(z)$收敛域包含单位圆。

因果稳定系统:$H(z)$全部极点都在单位圆内,且收敛域在收敛圆外的系统。



2.3.2.离散系统与差分方程的关系

■ 离散系统与差分方程的关系

由系统的差分方程可以写出系统函数$H(z)$，其中，$H(z)=\dfrac{Y_{ZS}(z)}{E(z)}$

例：$y(n)+4y(n-1)+3y(n-2)=e(n)-3e(n-1)$

$$Y(z)[1\cdot z^0+4\cdot z^{-1}+3\cdot z^{-2}]=E(z)[1\cdot z^0-3\cdot z^{-1}]$$

$$H(z)=\frac{Y_{ZS}(z)}{E(z)}=\frac{1-3z^{-1}}{1+4z^{-1}+3z^{-2}}=\frac{z^2-3z}{z^2+4z+3}$$

由系统函数写出系统的差分方程，过程相反。

■ 例题2-7

已知线性移不变离散系统$y(n-1)-\dfrac{10}{3}y(n)+y(n+1)=x(n)$。已知系统是稳定的。

（1）求系统函数；　　（2）确定其收敛域；　　（3）求单位冲激序列。