设计FIR滤波器

数字信号处理第八讲讲义

8.1.线性相位FIR滤波器

8.1.1.线性相位FIR的定义和特点

■ **FIR的系统函数和频率响应**

FIR滤波器的单位冲激响应$h(n)$为有限长序列，滤波器的一般形式为

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)x(n-k)。$$

其系统函数一般形式为：$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n}$。

在有限 z 平面内，有$N-1$个零点，在原点$z=0$处有$N-1$阶极点。

系统的频率响应为：

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n} = |H(e^{j\omega})|e^{-j\varphi(\omega)} = \pm|H(e^{j\omega})|e^{j\theta(\omega)} = H(\omega)e^{j\theta(\omega)}$$

$\theta(\omega)$表示相位特性；

$|H(e^{j\omega})|$为幅频响应函数，总为正数，与之对应的相频特性是非连续函数；

$H(\omega)$称为幅度响应函数，是实函数，可以为正也可以为负，与之对应的相频特性是连续函数。

■ **线性相位**

线性相位的定义：滤波器对不同频率的正弦波所产生的相移和正弦波的频率具有线性关系。

这意味着：相位特性$\theta(\omega)$是频率ω的线性函数。

线性相位分为两类：

1.第一类线性相位：$\theta(\omega) = -\tau\omega$

2.第二类线性相位：$\theta(\omega) = \beta - \tau\omega$

显然，两者的群延时 $-\dfrac{d\theta(\omega)}{d\omega} = \tau$，为常数。

可以证明：

$h(n) = h(N-1-n)$ 是FIR滤波器具有第一类线性相位的充要条件；

$h(n) = -h(N-1-n)$ 是FIR滤波器具有第二类线性相位的充要条件。

8.1.2.FIR滤波器的幅度函数

■ 幅度函数的定义

FIR滤波器的系统函数一般形式为：$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n}$。

整理后可以得到：$H(z)\big|_{z=e^{j\omega}} = H(e^{j\omega}) = H(\omega)e^{j\theta(\omega)}$。

$H(\omega)$为幅度响应函数，简称幅度函数。

■ 线性相位FIR滤波器的幅度函数

对于线性相位的FIR滤波器，其单位冲激响应满足：$h(n) = \pm h(N-1-n)$

那么线性相位的FIR滤波器的系统函数有：取$m = N-1-n$

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} [\pm h(N-1-n)]z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} [\pm h(m)]z^{-(N-1-m)} = \pm z^{-(N-1)} \sum_{m=0}^{N-1} h(m)z^{m}$$

即：$H(z) = \pm z^{-(N-1)}H(z^{-1})$

1.当单位冲激响应$h(n)$为偶对称时：$h(n)=h(N-1-n)$

$$H(e^{j\omega})=H(z)|_{z=e^{j\omega}}=e^{-j(\frac{N-1}{2})\omega}\sum_{n=0}^{N-1}h(n)\cos[(\frac{N-1}{2}-n)\omega]=H(\omega)e^{j\theta(\omega)}$$

幅度函数：$H(\omega)=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)\cos[(\frac{N-1}{2}-n)\omega]$

相位特性：$\theta(\omega)=-(\frac{N-1}{2})\omega$ 满足第一类线性相位条件

群延时：$-\frac{d\theta(\omega)}{d\omega}=\tau=\frac{N-1}{2}$

2.当单位冲激响应$h(n)$为奇对称时：$h(n)=-h(N-1-n)$

同理，$H(e^{j\omega})=H(z)|_{z=e^{j\omega}}=j\cdot e^{-j(\frac{N-1}{2})\omega}\sum_{n=0}^{N-1}h(n)\sin[(\frac{N-1}{2}-n)\omega]=H(\omega)e^{j\theta(\omega)}$

幅度函数：$H(\omega)=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)\sin[(\frac{N-1}{2}-n)\omega]$

相位特性：$\theta(\omega)=\frac{\pi}{2}-(\frac{N-1}{2})\omega$ 满足第二类线性相位条件

群延时：$-\frac{d\theta(\omega)}{d\omega}=\tau=\frac{N-1}{2}$

■ **幅度函数的特点**

研究线性相位FIR滤波器幅度函数的特点时，有两种分类方法：

1.根据$h(n)$的奇、偶对称性分类；

2.根据N的长度为奇、偶数分类；

下面分别讨论单位冲激响应奇对称、偶对称时幅度函数的特点。

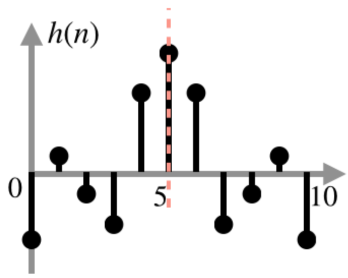
1.先看$h(n)$为偶对称时的情况：

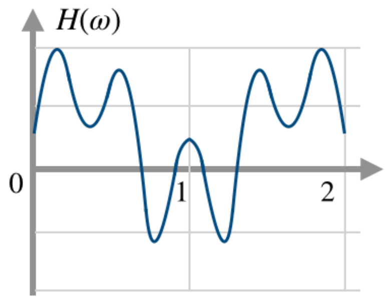
$$H(\omega)=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)\cos[(\frac{N-1}{2}-n)\omega] \qquad \theta(\omega)=-(\frac{N-1}{2})\omega$$

1）$h(n)$为偶对称，N为奇数

$$H(\omega)=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)\cos[(\frac{N-1}{2}-n)\omega]=\sum_{n=0}^{(N-1)/2}a(n)\cos(\omega n)$$

$$a(0)=h(\frac{N-1}{2}) \quad a(n)=2h(\frac{N-1}{2}-n) \quad n=1,2\ldots,\frac{N-1}{2}$$





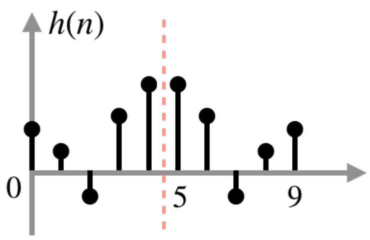
因为$\cos(n\omega)$ 关于$\omega=0$，π，2π 偶对称，所以$H(\omega)$也是关于$\omega=0$，π，2π 偶对称。

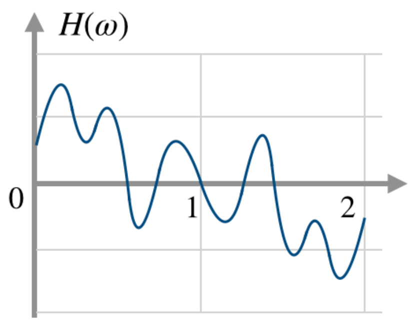
这种类型的$h(n)$，可以设计低通、高通、带通、带阻滤波器。

2）$h(n)$为偶对称，N为偶数

$$H(\omega)=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)\cos[(\frac{N-1}{2}-n)\omega]=\sum_{n=1}^{N/2}b(n)\cos[\omega(n-\frac{1}{2})]$$

$$b(n)=2h(\frac{N}{2}-n) \qquad n=1,2\ldots,\frac{N}{2}$$





因为$H(\omega)|_{\omega=\pi}=0$，图形关于$\omega=\pi$奇对称，

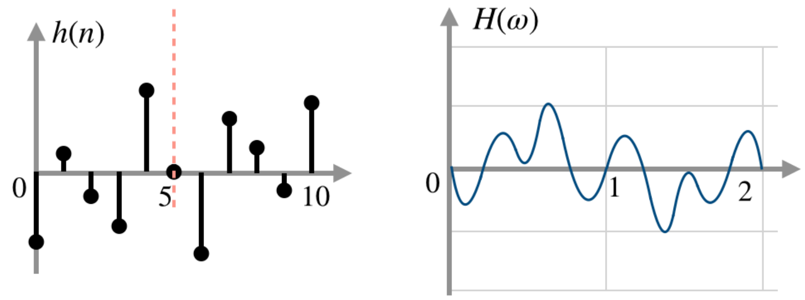
这种类型的$h(n)$，可以设计低通、带通滤波器。

2.$h(n)$为奇对称时：$H(\omega)=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)\sin[(\frac{N-1}{2}-n)\omega]$ $\quad\theta(\omega)=\frac{\pi}{2}-(\frac{N-1}{2})\omega$

1）$h(n)$为奇对称，N为奇数

$$H(\omega)=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)\sin[(\frac{N-1}{2}-n)\omega]=\sum_{n=1}^{(N-1)/2}c(n)\sin(\omega n)$$

$$c(n)=2h(\frac{N-1}{2}-n) \qquad n=1,2\ldots,\frac{N-1}{2}$$



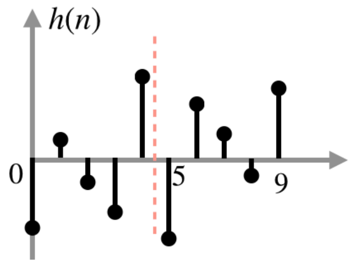
图形关于$\omega=0$，π，2π奇对称，且$H(\omega)|_{\omega=0,\pi,2\pi}=0$，

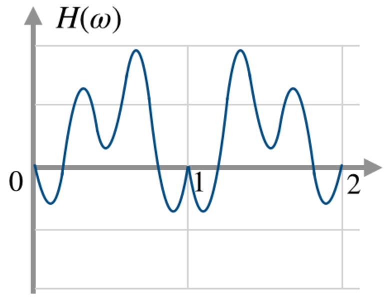
这种类型的$h(n)$，可设计带通滤波器。

2）$h(n)$为奇对称，N为偶数

$$H(\omega)=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)\sin[(\frac{N-1}{2}-n)\omega]=\sum_{n=1}^{N/2}d(n)\sin[\omega(n-\frac{1}{2})]$$

$$d(n)=2h(\frac{N}{2}-n) \quad n=1,2\ldots,\frac{N}{2}$$





图形关于$\omega=0$，π，2π 偶对称，且$H(\omega)|_{\omega=0,\pi,2\pi}=0$,

这种类型的$h(n)$，可以设计高通、带通和带阻滤波器。

小结：

单位冲激响应	奇偶对称性	N的奇偶性	幅度函数的特点	用途
$h(n)$	偶对称	N为奇数	关于 $\omega=0$，π，2π 偶对称；	可设计低通、高通、带通、带阻滤波器
	偶对称	N为偶数	关于 $\omega=\pi$ 奇对称，且 $H(\omega)|_{\omega=\pi}=0$；	可设计低通、带通滤波器
	奇对称	N为奇数	关于 $\omega=0$，π，2π 奇对称，且 $H(\omega)|_{\omega=0,\pi,2\pi}=0$；	只可用于设计带通滤波器
	奇对称	N为偶数	关于 $\omega=0$，π，2π 偶对称，且 $H(\omega)|_{\omega=0,\pi,2\pi}=0$；	可设计高通、带通、带阻滤波器

8.1.3.FIR滤波器的零点

■ 线性相位FIR滤波器的零点

线性相位的FIR滤波器的系统函数有：$H(z)=\pm z^{-(N-1)}H(z^{-1})$

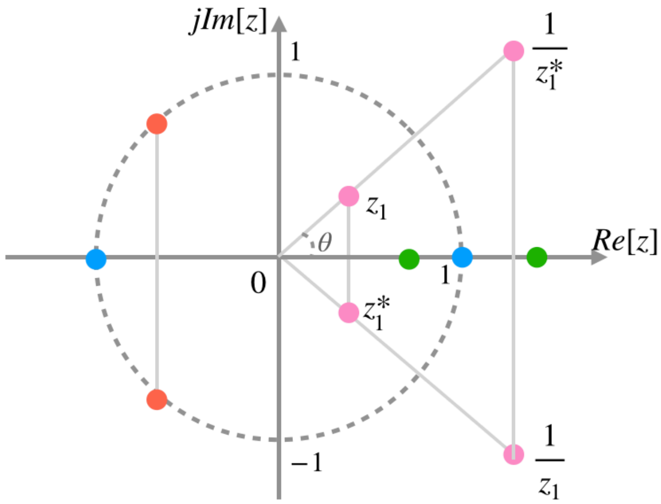
如果 $H(z)$ 存在零点$z=z_1=re^{j\theta}$，则一定存在零点$z=\dfrac{1}{z_1}=\dfrac{1}{re^{j\theta}}=\dfrac{1}{r}e^{-j\theta}$ ；

又因为$h(n)$为实数序列，故$H(z)$的零点必然是以共轭对存在的，

即存在共轭零点：$z=z_1^*=re^{-j\theta}$，$z=\dfrac{1}{z_1^*}=\dfrac{1}{r}e^{j\theta}$；

因此，线性相位FIR滤波器的零点一般以四点一组的形式存在：z_1，$z_1{}^*$，$\dfrac{1}{z_1}$，$(\dfrac{1}{z_1})^*$。

假设$z_1=re^{j\theta}$，k为常数。根据 r 和 θ 的取值，零点组可以分为以下四种情况：



■ **例题8-1**

一个线性相位FIR滤波器的单位冲激响应是实数的序列，如果$h(0)=1$且系统函数在 $z=0.5e^{j\pi/3}$ 和 $z=3$ 各有一个零点，$H(z)$ 的表达式应该为什么？

■ **例题8-2**

一个FIR滤波器的系统函数为$H(z)=(1+0.7z^{-1}+0.1z^{-2})^2$，求具有相同幅频特性的线性相位滤波器$H_2(z)$。

8.2.窗函数设计法

8.2.1.窗函数设计原理

■ 窗函数的定义

给定理想低通滤波器，它的频率响应$H_d(e^{j\omega})$应该是分段恒定的，在边界频率处有突变点，

由时频域的对应关系，理想滤波器的单位冲激响应 $h_d(n)$应该是无限长的非因果序列。

这在实际生活中无法实现，只能用有限长的序列 $h(n)$去近似无限长的 $h_d(n)$。

最简单的方法就是直接截取 $h_d(n)$的一部分作为$h(n)$。

这种截断可以看作是通过一个“窗口”观看 $h_d(n)$，得到$h(n)$。

因此，$h_d(n)$可以表示成 $h(n)$ 与一个「窗函数」相乘的形式：

$$h(n) = h_d(n) \cdot w(n) \quad 0 \le n \le N-1$$

■ 窗函数的设计思路

窗函数的设计思路：

$$H_d(e^{j\omega}) \longrightarrow h_d(n) \longrightarrow h_d(n) \cdot w(n) \longrightarrow h(n) \longrightarrow H(e^{j\omega})$$

以理想低通滤波器为例：

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 \cdot e^{-j\alpha\omega}, & |\omega| \le \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| \le \pi \end{cases} \iff h_d(n) = IDTFT[H_d(e^{j\omega})] = \frac{\omega_c}{\pi}\frac{\sin[\omega_c(n-\alpha)]}{\omega_c(n-\alpha)} = \frac{\sin[\omega_c(n-\alpha)]}{\pi(n-\alpha)}$$

$h_d(n)$是一个无限长的以 α 为中心的偶对称非因果序列。

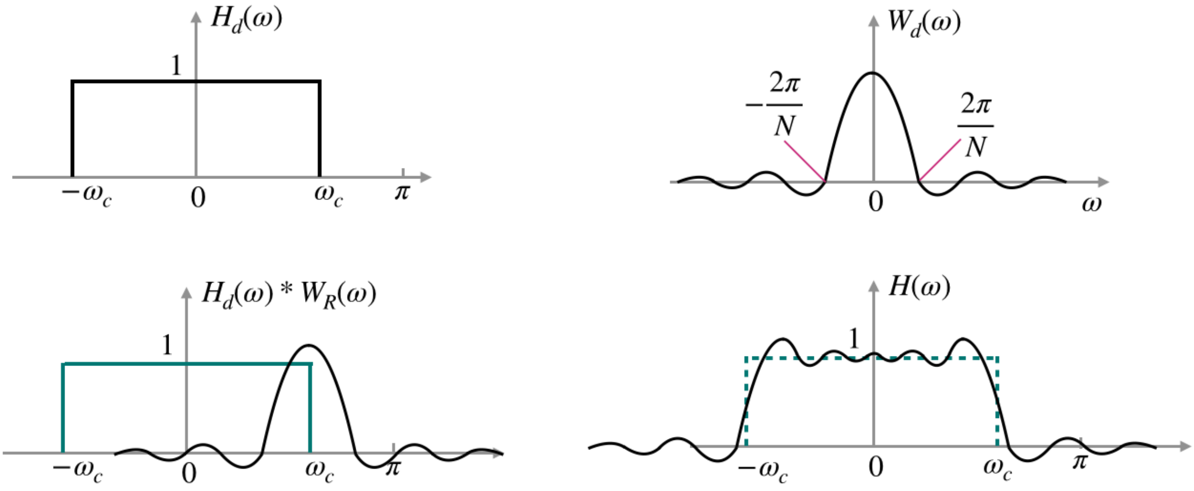
$$h_d(n) = IDTFT[H_d(e^{j\omega})] = \frac{\sin[\omega_c(n-\alpha)]}{\pi(n-\alpha)} \iff H_d(\omega)$$

假设此处窗函数为矩形函数： $w(n) = R_N(n) \iff W_R(\omega) = \dfrac{\sin(\frac{\omega N}{2})}{\sin(\frac{\omega}{2})}$

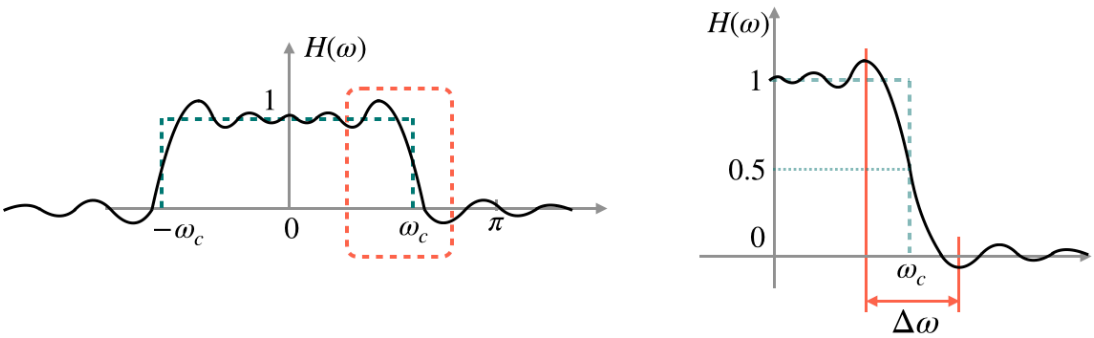
可得

$$h(n) = h_d(n) \cdot w(n) = \begin{cases} h_d(n) & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$$\iff H(\omega) = H_d(\omega) * W_R(\omega)$$



可以看到，时域加窗处理后，时域截断，频域出现了频谱泄漏现象。



加窗处理对理想频率响应的影响：

1）加窗改变了理想频响的边沿特性，形成了过渡带。

过渡带的宽度等于窗函数的主瓣宽度：$\Delta\omega = \dfrac{4\pi}{N}$

2）过渡带两侧产生肩峰和余振，这些取决于窗函数的旁瓣。旁瓣多则震荡多，旁瓣相对值大则肩峰强度大，与N无关。

3）改变N，只能改变窗函数主瓣的宽度，不能改变窗函数主瓣和旁瓣的比例关系。也就是说，无法改变肩峰的相对值。增大N，其最大肩峰总为8.95%，称为吉布斯现象。

肩峰的大小决定了滤波器通带内的平稳程度和阻带内的衰减速度，对滤波器的性能有很大影响。因此，选择不同的窗函数，可以得到不同的性能的滤波器。

■ **窗函数的选择**

窗函数的选取要满足下面两点要求：

1）窗函数的主瓣要尽可能窄，以获得较陡的过渡带；

2）相对于主瓣幅度，旁瓣要尽可能小，使得能量尽量集中在主瓣中，这样就可以尽量减少肩峰和余振，以提高阻带的衰减和通带的平稳性。

然而实际上这两个要求不可兼得。一般总是通过增加主瓣宽度来换取对旁瓣的抑制。

窗函数不仅起截断作用，还能起平滑作用。

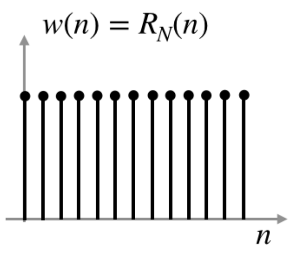
8.2.2.常用窗函数

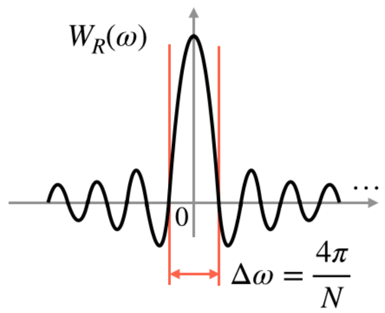
■ **常用窗函数**

1.矩形窗 $w(n) = R_N(n)$

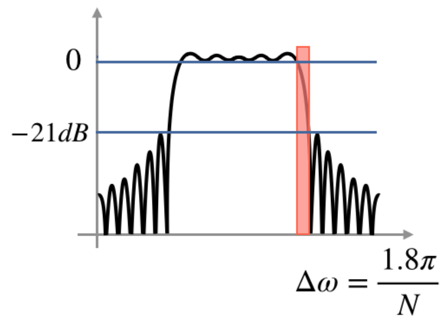
矩形窗是最简单的窗函数；从阻带衰减特性来看，性能最差；

矩形窗的主瓣宽度为：$\Delta\omega = \dfrac{4\pi}{N}$　　　其幅度函数为：$W_R(\omega) = \dfrac{\sin(\frac{\omega N}{2})}{\sin(\frac{\omega}{2})}$





加窗后，滤波器的性能



加窗之后的滤波器性能指标主要有两个：

1）阻带最小衰减：表示阻碍阻带的能力的高低。

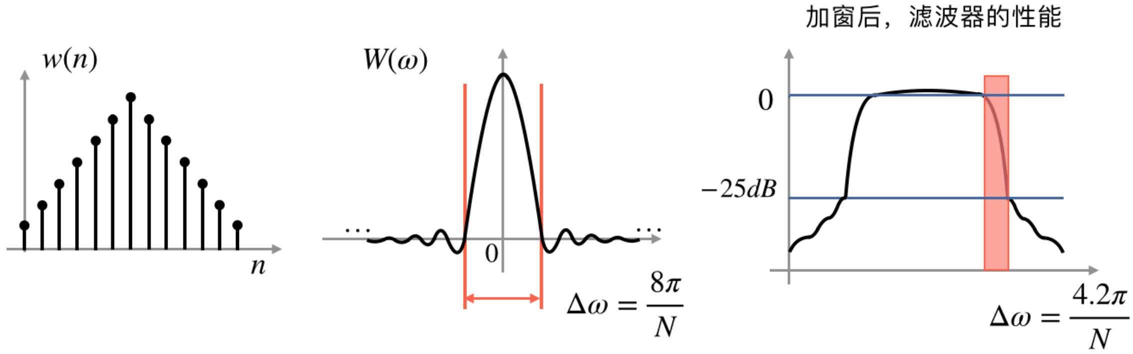
2）过渡带宽：$\Delta\omega$

过渡带宽也就是指标中阻带截止频率与通带截止频率的差值，即$\Delta\omega = |\omega_{st} - \omega_p|$。

2.三角窗（巴特列特窗）

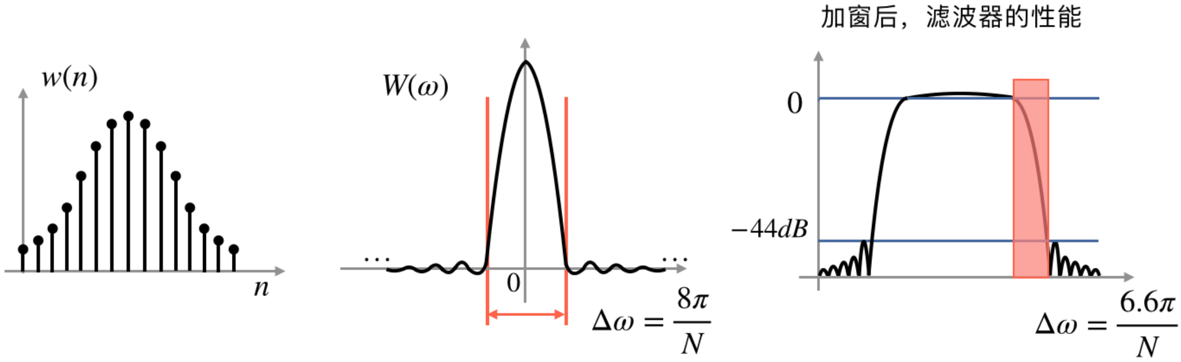
窗函数： $w(n)=\begin{cases}\dfrac{2n}{N-1}, & 0\le n\le \dfrac{N-1}{2}\\ 2-\dfrac{2n}{N-1}, & \dfrac{N-1}{2}<n\le N-1\end{cases}$

幅度函数为：$W(\omega)=\dfrac{2}{N}\dfrac{\sin(\frac{\omega N}{4})}{\sin(\frac{\omega}{2})}$



3.汉宁窗（升余弦窗）

窗函数：$w(n)=\dfrac{1}{2}[1-\cos(\dfrac{2\pi n}{N-1})]R_N(n)$



常用窗函数小结：

窗函数	窗函数性能指标		加窗后滤波器性能	
	旁瓣峰值	主瓣宽度	过渡带宽度	阻带最小衰减
矩形窗	$-13dB$	$\frac{4\pi}{N}$	$\frac{1.8\pi}{N}$	$-21dB$
三角窗	$-25dB$	$\frac{8\pi}{N}$	$\frac{4.2\pi}{N}$	$-25dB$
汉宁窗	$-31dB$	$\frac{8\pi}{N}$	$\frac{6.2\pi}{N}$	$-44dB$
海明窗	$-41dB$	$\frac{8\pi}{N}$	$\frac{6.6\pi}{N}$	$-53dB$
布莱克曼窗	$-57dB$	$\frac{12\pi}{N}$	$\frac{11\pi}{N}$	$-74dB$

阻带衰减只与窗函数形状有关；

过渡带宽度与窗函数形状和阶数N有关，N增大，宽度减少。

8.2.3.窗函数设计法的设计步骤

■ **窗函数法的设计步骤**

$$H_d(e^{j\omega}) \longrightarrow h_d(n) \longrightarrow h_d(n)\cdot w(n) \longrightarrow h(n) \longrightarrow H(e^{j\omega})$$

1）给定所要求的理想频率$H_d(e^{j\omega})$和技术指标；

2）计算得到理想频率响应对应的单位冲激响应$h_d(n)$；

3）根据**阻带衰减**选定窗函数，根据**过渡带宽度**$\Delta\omega$ 确定N 值。

4）计算所要设计的FIR滤波器的单位冲激响应 $h(n) = h_d(n)\cdot w(n)$；

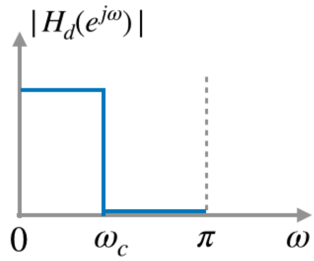
5）计算所着机滤波器的频率响应，并验证是否满足设计要求：$H(e^{j\omega}) = DTFT[h(n)]$

■ 设计线性相位FIR滤波器

1.线性相位FIR低通滤波器的设计

理想线性相位FIR低通滤波器的频率响应：

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 \cdot e^{-j\alpha\omega}, & |\omega| \le \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| \le \pi \end{cases}$$



理想线性相位FIR低通滤波器的单位冲激响应：

$$h_d(n) = IDTFT[H_d(e^{j\omega})] = \frac{\omega_c}{\pi}\frac{\sin[\omega_c(n-\alpha)]}{\omega_c(n-\alpha)} = \frac{\sin[\omega_c(n-\alpha)]}{\pi(n-\alpha)};$$

根据给定的指标，求得FIR低通滤波器的截止频率，选择适当的窗函数。

例题8-3

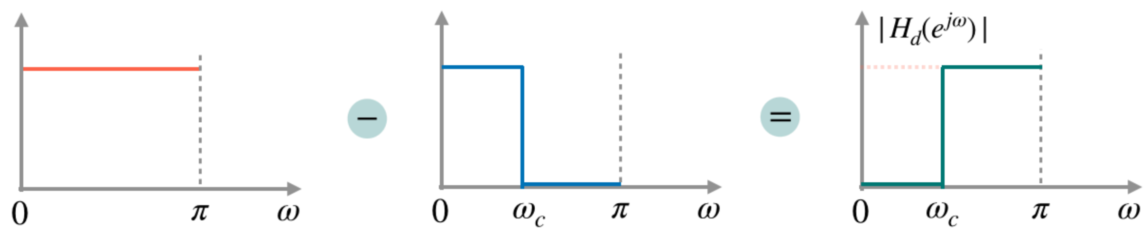
设计线性相位FIR低通滤波器，要求满足指标：

$\Omega_{sam} = 2\pi \times 1.5 \times 10^4\ (rad/s)$　　$\Omega_p = 2\pi \times 1.5 \times 10^3\ (rad/s)$

$\Omega_{st} = 2\pi \times 3 \times 10^3\ (rad/s)$　　$\delta_2 = 50dB$

2.线性相位FIR高通滤波器的设计

一个理想的FIR高通滤波器可以通过一个全通系统减去一个FIR低通滤波器实现。



理想线性相位FIR低通滤波器的频率响应：
$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\tau}, & \omega_c < |\omega| \le \pi \\ 0, & |\omega| \le \omega_c \end{cases}$$

单位冲激响应：$h_d(n) = IDTFT[H_d(e^{j\omega})] = \dfrac{\sin[\pi(n-\tau)]}{\pi(n-\tau)} - \dfrac{\sin[\omega_c(n-\tau)]}{\pi(n-\tau)}$

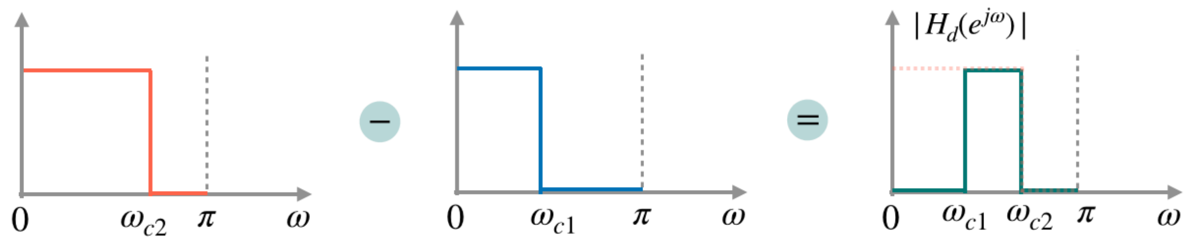
例题8-4

设计线性相位FIR高通滤波器，要求满足指标：

$\omega_s = 0.4\pi \qquad \omega_p = 0.6\pi \qquad \delta_2 = 60dB \qquad \delta_1 = 0.5dB$

3.线性相位FIR带通滤波器的设计

一个理想的FIR带通滤波器可以通过一个FIR低通滤波器减去另一个FIR低通滤波器实现。



理想的FIR带通滤波器的频率响应应为：

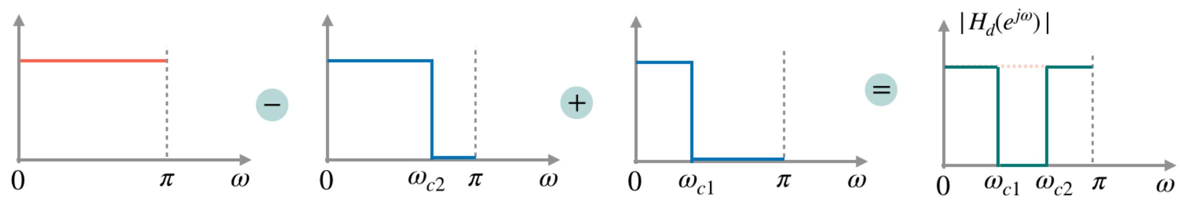
$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\tau}, & \omega_{c1} \le |\omega| \le \omega_{c2} \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

单位冲激响应：$h_d(n) = IDTFT[H_d(e^{j\omega})] = \dfrac{\sin[\omega_{c2}(n-\tau)]}{\pi(n-\tau)} - \dfrac{\sin[\omega_{c1}(n-\tau)]}{\pi(n-\tau)}$

4.线性相位FIR带阻滤波器的设计

一个理想的FIR带阻滤波器可以通过一个FIR高通滤波器加上FIR低通滤波器实现。

一个理想的FIR高通滤波器可以通过一个全通系统减去一个FIR低通滤波器实现。



理想的FIR带阻滤波器的频率响应应为：

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\tau}, & 0 \le |\omega| \le \omega_{c1}, \omega_{c2} \le |\omega| \le \pi \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

单位冲激响应：

$$h_d(n) = IDTFT[H_d(e^{j\omega})] = \frac{\sin[\pi(n-\tau)]}{\pi(n-\tau)} - \frac{\sin[\omega_{c2}(n-\tau)]}{\pi(n-\tau)} + \frac{\sin[\omega_{c1}(n-\tau)]}{\pi(n-\tau)}$$