设计IIR滤波器

数字信号处理第七讲讲义

序言

■ **IIR滤波器的优点与缺点**

IIR滤波器的优点：

可以利用模拟滤波器设计，而模拟滤波器的设计有大量图表可查，方便简单。

IIR滤波器的缺点：

1.相位是非线性的；

2.冲激响应无限长，不能做快速卷积运算；

3.存在稳定性问题。

■ **设计IIR数字滤波器的步骤 【设计模拟低通滤波器】**

1.根据要求的选频滤波器（高通、带通、带阻）设计指标，得出低通数字滤波器的设计指标。

2.由低通数字滤波器的设计指标得出模拟低通滤波器的设计指标(双线性变换法需预畸变)。

3.设计模拟低通滤波器（重点学习巴特沃斯滤波器、切比雪夫I型滤波器）。

4.将模拟低通滤波器转化为数字低通滤波器（重点学习冲激响应不变法、双线性变换法）。

5.将数字低通滤波器转化为要求的数字选频滤波器（数字域频带转换）。

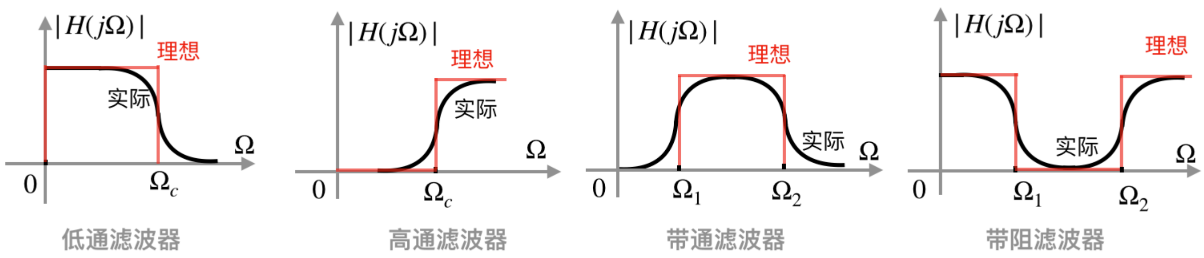
7.1.模拟低通滤波器

7.1.1.模拟原型滤波器

■ 模拟滤波器的设计

常用的模拟滤波器有巴特沃斯和切比雪夫两种。

常见的选频模拟滤波器的幅频特性如下图：

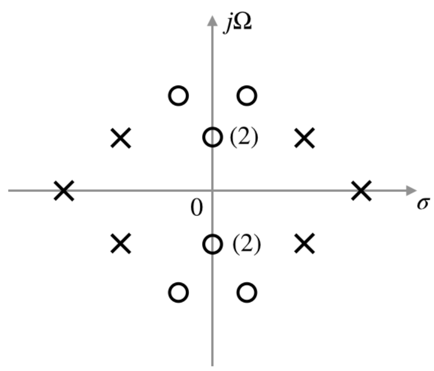


设计模拟滤波器，是根据一组设计规范来设计模拟系统的系统函数$H(s)$，使其逼近某个理想滤波器的特性。

■ 根据幅度平方函数设计系统函数

幅度平方函数的表达式为

$$|H_a(j\Omega)|^2 = H_a(j\Omega)H_a(-j\Omega) = H_a(s)H_a(-s)\Big|_{s=j\Omega}$$



$H_a(s)$为模拟滤波器的系统函数，是s的有理函数；

$H_a(j\Omega)$为模拟滤波器的频率响应；

对于实滤波器，零极点以共轭复数对的形式出现；

因此$H_a(s)H_a(-s)$的零极点关于s平面虚轴镜像对称；

z平面与s平面有这样的映射关系：$z = e^{sT}$,又$s = \sigma + j\omega$

代入s的表达式，可得：$z = e^{(\sigma+j\omega)T} = e^{\sigma T}\cdot e^{j\omega T}$，实际上$e^{j\omega T}$只表示相角。

因此s平面左半部分，即$\sigma < 0$的区域，有$|e^{\sigma T}| < 1$，在z平面就是单位圆内的部分。

根据幅度平方函数的表达式 $|H_a(j\Omega)|^2 = H_a(j\Omega)H_a(-j\Omega) = H_a(s)H_a(-s)\Big|_{s=j\Omega}$ 构造系统函数：

$H_a(s)$为模拟滤波器的系统函数，要求滤波器是因果稳定系统；(z平面要求极点在单位圆内)

故$H_a(s)$的极点一定位于s平面的左半平面；

因此需要将$H_a(s)H_a(-s)$位于s平面的左半平面的极点归于 $H_a(s)$；

零点没有限制，只要将$H_a(s)H_a(-s)$对称零点分为两半分别给$H_a(s)$和$H_a(-s)$即可，要求每一半零点以共轭对的形式出现；

如果要求最小相位系统，则$H_a(s)H_a(-s)$位于s平面的左半平面的零点归于$H_a(s)$。

(最小相位延迟系统的零点都在单位圆内)

例题7-1

已知系统的幅度平方函数为 $|H_a(j\Omega)|^2 = \dfrac{16(25-\Omega^2)^2}{(49+\Omega^2)(36+\Omega^2)}$ ，试求系统函数$H_a(s)$。

7.1.2.巴特沃斯滤波器

巴特沃斯模拟滤波器

巴特沃斯滤波器的幅度平方函数为$|H(j\Omega)|^2 = \dfrac{1}{1+(\frac{\Omega}{\Omega_c})^{2N}}$

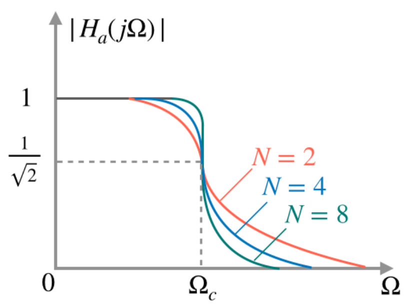
其中，N为滤波器的阶数，Ω_c为滤波器截止频率；

当模拟频率$\Omega = \Omega_c$ 时，$|H(j\Omega_c)|^2 = \dfrac{1}{2}, |H(j\Omega_c)| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ；

相当于3dB衰减，因此，Ω_c又称为3dB带宽；

通带具有最大平坦振幅特性，阻带单调变化。

巴特沃斯模拟滤波器的特性由N决定，N越大，曲线越陡。



巴特沃斯滤波器的设计指标

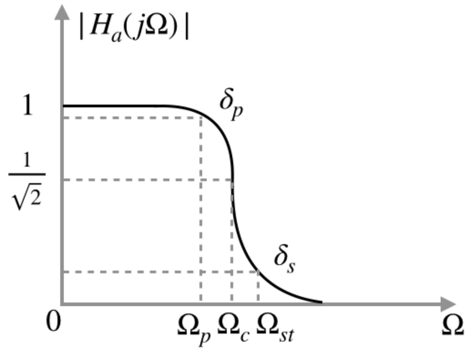
设计巴特沃斯模拟滤波器时需要考虑如下指标：

N——滤波器的阶数，

Ω_p——通带截止频率，δ_p——通带衰减（波纹）(dB)

Ω_st——阻带截止频率，δ_s——通带衰减（波纹）(dB)

$\delta_p = 20\lg\dfrac{|H(j0)|}{H(j\Omega_p)}$，$\delta_s = 20\lg\dfrac{|H(j0)|}{H(j\Omega_{st})}$



■ **巴特沃斯滤波器的设计流程**

1.根据指标要求确定滤波器阶数与滤波器截止频率；

当滤波器对通带的要求更高时：在$\Omega=\Omega_p$处，$\delta_p = -10\lg[\dfrac{1}{1+(\Omega_p/\Omega_c)^{2N}}]$；

当滤波器对阻带的要求更高时：在$\Omega=\Omega_{st}$处，$\delta_s = -10\lg[\dfrac{1}{1+(\Omega_{st}/\Omega_c)^{2N}}]$；

两式联立，可求得$N=\dfrac{\lg[(10^{0.1\delta_p}-1)/(10^{0.1\delta_s}-1)]}{2\lg(\Omega_p/\Omega_{st})}$，实际设计要求N为整数，因此为了满足指标要求，须向上取整，即$N=\left\lceil\dfrac{\lg[(10^{0.1\delta_p}-1)/(10^{0.1\delta_s}-1)]}{2\lg(\Omega_p/\Omega_{st})}\right\rceil$；

在$\Omega=\Omega_p$处，为较为精确地满足指标要求 $\Omega_c=\dfrac{\Omega_p}{\sqrt[2N]{10^{0.1\delta_p}-1}}$；

在$\Omega=\Omega_{st}$处，为较为精确地满足指标要求 $\Omega_c=\dfrac{\Omega_{st}}{\sqrt[2N]{10^{0.1\delta_s}-1}}$；

可选取介于这两个值之间的数作为截止频率。

2.根据阶数进行查表，得到归一化的系统函数$H_{aN}(s)$；

通过查表可以确定模拟滤波器系统函数分母多项式$s^N+a_{N-1}s^{N-1}+\cdots+a_2s^2+a_1s+a_0$;

其中系数$a_N=a_0=1$不变，此时可以得到归一化的系统函数$H_{a_N}(s)$。

N	a_1	a_2	a_3	a_4	……
1	1				……
2	1.4142136				……
3	2	2			……
4	2.6131259	3.4142136	2.6131259		……
5	3.2360680	5.3260680	5.3260680	3.2360680	……
……	……	……	……	……	……

3.将系统函数进行去归一化，得到最终的系统函数；

将归一化系统函数中的s替换为$\frac{s}{\Omega_c}$，得到最终的系统函数，即$H_a(s) = H_{a_N}(\frac{s}{\Omega_c})$。

■ 巴特沃斯滤波器的设计流程[小结]

1.根据指标要求确定滤波器阶数与滤波器截止频率；

阶数 $N = \left\lceil \frac{\lg[(10^{0.1\delta_p} - 1)/(10^{0.1\delta_s} - 1)]}{2\lg(\Omega_p/\Omega_{st})} \right\rceil$，截止频率$\Omega_c = \frac{\Omega_p}{\sqrt[2N]{10^{0.1\delta_p} - 1}}$ 或

$\Omega_c = \frac{\Omega_{st}}{\sqrt[2N]{10^{0.1\delta_s} - 1}}$；

2.根据阶数进行查表，得到归一化的系统函数$H_{a_N}(s)$；

3.将系统函数进行去归一化，得到最终的系统函数；

将归一化系统函数中的s替换为$\frac{s}{\Omega_c}$，得到最终的系统函数，即$H_a(s) = H_{a_N}(\frac{s}{\Omega_c})$。

■ 例题7-2

设计一个满足下列要求的模拟低通巴特沃斯滤波器：

通带截止频率 $\Omega_p = 0.2\pi\ rad/s$，通带最大衰减$\delta_p = 7dB$；

阻带截止频率 $\Omega_{st} = 0.3\pi\ rad/s$，阻带最小衰减$\delta_s = 16dB$；

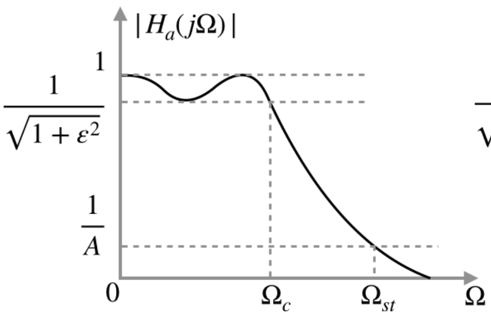
7.1.3.切比雪夫滤波器

■ 切比雪夫模拟滤波器

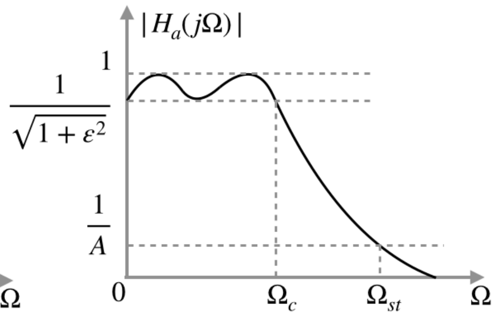
切比雪夫模拟滤波器分为I型和II型两种，本课程重点研究切比雪夫I型模拟滤波器的设计。

切比雪夫I型

振幅特性在通带内是等波纹的，在阻带内单调下降。



N为奇数

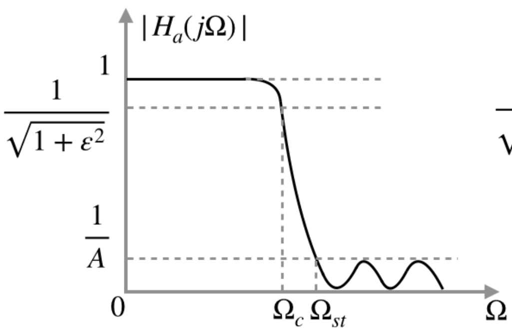


N为偶数

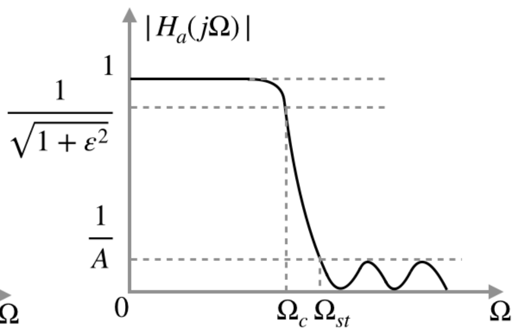
切比雪夫II型

振幅特性在阻带内是等波纹的，在通带内单调下降巴特沃斯滤波器的幅度平方函数为

$$|H(j\Omega)|^2=\frac{1}{1+(\frac{\Omega}{\Omega_c})^{2N}}$$ 。



N为奇数



N为偶数

■ 切比雪夫I型模拟低通滤波器

切比雪夫I型模拟滤波器的幅度平方函数为 $|H_a(j\Omega)|^2 = \dfrac{1}{1+\varepsilon^2 C_N^2(\frac{\Omega}{\Omega_c})}$；

N为切比雪夫I型模拟滤波器的阶次，Ω_c为滤波器截止频率，ε为波动程度，

对应通带 波纹δ_p，$C_N(x)$为N阶切比雪夫多项式；

$\Omega = 0$时，N为偶数时，$H_a(j0) = \dfrac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}$；$N$为奇数时，$H_a(j0) = 1$；

$\Omega = \Omega_c$时，$H_a(j\Omega_c) = \dfrac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}$，$\Omega_c$定义为切比雪夫滤波器的通带截止频率；

在此截止频率下，不一定对应3dB衰减，这是与巴特沃斯滤波器的不同；

在通带内，即$|\Omega| < \Omega_c$时，滤波器幅度呈等波纹起伏；

在通带外，即$|\Omega| > \Omega_c$时，滤波器幅度随模拟频率的增大迅速单调趋于零。

■ 切比雪夫I型模拟低通滤波器的设计指标

设计切比雪夫I型模拟滤波器时需要考虑如下指标：

N——滤波器的阶数，

Ω_c——通带宽度，一般预先给定，ε——与通带波纹δ_p有关的参数

$$\delta_p = 20\lg\frac{|H(j\Omega)|_{\max}}{|H(j\Omega)|_{\min}} = 10\lg\frac{|H(j\Omega)|^2_{\max}}{|H(j\Omega)|^2_{\min}} = 10\lg(1+\varepsilon^2) \Rightarrow \varepsilon^2 = 10^{0.1\delta_p} - 1$$

■ 切比雪夫I型模拟低通滤波器的设计流程

1.根据指标要求确定滤波器阶数；

滤波器的阶数N可以由通带、阻带衰减确定；

设滤波器的阻带起始频率为Ω_{st}，则此时阻带幅度平方函数值满足$|H_a(j\Omega)|^2 \le \dfrac{1}{A^2}$

则有 $\delta_s = 20\lg \dfrac{1}{1/A} = 20\lg A$，且还有 $\delta_p = 10\lg(1+\varepsilon^2)$，即$\varepsilon^2 = 10^{0.1\delta_p} - 1$

可以推导出阶数应满足

$$N \ge \frac{arcch[\sqrt{A^2-1}/\varepsilon]}{arcch(\Omega_{st}/\Omega_c)} = \frac{arcch[\sqrt{10^{0.1\delta_s}-1}/\varepsilon]}{arcch(\Omega_{st}/\Omega_c)} = \frac{arcch[\sqrt{\frac{10^{0.1\delta_s}-1}{10^{0.1\delta_p}-1}}]}{arcch(\Omega_{st}/\Omega_c)}$$

其中双曲余弦函数$arcch(x) = \ln(x+\sqrt{x^2-1})$，实际设计要求N为整数，因此为了满足指标要求，须向上取整。

2.根据阶数和通带波纹进行查表（此时截止频率是归一化的）

以1dB通带波纹为例，此时$\varepsilon^2 = 0.2589254$

N	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	……
1	1.9652267					
2	1.1025103	1.0977343				
3	0.4913067	1.2384092	0.9883412			
4	0.2756276	0.7426194	1.4539248	0.9528114		
5	0.1228267	0.5805342	0.9743961	1.6888160	0.9368201	……
……	……	……	……	……	……	……

通过查表可以确定模拟滤波器归一化系统函数

$$H_{a_N}(s) = \frac{d_0}{s^N + a_{N-1}s^{N-1} + \cdots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0};$$

其中系数$a_N = 1$不变，待定系数d_0 根据 $H_a(j0) = H_{a_N}(s)\big|_{s=0}$ 确定。

3.将系统函数进行去归一化，得到最终的系统函数；

将归一化系统函数中的s替换为$\dfrac{s}{\Omega_c}$，得到最终的系统函数，即$H_a(s) = H_{a_N}(\dfrac{s}{\Omega_c})$。

有的资料将切比雪夫I型模拟滤波器的截止频率用Ω_p代替Ω_c；此时将上述过程中的所有Ω_c用Ω_p代替即可，二者在切比雪夫滤波器设计时等价。

$$N \geq \frac{arcch[\sqrt{A^2-1}/\varepsilon]}{arcch(\Omega_{st}/\Omega_p)} = \frac{arcch[\sqrt{10^{0.1\delta_s}-1}/\varepsilon]}{arcch(\Omega_{st}/\Omega_p)} = \frac{arcch[\sqrt{\frac{10^{0.1\delta_s}-1}{10^{0.1\delta_p}-1}}]}{arcch(\Omega_{st}/\Omega_p)}$$

■ **切比雪夫I型模拟低通滤波器的设计流程[小结]**

1.根据指标要求确定滤波器阶数：

$$N \geq \frac{arcch[\sqrt{A^2-1}/\varepsilon]}{arcch(\Omega_{st}/\Omega_c)} = \frac{arcch[\sqrt{10^{0.1\delta_s}-1}/\varepsilon]}{arcch(\Omega_{st}/\Omega_c)} = \frac{arcch[\sqrt{\frac{10^{0.1\delta_s}-1}{10^{0.1\delta_p}-1}}]}{arcch(\Omega_{st}/\Omega_c)}$$

2.根据通带波纹与阶数进行查表，得归一化系统函数：

$H_{a_N}(s) = \dfrac{d_0}{s^N + a_{N-1}s^{N-1} + \cdots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$，并根据$H_a(j0) = H_{a_N}(s)\Big|_{s=0}$求解待定系数$d_0$；

3.将系统函数进行去归一化，得到最终的系统函数：

将归一化系统函数中的s替换为$\dfrac{s}{\Omega_c}$，得到最终的系统函数，即$H_a(s) = H_{a_N}(\dfrac{s}{\Omega_c})$。

有的资料将切比雪夫I型模拟滤波器的截止频率用Ω_p代替Ω_c，此时将上述过程中的所有Ω_c用Ω_p代替即可，二者在切比雪夫滤波器设计时等价。

■ **例题7-3**

推导出2阶切比雪夫I型模拟低通滤波器的系统函数，假设通带截止频率$\Omega_c = 1rad/s$，波纹$\delta_p = 1dB$。

■ **例7-4**

设计一低通切比雪夫I型模拟滤波器，其性能指标为：

通带截止频率 $\Omega_c = 2\pi \times 10^4 rad/s$，通带最大衰减$\delta_p = 1dB$；

阻带截止频率 $\Omega_{st} = 2\pi \times 1.5 \times 10^4 rad/s$，阻带最小衰减$\delta_s = 15dB$；

归纳：巴特沃斯与切比雪夫I型模拟低通滤波器的设计步骤

给定设计指标：通带截止频率Ω_p，通带衰减（波纹）δ_p，阻带截止频率Ω_{st}，阻带衰减（波纹）δ_s；

1.根据指标要求确定滤波器阶数，巴特沃斯滤波器还需确定截止频率

巴特沃斯滤波器：$N \geq \dfrac{\lg[(10^{0.1\delta_p}-1)/(10^{0.1\delta_s}-1)]}{2\lg(\Omega_p/\Omega_{st})}$

截止频率$\Omega_c = \dfrac{\Omega_p}{\sqrt[2N]{10^{0.1\delta_p}-1}}$ 或$\Omega_c = \dfrac{\Omega_{st}}{\sqrt[2N]{10^{0.1\delta_s}-1}}$；

切比雪夫I型滤波器：$N \geq \dfrac{arcch[\sqrt{\frac{10^{0.1\delta_s}-1}{10^{0.1\delta_p}-1}}]}{arcch(\Omega_{st}/\Omega_c)}$，$\varepsilon^2 = 10^{0.1\delta_p}-1$

2.根据通带波纹与阶数进行查表，得到归一化的系统函数$H_{aN}(s)$，切比雪夫I型需求待定系数d_0。

3.将系统函数进行去归一化，得到最终的系统函数

将归一化系统函数中的s替换为$\dfrac{s}{\Omega_c}$，得到最终的系统函数，即$H_a(s) = H_{a_N}(\dfrac{s}{\Omega_c})$。

7.2.模拟滤波器转化为数字滤波器

7.2.1.映射方法简述

映射的目的是从模拟滤波器变换到数字滤波器。

该过程就是从已知的模拟滤波器系统函数$H_a(s)$映射为数字滤波器的系统函数$H(z)$，因此从模拟滤波器到数字滤波器的变换归根结底就是从s平面到z平面的映射变换。

该映射变换必须满足如下两个要求：

1.$H(z)$的频率响应要能模仿$H_a(s)$的频率响应，s平面虚轴$s=j\Omega$要映射为z平面的单位圆$z=e^{j\omega}$;

2.因果稳定的$H_a(s)$能映射为因果稳定的$H(z)$，即s平面的左半平面$Re[s]<0$要映射为z平面单位圆内部 $|z|<1$。

我们重点研究两种映射方法：冲激响应不变法与双线性变换法。

7.2.2.冲激响应不变法

■ 冲激响应不变法的变换原理

冲激响应不变法就是使数字滤波器的单位脉冲响应$h(n)$模仿模拟滤波器的冲激响应$h_a(t)$;

也就是说，我们将$h_a(t)$进行等间隔采样， 使得$h(n)$刚好等于$h_a(t)$的T间隔采样值，即:

$$h(n)=h_a(t)\Big|_{t=nT};$$

假定$h(n)\leftrightarrow H(z)$，$h_a(t)\leftrightarrow H_a(s)$，则可以得到模拟滤波器数字化的过程为:

$$H_a(s)\to h_a(t)\to h(n)\to H(z);$$

这个过程也就是时域采样、频域周期延拓的过程;

根据z变换与拉普拉斯变换的关系，我们有$H(z)\Big|_{z=e^{sT}}=\dfrac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}H_a(s-j\dfrac{2\pi}{T}k)$。

即冲激响应不变法将模拟滤波器的s平面变换成数字滤波器的z平面，即$z=e^{sT}$。

■ 模拟滤波器转数字滤波器的混叠失真

易证得数字滤波器频率响应与模拟滤波器的频率响应关系为:

$$H(e^{j\omega})=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}H_a(j\frac{\omega-2\pi k}{T})。$$

由于$h(t)$离散化为$h(n)$，所以数字滤波器的频响是模拟滤波器频响的周期延拓 ;

只有当模拟滤波器的频率响应是严格限带的, 且频带限于折叠频率内时, 才不产生混叠失真;

而实际的模拟滤波器的频率响应都不是严格限带的，所以周期延拓后会产生频谱混叠;

即产生频率响应的混叠失真，这时数字滤波器的频响就不同于原模拟滤波器的频响。

■ 模拟滤波器的数字化

假定$h(n) \leftrightarrow H(z)$，$h_a(t) \leftrightarrow H_a(s)$，则可以得到模拟滤波器数字化的过程为：

$$H_a(s) \to h_a(t) \to h(n) \to H(z);$$

设滤波器的系统函数只有一阶极点，且系统函数为真分式（分母阶次大于分子阶次），即：

$$H_a(s) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{s - s_k};$$

则模拟滤波器的单位冲激响应即为系统函数的拉式反变换：

$$h_a(t) = L^{-1}[\sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{s - s_k}] = \sum_{k=1}^{N} A_k e^{s_k t} u(t);$$

使数字滤波器的单位脉冲响应$h(n)$等于模拟滤波器冲击响应$h_a(t)$的采样：

$$h(n) = h_a(t)\Big|_{t=nT} = \sum_{k=1}^{N} A_k e^{s_k nT} u(nT);$$

对$h(n)$求z变换：$\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{N} A_k e^{s_k nT} u(nT) z^{-n} = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{1 - e^{s_k T} z^{-1}}$

比对$\displaystyle H_a(s) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{s - s_k}$与$\displaystyle H(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{1 - e^{s_k T} z^{-1}}$，我们容易发现：

1.s平面的极点　变换到z平面上的极点$z = e^{s_k T}$

2.$H_a(s)$与$H(z)$的部分分式的系数是相同的: 均为A_k

$$H_a(s) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{s - s_k}, \quad H(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{1 - e^{s_k T} z^{-1}}。$$

■ 数字化后滤波器的修正

根据$\displaystyle H(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a(j\frac{\omega - 2\pi k}{T})$，我们发现数字滤波器频率响应幅度还与采样间隔$T$成反比；

如果采样频率很高，即T很小，数字滤波器可能具有很高的增益，这是不希望的。

为了使数字滤波器增益不随采样频率而变化，作以下修正：$h(n) = T h_a(t)\Big|_{t=nT}$；

因此数字滤波器的系统函数变为 $H(z)=\sum_{k=1}^{N}\frac{TA_k}{1-e^{s_kT}z^{-1}}$；

$$H_a(s)=\sum_{k=1}^{N}\frac{A_k}{s-s_k} \quad \Rightarrow \quad H(z)=\sum_{k=1}^{N}\frac{TA_k}{1-e^{s_kT}z^{-1}}$$

■ 冲激响应不变法的优点与不足用

冲激响应不变法的优点：

1.冲激响应不变法的时域逼近良好；

2.模拟频率Ω与数字频率ω之间呈线性映射关系$\omega=\Omega T$；

冲激响应不变法的不足：

冲激响应不变法设计的滤波器会有频率响应的混叠效应。

因此，冲激响应不变法仅适用于限带的模拟滤波器（比如衰减特性很好的低通或带通滤波器）,而且高频衰减越快，混叠效应越小；而对于高通、带阻滤波器，不便采用此方法进行设计。

■ 冲激响应不变法设计数字低通滤波器的步骤

介绍完冲激响应不变法之后，我们结合第一模块模拟低通滤波器的内容，给出利用冲激响应不变法设计数字低通滤波器的步骤：

1.根据给定数字低通滤波器的指标 ω_p，ω_{st}，δ_p，δ_s；

2.选择合适的T值，求解模拟指标 $\Omega_p=\frac{\omega_p}{T}$，$\Omega_{st}=\frac{\omega_{st}}{T}$；

3.根据指标ω_p，ω_{st}，δ_p，δ_s，设计模拟滤波器，并得到系统函数$H_a(s)$；

4.将系统函数$H_a(s)$进行部分分式展开，展开成 $H_a(s)=\sum_{k=1}^{N}\frac{A_k}{s-s_k}$ 的形式（可查表进行因式分解）；

5.依据冲激响应不变法，数字滤波器的系统函数为 $H(z)=\sum_{k=1}^{N}\frac{TA_k}{1-e^{s_kT}z^{-1}}$；

由于会与模拟频率合并变为数字频率，因此采样间隔T的取值不影响设计，一般取1居多。

■ **例题7-5**

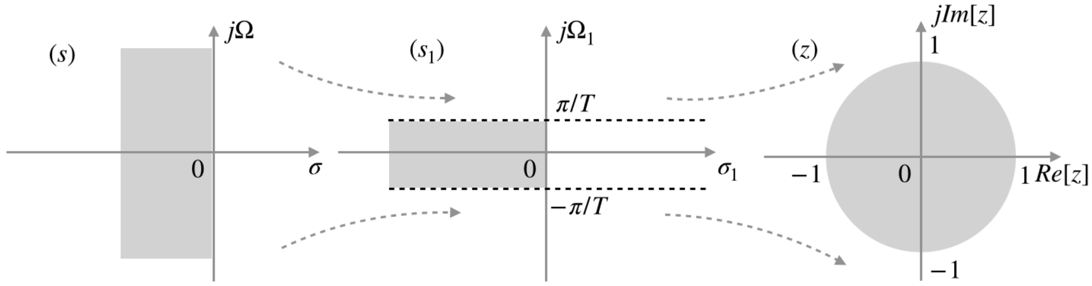
已知模拟滤波器的系统函数为$H_a(s) = \dfrac{2}{s^2 + 4s + 3}$，试用冲激响应不变法设计数字滤波器的系统函数。

■ **例题7-6**

用冲激响应不变法设计一个三阶巴特沃斯数字低通滤波器，满足：采样频率$f_s = 4kHz$，3dB截止频率为$f_c = 1kHz$。

7.2.3.双线性变换法

■ **双线性变换法的变换原理**



双线性变换法首先采用非线性频率压缩的方法，将整个频率轴上的频率范围压缩至$[-\dfrac{\pi}{T}, \dfrac{\pi}{T}]$；

再通过$z = e^{sT}$映射至z平面，s平面与z平面建立了一一对应的单值关系，消除了多值变换性，从而消除了频谱混叠现象；

从s平面到s_1平面的映射可以通过正切变换$\Omega = c\ \tan(\dfrac{\Omega_1 T}{2})$实现，其中$T$为采样间隔；

$$\Omega_1 : -\frac{\pi}{T} \to 0 \to \frac{\pi}{T} \quad \Rightarrow \quad \Omega : -\infty \to \infty\ ;$$

根据欧拉公式可以推得$j\Omega = c\dfrac{e^{j\frac{\Omega_1 T}{2}} - e^{-j\frac{\Omega_1 T}{2}}}{e^{j\frac{\Omega_1 T}{2}} + e^{-j\frac{\Omega_1 T}{2}}}$，

令$j\Omega = s, j\Omega_1 = s_1$，则$s = c\dfrac{e^{\frac{s_1T}{2}} - e^{-\frac{s_1T}{2}}}{e^{\frac{s_1T}{2}} + e^{-\frac{s_1T}{2}}} = c \cdot \dfrac{1 - e^{-s_1T}}{1 + e^{-s_1T}}$；

将s_1平面通过$z = e^{s_1T}$映射到z平面，则$s = c \cdot \dfrac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$，从而得到了最终的单值映射关系；

该变换是两个线性函数之比，因此称为双线性变换；

双线性变换的变换式：$s = c \cdot \dfrac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$

其中常数c的确定：

为了使模拟滤波器与数字滤波器在低频处有较为确切的对应关系，即模拟原型滤波器的低频特性近似于数字滤波器的低频特性，则需满足：$\Omega = c\tan(\dfrac{\Omega_1 T}{2}) \approx c\dfrac{\Omega_1 T}{2} \approx \Omega_1$

则常数 $c = \dfrac{2}{T}$，此时 $\Omega = \dfrac{2}{T}\tan(\dfrac{\Omega_1 T}{2}) = \dfrac{2}{T}\tan(\dfrac{\omega}{2})$ 。

所以双线性变换关系式为 $s = \dfrac{2}{T} \cdot \dfrac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$ 。

■ 双线性变换法的优点与不足

双线性变换法的优点：

消除了冲激响应不变法的混叠效应，可设计各种类型的滤波器。

冲激响应不变法的不足：

存在着严重的非线性频率变换$\Omega = \dfrac{2}{T}\tan(\dfrac{\omega}{2})$

对于分段常数的滤波器，经过双线性变换之后，仍得到幅频特性为分段常数的滤波器，但各个分段边缘的临界频率点的位置会产生畸变，这种频率的畸变，可以通过频率的预畸变加以校正；

预畸变指将临界模拟频率事先加以畸变，然后经过变换后刚好可以映射到所需数字频率上；

预畸变的表达式为$\Omega_p = \dfrac{2}{T}\tan(\dfrac{\omega_p}{2})$，在双线性变换法设计数字滤波器时必须进行预畸变操作。

■ **双线性变换法设计模拟低通滤波器的步骤**

1.根据给定数字低通滤波器的指标 ω_p , ω_{st} , δ_p , δ_s ;

2.通过预畸变，确定模拟指标：$\Omega = \frac{2}{T} \cdot \tan(\frac{\omega}{2})$；（T的值一般取2 ）

3.根据指标ω_p , ω_{st} , δ_p , δ_s，设计模拟滤波器，并得到系统函数$H_a(s)$；

4.依据双线性变换法，数字滤波器的系统函数为$H(z) = H(s)\Big|_{s=\frac{2}{T}\cdot\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$；

在变换过程中，采样间隔T一般取2，会通过计算抵消，因此其取值不影响设计。

■ **例题7-7**

设计一个数字低通滤波器，要求：

（1）3dB截止频率为 $\omega_c = 0.25\pi$；

（2）利用双线性变换法设计一阶模拟巴特沃斯滤波器。

■ **例题7-8**

已知二阶归一化巴特沃斯模拟低通滤波器的系统函数为$H_{a_N}(s) = \dfrac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$，试用双线性变换法将该模拟滤波器转化为数字滤波器，要求：

采样间隔$T = 1s$，3dB截止频率为 $f_c = 0.25Hz$。

■ **例题7-9**

用双线性变换法设计一个三阶巴特沃斯数字低通滤波器，要求：

采样频率$f_s = 4kHz$，3dB截止频率为 $f_c = 1kHz$。

归纳：冲激响应不变法与双线性变换法

1.给定数字低通滤波器的指标 ω_p , ω_{st} , δ_p , δ_s ;

2.通过数字频率指标确定模拟频率指标：

冲激响应不变法 ： 选择合适的T值，求解模拟指标 $\Omega_p = \dfrac{\omega_p}{T}$, $\Omega_{st} = \dfrac{\omega_{st}}{T}$

双线性变换法： 通过预畸变，确定模拟指标 $\Omega = \frac{2}{T} \cdot \tan(\frac{\omega}{2})$

3.根据指标ω_p，ω_{st}，δ_p，δ_s，设计模拟滤波器（巴特沃斯或切比雪夫I型），并得到系统函数$H_a(s)$；

4.经过数字域转化求解系统函数 $H(z)$；

冲激响应不变法： $H_a(s) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{s - s_k} \quad \Rightarrow \quad H(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{TA_k}{1 - e^{s_k T} z^{-1}}$

双线性变换法： $H(z) = H(s)\Big|_{s=\frac{2}{T}\cdot\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$。

7.3.数字域的频率转换

7.3.1.数字滤波器简介

■ **选频滤波器概述**

数字滤波器按照频率响应的通带特性可以划分为低通、高通、带通和带阻等几种形式；

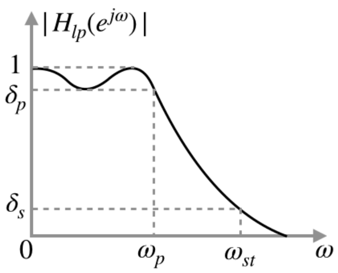
数字滤波器系统的频率响应$H(e^{j\omega})$是以2π为周期的函数，且数字采样频率

$$\omega_s = \Omega_s T = 2\pi f_s T = 2\pi\ ;$$

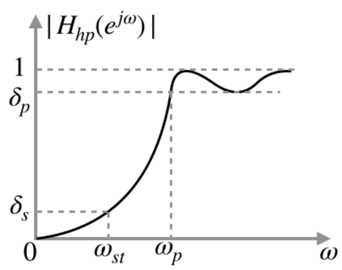
按照奈奎斯特抽样定理，滤波器的频率特性只能限定在折叠频率之内，即$\omega_h \le \frac{\omega_s}{2} = \pi$；

在设计数字滤波器时，采样频率是一个必不可少的参量。

■ **选频滤波器分类**



1.低通滤波器



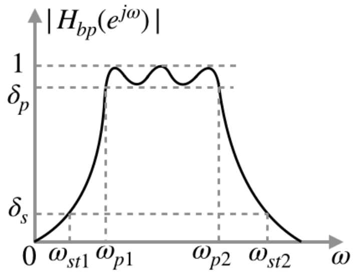
2.高通滤波器

ω_p 通带截止频率

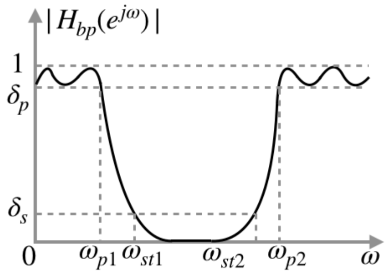
ω_{st} 阻带截止频率

δ_p 通带波纹

δ_s 阻带波纹



3.带通滤波器



4.带阻滤波器

ω_{p1}, ω_{p2} 通带截止频率

$\omega_{st1}, \omega_{st2}$ 阻带截止频率

δ_p 通带波纹

δ_s 阻带波纹

7.3.2.数字频率转换

■ 数字频率转换原理

假设给定的数字低通滤波器为$H_L(z)$，希望得到的数字选频滤波器为$H_d(z)$；

定义一个映射关系 $z^{-1} = G(Z^{-1})$，则有 $H_d(Z) = H_L(z)\Big|_{z^{-1}=G(Z^{-1})}$；

对于给定的因果稳定的数字低通滤波器$H_L(z)$，我们希望经过 $z \to Z$ 变换后的$H_d(z)$也是因果稳定的，因此该映射关系需满足：

1.z平面的单位圆必须映射到Z平面的单位圆上；

2.z平面的单位圆内部必须映射到Z平面的单位圆内部；

3.系统函数 $G(Z^{-1})$ 必须是Z^{-1}的有理函数。

用θ表示z平面的数字频率，ω表示Z平面的数字频率；$e^{j\theta}$和$e^{j\omega}$分别表示z平面和Z平面的单位圆；

根据 $z^{-1} = G(Z^{-1})$，有$e^{-j\theta} = G(e^{-j\omega}) = |G(e^{-j\omega})|e^{j\arg[G(e^{-j\omega})]}$，因此

$$|G(e^{-j\omega})| = 1;$$

所以 $z^{-1} = G(Z^{-1})$ 为全通函数；

全通函数的系统函数

$$H_{ap}(z) = \pm K\frac{z^{-N} + a_1z^{-N+1} + a_2z^{-N+2} + \cdots + a_N}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \cdots + a_Nz^{-N}} = \pm K\prod_{i=1}^{N}\frac{z^{-1} - \alpha_i^*}{1 - \alpha_iz^{-1}};$$

N为全通系统的阶数；

因此定义映射$z^{-1}=G(Z^{-1})=\prod_{i=1}^{N}\dfrac{Z^{-1}-\alpha_i^*}{1-\alpha_i Z^{-1}}$，选择合适的N和$\alpha_i$，可以得到各类变换。

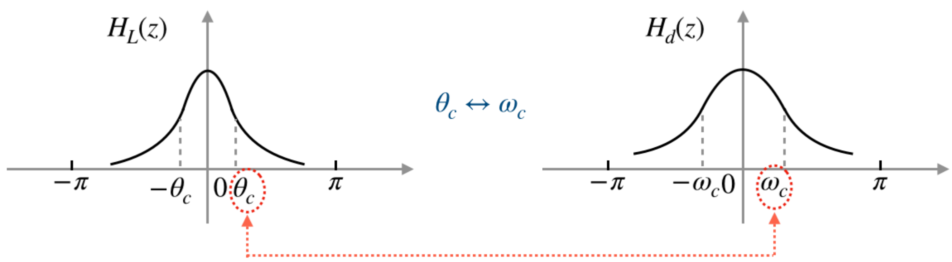
■ 数字频率转换：数字低通——数字低通

设θ_c为给定的数字低通滤波器的截止频率，ω_c为希望得到的低通滤波器的截止频率；

则数字低通到数字低通的映射关系为 $z^{-1}=G(Z^{-1})=\dfrac{Z^{-1}-\alpha}{1-\alpha Z^{-1}}$；

z平面至Z平面的映射关系如下，根据 $\theta_c \leftrightarrow \omega_c$，则有 $e^{-j\theta_c}=\dfrac{e^{-j\omega_c}-\alpha}{1-\alpha e^{-j\omega_c}}$，解得

$$\alpha=\frac{\sin[(\theta_c-\omega_c)/2]}{\sin[(\theta_c+\omega_c)/2]};$$



例题7-10

在例题7-7的基础上，设计一个数字低通滤波器，要求截止频率$\omega_c=0.75\pi$。

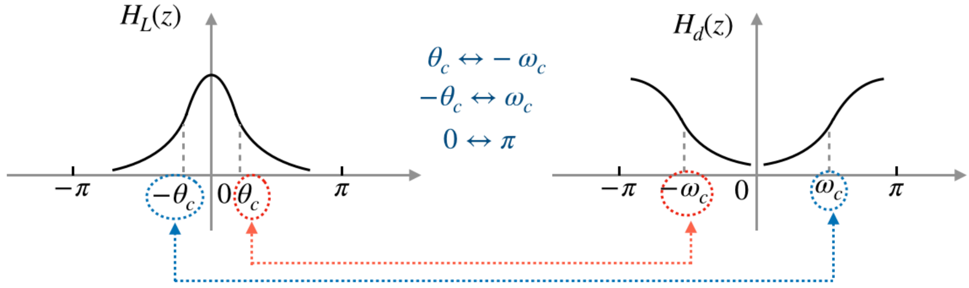
■ 数字频率转换：数字低通——数字高通

设θ_c为给定的数字滤波器的截止频率，ω_c为高通滤波器的截止频率；

则数字低通到数字高通的映射关系为 $z^{-1}=G(Z^{-1})=-\dfrac{Z^{-1}+\alpha}{1+\alpha Z^{-1}}$；

z平面至Z平面的映射关系如下，根据 $\theta_c \leftrightarrow -\omega_c$，则有 $e^{-j\theta_c}=-\dfrac{e^{j\omega_c}+\alpha}{1+\alpha e^{j\omega_c}}$，因此

$$\alpha=-\frac{\cos[(\theta_c+\omega_c)/2]}{\cos[(\theta_c-\omega_c)/2]};$$



数字低通——数字高通【映射技巧】

数字低通到数字高通的映射关系为 $z^{-1} = G(Z^{-1}) = -\dfrac{Z^{-1}+\alpha}{1+\alpha Z^{-1}}$,

$$\text{其中}\alpha = -\frac{\cos[(\theta_c+\omega_c)/2]}{\cos[(\theta_c-\omega_c)/2]};$$

若给定高通指标ω_p和ω_{st}，我们来求低通指标θ_p和θ_{st}：

设$\theta_p = \pi - \omega_p$，则此时有$\alpha = -\dfrac{\cos[(\theta_p+\omega_p)/2]}{\cos[(\theta_p-\omega_p)/2]} = 0$;

又因为数字低通转高通的映射关系为 $\theta_{st} \leftrightarrow -\omega_{st}$，此时

$$z^{-1} = e^{-(j\theta_{st})}\ ,\ Z^{-1} = e^{-[j(-\omega_{st})]} = e^{j\omega_{st}};$$

代入映射关系中，可得：$e^{-j\theta_{st}} = -\dfrac{e^{j\omega_{st}}+\alpha}{1+\alpha e^{j\omega_{st}}}$;

又因为 $\alpha = 0$，可以求得数字低通截止频率指标 $\theta_{st} = \pi - \omega_{st}$，且对应的映射关系简化为：$z^{-1} = G(Z^{-1}) = -Z^{-1}$

同理，设 $\theta_{st} = \pi - \omega_{st}$，也可以简化映射关系式，方便后续的计算。

综上所述，在设计数字高通滤波器时，我们可以利用 $\theta_{st} = \pi - \omega_{st}$或 $\theta_p = \pi - \omega_p$，将高通指标转化为低通指标，此时映射关系中的参数 $\alpha = -\dfrac{\cos[(\theta_p+\omega_p)/2]}{\cos[(\theta_p-\omega_p)/2]} = 0$

映射关系式由 $z^{-1} = G(Z^{-1}) = -\dfrac{Z^{-1}+\alpha}{1+\alpha Z^{-1}}$ 转化为 $z^{-1} = G(Z^{-1}) = -Z^{-1}$,

可大大简化映射关系的转换，便于进行数字域频带转换。

■ **例题7-11**

用双线性变换法设计一个高通数字滤波器，要求用切比雪夫I型滤波器逼近，设计指标为：

通带截止频率$\omega_p = 0.6\pi$,通带最大衰减$\delta_p = 1dB$；

阻带截止频率 $\omega_{st} = 0.46\pi$，阻带最小衰减$\delta_s = 15dB$。

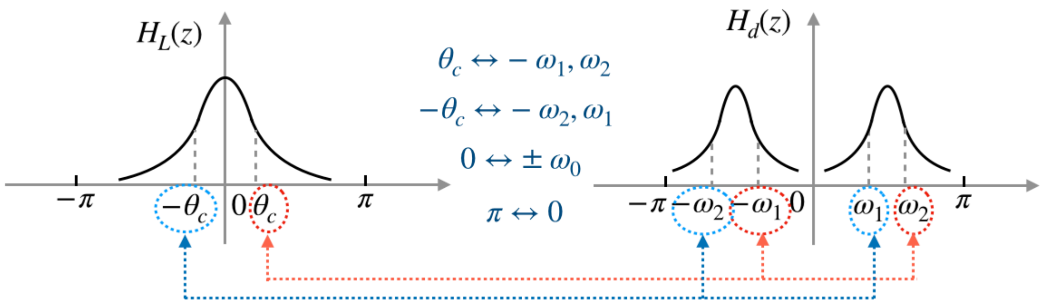
■ **数字频率转换：数字低通——数字带通**

设θ_c为给定的数字低通滤波器的截止频率，ω_1, ω_2为希望得到的带通滤波器的上、下截止频率；

则数字低通到数字带通的映射关系为 $z^{-1} = G(Z^{-1}) = -\dfrac{Z^{-2} + \alpha_1 Z^{-1} + \alpha_2}{\alpha_2 Z^{-2} + \alpha_1 Z^{-1} + 1}$ ；

z平面至Z平面的映射关系如下，可解得 $\alpha_1 = -\dfrac{-2\beta k}{k+1}$, $\alpha_2 = -\dfrac{k-1}{k+1}$,

其中 $\beta = -\dfrac{\cos[(\omega_2 + \omega_1)/2]}{\cos[(\omega_2 - \omega_1)/2]}$, $k = \cot(\dfrac{\omega_2 - \omega_1}{2})\tan\dfrac{\theta_c}{2}$



■ **例题7-12**

用双线性变换法设计一个带通数字滤波器，要求用切比雪夫I型滤波器逼近，设计指标为：

通带截止频率$\omega_{p1} = 0.4\pi$, $\omega_{p2} = 0.5\pi$,通带最大衰减$\delta_p = 1dB$；

阻带截止频率$\omega_{p1} = 0.2\pi$, $\omega_{p2} = 0.7\pi$，阻带最小衰减$\delta_s = 15dB$。

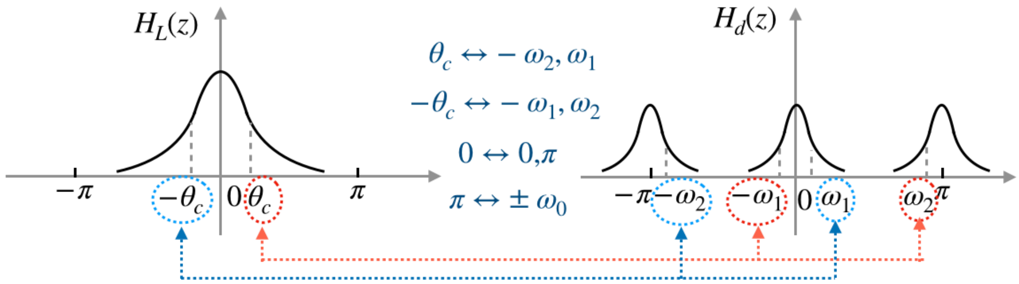
■ **数字频率转换：数字低通——数字带阻**

设θ_c为给定的数字低通滤波器的截止频率，ω_1, ω_2为希望得到的带通滤波器的上、下截止频率；

则数字低通到数字带阻的映射关系为 $z^{-1}=G(Z^{-1})=\dfrac{Z^{-2}+\alpha_1 Z^{-1}+\alpha_2}{\alpha_2 Z^{-2}+\alpha_1 Z^{-1}+1}$ ；

z平面至Z平面的映射关系如下，可解得 $\alpha_1=-\dfrac{-2\beta}{k+1}$ ，$\alpha_2=\dfrac{1-k}{1+k}$ ，

其中 $\beta=\dfrac{\cos[(\omega_2+\omega_1)/2]}{\cos[(\omega_2-\omega_1)/2]}$ ，$k=\tan(\dfrac{\omega_2-\omega_1}{2})\tan\dfrac{\theta_c}{2}$



■ **总结：设计IIR数字滤波器的步骤**