UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
FACULTAD DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA INFORMÁTICA

Algoritmos Numéricos

Laboratorio-PEP N°2

Integrantes:	Carlos Pérez Sanhueza
Curso:	Algoritmos Numéricos
Sección	0-A-1
Profesor(a):	Oscar Rojas Diaz

Tabla de contenidos

1. Introducción

A continuación se detallan los problemas planteados para el Laboratorio-PEP N2 de la asignatura de Algoritmos Numéricos.

1.1. Problema 1

Para el primer problema se busca implementar un algoritmo que permita dar solución a la *Integración Adaptativa*, problema a partir del cual se desprenden dos sub-problemas, los cuales son:

1. A partir de la integración adaptativa se busca *aproximar* la integral exacta $L(f)$ para un intervalo $[a, b]$, dada una división del intervalo $m = (a + b)/2$, con $f = 2^x + 16x$
2. En segundo lugar se busca determinar una formula para el calculo máximo de iteraciones del algoritmo dada una tolerancia de error *tol*.

Además para el calculo de los dos puntos anteriores se solicita emplear tres métodos para el calculo integral, correspondientes a **Trapecios Simples**, **Simpson Un Tercio** y **Simpson Tres Octavos**.

1.2. Problema 2

Utilizando el *Método de Diferencias Finitas* (aplicando EDOs), se busca resolver la ecuación diferencial de la **transferencia de calor en un cilindro solido con generación**, tomando las siguientes consideraciones. Esto considerando la transferencia de calor en régimen estacionario en un sólido de radio R y longitud L, que genera calor constante G_0, con Temperatura de la superficie T_e. Las ecuaciones a tomar en consideración son las siguientes:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r * q_r) = G_0$$

$$q_r = -k\frac{dT}{dr}$$

2. Solución

2.1. Solución 1

2.1.1. Regla del Trapecio

La regla se basa en aproximar el valor de la integral de $f(x)$ por el de la función lineal que pasa a través de los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$. La integral de ésta es igual al área del trapecio bajo la gráfica de la función lineal. Se sigue que:

$$\int_a^b f(x) \cdot dx \approx (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{1}$$

2.1.2. Regla de Simpson

En lugar de utilizar trapecios a partir de dos puntos mejoró la aproximación utilizando parábolas que pasen por tres puntos por los cuales pasa la función.

Elegimos 3 puntos: $A(x_1), f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ y $C(x_3, f(x_3))$. Con estos tres puntos vamos a calcular la parábola que pasa por ahí. Es decir, tenemos que determinar los parámetros a, b, c tales que $y = ax^2 + bx + c)$ pasa por los puntos A,B,C.

2.2. Solución 2

El Método de Diferencias Finitas es un método de carácter general que permite la resolución aproximada de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales definidas en recintos finitos. Consiste en discretizar el recinto del plano en el que se quiere resolver la ecuación con una malla, y permitir un tratamiento más simple del problema diferencial parcial. El principio del método comprende la definición de las derivadas parciales de la función $f(x)$

$$\frac{dT}{dr} = \frac{T_{i+1} - T_{i-1}}{\Delta r} \tag{2}$$

$$\frac{d^2T}{dr^2} = \frac{T_{i-1} - 2T_i + T_{i+1}}{\Delta r} \tag{3}$$

3. Resultados

3.1. Parte 1

Como resultado de la solución a la parte correspondiente a la integración adaptativa, se obtuvo un programa escrito en el lenguaje de programación **C++**, utilizando además como complemente la librería de **Armadillo**, específicamente algunas funciones que ofrece esta librería. Este programa recibe como parámetros de entrada, y que debe ingresar el usuario en el orden correspondiente, los siguientes:

- tol: Numero correspondiente a la tolerancia aceptada.
- a: Numero correspondiente a la cota inferior del intervalo de integración.
- b: Numero correspondiente a la cota superior del intervalo de integración.
- método: Método de los tres ya mencionados (trap, sim3, sim8)

Para la compilación correspondiente y para mayor comodidad, el programa cuenta además de un archivo tipo *Makefile*, con lo que basta con acceder al directorio de la "PARTE 1"del laboratorio e ingresar el comando "make"(en caso de distribuciones linux) por consola, el cual retornara las instrucciones correspondientes para poder ejecutar el programa.

El programa llamado como *adaptative.cpp* cuenta con tres funciones principales, y que corresponden precisamente a aquellas funciones que implementan cada uno de los tres métodos de manera adaptativa, y que corresponden a **adaptativeTrapeze**, **adaptativeOneThird** y **adaptativeThreeHeighths**, para los métodos del Trapecio, Simpson un tercio y Simpson tres octavos, respectivamente. Además el programa cuanta con funciones complementarias para que las principales puedan funcionar correctamente.

A modo de prueba se realizo la ejecucion del programa variando 4 intervalos $[a, b]$, manteniendo constante la tolerancia para ver como se ve afectado el resultado del método, y el numero de iteraciones resultantes, esto para cada uno de los métodos. Estos fueron los resultados

Intervalo	Tolerancia	Iteraciones	Resultado
$[0, 5]$	0.001	87	-155.272
$[5, 10]$	0.001	271	831.17
$[0, 10]$	0.001	359	675.898
$[0, 15]$	0.001	1223	45472.9

Cuadro 1: Pruebas Metodo del Trapecio

Intervalo	Tolerancia	Iteraciones	Resultado
$[0, 5]$	0.001	11	-155.276
$[5, 10]$	0.001	25	831.154
$[0, 10]$	0.001	37	675.877
$[0, 15]$	0.001	85	45472.8

Cuadro 2: Pruebas Metodo de Simpson Un Tercio

Intervalo	Tolerancia	Iteraciones	Resultado
$[0, 5]$	0.001	9	-155.276
$[5, 10]$	0.001	21	831.154
$[0, 10]$	0.001	31	675.877
$[0, 15]$	0.001	71	45472.8

Cuadro 3: Pruebas Metodo de Simpson Tres Octavos

Ahora bien, comparando tabla con tabla y sus respectivos métodos, resulta evidente a simple vista que el peor método es el Método del Trapecio (1), comparado con ambos Métodos de Simpson, tomando como ejemplo al intervalo $[0, 5]$, el numero de iteraciones para los Trapecios excede a Simpson Un Tercio (2) en 76 iteraciones, y 78 para el caso de Simpson Tres Octavos (3).

Finalmente entre los métodos de Simpson resulta existir muy poca diferencia en el numero de iteraciones, al menos para los parámetros en que se realizaron las pruebas, donde es posible evidenciar que ambos métodos no sobrepasan las 14 iteraciones de diferencia, en comparación con la diferencia que existía con el método del Trapecio. Sin embargo hay que destacar que por poca diferencia en el numero de iteraciones para los intervalos dados, el método de Simpson Tres Octavos resulta ser mas eficiente, y suponemos que para intervalos mucho mas grandes la diferencia entre ambos métodos se notaria mas.

3.2. Parte 2

Como resultado de la solución para la resolución de EDOs empleando diferencias finitas, se obtuvo un programa escrito en **Matlab**, el cual consta de dos archivos y dos carpetas, el primer archivo corresponde al *main* y el segundo a *generateCylinder*, que corresponde al archivo que el desarrollo de la solución a las ecuaciones de calor especificadas en la introducción al problema. En cuanto a las carpetas, la primera corresponde a *graphs* que es el directorio en que se almacenan las imágenes o figuras generadas de la ejecucion del programa, y la segunda carpeta corresponde a *videos* que es el directorio en que se almacena el video generado de la variación de la Temperatura Externa T_e en el intervalo $[20, 160]$.

En primer lugar, para la realización de pruebas se especificaba utilizar los valores discretos de T_e correspondientes a 20, 40, 80 y 160, para lo cual se creo un vector de estos y se ingreso cada uno a la función *generateCylinder*, función que además recibe el numero de superficies n para las cuales se desea conocer el valor de T, las cuales además están determinadas por **R/n**, con R inicial 1, y n se defininio con el valor 100.

A partir de esto se obtuvieron los siguientes gráficos, aplicando una función de matlab para la generación de cilindros 3D llamada **cylinder()**.

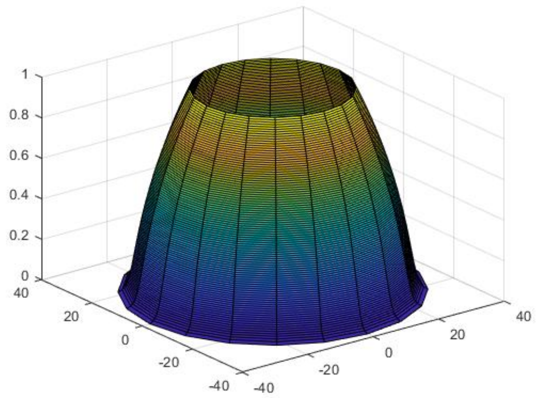

Figura 1: Cilindro $T_e = 20$

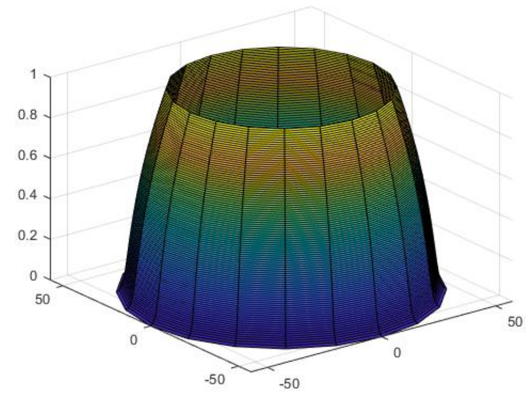

Figura 2: Cilindro $T_e = 40$

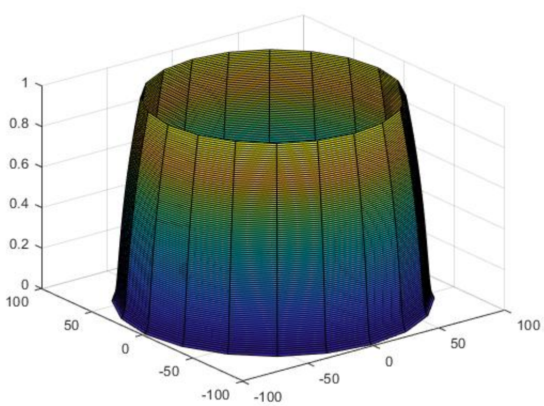

Figura 3: Cilindro $T_e = 80$

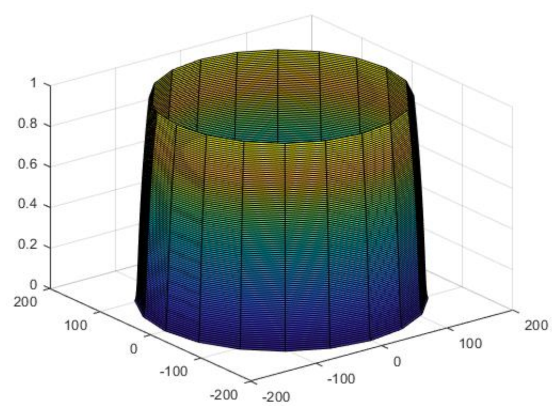

Figura 4: Cilindro $T_e = 160$

En teoría lo que debería suceder es que a medida que aumenta el T_e, la distribución del calor, debería ir desplazándose mas hacia la superficie, sin embargo la representación gráfica no ayuda mucho, pues no es posible visualizarlo a simple vista, pero se podría hacer una suposición, como se puede observar a medida que aumenta el T_e, la distribución de calor tiende a ir hacia afuera, pues el radio también aumenta con el T_e.

Como segundo resultado y como ya se menciono tambien se obtuvo un video que muestra la variación de T_e de manera continua en el intervalo $[20, 160]$.

4. Conclusiones

Comenzando con la parte 1 del presente informe, se puede decir que resulta de gran importancia conocer el como funcionan determinados métodos para el calculo de integrales, o mejor dicho para la aproximación de integrales, de igual manera poder discernir que método es mas eficiente que otro a la hora de requerir la implementación de alguno de estos. Ahora bien de acuerdo a los resultados se puede concluir que el Método de Los Trapecios fue el menos eficiente de los tres métodos probados, el cual excedía en una gran cantidad en el numero de iteraciones a los Métodos de Simpson. De estos últimos se puede decir que para los parámetros establecidos en las pruebas ambos se comportaban de manera muy similar, sin embargo es posible dilucidar que a medida que los intervalos se hacen mas grandes la diferencia entre Simpson Un Tercio y Tres Octavos se va haciendo mas grande aun, pero ahora bien tomando solamente los resultados que fue posible probar, se puede decir que Simpson Tres Octavos es muas eficiente que Simpson Un Tercio, considerando solamente el numero de iteraciones.

Para segunda parte, el método de las diferencias finitas no es muy complicado de entender cuando se le estudia bien, sin embargo en esta ocasión la implementación no resulto tan fácil como se esperaba, y como ya se menciono de igual manera gráficamente no se pudo visualizar de buena forma lo que pretendía mostrar la delación del problema y sus ecuaciones, tal vez con un gráfico distinto se hubiera podido lograr ese cometido.

Bibliografía

- https://sites.google.com/site/metnum00/home/unidad-iii/3-8-metodo-de-diferencias-finitas
- http://mmc2.geofisica.unam.mx/cursos/hidrogeologia/NotasCurso/1-MDF$1_1 - 10.pdf$
- https://cristiancastrop.files.wordpress.com/2010/09/apuntes-h-scaletti-metodo-de-diferencias-finitas-para-edo.pdf
- https://la.mathworks.com/help/matlab/ref/cylinder.html
- https://www.youtube.com/watch?v=$_0b7980WtI0t = 424s$
- https://fjarabo.webs.ull.es/VirtualDoc/Curso
- https://www.aprendematematicas.org.mx/unit/integracion-aproximada-regla-simpson/
- http://148.202.248.167/ojs/index.php/e-gnosis/article/view/816
- https://link.springer.com/article/10.1007/s40819-020-0770-4
- https://www.youtube.com/watch?v=z9dyXLnT274