MAT104 Problem Saati

Araș. Gör. İsmail GÜZEL

iguzel@itu.edu.tr

https://web.itu.edu.tr/iguzel/

İstanbul Teknik Üniversitesi

Soru 1.

$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \tan^2\left(\frac{1}{n}\right)$ serisinin yakınsak olup olmadığını inceleyiniz.

$a_n = n^2 \tan^2\left(\frac{1}{n}\right)$ olsun. $\lim_{n\to\infty} a_n = ?$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} n^2 \cdot \tan^2\left(\frac{1}{n}\right) \quad (\infty \cdot 0) \longrightarrow \left(\frac{0}{0}\right) \text{ ya da } \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\tan^2\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\tan\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}\right)^2 = \left(\lim_{u\to 0} \frac{\tan u}{u}\right)^2 = 1^2 = 1$$

Sonuç olarak, $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ olduğundan

"n. terim testine" göre $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \tan^2\left(\frac{1}{n}\right)$ serisi ıraksaktır. //

$\lim_{n\to\infty} a_n$ yoksa veya sıfırdan farklı ise, $\sum a_n$ ıraksaktır.

Soru 2.

$$1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \ldots = \frac{x}{x-1}$$

eşitliğini $x > 1$ için kanıtlayınız. Bu eşitliği kullanarak 0.131313... sayısının rasyonel sayı karşılığını hesaplayınız.

Eğer $x>1$ ise $\frac{1}{x}<1$. Geometrik Seri tanımını kullanırsak,

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}, \quad |r|<1$$

$$1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{x}} = \frac{x}{x-1}, \quad \frac{1}{x}<1$$

$$0.131313\ldots = \frac{13}{100}+\frac{13}{100^2}+\frac{13}{100^3}+\cdots = \frac{13}{100}\left(1+\frac{1}{100}+\frac{1}{100^2}+\cdots\right)$$

$$= \frac{13}{100}\cdot\frac{100}{100-1} = \frac{13}{99}. \quad r=\frac{1}{100}, \quad x=100$$

Soru 3.

$\lim_{n\to\infty} a_n = a$ ise $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1}) = a_1 - a$ olduğunu gösteriniz.

Bu özelliği kullanarak, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$ serisinin toplamını hesaplayınız.

$$\sum_{n=1}^{N}(a_n - a_{n+1}) = a_1 - a_2 + a_2 - a_3 + \dots + a_N - a_{N+1} = a_1 - a_{N+1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1}) = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}(a_n - a_{n+1}) = \lim_{N\to\infty}(a_1 - a_{N+1}) = a_1 - \lim_{N\to\infty} a_{N+1}$$

$$= a_1 - a \quad //$$

$$\lim_{N\to\infty} a_{N+1} = \lim_{n\to\infty} a_n = a$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) - \dots = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - 0 = 1 \qquad a_n = \frac{1}{n} \text{ ve } \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad //$$

Soru 4.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1 \ln(n+1)}$$ serisinin yakınsak olup olmadığını inceleyiniz.

$f(x) = \dfrac{1}{(x+1)\ln(x+1)}$ olsun. $x>1$ için $f(x)$ sürekli ve pozitiftir.

$f'(x) = -\dfrac{\ln(x+1)+1}{\left((x+1)\ln(x+1)\right)^2} < 0$, $x>1$. Dolayısıyla, f azalandır.

İntegral testini kullanarak,

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{(x+1)\ln(x+1)}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{1}{(x+1)\ln(x+1)}\,dx = \lim_{b\to\infty} \ln(\ln(x+1))\Big|_{x=1}^{x=b}$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[\ln(\ln(b+1)) - \ln(\ln 2)\right] = \infty$$

İntegral ıraksaktır.

İntegral testine göre seri ıraksaktır. //

Soru 5.

Eğer $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yakınsak ise, $\sum_{n=1}^{\infty} {a_n}^2$ serisininde yakınsak olduğunu kanıtlayınız.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yakınsak ise $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Limit Karşılaştırma Testine göre,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n^2}{a_n} = \lim_{n\to\infty} a_n = 0 = L$$

$L=0$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yakınsak olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ yakınsaktır.

Limit Karşılaştırma Testi

Her $n \geq N$ için $a_n > 0$ ve $b_n > 0$

- $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0$ ise $\sum a_n$ ve $\sum b_n$ ikisi birden yakınsak veya ıraksaktır.
- $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ ve $\sum b_n$ yakınsak ise $\sum a_n$ yakınsaktır.
- $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ ve $\sum b_n$ ıraksak ise $\sum a_n$ ıraksaktır.

Soru 6.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^3+7}{n^4 \sin^2 n}$ yakınsak olup olmadığını inceleyiniz.

$$\frac{2n^3+7}{n^4 \sin^2 n} > \frac{2n^3}{n^4 \sin^2 n} = \frac{2}{n \sin^2 n} > \frac{2}{n} , \quad 0 \le \sin^2 n \le 1$$

$$\Rightarrow \sum \frac{2n^3+7}{n^4 \sin^2 n} > \sum \frac{2}{n}$$

$\sum \frac{2}{n}$ ıraksaktır. $(p=1)$

Karşılaştırma Testine göre, $\sum \frac{2n^3+7}{n^4}$ ıraksaktır.

Soru 7.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^n}$ yakınsak olup olmadığını inceleyin.

$$a_n = \frac{n!}{5^n} \qquad a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{5^{n+1}} = \frac{(n+1)\,n!}{5^n \cdot 5} = \frac{n+1}{5} \cdot a_n$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{n+1}{5} \cdot a_n}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n+1}{5} \right| = \infty$$

Oran Testine göre, ıraksaktır.

Oran Testi

$\sum a_n$ pozitif terimli ve $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$

- $\rho < 1 \Rightarrow$ seri yakınsak
- $\rho > 1$ veya sonsuz $\Rightarrow$ seri ıraksaktır.
- $\rho = 1 \Rightarrow$ Test sonuçsuzdur.

Soru 8.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^{1+n}}$ serisinin yakınsak olup olmadığını inceleyin.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{2^{1+n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^{\frac{1}{n}+1}} = \infty$$

Kök testine göre, seri ıraksaktır.

Kök Testi

$\sum a_n$, $n \geq N$, $a_n \geq 0$ ve $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho$

- $\rho < 1 \Rightarrow$ yakınsar
- $\rho > 1$ veya sonsuz $\Rightarrow$ ıraksar
- $\rho = 1$ ise test sonuçsuzdur.

Soru 9.

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{\sqrt{n}}$ serisinin yakınsak, mutlak yakınsak, koşullu yakınsak ya da ıraksak olup olmadığını inceleyin.

$\cos(n\pi) = (-1)^n$. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{\sqrt{n}} = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$, $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ olsun.

$\boxed{u_n > 0}$

$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ ✓

$u_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n}} = u_n$ ✓

Üç koşul sağlandığına göre Alterne seri testinden seri yakınsaktır.

$\sum_{n=2}^{\infty} \left| \frac{\cos(n\pi)}{\sqrt{n}} \right| = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, $p = \frac{1}{2} < 1$ ıraksaktır. Bu yüzden seri mutlak yakınsak değildir. Seri yakınsak fakat mutlak yakınsak olmadığından koşullu yakınsaktır.

Alterne Seriler Testi (Leibniz Teoremi)

$$\sum (-1)^{n+1} u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots$$

serisi aşağıdaki üç koşulu da sağlarsa yakınsar:

1) u_n'lerin hepsi pozitiftir.

2) Her $n \geq N$ için $u_n \geq u_{n+1}$'dir. (N bir tamsayı)

3) $u_n \to 0$