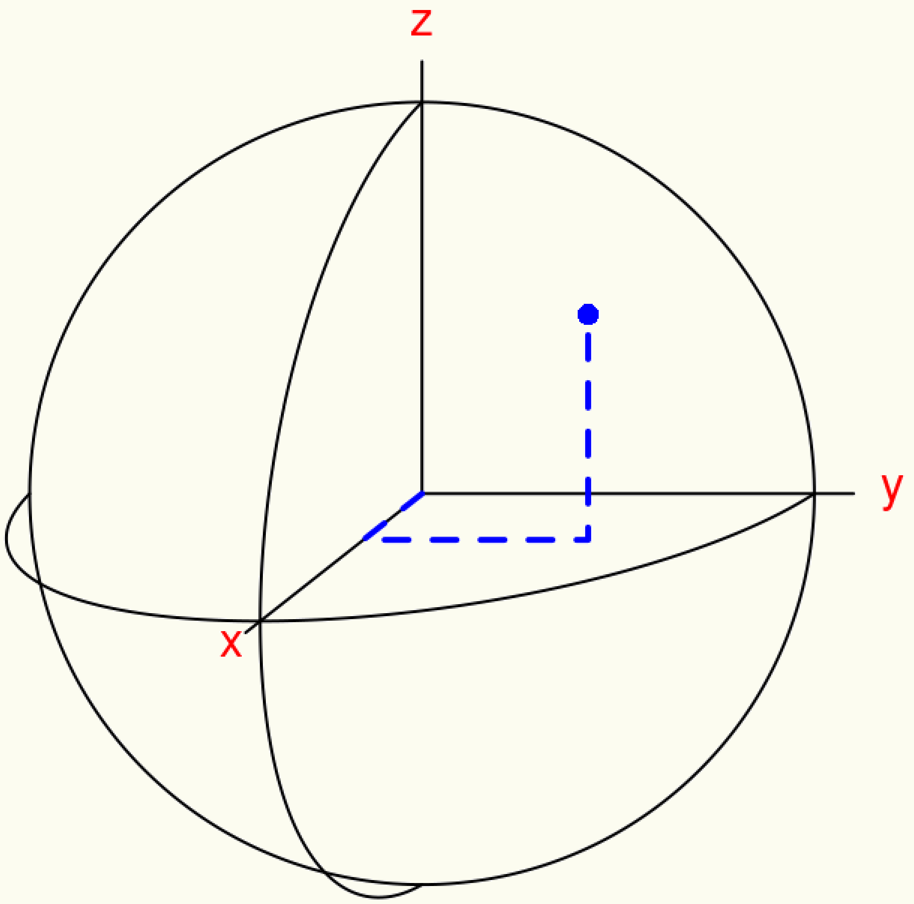
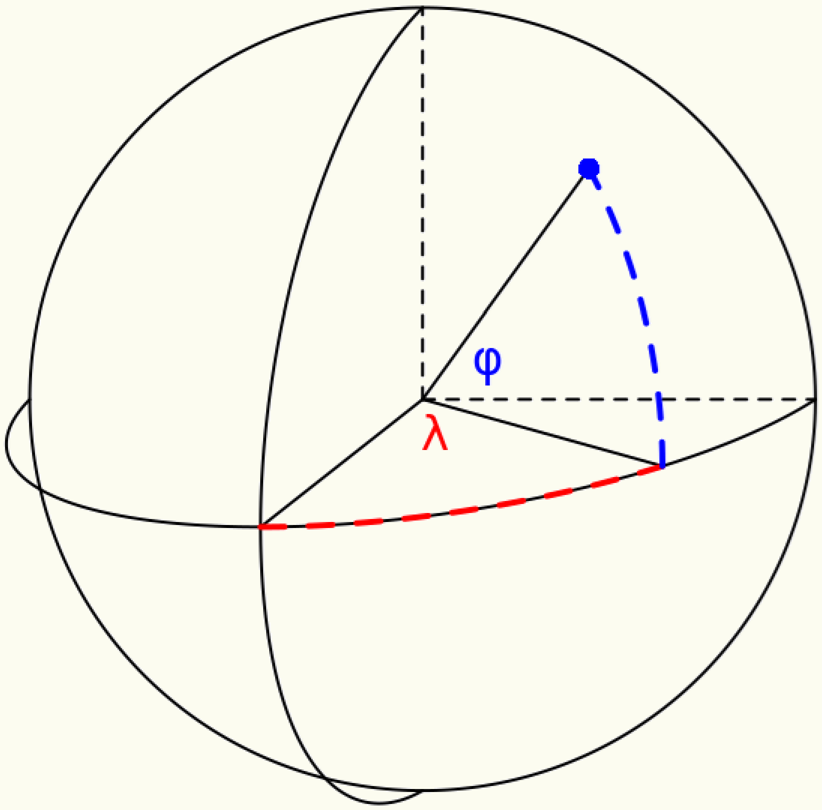
جلسه اول حل تمرین ژئودزی هندسی

سیستم های مختصات و دیتوم ها

تبدیل مختصات کارتزین به منحنی الخط و برعکس

- یکی از مباحث مهم و کاربردی در محاسبات ژئودزی تبدیل بین مختصات کارتزین و منحنــی الخـط در یـک دستگاه مختصات مرجع ژئودتیک می باشد.
- بیضوی ای که در ژئودزی بعنوان سطح مقایسه به کار میرود یک بیضوی دورانی است که از دوران یک بیضی حول محور اقصرش بوجود می آید، از سیستم مختصات کارتزین برای مشخص کردن مختصات روی سطح بیضوی مقایسه استفاده می شود.





- مختصات ژئودتیک هر نقطه با ϕ (عرض ژئودتیک)، λ (طول ژئودتیک)، h (ارتفاع ژئودتیک) معرفی می شود که به آن مختصات منحنی الخط گفته می شود.
- علاوه بر مختصات منحنی الخط ، هر نقطه دارای مختصات کارتزین X،Y و Z هست.
- این دو دسته مختصات هم ارز یکدیگر می باشند.

- مبدا هر دو دستگاه مختصات روی مرکز بیضوی قرار دارند.

- اکثر کارهای نقشه برداری روی بیضوی مقایسه (و با مختصات کارتزین) انجام می شوند اما تفسیر نتایج با مختصات ژئودتیک روی یک بیضوی مرجع، راحت تر و مهم تر است.

تبدیل مختصات ژئودتیک (ϕ, λ, h) به مختصات کارتزین (x, y, z)

- بردار r در معادله زیر، بردار وضـعیت نقطه را نسبت به سیستم مختصاتی که مبدا آن مرکز بیضوی است، مشخص می کند.

$$\vec{r}_i = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = N \begin{bmatrix} \cos\varphi\cos\lambda \\ \cos\varphi\sin\lambda \\ \dfrac{b^2}{a^2}\sin\varphi \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} \cos\varphi\cos\lambda \\ \cos\varphi\sin\lambda \\ \sin\varphi \end{bmatrix}$$

که در آن a و b به ترتیب قطر اطول و قطر اقصر بیضوی مقایسه هستند.

تبدیل مختصات کارتزین (x, y, z) به مختصات منحنی الخط (ϕ, λ, h)

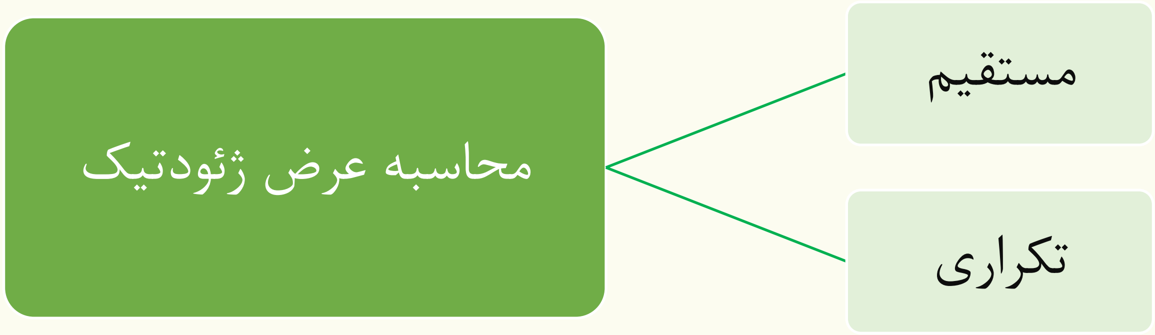
- با تقسیم دو ردیف اول، طول ژئودتیک را می توان مستقیما از فرمول زیر حساب نمود:

$$\lambda = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

- با همین روش برای عرض ژئودتیک و ارتفاع، چون خود N (شعاع مقطع قائم اولیه) تابعی از عرض ژئودتیک هست، به مشکل بر خواهیم خورد. (وجود ϕ در هر دو طرف معادله)

$$N = \frac{a}{\left(\cos^2\varphi + \frac{b^2}{a^2}\sin^2\varphi\right)^{\frac{1}{2}}}$$

- روش های حل عرض ژئودتیک به دو روش کلی (مستقیم و تکراری دسته بندی می شوند)



- روش های تکراری روش های ساده ای هستند که در صورت ارتفاع کم، با حداکثر ۳ تکرار به جواب می رسند. (زیر ۱۰۰۰۰متر)

روش تکراری

- روش های تکراری به دو گروه تبدیل می شوند:

$$N_0 = a$$

$$h_0 = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} - (ab)^{\frac{1}{2}}$$

$$\varphi = \tan^{-1}[(\frac{z}{P})(1 - \frac{e^2 N}{N + h})^{-1}]$$

روش تکراری

روش های تکراری، برنامه نویسی ساده تری دارند اما به واسطه نیاز به مقادیر اولیه و تکرار، دیر تر به جواب میرسند.

- برای شروع تکرار به روش مثلثاتی از مقادیر اولیه ی زیر استفاده میکنیم:

$$N_0 = a$$

$$h_0 = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} - (ab)^{\frac{1}{2}}$$

$$\varphi = \tan^{-1}[(\frac{z}{P})(1 - \frac{e^2 N}{N + h})^{-1}]$$

- و در تکرار های بعدی از روابط زیر (i: مرتبه تکرار) استفاده می کنیم.

$$N_i = \frac{a}{(\cos^2 \varphi_{i-1} + \frac{b^2}{a^2}\sin^2 \varphi_{i-1})^{\frac{1}{2}}}$$

$$h_i = \frac{P}{\cos \varphi_{i-1}} - N_i$$

$$\varphi_i = \tan^{-1}[(\frac{z}{P})(1 - \frac{e^2 N_i}{N_i + h_i})^{-1}]$$

- که در آن Z و P به شرح زیرند:

$$P = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$z = (N\frac{b^2}{a^2} + h)\sin \varphi$$

- {تکرار تا زمانی که به دقت مناسب برسیم، ادامه دارد.}

روش مستقیم

- برای حل معادلات مستقیم روابط مختلفی وجود دارد که در زیر به شرح یکی از این روش ها پرداخته شده است:
- از آنجا که

$$\frac{z}{p} = \tan\varphi(1 - \frac{e^2 N \cos\varphi}{P})$$

$$P\tan\varphi - z = e^2 N \sin\varphi$$

(می توان N را بر حسب a و b در این فرمول جاگذاری نمود.)

بنابراین

$$P\tan\varphi - z = \frac{a e^2 \sin\varphi}{(\cos^2\varphi + \frac{b^2}{a^2}\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}}$$

روش مستقیم

با تقسیم صورت و مخرج بر cos ϕ به رابطه ای بر حسب tan ϕ خواهیم رسید که تمام ضرایب آن معلوم است:

$$P\tan\varphi - z = \frac{ae^2\sin\varphi}{(\cos^2\varphi + \frac{b^2}{a^2}\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}}$$

$$(P\tan\varphi - z)(1+(1-e^2)\tan^2\varphi)^{\frac{1}{2}} = ae^2\tan\varphi$$

$$P = (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$z = (N\frac{b^2}{a^2} + h)\sin\varphi$$

$$(P\tan\varphi - 2Pz\tan\varphi + z^2)(1+(1-e^2)\tan^2\varphi)^{\frac{1}{2}} = a^2e^4\tan^2\varphi$$

$$P^2\tan^4\varphi - 2Pz\tan^3\varphi + (\beta + z^2)\tan^2\varphi - \frac{2Pz\tan\varphi}{1-e^2}? = 0$$

$$\beta = \frac{P^2 - a^2e^4}{(1-e^2)}$$

به نظر شما این دو روش نسبت بهم برتری دارند؟

در حل مسئله به روش دوم، نیازی به تعریف مقدار اولیه نیست و از آنجا که چرخه حل مسئله وارد حلقه تصحیح نمیشه، سرعت محاسبه عرض در روش مستقیم بیشتر از روش تکراری است.

تبدیلات مختصات بین دو بیضوی مختلف

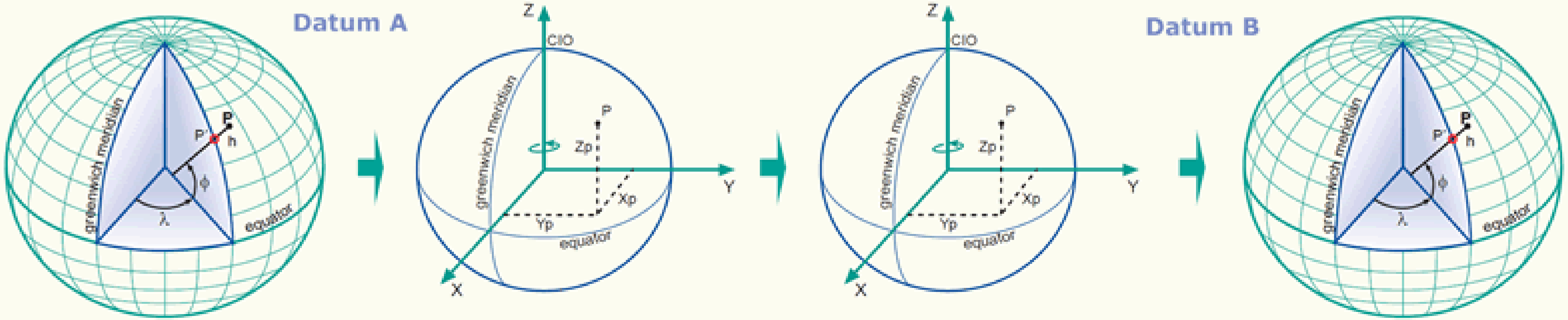
- چون نقشه ها و برداشت های نقشه برداری در چارچوب ها و بیضوی های مختلفی اندازه گیری و ارائه می شوند (بسته به نیاز و نظر کارفرما)، اغلب به تبدیل مختصات، از یک سطح مبنای ژئودتیک به یک سطح مبنای ژئودتیک دیگر، نیاز است.

- همچنین با توجه به پیشرفت هایی که در دقت دیتوم تقریب زننده یک محل خاص اتفاق می افتد ممکن است نیاز به آپدیت داده ها و نقشه ها داشته باشیم.

- و چون پارامترهای تعیین کننده دو بیضوی متفاوت است، مختصات هر نقطه دلخواه در این دو بیضوی متفاوت است که با این تبدیلات باید به آن رسید.

- معمولا در برداشت با دوربین، پهپاد، GPS و ... در حین ارائه و یا مطالعه مختصات در محدوده مورد برداشت با این موضوع برخورد خواهیم کرد

• برای تبدیل یک سـیستم به سیستم دیگر، باید مبدأ و وضعیت محورهای مختصـات یکی، نسبت به مبدأ و وضعیت محورهای مختصـات دیگری، مشخص گردد. یعنی سه مختصات و سه دوران که جمعا شش پارامتر می شوند باید تعیین شوند. و برای تعریف کامل یک دیتوم، علاوه بر ۶ پارامتر فوق، نیاز به تعریف ۲ پارامتر دیگر که مربوط به شکل و اندازه ی بیضوی می شوند (a و b) است.



• در چنین شرایطی معمولا مختصات منحنی الخط در یک دیتوم مشخص است و مختصات منحنی الخط آن در دیتوم دیگر باید تعیین شود.

تبدیلات مختصات بین دو بیضوی مختلف

- فرض میکنیم محل مراکز هندسی دو بیضوی نسبت به مرکز ثقل زمین معلوم اند.

- همچنین باید پارامترهای مربوط به دو بیضوی در دسترس باشند.

- برای این هدف، دو روش وجود دارد:

1. روش تکراری
2. روش دیفرانسیلی

روش تکراری

- در این روش ابتدا مختصات ژئودتیک از دو بیضوی را به مختصات کارتزین تبدیل میکنیم.
- تبدیل مختصات کارتزین از دستگاه اول به دستگاه زمینی متوسط (سیستم مختصات ایده آل ژئودزی) با استفاده از روابط تبدیل
- همچنین این رابطه را برای بیضوی دوم نیز خواهیم داشت.
- از آنجا که تغییر دیتوم تاثیری روی مختصات دستگاه زمینی متوسط نخواهد داشت. طرف چپ روابط زیر با هم مساوی هستند.

$$(\vec{r}_0)_2 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}_2 \quad \text{و} \quad (\vec{r}_0)_1 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}_1$$

- بنابراین به راحتی می توان از روی پارامترهای مشخص کننده دیتوم و همچنین مختصات منحنی الخط بیضوی اول، به مختصات کارتزین در بیضوی دوم رسید.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{A.T.} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}_1 + \begin{bmatrix} (\mathrm{N}_1 + \mathrm{H}_1)\cos\varphi_1 \cos\lambda_1 \\ (\mathrm{N}_1 + \mathrm{H}_1)\cos\varphi_1 \sin\lambda_1 \\ (N_1 \dfrac{b_1^{\ 2}}{a_1^{\ 2}} + h_1)\sin\varphi_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{A.T.} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}_2 + \begin{bmatrix} (\mathrm{N}_2 + \mathrm{H}_2)\cos\varphi_2 \cos\lambda_2 \\ (\mathrm{N}_2 + \mathrm{H}_2)\cos\varphi_2 \sin\lambda_2 \\ (N_2 \dfrac{b_2^{\ 2}}{a_2^{\ 2}} + h_2)\sin\varphi_2 \end{bmatrix}$$

- محل مراکز هندسی دو بیضوی نسبت به مرکز ثقل زمین:

$$(\vec{\mathrm{r}}_0)_2 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}_2 \quad \text{و} \quad (\vec{\mathrm{r}}_0)_1 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}_1$$

روش دیفرانسیلی

- این روش را تنها زمانی می توان استفاده نمود که کـه پـارامترهـای اختلاف بین دو بیضـــوی، به قدری کوچک باشـند که بتوان تقریبات خطی سری تیلور را بکار برد. (اختلاف مختصات نقطه در دو بیضوی کوچک است بنابراین می توان تغییرات آن را بصورت دیفرانسیلی در نظر گرفت)

- {چون مختصات در A.T. ثابت است پس، مشتقات آن نیز صفر خواهد بود. پس می توان از آن مشتق گرفته و میزان اختلاف مختصات نقطه در دو بیضوی را برابر اختلاف بین دو بیضوی دانست.}

$$\begin{bmatrix} \varphi_2 \\ \lambda_2 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \lambda_1 \\ h_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta\varphi \\ \delta\lambda \\ \delta h \end{bmatrix}$$

روش دیفرانسیلی

- بعد از مشتق گرفتن از روابط کلی، به رابطه ی فشرده ی زیر خواهیم رسید:

$$\begin{bmatrix}\varphi_2\\ \lambda_2\\ h_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\varphi_1\\ \lambda_1\\ h_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\delta\varphi\\ \delta\lambda\\ \delta h\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial\varphi} & \frac{\partial x}{\partial\lambda} & \frac{\partial x}{\partial h} & \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial x}{\partial f} & \frac{\partial x}{\partial x_0} & \frac{\partial x}{\partial y_0} & \frac{\partial x}{\partial z_0}\\ \frac{\partial y}{\partial\varphi} & \frac{\partial y}{\partial\lambda} & \frac{\partial y}{\partial h} & \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial f} & \frac{\partial y}{\partial x_0} & \frac{\partial y}{\partial y_0} & \frac{\partial y}{\partial z_0}\\ \frac{\partial z}{\partial\varphi} & \frac{\partial z}{\partial\lambda} & \frac{\partial z}{\partial h} & \frac{\partial z}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial f} & \frac{\partial z}{\partial x_0} & \frac{\partial z}{\partial y_0} & \frac{\partial z}{\partial z_0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}d\varphi\\ d\lambda\\ dh\\ da\\ df\\ dx_0\\ dy_0\\ dz_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\delta x_0\\ \delta y_0\\ \delta z_0\end{bmatrix}+J\begin{bmatrix}\delta\varphi\\ \delta\lambda\\ \delta h\end{bmatrix}+B\begin{bmatrix}\delta a\\ \delta f\end{bmatrix}=0$$

روش دیفرانسیلی

- که در آن ماتریس های B و J برابر خواهند بود با:

$$J = \begin{bmatrix} -(M+h)\sin\varphi\cos\lambda & -(N+h)\cos\varphi\sin\lambda & \cos\varphi\cos\lambda \\ -(M+h)\sin\varphi\sin\lambda & (N+h)\cos\varphi\cos\lambda & \cos\varphi\sin\lambda \\ (M+h)\cos\varphi & 0 & \sin\varphi \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} N\cos\varphi\cos\lambda / a & M\sin^2\varphi\cos\varphi\cos\lambda / 1-f \\ N\cos\varphi\sin\lambda / a & M\sin^2\varphi\cos\varphi\sin\lambda / 1-f \\ N(1-f)^2\sin\varphi / a & (M\sin^2\varphi - 2N)\sin\varphi / 1-f \end{bmatrix}$$

- و M برابر خواهد بود با شعاع نصف النهاری:

$$M = \frac{a(1-f)^2}{(\cos^2\varphi + (1-f)^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}$$

تمرین اول

- بیضوی مبنای WGS84 با پارامترهای مقابل را در نظر بگیرید.

$$a = 6378137$$
$$1/f = 298.2572$$

1. مختصات منحنی الخط میدان آزادی تهران را در نظر گرفته و با استفاده از روابط ذکر شده، مختصات کارتزین آن را محاسبه نمایید.

2. با استفاده از مختصات کارتزین بدست آمده از مرحله قبل، سعی کنید بار دیگر مختصات منحنی الخط میدان آزادی را محاسبه نمایید.

3. آیا پس از حل معکوس، مختصات منحنی الخط اولیه، با نتیجه حاصل مساوی است؟ چرا؟

تمرین دوم

- دو بیضوی با پارامترهای تعیین کننده‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{array}{ll}
1: & 2: \\
a = 6378137 & a = 6378388 \\
f = 1/298.2572 & f = 1/297 \\
x_0 = -25.8 & x_0 = -64.6 \\
y_0 = -168.1 & y_0 = -154.8 \\
z_0 = 167.8 & z_0 = -46.2
\end{array}$$

- اگر نقطه ای با مختصات ژئودتیک زیر در بیضوی اول داشته باشیم، مطلوب است مختصات این نقطه در بیضوی دوم؟

$$h = 37.46$$
$$\lambda(rad) = 1.110238844$$
$$\phi(rad) = 0.779865469$$