§2. Декартово произведение. Принцип расширения. Меры возможности, необходимости, уверенности

Напомним, что декартовым произведением обычных множеств $X_1, \ldots, X_n$ называется множество, обозначаемое $X_1 \times \ldots \times X_n$, элементы которого являются $(x_1, .., x_n)$, где $x_1 \in X_1, \ldots, x_n \in X_n$

Пусть A_1-нечеткое множество с универсальным множеством $X_1, \ldots, A_n$ - нечеткое множество с универсальным множетсвом Xn

Опред.2.1 Декартовым произведением нечетких множеств $A_1 \ldots A_n$, называется нечеткое множество, обозначаемое $A_1 \times \ldots \times .. A_n$, универсальным множество для которого является $X_1 \times \ldots \times Xn$ и функция принадлежности которого имеет вид либо

$\mu = \min(\mu A1(x1), \ldots, \mu An(xn))$

либо

$\mu = \mu A1(x1) * \ldots * \mu An(xn)$

Принцип расширения

Пусть X и У – два универсальных множества, φ: X -> У

Если B – нечеткое множестве с универсальным множеством E, то может быть определено нечеткое множество φ^{-1}(B) множества X следующим образом:

$$\mu_{\varphi^{-1}}(x) = \mu_B(\varphi(x)) , \; x \in X$$

Если A – нечеткое множество с универсальным множеством X , φ – взаимно - однозначное отображение, то может быть определено нечеткое множество φ(A) множества следующим образом:

$$\mu_{\varphi(A)}(y) = \mu_A(\varphi^{-1}(y)), \qquad y \epsilon Y$$

Как быть, если отображение φ не взаимно-однозначно?

Тогда

$$\mu_{\varphi(A)}(y) \; = \sup_{x \epsilon \mathrm{X}:\varphi(\mathrm{x})=\mathrm{y}} \mu_A(x), \qquad y \epsilon Y$$

Такой подход называют принципом расширения Заде.

Во многих приложениях нечеткие множества целесообразно рассматривать «связками». Например, *ошибка*, возникающая в том или ином процессе, может быть

- *большой отрицательной*
- *малой отрицательной*
- *нулевой*
- *малой положительной*
- *большой положительной*

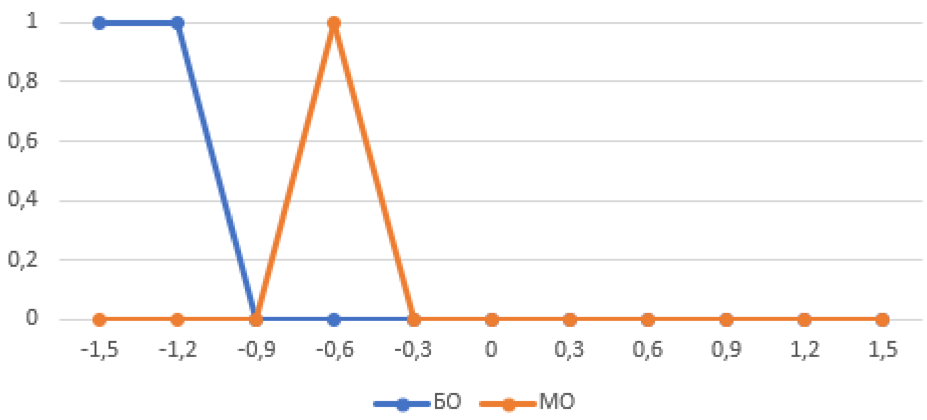
, т.е. 5 нечетких множеств

Функции принадлежности нечетких множеств могут быть такими:

	-1.5	-1.2	-0.9	-0.6	-0.3	0	0.3	0.6	0.9	1.2	1.5
БО	1	1	0.5	0	0	0	0	0	0	0	0
МО	0	0	0.5	1	0.8	0	0	0	0	0	0
Н	0	0	0	0	0.2	1	0.2	0	0	0	0
МП	0	0	0	0	0	0	0.8	1	0.5	0	0
БП	0	0	0	0	0	0	0	0	0.5	1	1

В данном примере универсальным множество является отрезок X = [-1.5; 1.5]

Значение функции принадлежности в других точках отрезка [-1.5; 1.5] определяется с помощью линейной интерполяции.



Требованием, чтобы при любом x сумма значений всех функций принадлежности была равна единице, не является обязательным. Однако соблюдение этого требования является полезным во многих расчетах.

Приведенный пример является примером *лингвистической переменной*

Наименование лингвистической переменной «ошибка»

Опред 2.2. Терм-множество лингвистической переменной - это множество ее значений: БО, МО, Н, МП, БП. Значение лингвистической переменной представляет собой нечеткое множество. Причем универсальное множество для всех значений одной лингвистической переменной одно и то же.

Меры возможности, необходимости, уверенности

Пусть R – некоторого кольцо подмножеств некоторого множества X

Опред 2.3 Возможностной мерой (мерой возможности) называется функция

$$Pos: R \rightarrow [0;\ 1],$$

если $Pos\ (\emptyset)\ =\ 0$ и для любых $A, B\ \epsilon\ R, Pos(A \cup B)\ = \ max\ (\ Pos(A);\ Pos(B))$

Пример Пусть C ϵ R. Положим для любого A ϵ R

Pos(A)= $\begin{cases} 0, & A \cap C = \emptyset \\ 1, & A \cap C \neq \emptyset \end{cases}$

В дальнейшем будем считать, что кольцо R является алгеброй и Pos(X) = 1

$$\text{Если A} \subseteq \text{B, то B} = \text{A} \cap (\text{B} \setminus \text{A})$$

Поэтому

$$Pos(B)\ \ = \ max\ (\ Pos(A);\ Pos(B))$$

$$Pos(A)\ \le\ Pos(B)$$

Из соотношения

$$Max\ (Pos(A), Pos\ (\overline{\text{A}})) = 1$$

следует, что

$$Pos(A) + Pos(\text{не A}) \geq 1$$

Опред. Мерой необходимости называется определенная на алгебре R функция $Nec: R \rightarrow [0,1]$, задаваемая соотношением $Nec(A) = 1 - Pos(\overline{\mathrm{A}})$

Покажем, что для любых А, В $\epsilon\ R$

$$Nec\ (A \cap \mathrm{B}) = min\ (Nec\ (A), Nec(B))$$

Действительно, $Nec(A \cap \mathrm{B}) = 1 - Pos\ (\overline{(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}) = 1 - Pos(\overline{\mathrm{A}} \cup \overline{\mathrm{B}}) =$

$$1 - max(Pos(\overline{\mathrm{A}}), Pos(\overline{\mathrm{B}})) = min\ (1 - pos(\overline{\mathrm{A}}), 1 - pos(\overline{\mathrm{B}})) = min(Nec(A), Nec(B))$$

Из определения следует, что Nec(∅) = 0. Поэтому для любого множества А ϵ R

$$Min\ (Nec(A), Nec(not\ A)) = 0$$

Отсюда следует, что $Nec(A) + Nec(\bar{A}) \leq 1$

Покажем, что для любого А ϵ R

$$Nec(A) \leq Pos(A)$$

Неравенство очевидно, если Pos(A) = 1

Если $Pos(not\ \bar{A}) = 1$, то $Nec(A) = 1 - Pos(notA) = 0$ и неравенство выполняется

Опред 2.4. Мерой уверенности называется определенное на алгебре R функция $Cr: R \rightarrow [0;\ 1]$, задаваемая соотношением $Cr = ½ * (Pos(A) + Nec(A))$

Нетрудно увидеть, что для любого $\mathrm{A}\ \epsilon\ R, Cr(A) + Cr(\bar{A}) = 1$

Действительное, $Cr(A) + Cr(not\ A) = ½ * (Pos(A) + 1 - Pos(\bar{A}) + Pos(\bar{A}) + 1 - Pos(A)) = 1$

Из доказанного неравенства $Nec(A) \leq Pos(A)$ следует, что для любого А $\epsilon\ R$,

$$Nec(A) \leq Cr(A) \leq Pos(A)$$

Рассмотрим случай, когда кольцо R состоит из конечных подмножеств множества X. (здесь мы отказываемся от условия, чтобы R было алгеброй).
Пусть μ_A – функция принадлежности нечеткого множества A

Pos({x}) = $\mu_A(x)$ *-связанная с этой функцией принадлежности возможностная мера*

Тогда pos ({x_1,…,x_n}) = max($\mu_A(x), \ldots, \mu_n(x)$)