

מבוא להצפנה – תרגיל 2

1.

נחפש קודם את אורך המפתח. נחשב את מספר ההתאמות כשמזיזים את הטקסט בשני מקומות ובשלושה מקומות:

0	1	2	2	1	2	2	1	0	2	2	1	2	1	1
		0	1	2	2	1	2	2	1	0	2	2	1	1
			0	1	2	2	1	2	2	1	0	2	2	1

עבור שני מקומות יש 3 התאמות ועבור שלושה מקומות 7. מספר ההתאמות הגדול יותר מסמן את אורך המפתח הסביר ביותר, לכן אורך המפתח הוא 3.

נחלק את ההודעה לבלוקים של 3 אותיות לפי:

0	1	2		2	1	2		2	1	0		2	2	1		2	1	1
---	---	---	--	---	---	---	--	---	---	---	--	---	---	---	--	---	---	---

נחפש עכשיו את המפתח.

לפי הנתון, ווקטורי התדירות A_i הם:

$$A_0 = [0.7, 0.2, 0.1]$$

$$A_1 = [0.1, 0.7, 0.2]$$

$$A_2 = [0.2, 0.1, 0.7]$$

האותיות הראשונות של הבלוקים הם:

0 2 2 2 2

יש לנו 5 אותיות ראשונות.

1 מתוכן היא האות 0.

0 מתוכן הן האות 1.

4 מתוכן הן האותיות 2.

לכן, ווקטור התדירויות יהיה:

$$V_1 = \left[\frac{1}{5}, \frac{0}{5}, \frac{4}{5}\right] = [0.2, 0, 0.8]$$

נחשב כעת את המכפלות הסקלריות:

$$A_0 \cdot V_1 = [0.7, 0.2, 0.1] \cdot [0.2, 0, 0.8] = 0.22$$

$$A_1 \cdot V_1 = [0.1, 0.7, 0.2] \cdot [0.2, 0, 0.8] = 0.18$$

$$A_2 \cdot V_1 = [0.2, 0.1, 0.7] \cdot [0.2, 0, 0.8] = 0.6$$

הערך המקסימלי הוא עבור $i=2$ ולכן האות הראשונה של המפתח היא 2.

האותיות השניות של הבלוקים הם:

1 1 1 2 1

יש לנו 5 אותיות שניות.

0 מתוכן הן האות 0.

4 מתוכן הן האות 1.

1 מתוכן היא האותיות 2.

לכן, ווקטור התדירויות יהיה:

$$V_2 = \left[\frac{0}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{5}\right] = [0, 0.8, 0.2]$$

נחשב כעת את המכפלות הסקלריות:

$$A_0 \cdot V_2 = [0.7, 0.2, 0.1] \cdot [0, 0.8, 0.2] = 0.18$$

$$A_1 \cdot V_2 = [0.1, 0.7, 0.2] \cdot [0, 0.8, 0.2] = 0.6$$

$$A_2 \cdot V_2 = [0.2, 0.1, 0.7] \cdot [0, 0.8, 0.2] = 0.22$$

הערך המקסימלי הוא עבור $i=1$ ולכן האות השנייה של המפתח היא 1.

האותיות השלישיות של הבלוקים הם:

2 2 0 1 1

יש לנו 5 אותיות שניות.

1 מתוכן היא האות 0.

2 מתוכן הן האות 1.

2 מתוכן היא האותיות 2.

לכן, ווקטור התדירויות יהיה:

$$V_2 = [\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}] = [0.2, 0.4, 0.4]$$

נחשב כעת את המכפלות הסקלריות:

$$A_0 \cdot V_3 = [0.7, 0.2, 0.1] \cdot [0.2, 0.4, 0.4] = 0.26$$

$$A_1 \cdot V_3 = [0.1, 0.7, 0.2] \cdot [0.2, 0.4, 0.4] = 0.38$$

$$A_2 \cdot V_3 = [0.2, 0.1, 0.7] \cdot [0.2, 0.4, 0.4] = 0.36$$

הערך המקסימלי הוא עבור $i=1$ ולכן האות השלישית של המפתח היא 1.

מפתח הצפנה הוא:

2 1 1

ולכן מפתח הפענוח הוא:

$$2+2 \quad 1+1 \quad 1+1 \quad = \quad \boxed{1 \quad 2 \quad 2}$$

ההודעה המוצפנת:

0 1 2 2 1 2 2 1 0 2 2 1 2 1 1

פענוח של ההודעה:

1 0 1 0 0 1 0 0 2 0 1 0 0 0 0

2.

כדי למצוא את מטריצת המפתח, צריך לחלק את טקסט המקור לבלוקים של שתי אותיות ולמצוא שני בלוקים שאיתם ניתן לבנות מטריצה הפיכה, ז"א עם דטרמיננטה זרה ל 26.

ניקח את הבלוקים $\begin{bmatrix} 21 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V \\ i \end{bmatrix}$ ואת $\begin{bmatrix} 2 \\ 19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ t \end{bmatrix}$ ומקבלים את המטריצה $P = \begin{bmatrix} 21 & 2 \\ 8 & 19 \end{bmatrix}$ כך ש- $\begin{vmatrix} 21 & 2 \\ 8 & 19 \end{vmatrix} = 19$ ולכן המטריצה P הפיכה.

נבנה עכשיו את המטריצה הבנויה מהבלוקים המוצפנים המתאימים:

$\begin{bmatrix} 11 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l \\ g \end{bmatrix}$ ואת $\begin{bmatrix} 11 \\ 25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L \\ z \end{bmatrix}$ ומקבלים את המטריצה $Q = \begin{bmatrix} 11 & 11 \\ 25 & 6 \end{bmatrix}$.

תהי K מטריצת מפתח ההצפנה: $Q = KP \Rightarrow K = QP^{-1}$.

$$P^{-1} = \frac{1}{19} \begin{bmatrix} 19 & -2 \\ -8 & 21 \end{bmatrix} = 11 \begin{bmatrix} 19 & -2 \\ -8 & 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 16 & 23 \end{bmatrix}$$

$$K = QP^{-1} = \begin{bmatrix} 11 & 11 \\ 25 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 16 & 23 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 11 \\ 17 & 4 \end{bmatrix}$$

מטריצת הפענוח היא:

$$K^{-1} = \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 4 & -11 \\ -17 & 5 \end{bmatrix} = 7 \begin{bmatrix} 4 & -11 \\ -17 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 11 & 9 \end{bmatrix}$$

3.

a.

1 0 0 0 1 1 1 1 0 0 0 1 1

קיבלנו מחזור של 7.

אורך המחזור המקסימלי הוא: $2^6 - 1 = 63$ ולכן אורך המחזור אינו מקסימלי.

b.

יש שלושה אפסים עוקבים ולכן אורך נוסחאת הנסיגה הוא לפחות 4.
אורך המחזור המקסימלי עבור נוסחת נסיגה באורך 4 הוא: $2^4 - 1 = 15$ ואורך נוסחת הנסיגה הוא לפחות 3.

$m = 3$:

משתמשים בסיביות 1 0 0 0 1 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{cases} c_0 = 0 \\ c_2 = 1 \\ c_1 = 1 \end{cases}$$

קיבלנו את הנוסחה - $Z_{n+3} = Z_{n+1} \oplus Z_{n+2}$.
נבדוק אם הנוסחה יוצרת את הסדרה של המפתח:

1 0 0 0 0 0 0 0

בסדרת המפתח הסיביות האחרונות הן 1 ולא 0.

$m = 4$:

משתמשים בסיביות 1 0 0 0 1 1 1 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{cases} c_0 = 1 \\ c_1 = 1 \\ c_2 = 1 \\ c_1 + c_3 = 1 \end{cases} = \begin{cases} c_0 = c_1 = c_2 = 1 \\ 1 + c_3 = 1 \end{cases} = \begin{cases} c_0 = c_1 = c_2 = 1 \\ c_3 = 0 \end{cases}$$

קיבלנו את הנוסחה - $Z_{n+4} = Z_n \oplus Z_{n+1} \oplus Z_{n+2}$.
נבדוק אם הנוסחה יוצרת את הסדרה של המפתח:

1 0 0 0 1 0 1 1

בסדרת המפתח הסיביות היא 1 ולא 0.

$m = 5$:

משתמשים בסיביות 0 0 1 1 1 1 0 0 1 0 0 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{cases} c_0 + c_4 = 1 \\ c_3 = 1 \\ c_2 + c_4 = 1 \\ c_1 + c_3 = 0 \\ c_0 + c_2 + c_4 = 0 \end{cases} = \begin{cases} c_0 + c_4 = 1 \\ c_3 = 1 \\ c_2 + c_4 = 1 \\ c_1 + 1 = 0 \\ c_0 + 1 = 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 + c_4 = 1 \\ c_3 = c_1 = c_0 = 1 \\ c_2 + c_4 = 1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} c_4 = 0 \\ c_3 = c_1 = c_0 = 1 \\ c_2 + 0 = 1 \end{cases} = \begin{cases} c_4 = 0 \\ c_3 = c_1 = c_0 = c_2 = 1 \end{cases}$$

קיבלנו את הנוסחה - $Z_{n+5} = Z_n \oplus Z_{n+1} \oplus Z_{n+2} \oplus Z_{n+3}$.
נבדוק אם הנוסחה יוצרת את הסדרה של המפתח:

1 0 0 0 1 1 1 0 1 1

בסדרת המפתח הסיביות האחרונות הן 100 ולא 011.

- ולכן, אין סדרה באורך קטנה מ-6 היוצרת את סדרת המפתח.

