هوش مصنوعی

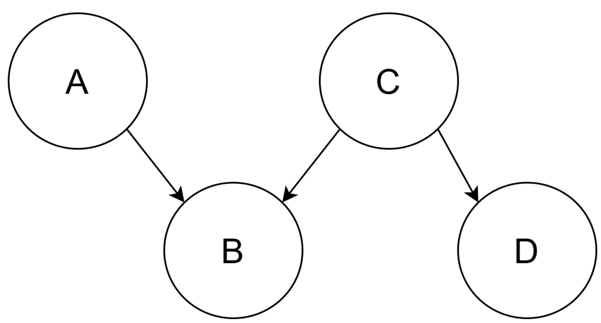
تمرین شماره ۳

مدرس: **دکتر فدایی، دکتر یعقوب‌زاده**

طراح: علی حمزه‌پور، حسام رمضانیان

احتمال و شبکه بیزی

یک شبکه بیزی به همراه جداول احتمال شرطی زیر را در اختیار داریم:



P(A)	
+a	0.3
-a	0.7

P(C)	
+c	0.2
-c	0.8

P(B|A,C)			
+a	+c	+b	1
+a	+c	-b	0
+a	-c	+b	0.6
+a	-c	-b	0.4
-a	+c	+b	0.5
-a	+c	-b	0.5
-a	-c	+b	0.3
-a	-c	-b	0.7

P(D|C)		
+c	+d	1
+c	-d	0
-c	+d	0.1
-c	-d	0.9

هر کدام از احتمال‌های زیر را با راه حل محاسبه کنید:

1. P(-a, -b, -c, -d)

$$P(-a, -b, -c, -d) = P(-a)P(-c)P(-b|-a, -c)P(-d|-c) = (0.3)(0.8)(0.7)(0.9) = 0.1512$$

2. P(+d)

$$P(+d) = P(+c)\,P(+d|+c) + P(-c)\,P(+d|-c) = (0.2)(1) + (0.8)(0.1) = 0.28$$

3. P(+c|+d)

$$P(+c|+d) = \frac{P(+d|+c)\,P(+c)}{P(+d)} = \frac{(1)(0.2)}{0.28} \approx 0.71$$

4. P(+c|+a,+b,+d)

$$P(+c|+a, +b, +d) = \frac{P(+c, +a, +b, +d)}{\sum_c P(c, +a, +b, +d) + P(c, +a, +b, +d)} = \frac{P(+a)P(+c)P(+b|+a, +c)P(+d|+c)}{\sum_c P(+a)P(c)P(+b|+a, c)P(+d|c)} \approx \frac{(0.3)(0.2)(1)(1)}{(0.3)(0.2)(1)(1) + (0.7)(0.8)(0.6)(0.1)} = \frac{0.06}{0.0936} \approx 0.64$$

5. P(+a|-m)

از آنجا که A و C مستقل هستند این مقدار برابر $P(+a) = 0.3$ می‌شود.

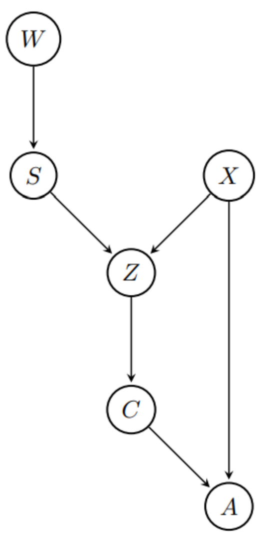
استنباط بیزی

دیجی‌کالا یک ربات انباردار هوشمند طراحی کرده است که قابلیت پرواز دارد و برای جابجایی سریع کالاها در انبارهای بزرگ استفاده می‌شود. این ربات به حسگرهای پیشرفته‌ای مجهز شده تا بتواند موقعیت خود را شناسایی کرده و بر اساس دستورات دریافتی، در انبار حرکت کند. با این حال، یکی از چالش‌های اصلی استفاده از این ربات، جلوگیری از برخورد آن با قفسه‌ها، کالاها و سایر موانع موجود در انبار است.

دیجی‌کالا یک سیستم هشداردهنده هوشمند برای ربات‌های انباردار پرنده خود طراحی کرده است. این سیستم وظیفه دارد احتمال وقوع برخورد ربات با موانع را پیش‌بینی کرده و در صورت نیاز هشدار لازم را به اپراتور بدهد. برای بررسی و تحلیل عملکرد این سیستم هشداردهنده، یک شبکه بیزی طراحی کرده‌ایم که با استفاده از داده‌های مختلف احتمال وقوع برخورد را محاسبه می‌کند. این شبکه شامل متغیرهای زیر است:

- W(بخش انبار): بخشی از انبار که ربات در آن فعالیت می‌کند. $W \in \{Heavy, Light, Packaging\}$.
- S(دقت حسگر): سطح دقت حسگرهای ربات که ممکن است تحت تأثیر شرایط محیطی باشد. $S \in \{strong, medium, weak\}$.
- X(موقعیت حقیقی): با چهار متغیر $\{x, y, z, \theta\}$ نشان داده می‌شوند. x, y, z موقعیت ربات در فضا را نشان می‌دهند و $x, y, z \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. متغیر θ نیز زاویه پرواز ربات را نشان می‌دهد و $\theta \in \{0, 90, 180, 270\}$.
- Z(موقعیت تشخیص داده شده توسط حسگرها): مانند X با چهار متغیر $\{x, y, z, \theta\}$ نشان داده می‌شوند و دامنه متغیرها هم مانند X است.
- C(دستور صادر شده): دستوری که سیستم کنترل برای حرکت ربات صادر می‌کند. $Z \in \{forward, backward, rotate\ left, rotate\ right, acsend, decsend)$
- A(هشدار برخورد): سیستم هشداردهنده‌ای که ارزیابی می‌کند آیا دستور صادر شده ممکن است باعث برخورد شود یا خیر. $A \in \{safe, unsafe\}$

نمودار این شبکه به شکل مقابل است:



بخش الف) دامنه متغیرها

1. فرض کنید N_x تعداد حالات مختلف برای مقادیر متغیر X است. مقدار N_x را بدست آورید.

$$N_x = 5 \times 5 \times 5 \times 4 = 500$$

2. تمام جداول احتمال شرطی که برای نشان‌دادن این شبکه بیزی نیاز است را بنویسید. (برای مثال به جدول $P(C|Z)$ و $P(W)$ نیاز داریم.)

$$P(W),\ P(S|W),\ P(X),\ P(Z|S, X),\ P(C|Z),\ P(A|C, X)$$

3. تعداد سطرهای جدول احتمال شرطی مربوط به متغیر Z را بدست آورید. (راهنمایی: احتمالا به مقدار N_x نیاز خواهید داشت!)

باید تعداد سطرهای جدول $P(Z|S,\ X)$ را بدست آوریم. تعداد حالات متغیرهای Z و X برابر N_x است و تعداد حالات متغیر S نیز برابر 3 است پس:

$$Num\ of\ Rows\ =\ 3\ \times\ (N_x)^2\ =\ 750000$$

بخش ب) Inference by Enumeration

فرض کنید در یک سناریو مشاهده کردیم که سیستم هشداردهنده یک ربات که در بخش Heavy قرار دارد، اخطار داده است. حال می‌خواهیم دقت حسگرها را با استفاده از این اطلاعات استنباط کنیم. به بیان دیگر می‌خواهیم $P(S\ |\ A\ =unsafe, W\ =\ Heavy\}$ را محاسبه کنیم. در هر دو سوال زیر فرض کنید مقادیر جداول احتمال شرطی(تمام جداولی که در قسمت 2 بخش قبل ذکر کردید) شبکه بیزی را در اختیار داریم.

1. این مقدار را با استفاده از روش Inference by Enumeration و از طریق $P(S\ |\ A, W)\ =\ \frac{P(S, A, W)}{P(A, W)}$ بدست آورید.

$$P(S,\ A,\ W)\ =\ \sum_c\sum_x\sum_z P(W,\ S,\ z,\ x,\ A,\ c)$$

$$=\ \sum_c\sum_x\sum_z P(W)P(S|W)\ P(z|S,\ x)P(c|z)P(A|c, x)P(x)$$

$$P(A,\ W)\ =\ \sum_s P(S,\ A,\ W)$$

2. این مقدار را با استفاده از روش Inference by Enumeration و از طریق $P(S\ |\ A, W)\ =\ \frac{P(S, A\ |\ W)}{P(A\ |\ W)}$ بدست آورید.

$$P(S,\ A|\ W)\ =\ \sum_c\sum_x\sum_z P(S,\ z,\ x,\ A,\ c|W)$$

$$= \sum_{c}\sum_{x}\sum_{z} P(S|W)\ P(z|S,\ x)P(c|z)P(A|c,x)P(x)$$

$$P(A\mid W) \ = \ \sum_{s} P(s,\ A|\ W)$$

3. قسمت 1 و 2 را مقایسه کنید و بررسی کنید کدام بهتر است.

در قسمت اول 6 فاکتور در هم ضرب می‌شوند تا حاصل بدست بیاید اما در روش دوم 5 فاکتور در هم ضرب می‌شود تا حاصل بدست بیاید. از این لحاظ روش دوم بهینه‌تر است.

بخش ج) Inference by Elimination

حال می‌خواهیم سوال 1 بخش ب را با استفاده از Inference by Elimination بنویسیم. ترتیب حذف متغیرها از چپ به راست C - X - Z خواهد بود.

1. ابتدا مقدار $P(S,A,W)$ را به صورت ضرب احتمال‌های شرطی شبکه بیزی بنویسید.(دقیقا همان کاری که در سوال 1 بخش پیش انجام دادید.)

$$P(S,\ A,\ W) \ = \ \sum_{c}\sum_{x}\sum_{z} P(W,\ S,\ z,\ x,\ A,\ c)$$

$$= \sum_{c}\sum_{x}\sum_{z} P(W)P(S|W)\ P(z|S,\ x)P(c|z)P(A|c,x)P(x)$$

2. حال ابتدا متغیر Z را از آن حذف کنید و حاصل را بنویسید.(راهنمایی: باید مکان سیگمای مربوط به متغیر Z را تغییر دهید.)

مقدار $\sum_{z} P(z|S,\ x)P(c|z)$ را زودتر محاسبه می‌کنیم تا فاکتور $P(c|S,\ x)$ بدست آید و z حذف شود:

$$P(S,\ A,\ W) \ = \ \sum_{c}\sum_{x} P(W)P(S|W)P(A|c,x)P(x)\sum_{z} P(z|S,\ x)P(c|z)$$

$$= \sum_c \sum_x P(W)P(S|W)\, P(c|S,\ x)P(A|c, x)P(x)$$

3. سپس متغیر X را از حاصل سوال 2 حذف کنید و حاصل جدید را بنویسید.

مقدار $\sum_x P(c|S,\ x)P(A|c, x)P(x)$ را زودتر محاسبه می‌کنیم تا فاکتور $P(A,\ c|S)$ بدست آید و x حذف شود:

$$P(S,\ A,\ W) = \sum_c P(W)P(S|W) \sum_x P(c|S,\ x)P(A|c, x)P(x)$$

$$= \sum_c P(W)P(S|W)\, P(A,\ c|S)$$

4. در نهایت متغیر C را حذف کرده و حاصل نهایی را بنویسید.

$$P(S,\ A,\ W) = P(W)P(S|W) \sum_c P(A,\ c|S)$$

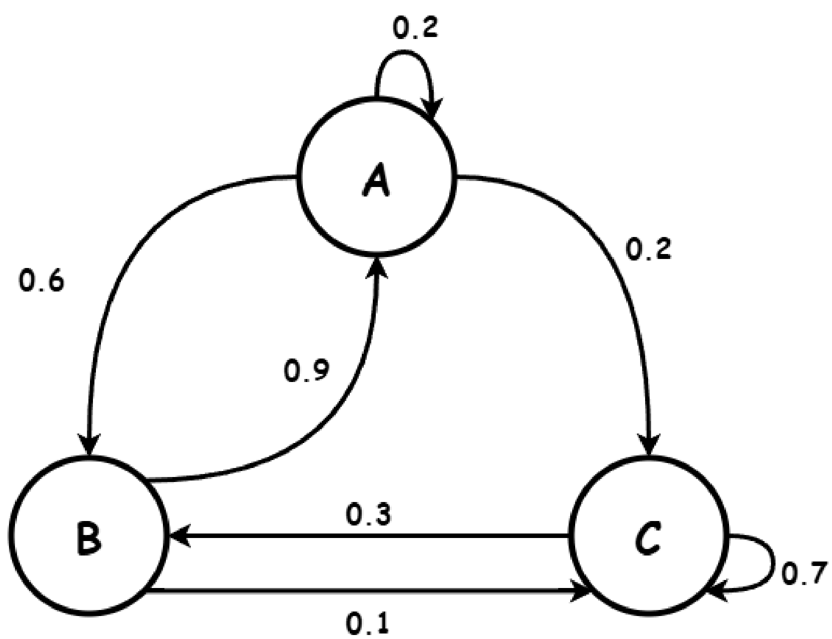
$$= P(W)P(S|W)\, P(A|S)$$

5. توضیح دهید که در هر کدام از روش‌های Inference by Enumeration و Inference by Elimination تعداد سطرهای بزرگترین جدولی که در محاسبات نگه داشتیم چقدر است، سپس توضیح دهید که چرا روش Inference by Elimination را ترجیح می‌دهیم.

در روش Inference by Enumeration ابتدا جدول $P(W,\ S,\ Z,\ X,\ A,\ C)$ را بدست آورده و سپس متغیرها را با سیگما حذف می‌کنیم. پس تعداد سطرهای بزرگترین جدول نگه‌داری شده برابر حاصل ضرب اندازه تمام متغیرهاست! در طرف مقابل در روش Inference by Elimination یکی در میان متغیرها را حذف کرده و سپس متغیر جدیدی را اضافه می‌کنیم. در این روش بزرگترین جدول ایجاد شده برای $P(C|S,\ X)$ است که ابعاد آن برابر $3\ \times\ 6\ \times\ N_x\ =\ 18\,N_x$ است. حال واضح است که به دلیل بهینه‌سازی در تعداد سطرهای بزرگترین جدولی که در طول مسیر حل داریم، روش Inference by Elimination را ترجیح می‌دهیم!

Markov Model

یک ربات هنرمند را تصور کنید که وظیفه آن خلق نقاشی‌هایی با الگوهای خاص است. این ربات در هر مرحله یکی از سه رنگ A، B یا C را انتخاب کرده و به نقاشی اضافه می‌کند. انتخاب رنگ توسط ربات تصادفی نیست، بلکه به گونه‌ای انجام می‌شود که زیبایی نقاشی حفظ شود؛ به این معنا که انتخاب رنگ در هر مرحله به رنگ انتخاب‌شده در مرحله قبل وابسته است. نمودار زیر احتمال انتخاب هر رنگ را بر اساس رنگ قبلی نشان می‌دهد:



همچنین، احتمال انتخاب رنگ برای اولین مرحله به صورت زیر است:

$$\pi = \{ A : 0.5 \, , \; B : 0.5 \, , \; C : 0.0 \}$$

الف) اگر ربات در مرحله سوم از نقاشی خود رنگ C را انتخاب کند، احتمال این اتفاق چقدر است؟

ب) محتمل‌ترین دنباله رنگ‌ها به طول ۳ که رنگ مرحله سوم آن C باشد را بنویسید و احتمال آن را محاسبه کنید.

ج) اگر ربات بدون توقف به نقاشی ادامه دهد و بوم آن به صورت بی‌نهایت بزرگ شود، احتمال انتخاب هر یک از رنگ‌ها به‌عنوان آخرین رنگ چقدر خواهد بود؟

پاسخ :

الف)

1) $P(X_3 = C) = P(X_3 = C \mid X_2 = A) \times P(X_2 = A) + P(X_3 = C \mid X_2 = B) \times P(X_2 = B) +$

$P(X_3 = C \mid X_2 = C) \times P(X_2 = C) = 0.2 \times 0.55 + 0.1 \times 0.3 + 0.7 \times 0.15 = 0.11 + 0.03 + 0.105$

$= 0.245$

2) $P(X_2 = A) = P(X_2 = A \mid X_1 = B) \times P(X_1 = B) + P(X_2 = A \mid X_1 = A) \times P(X_1 = A)$

$= 0.9 \times 0.5 + 0.2 \times 0.5 = 0.45 + 0.1 = 0.55$

3) $P(X_2 = B) = P(X_2 = B \mid X_1 = A) \times P(X_1 = A) = 0.6 \times 0.5 = 0.3$

4) $P(X_2 = C) = P(X_2 = C \mid X_1 = A) \times P(X_1 = A) + P(X_2 = C \mid X_1 = B) \times P(X_1 = B)$

$0.2 \times 0.5 + 0.1 \times 0.5 = 0.1 + 0.05 = 0.15$

5) $P(X_1 = A) = 0.5$

6) $P(X_1 = B) = 0.5$

7) $P(X_1 = C) = 0$

ب) برای به دست آوردن محتمل ترین حالت ابتدا محتمل ترین حالت برای وقوع هر رنگ در هر مرحله را به دست می‌آوریم:

1)$max\, P(X_3 = C, X_2, X_1) = P(X_3 = C \mid X_2 = A) \times max\, P(X_2 = A, X_1) = 0.2 \times 0.45 = 0.09$

2)$max\, P(X_2 = A, X_1) = P(X_2 = A \mid X_1 = B) \times P(X_1 = B) = 0.9 \times 0.5 = 0.45$

3)$max\, P(X_2 = B, X_1) = P(X_2 = B \mid X_1 = A) \times P(X_1 = A) = 0.6 \times 0.5 = 0.3$

4)$max\ P(X_2 = C, X_1) = P(X_2 = C \mid X_1 = A) \times P(X_1 = A) = 0.2 \times 0.5 = 0.1$

در نتیجه محتمل ترین دنباله رنگ ها به طول ۳ که رنگ آخر آن C باشد برابر با BAC است.

ج) Stationary Distributions را برای این مدل محاسبه می‌کنیم:

$P_\infty(A) = P(A|A) \times P_\infty(A) + P(A|B) \times P_\infty(B) = 0.2 \times P_\infty(A) + 0.9 \times P_\infty(B)$

$P_\infty(B) = P(B|A) \times P_\infty(A) + P(B|C) \times P_\infty(C) = 0.6 \times P_\infty(A) + 0.3 \times P_\infty(C)$

$P_\infty(C) = P(C|A) \times P_\infty(A) + P(C|B) \times P_\infty(B) + P(C|C) \times P_\infty(C) = 0.2 \times P_\infty(A) + 0.1 \times P_\infty(B)$
$+ 0.7 \times P_\infty(C)$

$P_\infty(A) + P_\infty(B) + P_\infty(C) = 1$

1) $P_\infty(A) = 1.125 \times P_\infty(B)$

2) $P_\infty(C) = 1.083 \times P_\infty(B)$

3) $1.125 \times P_\infty(B) + P_\infty(B) + 1.083 \times P_\infty(B) = 1$

4) $P_\infty(B) \simeq 0.312$

5) $P_\infty(A) \simeq 0.350$

6) $P_\infty(C) \simeq 0.338$