فصل مشتق و کاربرد مشتق

فهرست مطالب:

توابع متناوب

رسم نمودار توابع مثلثاتی

حل مسائل پارامتری

حل مسائل بهینه سازی

قضیه ی رول

قضیه ی مقدار میانگین(قضیه ی لاگرانژ)

قضیه ی مقدار میانگین تعمیم یافته (قضیه ی کوشی)

قضیه ی مشتق تابع ثابت

دیفرانسیل تابع

تعبیر هندسی دیفرانسیل

مشتق

یکی دیگر از مفاهیم اساسی ریاضیات، مفهوم مشتق است. آشنایی با این مفهوم منجر به شناخت بیشتر رفتار توابع می شود. در اینجا مفهوم مشتق تابع را در یک نقطه و همچنین یک فاصله بررسی می کنیم. سپس به روش های مشتق گیری از توابع می پردازیم.

الف) مشتق تابع در یک نقطه

اگر $y=f(x)$ یک تابع پیوسته در نقطه ی x_0 باشد. در این صورت مشتق تابع $y=f(x)$ در نقطه ی x_0 را بـه صـورت زیـر تعریف می کنندو آنرا با $f'(x_0)$ نمایش می دهند.

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

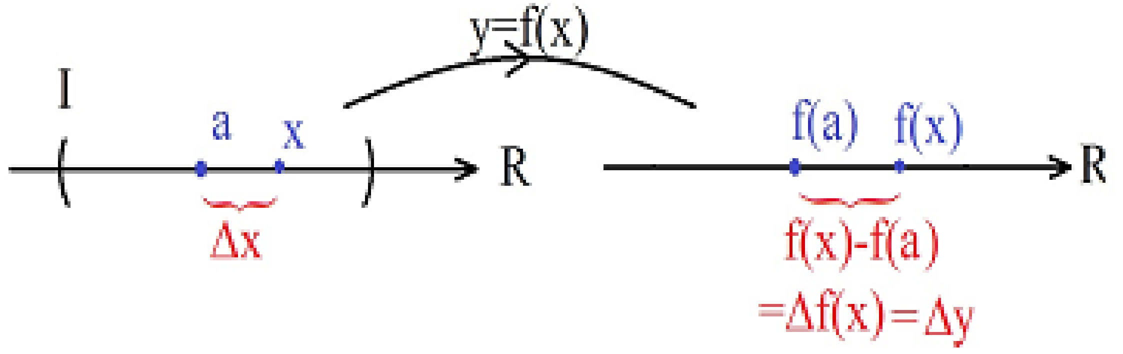
تعریف

می‌گوییم تابع f در نقطه a مشتق‌پذیر است، اگر حد زیر موجود باشد

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x},\qquad \Delta x=x-a.$$

اگر حد بالا موجود باشد، مقدار حد را به $f'(a)$ (یا $Df(a)$ یا $df(a)/dx$ یا امثال آن) نشان می‌دهیم و مشتق f در نقطه a می‌نامیم. یعنی

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}.$$



مثال

فرض کنید $f(x) = c$ تابع ثابت باشد.

مشتق تابع ثابت همیشه برابر صفر است

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{c-c}{x-a} = ۰$$

فرض کنید $g(x) = cx$، در این صورت

$$g'(a) = \lim_{\Delta x\to ۰} \frac{c(a+\Delta x) - ca}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to ۰} \frac{c\Delta x}{\Delta x} = c.$$

فرض کنید $h(x) = ۱/x$، در این صورت

$$h'(a) = \lim_{\Delta x\to ۰} \frac{\frac{۱}{a+\Delta x} - \frac{۱}{a}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to ۰} \frac{\frac{-\Delta x}{a(a+\Delta x)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to ۰} \frac{-۱}{(a+\Delta x)a} = \frac{-۱}{a^۲}.$$

مثال

فرض کنید $u(x)=\sqrt{x}$ و $a>۰$. دراین صورت

$$\begin{aligned} u'(a) &= \lim_{\Delta x\to ۰}\frac{\sqrt{a+\Delta x}-\sqrt{a}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to ۰}\left(\frac{\sqrt{a+\Delta x}-\sqrt{a}}{\Delta x}\right)\left(\frac{\sqrt{a+\Delta x}+\sqrt{a}}{\sqrt{a+\Delta x}+\sqrt{a}}\right) \\ &= \lim_{\Delta x\to ۰}\frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{a+\Delta x}+\sqrt{a})}=\frac{۱}{۲\sqrt{a}}. \end{aligned}$$

مثال

$$
\begin{aligned}
\sin'(a) &= \lim_{\Delta x \to ۰} \frac{\sin(a+\Delta x) - \sin a}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to ۰} \frac{\sin a \cos \Delta x + \cos a \sin \Delta x - \sin(a)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to ۰} \frac{\sin a(\cos \Delta x - ۱)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to ۰} \cos a \left(\frac{\sin \Delta x}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x \to ۰} \frac{\sin a(\cos^{۲} \Delta x - ۱)}{\Delta x(\cos \Delta x + ۱)} + \cos a \\
&= \lim_{\Delta x \to ۰} -\frac{\sin a \ \sin \Delta x}{(\cos \Delta x + ۱)} \left(\frac{\sin \Delta x}{\Delta x}\right) + \cos a = \cos a
\end{aligned}
$$

مثال

$$
\begin{aligned}
\cos'(a) &= \lim_{\Delta x \to ۰} \frac{\cos(a+\Delta x)-\cos a}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to ۰} \frac{\cos a \cos \Delta x - \sin a \sin \Delta x - \cos(a)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to ۰} \frac{\cos a(\cos \Delta x - ۱)}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \to ۰} \sin a \left(\frac{\sin \Delta x}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x \to ۰} \frac{\cos a(\cos^{۲} \Delta x - ۱)}{\Delta x(\cos \Delta x + ۱)} - \sin a \\
&= \lim_{\Delta x \to ۰} -\frac{\cos a \ \sin \Delta x}{(\cos \Delta x + ۱)} \left(\frac{\sin \Delta x}{\Delta x}\right) - \sin a = -\sin a
\end{aligned}
$$

مشتق راست و چپ:

$$f'_-(a)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$$f'_+(a)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$(b,a]$

$[a,b)$

$$f'_-(a)=\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

تذکر : تابع $y=f(x)$ در نقطه ی $x=x_\circ$ مشتق پذیر است، هرگاه:

الف) در این نقطه پیوسته باشد.

ب) مشتق راست و مشتق چپ آن در این نقطه موجود و برابر باشند.

تذکر

ممکن است تابع $f(x)$ در نقطه a مشتق‌پذیر نباشد. برای مثال تابع $f(x) = |x|$ را در نظر بگیرید. برای این که این تابع در نقطه $a = ۰$ مشتق پذیر باشد باید حد زیر موجود باشد.

$$\lim_{\Delta x \to ۰} \frac{|\Delta x + ۰| - |۰|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to ۰} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}.$$

از قبل می‌دانیم، برای این که یک حد وجود داشته باشد، باید حد راست و حد چپ موجود و با هم برابر باشند.

در اینجا

$$\lim_{\Delta x \to ۰^+} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = ۱ \qquad \lim_{\Delta x \to ۰^-} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = -۱$$

لذا تابع در نقطه $a = ۰$ مشتق‌پذیر نیست.

تمرین : مشتق پذیری تابع زیر را در نقطه ی $x_0 = ۰$ بررسی کنید.

$$f(x)=\begin{cases} x^۲+۱ & x\geq ۰ \\ ۱+x\sin x & x<۰ \end{cases}$$

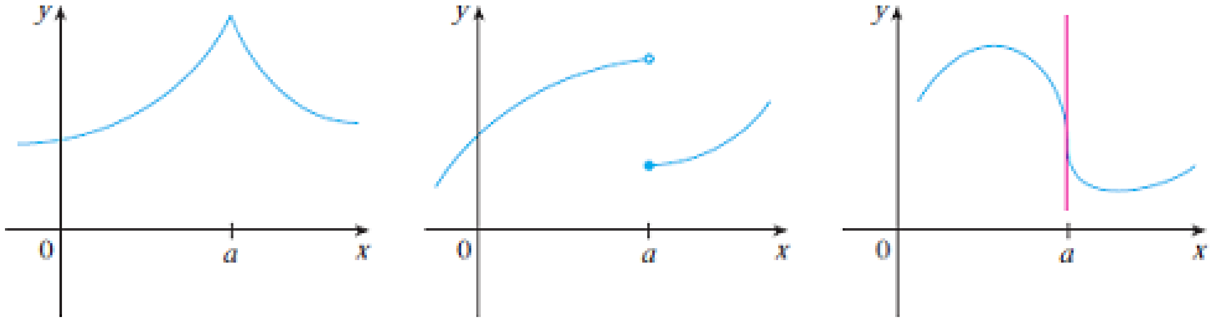
مشتق راست $f'_+(۰)=\lim\limits_{x\to ۰^+}\dfrac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\lim\limits_{x\to ۰^+}\dfrac{(x^۲+۱)-۱}{x-۰}=\lim\limits_{x\to ۰^+}\dfrac{x^۲}{x}=\lim\limits_{x\to ۰^+} x=۰$

مشتق چپ $f'_-(۰)=\lim\limits_{x\to ۰^-}\dfrac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\lim\limits_{x\to ۰^-}\dfrac{(۱+x\sin x)-۱}{x-۰}=\lim\limits_{x\to ۰^-}\dfrac{x\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to ۰^-}\sin x=۰$

تابع در نقطه ی $x_0 = ۰$ مشتق پذیر است.

$\boxed{۳}$ **تعریف** تابع f در a مشتق‌پذیر است، به‌شرطی که $f'(a)$ وجود داشته باشد. این تابع روی بازهٔ باز (a,b) (یا (a,∞) یا $(-\infty,a)$ یا $(-\infty,\infty)$) مشتق‌پذیر است، به‌شرطی که در هر عدد در این بازه مشتق‌پذیر باشد.

چطور ممکن است تابعی مشتق‌پذیر نباشد؟



(الف) گوشه داشتن

(ب) ناپیوستگی داشتن

(ج) مماس قائم داشتن

قضیه

اگر تابع $f(x)$ در a مشتق‌پذیر باشد آنگاه f در a پیوسته است. (دقت کنیم که عکس قضیه بالا درست نیست، یعنی ممکن است تابع در یک نقطه پیوسته باشد ولی مشتق پذیر نباشد. برای مثال تابع $f(x) = |x|$ در مثال قبل).

نتیجه

اگر تابع f در نقطه a پیوسته نباشد آنگاه f در a مشتق‌پذیر هم نیست.

قرار داد

از این پس برای راحتی مشتق تابع را در یک نقطه دلخواه x از بازه I حساب می‌کنیم (یعنی $x = a$). به این ترتیب

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to ۰} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

تا کنون نشان داده‌ایم که

$$\begin{aligned} f(x) &= c \quad \Rightarrow \quad f'(x) = ۰, & g(x) &= cx \quad \Rightarrow \quad g'(x) = c, \\ h(x) &= \frac{۱}{x} \quad \Rightarrow \quad h'(x) = \frac{-۱}{x^۲} & u(x) &= \sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad u'(x) = \frac{۱}{۲\sqrt{x}}, \\ v(x) &= \sin x \quad \Rightarrow \quad v'(x) = \cos x, & w(x) &= \cos x \quad \Rightarrow \quad w'(x) = -\sin x. \end{aligned}$$

قضیه

فرض کنید $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع باشند که در x مشتق‌پذیر هستند و s , t دو عدد حقیقی باشند. در این صورت

۱) $(rf)(x)$ نیز در x مشتق‌پذیر است و داریم $(rf)'(x) = r\, f'(x)$.

۲) $(f \pm g)(x)$ نیز در x مشتق‌پذیر است و $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$.

۳) $(fg)(x)$ نیز در x مشتق‌پذیر است و $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

۴) اگر $g(x) \neq ۰$ آنگاه $(f/g)(x)$ نیز در x مشتق‌پذیر است و

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^{۲}(x)}.$$

مثال

فرض کنید $f(x) = cx^۲$ در این صورت

$$f'(x) = (cx \times x)' = c \times x + cx \times ۱ = ۲cx$$

به همین ترتیب داریم

$$(cx^۳)' = (cx^۲ \times x)' = ۲cx \times x + cx^۲ \times ۱ = ۳cx^۲.$$

با ادامه همین روش می‌توان دید که $(cx^n)' = ncx^{n-۱}$. بنابراین اگر

$$p(x) = c_n x^n + c_{n-۱} x^{n-۱} + \cdots + c_۱ x + c_۰$$

یک چند جمله‌ای باشد آنگاه

$$p'(x) = nc_n x^{n-۱} + (n-۱)c_{n-۱} x^{n-۲} + \cdots + c_۱ + ۰.$$

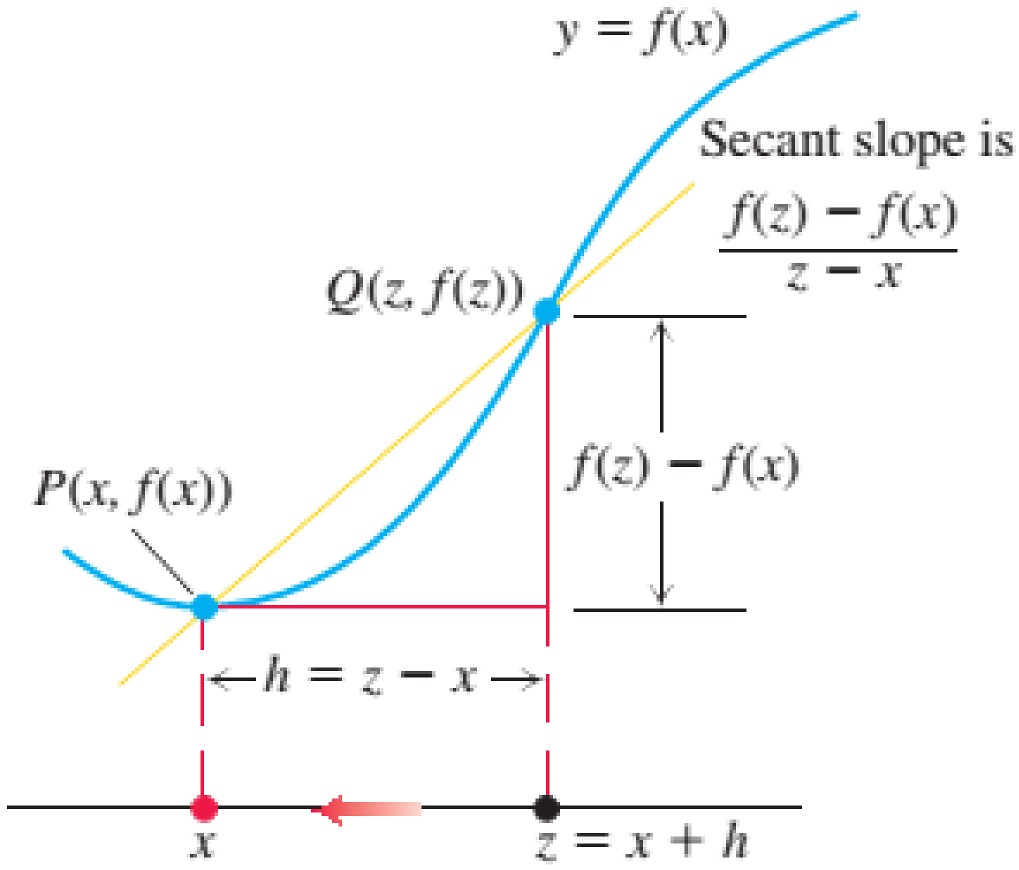
مثال

فرض کنید $g(x) = cx^۲ + ۱/x$ در این صورت

$$\begin{aligned} g'(x) &= \underbrace{(cx^۲)'}_{\left(cx\times x\right)'} + \left(\frac{۱}{x}\right)' = (cx)' \times x + (cx) \times (x)' - \frac{۱}{x^۲} \\ &= ۲cx - \frac{۱}{x^۲} \end{aligned}$$

فرض کنید $h(x) = \tan x$ در این صورت

$$h'(x) = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^۲ x + \sin^۲ x}{\cos^۲ x} = ۱ + \tan^۲ x = \sec^۲ x.$$



Derivative of f at x is

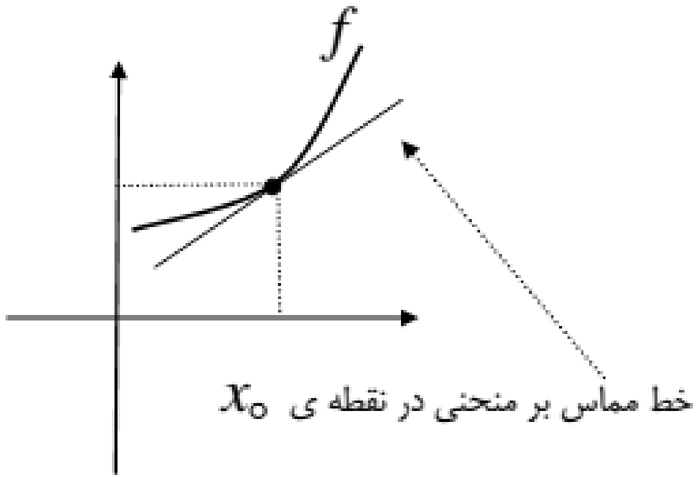
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{z \to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$$

تعبیر هندسی مشتق

اگر $y = f(x)$ یک تابع پیوسته در نقطه ی x_0 باشد . در این صورت مشتق تابع در نقطه ی x_0 بـا شـیب خـط (ضـریب زاویـه

مماس بر نمودار تابع در این نقطه برابر است.



$$m = f'(x_0)$$

شیب خط مماس $= m$

مشتق در نقطه ی x_0 $= f'(x_0)$

قضیه

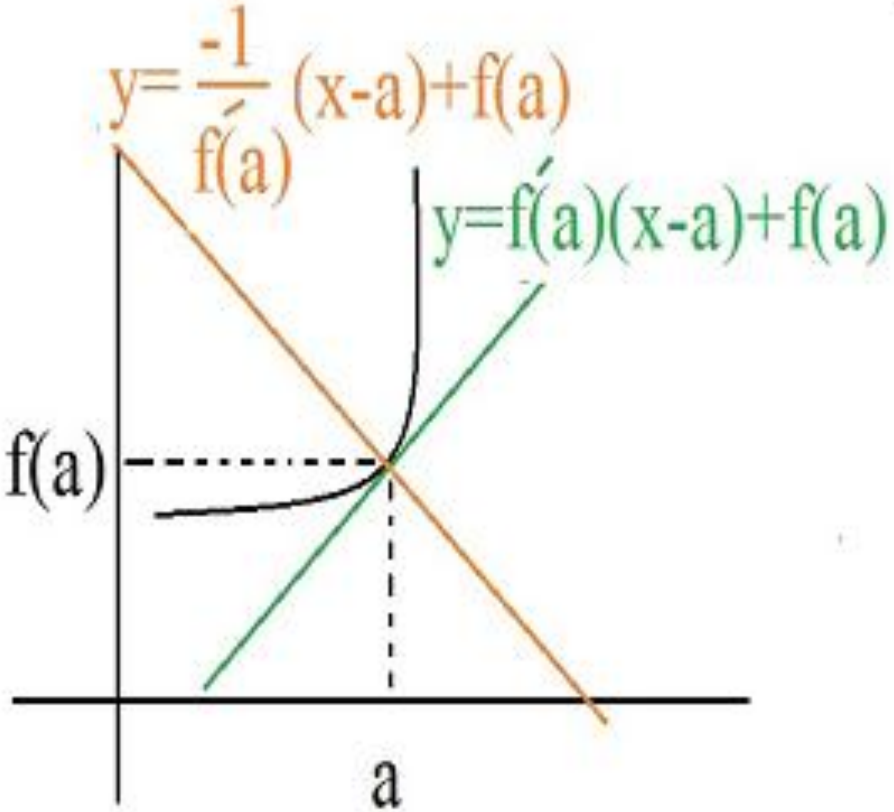
فرض کنید $f(x)$ در نقطه a مشتق‌پذیر باشد. معادله خط مماس بر گراف تابع در نقطه $(a, f(a))$ از رابطه زیر به دست می‌آید

$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

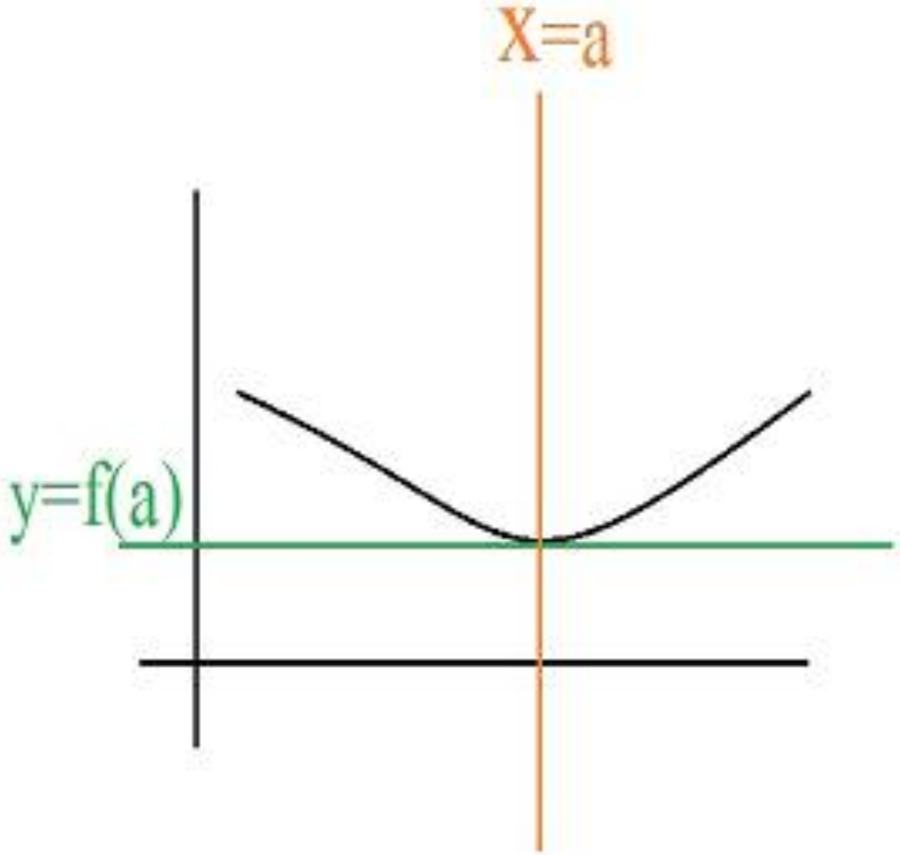
اگر $f'(a) \neq ۰$، معادله خط عمود بر گراف تابع در نقطه $(a, f(a))$ از رابطه ریز به دست می‌آید

$$y = \frac{-۱}{f'(a)}(x-a) + f(a).$$

دقت کنیم که در قضیه بالا اگر $f'(a) = ۰$ آنگاه خط مماس بر گراف تابع در نقطه $(a, f(a))$ به صورت یک خط افقی (موازی محور xها) با معادله $y = f(a)$ خواهد بود. دراین حالت خط عمود بر گراف تابع در نقطه $(a, f(a))$ به صورت یک خط عمودی (موازی محور yها) با معادله $x = a$ به دست می‌آید.



y= -1/f'(a) (x-a)+f(a)
y=f'(a)(x-a)+f(a)
f(a)
a



X=a
y=f(a)

تمرین: شیب خط مماس بر منحنی تابع $y = f(x) = x^۲$ در نقطه ی $x_۰ = ۱$ را بدست آورید.

حل:

$$f'(۱) = \lim_{x \to ۱} \frac{f(x) - f(۱)}{x - ۱} = \lim_{x \to ۱} \frac{x^۲ - ۱}{x - ۱} = \lim_{x \to ۱} \frac{(x-۱)(x+۱)}{x - ۱} = \lim_{x \to ۱} (x+۱) = ۲$$

$$\therefore m = f'(۱) = ۲$$

تمرین : با توجه به تمرین قبل معادله ی خط مماس بر منحنی در نقطه ی $x_۰ = ۱$ را بنویسید.

حل: ابتدا عرض نقطه ی داده شده را با توجه به تابع تعیین می کنیم.

$$x_۰ = ۱ \to y_۰ = (۱)^۲ = ۱$$

لذا معادله ی خط مماس به صورت زیر است.

$$y = m(x - x_۰) + y_۰ \to y = ۲(x-۱) + ۱ \to y = ۲x - ۱$$

EXAMPLE 2 Find an equation of the tangent line to the hyperbola $y = 3/x$ at the point (3, 1).

SOLUTION Let $f(x) = 3/x$. Then the slope of the tangent at (3, 1) is

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(3 + h) - f(3)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{3}{3 + h} - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{3 - (3 + h)}{3 + h}}{h}$$

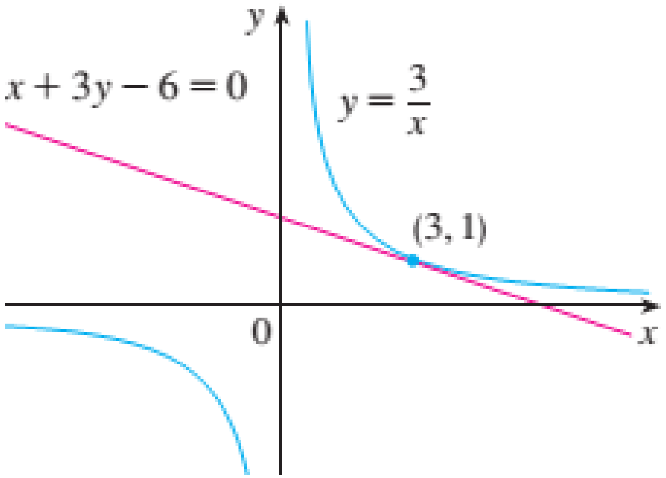
$$= \lim_{h \to 0} \frac{-h}{h(3 + h)} = \lim_{h \to 0} -\frac{1}{3 + h} = -\frac{1}{3}$$

Therefore an equation of the tangent at the point (3, 1) is

$$y - 1 = -\tfrac{1}{3}(x - 3)$$

which simplifies to $$x + 3y - 6 = 0$$

The hyperbola and its tangent are shown in Figure 4.

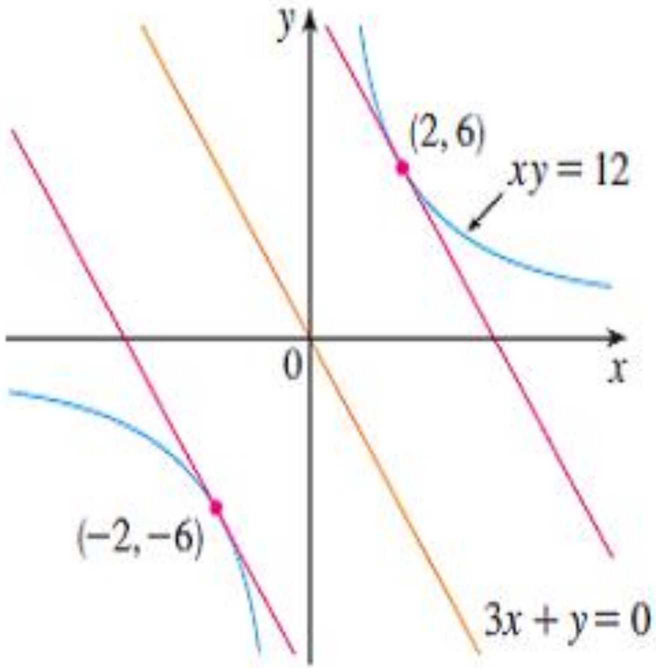


EXAMPLE 4 Find the derivative of the function $f(x) = x^2 - 8x + 9$ at the number a.

SOLUTION From Definition 4 we have

$$\begin{aligned}
f'(a) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{[(a+h)^2 - 8(a+h) + 9] - [a^2 - 8a + 9]}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{a^2 + 2ah + h^2 - 8a - 8h + 9 - a^2 + 8a - 9}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{2ah + h^2 - 8h}{h} = \lim_{h \to 0} (2a + h - 8) \\
&= 2a - 8
\end{aligned}$$

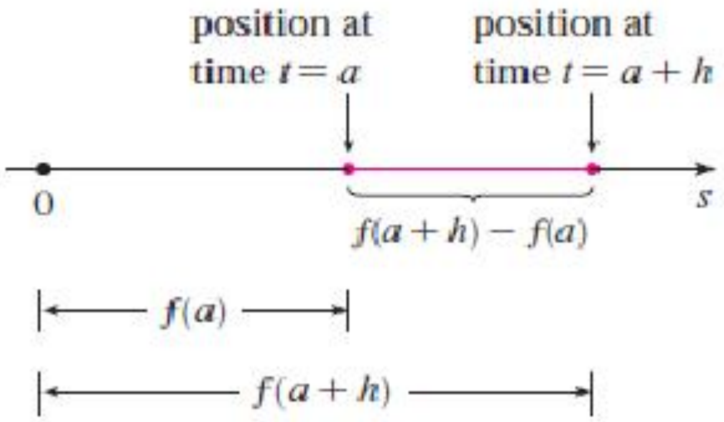
مثال ۱۳ در چه نقطه‌هایی روی هذلولی $xy = ۱۲$ خط مماس با خط $۳x + y = ۰$ موازی است؟



سرعت Velocities

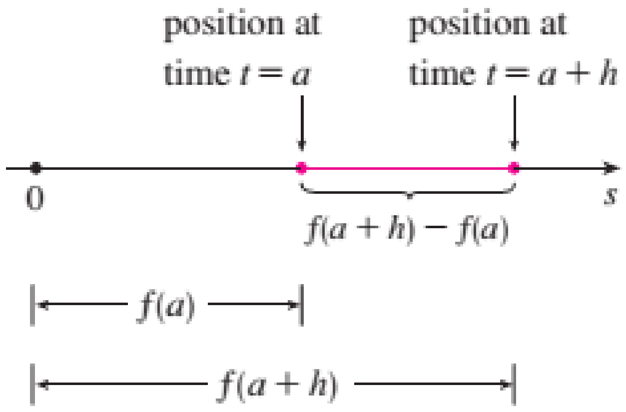
در حالت کلی، فرض کنید که جسمی روی خطی راست حرکت می‌کند و معادلهٔ حرکتش $s = f(t)$ است، که در آن s جابه‌جایی (مسافت جهت‌دار) جسم از نقطهٔ شروع حرکت در زمان t است. تابع f که حرکت جسم را توصیف می‌کند **معادلهٔ موقعیت** جسم نام دارد. در بازهٔ زمانی $t = a$ تا $t = a + h$، تغییر وضعیت جسم برابر است با $f(a + h) - f(a)$. (شکل ۵ را ببینید.)
سرعت متوسط در این بازهٔ زمانی برابر است با

$$\text{سرعت متوسط} = \frac{\text{جابه‌جایی}}{\text{زمان}} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$



اکنون فرض کنید سرعتهای متوسط را در بازه‌های زمانی به‌شکل $[a, a+h]$ که کوتاه و کوتاهتر می‌شوند حساب کنیم. به‌عبارت دیگر، h را به 0 میل می‌دهیم. مانند مثال توپ رهاشده، **سرعت (یا سرعت لحظه‌ای)**، $v(a)$، را در زمان $t = a$ حد این سرعتهای متوسط تعریف می‌کنیم:

$$\boxed{v(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}$$



$$\text{average velocity} = \frac{\text{displacement}}{\text{time}} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

3

$$\boxed{v(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}}$$

This means that the velocity at time $t = a$ is equal to the slope of the tangent line at P (compare Equations 2 and 3).

EXAMPLE 3

$$\frac{d}{dx}(x^8 + 12x^5 - 4x^4 + 10x^3 - 6x + 5)$$

$$= \frac{d}{dx}(x^8) + 12\frac{d}{dx}(x^5) - 4\frac{d}{dx}(x^4) + 10\frac{d}{dx}(x^3) - 6\frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(5)$$

$$= 8x^7 + 12(5x^4) - 4(4x^3) + 10(3x^2) - 6(1) + 0$$

$$= 8x^7 + 60x^4 - 16x^3 + 30x^2 - 6$$

EXAMPLE 4 Find the points on the curve $y = x^4 - 6x^2 + 4$ where the tangent line is horizontal.

SOLUTION Horizontal tangents occur where the derivative is zero. We have

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^4) - 6\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(4)$$

$$= 4x^3 - 12x + 0 = 4x(x^2 - 3)$$

Thus $dy/dx = 0$ if $x = 0$ or $x^2 - 3 = 0$, that is, $x = \pm\sqrt{3}$. So the given curve has horizontal tangents when $x = 0$, $\sqrt{3}$, and $-\sqrt{3}$. The corresponding points are $(0, 4)$, $(\sqrt{3}, -5)$, and $(-\sqrt{3}, -5)$. (See Figure 3.)

EXAMPLE 6 Find $F'(x)$ if $F(x) = (6x^3)(7x^4)$.

SOLUTION By the Product Rule, we have

$$\begin{aligned} F'(x) &= (6x^3)\frac{d}{dx}(7x^4) + (7x^4)\frac{d}{dx}(6x^3) \\ &= (6x^3)(28x^3) + (7x^4)(18x^2) \\ &= 168x^6 + 126x^6 = 294x^6 \end{aligned}$$

EXAMPLE 7 If $h(x) = xg(x)$ and it is known that $g(3) = 5$ and $g'(3) = 2$, find $h'(3)$.

SOLUTION Applying the Product Rule, we get

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{d}{dx}[xg(x)] = x\frac{d}{dx}[g(x)] + g(x)\frac{d}{dx}[x] \\ &= xg'(x) + g(x) \end{aligned}$$

Therefore $$h'(3) = 3g'(3) + g(3) = 3 \cdot 2 + 5 = 11$$ ■

EXAMPLE 8 Let $y = \dfrac{x^2 + x - 2}{x^3 + 6}$. Then

$$
\begin{aligned}
y' &= \frac{(x^3 + 6)\dfrac{d}{dx}(x^2 + x - 2) - (x^2 + x - 2)\dfrac{d}{dx}(x^3 + 6)}{(x^3 + 6)^2} \\
&= \frac{(x^3 + 6)(2x + 1) - (x^2 + x - 2)(3x^2)}{(x^3 + 6)^2} \\
&= \frac{(2x^4 + x^3 + 12x + 6) - (3x^4 + 3x^3 - 6x^2)}{(x^3 + 6)^2} \\
&= \frac{-x^4 - 2x^3 + 6x^2 + 12x + 6}{(x^3 + 6)^2}
\end{aligned}
$$

If n is a positive integer, then

$$\frac{d}{dx}(x^{-n}) = -nx^{-n-1}$$

EXAMPLE 9

(a) If $y = \frac{1}{x}$, then $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^{-1}) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

(b) $\frac{d}{dt}\left(\frac{6}{t^3}\right) = 6\frac{d}{dt}(t^{-3}) = 6(-3)t^{-4} = -\frac{18}{t^4}$

EXAMPLE 10

(a) If $f(x) = x^{\pi}$, then $f'(x) = \pi x^{\pi - 1}$.

(b) Let
$$y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$$

Then
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x^{-2/3}\right) = -\tfrac{2}{3}x^{-(2/3)-1}$$
$$= -\tfrac{2}{3}x^{-5/3}$$

EXAMPLE 11 Differentiate the function $f(t) = \sqrt{t}\,(a + bt)$.

SOLUTION 1 Using the Product Rule, we have

$$f'(t) = \sqrt{t}\,\frac{d}{dt}(a + bt) + (a + bt)\frac{d}{dt}\left(\sqrt{t}\right)$$
$$= \sqrt{t}\cdot b + (a + bt)\cdot \tfrac{1}{2}t^{-1/2}$$
$$= b\sqrt{t} + \frac{a + bt}{2\sqrt{t}} = \frac{a + 3bt}{2\sqrt{t}}$$

EXAMPLE 12 Find equations of the tangent line and normal line to the curve $y = \sqrt{x}/(1 + x^2)$ at the point $\left(1, \frac{1}{2}\right)$.

SOLUTION According to the Quotient Rule, we have

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1 + x^2)\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right) - \sqrt{x}\,\dfrac{d}{dx}(1 + x^2)}{(1 + x^2)^2}$$

$$= \frac{(1 + x^2)\dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}\,(2x)}{(1 + x^2)^2}$$

$$= \frac{(1 + x^2) - 4x^2}{2\sqrt{x}\,(1 + x^2)^2} = \frac{1 - 3x^2}{2\sqrt{x}\,(1 + x^2)^2}$$

So the slope of the tangent line at $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ is

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = \frac{1 - 3 \cdot 1^2}{2\sqrt{1}(1 + 1^2)^2} = -\frac{1}{4}$$

We use the point-slope form to write an equation of the tangent line at $\left(1, \frac{1}{2}\right)$:

$$y - \tfrac{1}{2} = -\tfrac{1}{4}(x - 1) \qquad \text{or} \qquad y = -\tfrac{1}{4}x + \tfrac{3}{4}$$

The slope of the normal line at $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ is the negative reciprocal of $-\frac{1}{4}$, namely 4, so an equation is

$$y - \tfrac{1}{2} = 4(x - 1) \qquad \text{or} \qquad y = 4x - \tfrac{7}{2}$$

The curve and its tangent and normal lines are graphed in Figure 5. ■

EXAMPLE 5 Find $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 7x}{4x}$.

SOLUTION In order to apply Equation 2, we first rewrite the function by multiplying and dividing by 7:

$$\frac{\sin 7x}{4x} = \frac{7}{4}\left(\frac{\sin 7x}{7x}\right)$$

If we let $\theta = 7x$, then $\theta \to 0$ as $x \to 0$, so by Equation 2 we have

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 7x}{4x} = \frac{7}{4} \lim_{x \to 0}\left(\frac{\sin 7x}{7x}\right) = \frac{7}{4} \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = \frac{7}{4} \cdot 1 = \frac{7}{4}$$ ■

EXAMPLE 6 Calculate $\lim_{x \to 0} x \cot x$.

SOLUTION Here we divide numerator and denominator by x:

$$\lim_{x \to 0} x \cot x = \lim_{x \to 0} \frac{x \cos x}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{\dfrac{\sin x}{x}} = \frac{\lim_{x \to 0} \cos x}{\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}}$$

$$= \frac{\cos 0}{1} \qquad \text{(by the continuity of cosine and Equation 2)}$$

$$= 1$$

$$\boxed{\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1}$$

$$\cos \theta < \frac{\sin \theta}{\theta} < 1$$

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\cos \theta - 1}{\theta} = \lim_{\theta \to 0} \left(\frac{\cos \theta - 1}{\theta} \cdot \frac{\cos \theta + 1}{\cos \theta + 1} \right) = \lim_{\theta \to 0} \frac{\cos^2\theta - 1}{\theta(\cos \theta + 1)}$$

$$= \lim_{\theta \to 0} \frac{-\sin^2\theta}{\theta(\cos \theta + 1)} = -\lim_{\theta \to 0} \left(\frac{\sin \theta}{\theta} \cdot \frac{\sin \theta}{\cos \theta + 1} \right)$$

$$= -\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin \theta}{\theta} \cdot \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin \theta}{\cos \theta + 1}$$

$$= -1 \cdot \left(\frac{0}{1 + 1} \right) = 0 \qquad \text{(by Equation 2)}$$

$$\boxed{\lim_{\theta \to 0} \frac{\cos \theta - 1}{\theta} = 0}$$

4

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x}$$

EXAMPLE 1 Differentiate $y = x^2 \sin x$.

SOLUTION Using the Product Rule and Formula 4, we have

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= x^2 \frac{d}{dx}(\sin x) + \sin x \frac{d}{dx}(x^2) \\ &= x^2 \cos x + 2x \sin x \end{aligned}$$

5

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(\tan x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) \\
&= \frac{\cos x \dfrac{d}{dx}(\sin x) - \sin x \dfrac{d}{dx}(\cos x)}{\cos^2 x} \\
&= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x\,(-\sin x)}{\cos^2 x} \\
&= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\
&= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x
\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x}$$

DERIVATIVES OF TRIGONOMETRIC FUNCTIONS

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x \qquad \frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x \qquad \frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$$

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x \qquad \frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$$

EXAMPLE 2 Differentiate $f(x) = \dfrac{\sec x}{1 + \tan x}$. For what values of x does the graph of f have a horizontal tangent?

SOLUTION The Quotient Rule gives

$$f'(x) = \frac{(1 + \tan x)\dfrac{d}{dx}(\sec x) - \sec x \dfrac{d}{dx}(1 + \tan x)}{(1 + \tan x)^2}$$

$$= \frac{(1 + \tan x)\sec x \tan x - \sec x \cdot \sec^2 x}{(1 + \tan x)^2}$$

$$= \frac{\sec x(\tan x + \tan^2 x - \sec^2 x)}{(1 + \tan x)^2} = \frac{\sec x(\tan x - 1)}{(1 + \tan x)^2}$$

In simplifying the answer we have used the identity $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$.

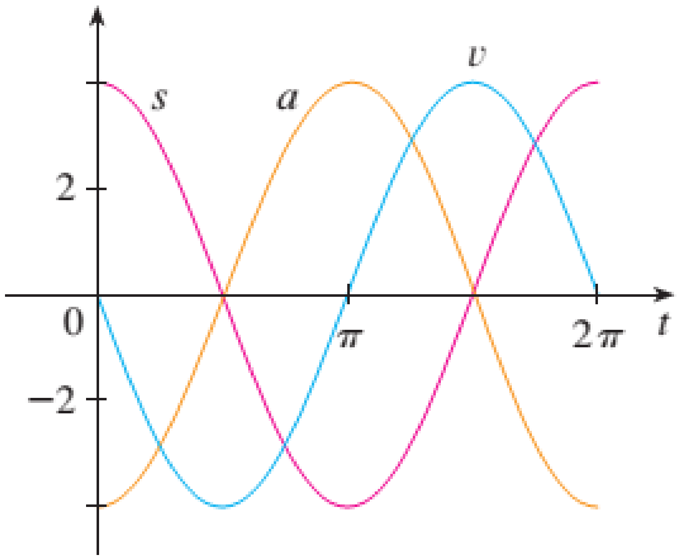
Since $\sec x$ is never 0, we see that $f'(x) = 0$ when $\tan x = 1$, and this occurs when $x = n\pi + \pi/4$, where n is an integer (see Figure 4). ■

EXAMPLE 3 An object at the end of a vertical spring is stretched 4 cm beyond its rest position and released at time $t = 0$. (See Figure 5 and note that the downward direction is positive.) Its position at time t is

$$s = f(t) = 4 \cos t$$

Find the velocity and acceleration at time t and use them to analyze the motion of the object.

SOLUTION The velocity and acceleration are



$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(4 \cos t) = 4 \frac{d}{dt}(\cos t) = -4 \sin t$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(-4 \sin t) = -4 \frac{d}{dt}(\sin t) = -4 \cos t$$

The object oscillates from the lowest point ($s = 4$ cm) to the highest point ($s = -4$ cm). The period of the oscillation is 2π, the period of $\cos t$.

The speed is $|v| = 4|\sin t|$, which is greatest when $|\sin t| = 1$, that is, when $\cos t = 0$. So the object moves fastest as it passes through its equilibrium position ($s = 0$). Its speed is 0 when $\sin t = 0$, that is, at the high and low points.

The acceleration $a = -4 \cos t = 0$ when $s = 0$. It has greatest magnitude at the high and low points. See the graphs in Figure 6. ■

EXAMPLE 6 Calculate $\lim_{x \to 0} x \cot x$.

SOLUTION Here we divide numerator and denominator by x:

$$\lim_{x \to 0} x \cot x = \lim_{x \to 0} \frac{x \cos x}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{\dfrac{\sin x}{x}} = \frac{\lim_{x \to 0} \cos x}{\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}}$$

$$= \frac{\cos 0}{1} \qquad \text{(by the continuity of cosine and Equation 2)}$$

$$= 1$$

مشتقات مراتب بالاتر

همانگونه که متوجه شده‌اید عمل مشتق‌گیری عملی است که به یك تابع مشتق‌پذیر مانند $f(x)$ تابع جدیدی، یعنی $f'(x)$ را نسبت می‌دهد. البته این عمل را به شکل‌های مختلفی نشان می‌دهند، مثلاً

$$D_x f(x) = f'(x) \quad \text{یا} \quad \frac{d}{dx} f(x) = f'(x)$$

از آنجا که $f'(x)$ خود تابعی از x است پس می‌توان مجدداً بحث مشتق‌پذیری را درمورد آن مطرح کرد و تابع جدید $f''(x)$ را یافت و باز به همین صورت از $f''(x)$ به $f'''(x)$ و از آن به $f^{(۴)}(x)$ و ... تا به $f^{(n)}(x)$ رسید که آن را مشتق n ام تابع $f(x)$ می‌نامیم. به کمك نمادهای دیگر مشتق، این مطلب را می‌توان چنین بیان داشت:

$$D_x^n f(x) = D_x(D_x^{n-۱} f(x)) \quad \text{یا} \quad \frac{d^n}{dx^n} f(x) = \frac{d}{dx}(\frac{d^{n-۱}}{dx^{n-۱}}) f(x)$$

مثال برای تابع $f(x) = \sin x$ داریم:

$$f'(x) = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{۲}) \quad \text{و} \quad f''(x) = -\sin x = \sin(x + \pi)$$

$$f'''(x) = -\cos x = \sin(x + \frac{۳\pi}{۲}) \quad \text{و} \quad f^{(۴)}(x) = \sin x = \sin(x + ۲\pi)$$

و بنابراین $f^{(n)}(x) = \sin(x + \frac{n\pi}{۲})$. در رابطه فوق اگر $n = ۰$ آنگاه $f^{(۰)}(x) = f(x)$ پس می‌توان f را مشتق مرتبه صفرم خودش نامید.

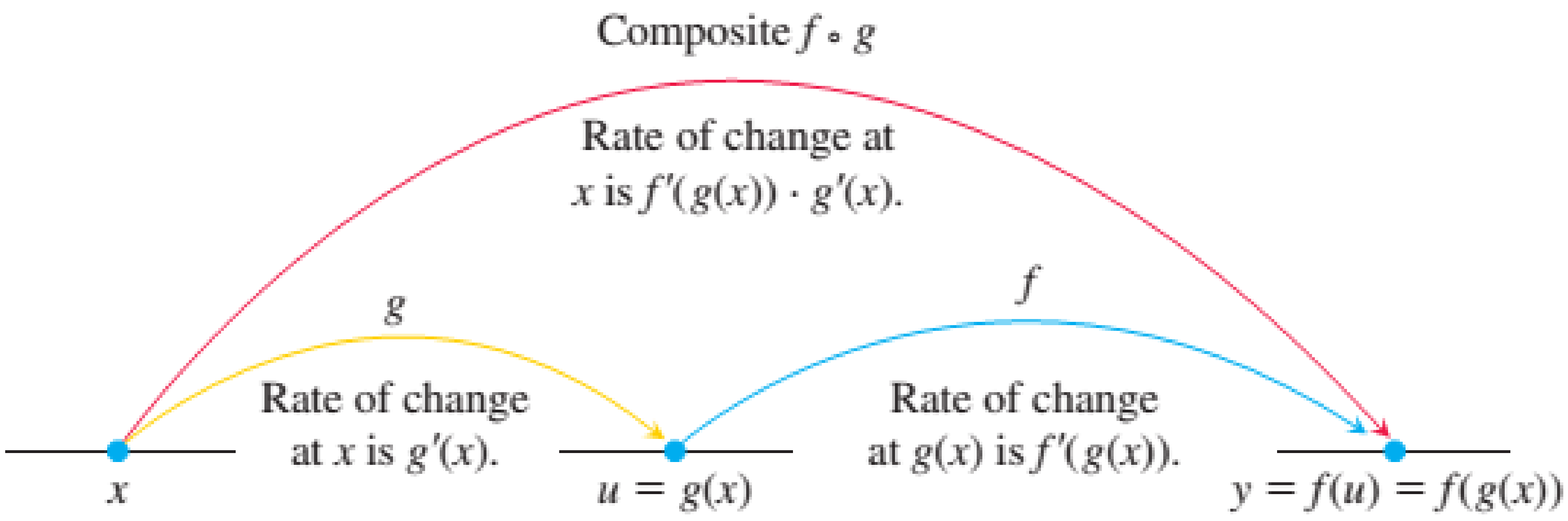
قاعدهٔ زنجیری

اگر g در x مشتق‌پذیر باشد و f در $g(x)$، آن‌وقت تابع ترکیبی $F = f \circ g$ که با دستور $F(x) = f(g(x))$ تعریف می‌شود در x مشتق‌پذیر است و F' به‌شکل حاصل‌ضرب زیر است

$$F'(x) = f'(g(x)) \times g'(x)$$

با نمادگذاری لایب‌نیتس، اگر $y = f(u)$ و $u = g(x)$ و y و u هر دو تابعهایی مشتق‌پذیر باشند آن‌وقت

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$



Composite $f \circ g$
Rate of change at
x is $f'(g(x)) \cdot g'(x)$.
g
f
Rate of change
at x is $g'(x)$.
Rate of change
at $g(x)$ is $f'(g(x))$.
x
$u = g(x)$
$y = f(u) = f(g(x))$

تمرین: اگر $f'(x)=\sqrt{۳x+۱۶}$ و $g(x)=x^۳-۱$ باشد،مشتق تابع $(fog)(x)$ را در $x_۰=۱$ بیابید.

حل:

$$g'(x)=۳x^۲ \rightarrow g'(۱)=۳(۱)^۲=۳$$

$$g(۱)=۱^۳-۱=۰$$

$$f'(g(۱))=f'(۰)=\sqrt{۳(۰)+۱۶}=۴$$

$$(fog)'(x)=(f(g(x))'=g'(x).f'(g(x))$$

$$(fog)'(۱)=g'(۱).f'(g(۱))=۳\times۴=۱۲$$

EXAMPLE 1 Find $F'(x)$ if $F(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

SOLUTION 1 (using Equation 2): At the beginning of this section we expressed F as $F(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$ where $f(u) = \sqrt{u}$ and $g(x) = x^2 + 1$. Since

$$f'(u) = \tfrac{1}{2}u^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \qquad \text{and} \qquad g'(x) = 2x$$

we have

$$\begin{aligned} F'(x) &= f'(g(x)) \cdot g'(x) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \end{aligned}$$

SOLUTION 2 (using Equation 3): If we let $u = x^2 + 1$ and $y = \sqrt{u}$, then

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}}(2x) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}}(2x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \end{aligned}$$

۴ تلفیق قاعدهٔ توان با قاعدهٔ زنجیری اگر n عددی حقیقی باشد و تابع $u = g(x)$ مشتق‌پذیر، آن‌وقت

$$\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$$

یا اینکه

$$\frac{d}{dx}(g(x))^n = n(g(x))^{n-1} \times g'(x)$$

EXAMPLE 2 Differentiate (a) $y = \sin(x^2)$ and (b) $y = \sin^2 x$.

SOLUTION

(a) If $y = \sin(x^2)$, then the outer function is the sine function and the inner function is the squaring function, so the Chain Rule gives

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \underbrace{\sin}_{\substack{\text{outer}\\ \text{function}}} \underbrace{(x^2)}_{\substack{\text{evaluated}\\ \text{at inner}\\ \text{function}}} = \underbrace{\cos}_{\substack{\text{derivative}\\ \text{of outer}\\ \text{function}}} \underbrace{(x^2)}_{\substack{\text{evaluated}\\ \text{at inner}\\ \text{function}}} \cdot \underbrace{2x}_{\substack{\text{derivative}\\ \text{of inner}\\ \text{function}}}$$

$$= 2x\cos(x^2)$$

(b) Note that $\sin^2 x = (\sin x)^2$. Here the outer function is the squaring function and the inner function is the sine function. So

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\sin x)^2 = \underbrace{2}_{\substack{\text{derivative}\\ \text{of outer}\\ \text{function}}} \cdot \underbrace{(\sin x)}_{\substack{\text{evaluated}\\ \text{at inner}\\ \text{function}}} \cdot \underbrace{\cos x}_{\substack{\text{derivative}\\ \text{of inner}\\ \text{function}}}$$

EXAMPLE 3 Differentiate $y = (x^3 - 1)^{100}$.

SOLUTION Taking $u = g(x) = x^3 - 1$ and $n = 100$ in (4), we have

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^3 - 1)^{100} = 100(x^3 - 1)^{99}\frac{d}{dx}(x^3 - 1)$$

$$= 100(x^3 - 1)^{99} \cdot 3x^2 = 300x^2(x^3 - 1)^{99}$$

V EXAMPLE 4 Find $f'(x)$ if $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2 + x + 1}}$.

SOLUTION First rewrite f:

$$f(x) = (x^2 + x + 1)^{-1/3}$$

Thus

$$f'(x) = -\tfrac{1}{3}(x^2 + x + 1)^{-4/3}\frac{d}{dx}(x^2 + x + 1)$$

$$= -\tfrac{1}{3}(x^2 + x + 1)^{-4/3}(2x + 1)$$

EXAMPLE 5 Find the derivative of the function

$$g(t) = \left(\frac{t-2}{2t+1}\right)^9$$

SOLUTION Combining the Power Rule, Chain Rule, and Quotient Rule, we ge

$$\begin{aligned} g'(t) &= 9\left(\frac{t-2}{2t+1}\right)^8 \frac{d}{dt}\left(\frac{t-2}{2t+1}\right) \\ &= 9\left(\frac{t-2}{2t+1}\right)^8 \frac{(2t+1)\cdot 1 - 2(t-2)}{(2t+1)^2} = \frac{45(t-2)^8}{(2t+1)^{10}} \end{aligned}$$

EXAMPLE 6 Differentiate $y = (2x + 1)^5(x^3 - x + 1)^4$.

SOLUTION In this example we must use the Product Rule before using the Chain Rule:

$$\frac{dy}{dx} = (2x + 1)^5 \frac{d}{dx}(x^3 - x + 1)^4 + (x^3 - x + 1)^4 \frac{d}{dx}(2x + 1)^5$$

$$= (2x + 1)^5 \cdot 4(x^3 - x + 1)^3 \frac{d}{dx}(x^3 - x + 1)$$

$$+ (x^3 - x + 1)^4 \cdot 5(2x + 1)^4 \frac{d}{dx}(2x + 1)$$

$$= 4(2x + 1)^5(x^3 - x + 1)^3(3x^2 - 1) + 5(x^3 - x + 1)^4(2x + 1)^4 \cdot 2$$

Noticing that each term has the common factor $2(2x + 1)^4(x^3 - x + 1)^3$, we could factor it out and write the answer as

$$\frac{dy}{dx} = 2(2x + 1)^4(x^3 - x + 1)^3(17x^3 + 6x^2 - 9x + 3) \qquad \blacksquare$$

EXAMPLE 7 If $f(x) = \sin(\cos(\tan x))$, then

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos(\cos(\tan x)) \frac{d}{dx} \cos(\tan x) \\ &= \cos(\cos(\tan x)) [-\sin(\tan x)] \frac{d}{dx} (\tan x) \\ &= -\cos(\cos(\tan x)) \sin(\tan x) \sec^2 x \end{aligned}$$

Notice that we used the Chain Rule twice.

EXAMPLE 8 Differentiate $y = \sqrt{\sec x^3}$.

SOLUTION Here the outer function is the square root function, the middle function is the secant function, and the inner function is the cubing function. So we have

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{2\sqrt{\sec x^3}} \frac{d}{dx}(\sec x^3) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\sec x^3}} \sec x^3 \tan x^3 \frac{d}{dx}(x^3) \\
&= \frac{3x^2 \sec x^3 \tan x^3}{2\sqrt{\sec x^3}}
\end{aligned}$$

مثال:

$$y = f(\sqrt{\tan x})$$

$$f(x) = x^3 + 2x + 5 \qquad y'_x = ?$$

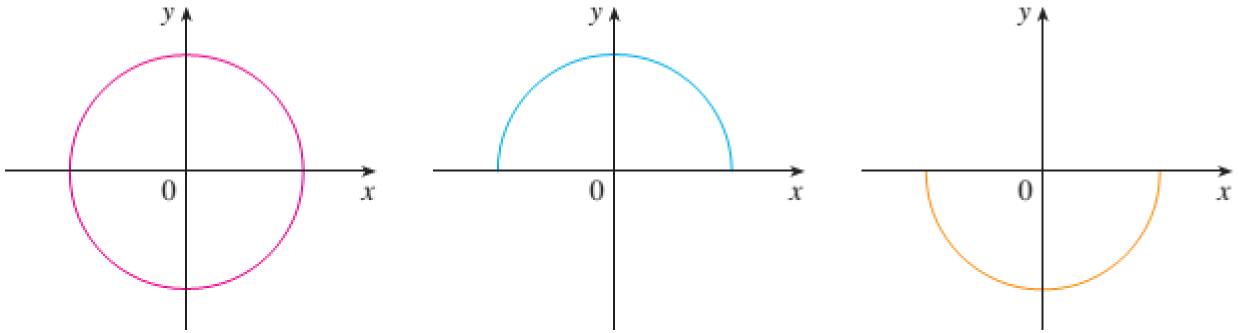
۱۷- مشتق تابع ضمنی

هر معادله به شکل $f(x,y)=۰$ ممکن است خود تابع نباشد ولی می توان از آن یک یا دو تابع استخراج نمود. مانند معادله ی $x^۲+y^۲=۱$ که تابع نیست ولی توابع زیر از آن استخراج می شوند.

$$y=\sqrt{۱-x^۲} \quad \text{و} \quad y=-\sqrt{۱-x^۲}$$

به همین دلیل است که چنین معادلاتی به توابع ضمنی موسوم هستند. در هر حالت در چنین معادلاتی بیشتر اوقات محاسبه ی y بطور صریح برحسب x امکان پذیر نباشد.

منظور از مشتق تابع ضمنی مشتق توابع بدست آمده از آن است.برای محاسبه ی مشتق هر تابع ضمنی به یکی از دو روش زیر می توان عمل کرد.



(a) $x^2+y^2=25$ (b) $f(x)=\sqrt{25-x^2}$ (c) $g(x)=-\sqrt{25-x^2}$

چون y تابعی بر حسب x است، پس داریم.

$$f(x,y)=\cdot \xrightarrow{\text{مشتق}} f'_x + y'.f'_y = \cdot \to y' = -\frac{f'_x}{f'_y}$$

لذا پس از منتقل کردن تمام جملات به یک طرف معادله، دستور زیر را بکار می گیریم.

$$y' = -\frac{f'_x}{f'_y} = \begin{array}{l} \longrightarrow \text{مشتق نسبت به } x \text{ (} y \text{ عدد فرض می شود.)} \\ \longrightarrow \text{مشتق نسبت به } y \text{ (} x \text{ عدد فرض می شود.)} \end{array}$$

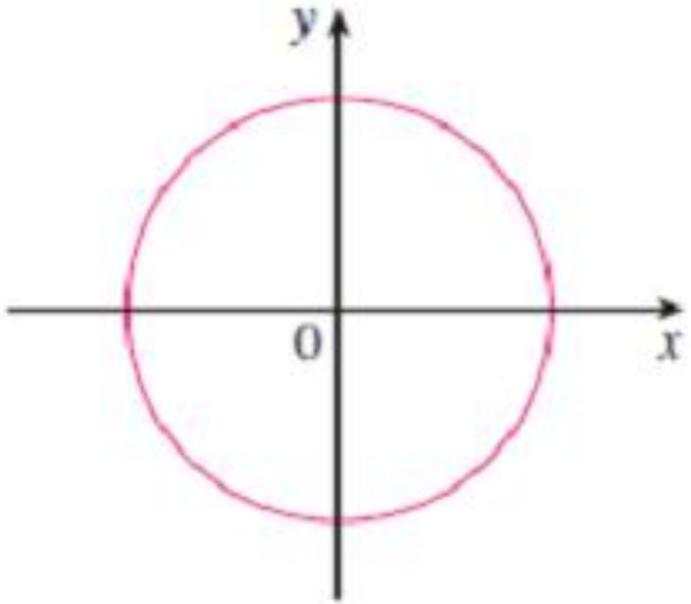
تمرین:

$$y^{۲} = \cos x + y \to y^{۲} - y - \cos x = \cdot \xrightarrow{\text{مشتق}} y' = \frac{-\sin x}{۲y - ۱}$$

مثال ۱

الف) اگر $x^۲ + y^۲ = ۲۵$، $\frac{dy}{dx}$ را پیدا کنید.

ب) معادلهٔ مماس بر دایرهٔ $x^۲ + y^۲ = ۲۵$ در نقطهٔ $(۳, ۴)$ را پیدا کنید.



(a) $x^2 + y^2 = 25$

راه‌حل اول

الف) از دو طرف معادلهٔ $x^۲ + y^۲ = ۲۵$ مشتق بگیرید:

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}(25)$$

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = 0$$

با به‌خاطر داشتن اینکه y تابعی از x است و دوبار استفاده‌کردن از قاعدهٔ زنجیری به‌دست می‌آید

$$\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dy}(y^2)\frac{dy}{dx} = 2y\frac{dy}{dx}$$

بنابراین

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

اکنون از این معادله $\frac{dy}{dx}$ را پیدا می‌کنیم:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

ب) در نقطهٔ $(۳,۴)$، $x = ۳$ و $y = ۴$، درنتیجه

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{۳}{۴}$$

بنابراین معادلهٔ خط مماس بر دایره در نقطهٔ $(۳,۴)$ به‌شکل

$$y - ۴ = -\frac{۳}{۴}(x - ۳)$$

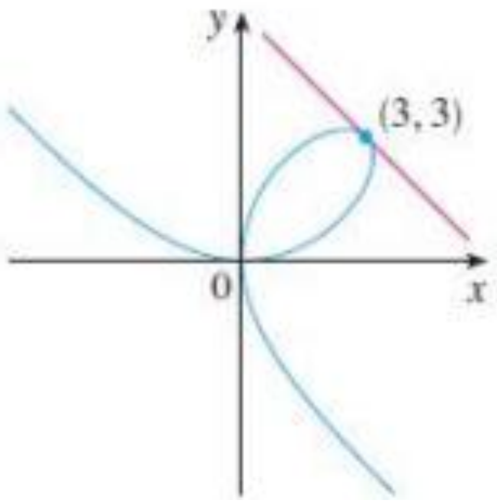
یا $۳x + ۴y = ۲۵$ است.

مثال ۲

الف) اگر $x^3 + y^3 = 6xy$، y' را پیدا کنید.

ب) خط مماس بر منحنی برگی دکارت، $x^3 + y^3 = 6xy$، در نقطهٔ $(3,3)$ را پیدا کنید.

ج) در چه نقطه‌هایی در ربع اول خط مماس افقی است؟



الف) با مشتق‌گیری از دو طرف $x^۳ + y^۳ = ۶xy$ نسبت به x، با در نظرگرفتن y به‌عنوان تابعی از x، و با استفاده از قاعدهٔ زنجیری روی جملهٔ $y^۳$ و قاعدهٔ ضرب روی جملهٔ $۶xy$ به‌دست می‌آید

$$3x^2 + 3y^2y' = 6xy' + 6y$$

یا

$$x^2 + y^2y' = 2xy' + 2y$$

اکنون y' را پیدا می‌کنیم:

$$y^2y' - 2xy' = 2y - x^2$$

$$(y^2 - 2x)y' = 2y - x^2$$

$$y' = \frac{2y - x^2}{y^2 - 2x}$$

ب) وقتی که $x = y = 3,$

$$y' = \frac{2 \cdot 3 - 3^2}{3^2 - 2 \cdot 3} = -1$$

و با نگاهی به شکل ۲ معلوم می‌شود که این مقدار برای شیب در (۳, ۳) قابل قبول است.
درنتیجه معادلهٔ مماس بر منحنی برگی در (۳, ۳) به‌شکل

$$y - 3 = -1(x - 3)$$

یا $x + y = 6$ است.

ج) خط مماس جایی افقی است که $y' = 0$. با استفاده از عبارت مربوط به y' از قسمت (الف)، معلوم می‌شود که جایی $y' = 0$ که $2y - x^2 = 0$ (به‌شرط اینکه $y^2 - 2x \neq 0$). اگر در معادلهٔ منحنی قرار دهیم $y = \frac{1}{2}x^2$ به‌دست می‌آید

$$x^3 + \left(\frac{1}{2}x^2\right)^3 = 6x\left(\frac{1}{2}x^2\right)$$

که ساده شده‌اش $x^6 = 16x^3$ می‌شود. چون در ربع اول $x \neq 0$، پس $x^3 = 16$. اگر $x = 16^{1/3} = 2^{4/3}$، آن‌وقت $y = \frac{1}{2}\left(2^{8/3}\right) = 2^{5/3}$. بنابراین مماس در $\left(2^{4/3}, 2^{5/3}\right)$، که حدوداً $(2{,}5198, 3{,}1748)$ است، افقی است.

تمرین: مشتق توابع زیر را بدست آورید.

$$x^{۲} + ۳xy + y^{۳} - x + ۲ = ۰$$

$$(x + y)^{۳} + x^{۲}y = x^{۳}$$

$$y = \sin(x + y)$$

EXAMPLE 3 Find y' if $\sin(x + y) = y^2 \cos x$.

SOLUTION Differentiating implicitly with respect to x and remembering that y is a function of x, we get

$$\cos(x + y) \cdot (1 + y') = y^2(-\sin x) + (\cos x)(2yy')$$

(Note that we have used the Chain Rule on the left side and the Product Rule and Chain Rule on the right side.) If we collect the terms that involve y', we get

$$\cos(x + y) + y^2 \sin x = (2y \cos x)y' - \cos(x + y) \cdot y'$$

So

$$y' = \frac{y^2 \sin x + \cos(x + y)}{2y \cos x - \cos(x + y)}$$

Figure 6, drawn with the implicit-plotting command of a computer algebra system, shows part of the curve $\sin(x + y) = y^2 \cos x$. As a check on our calculation, notice that $y' = -1$ when $x = y = 0$ and it appears from the graph that the slope is approximately -1 at the origin. ■

EXAMPLE 4 Find y'' if $x^4 + y^4 = 16$.

SOLUTION Differentiating the equation implicitly with respect to x, we get

$$4x^3 + 4y^3y' = 0$$

Solving for y' gives

$$\boxed{3} \qquad y' = -\frac{x^3}{y^3}$$

To find y'' we differentiate this expression for y' using the Quotient Rule and remembering that y is a function of x:

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(-\frac{x^3}{y^3}\right) = -\frac{y^3\,(d/dx)(x^3) - x^3\,(d/dx)(y^3)}{(y^3)^2}$$

$$= -\frac{y^3 \cdot 3x^2 - x^3(3y^2y')}{y^6}$$

If we now substitute Equation 3 into this expression, we get

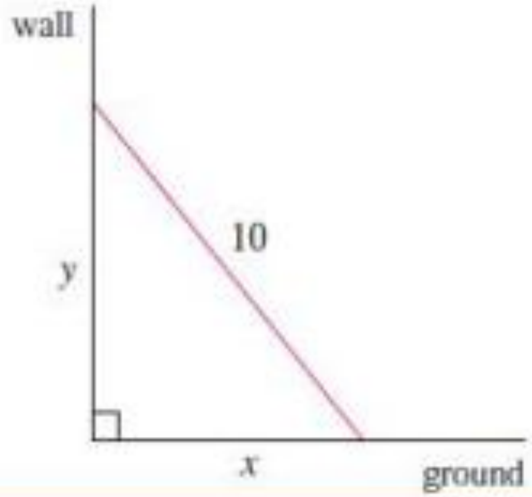
$$y'' = -\frac{3x^2y^3 - 3x^3y^2\left(-\frac{x^3}{y^3}\right)}{y^6} = -\frac{3(x^2y^4 + x^6)}{y^7} = -\frac{3x^2(y^4 + x^4)}{y^7}$$

But the values of x and y must satisfy the original equation $x^4 + y^4 = 16$. So the answer simplifies to

$$y'' = -\frac{3x^2(16)}{y^7} = -48\,\frac{x^2}{y^7} \qquad \blacksquare$$

آهنگهای وابسته

مثال ۲ نردبانی به طول ۱۰ فوت به دیواری قائم تکیه داده شده است. اگر پای نردبان سر بخورد و با آهنگ ۱ ft/s از دیوار دور شود، وقتی که فاصلهٔ پای نردبان از دیوار ۶ فوت است سر نردبان با چه آهنگی از روی دیوار به پایین سر می‌خورد؟



راه‌حل ابتدا نموداری مانند شکل ۱ رسم و آن را علامت‌گذاری می‌کنیم. فرض کنید فاصلهٔ پای نردبان با دیوار x فوت و فاصلهٔ سر نردبان تا سطح زمین y فوت باشد. توجه کنید که x و y هر دو تابعهایی از زمان‌اند (زمان برحسب ثانیه است).

می‌دانیم که $\frac{dx}{dt} = ۱ \text{ ft/s}$ و می‌خواهیم وقتی که $x = ۶ \text{ ft}$، $\frac{dy}{dt}$ را پیدا کنیم (شکل ۲ را ببینید).

در این مسأله، رابطهٔ میان x و y از قضیهٔ فیثاغورس به‌دست می‌آید:

$$x^۲ + y^۲ = ۱۰۰$$

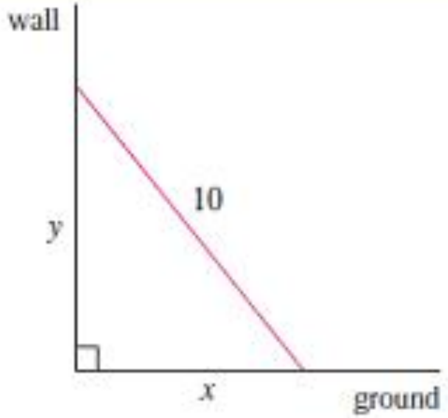


FIGURE 1

با مشتق‌گیری هر طرف نسبت به t با استفاده از قاعدهٔ زنجیری به‌دست می‌آید

$$۲x\frac{dx}{dt} + ۲y\frac{dy}{dt} = ۰$$

و اگر آهنگ موردنظر را از این معادله پیدا کنیم به‌دست می‌آید

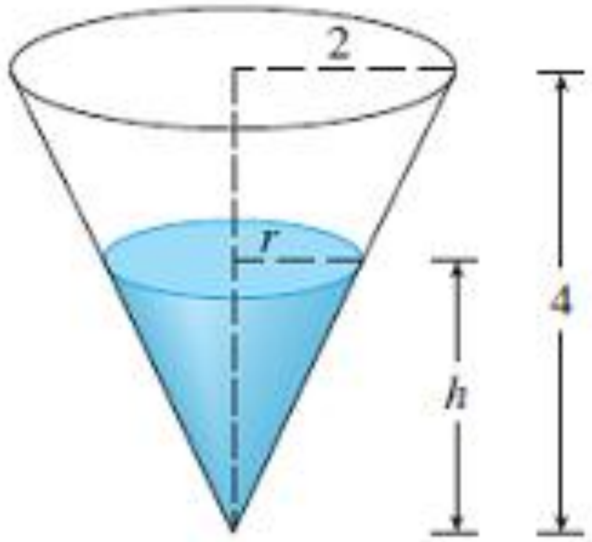
$$\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y}\frac{dx}{dt}$$

وقتی که $x = ۶$، از قضیهٔ فیثاغورس به‌دست می‌آید $y = ۸$ و درنتیجه، با قرار دادن این مقدارها و اینکه $\frac{dx}{dt} = ۱$،

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{۶}{۸}(۱) = -\frac{۳}{۴}\,\mathrm{ft/s}$$

معنی اینکه $\frac{dy}{dt}$ منفی است این است که فاصلهٔ سر نردبان تا زمین با آهنگ $\frac{۳}{۴}\,\mathrm{ft/s}$ کم می‌شود. به‌عبارت دیگر، سر نردبان با آهنگ $\frac{۳}{۴}\,\mathrm{ft/s}$ روی دیوار به پایین سر می‌خورد. □

مثال ۳ مخزن آبی به‌شکل مخروط دوار واژگونی به شعاع قاعدهٔ ۲ m و ارتفاع ۴ m است. اگر آب با آهنگ ۲ m^3/ min به درون مخزن پمپ شود، وقتی که عمق آب ۳ m است، سطح آب با چه آهنگی بالا می‌آید؟



راه‌حل   ابتدا مخروط موردنظر را رسم می‌کنیم و مانند شکل ۳ آن را نمادگذاری می‌کنیم. فرض کنید V، r و h حجم آب، شعاع سطح آب و ارتفاع آب در زمان t باشند، که در اینجا t برحسب دقیقه است.

می‌دانیم $\frac{dV}{dt} = ۲\,\mathrm{m}^۳/\min$ و می‌خواهیم $\frac{dh}{dt}$ را وقتی که h برابر با ۳ متر است پیدا کنیم.

کمیتهای V و h با معادلهٔ

$$V = \tfrac{1}{3}\pi r^2 h$$

به هم مربوط‌اند، اما بهتر است که V را به‌عنوان تابعی فقط از h بنویسیم. برای اینکه r را حذف کنیم از مثلثهای متشابه در شکل ۳ استفاده می‌کنیم و می‌نویسیم

$$\frac{r}{h} = \frac{2}{4} \qquad r = \frac{h}{2}$$

پس عبارت مربوط به V می‌شود

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^2 h = \frac{\pi}{12}h^3$$

اکنون از دو طرف این معادله نسبت به t مشتق می‌گیریم:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{4} h^2 \frac{dh}{dt}$$

درنتیجه

$$\frac{dh}{dt} = \frac{4}{\pi h^2} \frac{dV}{dt}$$

اگر قرار دهیم $h = ۳\ \mathrm{m}$ و $\frac{dV}{dt} = ۲\ \mathrm{m}^۳/\min$، به‌دست می‌آید

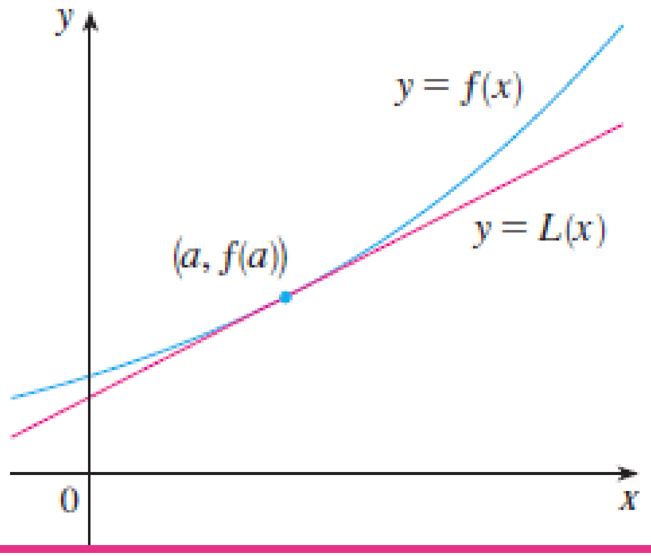
$$\frac{dh}{dt} = \frac{4}{\pi(3)^2} \cdot 2 = \frac{8}{9\pi}$$

سطح آب با آهنگ $\frac{۸}{۹\pi} \approx ۰{,}۲۸\ \mathrm{m}/\min$ بالا می‌آید.

تقریبهای خطی و دیفرانسیل

دیدیم که هر منحنی در نزدیکی نقطهٔ تماسش با خط مماسش خیلی به این خط نزدیک است. درحقیقت، با زوم‌کردن به نقطه‌ای روی نمودار تابعی مشتق‌پذیر متوجه می‌شویم که نمودار تابع بیشتر و بیشتر شبیه خط مماسش می‌شود. (شکل ۲ بخش ۱.۳ را ببینید.) این یافته اساس روشی برای پیداکردن تقریبهایی برای مقدارهای تابع می‌شود.

ایده این است که ممکن است حساب‌کردن مقدارهٔ $f(a)$ در مورد تابعی ساده باشد، اما محاسبهٔ مقدارهای f در این نزدیکیها ممکن است دشوار (یا حتی ناممکن) باشد. بنابراین به مقدارهای تابع خطی L که نمودارش خط مماس بر f در نقطهٔ $(a, f(a))$ است و به‌سادگی حساب می‌شوند رضایت می‌دهیم. (شکل ۱ را ببینید.)



به بیان دیگر، از خط مماس در نقطهٔ $(a, f(a))$ برای تقریبی از منحنی $y = f(x)$ به‌ازای xهای نزدیک به a استفاده می‌کنیم. معادلهٔ این خط مماس

$$\boxed{y = f(a) + f'(a)(x - a)}$$

است و تقریب

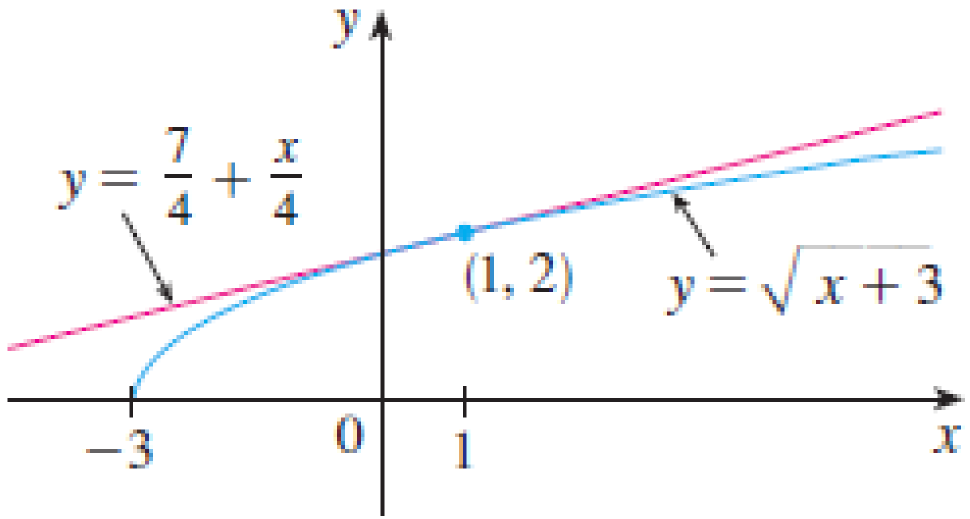
$$\boxed{f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)}$$

را **تقریب خطی** یا **تقریب خط مماس** f در a می‌نامند. تابع خطی‌ای که نمودارش این خط مماس است، یعنی تابع

$$\boxed{L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)}$$

را **خطی‌سازی** f در a می‌نامند.

مثال ۱ خطی‌سازی تابع $f(x) = \sqrt{x+3}$ را در $a = 1$ پیدا کنید و با استفاده از آن عددهای $\sqrt{3/98}$ و $\sqrt{4/05}$ را تقریب بزنید. این تقریبها اضافی‌اند یا نقصانی؟



راه‌حل مشتق $f(x) = (x+3)^{1/2}$ برابر است با

$$f'(x) = \tfrac{1}{2}(x+3)^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x+3}}$$

و درنتیجه

$$f(1) = 2, \qquad f'(1) = \tfrac{1}{4}.$$

و درنتیجه معلوم می‌شود که خطی‌سازی f، چنین است

$$L(x) = f(1) + f'(1)(x-1) = 2 + \tfrac{1}{4}(x-1) = \frac{7}{4} + \frac{x}{4}$$

درنتیجه

$$\sqrt{x+3} \approx \frac{7}{4} + \frac{x}{4}$$ (وقتی که x نزدیک ۱ است)

به‌ویژه،

$$\sqrt{3.98} \approx \tfrac{7}{4} + \tfrac{0.98}{4} = 1.995 \qquad \sqrt{4.05} \approx \tfrac{7}{4} + \tfrac{1.05}{4} = 2.0125$$

همچنین معلوم است که تقریبهایمان اضافی‌اند، زیرا خط مماس بالای منحنی قرار دارد.

مثال ۱: $\sin(61)$ را تخمین بزنید؟

$a = 60 = \frac{\pi}{3}$ $\qquad x = 61$

برای رابطه خطی با پیرامون می‌شود

$f(x) = \sin x \longrightarrow \sin x \approx \cos(a)(x-a) + \sin(a)$

$$\sin\Big(\underbrace{\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{180}}_{61}\Big) \approx \frac{1}{2}\Big(\frac{\pi}{180}\Big) + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

دیفرانسیل

ایدهٔ نهفته در تقریب خطی را گاهی با اصطلاح و نمادگذاری دیفرانسیل صورت‌بندی می‌کنند. اگر $y = f(x)$، که در آن f تابعی مشتق‌پذیر است، آن‌وقت **دیفرانسیل** dx متغیری مستقل است؛ یعنی، به dx می‌توان مقدار هر عدد حقیقی را داد. در این صورت **دیفرانسیل** dy برحسب dx با تساوی

$$dy = f'(x)\, dx \qquad \boxed{۳}$$

تعریف می‌شود. بنابراین dy متغیر وابسته است؛ که مقدارش بستگی به مقدار x و dx دارد. اگر به dx مقداری مشخص را بدهیم و x را عددی مشخص در دامنهٔ f بگیریم، آن‌وقت مقدار عددی dy معلوم می‌شود.

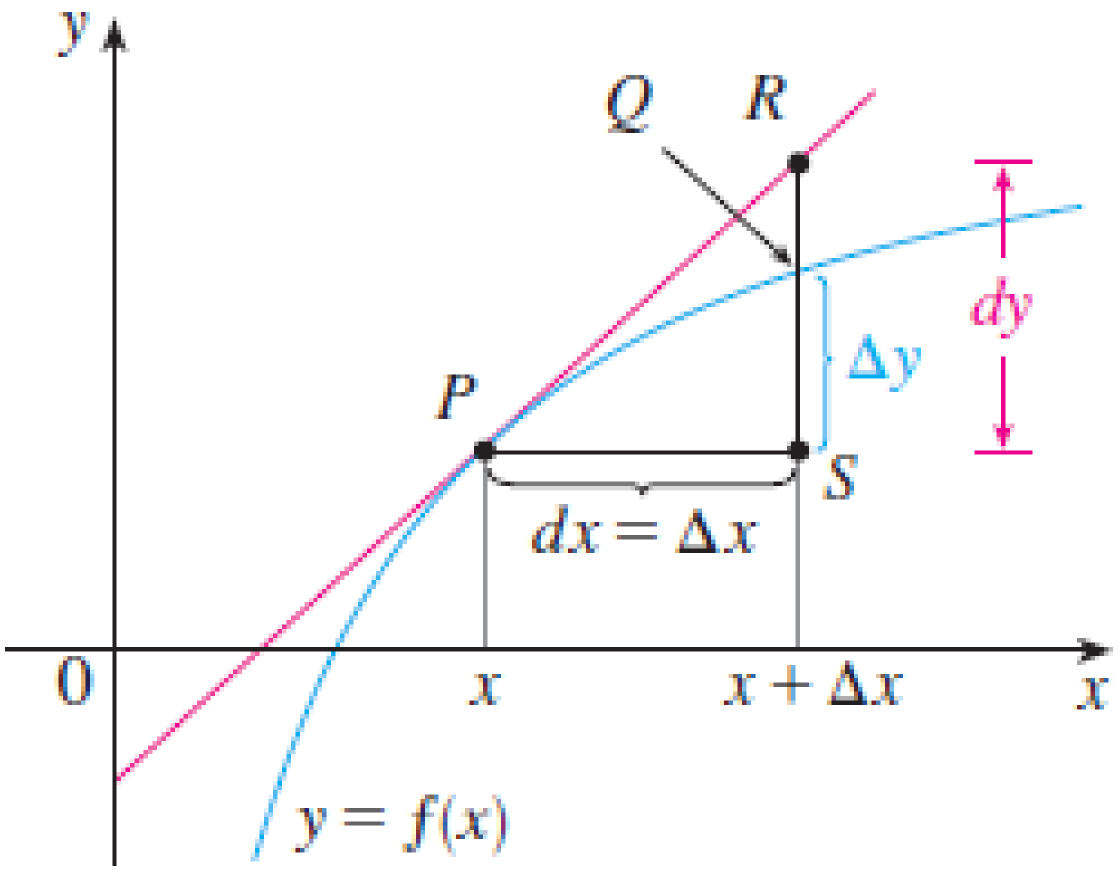
معنای هندسی دیفرانسیل را در شکل ۵ نشان داده‌ایم. فرض کنید $P(x, f(x))$ و

$$Q(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$$

نقطه‌هایی روی نمودار f باشند و $dx = \Delta x$. تغییر متناظر در y برابر است با

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

شیب خط مماس PR برابر با $f'(x)$ است. بنابراین فاصلهٔ جهت‌دار از S تا R برابر است با $f'(x)\, dx = dy$. به این ترتیب dy میزان فرازوفرود خط مماس (تغییر در خطی‌سازی) را نشان می‌دهد، و در عین حال Δy میزان فرازوفرود منحنی $y = f(x)$ را وقتی که x به‌اندازهٔ dx تغییر می‌کند نشان می‌دهد.



y
Q
R
dy
Δy
P
S
$dx = \Delta x$
0
x
$x + \Delta x$
x
$y = f(x)$

مثال ۳ اگر $y = f(x) = x^3 + x^2 - 2x + 1$ مقدارهای Δy و dy را وقتی که x (الف) از 2 تا 2.05 و (ب) از 2 تا 2.01 تغییر می‌کند مقایسه کنید.

راه‌حل

الف) می‌توان نوشت

$$f(2) = 2^3 + 2^2 - 2(2) + 1 = 9$$

$$f(2.05) = (2.05)^3 + (2.05)^2 - 2(2.05) + 1 = 9.717625$$

$$\Delta y = f(2.05) - f(2) = 0.717625$$

به‌طور کلی

$$dy = f'(x)\,dx = (3x^2 + 2x - 2)\,dx$$

وقتی که $x = 2$ و $dx = \Delta x = 0.05$ نتیجه می‌شود

$$dy = [3(2)^2 + 2(2) - 2]0.05 = 0.7$$

ب) می‌توان نوشت

$$f(2.01) = (2.01)^3 + (2.01)^2 - 2(2.01) + 1 = 9.140701$$

$$\Delta y = f(2.01) - f(2) = 0.140701$$

وقتی که $dx = \Delta x = 0.01,$

$$dy = [3(2)^2 + 2(2) - 2]0.01 = 0.14$$

مثال ۴ شعاع کره‌ای را اندازه گرفته‌ایم که با خطای احتمالی حداکثر $0/05\,\text{cm}$ برابر با $21\,\text{cm}$ شده است. اگر از این مقدار شعاع استفاده کنیم حداکثر خطا در محاسبهٔ حجم کره چقدر است؟

راه‌حل اگر شعاع کره r باشد، حجمش برابر است با $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. اگر خطای محاسبهٔ مقدار r برابر $dr = \Delta r$ باشد، آن‌وقت خطای متناظر در محاسبهٔ V برابر با ΔV است، که می‌توان آن را با دیفرانسیل

$$dV = 4\pi r^2 dr$$

تخمین زد. وقتی که $r = 21$ و $dr = 0/05$، معلوم می‌شود که

$$dV = 4\pi(21)^2 0/05 \approx 277$$

حداکثر خطا در محاسبهٔ حجم حدود $277\,\text{cm}^3$ است.

یادداشت چون ممکن است خطای احتمالی در مثال زیاد به‌نظر برسد، تصور بهتری از این خطا را می‌توان از **خطای نسبی** به‌دست می‌آورد، که از تقسیم خطا بر کل حجم به‌دست می‌آید:

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{dV}{V} = \frac{4\pi r^2\, dr}{\frac{4}{3}\pi r^3} = 3\,\frac{dr}{r}$$

بنابراین خطای نسبی در محاسبهٔ حجم حدود سه‌برابر خطای نسبی در محاسبهٔ شعاع است. در مثال ۴، خطای نسبی در محاسبهٔ شعاع حدوداً برابر است با

$$dr/r = 0.05/21 \approx 0.0024$$

که منجر به خطایی نسبی در حدود 0.007 در محاسبهٔ حجم می‌شود. این خطاها برحسب خطای درصد در محاسبهٔ شعاع 0.24% و در محاسبهٔ حجم 0.7% است.

مثالهای اضافی از فصل

تمرین: مشتق پذیری تابع $f(x)=|x-۱|$ را در نقطه ی $x_۰=۱$ بررسی کنید.

حل: ابتدا تابع را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$f(x)=\begin{cases} x-۱ & x\geq ۱ \\ -(x-۱) & x<۱ \end{cases}$$

حال پیوستگی تابع را در نقطه ی داده شده بررسی می کنیم.

مقدار $f(۱)=۱-۱=۰$

حد راست $\lim_{x\to ۱^+} f(x)=۱-۱=۰$

حد چپ $\lim_{x\to ۱^-} f(x)=-(۱-۱)=۰$

تابع در نقطه ی $x_۰=۱$ پیوسته است.

حال مشتقات یک طرفه را در این نقطه را بررسی می کنیم.

مشتق راست $f'_+(۱)=\lim\limits_{x\to ۱^+}\dfrac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim\limits_{x\to ۱^+}\dfrac{(x-۱)-۰}{x-۱}=۱$

مشتق چپ $f'_-(۱)=\lim\limits_{x\to ۱^-}\dfrac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim\limits_{x\to ۱^-}\dfrac{-(x-۱)-۰}{x-۱}=-۱$

تابع در نقطه ی $x_۰=۱$ مشتق پذیر نیست.

تمرین برای حل :

۱ : مشتق پذیری تابع زیر را در نقطه ی $x_۰=۱$ بررسی کنید.

$$f(x)=\begin{cases} x^۲+x & x<۱ \\ x-۳ & x\geq ۱ \end{cases}$$

تذکر :

۱ : ممکن است تابع در یک نقطه پیوسته باشد ولی در این نقطه مشتق پذیر نباشد.

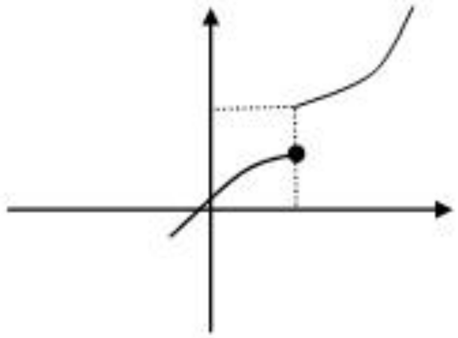
۲ : هر تابع که در یک نقطه مشتق پذیر باشد، در آن نقطه پیوسته است.

تمرین برای حل : تابع زیر در نقطه ی $x_0 = 2$ مشتق پذیر است، مقدار b و a را بیابید.

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 & x \geq 2 \\ 6x + b & x < 2 \end{cases}$$

نکته: در هر یک از موارد زیر یک تابع در یک نقطه مانند x_0 مشتق پذیر نیست.

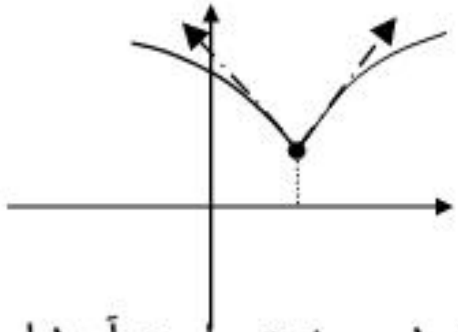
۱) تابع در این نقطه پیوسته نباشد.



در این مورد نقطه ی داده شده را نقطه ی ناپیوستگی می گویند.

مانند: تابع $f(x)=[x]$ که در نقطه ی $x_0=0$ پیوسته نیست.

۲) تابع در این نقطه پیوسته است ولی مشتق راست و چپ تابع در این نقطه موجود و برابر نباشند.



در این مورد نقطه ی داده شده را نقطه ی زاویه دار می گویند.

مانند: تابع $f(x)=|x|$ که در نقطه ی $x_0=0$ پیوسته است ولی مشتق چپ آن در این نقطه ۱− ومشتق راست آن۱ است.

تمرین: تابع زیر در نقطه ی $x_0 = 1$ مشتق پذیر است،مقدار b و a را بیابید.

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 & x < 1 \\ bx^3 + 2x & x \geq 1 \end{cases}$$

حل: چون تابع در نقطه ی $x_0 = 1$ مشتق پذیر است،پس در این نقطه پیوسته می باشد.لذا پیوستگی و سپس مشتقات یکطرف را بررسی می کنیم.

مقدار $f(1) = b + 2$

حد راست $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (bx^3 + 2x) = b + 2$

حدچپ $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} ax^2 = a$

$\Rightarrow b + 2 = a$

مشتق راست

$$f'_+(۱)=\lim_{x\to ۱^+}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{(bx^۳+۲x)-(b+۲)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{bx^۳-b+۲x-۲}{x-۱}$$

$$=\lim_{x\to ۱^+}\frac{b(x^۳-۱)+۲(x-۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{(x-۱)[b(x^۲+x+۱)+۲]}{x-۱}=۳b+۲$$

مشتق چپ

$$f'_-(۱)=\lim_{x\to ۱^-}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^-}\frac{ax^۲-(\overbrace{b+۲}^{a})}{x-۱}$$

$$=\lim_{x\to ۱^-}\frac{ax^۲-a}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^-}\frac{a(x^۲-۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{a(x-۱)(x+۱)}{x-۱}=a(۱+۱)=۲a$$

$$\Rightarrow ۲a=۳b+۲$$

$$\therefore\begin{cases} b+۲=a \\ ۲a=۳b+۲\end{cases}\to a=۴,b=۲$$

مثال:

$$f(x)=|x|=\begin{cases} x & x\geq ٠ \\ -x & x<٠ \end{cases}$$

حل:

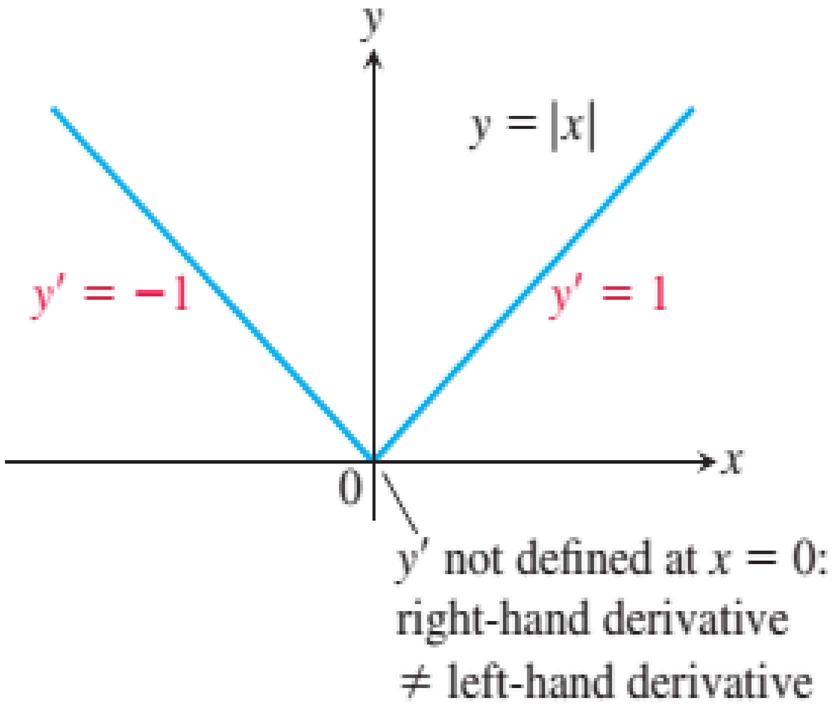
مقدار $f(٠)=٠$

حد راست $\lim\limits_{x\to ٠^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ٠^+} x=٠$

حد چپ $\lim\limits_{x\to ٠^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ٠^-} (-x)=٠$

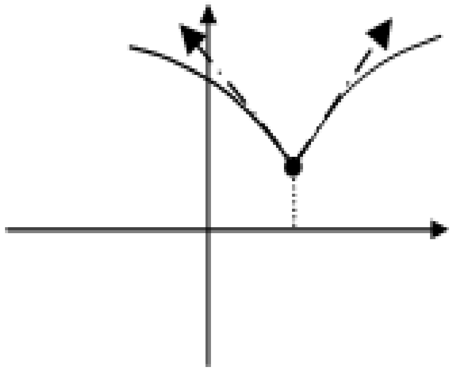
مشتق راست $f'_+(٠)=\lim\limits_{x\to ٠^+} \frac{f(x)-f(٠)}{x-٠}=\lim\limits_{x\to ٠^+} \frac{x}{x}=١$

مشتق چپ $f'_-(٠)=\lim\limits_{x\to ٠^-} \frac{f(x)-f(٠)}{x-٠}=\lim\limits_{x\to ٠^-} \frac{-x}{x}=-١$



۳) تابع در این نقطه پیوسته است ولی مشتق راست یا چپ تابع در این نقطه یکی عدد و دیگری ∞ شود.

در این مورد نیز نقطه ی داده شده را نقطه ی زاویه دار می گویند.

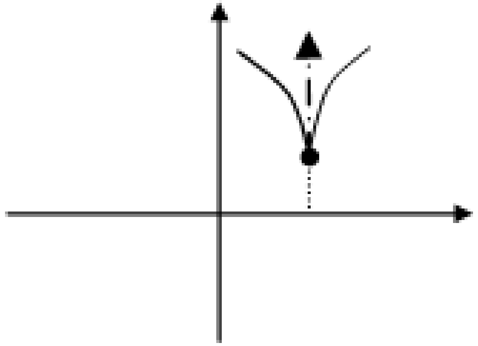


مانند: تابع $f(x)=\begin{cases}(x-۱)^{۲} & x\leq ۱\\ \sqrt{x-۱} & x>۱\end{cases}$ که در نقطه ی $x_{۰}=۱$ پیوسته است ولی

$$f'_{+}(۱)=\lim_{x\to ۱^{+}}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^{+}}\frac{\sqrt{x-۱}}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^{+}}\frac{x-۱}{(x-۱)\sqrt{x-۱}}=+\infty$$

$$f'_{-}(۱)=\lim_{x\to ۱^{-}}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^{-}}\frac{(x-۱)^{۲}}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^{-}}(x-۱)=۰$$

۴) تابع در این نقطه پیوسته است ولی مشتق راست یا چپ تابع یکی $+\infty$ و دیگری $-\infty$ شود.



در این مورد نقطه ی داده شده را نقطه ی بازگشتی می گویند.

مانند: تابع $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ در نقطه ی $x_0=0$ پیوسته ولی مشتق پذیر نیست و این نقطه بازگشتی است.

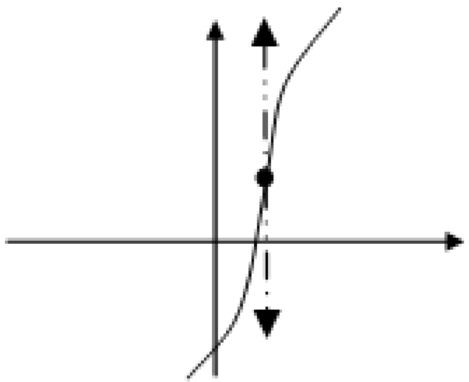
زیرا

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}=+\infty$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}=-\infty$$

۵) تابع در این نقطه پیوسته است ولی مشتق راست یا چپ تابع هر دو $+\infty$ یا هر دو $-\infty$ شوند.

در این مورد نقطه ی داده شده را نقطه ی عطف می گویند.



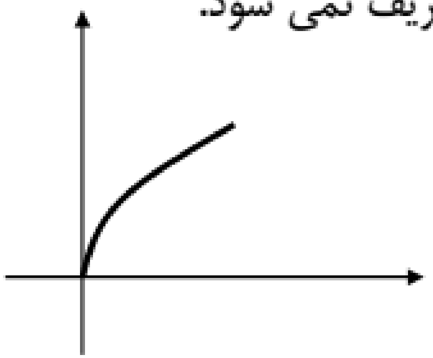
مانند: نمودار تابع $f(x)=\sqrt[5]{x^{3}}$ که در نقطه ی $x_{0}=0$ پیوسته است ولی

$$f'_{+}(0)=\lim_{x\to 0^{+}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^{+}}\frac{\sqrt[5]{x^{3}}}{x}=\lim_{x\to 0^{+}}\frac{1}{\sqrt[5]{x^{2}}}=+\infty$$

$$f'_{-}(0)=\lim_{x\to 0^{-}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^{-}}\frac{\sqrt[5]{x^{3}}}{x}=\lim_{x\to 0^{-}}\frac{1}{\sqrt[5]{x^{2}}}=+\infty$$

۶) تابع در همسایگی(راست یا چپ) این نقطه تعریف نشده باشد.

مانند: تابع $f(x)=\sqrt{x}$ در نقطه ی $x_0=0$ پیوستگی راست دارد ولی حد چپ آن در این نقطه تعریف نمی شود.



این نقطه یک نقطه ی مرزی است.