
بسم الله الرحمن الرحیم

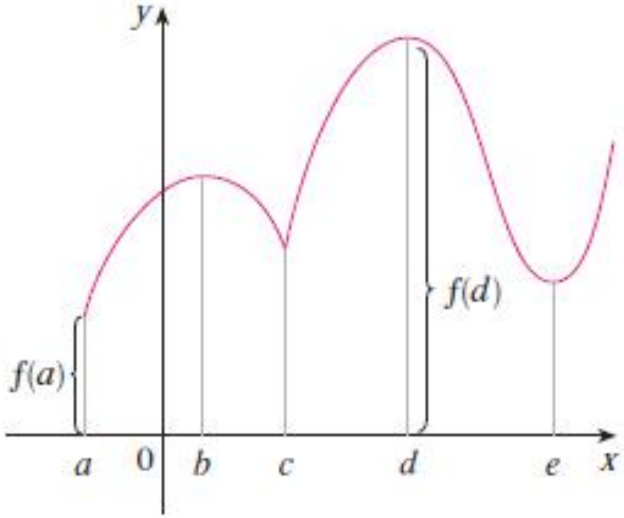
امام علی علیه السلام

هر که عُمر خود را در راه چیزی جز
آنچه او را نجات می دهد صرف کند،
مطلوب خود را از دست داده است

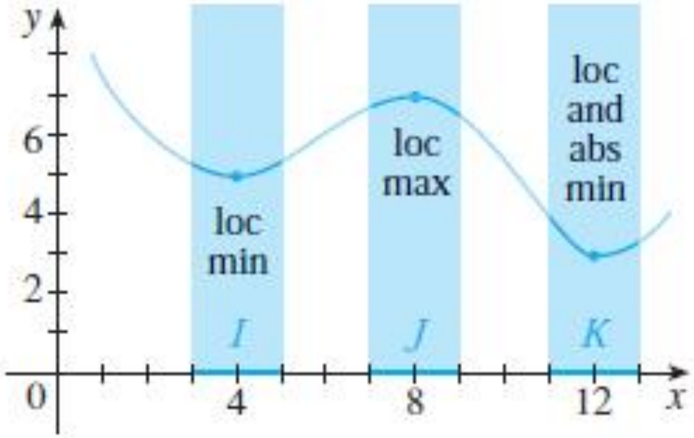
غررالحکم
حدیث [illegible]

۱.۴ مقدارهای ماکسیمم و مینیمم

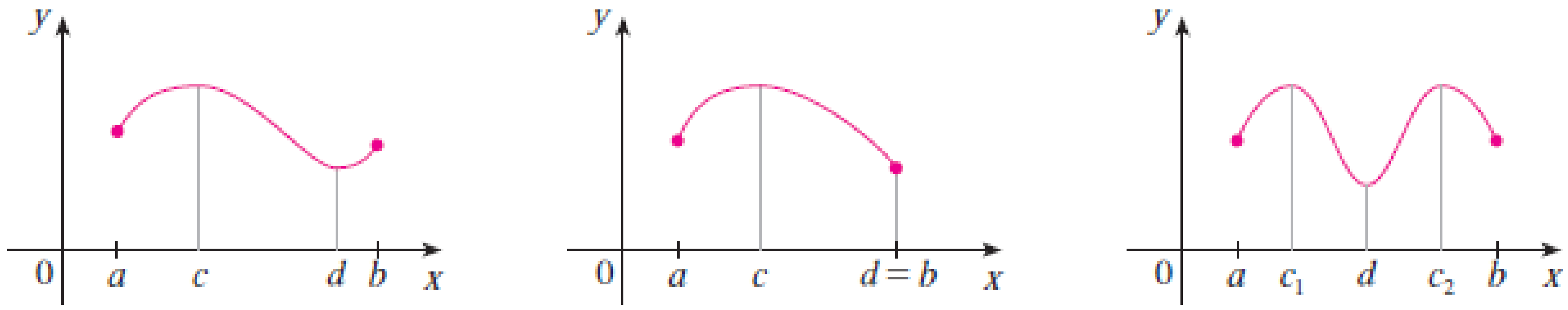
۱ تعریف تابع f در c ماکسیمم مطلق (یا ماکسیمم سراسری) دارد، به‌شرطی که به‌ازای هر x در D، که در اینجا D دامنهٔ f است، $f(c) \geq f(x)$. عدد $f(c)$ را مقدار ماکسیمم f روی D می‌نامند. به‌همین ترتیب، f در c مینیمم مطلق دارد، به‌شرطی که به‌ازای هر x در D، $f(c) \leq f(x)$ و عدد $f(c)$ را مقدار مینیمم f روی D می‌نامند. مقدارهای ماکسیمم و مینیمم f را مقدارهای اکسترمم f می‌نامند.



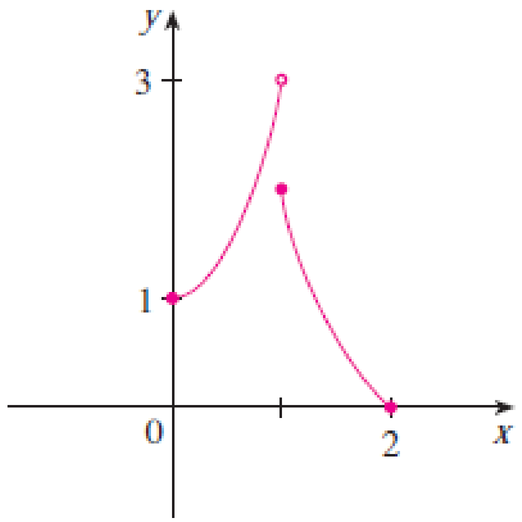
۲ تعریف تابع f در c **ماکسیمم موضعی (یا ماکسیمم نسبی)** دارد، به‌شرطی که وقتی x نزدیک c است، $f(c) \geq f(x)$. (یعنی اینکه به‌ازای هر x در بازه‌ای باز شامل c، $f(c) \geq f(x)$.) به‌همین ترتیب، f در c **مینیمم موضعی** دارد، به‌شرطی که وقتی x نزدیک c است، $f(c) \leq f(x)$.

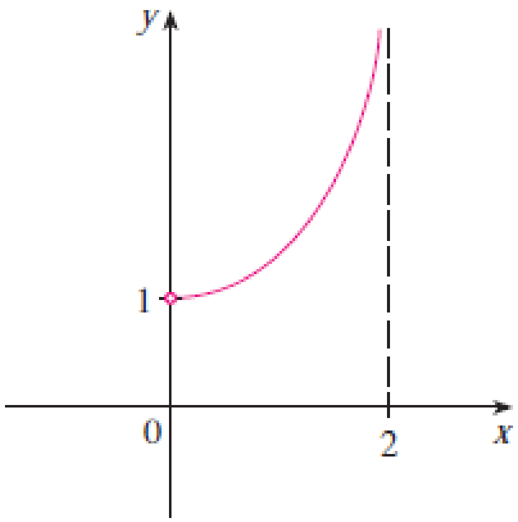


قضیهٔ مقدار اکسترمم اگر f روی بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ پیوسته باشد، آن‌وقت f ماکسیمم مطلقی مانند $f(c)$ و مینیمم مطلقی مانند $f(d)$ دارد، که در اینجا c و d عددهایی در $[a,b]$اند.



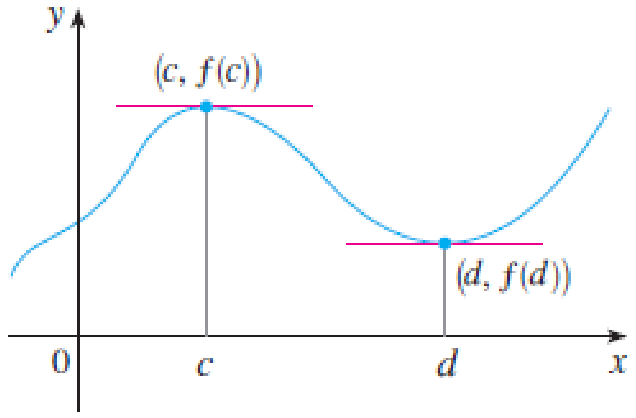
در شکلهای ۶ و ۷ تابعی را نشان داده‌ایم که ببینیم اگر هر یک از فرضهای قضیهٔ مقدار اکسترمم (یعنی پیوستگی و بسته‌بودن بازه) را نداشته باشیم دیگر لزومی ندارد این قضیه درست باشد.





در شکل ۸ نمودار تابعی را نشان داده‌ایم که در c ماکسیمم موضعی دارد و در d مینیمم موضعی. به‌نظر می‌رسد که در نقطه‌های ماکسیمم و مینیمم خطهای مماس افقی‌اند و بنابراین شیب هر یک از آنها ۰ است. می‌دانیم که مشتق شیب خط مماس است، درنتیجه به‌نظر می‌آید که

$$f'(c) = 0, \qquad f'(d) = 0$$



قضیهٔ فرما اگر f در c ماکسیمم موضعی یا مینیمم موضعی داشته باشد و اگر $f'(c)$ وجود داشته باشد، آن‌وقت $f'(c) = 0$.

فرض کنید، برای روشن بودن وضعیت، f در c ماکسیمم موضعی داشته باشد.

اگر x به‌اندازهٔ کافی به c نزدیک باشد، $f(c) \geq f(x)$. درنتیجه، اگر h به‌اندازهٔ کافی به ۰ نزدیک باشد آن‌وقت

$$f(c) \geq f(c+h)$$

اگر $h > 0$ و h به‌اندازهٔ کافی کوچک باشد،

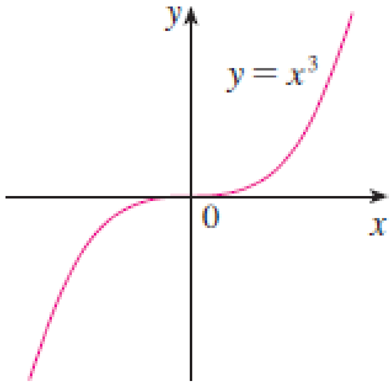
$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq 0$$

اگر $h < 0$، و h به‌اندازهٔ کافی کوچک باشد،

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geq 0$$

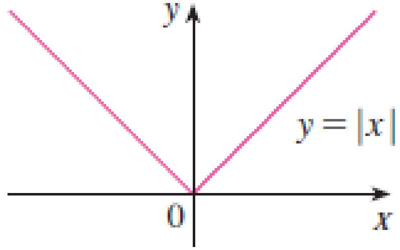
$$f'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} = 0$$

مثالهای زیر هشدارند به اینکه قضیهٔ فرما را عمیقتر درک کنیم. نباید انتظار داشته باشیم که با حل‌کردن $f'(x)=0$ برحسب x به‌سادگی مقدارهای اکسترمم موضعی را به‌دست بیاوریم.



$f'(x) = 3x^2$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$



$f(x)$ در 0 مینیمم (موضعی و مطلق) دارد اما $f'(0)$ وجود ندارد.

✡ تعریف نقطهٔ بحرانی برای تابع f عددی مانند c در دامنهٔ f است که $f'(c) = ۰$ یا $f'(c)$ وجود نداشته باشد.

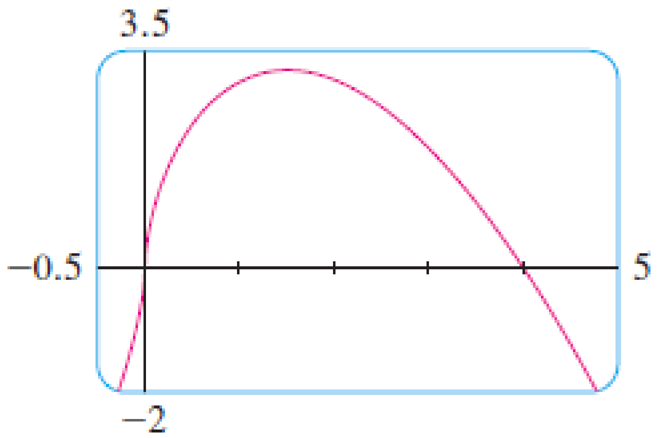
مثال ۷ نقطه‌های بحرانی $f(x) = x^{3/5}(4 - x)$ را پیدا کنید.

$$f'(x) = x^{3/5}(-1) + (4 - x)\left(\tfrac{3}{5}x^{-2/5}\right) = -x^{3/5} + \frac{3(4 - x)}{5x^{2/5}}$$

$$= \frac{-5x + 3(4 - x)}{5x^{2/5}} = \frac{12 - 8x}{5x^{2/5}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 12 - 8x = 0 \Rightarrow x = \tfrac{3}{2}$$

و وقتی که $x = ۰$، $f'(x)$ وجود ندارد. نقطه‌های بحرانی تابع f عددهای $\frac{۳}{۲}$ و ۰ هستند.



اگر f در c ماکسیمم یا مینیمم موضعی داشته باشد، آن‌وقت c نقطهٔ بحرانی f است.

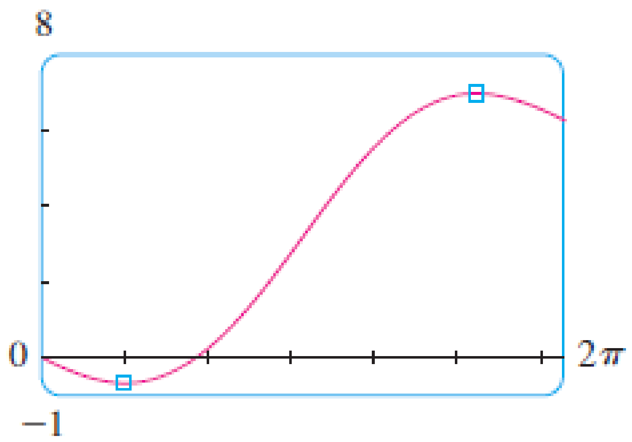
روش بازهٔ بسته برای پیداکردن ماکسیمم و مینیمم مطلق تابع پیوستهٔ f روی بازهٔ بستهٔ $[a, b]$:

۱. مقدار f را به‌ازای نقطه‌های بحرانی f در (a, b) پیدا کنید.

۲. مقدار f را در دو سر بازه پیدا کنید.

۳. بزرگترین مقداری که در مرحله‌های ۱ و ۲ به‌دست آمده است ماکسیمم مطلق است کوچکترین این مقدارها مینیمم مطلق است.

مثال ۹ مقدارهای مینیمم و ماکسیمم مطلق تابع $f(x) = x - ۲\sin x$، $۰ \leq x \leq ۲\pi$ را پیدا کنید.



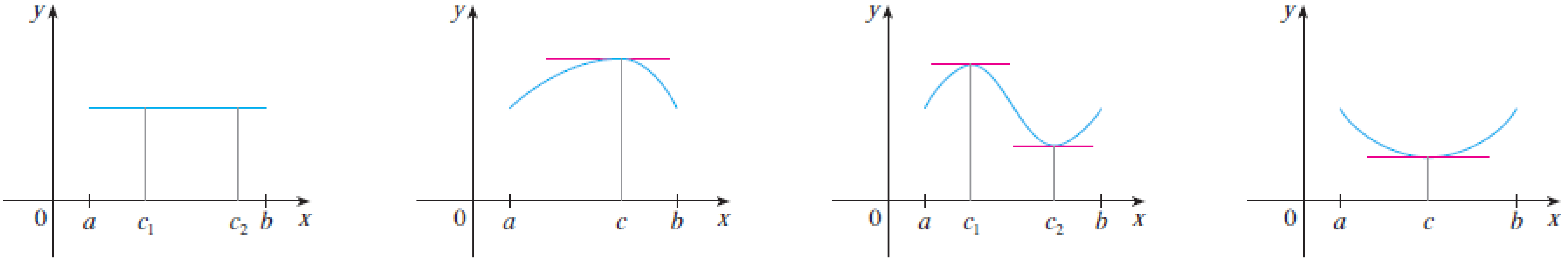
قضیهٔ رول فرض کنید f تابعی باشد که سه شرط زیر را دارد:

۱. f روی بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ پیوسته است.

۲. f روی بازهٔ باز (a,b) مشتق‌پذیر است.

۳. $f(a)=f(b)$

در این صورت عددی مانند c در (a,b) وجود دارد که $f'(c)=0$.



(a) (b) (c) (d)

مثال ۱ قضیهٔ رول را برای تابع موقعیت جسمی متحرک، $s = f(t)$، به‌کار می‌بریم. اگر این جسم در زمانهای متفاوت $t = a$ و $t = b$ در یک جا باشد، آن‌وقت $f(a) = f(b)$. بنابر قضیهٔ رول زمانی مانند $t = c$ بین a و b وجود دارد که $f'(c) = 0$؛ یعنی، در این زمان سرعت جسم ۰ است. (به‌ویژه، می‌توانید ببینید که این وضعیت وقتی که توپی را مستقیماً به بالا پرتاب می‌کنید پیش می‌آید.) $\square$

قضیهٔ کوشی. اگر توابع $y=f(x)$ و $y=g(x)$ بر بازهٔ بستهٔ $[a;b]$ پیوسته، بر بازهٔ باز $(a;b)$ مشتقپذیر باشند، $g'(x)\neq 0$ در این صورت یک $c\in(a;b)$ ای وجود دارد که

$$g'(c)\left\langle f(b)-f(a)\right\rangle = f'(c)\left\langle g(b)-g(a)\right\rangle$$

اثبات: فرض کنیم $h(x)=(g(b)-g(a))f(x)-(f(b)-f(a))g(x)$ اکنون تابع $y=h(x)$ بر بازهٔ بستهٔ $[a;b]$ پیوسته و بر بازهٔ باز $(a;b)$ مشتقپذیر است، بعلاوه $h(a)=h(b)=g(b)f(a)-g(a)f(b)$. پس شرایط قضیهٔ رول برقرار است، بنابراین $c\in(a;b)$ ای وجود دارد که $h'(c)=0$. در حالی که

$$h'(x)=(g(b)-g(a))f'(x)-(f(b)-f(a))g'(x)$$

و برهان تمام است. $\square$

مثال ۲ ثابت کنید که معادلهٔ $x^۳ + x - ۱ = ۰$ دقیقاً یک ریشهٔ حقیقی دارد.

راه‌حل ابتدا از قضیهٔ مقدار میانی (۱۰.۵.۲) استفاده می‌کنیم تا نشان دهیم که ریشه‌ای وجود دارد. فرض کنید

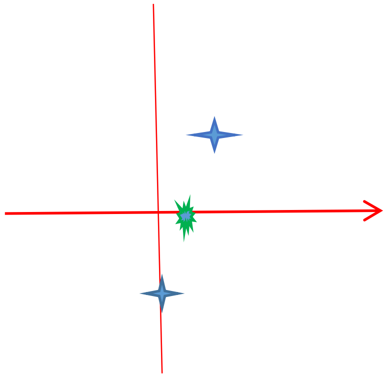
$$f(x) = x^۳ + x - ۱$$

در این صورت $f(۰) = -۱ < ۰$ و $f(۱) = ۱ > ۰$. چون f چندجمله‌ای است، پیوسته است. بنابراین از قضیهٔ مقدار میانی نتیجه می‌شود که عددی مانند c بین ۰ و ۱ وجود دارد که $f(c) = ۰$. به این ترتیب معادلهٔ موردنظر ریشه دارد.

برای اینکه نشان دهیم این معادله ریشهٔ حقیقی دیگری ندارد، از قضیهٔ رول و روش به تناقض رسیدن استفاده می‌کنیم. فرض کنید که معادلهٔ موردنظر دو ریشه داشته باشد، یکی a و دیگری b. در این صورت $f(a) = ۰$ و $f(b) = ۰$ و چون f چندجمله‌ای است، پس روی (a, b) مشتق‌پذیر است و روی $[a, b]$ پیوسته. درنتیجه، بنابر قضیهٔ رول، عددی مانند c بین a و b وجود دارد که $f'(c) = ۰$. اما به‌ازای هر x،

$$f'(x) = ۳x^۲ + ۱ \geq ۱$$

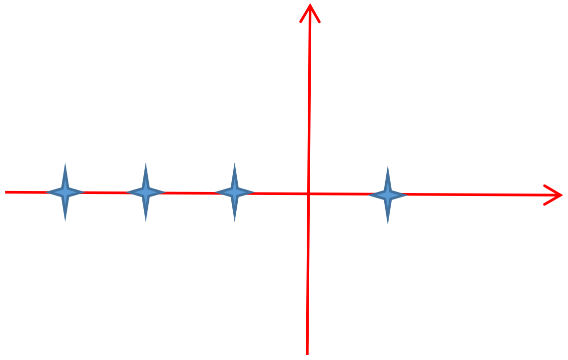
(زیرا $x^۲ \geq ۰$) درنتیجه $f'(x)$ هرگز ۰ نمی‌شود. بنابراین به تناقض رسیده‌ایم. درنتیجه معادلهٔ موردنظر دو ریشهٔ حقیقی ندارد. □



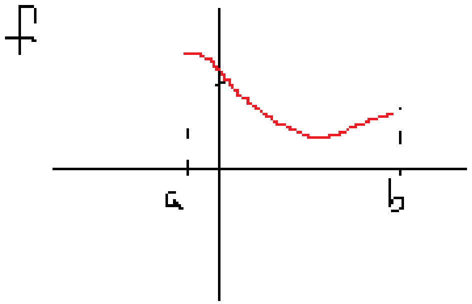
۹) ثابت کنید ریشه‌های مشتق تابع $f(x) = (x^2-1)(x^2-5x+6)$ همگی حقیقی هستند.

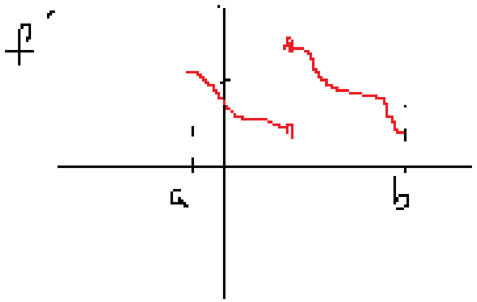
f' یک چندجمله‌ای از درجه ۳ است. باید ثابت کنیم $f'(x)=0$ سه ریشه دارد. از طرفی

$f(1) = f(-1) = f(-2) = f(-3) = 0$ ، اکنون کافیست قضیه رول را بکار گیریم.



نکته: هرچند ممکن است مشتق یک تابع پیوسته نباشداما حتما در قضیه مقدار میانی صدق می‌کند. بعبارت دیگر اگر $f'(x)$ روی بازه $[a,b]$ تعریف شده باشد آنگاه $f'(x)$ تمام مقادیر بین $f'(a)$ و $f'(b)$ را کسب می‌کند.





اثبات: فرض کنیم f روی $[a,b]$ مشتق‌پذیر باشد و $f'(b) < k < f'(b)$. اکنون تابع g را روی $[a,b]$ بصورت $g(x) = f(x) - kx$ تعریف میکنیم. از آنجا که g روی $[a,b]$ پیوسته است ماکزیمم خود را در نقطه‌ای مانند $a < c < b$ کسب میکند. بنابراین $g'(c) = 0$ و در نتیجه $f'(c) = k$.

نتیجه: اگر $f'(x)$ روی بازه $[a,b]$ تعریف شده باشد و $f'(a)f'(b) < 0$ آن‌گاه عددی مانند c بین a و b وجود دارد که $f'(c) = 0$.

قضیهٔ مقدار میانگین فرض کنید f تابعی باشد که شرطهای زیر را داشته باشد:

۱. f روی بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ پیوسته است.

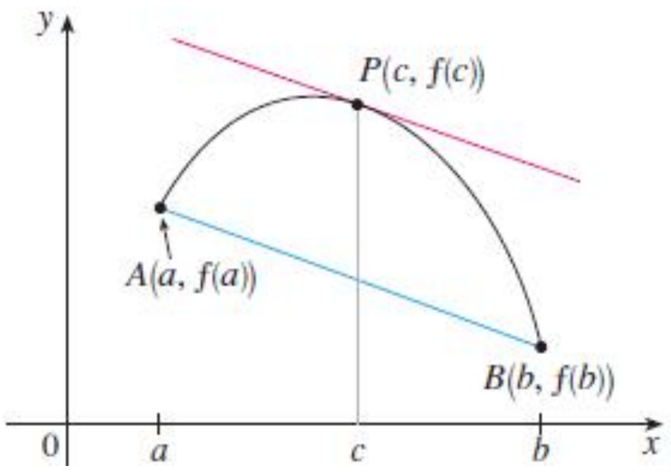
۲. f روی بازهٔ باز (a,b) مشتق‌پذیر است.

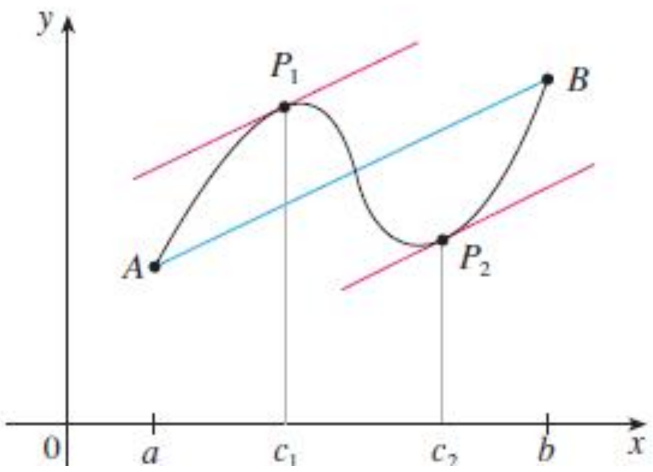
در این صورت عددی مانند c در (a,b) وجود دارد که

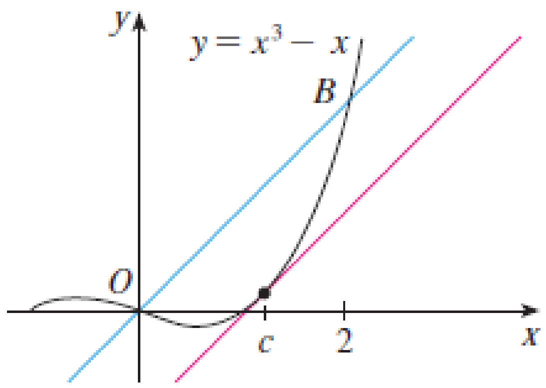
$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \qquad \boxed{۱}$$

یا، معادل آن،

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a) \qquad \boxed{۲}$$







مثال ۳ برای اینکه درستی قضیهٔ مقدار میانگین را برای تابعی خاص ببینیم، تابع $f(x) = x^3 - x$، و عددهای $a = 0$ و $b = 2$ را در نظر می‌گیریم. چون f چندجمله‌ای است، به‌ازای هر xای پیوسته و مشتق‌پذیر است، پس قطعاً روی $[0, 2]$ پیوسته و روی $(0, 2)$ مشتق‌پذیر است. درنتیجه، بنابر قضیهٔ مقدار میانگین، عددی مانند c در $(0, 2)$ وجود دارد که

$$f(2) - f(0) = f'(c)(2 - 0)$$

اکنون توجه کنید که $f(2) = 6$ ، $f(0) = 0$ و $f'(x) = 3x^2 - 1$، درنتیجه این معادله را می‌توان به‌شکل

$$6 = (3c^2 - 1)2 = 6c^2 - 2$$

نوشت، پس $c^2 = \frac{4}{3}$، یعنی $c = \pm 2/\sqrt{3}$ اما c باید در $(0, 2)$ قرار داشته باشد، درنتیجه $c = 2/\sqrt{3}$ در شکل ۶ درستی این محاسبات را نشان داده‌ایم: خط مماس در این مقدار c با خط قاطع OB موازی است. □

مثال ۵ فرض کنید $f(\circ) = -۳$ و به‌ازای همهٔ مقدارهای x، $f'(x) \leq ۵$. $f(۲)$ چقدر ممکن است بزرگ باشد؟

راه‌حل می‌دانیم که f همه‌جا مشتق‌پذیر (و درنتیجه پیوسته) است. به‌ویژه، می‌توانیم از قضیهٔ مقدار میانگین روی بازهٔ $[\circ , ۲]$ استفاده کنیم. عددی مانند c وجود دارد که

$$f(۲) - f(\circ) = f'(c)(۲ - \circ)$$

درنتیجه

$$f(۲) = f(\circ) + ۲f'(c) = -۳ + ۲f'(c)$$

می‌دانیم که به‌ازای هر xای $f'(x) \leq ۵$، پس به‌ویژه می‌دانیم که $f'(c) \leq ۵$. اگر دو طرف این نابرابری را در ۲ ضرب کنیم به‌دست می‌آوریم $۲f'(c) \leq ۱\circ$، درنتیجه

$$f(۲) = -۳ + ۲f'(c) \leq -۳ + ۱\circ = ۷$$

بیشترین مقدار ممکن $f(۲)$ برابر با ۷ است.

با استفاده از قضیهٔ مقدار میانگین می‌توان چند نتیجهٔ اساسی حساب دیفرانسیل را به‌دست آورد

قضیه اگر به‌ازای هر xای در بازهٔ (a,b)، $f'(x)=0$، آن‌وقت f روی (a,b) تابعی ثابت است.

اثبات فرض کنید x_1 و x_2 دو عدد دلخواه در بازهٔ (a,b) باشند که $x_1 < x_2$. چون f روی (a,b) مشتق‌پذیر است، باید روی (x_1,x_2) مشتق‌پذیر و روی $[x_1,x_2]$ پیوسته باشد. با استفاده از قضیهٔ مقدار میانگین برای f روی بازهٔ $[x_1,x_2]$ نتیجه می‌گیریم که عددی مانند c وجود دارد که $x_1 < c < x_2$ و

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1) \tag{6}$$

چون به‌ازای هر xای $f'(x)=0$، پس $f'(c)=0$ و درنتیجه از تساوی ۶ به‌دست می‌آید

$$f(x_2)-f(x_1)=0$$

یا $f(x_1)=f(x_2)$. بنابراین مقدار f در هر دو عددی مانند x_1 و x_2 در (a,b) یکسان است.
یعنی اینکه f روی (a,b) ثابت است. □

یادداشت در استفاده از قضیهٔ ۵ باید جانب احتیاط را داشت. فرض کنید

$$f(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

دامنهٔ f برابر است با $D = \{x \mid x \neq 0\}$ و به‌ازای هر x در D، $f'(x) = 0$. اما واضح است که f تابعی ثابت نیست. این نتیجه با قضیهٔ ۵ تناقض ندارد، زیرا D بازه نیست. توجه کنید که f روی بازهٔ $(0, \infty)$ و نیز روی بازهٔ $(-\infty, 0)$ تابعی ثابت است.

اتحاد $\cos^4 x+\sin^4 x=(3+\cos(4x))/4$ را ثابت کنید.

حل: برای این منظور تابع $f(x)=\cos^4 x+\sin^4 x-(3+\cos(4x))/4$ را بر $\mathbb{R}$ در نظر می‌گیریم. در این صورت

$$\begin{aligned} f'(x) &= -4\sin x\cos^3 x+4\cos x\sin^3 x+\sin(4x)\\ &= -4\sin x\cos x(\sin^2 x-\cos^2 x)+\sin(4x)\\ &= -2\sin(2x)\cos(2x)+\sin(4x)=0. \end{aligned}$$

در نتیجه $f(x)$ بر بازهٔ $\mathbb{R}=(-\infty;\infty)$ ثابت است. از طرفی $f(0)=1+0-1=0$ و حکم اثبات شد.

نتیجه اگر به‌ازای هر xای در بازهٔ (a,b)، $f'(x) = g'(x)$، آن‌وقت $f - g$ روی (a,b) تابعی ثابت است؛ یعنی، $f(x) = g(x) + c$، که در آن c عددی ثابت است.

اثبات فرض کنید $F(x) = f(x) - g(x)$. در این صورت به‌ازای هر xای در (a,b)،

$$F'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$$

درنتیجه، بنابر قضیهٔ ۵، F تابعی ثابت است؛ یعنی، $f - g$ تابعی ثابت است.

آزمون صعودی/نزولی بودن

الف) اگر روی بازه‌ای $f'(x) > 0$، آن‌وقت f روی این بازه صعودی است.

ب) اگر روی بازه‌ای $f'(x) < 0$، آن‌وقت f روی این بازه نزولی است.

اثبات

الف) فرض کنید x_1 و x_2 دو عدد دلخواه در این بازه باشند و $x_1 < x_2$. بنابر تعریف تابع صعودی (صفحهٔ ۲۴) باید نشان دهیم $f(x_1) < f(x_2)$.

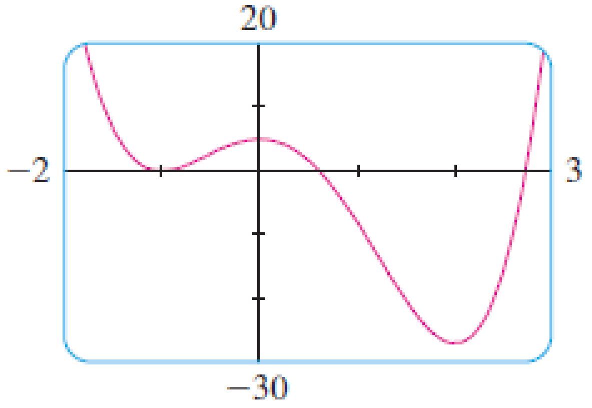
جون فرض بر این است که $f'(x) > 0$، پس می‌دانیم که f روی $[x_1, x_2]$ مشتق‌پذیر است درنتیجه، بنابر قضیهٔ مقدار میانگین عددی مانند c بین x_1 و x_2 وجود دارد که

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \qquad \boxed{1}$$

اکنون توجه کنید که بنابر فرض $f'(c) > 0$ و $x_2 - x_1 > 0$، زیرا $x_1 < x_2$. بنابراین سمت راست تساوی ۱ مثبت است و درنتیجه $f(x_2) - f(x_1) > 0$ یا $f(x_1) < f(x_2)$ که نشان می‌دهد f صعودی است.

قسمت (ب) به‌همین ترتیب ثابت می‌شود. □

مثال ۱ مشخص کنید تابع $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$ کجاها صعودی است و کجاها نزولی



$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x-2)(x+1)$$

x		-1		0		2	
$12x$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$f'(x)$	$-$		$+$		$-$		$+$
f	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$
	نزولی		صعودی		نزولی		صعودی

ثابت کنید که به ازاء هر $x > 1$ ای نامساوی $2\sqrt{x} > 3 - 1/x$ برقرار است.

حل: برای این منظور، فرض می‌کنیم $f(x) = -2\sqrt{x} + 3 - 1/x$ و $x > 1$. در این صورت

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2} = \frac{-x\sqrt{x} + 1}{x^2}$$

اما، فرض $x > 1$ به معنی $\sqrt{x} > 1$ و لذا $x\sqrt{x} > 1$ می‌باشد. بنابراین $f'(x) < 0$ و لذا تابع $y = f(x)$ بر بازهٔ $(1; +\infty)$ نزولی است. در نتیجه به ازاء هر $x > 1$ ای $f(x) < f(1)$، یعنی $-2\sqrt{x} + 3 - 1/x < 0$ یا $3 - 1/x < 2\sqrt{x}$.

ثابت می‌کنیم معادلهٔ $x^{۷} - x^{۴} + ۲x^{۲} + ۵x - ۳ = ۰$ فقط یک ریشهٔ حقیقی دارد.

چون درجهٔ این معادله فرد است، دست‌کم یک ریشهٔ حقیقی دارد. در حقیقت، اگر قرار دهیم

$$f(x) = x^{۷} - x^{۴} + ۲x^{۲} + ۵x - ۳$$

آنگاه

$$f(۰) = -۳ < ۰, \qquad f(۱) = ۴ > ۰$$

و درنتیجه ریشه‌ای بین ۰ و ۱ وجود دارد. اگر ثابت کنیم مشتق تابع f تغییر علامت نمی‌دهد، معلوم می‌شود که تابع f یکنوای اکید و درنتیجه یک‌به‌یک است و $f(x)$ در بیش از یک نقطه صفر نمی‌شود.

توجه کنید که

$$f'(x) = ۷x^۶ - ۴x^۳ + ۴x + ۵.$$

اگر $x < -۱$، آنگاه $-۴x^۳ + ۴x > ۰$؛ پس

$$f'(x) = ۷x^۶ - ۴x^۳ + ۴x + ۵ > ۰.$$

اگر $|x| \leq ۱$، آنگاه

$$|-۴x^۳ + ۴x| = ۴|x|(۱ - x^۲) \leq ۴.$$

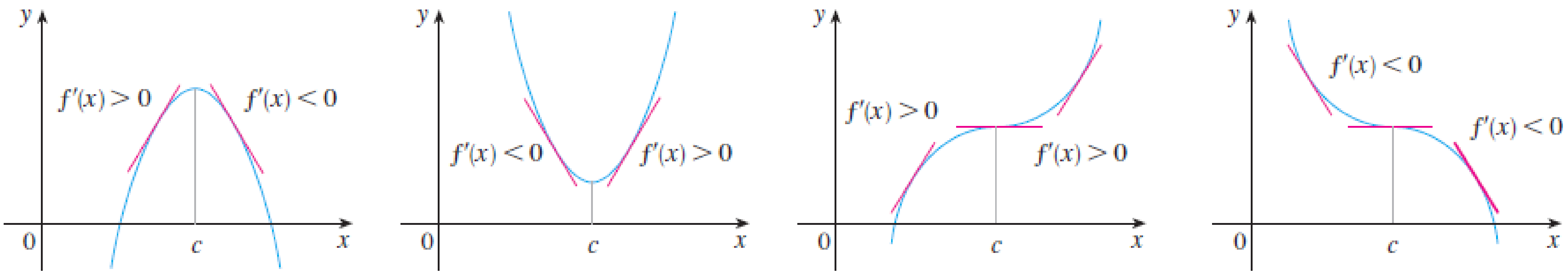
پس $-۴x^۳ + ۴x + ۵ > ۰$ و درنتیجه $f'(x) > ۰$. سرانجام، اگر $x > ۱$، آنگاه $۷x^۶ \geq ۴x^۳$ و درنتیجه $f'(x) > ۰$. بنابراین f' همه‌جا مثبت است و درنتیجه f تابعی صعودی اکید است. ■

آزمون مشتق اول فرض کنید c نقطهٔ بحرانی تابع پیوستهٔ f باشد.

الف) اگر f' در c از مثبت به منفی تغییر علامت دهد، آن‌وقت f در c ماکسیمم موضعی دارد.

ب) اگر f' در c از منفی به مثبت تغییر علامت دهد، آن‌وقت f در c مینیمم موضعی دارد.

ج) اگر f' در c تغییر علامت ندهد (مثلاً اگر f' در هر دو طرف c مثبت باشد یا در هر دو طرف c منفی باشد)، آن‌وقت f در c ماکسیمم یا مینیمم موضعی ندارد.



مثال ۲ مقدارهای مینیمم و ماکسیمم موضعی تابع f در مثال ۱ را پیدا کنید.

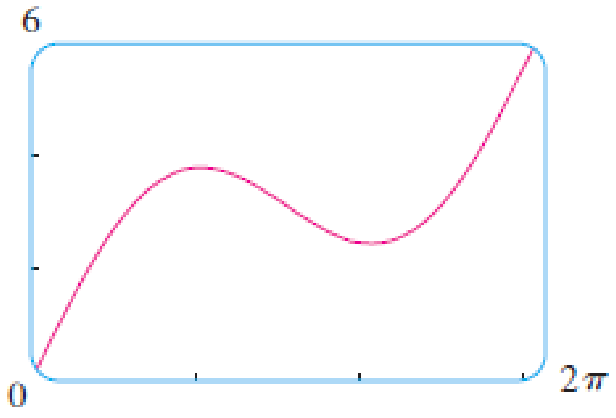
مثال ۳ مقدارهای ماکسیمم و مینیمم موضعی تابع

$$g(x) = x + ۲\sin x, \qquad ۰ \le x \le ۲\pi$$

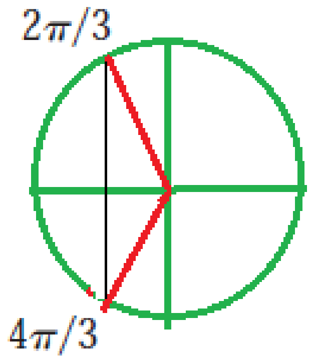
را پیدا کنید.

$$g'(x) = 1 + 2\cos x$$

$$g'(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \cos x = -\tfrac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad x = 2\pi/3\ ,\ 4\pi/3$$



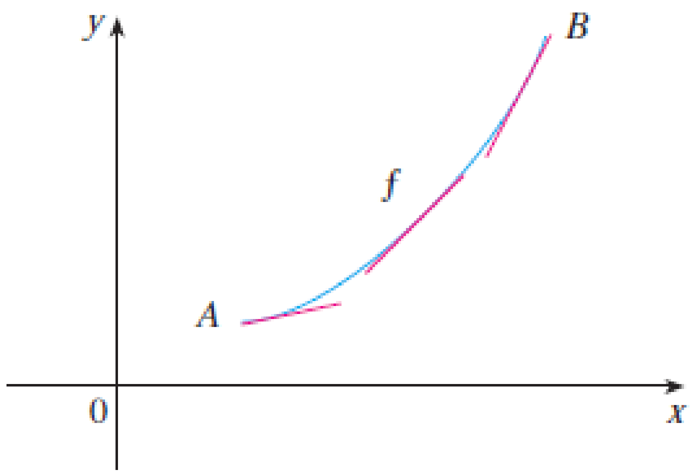
x	0		$2\pi/3$		$4\pi/3$		2π
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
g		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
			ماکسیمم موضعی		مینیمم موضعی		



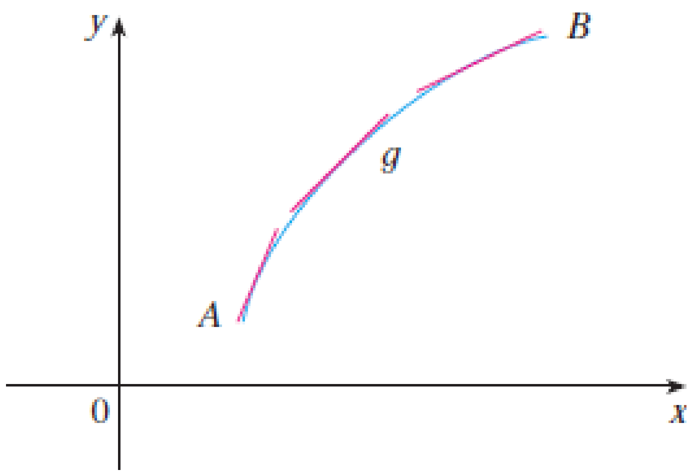
$$g(2\pi/3) = \frac{2\pi}{3} + 2\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2\pi}{3} + \sqrt{3} \approx 3.83$$

$$g(4\pi/3) = \frac{4\pi}{3} + 2\sin\frac{4\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} + 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} \approx 2.46$$

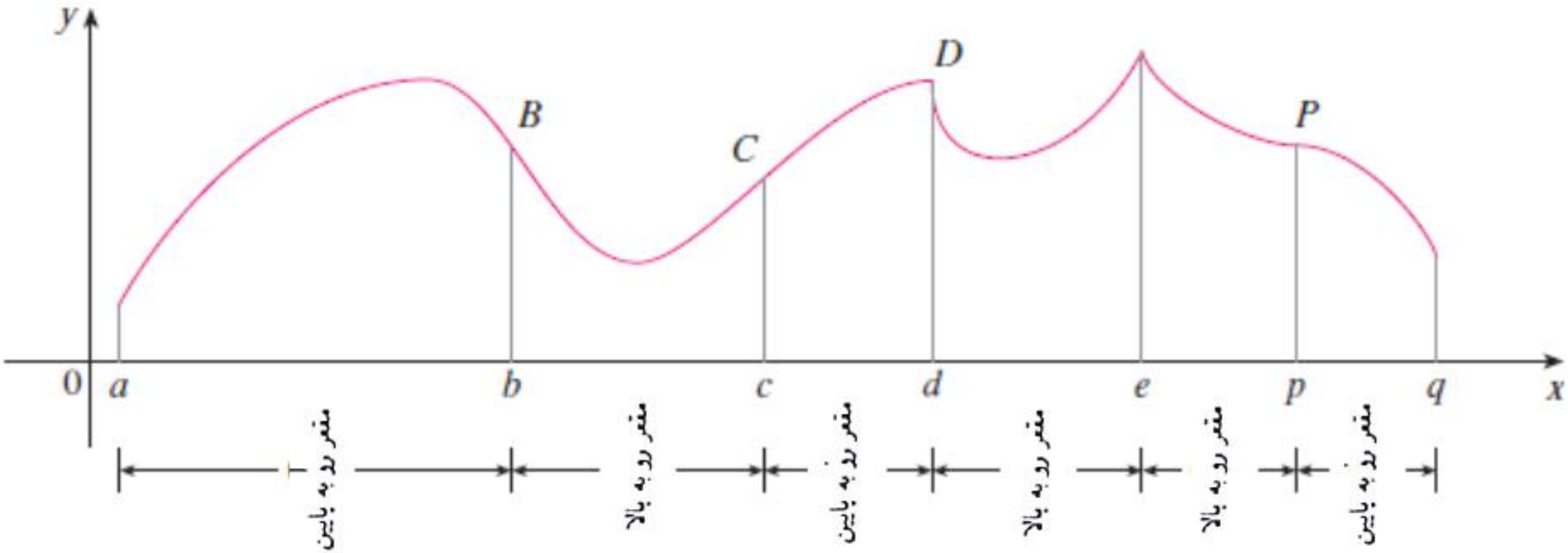
تعریف اگر نمودار f روی بازه‌ای مانند I بالای همهٔ مماسهایش باشد، آن را روی I **مقعر رو به بالا** می‌نامند. اگر نمودار f روی I پایین همهٔ مماسهایش باشد، آن را روی I **مقعر رو به پایین** می‌نامند.



(الف) مقعر رو به بالا



(ب) مقعر رو به پایین

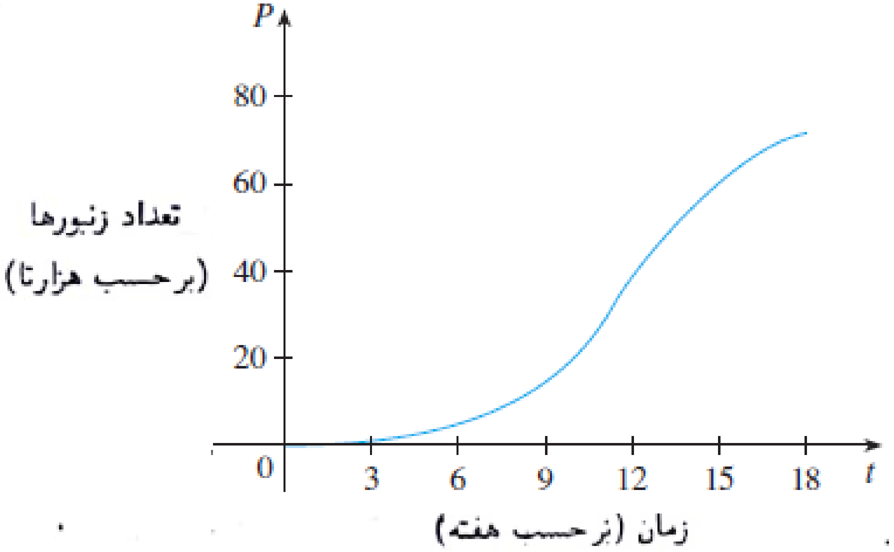

y
x
0
a
b
c
d
e
p
q
B
C
D
P
مقعر رو به پایین
مقعر رو به بالا
مقعر رو به پایین
مقعر رو به بالا
مقعر رو به بالا
مقعر رو به پایین

آزمون تقعر

الف) اگر به‌ازای هر x در I، $f''(x) > 0$، آن‌وقت نمودار f روی I مقعر رو به بالاست.

ب) اگر به‌ازای هر x در I، $f''(x) < 0$، آن‌وقت نمودار f روی I مقعر رو به پایین است.

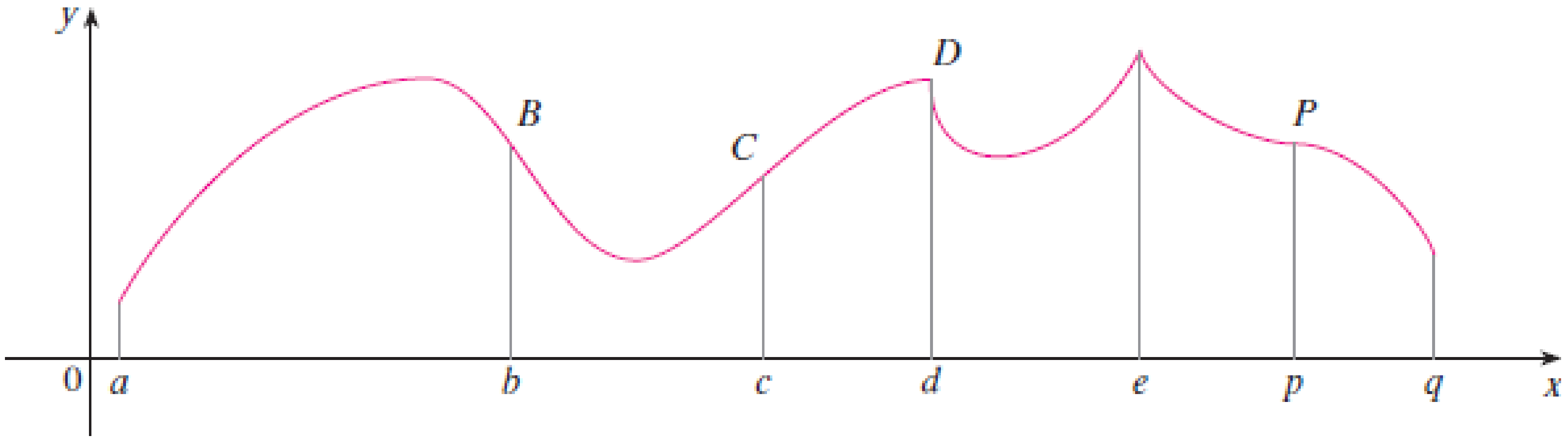
مثال ۴ در شکل ۸ نمودار جمعیت زنبور عسل قبرسی را که در کندو رشد کرده‌اند آورده‌ایم. آهنگ افزایش جمعیت این زنبور عسل در طول زمان چگونه تغییر می‌کند؟ این میزان چه‌وقت بیشترین است؟ روی چه بازه‌هایی P مقعر رو به بالاست و روی چه بازه‌هایی مقعر رو به پایین؟



راه‌حل با نگاه‌کردن به شیب منحنی وقتی که t زیاد می‌شود، معلوم می‌شود که آهنگ افزایش جمعیت در آغاز خیلی کند است، بعد زیاد می‌شود تا حدوداً در هفتهٔ دوازدهم، $t = ۱۲$، به ماکسیمم می‌رسد و همین که جمعیت دارد وضعیت ثابتی به خود می‌گیرد کم می‌شود. وقتی که جمعیت به ماکسیممش که حدوداً ۷۵۰۰۰ است (و آن را توانایی زایش می‌نامند) نزدیک می‌شود، آهنگ افزایش جمعیت $P'(t)$، به ۰ میل می‌کند. به‌نظر می‌رسد که منحنی موردنظر روی (۰, ۱۲) مقعر رو به بالاست و روی (۱۲, ۱۸) مقعر رو به پایین.

تعریف نقطهٔ P روی منحنی $y = f(x)$ را **نقطهٔ عطف** می‌نامند، به‌شرطی که f در این نقطه پیوسته باشد و منحنی در P از مقعر رو به بالابودن به مقعر رو به پایین بودن یا مقعر رو به پایین بودن به مقعر رو به بالابودن تغییر وضعیت دهد.

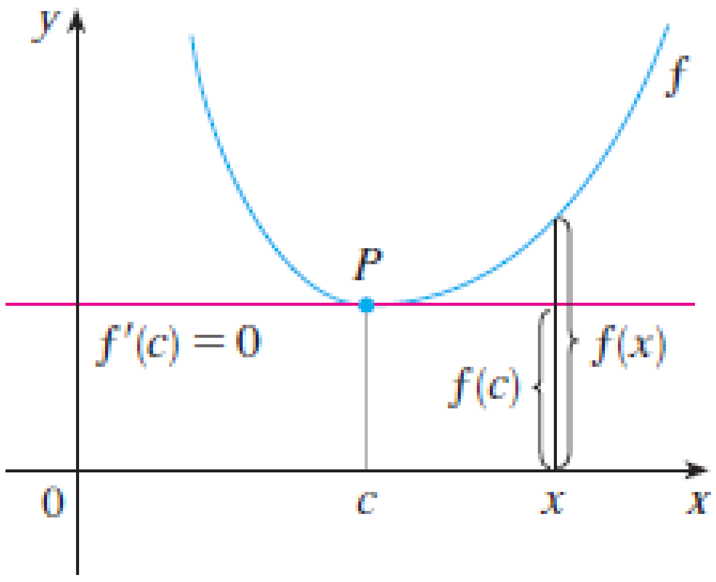
مثلاً، در شکل ۷، B، C، D و P نقطه‌های عطف‌اند. توجه کنید که اگر منحنی در نقطهٔ عطفش مماس داشته باشد، آن‌وقت در این نقطه منحنی از مماسش رد می‌شود.



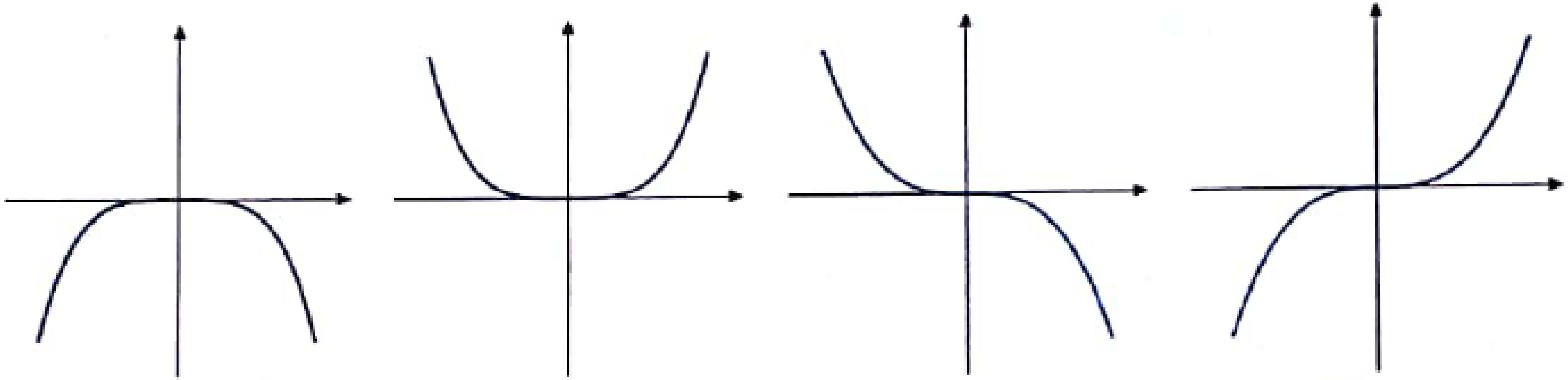
آزمون مشتق دوم   فرض کنید f'' در نزدیکی c پیوسته باشد.

الف) اگر $f'(c) = 0$ و $f''(c) > 0$، آن‌وقت f در c مینیمم موضعی دارد.

ب) اگر $f'(c) = 0$ و $f''(c) < 0$، آن‌وقت f در c ماکسیمم موضعی دارد.



درصورتی‌که $f'(a)$ و $f''(a)$ هر دو صفر باشند آزمون بالا اطلاعی در مورد ماهیت نقطهٔ a نمی‌دهد. در شکل ۲۶.۳ چهار نمودار مختلف نمایش داده شده است که در همهٔ آن‌ها $f'(0) = f''(0) = 0$.



$f(x) = -x^4$ $\quad$ $f(x) = x^4$ $\quad$ $f(x) = -x^3$ $\quad$ $f(x) = x^3$

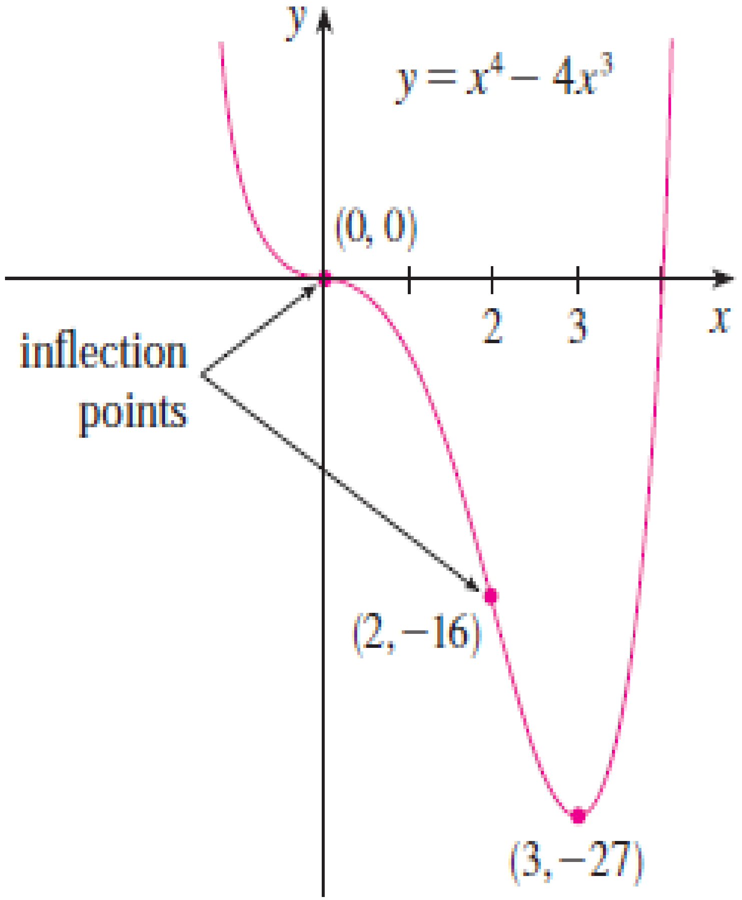
مثال ۶ منحنی $y = x^4 - 4x^3$ را از نظر تقعر بررسی کنید، نقطه‌های عطف و ماکسیمم و مینیمم موضعی آن را پیدا کنید. با استفاده از این اطلاعات نمودار این منحنی را رسم کنید.

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3) \xrightarrow{f' = 0} x = 0 \text{ and } x = 3.$$

$$f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x-2) \xrightarrow{f'' = 0} x = 0 \text{ or } 2,$$

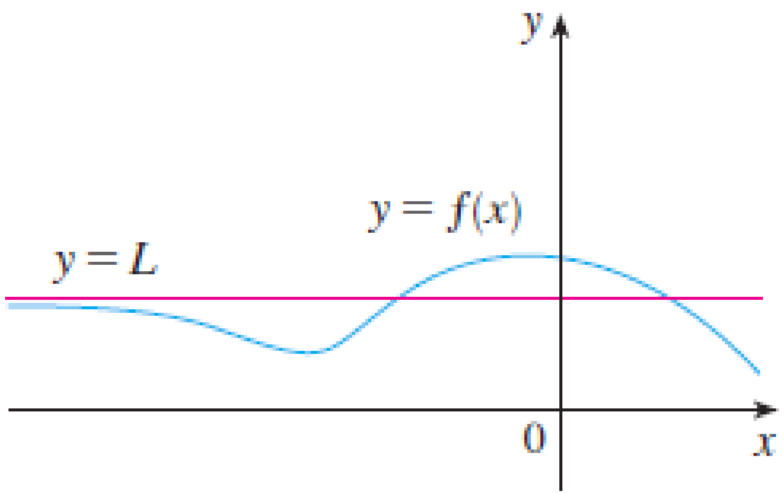
چون $f'(3) = 0$ و $f''(3) > 0$، پس $f(3)$، $f(3) = -27$، مینیمم موضعی است. چون $f''(0) = 0$، از آزمون مشتق دوم هیچ اطلاعی از نقطهٔ بحرانی ۰ به‌دست نمی‌آید.

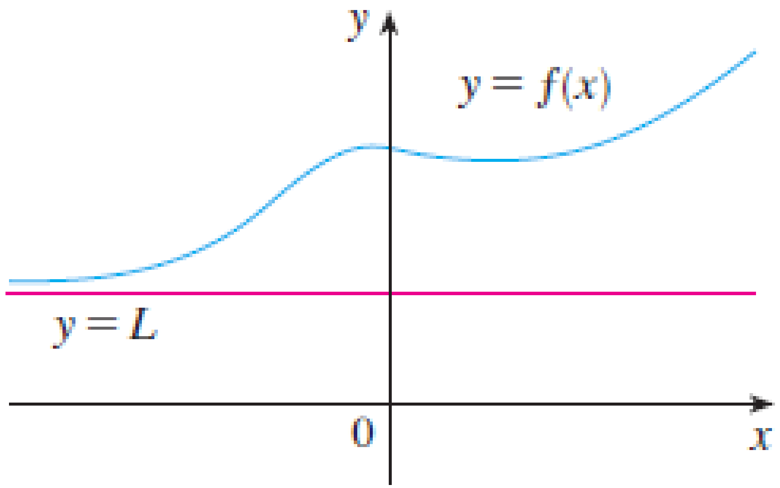
x		0		2		3.	
$f'(x)$	$-$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$
f							
f	↘		↘		↘		↗
		عطف		عطف		min	



تعریف   خط $y = L$ را مجانب افقی منحنی $y = f(x)$ می‌نامند، به‌شرطی که

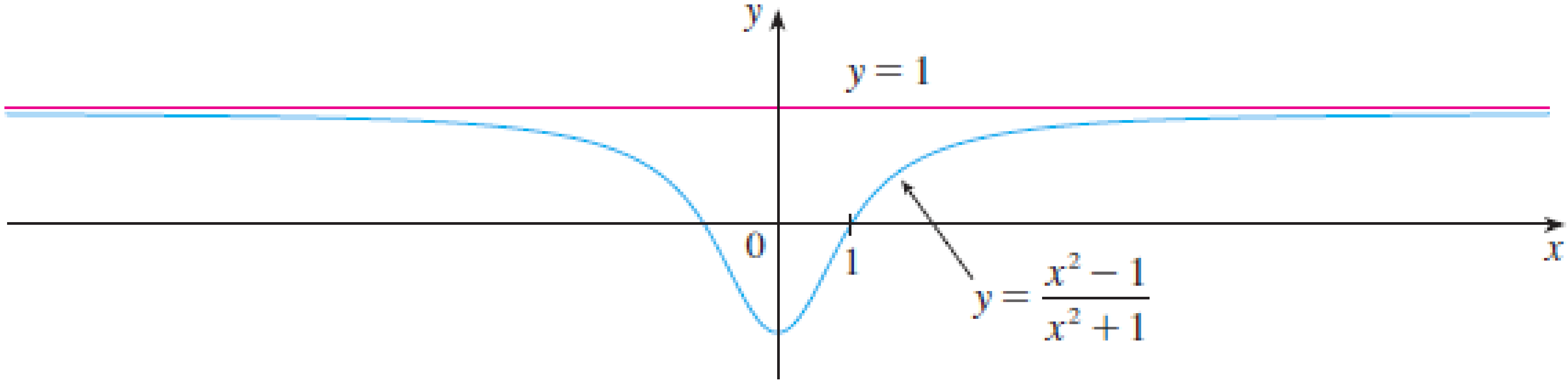
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \quad \text{یا} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$





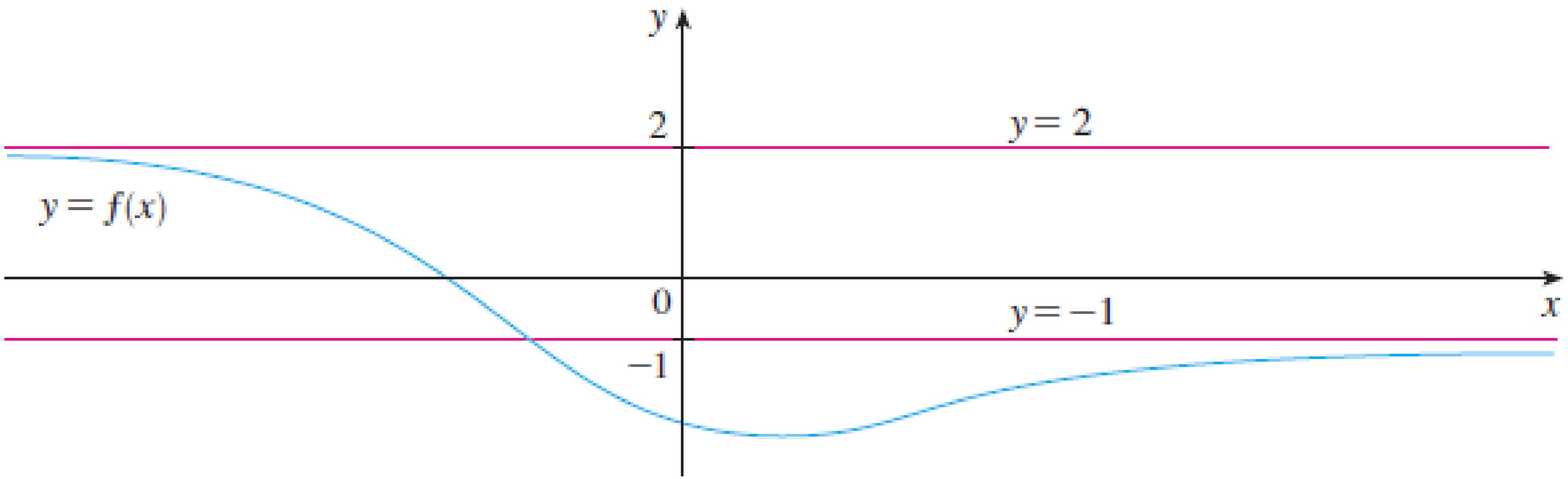
مثلاً، خط ۱ = y مجانب افقی منحنی‌ای است که در شکل ۱ نشان داده‌ایم، زیرا

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^۲ - ۱}{x^۲ + ۱} = ۱$$



برای منحنی $y = f(x)$ که در شکل ۴ رسم کرده‌ایم $y = -۱$ و $y = ۲$ هر دو مجانب افقی‌اند

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -۱, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = ۲$$



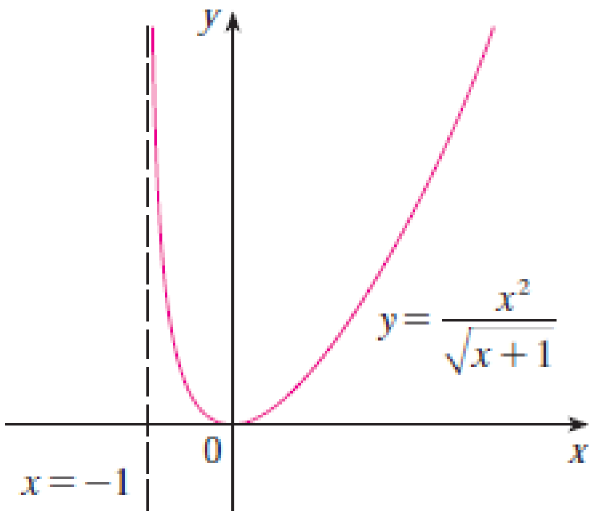
☑ مجانب قائم

خطی است که تابع در امتداد آن به بی نهایت میل می کند.یعنی

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty \text{ یا } -\infty$$

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty \text{ یا } -\infty$$

معادله ی مجانب قائم $\Leftarrow x = a$



مثال ۴ مجانبهای افقی و قائم نمودار تابع $f(x) = \frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}$ را پیدا کنید.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{3-\frac{5}{x}} \qquad \text{(since } \sqrt{x^2} = x \text{ for } x > 0\text{)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{\lim\limits_{x\to\infty} \left(3-\frac{5}{x}\right)} = \frac{\sqrt{\lim\limits_{x\to\infty} 2 + \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^2}}}{\lim\limits_{x\to\infty} 3 - 5\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}}$$

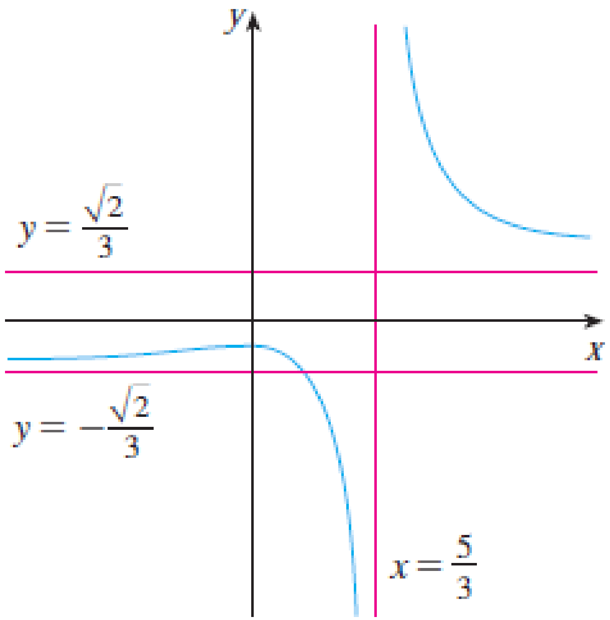
$$= \frac{\sqrt{2+0}}{3-5\cdot 0} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

به این ترتیب خط $y = \frac{\sqrt{2}}{3}$ مجانب افقی نمودار f است.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{3-\frac{5}{x}}$$

$$= \frac{-\sqrt{2+\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2}}}{3-5\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x}} = -\frac{\sqrt{2}}{3}$$

درنتیجه خط $y = -\frac{\sqrt{۲}}{۳}$ نیز مجانب افقی است.



مجانب قائم احتمالی وقتی وجود دارد که مخرج، $۳x - ۵$، برابر با ۰ باشد، یعنی وقتی که $x = \frac{۵}{۳}$.
اگر x به $\frac{۵}{۳}$ نزدیک باشد و $x > \frac{۵}{۳}$، مخرج کسر به ۰ نزدیک است و $۳x - ۵$ مثبت است. صورت کسر، $\sqrt{۲x^۲ + ۱}$، همواره مثبت است، درنتیجه $f(x)$ مثبت است. بنابراین

$$\lim_{x\to(5/3)^+} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5} = \infty$$

اگر x به $\frac{۵}{۳}$ نزدیک باشد اما $x < \frac{۵}{۳}$، آن‌وقت $۳x - ۵ < ۰$ و درنتیجه $f(x)$ خیلی کوچک و منفی است. بنابراین

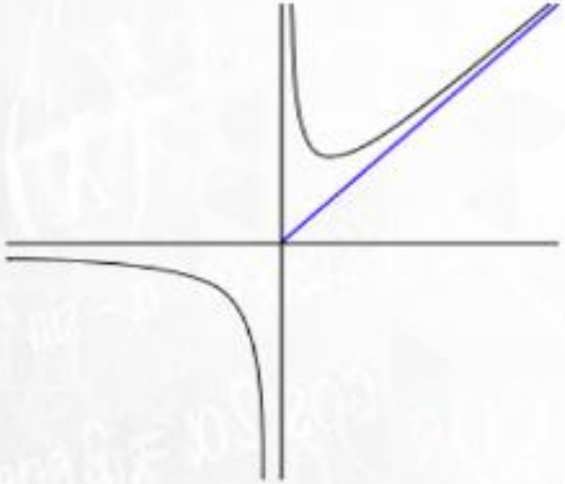
$$\lim_{x\to(5/3)^-} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5} = -\infty$$

مجانب قائم $x = \frac{۵}{۳}$ است.

مجانب مایل

تعریف: خط $y = ax + b$ را مجانب مایل تابع f گوییم، هرگاه حداقل یکی از حدهای زیر رخ دهد:

$$\lim_{x\to +\infty}(f(x)-ax-b)=0 \qquad \lim_{x\to -\infty}(f(x)-ax-b)=0$$



نکته۱: شرط لازم برای وجود مجانب مایل آن است که حد تابع در بی‌نهایت برابر بی‌نهایت شود لذا در هر شاخه که مجانب مایل داشته باشیم، مجانب افقی نداریم و برعکس.

مجانب مایل

نکته۲: اگر $y = ax + b$ مجانب مایل تابع f باشد، داریم:

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - ax)$$

نکته۳: اگر $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ یک تابع گویا باشد که درجه‌ی چندجمله‌ای صورت دقیقاً یک واحد بیشتر از درجه‌ی چندجمله‌ای مخرج باشد، آن‌گاه تابع f دارای مجانب مایل است و داریم:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = ax + b + \frac{r(x)}{q(x)} \qquad \deg(r) < \deg(q) \Rightarrow y = ax + b$$ مجانب مایل

محاسبه‌ی مجانب‌ها

مثال: مجانب های تابع روبرو را بدست آورید.

$$f(x)=\frac{x^3+x-2}{x^2-1}$$

حل:

$$x^2-1=0 \Rightarrow x=\pm 1 \qquad \lim_{x\to -1^+}\frac{x^3+x-2}{x^2-1}=\frac{-4}{0^-}=+\infty$$

$x=-1$ مجانب قائم است.

$$\lim_{x\to 1^\pm}\frac{x^3+x-2}{x^2-1}=\lim_{x\to 1^\pm}\frac{(x-1)(x^2+x+2)}{(x-1)(x+1)}=\frac{4}{2}=2$$

$x=1$ مجانب قائم نیست.

از طرف دیگر:

$$\frac{x^3+x-2}{x^2-1}=x+\frac{2x-2}{x^2-1}$$

$y=x$ مجانب مایل است.

تمرین: معادلات خطوط مجانب های منحنی $y=\sqrt{x^{۲}-۴x+۱}-x$ را تعیین کنید.

حل: منحنی مجانب قائم ندارد.

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^{۲}-۴x+۱}-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^{۲}}-۴x+۱-\cancel{x^{۲}}}{\sqrt{x^{۲}-۴x+۱}+x}=-۲$$

پس خط $y=-۲$ مجانب افقی است.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^۲-۴x+۱}-x\right)=\lim_{x\to-\infty}|x|\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}-x=\lim_{x\to-\infty}-x\left(\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)=+\infty$$

ممکن است تابع مجانب مایل داشته باشد

$$a=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^۲-۴x+۱}-x}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\left(\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)}{x}=-۲$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-ax\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^۲-۴x+۱}-x+۲x\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x^2}-4x+1-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2-4x+1}-x}=۲$$

لذا مجانب مایل به صورت زیر خواهد بود.

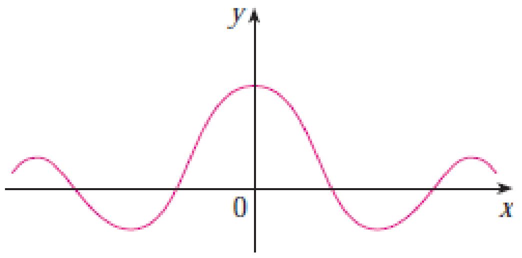
$$y=ax+b\to y=-۲x+۲$$

الگوی رسم منحنیها

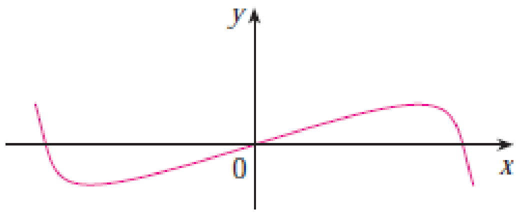
الف) **دامنه** دامنه ی تابع را تعیین می کنیم.

ب) **نقطه‌های برخورد با محورها**

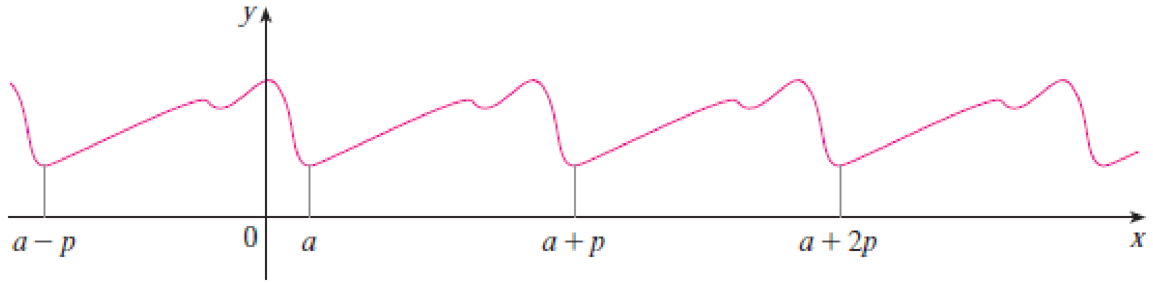
ج) **تقارن**



$f(-x) = f(x)$



$f(-x) = -f(x)$



$f(x + p) = f(x)$

د) **مجانبها** مجانب های منحنی را در صورت وجود بدست می آوریم.توجه کنید که توابع چند جمله ای مجانب ندارند.

ه) از تابع مشتق گرفته و نقاط ماگزیمم یا مینیمم آنرا در صورت وجود تعیین می کنیم.

و) اگر لازم باشد، نقطه ی عطف تابع را به کمک مشتق دوم تابع تعیین می کنیم.

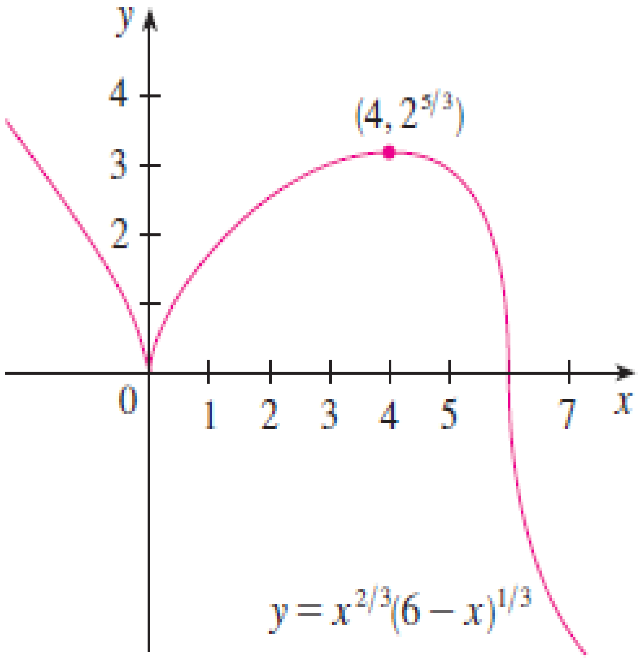
ز) جدول تغییرات تابع را رسم می کنیم.

روی دستگاه مختصات ابتدا نمودار مجانب های منحنی و سپس به کمک جدول تغییرات نمودار تابع را رسم می کنیم.

مثال ۷ نمودار تابع $f(x) = x^{2/3}(6 - x)^{1/3}$ را رسم کنید.

$$f'(x) = \frac{4 - x}{x^{1/3}(6 - x)^{2/3}} \qquad f''(x) = \frac{-8}{x^{4/3}(6 - x)^{5/3}}$$

چون وقتی که $x = ۴$، $f'(x) = ۰$ و وقتی که $x = ۰$ یا $x = ۶$، $f'(x)$ وجود ندارد، نقطه‌های بحرانی ۰، ۴ و ۶اند.



x		0		4		6	
$f'(x)$	$-$		$+$	0	$-$		$-$
$f''(x)$	$-$		$-$		$-$		$+$
f	⌢		⌢		⌢		⌣
f	↘	min	↗	max	↘		↘

مثال منحنی $y = \frac{2x^2}{x^2-1}$ را رسم کنید.

الف) دامنه برابر است با

$$\{x \mid x^2 - 1 \neq 0\} = \{x \mid x \neq \pm 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$$

ب) مختص x و مختص y نقطهٔ برخورد منحنی با محورها هر دو 0 است.

ج) چون $f(-x) = f(x)$، تابع f زوج است. منحنی موردنظر حول محور y متقارن است.

د) توجه کنید که

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2}{x^2-1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{1-\frac{1}{x^2}} = 2$$

بنابراین خط $y = 2$ مجانب افقی است.

چون وقتی که $x = \pm 1$ مخرج 0 است، حدهای زیر را حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{2x^2}{x^2-1} = \infty, \qquad \lim_{x\to 1^-} \frac{2x^2}{x^2-1} = -\infty$$

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{2x^2}{x^2-1} = -\infty, \qquad \lim_{x\to -1^-} \frac{2x^2}{x^2-1} = \infty$$

به این ترتیب خطهای $x = 1$ و $x = -1$ مجانبهای قائم‌اند.

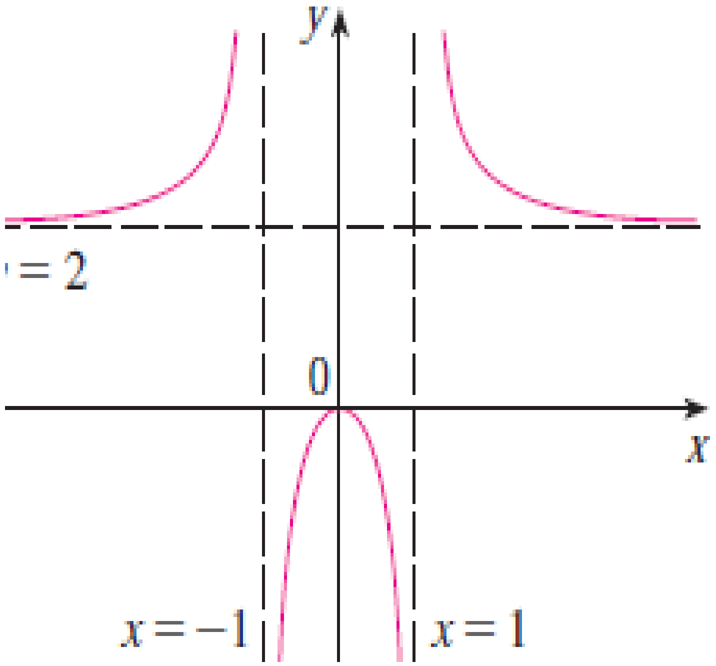
$$f'(x) = \frac{4x(x^2 - 1) - 2x^2 \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2}$$

$f' = 0 \Rightarrow x = 0$

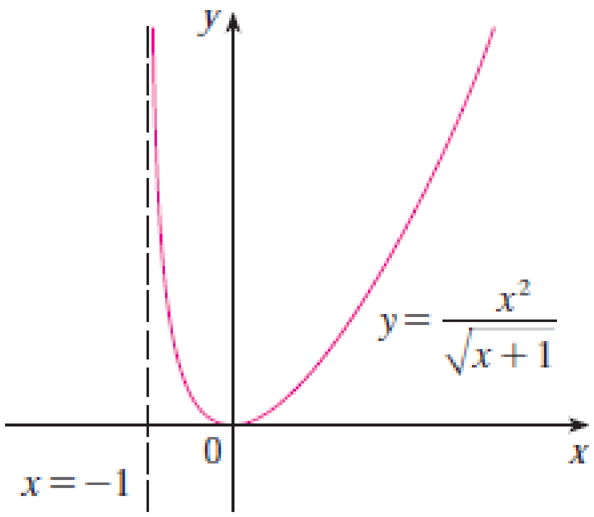
$$f''(x) = \frac{-4(x^2 - 1)^2 + 4x \cdot 2(x^2 - 1)2x}{(x^2 - 1)^4} = \frac{12x^2 + 4}{(x^2 - 1)^3}$$

x		-1		0		1	
$f'(x)$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$f''(x)$	$+$		$-$		$-$		$+$
f	$\smile$		$\frown$		$\frown$		$\smile$
f	↗		↗		↘		↘

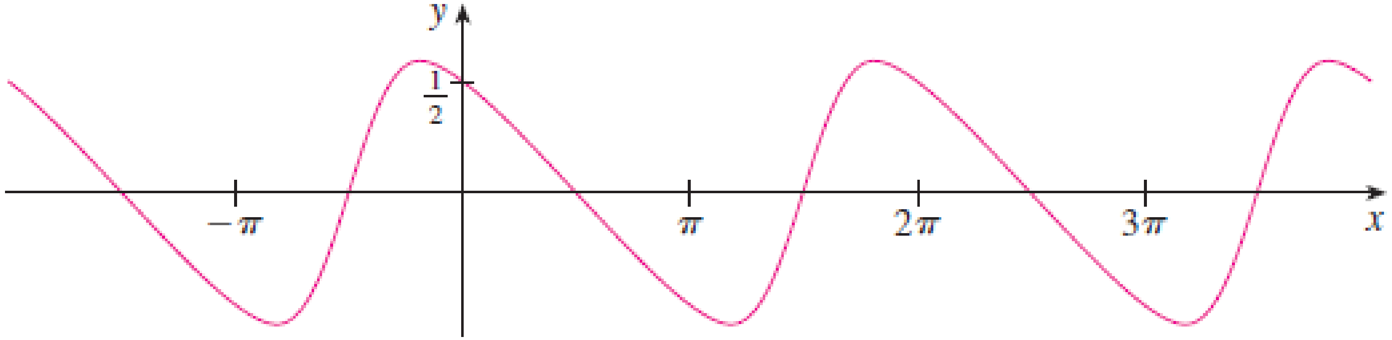
max



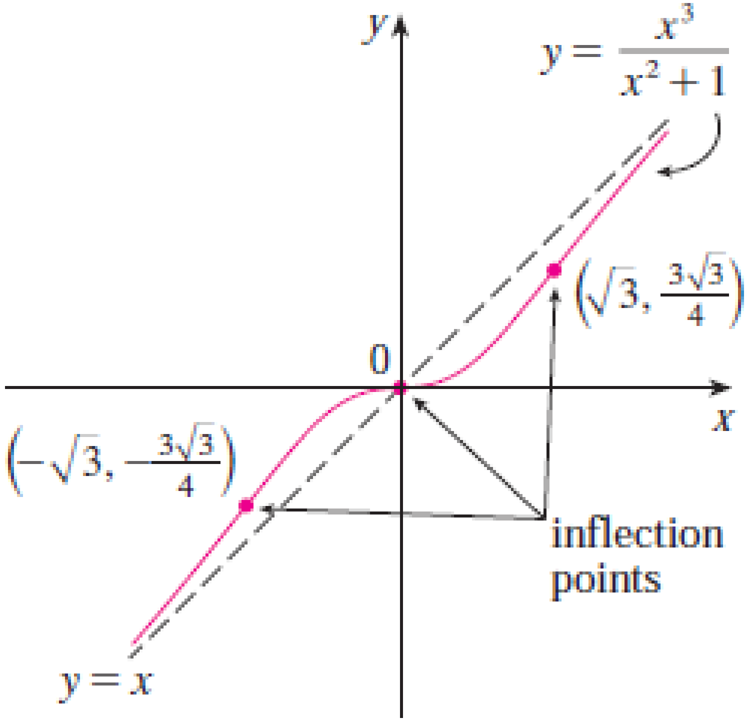
مثال ۲ نمودار $f(x) = \frac{x^۲}{\sqrt{x+۱}}$ را رسم کنید.



مثال ۳ نمودار $f(x) = \frac{\cos x}{۲+\sin x}$ را رسم کنید.

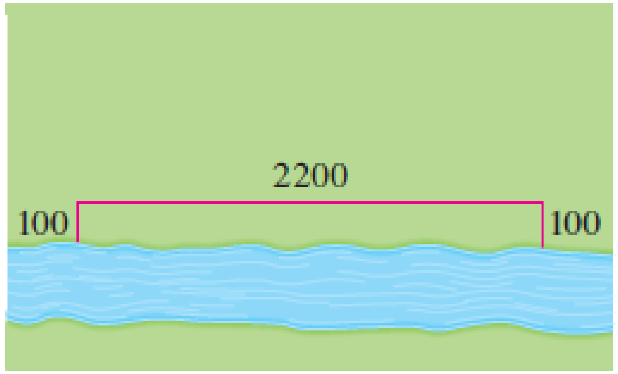


مثال ۴ نمودار $f(x) = \frac{x^۳}{x^۲ + ۱}$ را رسم کنید.

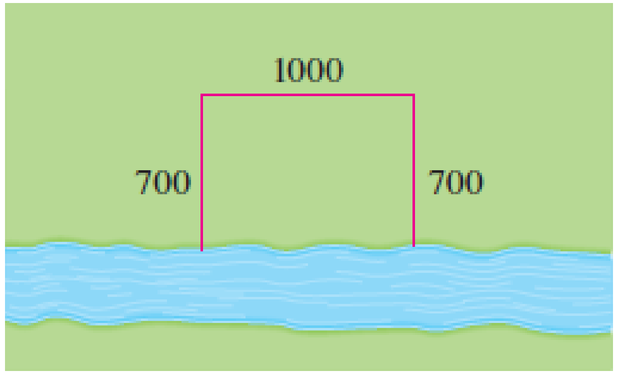


مسأله‌های بهینه‌سازی

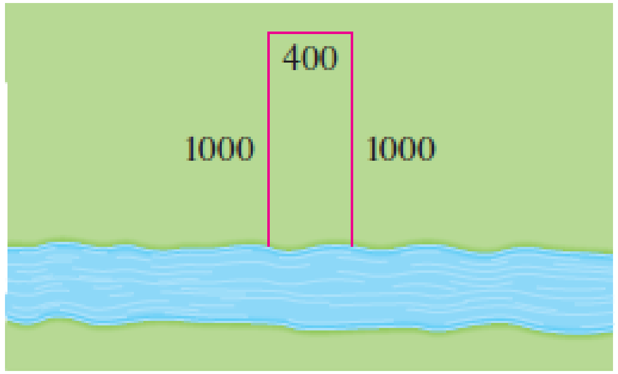
مثال ۱ کشاورزی ۲۴۰۰ فوت توری دارد و می‌خواهد ناحیه‌ای مستطیلی را که با رودخانه‌ای مستقیم هم‌مرز است حصارکشی کند. احتیاجی نیست که مرز کنار رودخانه را حصار بکشد. ابعاد مستطیلی که بیشترین مساحت را دارد چقدر است؟



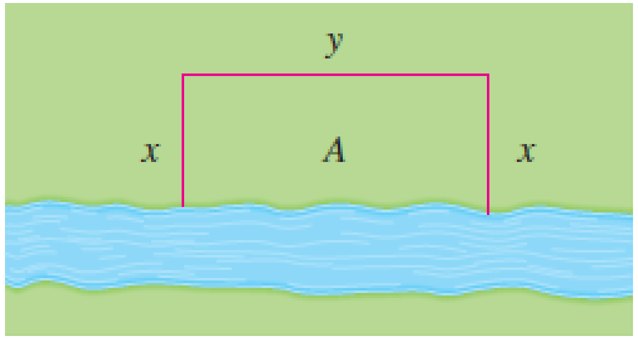
Area = 100 · 2200 = 220,000 ft^2



Area = 700 · 1000 = 700,000 ft^2



Area = 1000 · 400 = 400,000 ft^2



$$A = xy$$

$$2x + y = 2400 \quad \Rightarrow \quad y = 2400 - 2x,$$

$$A = x(2400 - 2x) = 2400x - 2x^2$$

توجه کنید که $x \geq 0$ و $x \leq 1200$ (در غیر این صورت $A < 0$). بنابراین تابعی که می‌خواهیم ماکسیمم کنیم تابع $0 \leqslant x \leqslant 1200$ $\quad A(x) = 2400x - 2x^2$ است.

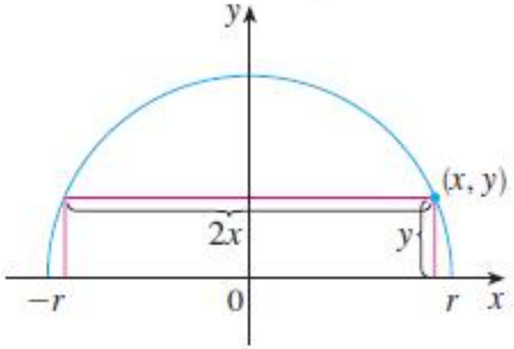
$$A'(x) = 2400 - 4x, \quad \xRightarrow{A'=0} \quad 2400 - 4x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 600$$

$$A(0) = 0,\ A(600) = 720{,}000, \text{ and } A(1200) = 0,$$

(به‌عنوان راهی دیگر، می‌توان توجه کرد که به‌ازای هر x، $A''(x) = -4 < 0$، درنتیجه A همه‌جا مقعر رو به پایین است و ماکسیمم موضعی در $x = 600$ باید ماکسیمم مطلق باشد.)

مثال مساحت بزرگترین مستطیلی را بیابید که می‌توان آن را در نیمدایره‌ای به شعاع r محاط کرد.

راه‌حل اول فرض می‌کنیم که نیمدایرهٔ موردنظر نیمهٔ بالایی دایرهٔ $x^{۲} + y^{۲} = r^{۲}$ به مرکز مبدأ باشد. در این صورت معنی محاط این است که مستطیل موردنظر دو رأس روی نیمدایره داشته باشد و دو رأس روی محور x، مانند شکل



فرض کنید (x, y) رأسی باشد که در ربع اول قرار دارد. در این صورت طول ضلعهای مستطیل موردنظر $۲x$ و y است، و درنتیجه مساحتش برابر است با

$$A = ۲xy$$

برای حذف‌کردن y از اینکه (x, y) روی دایرهٔ $x^{۲} + y^{۲} = r^{۲}$ قرار دارد استفاده می‌کنیم، که از آن نتیجه می‌شود $y = \sqrt{r^{۲} - x^{۲}}$. بنابراین

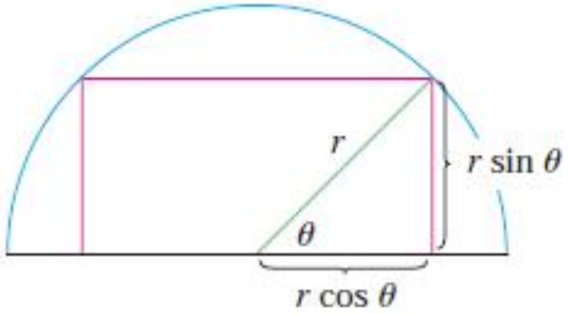
$$A = ۲x\sqrt{r^{۲} - x^{۲}}$$

دامنهٔ این تابع برابر است با $0 \leq x \leq r$. مشتقش برابر است با

$$A' = 2\sqrt{r^2 - x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{2(r^2 - 2x^2)}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

که وقتی که $2x^2 = r^2$، یعنی وقتی که $x = \frac{r}{\sqrt{2}}$ (زیرا $x \geq 0$) برابر با 0 است. این مقدار x مقدار ماکسیمم A را می‌دهد، زیرا $A(0) = 0$ و $A(r) = 0$. به این ترتیب مساحت بزرگترین مستطیل محاطی برابر است با

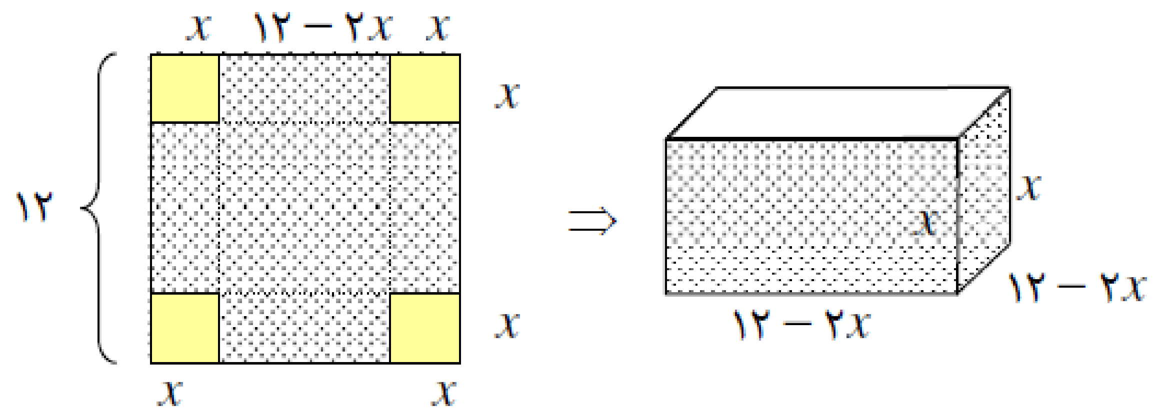
$$A\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right) = 2\frac{r}{\sqrt{2}}\sqrt{r^2 - \frac{r^2}{2}} = r^2$$



راه‌حل دوم

تمرین: ورقه ای به شکل مربع به ضلع ۱۲ سانتی متر داده شده است.اگر با این ورقه یک جعبه ی در باز بسازیم، بزرگترین حجم ممکن این جعبه را بدست آورید.

حل:



ابتدا تابع حجم را تشکیل می دهیم و ریشه های مشتق آنرا تعیین می کنیم.

$$V = abc = x \times (۱۲ - ۲x) \times (۱۲ - ۲x) = ۴x(۶ - x)^۲$$

$$\to V' = ۴(۶ - x)^۲ - ۸x(۶ - x) \xrightarrow{V' = ۰} ۴(۶ - x)^۲ - ۸x(۶ - x) = ۰$$

$$\to ۴(۶ - x)(۶ - x - ۲x) = ۰ \to ۴(۶ - x)(۶ - ۳x) = ۰ \to \begin{cases} x = ۶ \ \text{غ ق ق} \\ x = ۲ \end{cases}$$

حال حجم مکعب مستطیل را با فرض $x = ۲$ بدست می آوریم.

$$V_{Max} = ۴x(۶ - x)^۲ = ۴(۲)(۶ - ۲)^۲ = ۱۲۸$$

پادمشتق

تعریف تابع F را پادمشتق f روی بازه‌ای مانند I می‌نامند، به‌شرطی که به‌ازای هر x در I،

$$F'(x) = f(x)$$

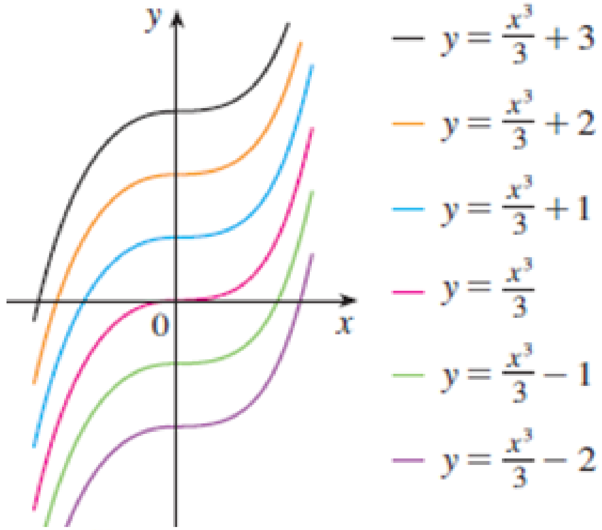
مثال:

$f(x) = x^2 \quad F'(x) = f(x) \quad \Longrightarrow \quad F(x) = ?$

$F(x) = \frac{1}{3}x^3,$

$\frac{1}{3}x^3 + 100$

$\frac{1}{3}x^3 + C$, where C is a constant,



☆ **قضیه** اگر F پادمشتق f روی بازهٔ I باشد، آن‌وقت کلی‌ترین پادمشتق f روی I،

$F(x) + C$ است، که در آن C ثابتی دلخواه است.

مثال ۱ کلی‌ترین پادمشتق هر یک از تابعهای زیر را پیدا کنید.

(a) $f(x) = \sin x$ (b) $f(x) = x^n, \quad n \geqslant 0$ (c) $f(x) = x^{-3}$

راه‌حل

(a) $\dfrac{d}{dx}(-\cos x) = \sin x$ $\Rightarrow$ $F(x) = -\cos x + C.$

(b) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right) = \dfrac{(n+1)x^n}{n+1} = x^n$ $\Rightarrow$ $F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$

(c) $\dfrac{d}{dx}\left(x^{-2}/(-2)\right) = 1/x^3$ $\Rightarrow$ $F(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2x^2} + C_1 & \text{if } x > 0 \\ -\dfrac{1}{2x^2} + C_2 & \text{if } x < 0 \end{cases}$

جدول دستورهای پادمشتق‌گیری

تابع　　　　پادمشتق خاص

Function	Particular antiderivative	Function	Particular antiderivative
$cf(x)$	$cF(x)$	$\cos x$	$\sin x$
$f(x)+g(x)$	$F(x)+G(x)$	$\sin x$	$-\cos x$
$x^n \ (n \neq -1)$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\sec^2 x$	$\tan x$
		$\sec x \tan x$	$\sec x$

مثال ۲ همهٔ تابعها مانند g را طوری پیدا کنید که

$$g'(x) = ۴\sin x + \frac{۲x^۵ - \sqrt{x}}{x}$$

$$g'(x) = 4\sin x + \frac{2x^5}{x} - \frac{\sqrt{x}}{x} = 4\sin x + 2x^4 - \frac{1}{\sqrt{x}} = 4\sin x + 2x^4 - x^{-1/2}$$

$$\Rightarrow \quad g(x) = 4(-\cos x) + 2\,\frac{x^5}{5} - \frac{x^{1/2}}{\frac{1}{2}} + C = -4\cos x + \tfrac{2}{5}x^5 - 2\sqrt{x} + C$$

مثال ۳ اگر $f'(x) = x\sqrt{x}$ و ۲ = $f(1)$، f را پیدا کنید.

راه‌حل پادمشتق کلی

$$f'(x) = x^{3/2}$$

برابر است با

$$f(x) = \frac{x^{5/2}}{\frac{5}{2}} + C = \frac{2}{5}x^{5/2} + C$$

برای مشخص‌کردن C از اینکه ۲ = $f(1)$ استفاده می‌کنیم:

$$f(1) = \frac{2}{5} + C = 2$$

اگر C را از این معادله پیدا کنیم به‌دست می‌آید

$$C = 2 - \frac{2}{5} = \frac{8}{5}$$

درنتیجه جواب خاص

$$f(x) = \frac{2x^{5/2} + 8}{5}$$

است.

مثال ۶ ذره‌ای روی خطی راست حرکت می‌کند و شتابش از دستور $a(t) = ۶t + ۴$ به‌دست می‌آید سرعت اولیه‌اش برابر است با $v(۰) = -۶\ \mathrm{cm/s}$ و جابه‌جایی اولیه‌اش برابر است با $s(۰) = ۹\ \mathrm{cm}$. تابع موقعیت این ذره، $s(t)$، را پیدا کنید.

راه‌حل چون $v'(t) = a(t) = ۶t + ۴$، از پادمشتق‌گیری به‌دست می‌آید

$$v(t) = ۶\frac{t^۲}{۲} + ۴t + C = ۳t^۲ + ۴t + C$$

توجه کنید که $v(۰) = C$. اما می‌دانیم $v(۰) = -۶$، درنتیجه $C = -۶$ و

$$v(t) = ۳t^۲ + ۴t - ۶$$

چون $v(t) = s'(t)$، s پادمشتق v است:

$$s(t) = ۳\frac{t^۳}{۳} + ۴\frac{t^۲}{۲} - ۶t + D = t^۳ + ۲t^۲ - ۶t + D$$

که از آن نتیجه می‌شود $s(۰) = D$. می‌دانیم $s(۰) = ۹$، درنتیجه $D = ۹$ و تابع موقعیت موردنظر

$$s(t) = t^۳ + ۲t^۲ - ۶t + ۹$$

است.