
بسم الله الرحمن الرحیم

شهید مصطفی چمران در مناجاتی با خدای خود اینگونه می گوید: ای خدا من باید از نظر علم از همه برتر باشم تا مبادا که دشمنان مرا از این راه طعنه زنند.

باید به آن سنگدلانی که علم را بهانه کرده و به دیگران فخر می فروشند ثابت کنم خاک پای من هم نخواهند شد، باید همه ان تیره دلان مغرور و متکبر را به زانو در آورم، آنگاه خود خاضع ترین و افتاده ترین فرد روی زمین باشم.

ای خدای بزرگ اینها که از تو می خواهم چیزهاییست که فقط میخواهم در راه تو به کار اندازم و تو خوب میدانی استعداد آن را داشته ام، از تو می خواهم مرا توفیق دهی کارهایم ثمربخش شود و در مقابل خسان سرافکنده نشوم.

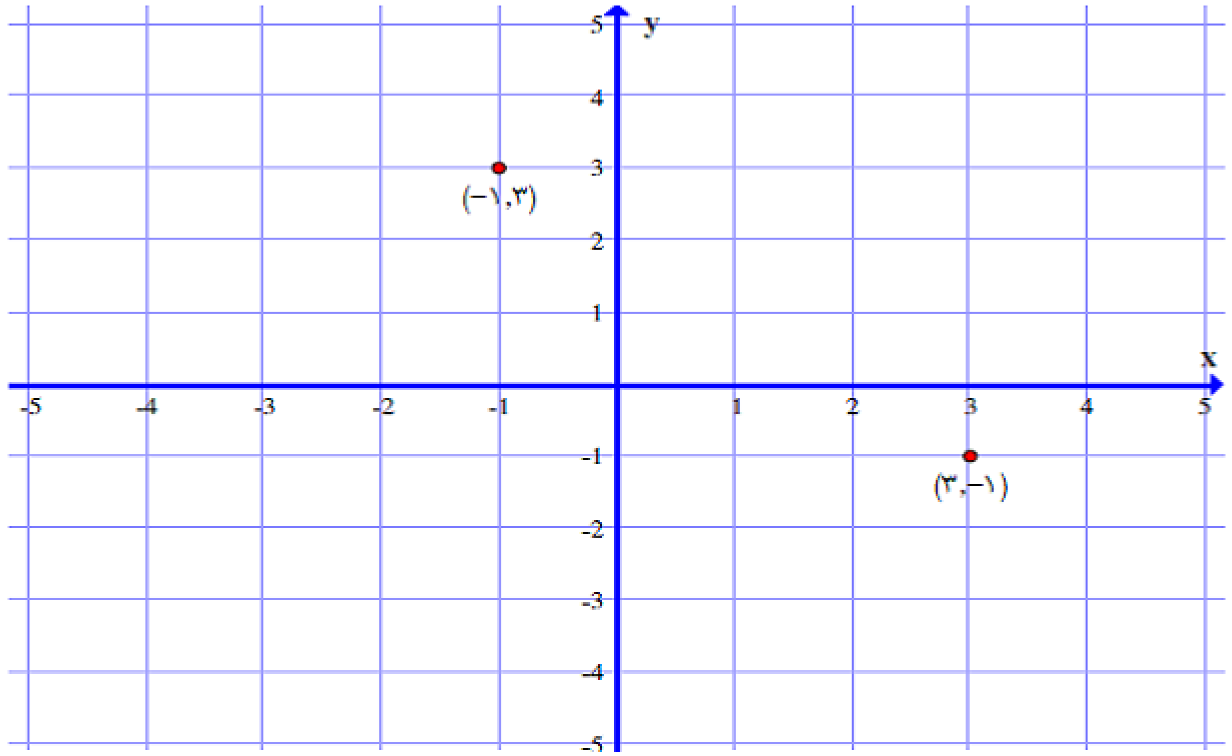
- حساب دیفرانسیل و انتگرال یک متغیره: دکتر حمیدرضا ظهوری زنگنه- دکتر امیر نادری

- حساب دیفرانسیل و انتگرال: جیمز استوارت
- حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی(جلد اول): جورج توماس
- حساب دیفرانسیل و انتگرال با هندسه تحلیلی: ریچارد سیلورمن
- حساب دیفرانسیل و انتگرال: لوییس لیتهلد

زوج مرتب:

هر دو تایی از اعداد حقیقی به صورت (a,b) که در آن مکان دو عـدد a و b مهـم باشـد را زوج مرتـب مـی نامنـد. در زوج مرتب (a,b) عدد a را مؤلفه ی اول یا مختص اول و عدد b را مؤلفه ی دوم یا مختص دوم می نامند. بدیهی است کـه اگـر در یک زوج مرتب جای مؤلفه های اول و دوم را عوض کنیم آن زوج مرتب تغییر می کند.

برای مثال موقعیت هر نقطه در صفحه، با یک زوج مرتب به نام مختصات آن نقطه نمایش داده می شود. بدیهی اسـت کـه اگـر جای مولفه ها ی یک نقطه، جابجا شوند، موقعیت نقطه در صفحه نیز تغییر می کند.



y
x
5
4
3
2
1
-1
-2
-3
-4
-5
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
5
(−۱,۳)
(۳,−۱)

دو زوج مرتب تایی (a,b) و (c,d) را مساوی می نامند در صورتی که مؤلفه ای نظیر به نظیر آنها مساوی باشند. یعنی:

$$(a,b)=(c,d) \Leftrightarrow a=c, b=d$$

تمرین:

دو زوج مرتب زیر برابر می باشند. مقدار n و m را بیابید.

$$(۲m+۳n\,,۳m-۲n) \text{ و } (۸,-۱)$$

حل:

$$\begin{cases} ۲m+۳n=۸ \\ ۳m-۲n=-۱ \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} ۲\times \\ ۳\times \end{matrix}\begin{cases} ۲m+۳n=۸ \\ ۳m-۲n=-۱ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} ۴m+۶n=۱۶ \\ ۹m-۶n=-۳ \end{cases}$$

$$+)\overline{\qquad\qquad\qquad}$$

$$۱۳m=۱۳ \rightarrow m=۱$$

$$۲m+۳n=۸ \xrightarrow{m=۱} ۲(۱)+۳n=۸ \rightarrow n=۲$$

Functions arise whenever one quantity depends on another. Consider the following four situations.

A. The area A of a circle depends on the radius r of the circle. The rule that connects r and A is given by the equation $A = \pi r^2$. With each positive number r there is associated one value of A, and we say that A is a *function* of r.

تعریف تابع:

مجموعه ی زوج های مرتبی است که هیچ دو زوج متمایز آن مؤلفه ی اول یکسان نداشته باشند.

به عنوان مثال، مجموعه ی $f = \{(۱,۲),(۲,۰),(۳,-۱),(۰,۲)\}$ تابع است،

ولی مجموعه ی $g = \{(۲,۴),(۱,۳),(۴,۸),(۱,-۱)\}$ تابع نیست، زیرا دو زوج متمایز $(۱,۳)$ و $(۱,-۱)$ در آن مؤلفه ی اول یکسان دارند.

نتیجه: اگر (a,b) و (a,c) دو زوج از یک تابع باشند، در این صورت لازم است که $b=c$ باشد.

تمرین: مجموعه ی $f=\{(۲,۳),(۰,۵),(۴,۱),(۰,m^۲+۴m)\}$ ، یک تابع است. مقدار m را بیابید.

حل:

این مجموعه وقتی می تواند تابع باشد که دو زوج $(۰,m^۲+۴m)$ و $(۰,۵)$ مساوی باشند. یعنی $m^۲+۴m=۵$

$$m^۲+۴k=۵\rightarrow m^۲+۴m-۵=۰\rightarrow (m+۵)(m-۱)=۰$$

$$\rightarrow\begin{cases} m+۵=۰\rightarrow m=-۵\\ m-۱=۰\rightarrow m=۱\end{cases}$$

نتیجه:

۱- زیر مجموعه ی هر تابع همیشه یک تابع است.(حتی اگر تهی باشد.)

۲- اجتماع دو تابع ممکن است تابع نباشد ولی اشتراک و تفاضل دو تابع همیشه یک تابع است.

دامنه و برد تابع:

مجموعه ی مؤلفه های اول زوج های مرتب یک تابع را دامنه (حوزه ی تعریف) و مجموعه ی مؤلفه های دوم آنرا برد (حـوزه ی مقادیر) می نامند. مثلاً در تابع $f=\{(۱,۲),(۲,۰),(۳,-۱),(۰,۲)\}$

دامنه $D_f=\{۱,۲,۳,۰\}$

برد $R_f=\{۲,۰,-۱\}$

ضابطه تابع:

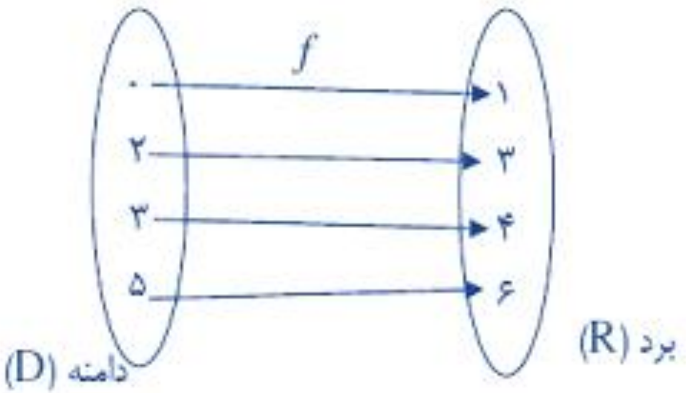
در واقع باید بین مؤلفه های اول و مؤلفه های دوم زوج های مرتب تابع یک ارتباط یکسان برقرار باشد،به عبارت دیگر در هر تابع رابطه ای باید وجود داشته باشدکه طول هر زوج را به عرض آن تبدیل کند،این رابطه را ضابطه یا معادله ی تابع می گویند.

به عبارتی دیگر ضابطه ی تابع معادله ای است که هر عضو دامنه را به یک عضو منحصر بفرد از برد نظیر کند.

$$f : D \to R$$
$$y = f(x)$$

مثلاً در تابع $f = \{(۲,۳),(۳,۴),(۰,۱),(۵,۶)\}$ مؤلفه ی دوم هر زوج یک واحد از مؤلفه ی اول آن بیشتر است. پس می توان نوشت:

$$f = \{(x, y) \mid y = x + ۱\}$$



که در آن $x \in D_f = \{۰,۲,۳,۵\}$ می باشد.

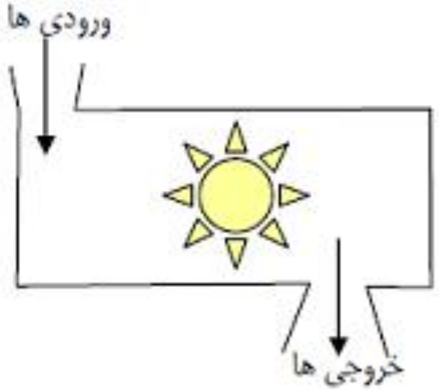
مثال:

تابعی که هر عضو از اعداد حقیقی را دو برابر کند، دارای ضابطه ای به شکل $y=۲x$ می باشد. پس

$$f:R\to R$$
$$y=f(x)=۲x$$

نتیجه: طبق تعریف فوق می توان تابع را به عنوان یک عملگر(ماشین)در نظر گرفت

که یک عضو از دامنه را می گیرد و یک عضو منحصر بفرد از برد می دهد



مجموعه ی ورودی ها دامنه و مجموعه ی خروجی ها برد تابع می باشند.

توجه: گاهی لازم است که تابع را با چند ضابطه تعریف کرد.

$$f(x)=\begin{cases} m(x) & x\in D_m \\ n(x) & x\in D_n \end{cases}$$

که در این صورت دامنه این تابع با اجتماع دامنه های تمام ضابطه های آن برابر است. $D_f = D_m \cup D_n$

توجه کنید که دامنه های ضابطه ها در تابع چند ضابطه ای بنابر بر تعریف تابع باید جدا از هم باشند. $D_m \cap D_n = \Phi$

مثال: تابع قدر مطلق یک تابع دو ضابطه ای است.

$$f(x)=|x|=\begin{cases} x & x\geq \cdot \\ -x & x< \cdot \end{cases}$$

$$D_f = \{x\in R \mid x\geq \cdot\} \cup \{x\in R \mid x< \cdot\} = R$$

$$R_f = \{y\in R \mid y\geq \cdot\} = R^{\geq \cdot}$$

مثال: تابع علامت یک تابع سه ضابطه ای است.

$$Sign(x)=\begin{cases} ۱ & x>۰ \\ ۰ & x=۰ \\ -۱ & x<۰ \end{cases}$$

$$D_s=\{x\in R \mid x>۰\}\cup\{۰\}\cup\{x\in R \mid x>۰\}=R$$
$$R_s=\{۱,۰,-۱\}$$

تابع علامت را می توان به صورت زیر نیز تعریف کرد.

$$Sign(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{|x|} & x\neq ۰ \\ ۰ & x=۰ \end{cases}$$

مثال:

تابع جزء صحیح یعنی $f(x)=[x]$ یک تابع دو ضابطه ای است. که به صورت زیر تعریف می شود.

اگر x عدد صحیح باشد. $[x]$ با خود x برابر است. مثلاً $[۵]=۵$

اگر x عدد صحیح نباشد. $[x]$ با عدد صحیح قبل از x برابر است. مثلاً $[۲/۵]=۲$ و $[-۳/۵]=-۴$

واضح است که دامنه ی این تابع مجموعه ی اعداد حقیقی و برد آن مجموعه ی اعداد صحیح است.

مقدار تابع در یک نقطه:

در تابع $f=\{(۲,۵),(۰,۳),(۴,-۱),(-۲,۵)\}$ مقدار تابع در نقطه ی ۲ برابر ۵ است و می نویسند: $f(۲)=۵$ همچنین

مقدار تابع در نقطه ی ۰ برابر ۳ است، لذا $f(۰)=۳$

اگر معادله ی تابع معلوم باشد، برای تعیین مقدار تابع در نقطه ی $x_۰$ از دامنه ی آن، کافی است مقدار $x_۰$ را در معادلـه ی تـابع

به جای x جایگزین کنیم. یعنی $y_۰=f(x_۰)$

تمرین: اگر $f(x)=\frac{\sqrt{۳}}{۴}x^۲$ مقدار تابع را در نقاط داده شده، یافته و جدول زیر را کامل کنید.

x	۱-	۱	۲	۰	۲-	۳
$f(x)$						

روش تشخیص تابع بودن یک معادله :

طبق تعریف تابع واضح است که اگر f یک تابع بوده و $(a,b)\in f$ و $(a,c)\in f$ آنگاه $b=c$ می باشد.

این نتیجه برای تشخیص تابع بودن یک معادله بکار می رود.

$$\boxed{\left.\begin{matrix}(a,b)\in f\\(a,c)\in f\end{matrix}\right\}\rightarrow b=c}$$

توجه : در هر یک از تساوی های زیر نمی توان نتیجه گرفت $b=c$

الف) $b^۲=c^۲ \nrightarrow b=c$ ب) $|b|=|c| \nrightarrow b=c$ ج) $[b]=[c] \nrightarrow b=c$

تمرین : کدام یک از معادلات زیر، تابع است.

الف) $y = x^۲ + ۱$

ب) $y = x^۳ - ۲$

ج) $x^۲ + y^۲ = ۱$

د) $y = x^۲ + ۲x$

حل:

الف:

$$\left.\begin{array}{l}(a,b) \in f \rightarrow b = a^۲ + ۱ \\ (a,c) \in f \rightarrow c = a^۲ + ۱\end{array}\right\} \rightarrow b = c$$

معادله ی $y = x^۲ + ۱$ ، تابع است.

ب:

$$\left.\begin{array}{l}(a,b)\in f \rightarrow b=a^{۲}-۲\\ (a,c)\in f \rightarrow c=a^{۲}-۲\end{array}\right\} \rightarrow b=c$$

معادله ی $y=x^{۲}-۲$ ، تابع است.

ج:

$$\left.\begin{array}{l}(a,b)\in f \rightarrow a^{۲}+b^{۲}=۱\\ (a,c)\in f \rightarrow a^{۲}+c^{۲}=۱\end{array}\right\} \rightarrow a^{۲}+b^{۲}=a^{۲}+c^{۲} \rightarrow b^{۲}=c^{۲} \nrightarrow b=c$$

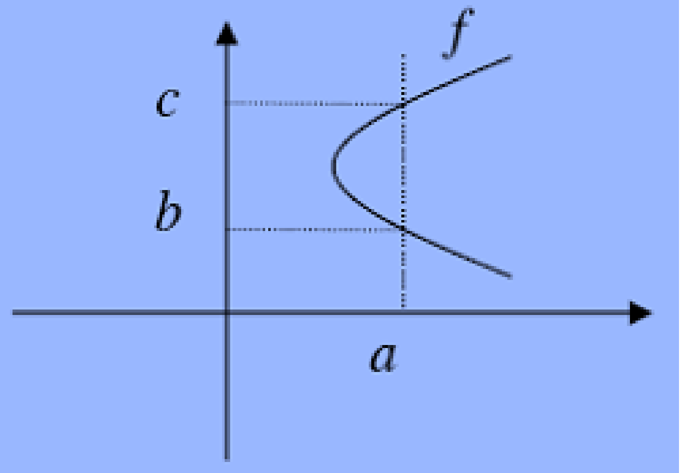
معادله ی $x^{۲}+y^{۲}=۱$، تابع نیست.

د:

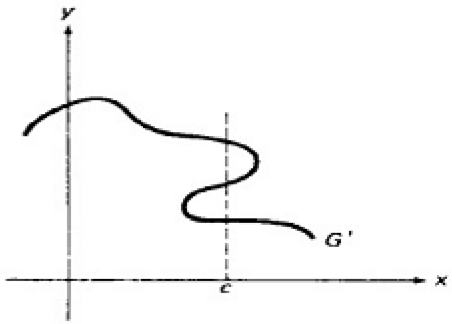
$$\left.\begin{array}{l}(a,b)\in f \rightarrow b=a^{۲}+۲a\\ (a,c)\in f \rightarrow c=a^{۲}+۲a\end{array}\right\} \rightarrow b=c$$

معادله ی $y=x^{۲}+۲x$ ، تابع است.

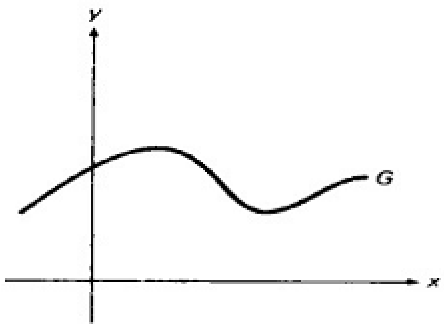
نتیجه: یک نمودار مربوط به یک تابع است هرگاه هر خط موازی محور عرض ها نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند، در غیر این صورت نمودار مربوط به یک تابع نمی باشد. برای مثال نمودار داده شده در شکل مقابل یک تابع را مشخص نمی کند.



$$(a,b)\in f,(a,c)\in f \nrightarrow b=c$$

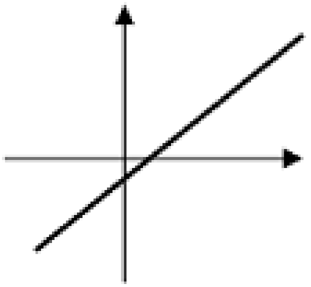


G' نمودار یک تابع نیست .

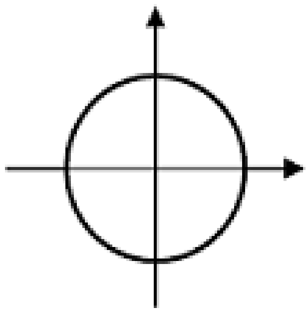


G نمودار یک تابع است .

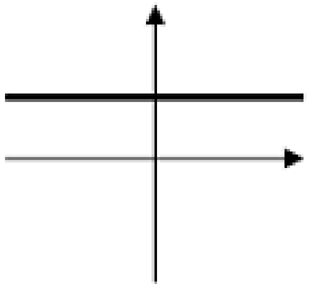
مثال: تعیین کنیدکه کدام نمودار مربوط به یک تابع است.



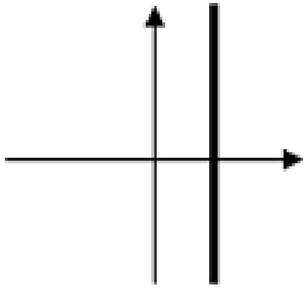
(الف)



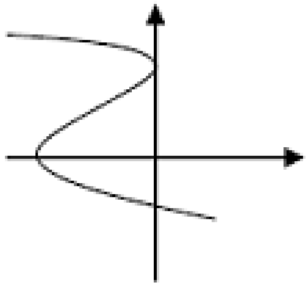
(ب)



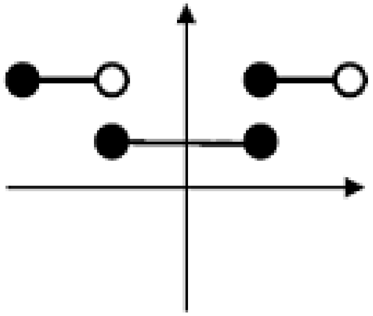
(ج)



(د)



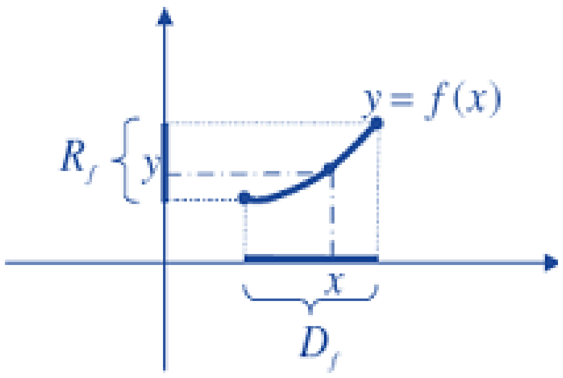
(هـ)

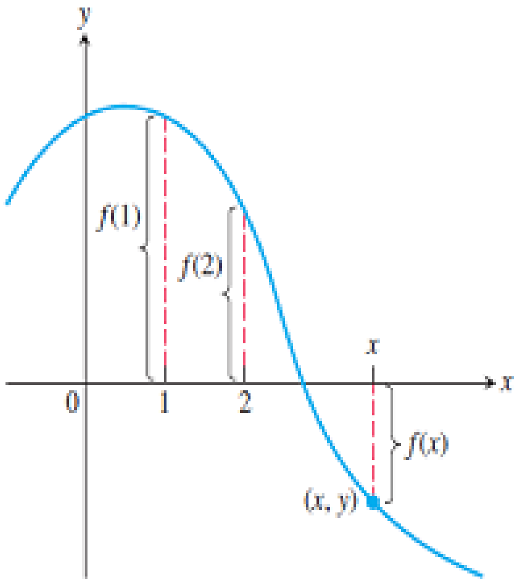


(و)

نمودار تابع:

نمودار تابع مجموعه ی نقاط نظیر زوج های مرتب (x,y) از آن تابع است.



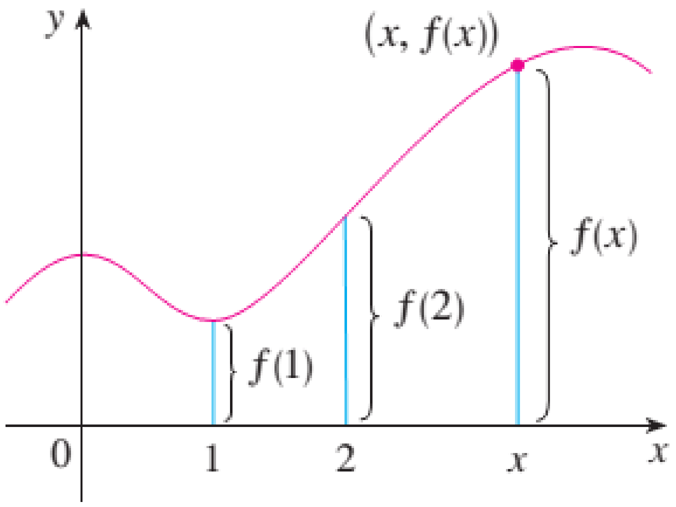


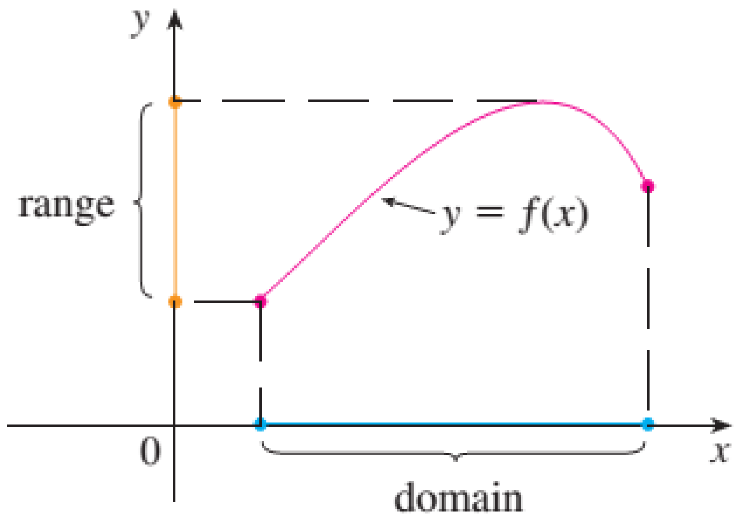
نتیجه: تصویر نمودار تابع روی محور x ها، دامنه و تصویر نمودار روی محور y ها، برد را مشخص می کنند. به عبارت دیگر

$$D_f=\{x\in R \mid (x,y)\in f\}$$ دامنه

$$R_f=\{y\in R \mid (x,y)\in f\}$$ برد

The graph of a function f gives us a useful picture of the behavior or "life history" of a function. Since the y-coordinate of any point (x, y) on the graph is $y = f(x)$, we can read the value of $f(x)$ from the graph as being the height of the graph above the point x (see Figure 4). The graph of f also allows us to picture the domain of f on the x-axis and its range on the y-axis as in Figure 5.

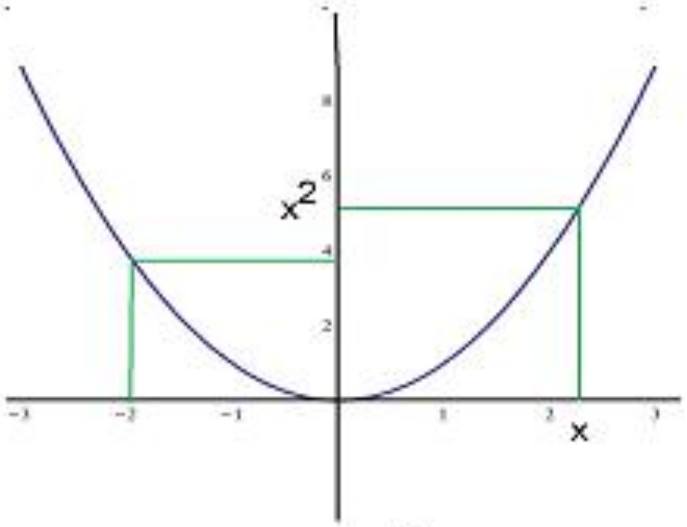




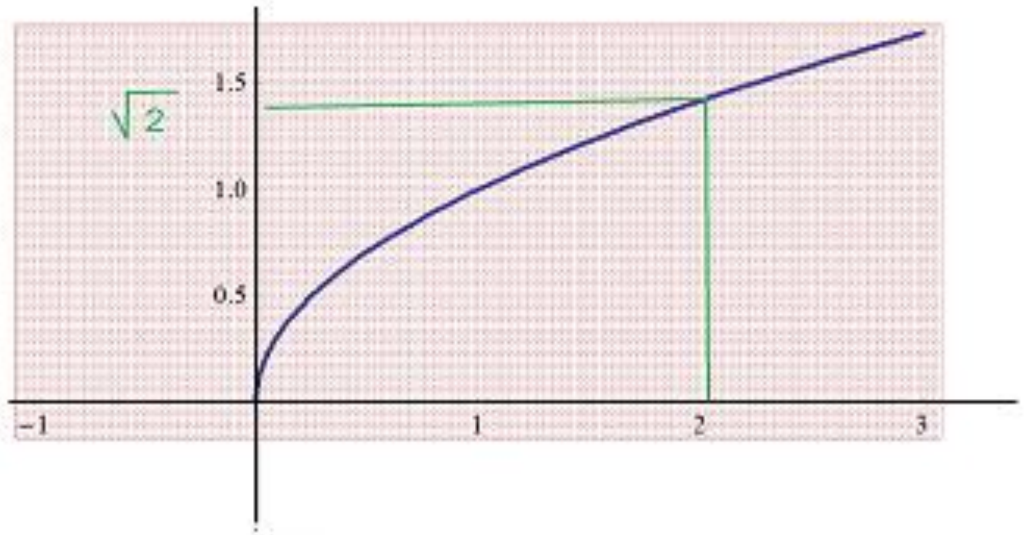
تعریف

فرض کنید $f : A \to \mathbb{R}$ یک تابع باشد. منظور از گراف تابع f مجموعه همه زوجهای مرتبی مثل (x, y) در صفحه $\mathbb{R}^2$ است که $x \in A$ و $y = f(x)$. گراف تابع f را معمولا به $G(f)$ نشان می‌دهیم، پس

$$G(f) = \{(x, y) \ : \ x \in D_f \text{ و } y = f(x)\}.$$



y=f(x)= x^2

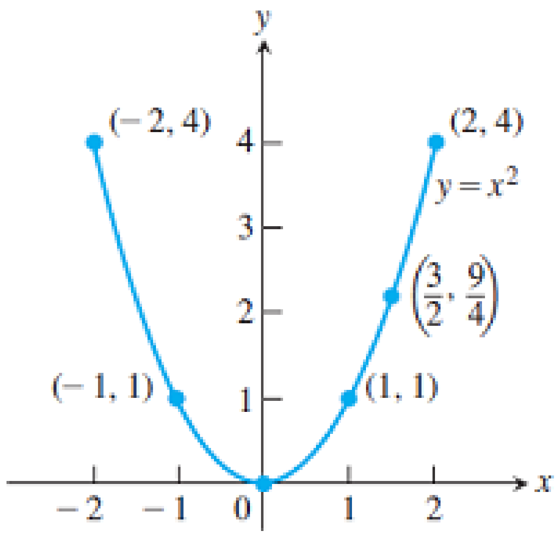


y=g(x)=$\sqrt{x}$

مثال:

Graph the function $y = x^2$ over the interval $[-2, 2]$.

x	$y = x^2$
-2	4
-1	1
0	0
1	1
$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$
2	4



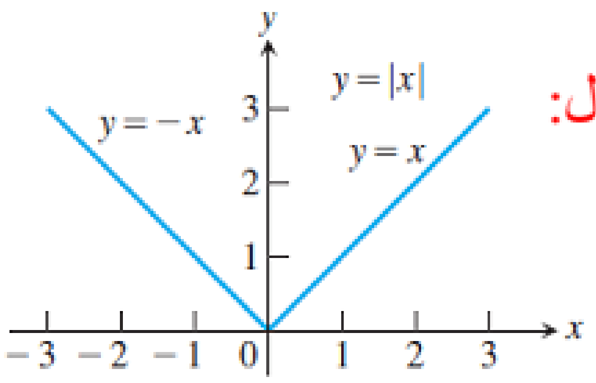
EXAMPLE 1 The graph of a function f is shown in Figure 6.

(a) Find the values of $f(1)$ and $f(5)$.

(b) What are the domain and range of f?

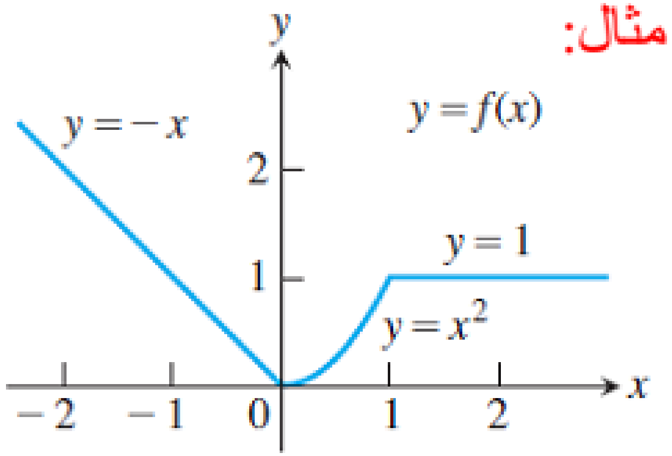
مثال:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$



مثال:

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$



تساوی دو تابع:

تعریف: دو تابع مانند g و f را مساوی گویند، هرگاه:

الف) دامنه ی آنها مساوی باشد.($D_f = D_g$)

ب) به ازاء هر عضو دامنه مقادیر یکسان داشته باشند. ($\forall x \in D \to f(x) = g(x)$)

تمرین: کدام مورد دو تابع مساوی را نشان می دهد.

الف) $f(x) = x + ۱$ و $g(x) = \dfrac{x^۲ - ۱}{x - ۱}$

ب) $f(x) = x^۲$ و $g(x) = x|x|$

ج) $f(x) = \sqrt{x^۲}$ و $g(x) = |x|$

ب:

$$D_f = D_g = R$$

$$\left.\begin{array}{l} f(-۱) = (-۱)^۲ = ۱ \\ g(-۱) = -۱|-۱| = -۱(۱) = -۱ \end{array}\right\} \rightarrow f(x) \neq g(x)$$

لذا دو تابع مساوی نیستند.

ج:

$$D_f = D_g = R$$

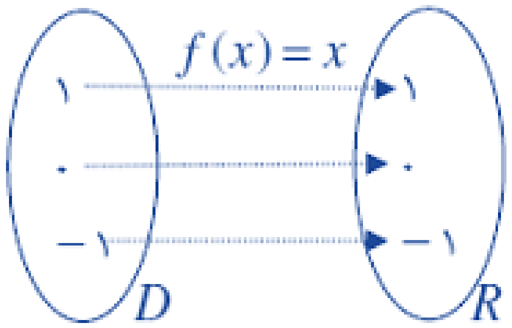
$$f(x) = \sqrt{x^۲} = |x| = g(x)$$

لذا دو تابع مساوی هستند.

نتیجه : دو تابع مساوی هستند، هرگاه نمودار های آنها در تمام نقاط یکسان باشند و برعکس

تابع همانی:

تعریف: یک تابع را همانی گویند، هرگاه هر عضو دامنه را به همان عضو از برد نظیر کند. مانند:



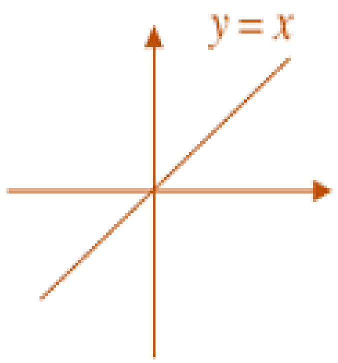
$$f=\{(۱,۱),(۰,۰),(-۱,-۱)\}$$

نتیجه:

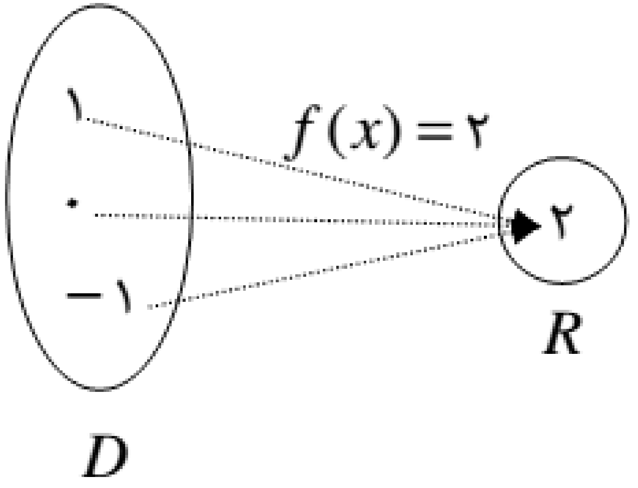
۱- طبق تعریف دامنه و برد تابع همانی با هم برابرند. $D_f = R_f$

۲- نمودار تابع همانی در اعداد حقیقی نیمساز ربع اول و سوم دستگاه مختصات است.

معادله ی تابع همانی $I(x)=x$



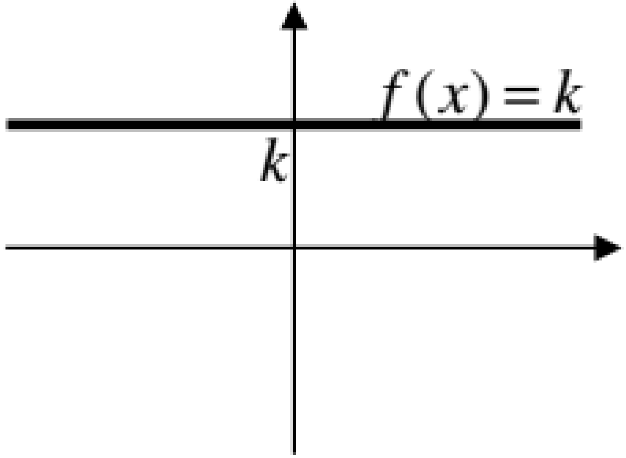
الف : تابع ثابت



تعریف: یک تابع را ثابت گویند، هرگاه برد آن فقط یک عضو داشته باشد. مانند:

$$f = \{(۱,۲),(۰,۲),(-۱,۲)\}$$

نتیجه: نمودار هر تابع ثابت در اعداد حقیقی، خطی است که با محور طول ها موازی می باشد.



معادله ی تابع ثابت $f(x)=k$

تابع قدر مطلق:

هر تابع به شکل زیر را یک تابع قدر مطلق گویند.

$$f(x)=|P(x)|=\begin{cases} P(x) & P(x)\geq ۰ \\ -P(x) & P(x)<۰ \end{cases}$$

تمرین : نمودار تابع های زیر را رسم کنید.

۱) $y=۲|x-۳|+۱$

۲) $y=-|x+۱|-۵$

ویژگی تابع قدرمطلق:

۱) هر دو عدد قرینه قدر مطلق های مساوی دارند. $|-a|=|a|$

نتیجه : $|P(x)|=|Q(x)| \to P(x)=\pm Q(x)$

۲) قدر مطلق صفر برابر صفر است. $|a|=0 \leftrightarrow a=0$

۳) $\sqrt{a^2}=|a|$

۴) $|a^2|=|a|^2=a^2$

۵) اگر $k>0$ آنگاه $|a|<k \leftrightarrow -k<a<k$

۶) اگر $k>0$ آنگاه $|a|>k \leftrightarrow a>k$ یا $a<-k$

۷) $|a.b|=|a|.|b|$

۸) $b\neq 0$ و $|\frac{a}{b}|=\frac{|a|}{|b|}$

۹) $|a-b|=|b-a|$

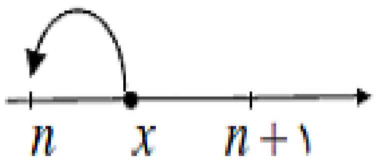
۱۰) نامساوی مثلثی $|a+b|\leq|a|+|b|$

تابع جزءصحیح:

اگر x یک عدد حقیقی باشد، آنگاه جزء صحیح x که با علامت $[x]$ نمایش داده می شود، به صورت زیر تعریف می کنند.

اگر x عدد صحیح باشد،آنگاه جزء صحیح x برابر x است.

اگر x عدد صحیح نباشد،آنگاه جزء صحیح x برابر عدد صحیح کوچکتر از x است.



نتیجه :

۱. جزء صحیح x بزرگترین عدد صحیح کوچکتر یا مساوی x است.

$$[x]=n \leftrightarrow n \le x < n+۱$$

تمرین: معادله ی $2^{[x]+[x-2]}=16$ را حل کنید.

$$2^{[x]+[x-2]}=2^4 \rightarrow [x]+[x-2]=4$$
$$\rightarrow [x]+[x]-2=4 \rightarrow 2[x]=6 \rightarrow [x]=3 \rightarrow 3\le x<4$$

تمرین برای حل :

۱: دامنه و برد تابع $f(x)=|[x]|$ را بیابید.

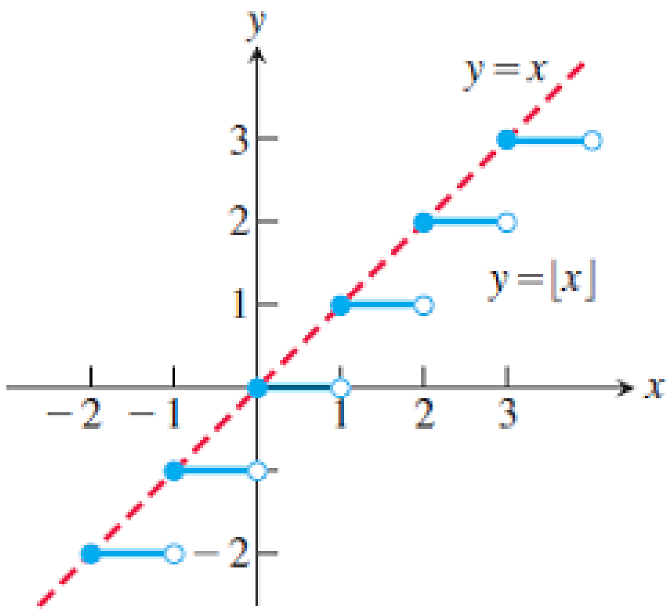
۲: اگر $[x]=7$ باشد، مقادیر $[\frac{1+x}{2}]$ را بیابید.

مثال:

F(x)= $\lfloor x \rfloor$.

$\lfloor 2.4 \rfloor = 2, \quad \lfloor 1.9 \rfloor = 1, \quad \lfloor 0 \rfloor = 0, \quad \lfloor -1.2 \rfloor = -2,$

$\lfloor 2 \rfloor = 2, \quad \lfloor 0.2 \rfloor = 0, \quad \lfloor -0.3 \rfloor = -1, \quad \lfloor -2 \rfloor = -2.$



روش های تعیین دامنه ی بعضی از توابع حقیقی

بزرگترین مجموعه ای که یک تابع به ازاء تمام اعضای آن معین باشد را دامنه می نامند، در این صورت:

۱- دامنه ی هر تابع چند جمله ای مجموعه ی تمام اعداد حقیقی است.

$$f(x) = ax^{n} + bx^{n-۱} + cx^{n-۲} + \ldots \Rightarrow D_f = R$$

تمرین: دامنه ی تابع به معادله ی $f(x) = x^{۳} - ۲x + ۵$ را تعیین کنید.

۲- دامنه ی هر تابع کسری مجموعه ی اعداد حقیقی به غیر از ریشه های مخرج آن است.

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \Rightarrow D_f = \{x \in R \mid q(x) \neq ۰\}$$

تمرین: دامنه ی توابع زیر را مشخص کنید.

تمرین: دامنه ی توابع زیر را مشخص کنید.

هـ) $f(x)=\dfrac{x+۱}{[x]-x}$

۳- دامنه ی هر تابع رادیکالی با فرجه ی زوج (تابع اصم) مجموعه ی اعداد حقیقی است که به ازای آنها زیر رادیکال منفی نباشد.

$$f(x)=\sqrt[۲k]{p(x)},k\in N\Rightarrow D_f=\{x\in R\mid p(x)\geq ۰\}$$

۴- دامنه ی هر تابع رادیکالی با فرجه ی فرد با دامنه ی عبارت زیر رادیکال آن برابر است.

$$f(x)=\sqrt[۲k+۱]{p(x)},k\in N\Rightarrow D_f=D_p$$

۱– دامنه و برد توابع زیر را تعیین کنید.

الف) $f(x)=\sqrt{x^{۲}-۹}$

ج) $f(x)=x-[x]$

د) $f(x)=\sqrt{[x]+[-x]}$

حل:

الف) دامنه ی هر تابع رادیکالی با فرجه ی زوج مجموعه ی مقادیری است که به ازای آنها زیر رادیکال منفی نباشد.

$$x^{۲}-۹\geq ۰$$

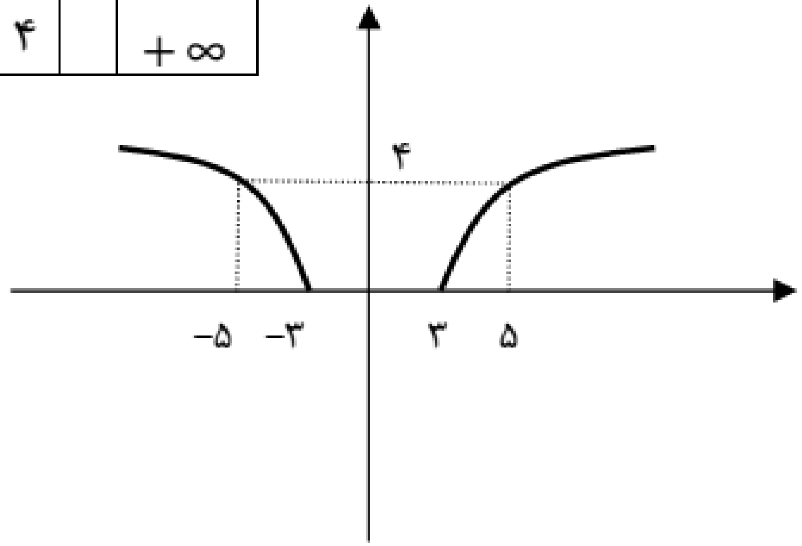
معادله ی هم ارز $\rightarrow x^{۲}-۹=۰\rightarrow x=۳, x=-۳$

x	$-\infty$		-۳		۳		$+\infty$
$x^{۲}-۹$		+	۰	-	۰	+	

$$D_f=(-\infty,۳]\cup[۳,+\infty)$$

حال برای تعیین برد تابع کافی است نمودار تابع را در دامنه اش رسم کنیم.

x	$-\infty$		−۵	−۳		۳	۵		$+\infty$
y	$+\infty$		۴	۰		۰	۴		$+\infty$



$$R_f = [۰,+\infty)$$

ج) واضح است که $D_f = R$

حال فرض کنیم که $[x]=k$ پس:

$$k \le x < k+1 \xrightarrow{-k} 0 \le x-[x] < 1 \rightarrow 0 \le y < 1 \Rightarrow R_f = [0,1)$$

د) با توجه به نکته ی زیر واضح است که

$$[x]+[-x] \ge 0 \rightarrow \begin{cases} [x]+[-x]=0 \rightarrow x \in Z \\ [x]+[-x] > 0 \quad \text{غیر ممکن} \end{cases}$$

$$D_f = Z$$

$$Rf = \{0\}$$

۲- دامنه ی توابع زیر را بیابید

۴- هر یک از توابع زیر را به صورت یک تابع چند ضابطه ای بنویسید.

الف) $f(x)=\frac{۲x}{|x|}$ ب) $f(x)=\sqrt{|x-۲|}$ ج) $f(x)=|x+۱|+|x-۱|$

حل: الف)

$$x \neq ۰ \rightarrow D_f = R-\{۰\}$$

$$\begin{cases} x>۰ \rightarrow |x|=x \rightarrow \frac{۲x}{|x|}=\frac{۲x}{x}=۲ \\ x<۰ \rightarrow |x|=-x \rightarrow \frac{۲x}{|x|}=\frac{۲x}{-x}=-۲ \end{cases}$$

$$\rightarrow f(x)=\begin{cases} ۲ & x>۰ \\ -۲ & x<۰ \end{cases}$$

ب) بدیهی است که $|x-۲|\geq ۰$

$$\begin{cases} x\geq ۲ \to x-۲\geq ۰ \to |x-۲| = x-۲ \\ x<۲ \to x-۲<۰ \to |x-۲| = -(x-۲) \end{cases}$$

$$\to f(x)=\begin{cases} \sqrt{x-۲} & x\geq ۲ \\ \sqrt{-(x-۲)} & x<۲ \end{cases}$$

ج)

$$D_f = R$$

$$x+۱=۰ \to x=-۱$$

$$x-۱=۰ \to x=۱$$

$$\begin{cases} x<-۱ \to h(x)=|x+۱|+|x-۱| = -(x+۱)+[-(x-۱)] = -x-۱-x+۱ = -۲x \\ -۱\leq x\leq ۱ \to h(x)=|x+۱|+|x-۱| = (x+۱)+[-(x-۱)] = x+۱-x+۱ = ۲ \\ x>۱ \to h(x)=|x+۱|+|x-۱| = (x+۱)+(x-۱) = x+۱+x-۱ = ۲x \end{cases} \to f(x)=\begin{cases} ۲x & x>۱ \\ ۲ & -۱\leq x\leq ۱ \\ -۲x & x<-۱ \end{cases}$$

۵- دامنه توابع زیر را بیابید.

$$1)\ f(x)=\frac{3}{x+|x|} \qquad 2)\ f(x)=\frac{\sqrt{9-x^2}}{[x]+[-x]+1} \qquad 3)\ f(x)=\frac{\sqrt{9-x^2}}{[x]+[-x]}$$

حل)

۱)

$$x+|x|=0 \rightarrow x\le 0$$

$$\therefore D_f=R^{>0}$$

....

۲)

$9-x^2\ge 0 \rightarrow$ تشکیل معادله ی هم ارز وتعیین علامت $\rightarrow -3\le x\le 3$

$$[x]+[-x]+1\neq 0 \rightarrow [x]+[-x]\neq -1 \rightarrow x\in Z$$

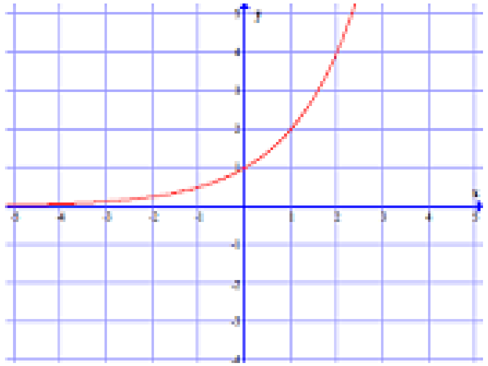
$$\therefore D_f=\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$$

- دامنه و برد توابع زیر را تعیین نموده و سپس ضابطه ی آنها را بنویسید.

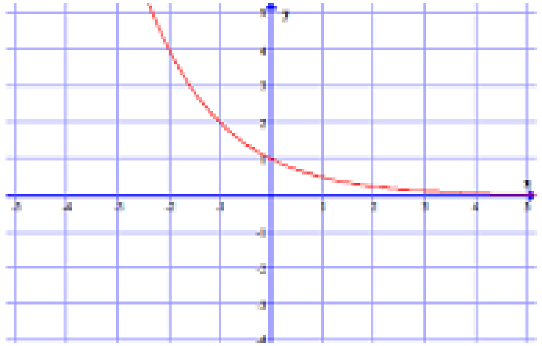
تابع نمایی:

هر تابع به صورت $f(x)=a^x$ که در آن a یک عدد حقیقی مثبت و مخالف یک باشد، را یک تابع نمایی می نامند.

اگر $a>۱$ باشد. تابع دارای نموداری به شکل زیر خواهد بود، که همواره صعودی است.



همچنین اگر $۰<a<۱$ باشد. تابع دارای نموداری به شکل زیر خواهد بود، که همواره نزولی می باشد.



اگر پایه ی تابع نمایی عدد نپرین $(e=۲/۷۱)$ باشد. تابع ، را تابع نمایی طبیعی می نامند.

خواص تابع نمایی:

۱ : توان صفر

$$\begin{cases} a^{\circ} = ۱ \\ a \neq ۰ \end{cases}$$

۲ : توان منفی

$$\begin{cases} a^{-n} = \frac{۱}{a^n} \\ a \neq ۰ \end{cases}$$

۳ : توان کسری

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

تابع زوج

تعریف: تابع f را زوج گویند، هرگاه

الف) دامنه ی آن متقارن باشد. یعنی ($\forall x \in D_f \to -x \in D_f$)

ب) به ازاء هر x عضو دامنه داشته باشیم $f(-x) = f(x)$.

تمرین: نشان دهید که تابع $f(x) = x^2 + \cos x$ زوج است.

حل :

اولاً: $D_f = R$ پس دامنه ی تابع متقارن است

ثانیاً: $f(-x) = (-x)^2 + \cos(-x) = x^2 + \cos x = f(x)$

توجه: $\cos(-x) = \cos x \quad , \quad \sin(-x) = -\sin x$

تابع فرد

تعریف: تابع f را فرد گویند، هرگاه

الف) دامنه ی آن متقارن باشد. یعنی ($\forall x \in D_f \to -x \in D_f$)

ب) به ازاء هر x عضو دامنه داشته باشیم $f(-x) = -f(x)$.

تمرین : نشان دهید که تابع $f(x) = x - \sin x$ فرد است .

حل :

اولاً: $D_f = R$ پس دامنه ی تابع متقارن است

ثانیاً: $f(-x) = (-x) - \sin(-x) = -x + \sin x = -(x - \sin x) = -f(x)$

مثال: ثابت کنید که اگر f تابعی هم زوج و هم فرد باشد،آنگاه $f(x)=0$.

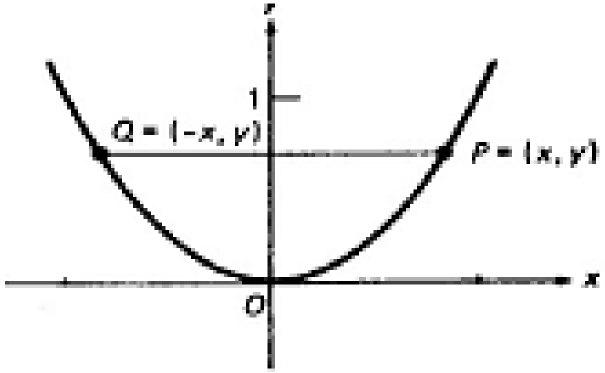
حل:

تابع f زوج است، پس $f(x)=f(-x)$

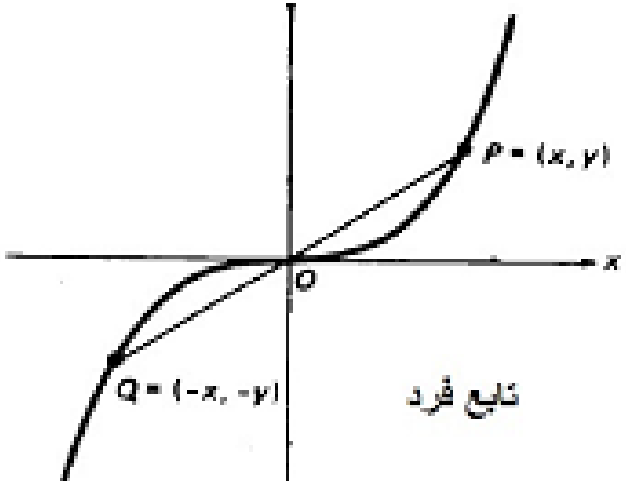
تابع f فرد است ، پس $f(x)=-f(-x)$

پس با جمع طرفین این تساوی ها داریم:

$$\Rightarrow f(x)+f(x)=f(-x)+(-f(-x))\Rightarrow 2f(x)=f(-x)-f(-x)\Rightarrow 2f(x)=0\Rightarrow f(x)=0$$

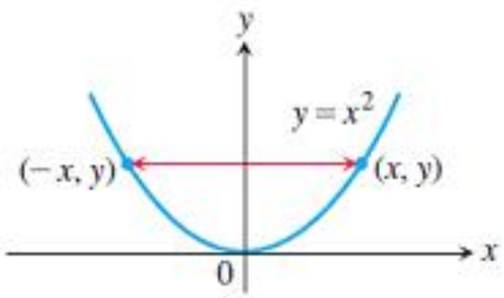


تابع زوج



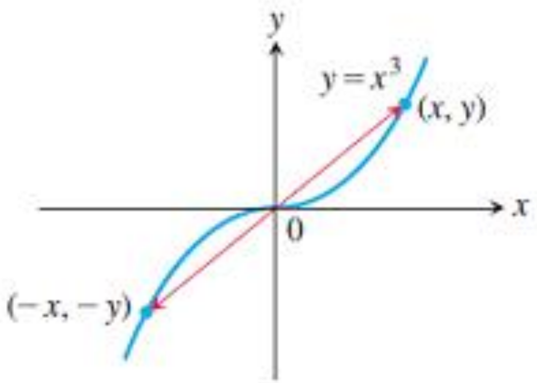
تابع فرد

۱: نمودار هر تابع زوج نسبت به محور عرض ها متقارن است.

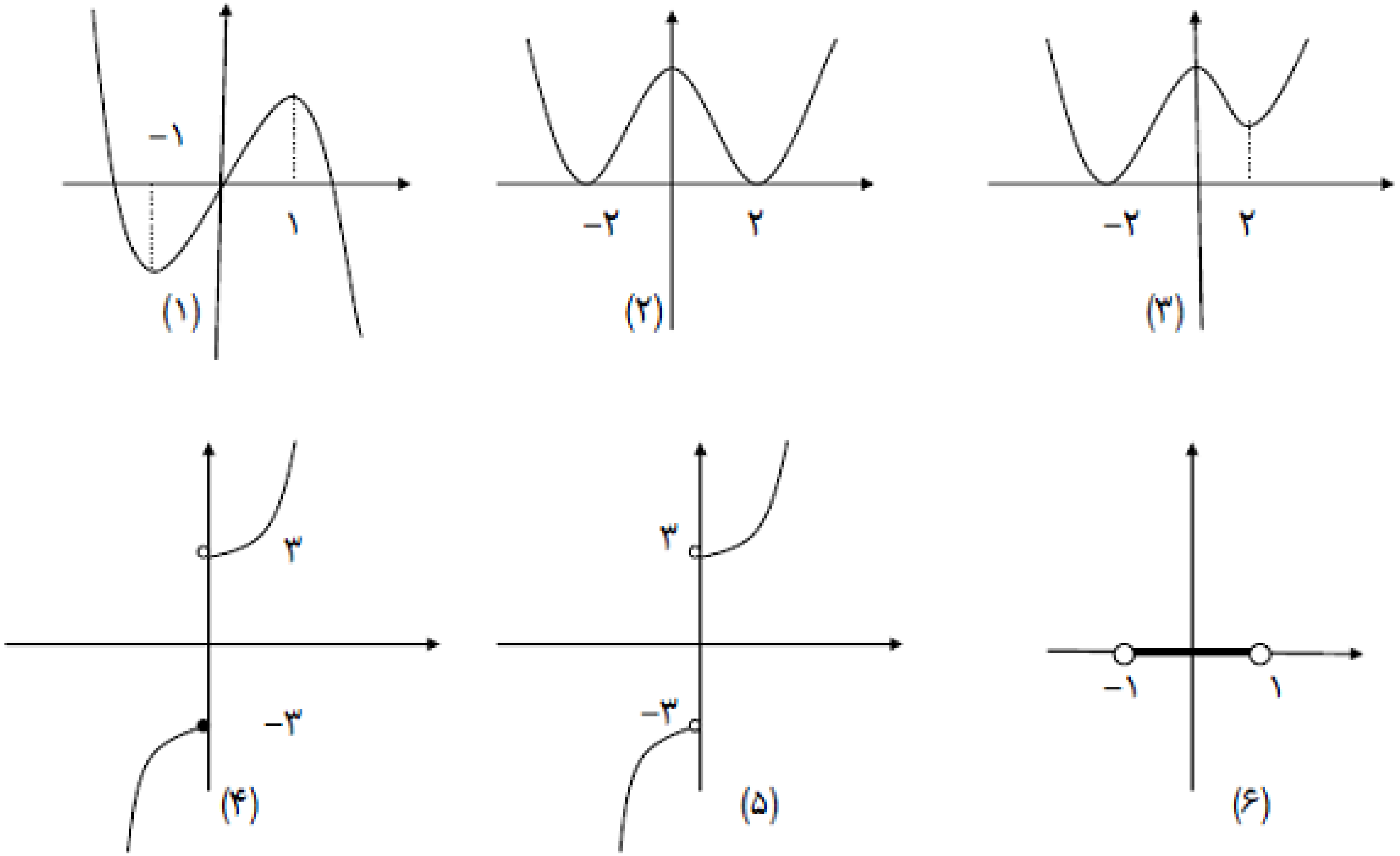


۲: نمودار هر تابع فرد نسبت به مبدأ مختصات متقارن است.

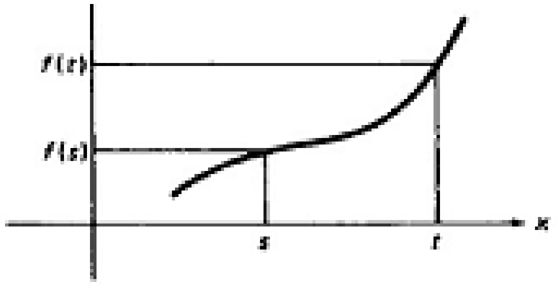
۳ : تابع ثابت زوج و تابع همانی فرد است.



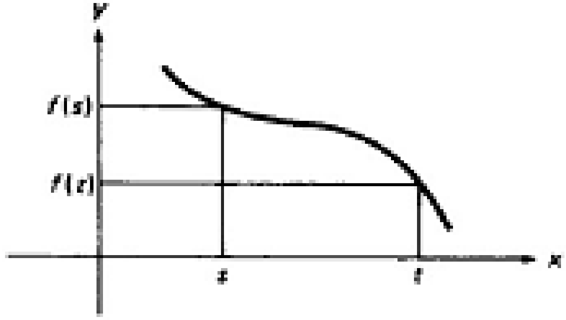
زوج یا فرد بودن توابع زیر را بررسی کنید.



- تابع $y = f(x)$ را در بازه $I = (a,b)$ یک تابع صعودی می‌گوییم اگر هر وقت $s < t \in I$ آنگاه $f(s) < f(t)$. به بیان ساده ، هر وقت به گراف تابع در I نگاه می‌کنیم، این گراف از چپ به راست در حال بالا آمدن است.
- تابع $y = f(x)$ را در بازه $I = (a,b)$ نزولی می‌گوییم اگر هر وقت $s < t \in I$ آنگاه $f(s) > f(t)$. به بیان ساده ، هر وقت به گراف تابع در I نگاه می‌کنیم، این گراف از چپ به راست در حال پایین آمدن است.



(آ) f صعودی



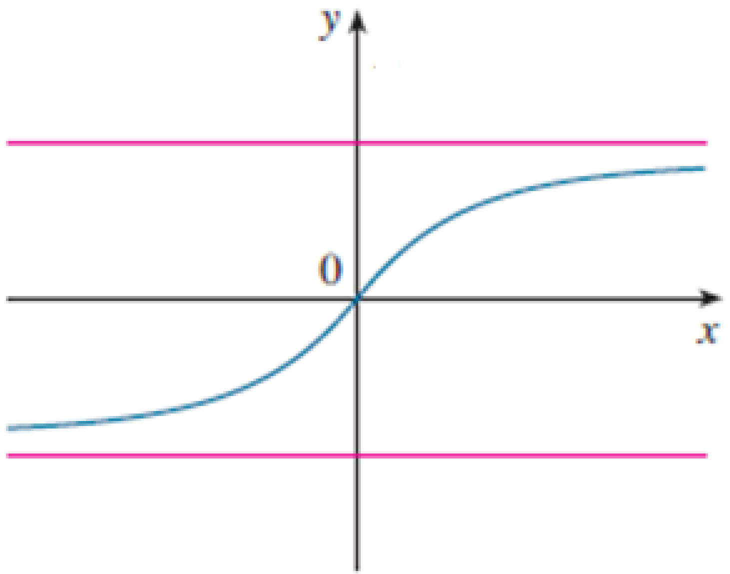
(ب) f نزولی

تابع کراندار

❖**تعریف:** تابع f را کراندار گوییم هرگاه: $\exists M > 0 : \forall x \in D_f \rightarrow |f(x)| \leq M$

✓**مثال:** توابع $f(x) = \sin(x)$ و $f(x) = \cos(x)$ کراندارند. زیرا:

$$\forall x \in \mathbb{R} : |\sin(x)| \leq 1, |\cos(x)| \leq 1$$



تعریف

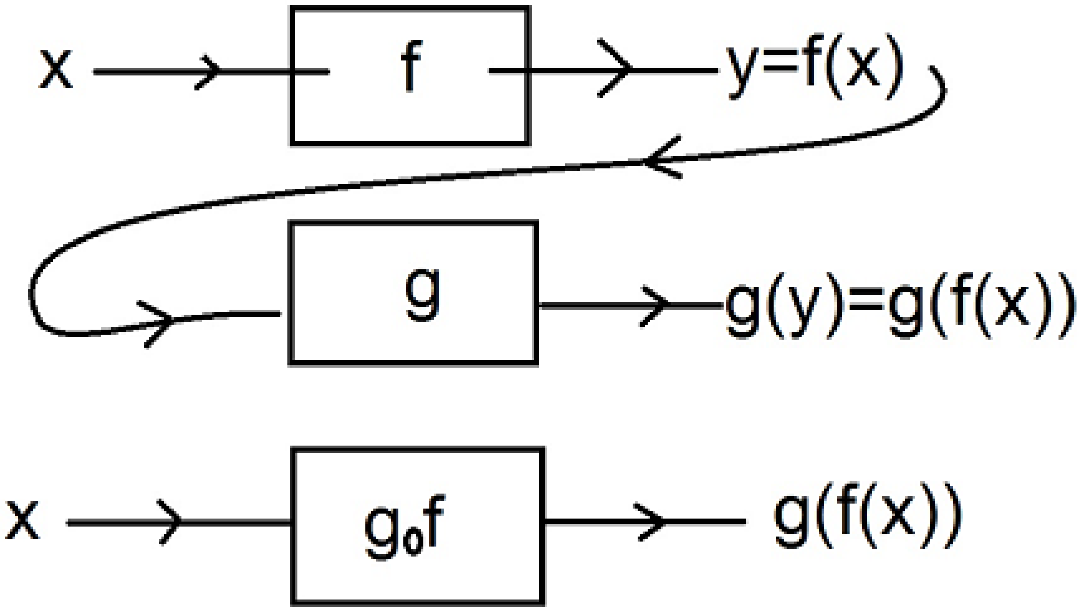
فرض کنید f و g دو تابع باشند.

- جمع f با g را به $f+g$ نشان می دهیم. $f+g$ خود یک تابع است که ضابطه آن به صورت $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ تعریف می‌شود. با توجه به این موضوع $D_{f+g} = D_f \cap D_g$.
- تفاضل g از f را به $f-g$ نشان می دهیم. $f-g$ خود یک تابع است که ضابطه آن به صورت $(f-g)(x) = f(x)-g(x)$ تعریف می‌شود. با توجه به این موضوع $D_{f-g} = D_f \cap D_g$.
- ضرب f در g را به fg نشان می دهیم. fg خود یک تابع است که ضابطه آن به صورت $(fg)(x) = f(x)g(x)$ تعریف می‌شود. با توجه به این موضوع $D_{fg} = D_f \cap D_g$.
- تقسیم f بر g را به f/g (یا $\frac{f}{g}$) نشان می دهیم. f/g خود یک تابع است که ضابطه آن به صورت $(f/g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ تعریف می‌شود. با توجه به این موضوع $D_{f/g} = D_f \cap D_g - \{x \ : \ g(x) = ۰\}$.

مثال

فرض کنید $f(x)=\sqrt{۱+x}$ و $g(x)=\frac{x}{x-۱}$. در این صورت:

- $D_{f+g}=D_f\cap D_g=[-۱,+\infty)-\{۱\}$ و $(f+g)(x)=\sqrt{۱+x}+\frac{x}{x-۱}$
- $D_{f-g}=D_f\cap D_g=[-۱,+\infty)-\{۱\}$ و $(f-g)(x)=\sqrt{۱+x}-\frac{x}{x-۱}$
- $D_{fg}=D_f\cap D_g=[-۱,+\infty)-\{۱\}$ و $(fg)(x)=\frac{x\sqrt{۱+x}}{x-۱}$
- $D_{f/g}=D_f\cap D_g-\{x\; g(x)=۰\}=[-۱,+\infty)-\{۱,۰\}$ و $(f/g)(x)=\frac{\sqrt{۱+x}}{\frac{x}{x-۱}}=\frac{(x-۱)\sqrt{۱+x}}{x}$


x
f
y=f(x)
g
g(y)=g(f(x))
x
g₀f
g(f(x))

تعریف

فرض کنید f و g دو تابع باشند، ترکیب g با f را به $g \circ f$ نشان می‌دهیم. $g \circ f$ خود یک تابع است که ضابطه آن به صورت $g \circ f(x) = g\big(f(x)\big)$ تعریف می‌شود. با توجه به این موضوع نتیجه می‌گیریم که

$$D_{g\circ f} = \{x \in D_f \ : \ f(x) \in D_g\}.$$

- دقت کنیم که ترکیب دو تابع در حالت کلی دارای خاصیت جابجایی نیست. یعنی در حالت کلی

$$g \circ f(x) \neq f \circ g(x).$$

- ترکیب توابع داری خاصیت شرکت پذیری است یعنی برای سه تابع f، g و h داریم

$$(h \circ g) \circ c = h \circ (g \circ f) = h \circ g \circ f.$$

مثال

فرض کنید $f(x)=۲x^۲+۱$ و $g(x)=\frac{۱}{x-۱}$. در این صورت

$$g\circ f(x)=g\big(f(x)\big)=\frac{۱}{f(x)-۱}=\frac{۱}{۲x^۲},\quad D_{g\circ f}=\{x\in\mathbb{R}\ :\ f(x)\neq ۱\}=\mathbb{R}-\{۰\}.$$

به همین ترتیب

$$f\circ g(x)=f\big(g(x)\big)=۲g^۲(x)+۱=\frac{۲}{(x-۱)^۲}+۱,\quad D_{f\circ g}=\{x\in D_g\ :\ g(x)\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}-\{۱\}.$$

مثال

فرض کنید $f(x) = ۱/x$ و $g(x) = x^۲$ و $h(x) = \sqrt{x}$. در این صورت

$$(h \circ g \circ f)(x) = h\Big(g \circ f(x)\Big) = h\Big(g\big(f(x)\big)\Big) = \sqrt{g\big(f(x)\big)} = \sqrt{\frac{۱}{x^۲}} = \frac{۱}{\sqrt{x^۲}} = \frac{۱}{|x|}.$$

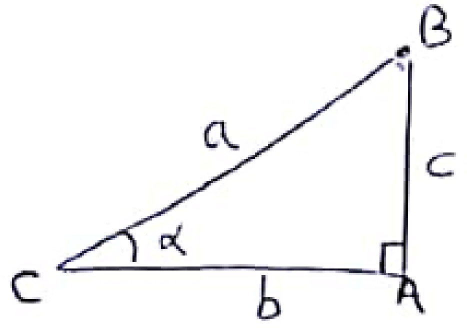
به همین ترتیب

$$(f \circ h \circ g)(x) \;=\; f\Big(h \circ g(x)\Big) = f\Big(h\big(g(x)\big)\Big) = \frac{۱}{h\big(g(x)\big)} = \frac{۱}{\sqrt{g(x)}} = \frac{۱}{|x|}$$

و بالاخره می‌توان دید که

$$(f \circ g \circ h)(x) \;=\; = f\Big(g\big(h(x)\big)\Big) = \frac{۱}{g\big(h(x)\big)} = \frac{۱}{(\sqrt{x})^۲} = \frac{۱}{x}$$

توابع مثلثاتی



در مثلث قائم الزاویه ABC به اضلاع a، b و c، نسبت‌های $\frac{c}{a}$ ، $\frac{b}{a}$، $\frac{c}{b}$ و $\frac{b}{c}$ که به اندازه زاویه α بستگی دارند را نسبت‌های مثلثاتی زاویه α می‌نامیم و آن‌ها را به صورت زیر نشان می‌دهیم.

سینوس α	$\sin\alpha = \frac{c}{a}$
کسینوس α	$\cos\alpha = \frac{b}{a}$
تانژانت α	$\tan\alpha = \frac{c}{b}$
کتانژانت α	$\cot\alpha = \frac{b}{c}$

می‌توان مشاهده کرد :

۱) $\sin^{۲}\alpha + \cos^{۲}\alpha = ۱$

۲) $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

۳) $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

بعضی از نسبتهای مثلثاتی در جدول زیر بیان شده است

α	0	$\pi/6 = 30^\circ$	$\pi/4 = 45^\circ$	$\pi/3 = 60^\circ$	$\pi/2 = 90^\circ$	$\pi = 180^\circ$
$\sin\alpha$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0
$\cos\alpha$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1
$\tan\alpha$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	تعریف نشده	0
$\cot\alpha$	تعریف نشده	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0	تعریف نشده

چند فرمول مهم :

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin ۲\alpha = ۲\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos ۲\alpha = \cos^{۲}\alpha - \sin^{۲}\alpha \Rightarrow \begin{cases} \cos ۲\alpha = ۲\cos^{۲}\alpha - 1 \\ \cos ۲\alpha = 1 - ۲\sin^{۲}\alpha \end{cases}$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

$$\cot(\alpha+\beta) = \frac{\cot\alpha\cot\beta - 1}{\cot\alpha + \cot\beta}$$

$$\cot(\alpha-\beta) = \frac{\cot\alpha\cot\beta + 1}{\cot\alpha - \cot\beta}$$

Even

$\cos(-x) = \cos x$

$\sec(-x) = \sec x$

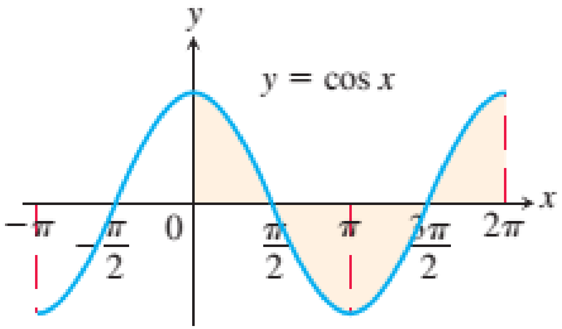
Odd

$\sin(-x) = -\sin x$

$\tan(-x) = -\tan x$

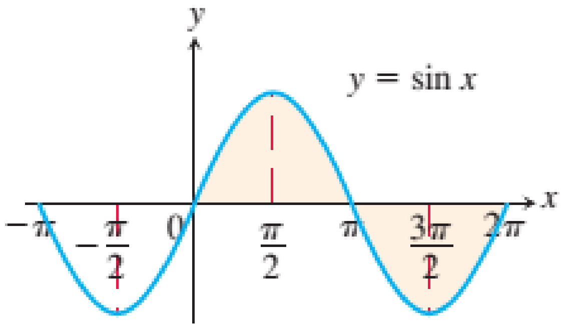
$\csc(-x) = -\csc x$

$\cot(-x) = -\cot x$



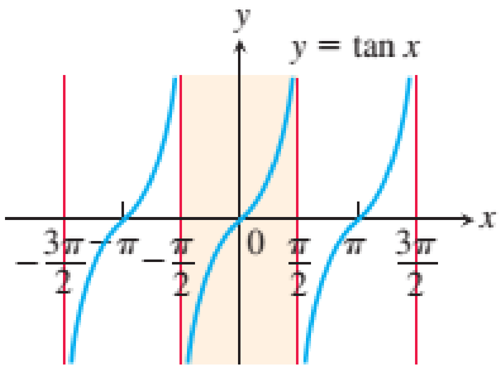
Domain: $-\infty < x < \infty$
Range: $-1 \le y \le 1$
Period: 2π

(a)



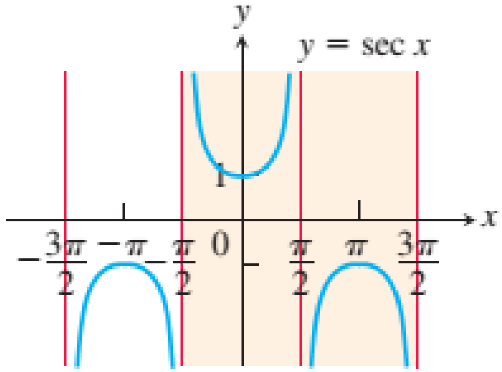
Domain: $-\infty < x < \infty$
Range: $-1 \le y \le 1$
Period: 2π

(b)



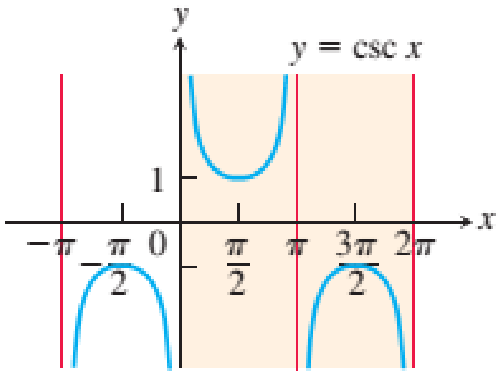
Domain: $x \ne \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \ldots$
Range: $-\infty < y < \infty$
Period: π

(c)



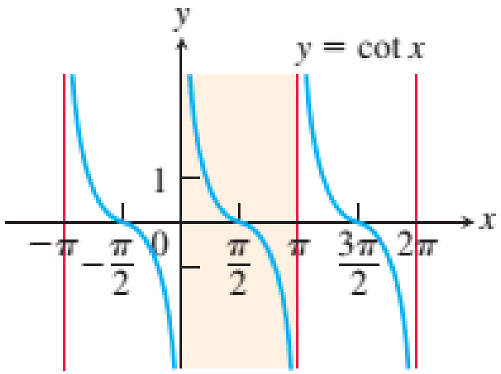
Domain: $x \ne \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \ldots$
Range: $y \le -1$ or $y \ge 1$
Period: 2π

(d)



Domain: $x \ne 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$
Range: $y \le -1$ or $y \ge 1$
Period: 2π

(e)



Domain: $x \ne 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$
Range: $-\infty < y < \infty$
Period: π

(f)