بسم الله الرحمن الرحیم

شهید مصطفی چمران در مناجاتی با خدای خود اینگونه می گوید: ای خدا من باید از نظر علم از همه برتر باشم تا مبادا که دشمنان مرا از این راه طعنه زنند.

باید به آن سنگدلانی که علم را بهانه کرده و به دیگران فخر می فروشند ثابت کنم خاک پای من هم نخواهند شد، باید همه ان تیره دلان مغرور و متکبر را به زانو در آورم، آنگاه خود خاضع ترین و افتاده ترین فرد روی زمین باشم.

ای خدای بزرگ اینها که از تو می خواهم چیزهاییست که فقط میخواهم در راه تو به کار اندازم و تو خوب میدانی استعداد آن را داشته ام، از تو می خواهم مرا توفیق دهی کارهایم ثمربخش شود و در مقابل خسان سرافکنده نشوم.

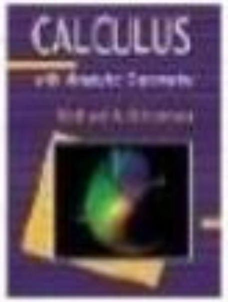
منابع:

۱. **حساب دیفرانسیل و انتگرال**، نوشته جیمز *استوارت*، ویراست ششم ، ترجمه ارشک حمیدی، انتشارات فاطمی.

۲. **حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی**، نوشته *رابرت الگزاندر آدامز*، ترجمه علی اکبر عالم زاده، موسسه انتشارات علمی دانشگاه صنعتی شریف.

۳. **حساب دیفرانسیل و انتگرال**، نوشته جورج ب. *توماس*، *جوئل هاس*، و *موریس د. ویر*، ترجمه احمد مجلسی و محمد تقی خادمی، انتشارات پویش اندیشه.

۴. **حساب دیفرانسیل و انتگرال با هندسه تحلیلی**، نوشته *ریچارد ای. سیلورمن*، ترجمه علی اکبر عالم زاده، انتشارات ققنوس.



فصل دوّم (حدو پیوستگی)

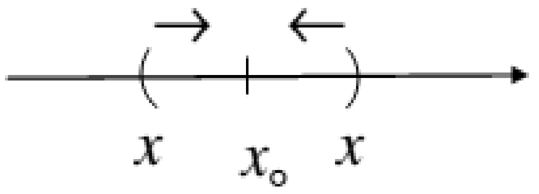
فهرست مطالب فصل دوَم

☑ مفهوم حد

مفهوم حد یکی از مفاهیم کلیدی ومهم ریاضیات محسوب می شود. جهت آشنایی با این مفهوم قبل از تعریف به معرفی چند نماد می پردازیم.

۱. $\boxed{x \to x_0}$

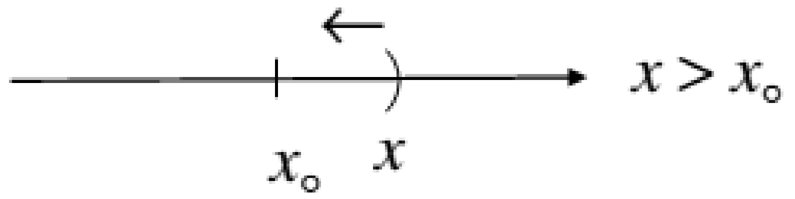
یعنی متغیر x از دو طرف محور xها به عدد ثابت x_0 نزدیک می شود ولی مساوی آن نمی شود.



$x \neq x_0$

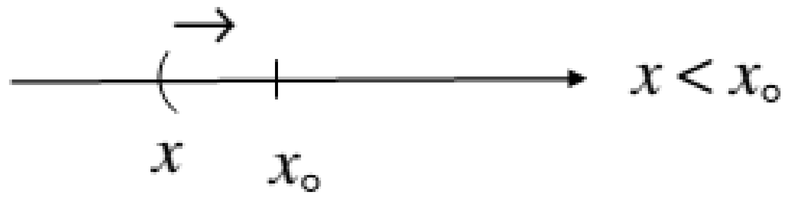
۲. $\boxed{x \to x_0^{+}}$

یعنی متغیر x از طرف راست محور xها به عدد ثابت x_0 نزدیک می شود ولی مساوی آن نمی شود.



۳. $\boxed{x \to x_0^{-}}$

یعنی متغیر x از طرف چپ محور xها به عدد ثابت x_0 نزدیک می شود ولی مساوی آن نمی شود.



۴. $\boxed{x \to +\infty}$

یعنی متغیر x از هر عدد مثبت بزرگی، بزرگتر می شود.

۵. $\boxed{x \to -\infty}$

یعنی متغیر x از هر عدد منفی کوچکی، کوچکتر می شود.

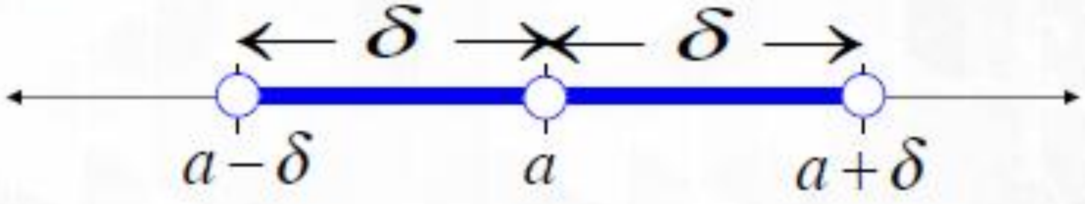
۶. $\boxed{x \to \pm\infty}$

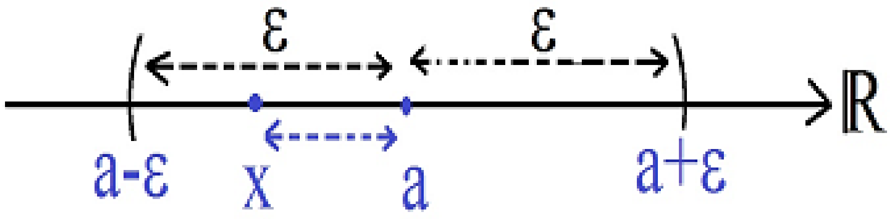
یعنی قدر مطلق متغیر x از هر عدد مثبت بزرگی، بزرگتر می شود.

همسایگی محذوف

❖**تعریف:** منظور از همسایگی محذوف a به شعاع $\delta > 0$، مجموعه زیر می‌باشد:

$$\{x \in \mathbb{R} : 0 < |x-a| < \delta\} = (a-\delta, a+\delta) - \{a\}$$





فاصله x از a ، از ϵ کمتر است $\Leftrightarrow \; x \in (a-\epsilon, a+\epsilon)$

$$\Leftrightarrow \; a-\epsilon < x < a+\epsilon$$

$$\Leftrightarrow \; -\epsilon < x-a < \epsilon$$

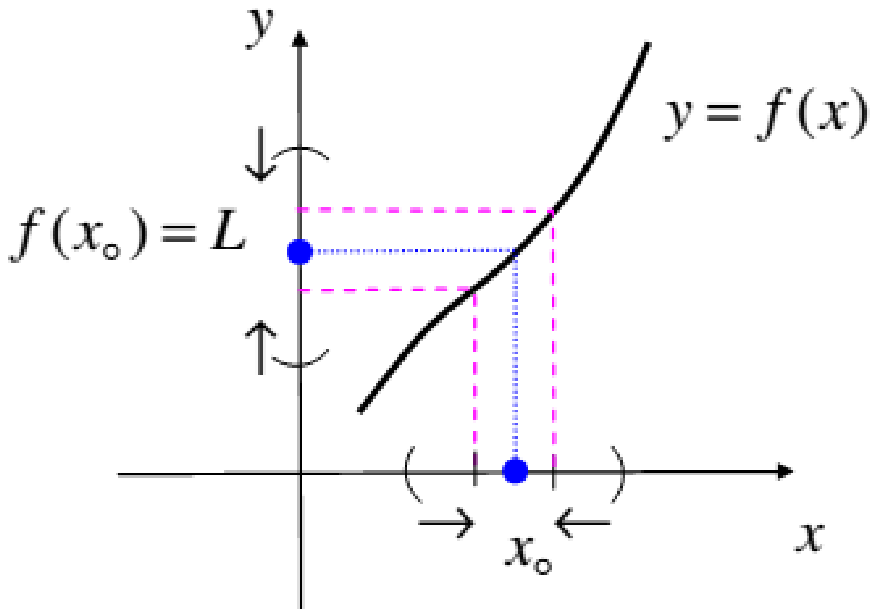
$$\Leftrightarrow \; |x-a| < \epsilon.$$

☑ حد تابع در یک نقطه

هرگاه $y=f(x)$ یک تابع باشد،گویند حد تابع f وقتی x به سمت $x_{\circ}$ میل می کند برابر L است،اگر هنگامی که متغیر x بـه سمت $x_{\circ}$ میل کند، $f(x)$ به سمت عدد معین L میل کند. در این صورت می نویسند.

$$\lim_{x \to x_{\circ}} f(x) = L$$

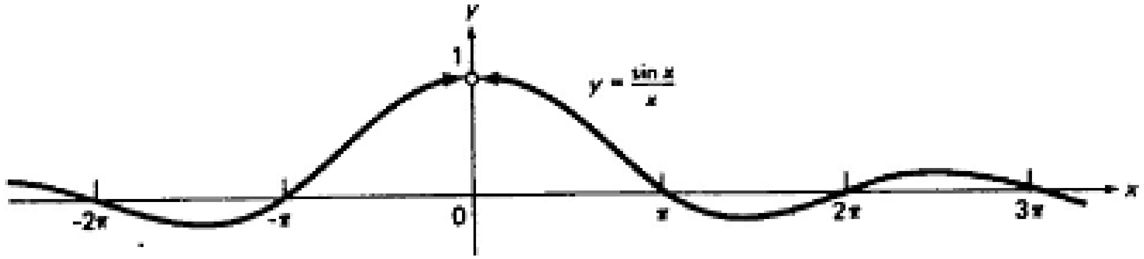
به شکل زیر توجه کنید.



دقت کنیم که در تعریف حد، نیازی به این که تابع $f(x)$ در خود نقطه a تعریف شده باشد نیست. برای مثال اگر

x	$\frac{\sin x}{x}$	x	$\frac{\sin x}{x}$
$(\pm)$ 1.2	0.77670	$(\pm)$ 0.10	0.99833
1.0	0.84147	0.08	0.99893
0.8	0.89670	0.06	0.99940
0.6	0.94107	0.04	0.99973
0.4	0.97355	0.02	0.99993
0.2	0.99335	0	تعریف نشده

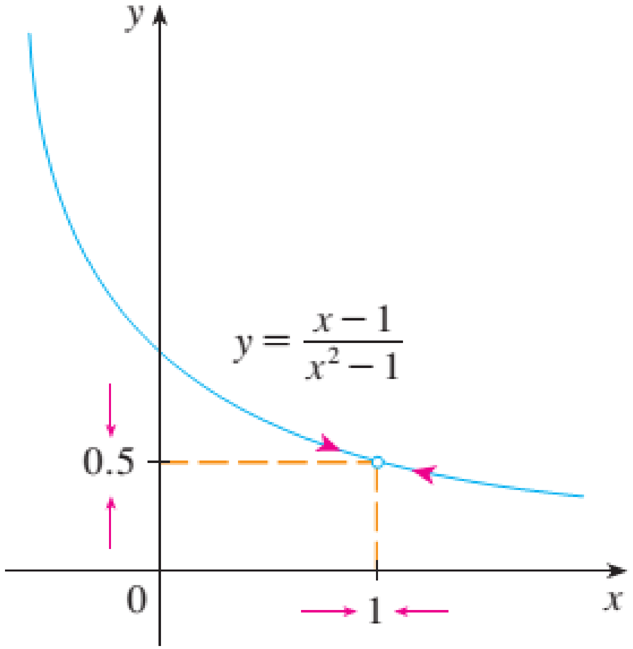
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

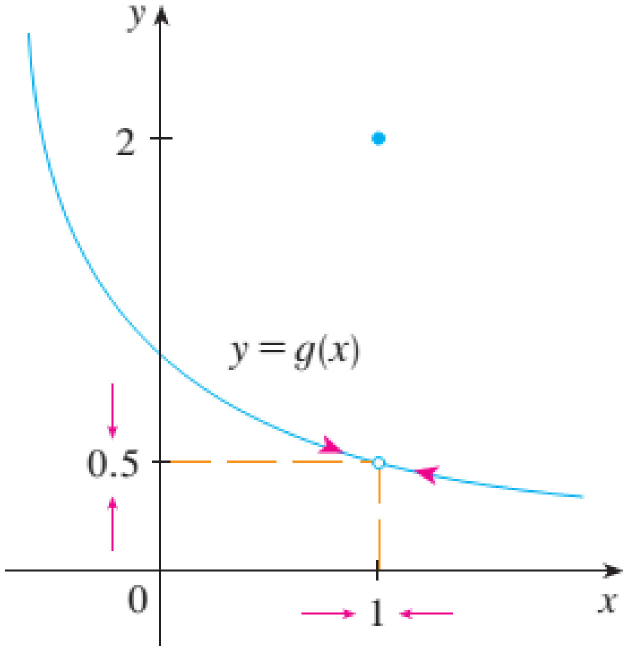


EXAMPLE 1 Guess the value of $\lim_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^2-1}$.

SOLUTION Notice that the function $f(x) = (x-1)/(x^2-1)$ is not defined when $x = 1$, but that doesn't matter because the definition of $\lim_{x\to a} f(x)$ says that we consider values of x that are close to a but not equal to a.

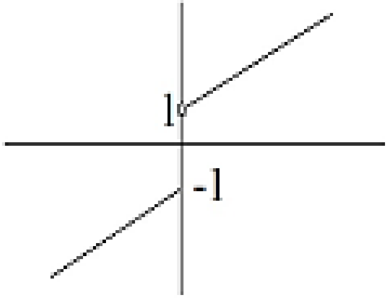
$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x^2-1} & \text{if } x \neq 1 \\ 2 & \text{if } x = 1 \end{cases}$$



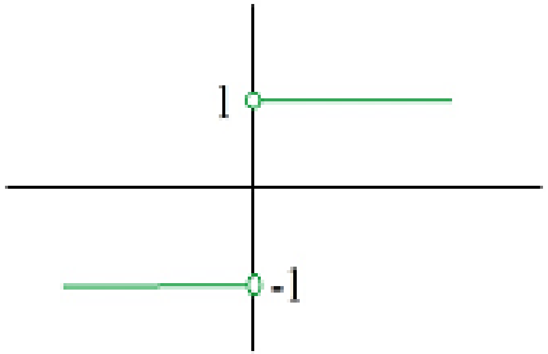


دقت کنیم که لزومی ندارد که حد یک تابع در یک نقطه وجود داشته باشد. برای مثال:

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & x>0 \\ x-1 & x\leqslant 0 \end{cases}$$

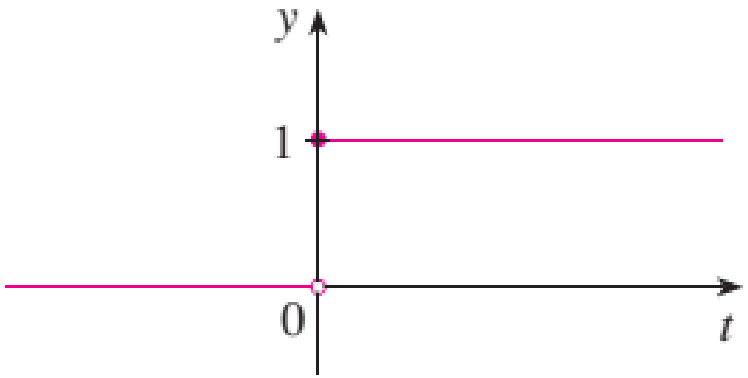


$$g(x)=\frac{|x|}{x}$$



The Heaviside function H is defined by

$$H(t)=\begin{cases} 0 & \text{if } t<0 \\ 1 & \text{if } t\geqslant 0 \end{cases}$$



توجه: می توان گفت که منظور از نماد $\lim_{x \to x_\circ} f(x) = L$ یعنی اینکه وقتی x به $x_\circ$ میل می کند، فاصله ی بـین x و $x_\circ$ از هر عدد کوچک مثبتی کوچکتر می شود ($|x - x_\circ| < \delta$). حال وقتی که $f(x)$ به سمت $L = f(x_\circ)$ میل کند، فاصـله ی آنها نیز از هر عدد کوچک مثبت دیگری کوچکتر می شود $|f(x) - L| < \varepsilon$.

بنا براین:

$$(\forall \varepsilon > \cdot \quad \exists \delta > \cdot \quad \ni \cdot < |x - x_\circ| < \delta \rightarrow |f(x) - f(x_\circ)| < \varepsilon) \Leftrightarrow \lim_{x \to x_\circ} f(x) = L$$

این دیدگاه تعریف دقیق حد تابع در یک نقطه را نشان می دهد که در کتب دیفرانسیل و انتگرال با آن مواجه می شـویم. در اینجـا مفهوم حد را به صورت شهودی می پذیریم.

حد و اعمال جبری روی توابع

❖قضیه: اگر $\lim_{x\to a} f(x) = L_1$ و $\lim_{x\to a} g(x) = L_2$، آن گاه:

الف) $\forall c \in \mathbb{R}: \quad \lim_{x\to a}(cf(x)) = cL_1$

ب) $\lim_{x\to a}(f \pm g)(x) = L_1 \pm L_2$

ج) $\lim_{x\to a}(f . g)(x) = L_1 . L_2$

د) $L_2 \neq 0 \to \lim_{x\to a}(\frac{f}{g})(x) = \frac{L_1}{L_2}$

مثال

$$\lim_{x\to a} cx = ca.$$

$$\lim_{x\to ۱} \frac{x^{۲} - x}{\sqrt{x} - ۱} = \lim_{x\to ۱} x \times \lim_{x\to ۱} \frac{x - ۱}{\sqrt{x} - ۱} = ۲.$$

6. $\lim_{x \to a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \to a} f(x)\right]^n$ where n is a positive integer

9. $\lim_{x \to a} x^n = a^n$ where n is a positive integer

یک کاربرد از قضیه‌های بالا این است که برای هر عدد حقیقی c و هر عدد طبیعی n داریم

$\lim_{x \to a} cx^n = ca^n$ (یعنی تابع $f(x) = cx^n$ پیوسته است).

لذا برای هر چند جمله ای $p(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots c_n x^n$ داریم

$\lim_{x \to a} p(x) = p(a)$ (یعنی چند جمله ای $p(x)$ پیوسته است).

و بالاخره اگر $p(x)$ و $q(x)$ دو چند جمله ای باشند و $q(a) \neq 0$ آنگاه

$\lim_{x \to a} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(a)}{q(a)}$ (یعنی خارج قسمت دو چند جمله ای، به شرط آنکه مخرج صفر نباشد، پیوسته است)

7. $\lim_{x \to a} c = c$

8. $\lim_{x \to a} x = a$

10. $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$ where n is a positive integer

(If n is even, we assume that $a > 0$.)

11. $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}$ where n is a positive integer

$\left[\text{If } n \text{ is even, we assume that } \lim_{x \to a} f(x) > 0.\right]$

EXAMPLE 2 Evaluate the following limits and justify each step.

(a) $\lim_{x \to 5} (2x^2 - 3x + 4)$ (b) $\lim_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$

SOLUTION

(a)
$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 5} (2x^2 - 3x + 4) &= \lim_{x \to 5} (2x^2) - \lim_{x \to 5} (3x) + \lim_{x \to 5} 4 && \text{(by Laws 2 and 1)} \\
&= 2 \lim_{x \to 5} x^2 - 3 \lim_{x \to 5} x + \lim_{x \to 5} 4 && \text{(by 3)} \\
&= 2(5^2) - 3(5) + 4 && \text{(by 9, 8, and 7)} \\
&= 39
\end{aligned}$$

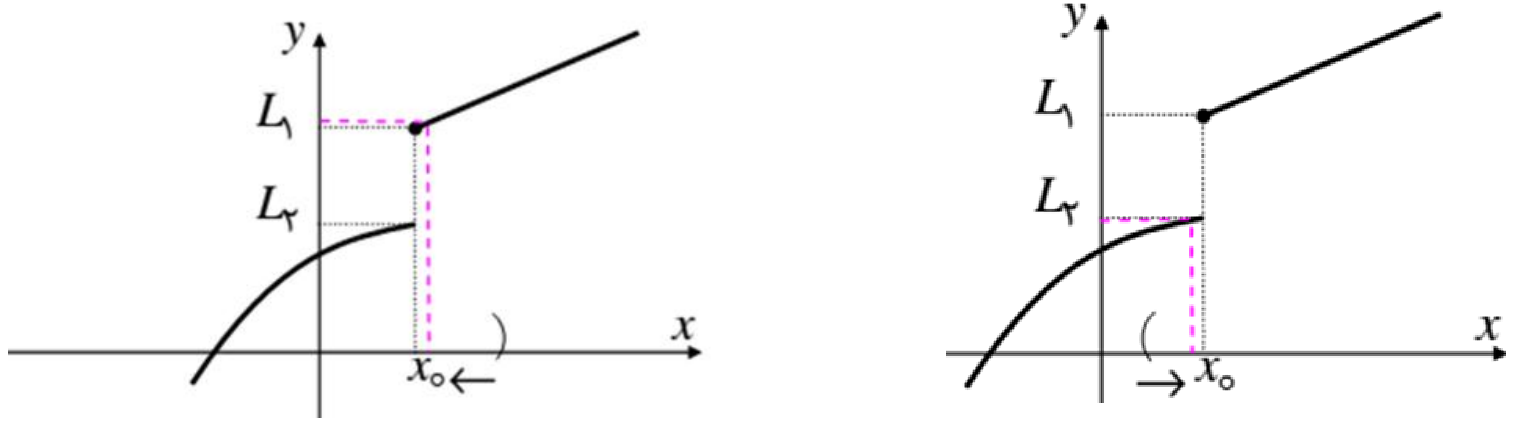
$$\begin{aligned}
\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x} &= \frac{\lim_{x \to -2} (x^3 + 2x^2 - 1)}{\lim_{x \to -2} (5 - 3x)} \\
&= \frac{\lim_{x \to -2} x^3 + 2 \lim_{x \to -2} x^2 - \lim_{x \to -2} 1}{\lim_{x \to -2} 5 - 3 \lim_{x \to -2} x} \\
&= \frac{(-2)^3 + 2(-2)^2 - 1}{5 - 3(-2)} \\
&= -\frac{1}{11}
\end{aligned}$$

NOTE If we let $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$, then $f(5) = 39$.

تعریف

اگر وقتی که $a^+ \rightarrow x$، تابع $f(x)$ به l میل کند می‌گوییم حد راست f در a برابر l است و می‌نویسیم $\lim_{x\to a^+} f(x) = l$.

به همین ترتیب، اگر وقتی که $a^- \rightarrow x$، تابع $f(x)$ به l میل کند می‌گوییم حد چپ f در a برابر l است و می‌نویسیم $\lim_{x\to a^-} f(x) = l$.



نتیجه: تابع $y = f(x)$ در نقطه ی x_0 دارای حد است، هرگاه حد راست و حد چپ آن در این نقطه موجود و برابر[1] باشند و برعکس

$$\lim_{x \to {x_0}^+} f(x) = \lim_{x \to {x_0}^-} f(x) = L \leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

EXAMPLE 7 The graph of a function g is shown in Figure 10. Use it to state the values (if they exist) of the following:

(a) $\lim_{x \to 2^-} g(x) = 3$ (b) $\lim_{x \to 2^+} g(x) = 1$ (c) $\lim_{x \to 2} g(x)$ does not exist.

(d) $\lim_{x \to 5^-} g(x) = 2$ (e) $\lim_{x \to 5^+} g(x) = 2$ (f) $\lim_{x \to 5} g(x) = 2$

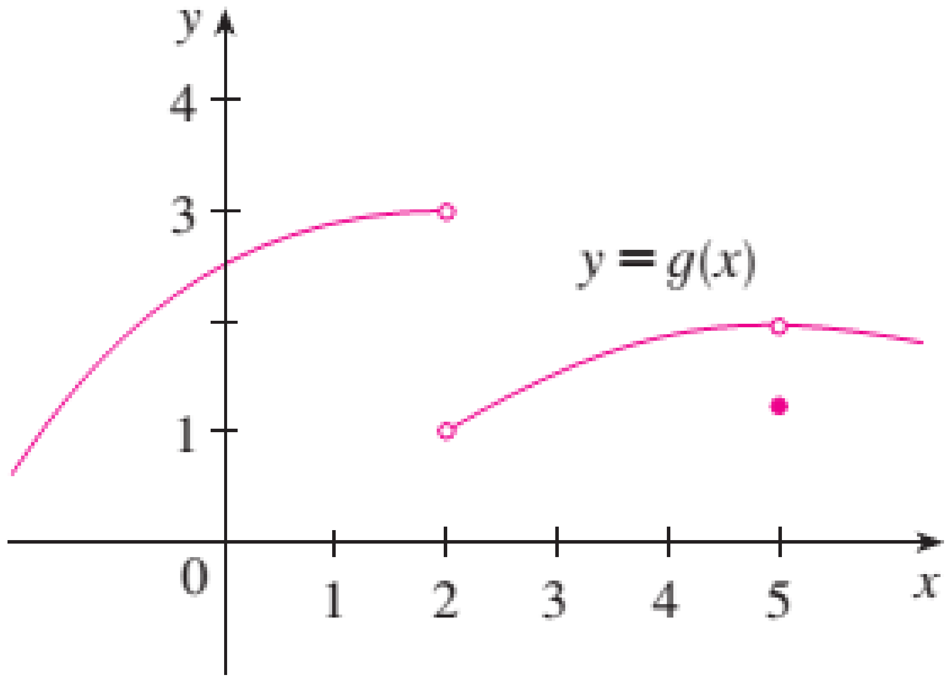


FIGURE 10

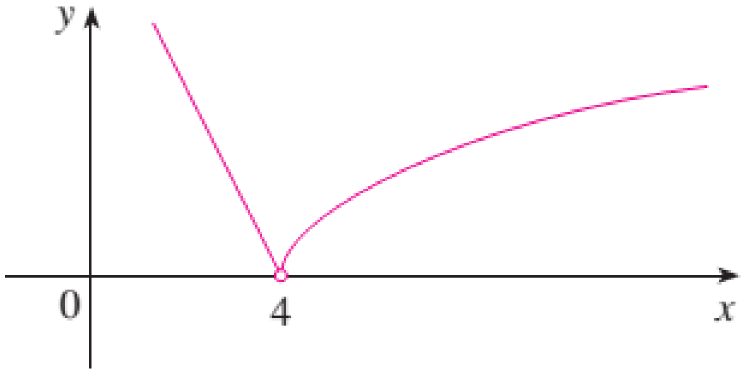
EXAMPLE 9 If

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-4} & \text{if } x > 4 \\ 8 - 2x & \text{if } x < 4 \end{cases}$$

determine whether $\lim_{x \to 4} f(x)$ exists.

SOLUTION Since $f(x) = \sqrt{x-4}$ for $x > 4$, we have

$$\lim_{x \to 4^+} f(x) = \lim_{x \to 4^+} \sqrt{x-4} = \sqrt{4-4} = 0$$



Since $f(x) = 8 - 2x$ for $x < 4$, we have

$$\lim_{x \to 4^-} f(x) = \lim_{x \to 4^-} (8 - 2x) = 8 - 2 \cdot 4 = 0$$

The right- and left-hand limits are equal. Thus the limit exists and

$$\lim_{x \to 4} f(x) = 0$$

The graph of f is shown in Figure 5.

EXAMPLE 10 $y = [\![x]\!]$

SOLUTION The graph of the greatest integer function is shown in Figure 6. Since $[\![x]\!] = 3$ for $3 \leqslant x < 4$, we have

$$\lim_{x \to 3^+} [\![x]\!] = \lim_{x \to 3^+} 3 = 3$$

Since $[\![x]\!] = 2$ for $2 \leqslant x < 3$, we have

$$\lim_{x \to 3^-} [\![x]\!] = \lim_{x \to 3^-} 2 = 2$$

Because these one-sided limits are not equal, $\lim_{x \to 3} [\![x]\!]$ does not exist by Theorem 1. ▮

تمرین: حد توابع زیر را بدست آورید.

---

۱) $\lim\limits_{x\to ۰^{+}} \dfrac{[x]}{x} = \dfrac{[۰^{+}]}{۰^{+}} = \dfrac{۰}{۰^{+}} = ۰$

۲) $\lim\limits_{x\to ۰^{-}} \dfrac{[x]}{x} = \dfrac{[۰^{-}]}{۰^{-}} = \dfrac{-۱}{۰^{-}} = +\infty$

۳) $\lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{[x]}{x} =$ وجود ندارد.

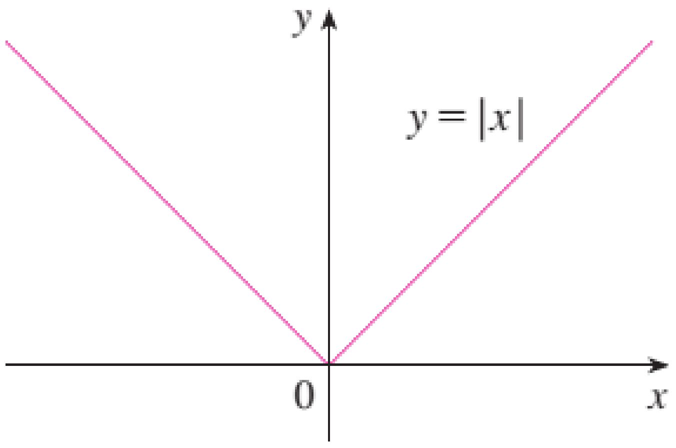
EXAMPLE 7 Show that $\lim_{x \to 0} |x| = 0$.

SOLUTION Recall that

$$|x| = \begin{cases} x & \text{if } x \geqslant 0 \\ -x & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

Since $|x| = x$ for $x > 0$, we have

$$\lim_{x \to 0^+} |x| = \lim_{x \to 0^+} x = 0$$



For $x < 0$ we have $|x| = -x$ and so

$$\lim_{x \to 0^-} |x| = \lim_{x \to 0^-} (-x) = 0$$

Therefore, by Theorem 1,

$$\lim_{x \to 0} |x| = 0$$

✓**مثال:** تابع $f(x)=\frac{|x|}{x}$ در نقطه‌ی صفر دارای حد نیست.

➢**حل:**

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} \overset{\substack{x>0 \\ |x|=x}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} \overset{\substack{x<0 \\ |x|=-x}}{=} \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

$\Rightarrow$ تابع f در صفر حد ندارد

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 2x - 1} = \frac{3}{-1} = -3$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{x} = \lim_{x \to 0} (\sin x) \left(\frac{\sin x}{x} \right)$$

$$= 0 \times 1 = 0$$

$$\lim_{x \to \pi/4} (2 \sec^4 x - 1) = 2 \left(\frac{2}{\sqrt{2}} \right)^4 - 1 = -\frac{1}{2}$$

حدهای مبهم:

در محاسبه ی حد توابع اگر حد به شکل $\frac{0}{0}$ درآید، در اصطلاح می گویند حد مبهم است . یعنی مقدار آن با روش جایگزینی مستقیم به دست نمی آید و برای تعیین مقدار آن کافی است از یکی از روش های رفع ابهام که تأکید آنها بر حذف عامل صفر کننده است،استفاده کنیم. منظور از رفع ابهام ،استفاده از عملیات مجازی است که زمینه ی محاسبه ی مقدار حد را فراهم کنند.

روش های رفع ابهام عبارتند از:

توجه : در محاسبه ی حد توابع علاوه بر حالت $\frac{0}{0}$ حالت های $\frac{\infty}{\infty}$ و $0\times\infty$ و $\infty-\infty$ از صور مبهم محسوب می شوند و چون تمام صورت ها قابل تبدیل به حالت $\frac{0}{0}$ هستند، به همین علت این صورت را صورت اصلی می نامند و بیشتر به آن تأکید می شود روشهای رفع ابهام این حالت ها در اکثر موارد با تبدیل به حالت $\frac{0}{0}$ انجام می شود.[1]

---

1 . حالت های 1^{∞} و ∞^{0} و 0^{0} نیز مبهم محسوب می شوند.

۱. تجزیه ی صورت و مخرج و ساده کردن کسر

اگر صورت و مخرج کسر چند جمله ای باشند، برای رفع ابهام می توانید، صورت یا مخرج کسر را تجزیه[۲] نموده و سپس کسر را ساده کنید.

تمرین: حد زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x\to -۲} \frac{x^{۲}+۶x+۸}{x^{۲}-۴}$$

حل:

$$\lim_{x\to -۲} \frac{x^{۲}+۶x+۸}{x^{۲}-۴} = \frac{(-۲)^{۲}+۶(-۲)+۸}{(-۲)^{۲}-۴} = \frac{۴-۱۲+۸}{۴-۴} = \frac{۰}{۰} \quad \text{مبهم}$$

$$\lim_{x\to -۲} \frac{x^{۲}+۶x+۸}{x^{۲}-۴} = \lim_{x\to -۲} \frac{(x+۲)(x+۴)}{(x-۲)(x+۲)} = \lim_{x\to -۲} \frac{x+۴}{x-۲} = \frac{(-۲)+۴}{(-۲)-۲} = \frac{۲}{-۴} = \frac{۱}{-۲}$$

EXAMPLE 5 Evaluate $\lim_{h \to 0} \frac{(3+h)^2 - 9}{h}$.

SOLUTION If we define

$$F(h) = \frac{(3+h)^2 - 9}{h}$$

then, as in Example 3, we can't compute $\lim_{h \to 0} F(h)$ by letting $h = 0$ since $F(0)$ is undefined. But if we simplify $F(h)$ algebraically, we find that

$$F(h) = \frac{(9 + 6h + h^2) - 9}{h} = \frac{6h + h^2}{h} = 6 + h$$

(Recall that we consider only $h \neq 0$ when letting h approach 0.) Thus

$$\lim_{h \to 0} \frac{(3+h)^2 - 9}{h} = \lim_{h \to 0} (6 + h) = 6$$

قضیه ۵.۲. $\lim_{x\to a}\sin x=\sin a$ و $\lim_{x\to a}\cos x=\cos a$ و $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

تمرین برای حل: حد توابع زیر را بدست آورید.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2-4}$$

۲. گویا کردن صورت یا مخرج کسر وساده کردن آن

اگر صورت یا مخرج کسر ، شامل عبارت رادیکالی باشد، صورت یا مخرج را گویا[۳] کنید.

تمرین: حد زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x\to ۲}\frac{\sqrt{x^۲+۵}-۳}{x-۲}$$

حل:

$$\lim_{x\to ۲}\frac{\sqrt{x^۲+۵}-۳}{x-۲}=\frac{\sqrt{(۲)^۲+۵}-۳}{(۲)-۲}=\frac{\sqrt{۹}-۳}{۲-۲}=\frac{۰}{۰}$$ مبهم

$$\lim_{x\to ۲}\frac{\sqrt{x^۲+۵}-۳}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{\sqrt{x^۲+۵}-۳}{x-۲}\times\frac{\sqrt{x^۲+۵}+۳}{\sqrt{x^۲+۵}+۳}=\lim_{x\to ۲}\frac{(\sqrt{x^۲+۵})^۲-(۳)^۲}{(x-۲)(\sqrt{x^۲+۵}+۳)}$$

$$=\lim_{x\to ۲}\frac{(\sqrt{x^۲+۵})^۲-(۳)^۲}{(x-۲)(\sqrt{x^۲+۵}+۳)}=\lim_{x\to ۲}\frac{x^۲+۵-۹}{(x-۲)(\sqrt{x^۲+۵}+۳)}=\lim_{x\to ۲}\frac{x^۲-۴}{(x-۲)(\sqrt{x^۲+۵}+۳)}$$

$$=\lim_{x\to ۲}\frac{(x-۲)(x+۲)}{(x-۲)(\sqrt{x^۲+۵}+۳)}=\lim_{x\to ۲}\frac{x+۲}{\sqrt{x^۲+۵}+۳}=\frac{۲+۲}{\sqrt{(۲)^۲+۵}+۳}=\frac{۴}{۳+۳}=\frac{۴}{۶}=\frac{۲}{۳}$$

EXAMPLE 6 Find $\lim_{t \to 0} \dfrac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2}$.

SOLUTION We can't apply the Quotient Law immediately, since the limit of the denominator is 0. Here the preliminary algebra consists of rationalizing the numerator:

$$
\begin{aligned}
\lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2} &= \lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2} \cdot \frac{\sqrt{t^2 + 9} + 3}{\sqrt{t^2 + 9} + 3} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{(t^2 + 9) - 9}{t^2\left(\sqrt{t^2 + 9} + 3\right)} = \lim_{t \to 0} \frac{t^2}{t^2\left(\sqrt{t^2 + 9} + 3\right)} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{1}{\sqrt{t^2 + 9} + 3} = \frac{1}{\sqrt{\lim_{t \to 0} (t^2 + 9)} + 3} = \frac{1}{3 + 3} = \frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

This calculation confirms the guess that we made in Example 2 in Section 2.2. ■

تمرین برای حل: حد توابع زیر را بدست آورید.

$$\lim_{x \to ۳} \frac{x^{۲} - ۹}{۳ - \sqrt{x + ۶}} \qquad \lim_{x \to ۰} \frac{\sqrt{x + ۴} - ۲}{x}$$

۳. استفاده از روابط مثلثاتی

به کمک روابط بین نسبت های مثلثاتی نیز می توان حد های شامل نسبت های مثلثاتی را نیز رفع ابهام کرد.

تمرین: حد تابع زیر را بدست آورید.

$$\lim_{x\to ۰}\frac{x^{۲}}{۱-\cos x}$$

حل :

$$\lim_{x\to ۰}\frac{x^{۲}}{۱-\cos x}=\frac{(۰)^{۲}}{۱-\cos(۰)}=\frac{۰}{۱-۱}=\frac{۰}{۰}\quad \text{مبهم}$$

$$\lim_{x\to ۰}\frac{x^{۲}}{۱-\cos x}=\lim_{x\to ۰}\frac{x^{۲}}{۱-\cos x}\times\frac{۱+\cos x}{۱+\cos x}=\lim_{x\to ۰}\frac{x^{۲}(۱+\cos x)}{۱-\cos^{۲}x}=\lim_{x\to ۰}\frac{x^{۲}(۱+\cos x)}{\sin^{۲}x}$$

$$\lim_{x\to ۰}\frac{x^{۲}}{\sin^{۲}x}\times(۱+\cos x)=\lim_{x\to ۰}(\frac{x}{\sin x})^{۲}\times(۱+\cos x)=\lim_{x\to ۰}(\frac{x}{\sin x})^{۲}\times\lim_{x\to ۰}(۱+\cos x)$$

$$=۱\times(۱+\cos ۰)=۱\times(۱+۱)=۲$$

توجه : فرمول های زیر را به خاطر بسپارید.

$$1)\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$$

$$3) 1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$$

$$2)\cos x = 1-2\sin^2\frac{x}{2}$$

$$4)\ 1+\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}$$

تمرین: حد تابع زیر را بدست آورید.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos x}$$

حل :

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos x}=\frac{(0)^2}{1-\cos(0)}=\frac{0}{1-1}=\frac{0}{0}\quad \text{مبهم}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{4\times\frac{x}{2}\times\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{4}{2}\times\frac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\times\frac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}=2\times 1\times 1=2$$

تمرین: حد توابع زیر را بدست آورید.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2}{3x}.\sin\frac{3}{2}x$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}$$

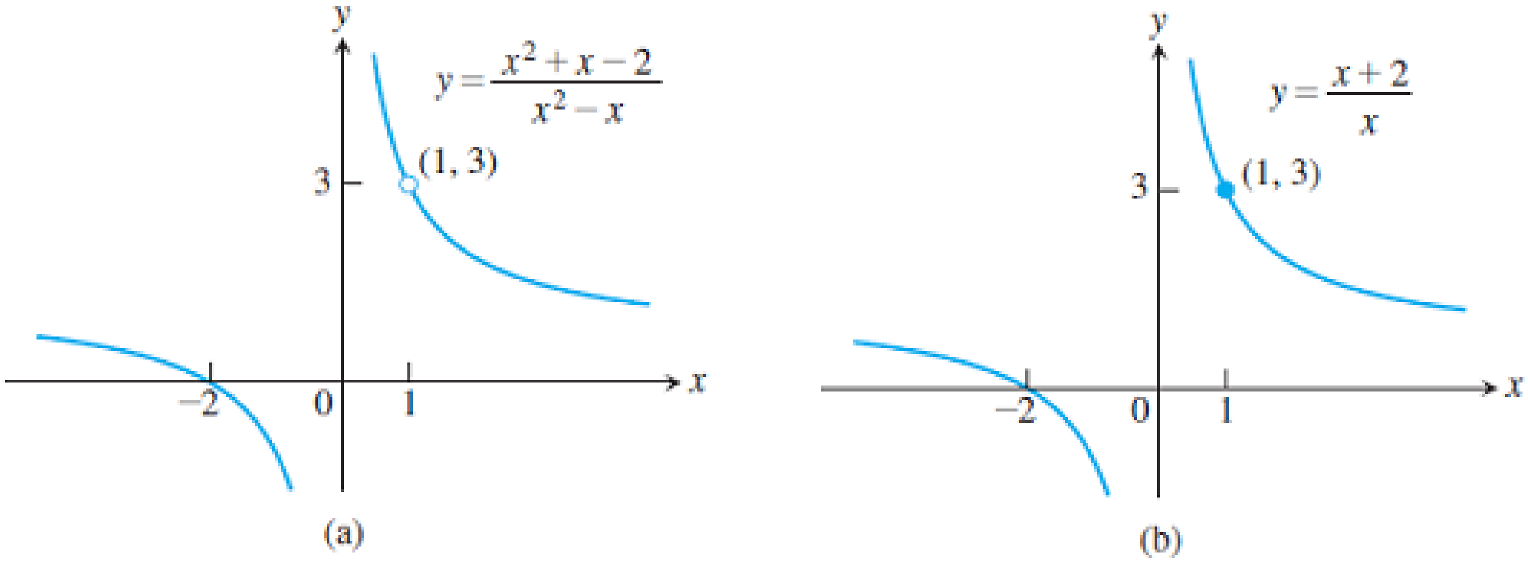
۵. استفاده از قاعده ی هوپیتال

یکی دیگر از روش های رفع ابهام حالت $\frac{0}{0}$ استفاده از قاعده ی هوپیتال می باشد، این روش را به عنوان کاربرد مشتق ، بعد از معرفی مفهوم مشتق و روش های مشتق گیری، توضیح می دهیم.

✓مثال:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x} = \ ?$$

$$\frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x} = \frac{(x - 1)(x + 2)}{x(x - 1)} = \frac{x + 2}{x}, \qquad \text{if } x \neq 1.$$



$$\boxed{\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x} = \lim_{x \to 1} \frac{x + 2}{x} = \frac{1 + 2}{1} = 3.}$$

✓مثال:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+100}-10}{x^2} = ?$$

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x^2+100}-10}{x^2} &= \frac{\sqrt{x^2+100}-10}{x^2}\cdot\frac{\sqrt{x^2+100}+10}{\sqrt{x^2+100}+10}\\ &= \frac{x^2+100-100}{x^2(\sqrt{x^2+100}+10)}\\ &= \frac{x^2}{x^2(\sqrt{x^2+100}+10)}\\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2+100}+10}. \qquad x \neq 0.\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+100}-10}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x^2+100}+10}\\ &= \frac{1}{\sqrt{0^2+100}+10}\\ &= \frac{1}{20} = 0.05.\end{aligned}}$$

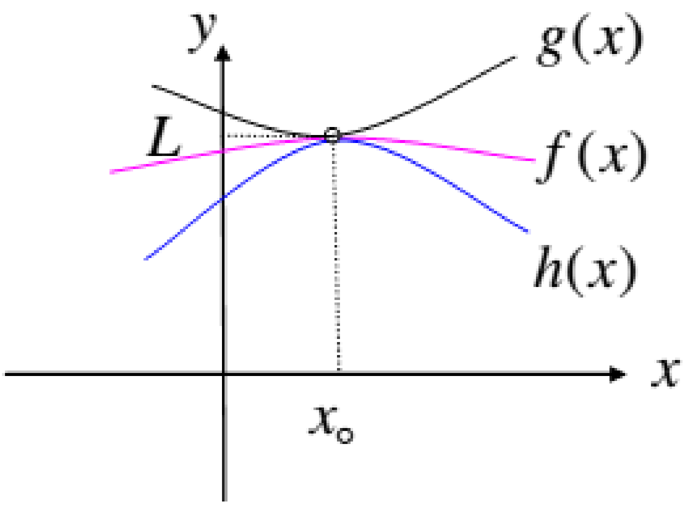
$\boxed{2}$ **THEOREM** If $f(x) \leqslant g(x)$ when x is near a (except possibly at a) and the limits of f and g both exist as x approaches a, then

$$\lim_{x \to a} f(x) \leqslant \lim_{x \to a} g(x)$$

☑ قضیه ی فشردگی

فرض کنید به ازاء هر x از بازه ای مانند I که شامل نقطه ی x_0 است، مگر احتمالاً در x_0 داشته باشیم.

$$h(x) \le f(x) \le g(x)$$



در این صورت اگر $\lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = L$.

آنگاه $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$

EXAMPLE 11 Show that $\lim_{x \to 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0$.

SOLUTION First note that we **cannot** use

$$\lim_{x \to 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \to 0} x^2 \cdot \lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$$

because $\lim_{x \to 0} \sin(1/x)$ does not exist (see Example 4 in Section 2.2). However, since

$$-1 \leqslant \sin \frac{1}{x} \leqslant 1$$

we have, as illustrated by Figure 8,

$$-x^2 \leqslant x^2 \sin \frac{1}{x} \leqslant x^2$$

We know that

$$\lim_{x \to 0} x^2 = 0 \qquad \text{and} \qquad \lim_{x \to 0} (-x^2) = 0$$

Taking $f(x) = -x^2$, $g(x) = x^2 \sin(1/x)$, and $h(x) = x^2$ in the Squeeze Theorem, we obtain

$$\lim_{x \to 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0$$

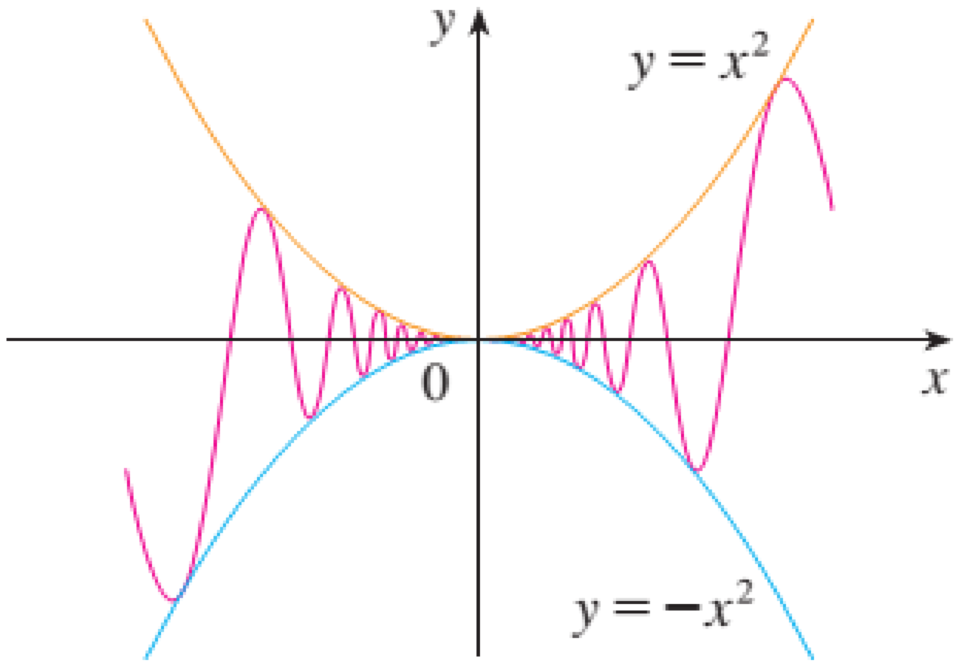


FIGURE 8
$y = x^2 \sin(1/x)$

تمرین: به کمک قضیه ی فشردگی ثابت کنید که $\lim\limits_{x \to ۰} x.\sin\frac{۱}{x} = ۰$

حل: واضح است که

$$\begin{cases} -۱ \le \sin\frac{۱}{x} \le ۱ \\ x > ۰ \end{cases} \xrightarrow{\times x} -x \le x\sin\frac{۱}{x} \le x \xrightarrow{\lim\limits_{x \to ۰^+}(-x) = \lim\limits_{x \to ۰^+} x = ۰}$$

$$\lim_{x \to ۰^+} x\sin\frac{۱}{x} = ۰$$

$$\begin{cases} -۱ \le \sin\frac{۱}{x} \le ۱ \\ x < ۰ \end{cases} \xrightarrow{\times x} -x \ge x\sin\frac{۱}{x} \ge x \to x \le x\sin\frac{۱}{x} \le -x$$

$$\xrightarrow{\lim\limits_{x \to ۰^-}(-x) = \lim\limits_{x \to ۰^-} x = ۰} \lim_{x \to ۰^-} x\sin\frac{۱}{x} = ۰$$

$$\therefore \lim_{x \to ۰} x\sin\frac{۱}{x} = ۰$$

✓مثال: حد $\lim\limits_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right]$ را در صورت وجود بیابید.

حل: می‌دانیم برای هر $x\in\mathbb{R}$ داریم $x-1 \leqslant [x] \leq x$ بنابراین

$$\frac{1}{x}-1 \leqslant \left[\frac{1}{x}\right] \leqslant \frac{1}{x}$$

$$\text{if} \quad x>0 \qquad 1-x \leq x\left[\frac{1}{x}\right] \leq 1$$

$$\text{if} \quad x<0 \qquad 1 \leqslant x\left[\frac{1}{x}\right] \leq 1-x$$

بنابراین طبق قضیه فشردگی چون $\lim\limits_{x\to 0} 1 = \lim\limits_{x\to 0} 1-x = 1$ داریم:

$$\lim_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right] = 1$$

توجه : به کمک قضیه ی فشردگی ثابت می شود که $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}=1$ و به طور کل اگر $\theta(x)$ به سمت صفر میل کند، در این صورت $\lim_{\theta(x)\to 0}\frac{\sin\theta(x)}{\theta(x)}=1$

نتیجه قضیه فشردگی

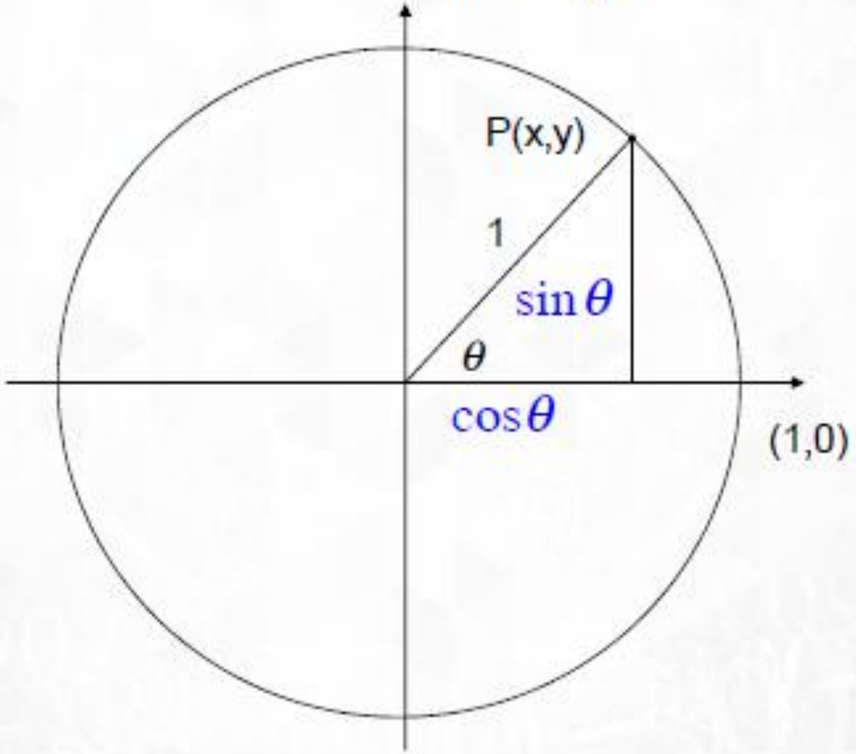
❖قضیه: فرض کنیم تابع f در یک همسایگی محذوف a کراندار باشد و $\lim_{x\to a} g(x)=0$.
آن‌گاه: $\lim_{x\to a} f(x)g(x)=0$.

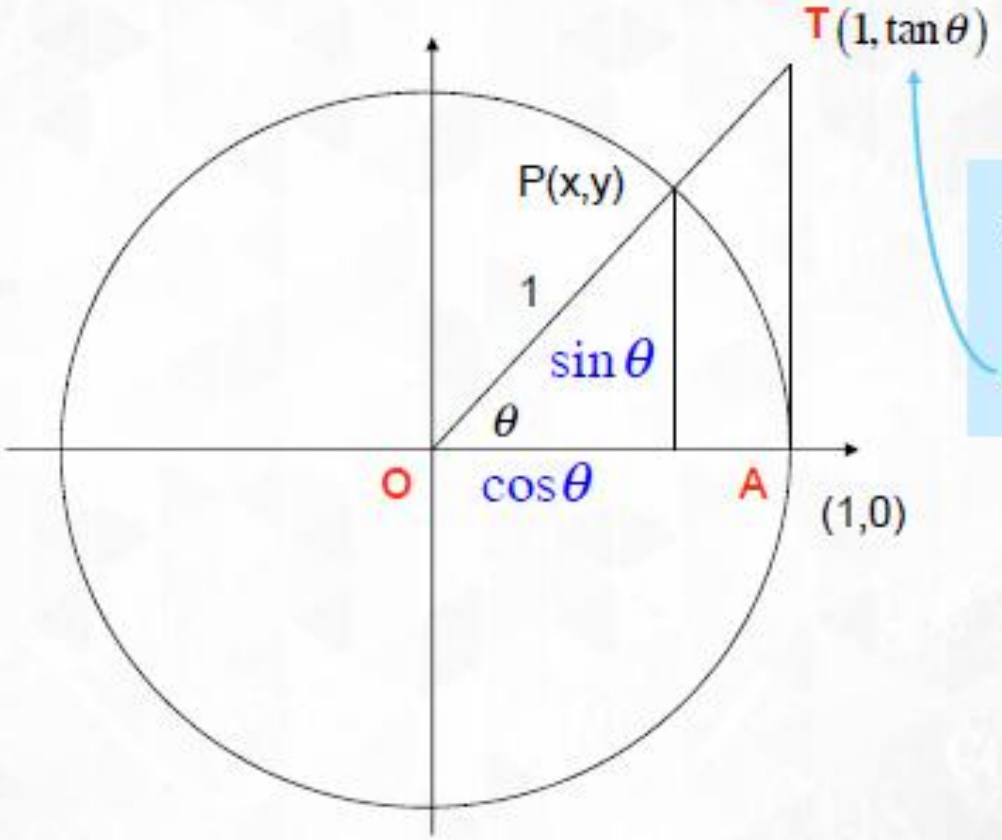
تمرین: به کمک قضیه ی فشردگی ثابت کنید که

$$\lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x}=0$$

اثبات حد به روش هندسی

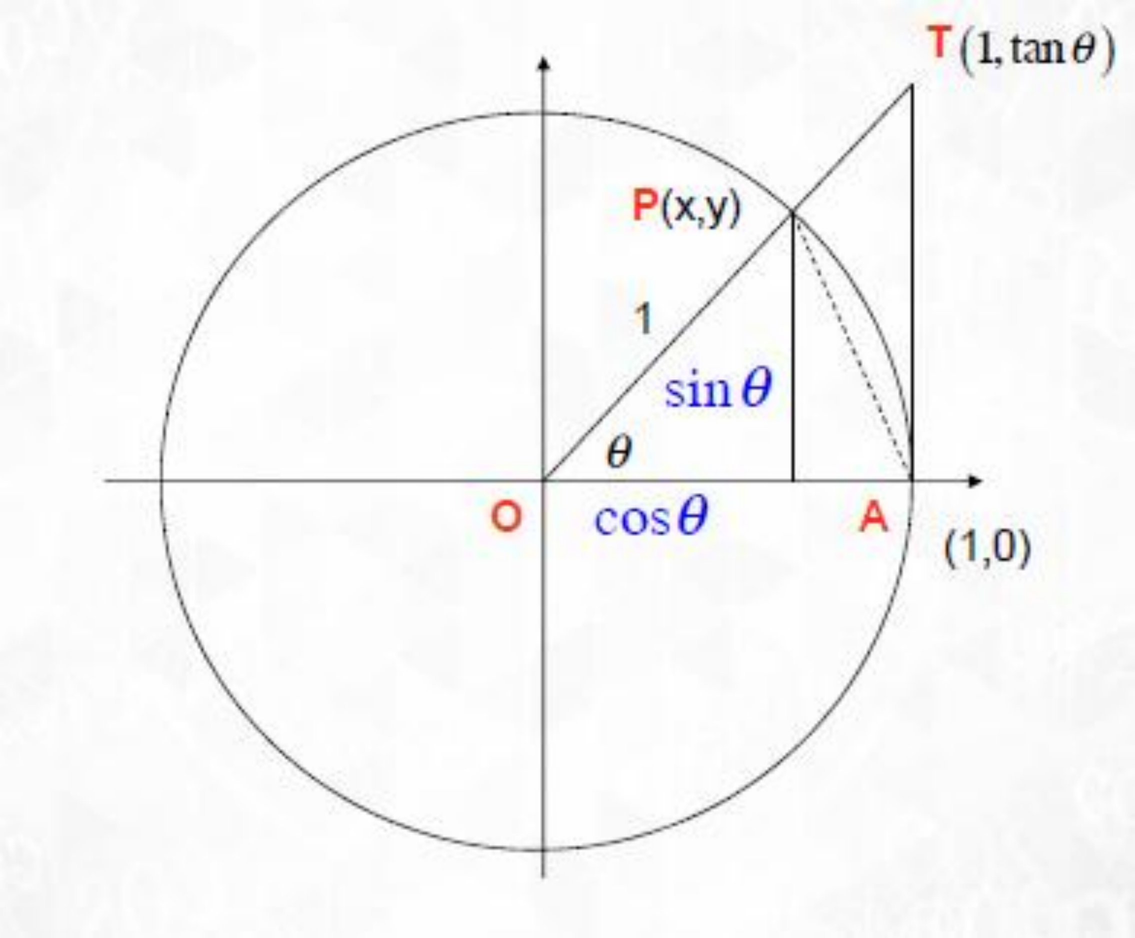
❖**مثال:** نشان می‌دهیم: $\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin(\theta)}{\theta} = 1$



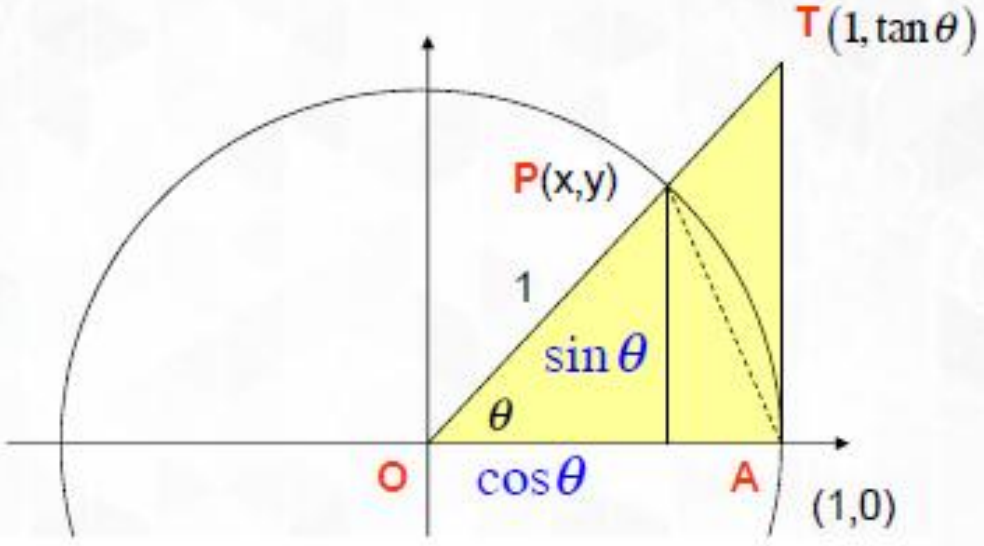


$$\frac{AT}{1} = \tan\theta$$

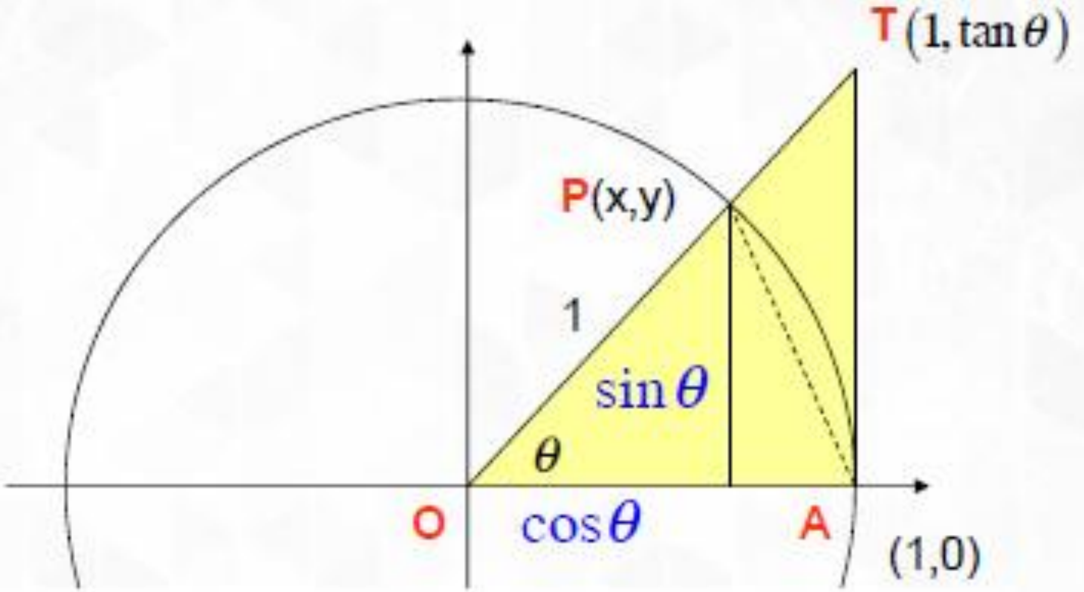
$$AT = \tan\theta$$



T $(1, \tan\theta)$
P(x,y)
1
$\sin\theta$
θ
O
$\cos\theta$
A
(1,0)



Area $\triangle AOP \le$ Area sector $AOP \le$ Area $\triangle$OAT



$$\text{Area } \triangle AOP \le \text{Area sector } AOP \le \text{Area } \triangle \text{OAT}$$

$$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot \sin\theta \quad \le \quad \frac{\theta}{2} \quad \le \frac{1}{2}\cdot 1\cdot \tan\theta$$

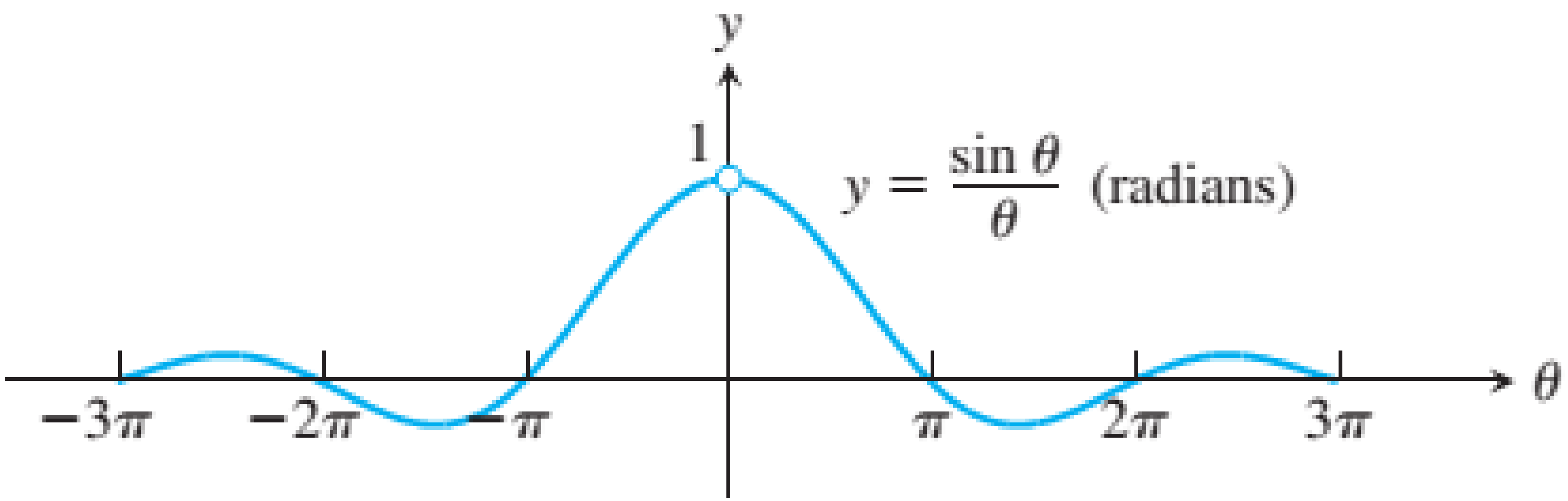
$$\Rightarrow \sin(\theta) \le \theta \le \tan(\theta)$$

$$\Rightarrow 1 \le \frac{\theta}{\sin(\theta)} \le \frac{1}{\cos(\theta)}$$

$$\Rightarrow \cos(\theta) \le \frac{\sin(\theta)}{\theta} \le 1$$

$$\Rightarrow \lim_{\theta \to 0} \cos(\theta) \le \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin(\theta)}{\theta} \le \lim_{\theta \to 0} 1$$

$$\Rightarrow 1 \le \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin(\theta)}{\theta} \le 1 \qquad \Rightarrow \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin(\theta)}{\theta} = 1$$



y
1
$y = \dfrac{\sin\theta}{\theta}$ (radians)
θ
-3π
-2π
$-\pi$
π
2π
3π

4 **DEFINITION** Let f be a function defined on both sides of a, except possibly at a itself. Then

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

means that the values of $f(x)$ can be made arbitrarily large (as large as we please) by taking x sufficiently close to a, but not equal to a.

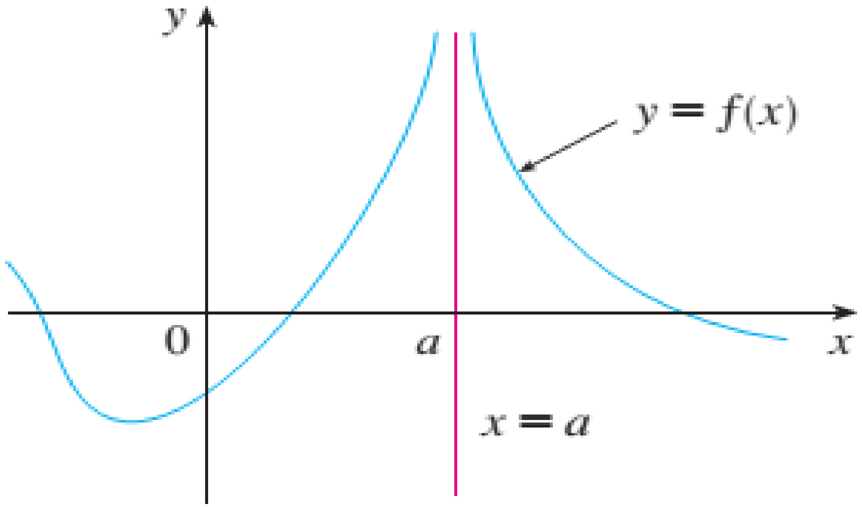


FIGURE 12
$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$

5 DEFINITION Let f be defined on both sides of a, except possibly at a itself. Then

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

means that the values of $f(x)$ can be made arbitrarily large negative by taking x sufficiently close to a, but not equal to a.

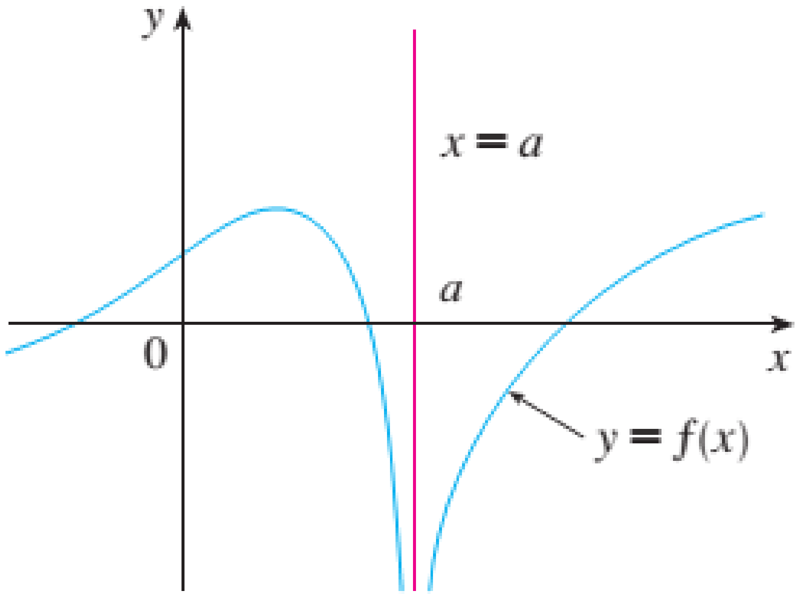
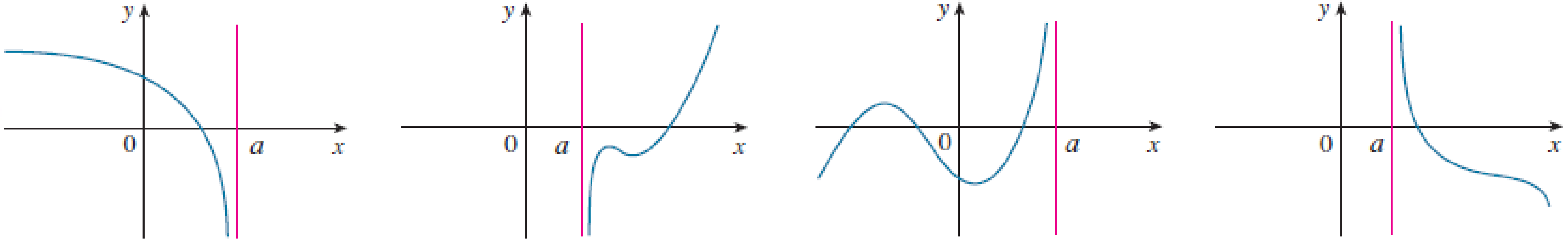


FIGURE 13
$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$

★ نکته: به صورت مشابه می‌توان حد بی‌نهایت را به حد چپ و راست تعمیم داد.



(c) $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$

(d) $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

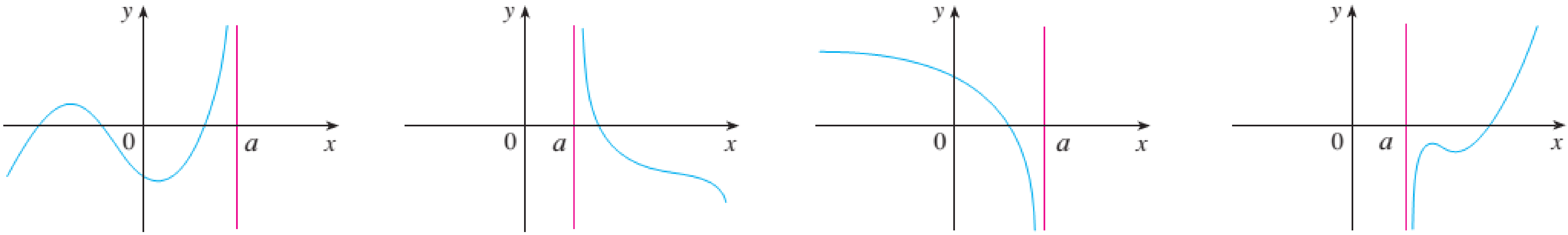
(a) $\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty$

(b) $\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$

6 **DEFINITION** The line $x = a$ is called a **vertical asymptote** of the curve $y = f(x)$ if at least one of the following statements is true:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$$



(a) $\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty$ (b) $\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$ (c) $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$ (d) $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

EXAMPLE 9 Find $\lim_{x \to 3^+} \frac{2x}{x-3}$ and $\lim_{x \to 3^-} \frac{2x}{x-3}$.

SOLUTION If x is close to 3 but larger than 3, then the denominator $x - 3$ is a small positive number and $2x$ is close to 6. So the quotient $2x/(x-3)$ is a large *positive* number. Thus, intuitively, we see that

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{2x}{x-3} = \infty$$

Likewise, if x is close to 3 but smaller than 3, then $x - 3$ is a small negative number but $2x$ is still a positive number (close to 6). So $2x/(x-3)$ is a numerically large *negative* number. Thus

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{2x}{x-3} = -\infty$$

The graph of the curve $y = 2x/(x-3)$ is given in Figure 15. The line $x = 3$ is a vertical asymptote. ■

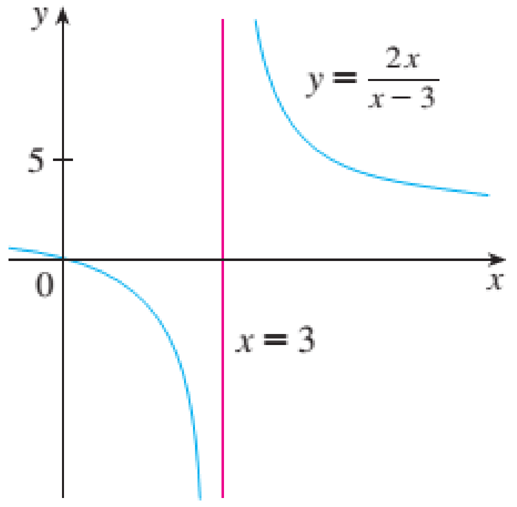
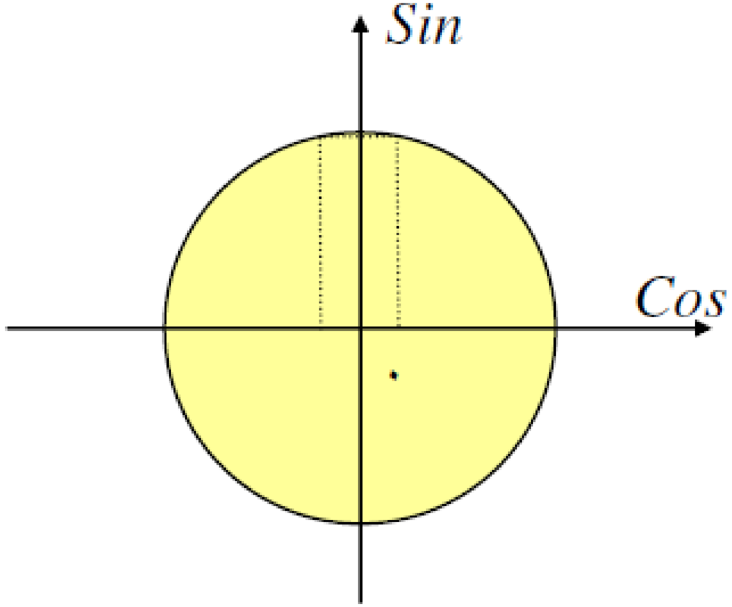


FIGURE 15

تمرین: نشان دهید که تابع $f(x)=\tan x$ در نقطه ی $x=\frac{\pi}{۲}$ دارای حد نیست.

حل:



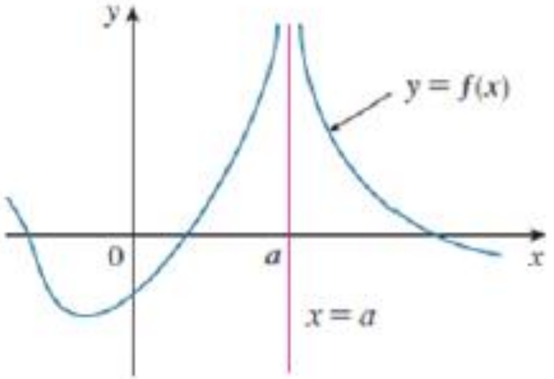
ربع دوم $x \to \frac{\pi}{۲}^{+} \to x > \frac{\pi}{۲} \to \cos x < ۰$

ربع اول $x \to \frac{\pi}{۲}^{-} \to x < \frac{\pi}{۲} \to \cos x > ۰$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{۲}^{+}} \tan x = \lim_{x \to \frac{\pi}{۲}^{+}} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin \frac{\pi}{۲}^{+}}{\cos \frac{\pi}{۲}^{+}} = \frac{۱^{-}}{۰^{-}} = -\infty$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{۲}^{-}} \tan x = \lim_{x \to \frac{\pi}{۲}^{-}} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin \frac{\pi}{۲}^{-}}{\cos \frac{\pi}{۲}^{-}} = \frac{۱^{-}}{۰^{+}} = +\infty$$

حد بی‌نهایت



❖**تعریف:** گوییم تابع f در نقطه‌ی a دارای حد مثبت بی‌نهایت $(+\infty)$ است هرگاه:

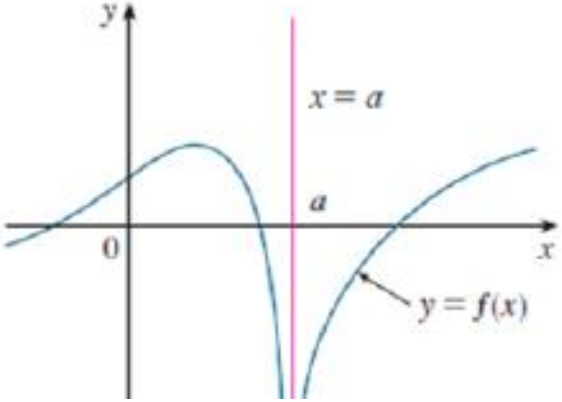
$$\forall M>0\quad \exists\delta>0:\quad 0<|x-a|<\delta \Rightarrow \quad f(x)>M$$

و می‌نویسیم: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$.

❖**تعریف:** گوییم تابع f در نقطه‌ی a دارای حد منفی بی‌نهایت $(-\infty)$ است هرگاه:

$$\forall M>0\quad \exists\delta>0:\quad 0<|x-a|<\delta \Rightarrow \quad f(x)<-M$$

و می‌نویسیم: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$.

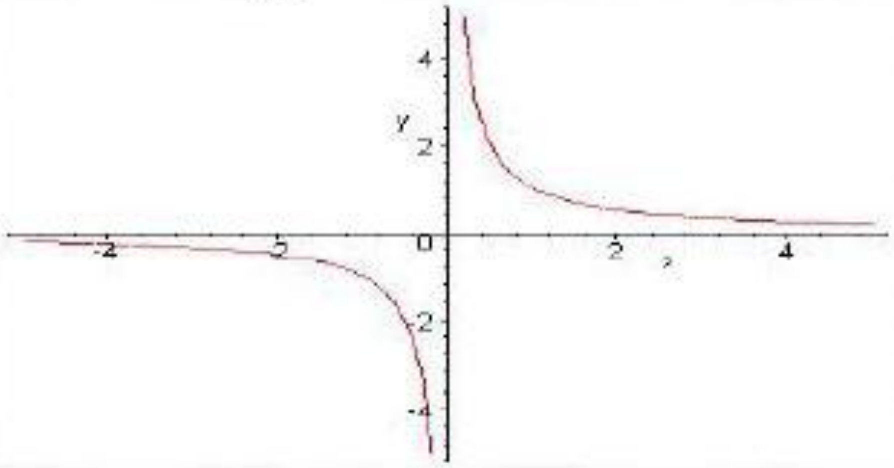


حد بی‌نهایت

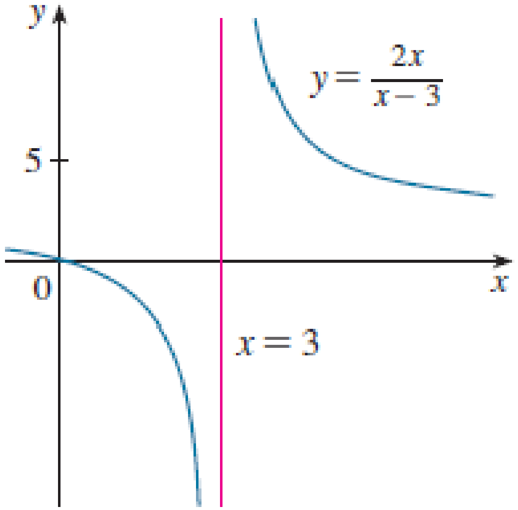
✓مثال: $f(x)=\dfrac{1}{x}$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty \quad \forall M>0 \quad \delta:=\frac{1}{M} \quad 0<x<\delta \;\Rightarrow\; \frac{1}{x}>\frac{1}{\delta}=M$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=-\infty \quad \forall M>0 \quad \delta:=\frac{1}{M} \quad 0<-x<\delta \Rightarrow 0>x>-\delta \Rightarrow \frac{1}{x}<-\frac{1}{\delta}=-M$$

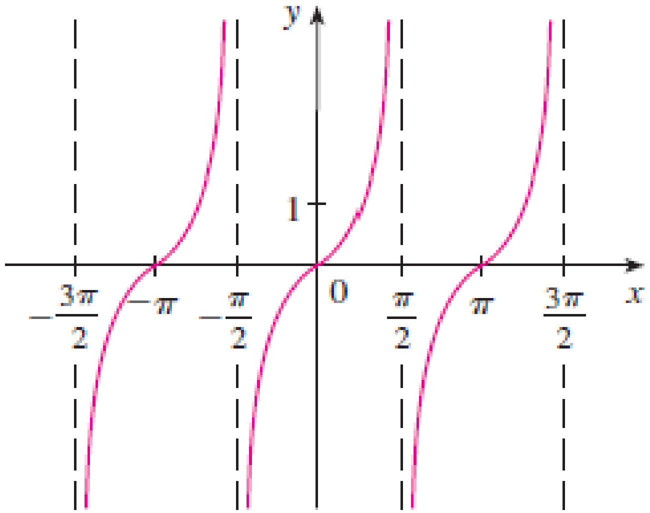


مثال:



$$\lim_{x \to 3^+} \frac{2x}{x-3} = \infty$$

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{2x}{x-3} = -\infty$$



$$\lim_{x \to (\pi/2)^+} \tan x = -\infty$$

$$\lim_{x \to (\pi/2)^-} \tan x = \infty$$

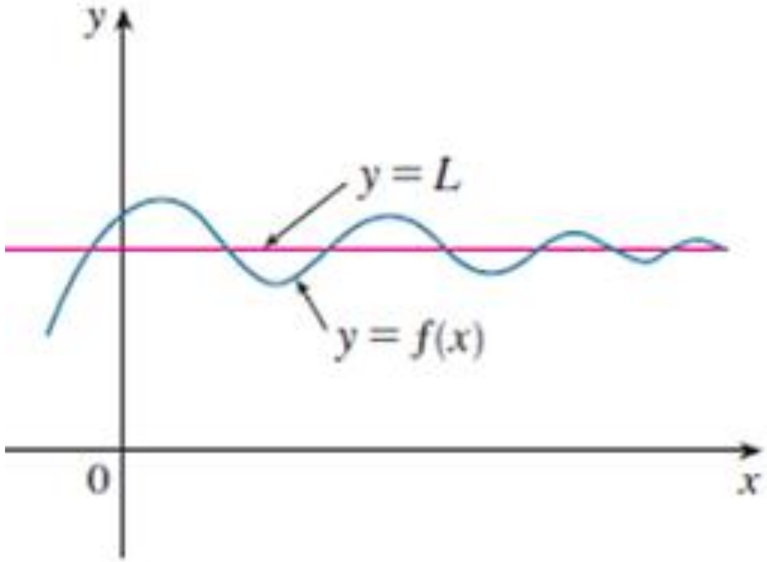
حد در بی‌نهایت

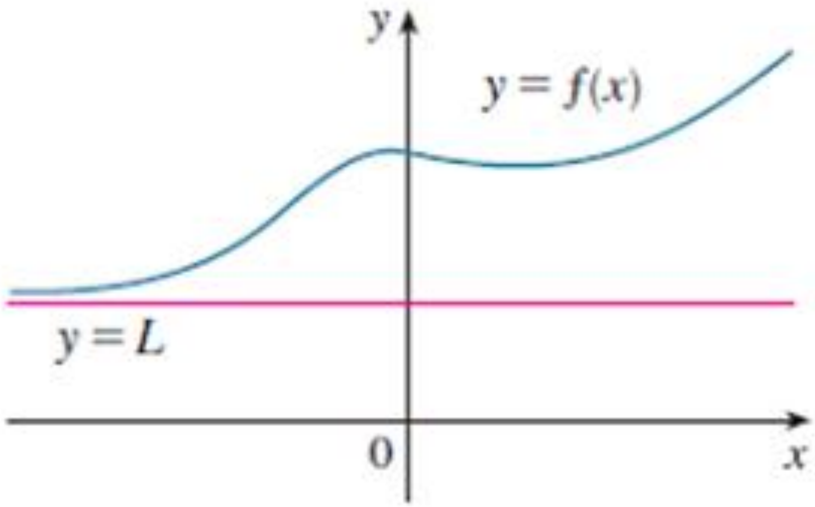
❖**تعریف:** گوییم تابع f در $+\infty$ دارای حد l است و می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$، هرگاه:

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists N>0 \quad \forall x>N \rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon$$

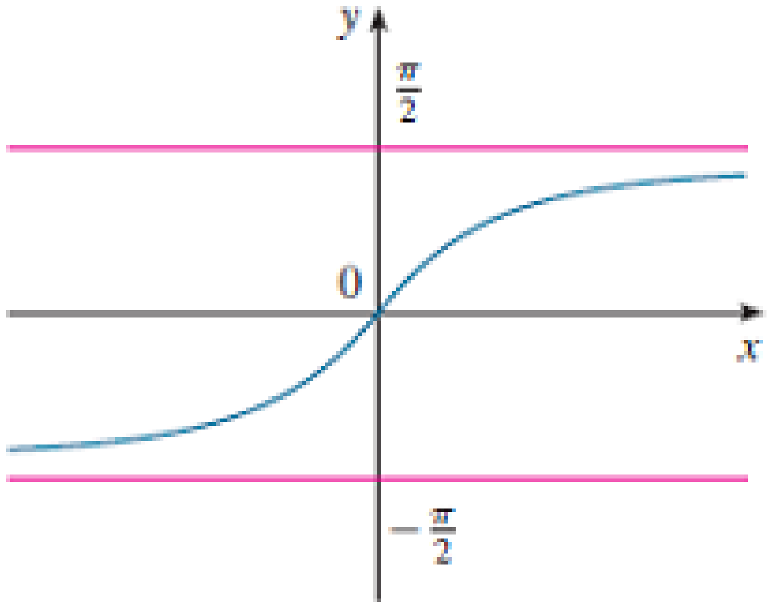
به طور مشابه گوییم تابع f در $-\infty$ دارای حد l است و می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=l$، هرگاه:

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists N>0 \quad \forall x<-N \rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon$$





✓مثال:



$$\lim_{x \to -\infty} \tan^{-1} x = -\frac{\pi}{2} \qquad \lim_{x \to \infty} \tan^{-1} x = \frac{\pi}{2}$$

محاسبه حد در بی‌نهایت

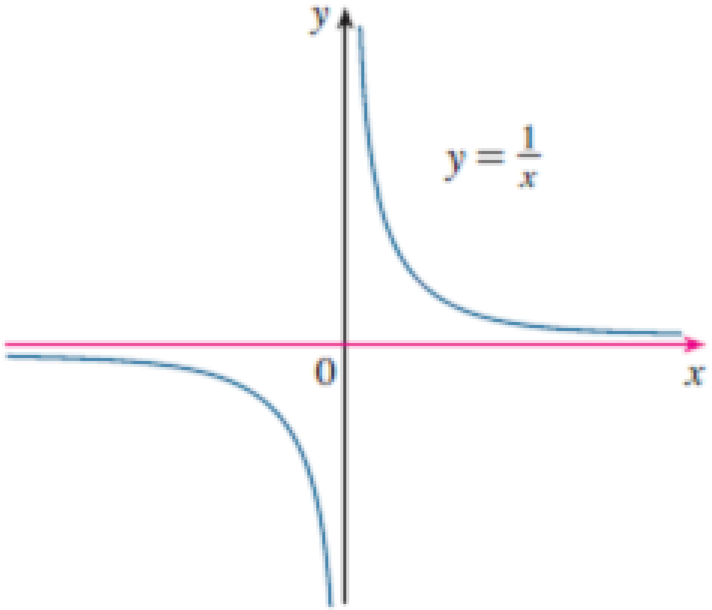
✓**مثال۲:** حاصل حد روبرو را بیابید. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}-x$

➢**حل:**

$$\sqrt{x^2+x}-x \overset{\text{ضرب در مزدوج}}{\overbrace{=}} \frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x} \overset{x>0}{\overbrace{=}} \frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x}}+x}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

مثال:



$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

7 If n is a positive integer, then

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^n} = 0 \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

مثال:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-x-2}{5x^2+4x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{3x^2-x-2}{x^2}}{\dfrac{5x^2+4x+1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}}{5+\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{x^2}}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3-\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(5+\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}3-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}-2\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty}5+4\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}}$$

$$=\frac{3-0-0}{5+0+0}\qquad\text{[by (7)]}$$

$$=\frac{3}{5}$$

مثال:

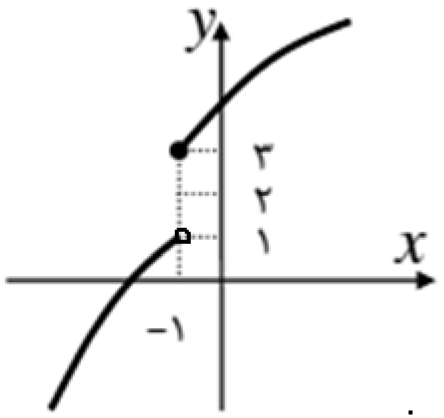
$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+1)-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

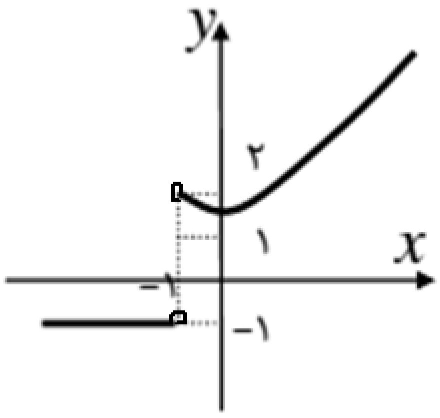
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+1}$$

$$=\frac{0}{\sqrt{1+0}+1}=0$$

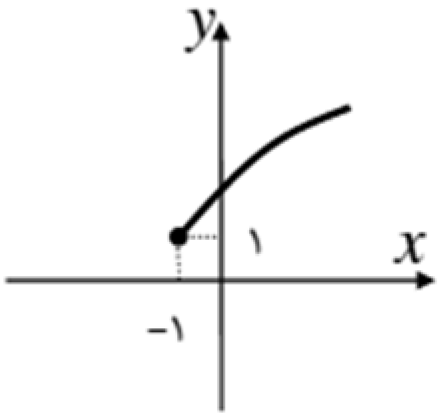
تمرین: در هر مورد حد چپ و حد راست تابع و مقدار تابع در نقطه ی $x=-1$ را تعیین کنید.



(۱)



(۲)



(۳)

تمرین: با توجه به تابع زیر حد راست وحد چپ و مقدار تابع را درنقطه ی $x=1$ بدست آورید.

$$f(x)=\begin{cases} 2x+1 & x>1 \\ x^2+2x-6 & x\le 1 \end{cases}$$

تمرین: حد توابع زیر را در نقطه ی داده شده در صورت وجود بدست آورید.

$$\lim_{x\to ۲}\frac{|x-۲|}{x-۲} \qquad \lim_{x\to ۳}([x]+[-x]) \qquad \lim_{x\to ۳}\sqrt{x^{۲}-۶x+۹} \qquad \lim_{x\to ۱}(|x-۱|+۲)$$

$$\lim_{x\to ۲^{+}}\frac{x+۲}{x-۲}= \qquad \lim_{x\to ۲^{-}}\frac{x+۲}{x-۲}=$$

در تابع زیر مقدار a را طوری بیابید که تابع در نقطه ی $x=۳$ حد داشته باشد.

$$f(x)=\begin{cases} ax^{۲}+۲x-۱ & x<۳ \\ ۲ & x=۳ \\ x^{۲}-۵ & x>۳ \end{cases}$$

تمرین: حد های زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{۲x^{۲}+x}{۳x^{۲}-۵x+۱}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-x^{۳}+۲x}{x+x^{۲}-۱}$$

تمرین برای حل: حد توابع زیر را بدست آورید.

$$\lim_{x \to -۳^-} \frac{-۲}{(x+۳)^۲} =$$

$$\lim_{x \to ۲} \frac{۴}{(x-۲)^۲} =$$

حد بی‌نهایت در بی‌نهایت

❖**تعریف:** گوییم تابع f در $+\infty$ دارای حد $+\infty$ است و می‌نویسیم $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ هرگاه:

$$\forall M > 0 \quad \exists N > 0 \quad \forall x > N \ \Rightarrow \quad f(x) > M$$

و به طور مشابه حالت‌های زیر تعریف می‌شوند.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

✓مثال:

$$\lim_{x\to\infty}(x^2-x)=\lim_{x\to\infty}x^2-\lim_{x\to\infty}x$$

$$\cancel{=\infty-\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty}(x^2-x)=\lim_{x\to\infty}x(x-1)=\infty$$

✓مثال:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x}{3-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{\dfrac{3}{x}-1}=-\infty$$

حد بی‌نهایت تقسیم توابع

❖قضیه: اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=c\neq 0$ آن‌گاه:

الف) اگر $c>0$ و f در همسایگی محذوف a مثبت باشد، $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)}{f(x)}=+\infty$

ب) اگر $c>0$ و f در همسایگی محذوف a منفی باشد، $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)}{f(x)}=-\infty$

ج) اگر $c<0$ و f در همسایگی محذوف a مثبت باشد، $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)}{f(x)}=-\infty$

د) اگر $c<0$ و f در همسایگی محذوف a منفی باشد، $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)}{f(x)}=+\infty$

حد بی‌نهایت ضرب توابع

❖ **قضیه:** اگر $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c \neq 0$ آن‌گاه:

الف) اگر $c > 0$ آن‌گاه: $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = +\infty$

ب) اگر $c < 0$ آن‌گاه: $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = -\infty$

قضیه به طور مشابه برای حالتی‌که $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ نیز برقرار است.

حد بی‌نهایت ضرب توابع

✓ مثال: حاصل $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+x}-x$ را بیابید.

➢ حل:

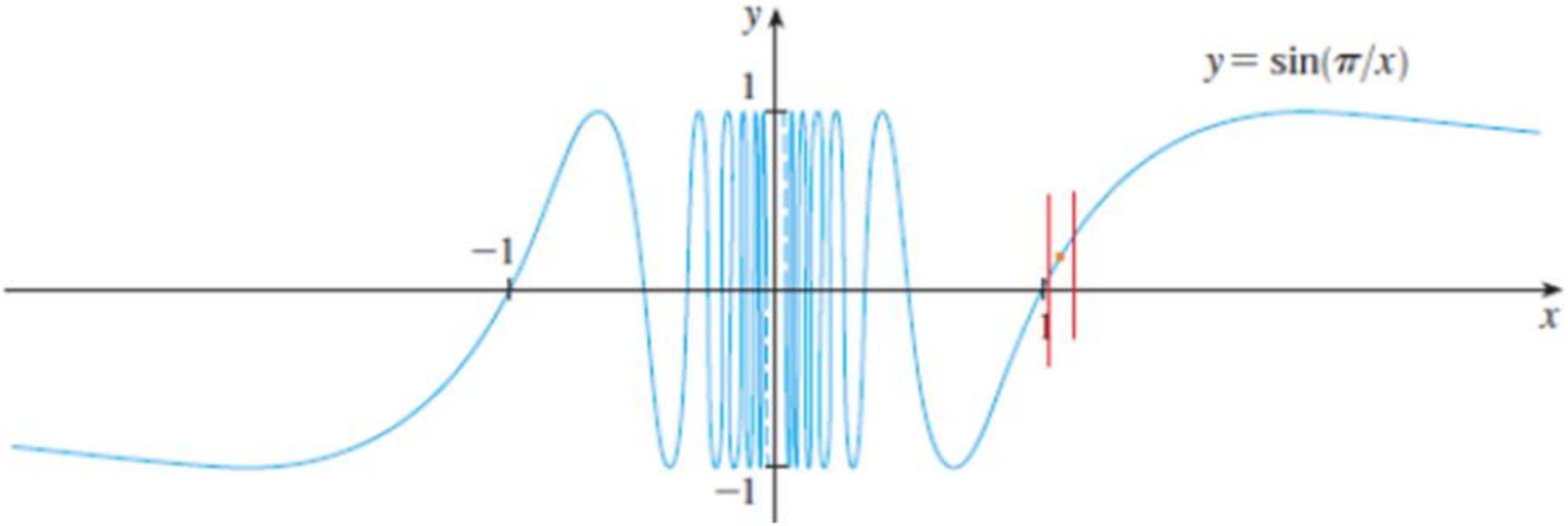
$$x<0 \Rightarrow \sqrt{x^2+x}-x=|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}-x=-x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)=\lim_{x\to-\infty}-x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)$$

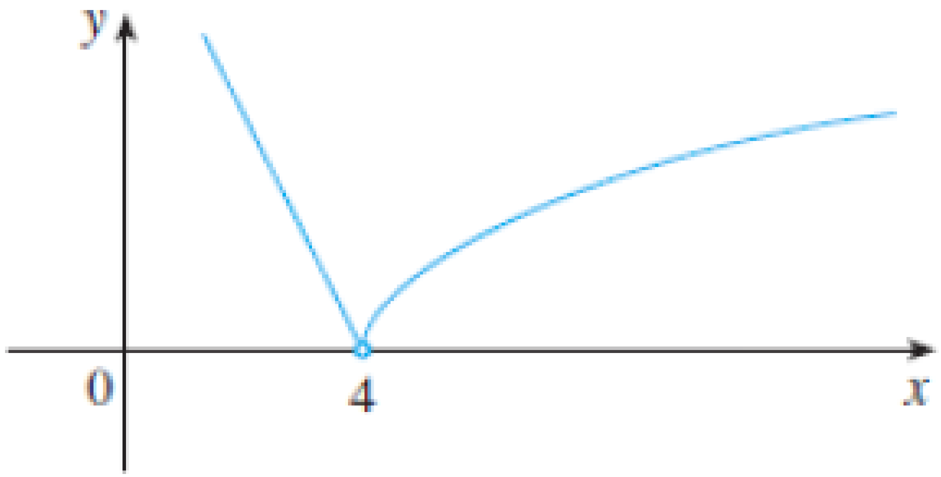
حال $\lim_{x\to-\infty}(-x)=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1=2$ و بنابر قضیه قبل:

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x}-x=+\infty$$

قضیه . فرض کنیم تابع f در نقطه a دارای حد باشد و $\lim_{x\to a} f(x) > 0$. در این صورت f در همسایگی **محذوف** نقطه a مثبت است.

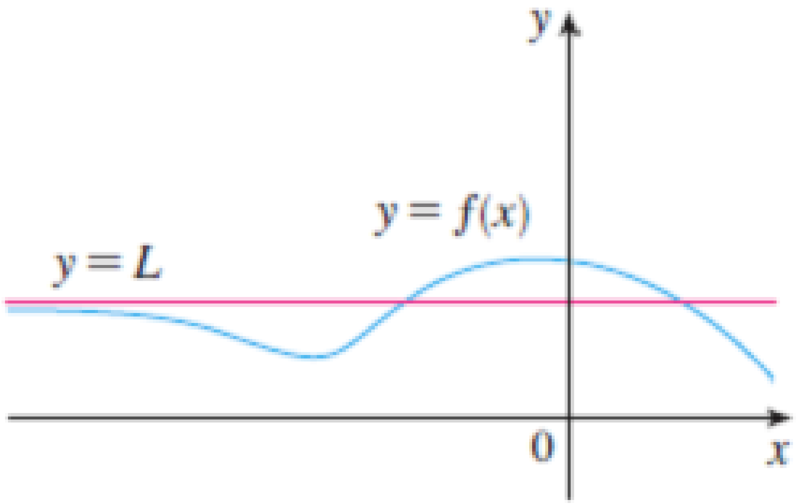


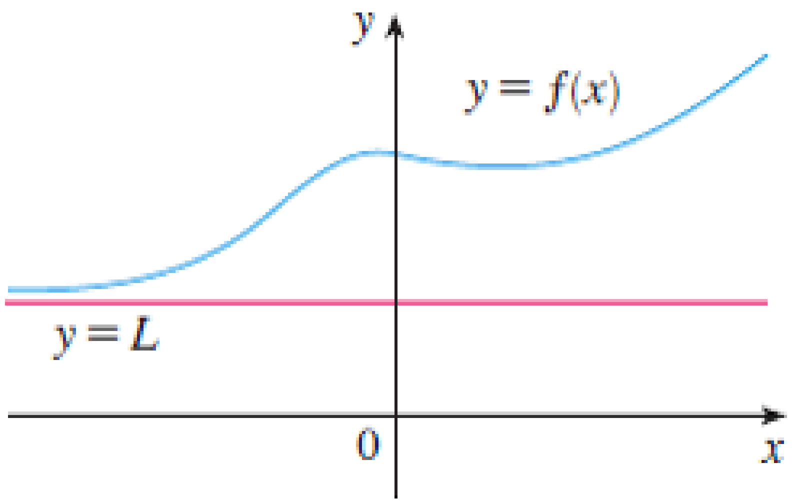
قضیه . فرض کنیم تابع f در نقطه a دارای حد باشد و در همسایگی نقطه a مثبت باشد. در این صورت $\lim_{x\to a} f(x) \geq 0$. f و لزوما مثبت نیست.



تعریف خط $y = L$ را مجانب افقی منحنی $y = f(x)$ می‌نامند، به‌شرطی که

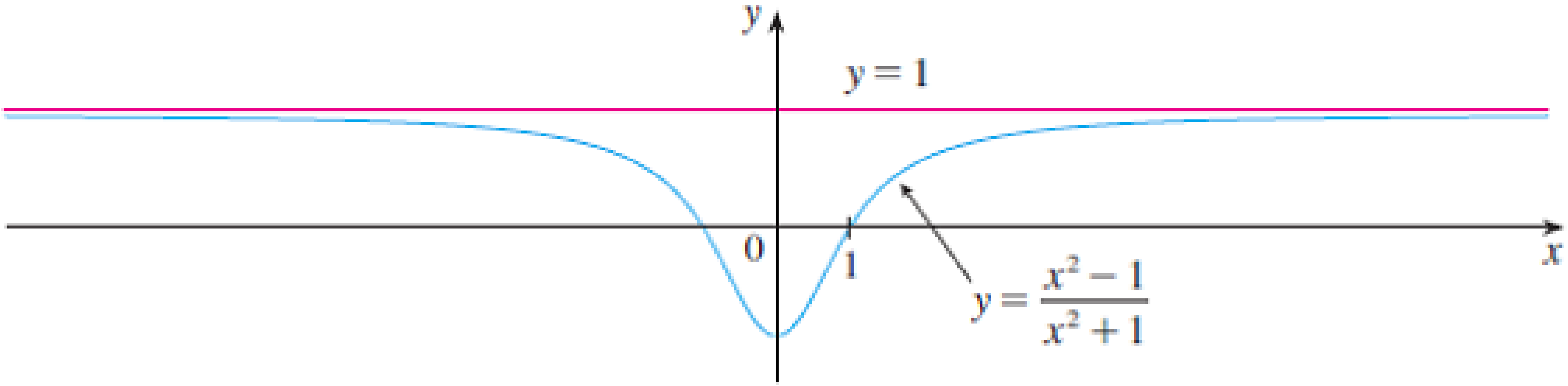
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L \quad \text{یا} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$





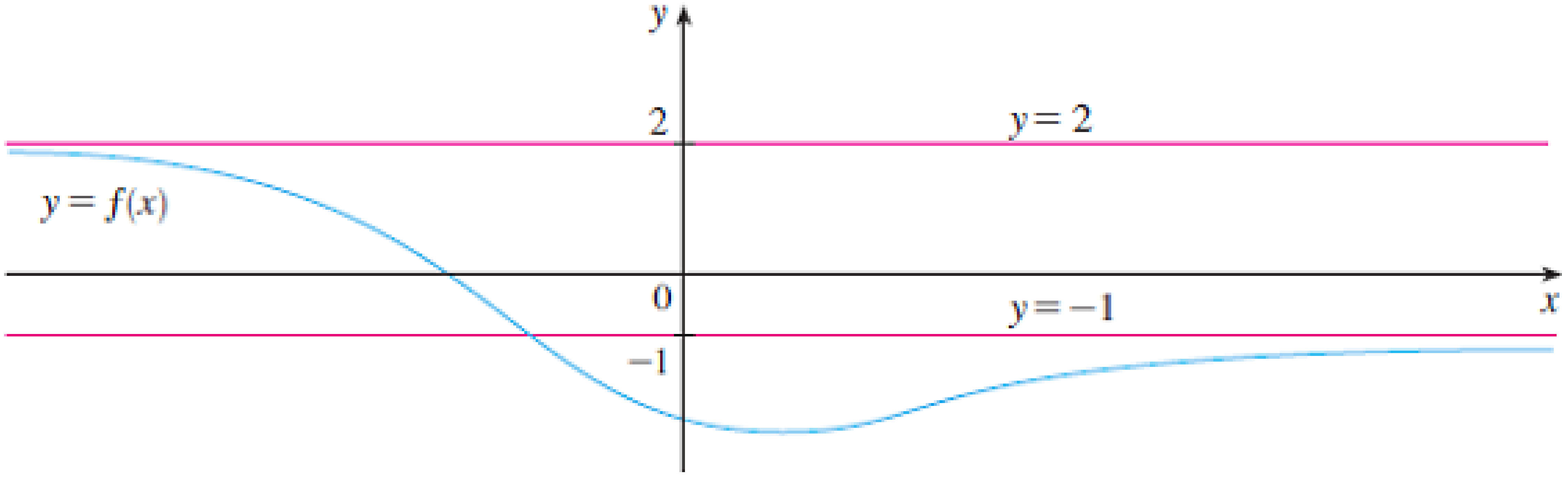
مثلاً، خط ۱ = y مجانب افقی منحنی‌ای است که در شکل ۱ نشان داده‌ایم، زیرا

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^۲ - ۱}{x^۲ + ۱} = ۱$$



برای منحنی $y = f(x)$ که در شکل ۴ رسم کرده‌ایم $y = -۱$ و $y = ۲$ هر دو مجانب افقی‌اند

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -۱, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = ۲$$



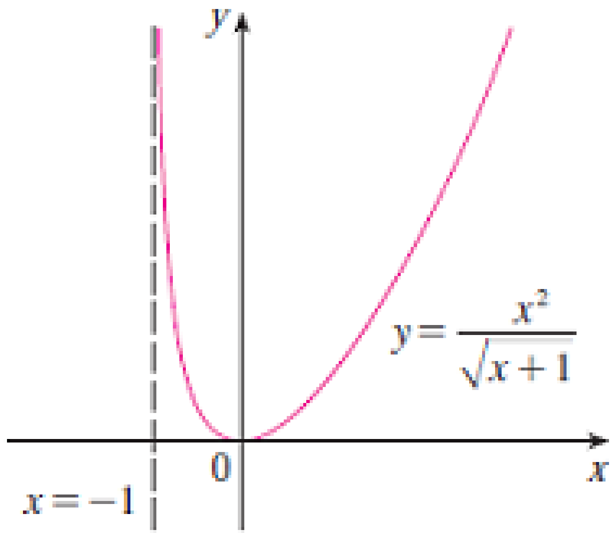
☑ مجانب قائم

خطی است که تابع در امتداد آن به بی نهایت میل می کند.یعنی

$$\lim_{x\to a^{+}} f(x) = +\infty \text{ یا } -\infty$$

$$\lim_{x\to a^{-}} f(x) = +\infty \text{ یا } -\infty$$

معادله ی مجانب قائم $\Leftarrow x = a$



مثال ۴ مجانبهای افقی و قائم نمودار تابع $f(x) = \frac{\sqrt{۲x^۲ + ۱}}{۲x - ۵}$ را پیدا کنید.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{3-\frac{5}{x}} \qquad \text{(since } \sqrt{x^2} = x \text{ for } x > 0\text{)}$$

$$= \frac{\lim_{x\to\infty} \sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{\lim_{x\to\infty}\left(3-\frac{5}{x}\right)} = \frac{\sqrt{\lim_{x\to\infty} 2 + \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2}}}{\lim_{x\to\infty} 3 - 5\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}}$$

$$= \frac{\sqrt{2+0}}{3-5\cdot 0} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

به این ترتیب خط $y = \frac{\sqrt{۲}}{۳}$ مجانب افقی نمودار f است.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{3-\frac{5}{x}}$$

$$= \frac{-\sqrt{2+\lim\limits_{x \to -\infty}\frac{1}{x^2}}}{3-5\lim\limits_{x \to -\infty}\frac{1}{x}} = -\frac{\sqrt{2}}{3}$$

درنتیجه خط $y = -\frac{\sqrt{۲}}{۳}$ نیز مجانب افقی است.

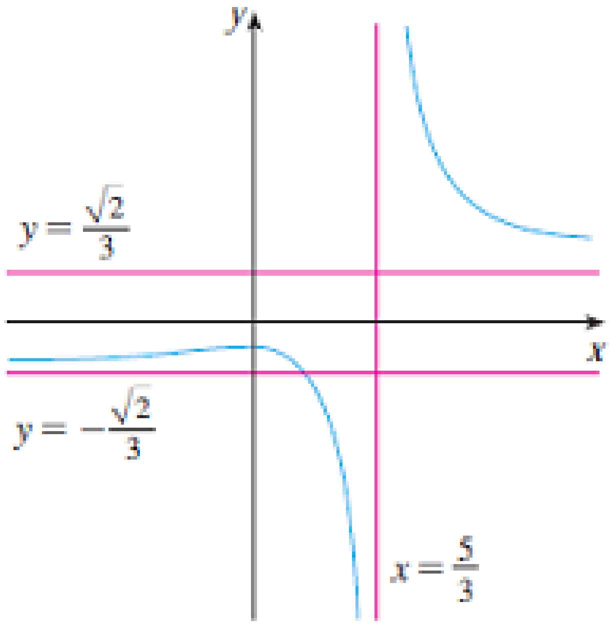
مجانب قائم احتمالی وقتی وجود دارد که مخرج، $۳x - ۵$، برابر با ۰ باشد، یعنی وقتی که $x = \frac{۵}{۳}$.
اگر x به $\frac{۵}{۳}$ نزدیک باشد و $x > \frac{۵}{۳}$، مخرج کسر به ۰ نزدیک است و $۳x - ۵$ مثبت است. صورت کسر، $\sqrt{۲x^{۲} + ۱}$، همواره مثبت است، درنتیجه $f(x)$ مثبت است. بنابراین

$$\lim_{x \to (5/3)^+} \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x - 5} = \infty$$

اگر x به $\frac{۵}{۳}$ نزدیک باشد اما $x < \frac{۵}{۳}$، آن‌وقت $۳x - ۵ < ۰$ و درنتیجه $f(x)$ خیلی کوچک و منفی است. بنابراین

$$\lim_{x \to (5/3)^-} \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x - 5} = -\infty$$

مجانب قائم $x = \frac{۵}{۳}$ است.



☑ پیوستگی

آشنایی با مفهوم پیوستگی برای بررسی دقیق تر رفتار توابع در بیشتر اوقات لازم و ضروری است. در اینجا مفهوم پیوستگی تابع را در یک نقطه و همچنین یک فاصله بررسی می کنیم.

الف) پیوستگی در یک نقطه

تابع $y=f(x)$ در نقطه ای به طول $x_\circ$ پیوسته گویند، اگر و فقط اگر سه شرط زیر برقرار باشد.

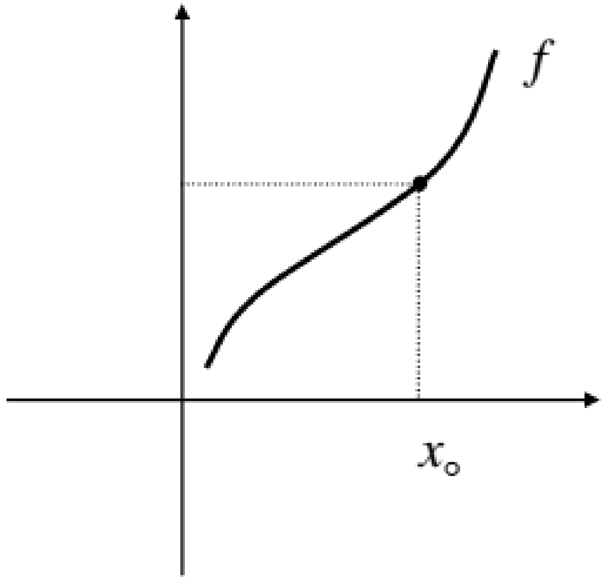
۱) مقدار $f(x_\circ)$ موجود باشد.

(یعنی تابع $x_\circ$ در دامنه ی تابع باشد.)

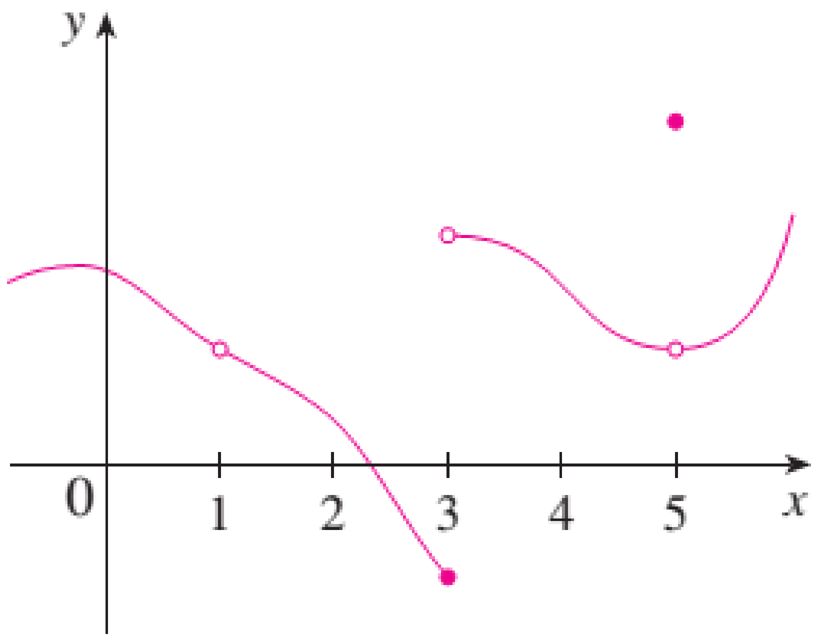
۲) مقدار $\lim\limits_{x\to x_\circ} f(x)$ موجود باشد.

(یعنی حد راست وحد چپ در این نقطه برابر باشند.)

۳) $\lim\limits_{x\to x_\circ} f(x)=f(x_\circ)$



اگر یکی از سه شرط فوق برقرار نباشد،تابع f را در نقطه ی $x_\circ$ ناپیوسته« گسسته»[1] می گویند.



y
0
1
2
3
4
5
x

نتیجه: تابع $y=f(x)$ در نقطه ای به طول $x_\circ$ پیوسته است، اگر و فقط اگر

$$\boxed{\lim_{x\to x_\circ^+} f(x)=\lim_{x\to x_\circ^-} f(x)=f(x_\circ)}$$

تمرین: در هر مورد پیوستگی تابع را در نقطه ی داده شده بررسی کنید.

$$f(x)=\begin{cases}-۲x+۳ & x\geq -۲\\ x^۲+۳ & x<-۲\end{cases} \quad : \quad x_\circ=-۲$$

تمرین: تابع زیر در نقطه ی $x_\circ = ۰$ پیوسته است. مقدار bو a را بیابید.

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{\sqrt{۱-\cos ۲x}} & x<۰ \\ a & x=۰ \\ [x]+b & x>۰ \end{cases}$$

حل:

مقدار $f(۰)=a$

حد راست $\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۰^+}([x]+b)=۰+b=b$

حد چپ $\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۰^-}\dfrac{\sin x}{\sqrt{۱-\cos ۲x}}=\lim\limits_{x\to ۰^-}\dfrac{\sin x}{\sqrt{۲\sin^۲ x}}=\lim\limits_{x\to ۰^-}\dfrac{\sin x}{\sqrt{۲}\,|\sin x|}=$

$$\lim_{x\to ۰^-}\frac{\sin x}{-\sqrt{۲}\sin x}=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\Rightarrow a=b=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

تمرین: در تابع $f(x)=k[x]+[x+1]$ مقدار k را طوری تعیین کنید که تابع در نقطه ی $x_0=1$ پیوسته باشد.

$$f(x)=k[x]+[x+1]=k[x]+[x]+1=(k+1)[x]+1$$

حد راست $\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}[(k+1)[x]+1]=(k+1)+1=k+2$

حد چپ $\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}[(k+1)[x]+1]=1$

مقدار $f(1)=(k+1)[1]+1=k+2$

$$\therefore k+2=1\Rightarrow k=-1$$

☑ پیوستگی راست و پیوستگی چپ در یک نقطه

اگر حد راست تابع با مقدار تابع در یک نقطه برابر باشد، می گویند تابع در آن نقطه پیوستگی راست دارد.

$$\boxed{\lim_{x \to x_\circ^+} f(x) = f(x_\circ)}$$

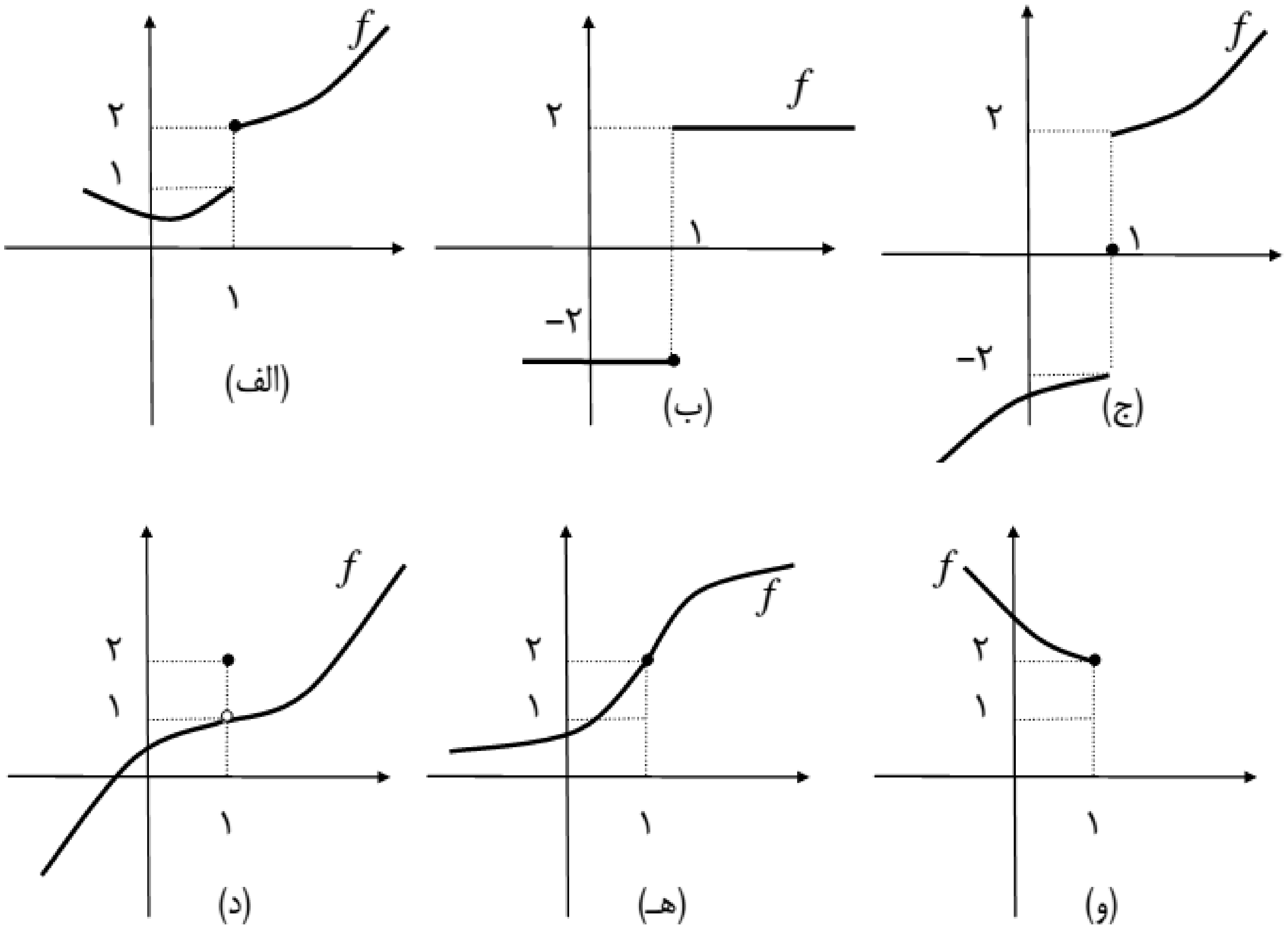
اگر حد چپ تابع با مقدار تابع در یک نقطه برابر باشد، می گویند تابع در آن نقطه پیوستگی چپ دارد.

$$\boxed{\lim_{x \to x_\circ^-} f(x) = f(x_\circ)}$$

نتیجه: یک تابع در یک نقطه پیوسته است هرگاه در این نقطه پیوستگی راست وپیوستگی چپ داشته باشد.

$$\lim_{x \to x_\circ^+} f(x) = \lim_{x \to x_\circ^-} f(x) = f(x_\circ)$$

تمرین: در هر مورد پیوستگی تابع داده شده را در نقطه ی $x_0 = 1$ بررسی کنید.



EXAMPLE 3 At each integer n, the function $f(x) = [\![x]\!]$ [see Figure 3(d)] is continuous from the right but discontinuous from the left because

$$\lim_{x \to n^+} f(x) = \lim_{x \to n^+} [\![x]\!] = n = f(n)$$

but

$$\lim_{x \to n^-} f(x) = \lim_{x \to n^-} [\![x]\!] = n - 1 \neq f(n)$$

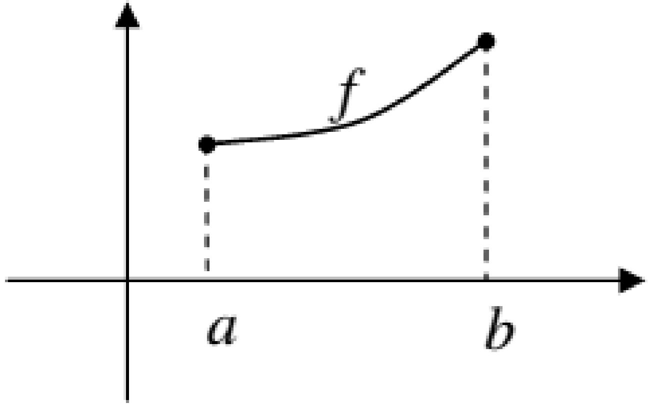
ب) پیوستگی در یک فاصله

تعریف۱: تابع $y=f(x)$ را در فاصله ای مانند $I=[a,b]$ پیوسته گویند، هرگاه

الف) در تمام نقاط فاصله ی (a,b) پیوسته باشد.

ب) در نقطه ی $x=a$ پیوستگی راست داشته باشد.

ج) در نقطه ی $x=b$ پیوستگی چپ داشته باشد.

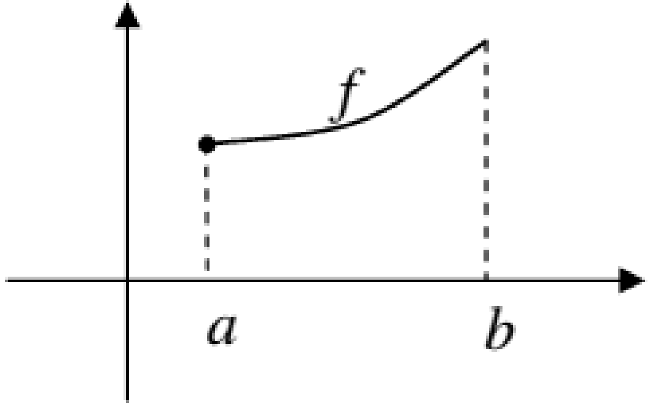


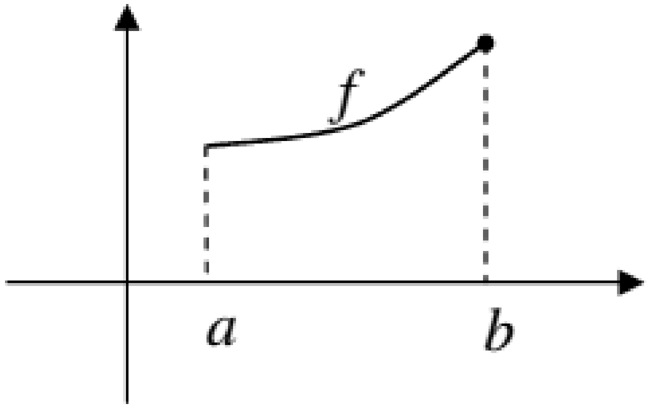
***

تعریف۲: تابع $y=f(x)$ را در فاصله ای مانند $I=[a,b)$ پیوسته گویند، هرگاه

الف) در تمام نقاط فاصله ی (a,b) پیوسته باشد.

ب) در نقطه ی $x=a$ پیوستگی راست داشته باشد.



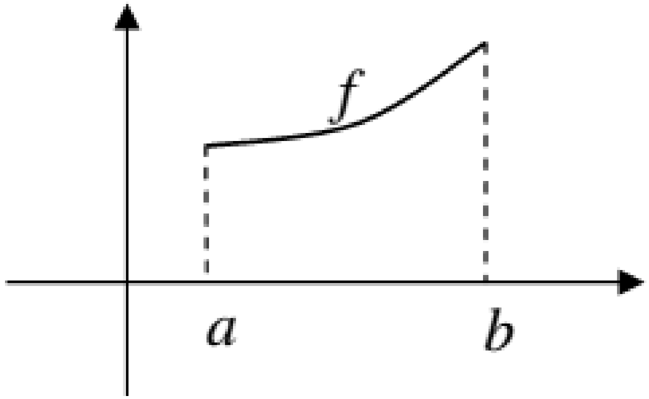


تعریف۳: تابع $y=f(x)$ را در فاصله ای مانند $I=(a,b]$ پیوسته گویند، هرگاه

الف) در تمام نقاط فاصله ی (a,b) پیوسته باشد.

ب) در نقطه ی $x=b$ پیوستگی چپ داشته باشد.

***



تعریف۴ : تابع $y=f(x)$ را در فاصله ای مانند $I=(a,b)$ پیوسته گویند، هرگاه

در تمام نقاط فاصله ی این فاصله پیوسته باشد.

EXAMPLE 4 Show that the function $f(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$ is continuous on the interval $[-1, 1]$.

SOLUTION If $-1 < a < 1$, then using the Limit Laws, we have

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a} f(x) &= \lim_{x \to a} \left(1 - \sqrt{1 - x^2}\right) \\
&= 1 - \lim_{x \to a} \sqrt{1 - x^2} && \text{(by Laws 2 and 7)} \\
&= 1 - \sqrt{\lim_{x \to a} (1 - x^2)} && \text{(by 11)} \\
&= 1 - \sqrt{1 - a^2} && \text{(by 2, 7, and 9)} \\
&= f(a)
\end{aligned}$$

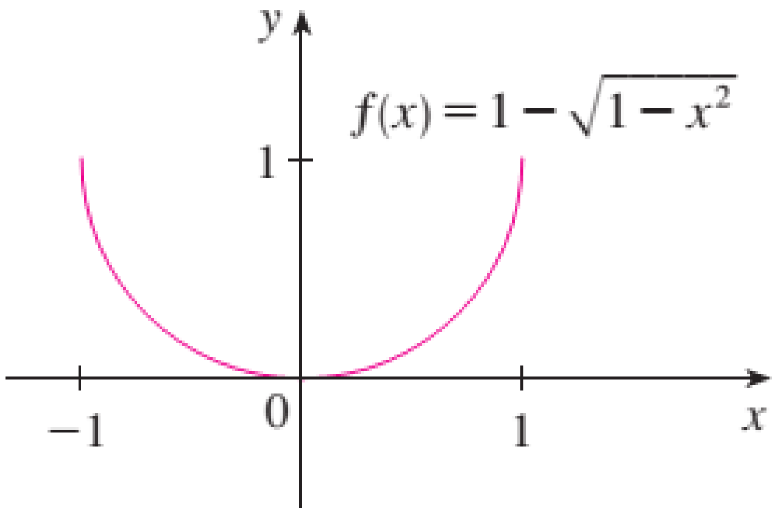
Thus, by Definition 1, f is continuous at a if $-1 < a < 1$. Similar calculations show that

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = 1 = f(-1) \qquad \text{and} \qquad \lim_{x \to 1^-} f(x) = 1 = f(1)$$

so f is continuous from the right at -1 and continuous from the left at 1. Therefore, according to Definition 3, f is continuous on $[-1, 1]$.

The graph of f is sketched in Figure 4. It is the lower half of the circle

$$x^2 + (y - 1)^2 = 1$$



☑ قضایای پیوستگی

قضیه ی ۱) هرگاه دو تابع g و f در $x_\circ$ پیوسته باشند.آنگاه

الف) مجموع و تفاضل و حاصل ضرب آنها نیز در $x_\circ$ پیوسته است.

ب) اگر $g(x_\circ)\neq \cdot$ باشد. $\frac{f}{g}$ نیز در $x_\circ$ پیوسته است.

قضیه ی ۲) اگر تابع g در $x_\circ$ و تابع f در $g(x_\circ)$ پیوسته باشند،تابع fog در $x_\circ$ پیوسته است.

نتیجه: اگر تابع f در $x_\circ$ پیوسته باشد،آنگاه

الف)تابع kf نیز در $x_\circ$ پیوسته است.$(k\in R)$

ب) تابع f^n نیز در $x_\circ$ پیوسته است.$(n\in N)$

ج) تابع $|f|$ نیز در $x_\circ$ پیوسته است.

د) تابع $\sqrt{f}$ نیز در $x_\circ$ پیوسته است،به شرط اینکه $f(x_\circ)\geq \cdot$ باشد.

مثال: اگر $f(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\in\mathbb{Q}^c\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}0 & x\in\mathbb{Q}\\ 1 & x\in\mathbb{Q}^c\end{cases}$، آن‌گاه $f\circ g=1$ و همه جا پیوسته است. اما f و g در هیچ نقطه‌ای حد ندارند؛ لذا در هیچ نقطه‌ای پیوسته نیستند.

قضیه

الف) هر چندجمله‌ای همه‌جا پیوسته است؛ یعنی، روی $\mathbb{R}=(-\infty,\infty)$ پیوسته است.

ب) هر تابع گویا هرجا که تعریف شده باشد پیوسته است؛ یعنی روی دامنه‌اش پیوسته است.

EXAMPLE 5 Find $\lim_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$.

SOLUTION The function

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$$

is rational, so by Theorem 5 it is continuous on its domain, which is $\{x \mid x \neq \frac{5}{3}\}$. Therefore

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x} = \lim_{x \to -2} f(x) = f(-2)$$

$$= \frac{(-2)^3 + 2(-2)^2 - 1}{5 - 3(-2)} = -\frac{1}{11}$$

قضیه تابعهای زیر در هر نقطه از دامنه‌شان پیوسته‌اند.

چندجمله‌ایها	تابعهای گویا
تابعهای ریشه‌گیری	تابعهای مثلثاتی،

قضیه اگر f در b پیوسته باشد و $\lim_{x\to a} g(x) = b$، آن‌وقت $\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(b)$.

به‌عبارت دیگر،

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right)$$

EXAMPLE 6 On what intervals is each function continuous?

(a) $f(x) = x^{100} - 2x^{37} + 75$ (b) $g(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 17}{x^2 - 1}$

(c) $h(x) = \sqrt{x} + \dfrac{x+1}{x-1} - \dfrac{x+1}{x^2+1}$

SOLUTION

(a) f is a polynomial, so it is continuous on $(-\infty, \infty)$ by Theorem 5(a).

(b) g is a rational function, so by Theorem 5(b), it is continuous on its domain, which is $D = \{x \mid x^2 - 1 \neq 0\} = \{x \mid x \neq \pm 1\}$. Thus g is continuous on the intervals $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, and $(1, \infty)$.

(c) We can write $h(x) = F(x) + G(x) - H(x)$, where

$$F(x) = \sqrt{x} \qquad G(x) = \frac{x+1}{x-1} \qquad H(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$$

F is continuous on $[0, \infty)$ by Theorem 7. G is a rational function, so it is continuous everywhere except when $x - 1 = 0$, that is, $x = 1$. H is also a rational function, but its denominator is never 0, so H is continuous everywhere. Thus, by parts 1 and 2 of Theorem 4, h is continuous on the intervals $[0, 1)$ and $(1, \infty)$. ■

EXAMPLE 7 Evaluate $\lim_{x \to \pi} \frac{\sin x}{2 + \cos x}$.

SOLUTION Theorem 7 tells us that $y = \sin x$ is continuous. The function in the denominator, $y = 2 + \cos x$, is the sum of two continuous functions and is therefore continuous. Notice that this function is never 0 because $\cos x \geqslant -1$ for all x and so $2 + \cos x > 0$ everywhere. Thus the ratio

$$f(x) = \frac{\sin x}{2 + \cos x}$$

is continuous everywhere. Hence, by the definition of a continuous function,

$$\lim_{x \to \pi} \frac{\sin x}{2 + \cos x} = \lim_{x \to \pi} f(x) = f(\pi) = \frac{\sin \pi}{2 + \cos \pi} = \frac{0}{2 - 1} = 0$$

EXAMPLE 8 Where are the following functions continuous?

(a) $h(x) = \sin(x^2)$ (b) $F(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 7} - 4}$

SOLUTION

(a) We have $h(x) = f(g(x))$, where

$$g(x) = x^2 \qquad \text{and} \qquad f(x) = \sin x$$

Now g is continuous on $\mathbb{R}$ since it is a polynomial, and f is also continuous everywhere. Thus $h = f \circ g$ is continuous on $\mathbb{R}$ by Theorem 9.

(b) Notice that F can be broken up as the composition of four continuous functions:

$$F = f \circ g \circ h \circ k \qquad \text{or} \qquad F(x) = f(g(h(k(x))))$$

where $\quad f(x) = \dfrac{1}{x} \qquad g(x) = x - 4 \qquad h(x) = \sqrt{x} \qquad k(x) = x^2 + 7$

We know that each of these functions is continuous on its domain (by Theorems 5 and 7), so by Theorem 9, F is continuous on its domain, which is

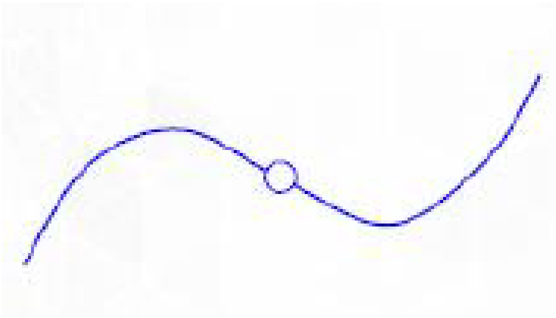
$$\{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{x^2 + 7} \neq 4\} = \{x \mid x \neq \pm 3\} = (-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, \infty)$$

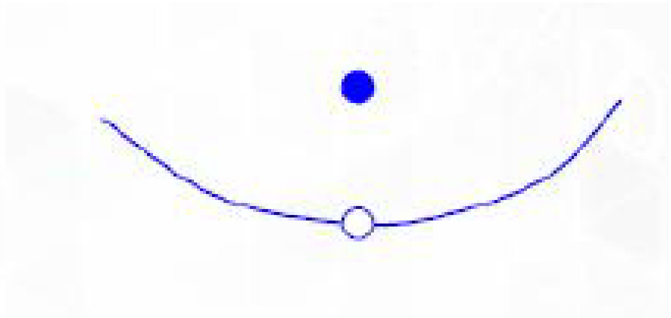
انواع ناپیوستگی در یک نقطه

ناپیوستگی یک تابع در یک نقطه مانند x_0 را می توان به دو دسته تقسیم کرد.

۱ : ناپیوستگی رفع شدنی

در این نوع ناپیوستگی تابع در نقطه ی x_0 حد دارد ولی مقدار تابع در این نقطه یا تعریف نشده است یا با حد تابع برابر نیست. در این مورد می توان با جایگزینی عدد مناسبی برای مقدار تابع ، تابع جدیدی تعریف کرد که در نقطه ی x_0 پیوسته باشد.





تمرین : ابتدا نشان دهید که تابع زیر در نقطه ی $x=۱$ پیوسته نیست. سپس با انتخاب مقدار مناسبی برای $f(۱)$ تابع جدیدی تعریف کنید که در این نقطه پیوسته شود.

$$f(x)=\frac{x^{۲}-۱}{x^{۲}+۴x-۵}$$

حل: ابتدا دامنه ی تابع داده شده را تعیین می کنیم.

$$x^{۲}+۴x-۵=۰ \rightarrow (x-۱)(x+۵)=۰ \rightarrow x=۱\ ,\ \ x=-۵$$

$$\Rightarrow D_f=R-\{۱\ ,-۵\}$$

حال چون $x=۱$ در دامنه ی تابع نیست، لذا مقدار تابع در این نقطه یعنی $f(۱)$ وجود ندارد. پس تابع در این نقطه پیوسته نیست.

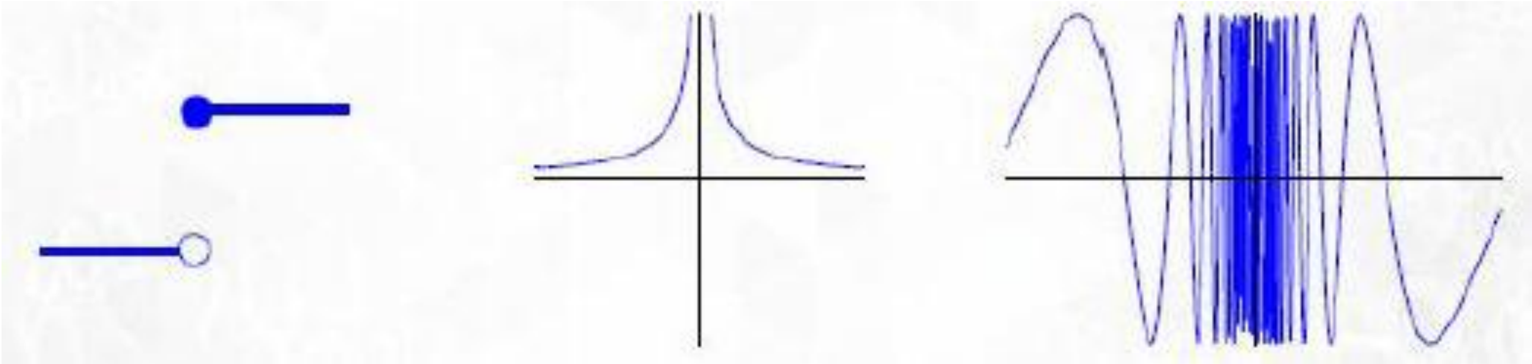
اکنون حد تابع در نقطه ی $x=۱$ را محاسبه و $f(۱)$ را برابر مقدار حد قرار می دهیم.

$$\lim_{x\to ۱} f(x) = \lim_{x\to ۱} \frac{x^۲ - ۱}{x^۲ + ۴x - ۵} \overset{\frac{۰}{۰}}{=} \lim_{x\to ۱} \frac{(x-۱)(x+۱)}{(x-۱)(x+۵)} = \lim_{x\to ۱} \frac{x+۱}{x+۵} = \frac{۱+۱}{۱+۵} = \frac{۱}{۳}$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^۲ - ۱}{x^۲ + ۴x - ۵} & x \neq ۱ \\ \dfrac{۱}{۳} & x = ۱ \end{cases}$$

۲ : ناپیوستگی اساسی (رفع نشدنی)

در این نوع ناپیوستگی تابع در نقطه ی x_0 حد ندارد (یا یکی از حد های راست و چپ موجود نیستند و یا موجود هستند ولی برابر نمی باشند.)



تمرین : نشان دهید که تابع زیر در نقطه ی $x = ۲$ ناپیوستگی اساسی دارد.

$$f(x) = \frac{x-۲}{|x-۲|}$$

حل : کافی است که نشان دهیم تابع در نقطه ی داده شده حد ندارد.

حد راست $\lim_{x\to ۲^+} f(x) = \lim_{x\to ۲^+} \frac{x-۲}{|x-۲|} = \lim_{x\to ۲^+} \frac{x-۲}{x-۲} = ۱$

حد چپ $\lim_{x\to ۲^-} f(x) = \lim_{x\to ۲^-} \frac{x-۲}{|x-۲|} = \lim_{x\to ۲^+} \frac{x-۲}{-(x-۲)} = -۱$

تمرین: پیوستگی تابع $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ را در نقطه ی $x=۰$ بررسی کنید.

حل:

$$D_f=R-\{۰\}$$

مقدار $f(۰)=$. وجود ندارد

حد راست $\lim_{x\to ۰^+} f(x)=\lim_{x\to ۰^+}\dfrac{\sin x}{x}=۱$

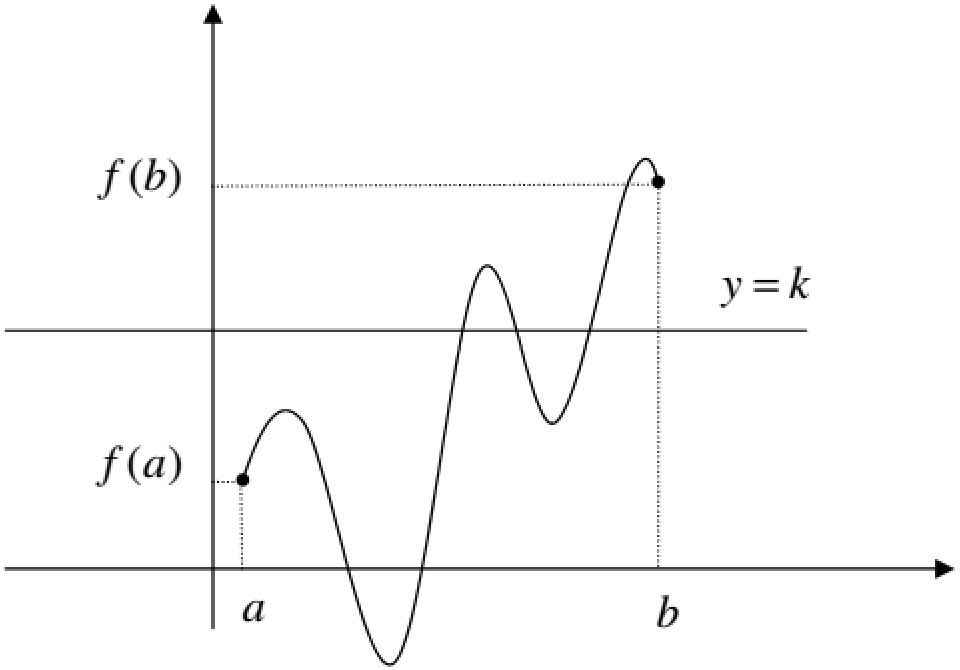
حد چپ $\lim_{x\to ۰^-} f(x)=\lim_{x\to ۰^-}\dfrac{\sin x}{x}=۱$

لذا تابع f در نقطه ی $x=۰$ پیوسته نیست.

☑ کاربرد پیوستگی

قضیه: (قضیه ی مقدار میانی) اگر تابع f در بازه ی بسته ی $[a,b]$ پیوسته باشد و اگر عدد حقیقی k بین $f(a)$ و $f(b)$ باشد.آنگاه حداقل یک عدد حقیقی مانند $x_\circ$ در بازه ی $[a,b]$ وجود دارد که $f(x_\circ)=k$

به عبارت دیگر خط $y=k$ نمودار f را حتماً در یک یا چند نقطه قطع می کند.



تمرین: ثابت کنید که معادله ی $x^{۳} - ۳x + ۱ = ۰$ در بازه ی $[۰,۱]$ دارای حداقل یک ریشه است.

حل:

اولاً: تابع $f(x) = x^{۳} - ۳x + ۱$ یک تابع چند جمله ای است و لذا در مجموعه ی اعداد حقیقی و در نتیجـه در فاصـله ی $[۰,۱]$ پیوسته است. از طرفی

$$\begin{cases} f(۰) = ۱ \\ f(۱) = -۱ \end{cases}$$

و چون $f(۱) = -۱ < ۰ < f(۰) = ۱$ پس طبق قضیه ی مقدار میانی حـداقل یـک عـدد $x_۰ \in [۰,۱]$ وجـود دارد بطـوری کـه $f(x_۰) = ۰$ (یعنی نمودار تابع حداقل در یک نقطه محور طولها را قطع می کند.)