



ریاضیات گسسته

تمرین پنجم - استقرا

کیمیا محمد طاهری

تاریخ تحویل ۱۴۰۱/۰۱/۱۹

سؤال ۱.

n نفر داریم که در ابتدا هر یک از آن‌ها یک خبر متمایز دارند ($n \geq 4$). در هر تماس، دو نفر با هم صحبت می‌کنند و تمامی اخباری را که می‌دانند به یکدیگر می‌گویند. ثابت کنید ترتیب تماس‌ها می‌تواند طوری باشد که با $(2n - 4)$ بار تماس، تمامی افراد از تمامی اخبار مطلع شوند.

سؤال ۲.

نا مساوی زیر را با استفاده از استقرا، برای تمام n های طبیعی ثابت کنید.

$$\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \dots \times \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{3n}}$$

سؤال ۳.

اگر f_n جمله n ام دنباله فیبوناچی باشد، تساوی زیر را ثابت کنید:

$$f_{m+n+1} = f_n f_m + f_{n+1} f_{m+1}$$

سؤال ۴.

هر خانه از یک جدول $2n \times 2n$ با یکی از چهار رنگ موجود رنگ شده است طوری که در هر مربع 2×2 هیچ دو خانه‌ای هم‌رنگ نیستند. ثابت کنید هیچ دوتا از چهار خانه‌ی واقع در گوشه‌های جدول نیز هم‌رنگ نیستند.

سؤال ۵.

فرض کنید x_1, x_2, \dots, x_n اعدادی در بازه $\frac{1}{4} \leq x_i \leq \frac{1}{2}$ باشند. ثابت کنید:

$$\frac{(\prod_{i=1}^n x_i)^{1/n}}{(\prod_{i=1}^n (1-x_i))^{1/n}} \leq \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (1-x_i)}$$

(اگر $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ باشد، نامساوی به تساوی تبدیل خواهد شد.)

سؤال ۶.

الف) نشان دهید که می‌توان اعداد ۱ تا n را طوری کنار هم نوشت که میانگین هیچ دو عددی بین‌شان نیامده باشد.

ب) حال نشان دهید بی‌نهایت عدد طبیعی n وجود دارد که بتوان اعداد $1, 2, 3, \dots, n^2$ را در یک جدول $n \times n$ قرار داد طوری که میانگین هیچ دو عددی در کوچک‌ترین مستطیل شامل این دو عدد قرار نگیرد.