محمد امانلو ۸۱۰۱۰۰۰۸۴ تکلیف ۵ آمار مهندسی

۱)

X : نتیجه پرتاب یک تاس چهار وجهی

$W_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$

$E[W_n] = E[X_1 + X_2 + \dots + X_n] = E[X_1] + E[X_2] + \dots + E[X_n] = nE[X]$

$var(W_n) = Var(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = Var(X_1) + var(X_2) + \dots + Var(X_n) = n\,Var(X)$

$E[X] = \sum_i x_i P(x_i) = \frac{1}{4}(1+2+3+4) = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$

$E[X^2] = \sum_i x_i^2 P(x_i) = \frac{1}{4}(1+4+9+16) = \frac{30}{4}$

$var(X) = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{30}{4} - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{30}{4} - \frac{25}{4} = \frac{5}{4}$

$E[W_n] = nE[X] = \boxed{\frac{5}{2}n}$

$var(W_n) = n\,var(X) = \boxed{\frac{5}{4}n}$

۲)

$\Phi_X(s) = \frac{1}{3}(2e^{3s}+1)\Phi_Y(s)$

$\Phi'_X(s) = \frac{1}{3}(6e^{3s})\Phi_Y(s) + \frac{1}{3}(2e^{3s}+1)\Phi'_Y(s)$

$E[X] = \Phi'_X(0) = \frac{1}{3}\times 6 \times \underbrace{\Phi_Y(0)}_{1} + \frac{1}{3}\times 3 \times \underbrace{\Phi'_Y(0)}_{E[Y]} = 2 + E[Y] = 2 + 10 = \boxed{12}$

$\Phi''_X(s) = \frac{1}{3}(18e^{3s})\Phi_Y(s) + \frac{1}{3}(6e^{3s})\Phi'_Y(s) + \frac{1}{3}(6e^{3s})\Phi'_Y(s) + \frac{1}{3}(2e^{3s}+1)\Phi''_Y(s)$

$E[X^2] = \Phi''_X(0) = 6\underbrace{\Phi_Y(0)}_{1} + 2\underbrace{\Phi'_Y(0)}_{E[Y]} + 2\underbrace{\Phi'_Y(0)}_{E[Y]} + \underbrace{\Phi''_Y(0)}_{E[Y^2]} = 6 + 4E[Y] + E[Y^2]$

$= 6 + 40 + (var(Y) + E[Y]^2) = 6 + 40 + 12 + 100 = \boxed{158}$

$var(X) = E[X^2] - E[X]^2 = 158 - (12)^2 = \boxed{14}$

۳) الف)

$$f(x+y)=\frac{1}{۲۴}(x+y) \qquad 0<x<۳ \qquad x<y<x+۲$$

$$f_X(x)=\int_x^{x+۲} f(x,y)\,dy=\int_x^{x+۲}\frac{1}{۲۴}(x+y)\,dy=\frac{1}{۲۴}\left(xy+\frac{y^۲}{۲}\right)\Big|_x^{x+۲}=\frac{1}{۲۴}\left(x(x+۲)+\frac{(x+۲)^۲}{۲}-x^۲-\frac{x^۲}{۲}\right)$$

$$=\frac{۴x+۲}{۲۴} \qquad 0<x<۳$$

ب)

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f_{xy}(x,y)}{f_X(x)}=\frac{\frac{1}{۲۴}(x+y)}{\frac{۴x+۲}{۲۴}}=\frac{x+y}{۴x+۲}$$

$$P(Y|X=1)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{Y|X}(y|x)\,dy$$

$$E(Y|X=1)=\int_{-\infty}^{+\infty} y\, f_{Y|X}(y|x)\,dy=\int_x^{x+۲} y\left(\frac{1+y}{۴+۲}\right)=\frac{1}{۶}\int_x^{x+۲}(y^۲+y)\,dy=\frac{1}{۶}\left(\frac{y^۳}{۳}+\frac{y^۲}{۲}\right)\Big|_x^{x+۲}$$

$$=\frac{1}{۶}\left[\frac{(x+۲)^۳}{۳}+\frac{(x+۲)^۲}{۲}-\frac{x^۳}{۳}-\frac{x^۲}{۲}\right]=\frac{۲۲}{۹}+\frac{۸}{۳}x+\frac{x^۲}{۳}$$

ج)

$$f_Y(y)=\frac{1}{۲۴}\int_0^۳ (x+y)\,dx=\frac{1}{۲۴}\left(\frac{x^۲}{۲}+xy\right)\Big|_0^۳=\frac{۹}{۴۸}+\frac{y}{۸}$$

$$f_X(X|Y=۲)=\frac{f_{xy}(x,۲)}{f_Y(۲)}=\frac{\frac{x+۲}{۲۴}}{\frac{۹}{۴۸}+\frac{۲}{۸}}=\boxed{\frac{۲}{۲۱}(x+۲)}$$

4

N_t: تعداد کل پیام های دریافتی (دارای توزیع پواسون)

$N_a(t)$: تعداد پیام های دریافتی از ایستگاه a : $N_a(t) | N_t \sim Bin(N_t, p)$

$N_b(t)$: تعداد پیام های دریافتی از ایستگاه b : $N_b(t) | N_t \sim Bin(N_t, 1-p)$

طبق قضیه احتمال کل داریم:

$$P(N_a(t)=n, N_b(t)=m) = P(N_a(t)=n, N_b(t)=m \mid N_a(t)+N_b(t)=n+m)\, P(N_a(t)+N_b(t)=n+m) +$$
$$\underbrace{P(N_a(t)=n, N_b(t)=m \mid N_a(t)+N_b(t)\neq n+m)\, P(N_a(t)+N_b(t)\neq n+m)}_{0}$$

$$= P(N_a(t)=n, N_b(t)=m \mid N_a(t)+N_b(t)=n+m)\, P(N_a(t)+N_b(t)=n+m)$$

$$= \binom{n+m}{n} p^n (1-p)^m \times e^{-\lambda} \frac{\lambda^{m+n}}{(m+n)!} = \frac{(n+m)!}{n!\,m!} \frac{(\lambda p)^n}{n!} \times \frac{e^{-\lambda(1-p)} (\lambda(1-p))^m}{m!}$$

$$= P(N_a(t)=n)\, P(N_b(t)=m)$$

$\longrightarrow N_a(t) \sim Poi(\lambda p)$

$N_a(t)$ و $N_b(t)$ مستقل اند.

الف) ۵

$X \sim Beta(a,b)$

$$E[X] = \frac{a}{a+b} = ۰/۰۴ \longrightarrow b = ۲۴a$$

$$\sigma = ۰/۰۲ \longrightarrow var(X) = ۴ \times 10^{-۴} = \frac{ab}{(a+b)^{۲}(a+b+1)} = \frac{۲۴a^{۲}}{(۲۵a)^{۲}(۲۵a+1)} = \frac{۲۴}{۵^{۴}(۲۵a+1)}$$

$$\longrightarrow ۲۵a+1 = \frac{۲۴}{۵^{۴} \times ۴ \times 10^{-۴}} = \frac{۲۴ \times ۲^{۴}}{۴} = ۹۶ \longrightarrow \boxed{a = \frac{۹۵}{۲۵} = ۳/۸ \qquad b = ۹۱/۲}$$

۵) ب) ۱۰۰ قطعه ۳ عدد خراب

$m+n=۱۰۰$

$n=۳ \longrightarrow m=۹۷$

$$X|_{N=۳} \sim Beta(a+n, b+m) = Beta(۳٫۸+۳ , ۹۱٫۲+۹۷) = Beta(۶٫۸ , ۱۸۸٫۲)$$

ج)

$$E[X] = \frac{۶٫۸}{۶٫۸+۱۸۸٫۲} = \frac{۶٫۸}{۱۹۵} = \boxed{۰٫۰۳۴۸}$$

$$var(X) = \frac{۶٫۸ \times ۱۸۸٫۲}{(۱۹۵)^۲(۱۹۶)} = \sigma^۲ \longrightarrow \boxed{\sigma = ۰٫۰۱۳}$$

۶) الف)

$$Y = u+(v-u)X$$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(u+(v-u)X \leq y) = P\left(X \leq \frac{y-u}{v-u}\right) = F_X\left(\frac{y-u}{v-u}\right)$$

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \frac{d}{dy}\left(F_X\left(\frac{y-u}{v-u}\right)\right) = \frac{1}{v-u} f_X\left(\frac{y-u}{v-u}\right)$$

$$\rightarrow f_Y(y) = \frac{1}{v-u} \frac{1}{B(a,b)} \left(\frac{y-u}{v-u}\right)^{a-1} \left(\frac{v-y}{v-y}\right)^{b-1}$$

ب)

$$P(Y \leq ۳) = F_X\left(\frac{۳-u}{v-u}\right) = F_X\left(\frac{۳-۲}{۶-۲}\right) = F_X\left(\frac{1}{۴}\right)$$

$$B(۲,۳) = \frac{\Gamma(۲)\Gamma(۳)}{\Gamma(۵)} = \frac{1 \times ۲!}{۴!} = \frac{1}{۱۲}$$

$$f_X(x) = \frac{1}{B(۲,۳)} x(1-x)^۲ = ۱۲x(1-x)^۲$$

$$F_X\left(\frac{1}{۴}\right) = \int_0^{\frac{1}{۴}} f_X(x)dx = \int_0^{\frac{1}{۴}} ۱۲x(1-x)^۲ dx = ۱۲\int_0^{\frac{1}{۴}} (x^۳-۲x^۲+x)dx = ۱۲\left[\frac{x^۴}{۴} - \frac{۲}{۳}x^۳ + \frac{x^۲}{۲}\right]_0^{\frac{1}{۴}}$$

$$= ۱۲\left[\frac{1}{۶۴} - \frac{1}{۹۶} + \frac{1}{۳۲}\right] = \boxed{\frac{۷}{۱۶}}$$

(7) الف)

$$f(x,y) = c(x^2+xy)$$

$$\int_0^1\int_0^1 c(x^2+xy)\,dx\,dy = c\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) = \frac{7}{12}c = 1 \longrightarrow \boxed{c = \frac{12}{7}}$$

$$f_X(x) = \int_0^1 f(x,y)\,dy = \frac{12}{7}\left(x^2+\frac{x}{2}\right)$$

$$E[X] = \int_0^1 x f_X(x)\,dx = \frac{12}{7}\int_0^1 x\left(x^2+\frac{x}{2}\right)dx = \frac{12}{7}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\right) = \frac{5}{7}$$

$$f_Y(y) = \int_0^1 f(x,y)\,dx = \frac{12}{7}\left(\frac{1}{3}+\frac{y}{2}\right)$$

$$E[Y] = \int_0^1 y f_Y(y)\,dy = \frac{12}{7}\int_0^1 y\left(\frac{1}{3}+\frac{y}{2}\right)dy = \frac{12}{7}\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right) = \frac{4}{7}$$

$$\operatorname{cov}(X,Y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(x-E[X]\right)\left(y-E[Y]\right)f_{XY}(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^1\left(x-\frac{5}{7}\right)\left(y-\frac{4}{7}\right)\frac{12}{7}(x^2+xy)\,dx\,dy$$

$$\boxed{= \frac{-1}{294}}$$

ب)

$$\rho(X,Y) = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{\operatorname{var}(X)\operatorname{var}(Y)}} = \frac{-\frac{1}{294}}{\sqrt{\frac{23}{490}\times\frac{23}{294}}} = \boxed{-\frac{\sqrt{15}}{69}}$$

$$\operatorname{var}(X) = E[X^2]-E[X]^2 = \frac{39}{70}-\frac{25}{49} = \frac{23}{490}$$

$$\operatorname{var}(Y) = E[Y^2]-E[Y]^2 = \frac{23}{294}$$

ج) با استفاده از کواریانس تنها جهت ارتباط بین دو متغیر را می توان متوجه شد اگر این مقدار مثبت باشد بیانگر ارتباط مستقیم بین دو متغیر است (هر دو افزایش یا هر دو کاهش) و اگر این مقدار منفی باشد بیانگر ارتباط عکس بین دو متغیر است (یکی کاهش یکی افزایش)

اما با استفاده از ضریب همبستگی علاوه بر جهت، شدت ارتباط را نیز می توان متوجه شد اگر به 1+ و 1- نزدیک باشد یعنی بین دو متغیر ارتباط خطی مثبت یا منفی زیادی وجود دارد و اگر نزدیک به صفر باشد ارتباط بین این دو کم است.

۸) این سوال مشابه سوال ۴ حل می‌شود و نتیجه می‌شود که $X \sim Poi(\lambda p)$ و $Y \sim poi(\lambda(1-p))$ و مستقل اند

در نتیجه $E[XY]=E[X]E[Y]$ پس $cov(X,Y)$ و $\rho(X,Y)$ برابر صفر می‌باشد.