ریاضیات گسسته

تمرین ششم - روابط و جمع‌زنی

شماره دانشجویی: ۸۱۰۱۰۰۲۷۲

①

$R = \{(1,2),(1,3),(2,4),(3,2)\}$

$R^n = R^{(n-1)} \circ R$

$R^2 = R \circ R = \{(1,4),(1,2),(3,4)\}$

$R^3 = R^2 \circ R = \{(1,4)\}$

$R^4 = R^3 \circ R = \emptyset$

تهی!

به همین ترتیب مجموعه $R^n = \emptyset$ است.

②

الف)

$(x,y) \in R \longleftrightarrow x \neq y$

خاصیت تعدی، تقارن را دارد.

بازتابی: اگر به ازای همه اعداد صحیح که در رابطه حضور دارند $\forall a \in A \; - (a,a) \in R$ باشد، بازتابی برقرار است و اینجا رابطه بازتابی برقرار نمی‌باشد زیرا $x \neq y$ است در هر زوج مرتب.

تعدی: اگر رابطه عضو (x,y) و (y,z) را داشته باشد طبق تعریف عضو (x,z) را شامل می‌شود (می‌دانیم $x \neq y$، $x \neq z$. $y \neq z$) پس طبق تعریف خاصیت تعدی را نیز داریم ✓

تقارن: (x,y) عضو رابطه است اگر (y,x) نیز عضو رابطه باشد، تقارن برقرار است ✓

پادتقارن: خاصیت را ندارد. چون اگر (x,y) $x \neq y$ عضو باشد و (y,x) نیز عضو R باشد متقارن می‌شود و هیچ گاه $y = x$ نمی‌شود

ب:

$(x,y) \in R \longleftrightarrow x \overset{5}{\equiv} y$ از طرفی: $5k = x - y$, $k \in \mathbb{Z}$

مثلاً: $\{(1,6),(1,11),(5,5),\ldots$

خواص موجود: بازتابی - تعدی - تقارن

بازتابی دارد زیرا می‌دانیم $5k = x - y$ و k می‌تواند عدد ۰ باشد ($x = y$) باشد. پس زوج مرتب‌هایی داریم که خاصیت بازتابی دارند / تعدی: اگر $x \overset{5}{\equiv} y$ و $y \overset{5}{\equiv} z$ طبق خواص همنهشتی می‌دانیم $x \overset{5}{\equiv} z$ نیز درست است، تعدی داریم. / تقارن: اگر $x \overset{5}{\equiv} y$ داریم: $5k = x - y$ این را می‌توان $-5k = y - x$ نیز نوشت پس $y \overset{5}{\equiv} x$ نیز درست است و تقارن داریم. / پادتقارن نداریم زیرا به ازای

$\forall a, \forall b \; [((a,b) \in R \wedge (b,a) \in R) \longrightarrow a = b]$

لزوماً درست نیست.

ادامه ۲

ج) $(x,y) \in R \longleftrightarrow x < y$

خواص موجود: بازتابی، تعدی، پادتقارن

بازتابی: برقرار است زیرا حالت $x=y$ در نظر گرفته شده و (x,x) داریم.

تعدی: طبق اثبات موجود رابطه تعدی برقرار است

طبق تعدی داریم:

$$\left.\begin{array}{ll}(x,y) & x<y \\ (y,z) & y<z\end{array}\right\} \longrightarrow (x,z) \quad x<y<z$$

تقارن: در تقارن اگر (x,y) را داشته باشیم باید حتما (y,x) را نیز داشته باشیم ولی طبق صورت مسئله نمی‌توان این دو زوج مرتب را باهم داشت. زیرا $\{(x,y) \in R \mid x<y\}$ برقرار باید باشد

پادتقارن: طبق استدلال در قسمت تقارن، پادتقارن وجود دارد.

۳) ۲ مجموعه تقارنی R و S را مثال می‌زنیم و موضوع را اثبات می‌کنیم

مثال

$A = \{a,b,c,d\}$

$R = \{(a,b)(b,a)(a,a)\}$

$S = \{(a,c)(c,a)\}$

الف) این رابطه درست است زیرا اگر (a,b) عضو R باشند پس (b,a) هم عضو R هستند. بنابر تعریف اجتماع هر دو عضو RUS نیز هستند.

$R = \forall a,b;\ \text{if } (b,a) \in R \rightarrow (a,b) \in R$

$S = \forall c,d\ \text{if } (c,d) \in R \rightarrow (d,c) \in R$

$RUS = \{(a,b)(b,a)(c,d)(d,c)\}$

ب) درست است. چون اگر قرار باشد (a,b) در هر دو رابطه S,R یکسان باشد، (a,b) در هر دو رابطه و (b,a) هر دو در ۲ رابطه وجود دارند چون تقارن دارند. پس اگر عضوی مانند (a,b) حذف شود (b,a) نیز حذف می‌شود و متقارن باقی می‌ماند.

$R \oplus S = RUS - R \cap S$

ج) درست است. RUS که طبق الف، اثبات کردیم که تقارن است، همچنین ثابت کردیم اگر عضوی مثل (a,b) عضو $R \cap S$ باشد (b,a) نیز عضو آن است، هر دوی این اعضا باهم حذف می‌شوند و تقارنی باقی می‌ماند.

د) غلط است.
مثال نقض:

$R = \{(a,b)(b,a)(c,d)(d,c)\}$

$S = \{(e,b)(b,e)(c,f)(f,c)\}$

$R \circ S = \{(e,a)(f,d)\} \longrightarrow$ تقارنی نیست.

الف) برای هر تابع یک به یک مثل $f: A \to B$ ، f پوشا خواهد بود.

اگر دانسته باشیم $\{(x,y) \mid x \in A, y \in B\}$ و با توجه به اینکه f تابع است از هر x تنها یکبار استفاده می‌شود.
پس تمامی x هایی که عضو A باشند در دامنه این تابع وجود دارند.
از طرف دیگر چون تابع یک به یک است پس از هر $y \in B$ نیز تنها یک بار استفاده می‌شود
پس به تعداد x ها y داریم. تعداد x ها، $|A|$ و تعداد y ها $|B|$ ، $|A| = |B|$ است.
پس تمام اعضای مجموعه B در برد تابع استفاده می‌شوند. نشان می‌دهد تابع پوشا است.

ب) برای هر تابع پوشا مثل $f: A \to B$ ، f یک به یک نیز خواهد بود.

تابع f تابعی پوشا است (طبق قسمت الف) پس تمام اعضای B باید در برد تابع وجود داشته باشند و
از طرفی چون f تابع است، منحصر به فرد بودن مؤلفه اول است پس هر $x \in A$ ، فقط یک بار استفاده می‌گردد.
از طرف دیگر $|A| = |B|$ است پس دقیقاً تعداد $y \in B$ نیز به اندازه x هاست و y ها منحصر به فرد
هستند و y تکراری نداریم.

اگر یک x کوچکتر از ۵ با یک x بزرگتر ۵ رابطه داشته باشد حول تقارن نیز دارد حالتی که در صورت سوال گفته شده نقض می شود

رابطه زیر باشد :

(x, y)

$x \leq ۵$

$y > ۵$

کوچکتر از ۵ ها مستقل اند و بزرگتر از ۵ ها نیز مستقل اند. پس کافیست هم ارزی های ۵ تایی را بدست آوریم و به توان ۲ برسانیم (یعنی تعداد حالات گروه ۱ × تعداد حالات گروه دوم که حالات دو گروه برابر است، مانند به توان ۲ رساندن حساب می کنیم)

برای هم ارزی ۵ تایی، کلاس هایش را تعدادش دو حالت بندی می کنیم. ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ تا باشد

گفته بودیم در رابطه هم ارزی، خواص بازتابی / تقارن / تعدی وجود دارد

برای مجموعه $A = \{۱,۲,۳,۴,۵\}$ روابط هم ارزی را در نظر می گیریم.

$\{(a,a)(b,b)(a,b)(b,a)\}$ → حالتی که ۲ عضو از مجموعه A را داشته باشیم. $\binom{۵}{۲} = ۱۰$

$\{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(b,a),(a,c),(c,a),(c,b),(b,c)\}$ → حالتی که ۳ عضو از مجموعه A را داشته باشیم $\binom{۵}{۳} = ۱۰$

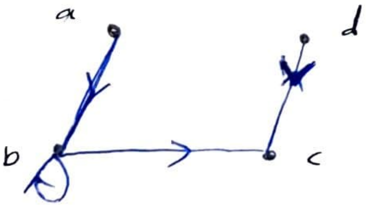
$\{\quad\}$ → حالتی که ۴ عضو از A را داشته باشیم $\binom{۵}{۴} = ۵$

$\{\quad\}$ → ۵ عضو از A را داشته باشیم $\binom{۵}{۵} = ۱$

$۵ + ۱ + ۱۰ + ۱۰ = ۲۶$

با توجه به محاسبات،

← جواب نهایی : $\boxed{۲۷۰۴ = ۵۲ \times ۵۲}$



~~بازتابی~~ نامتقارن ✓ تعدی ✓

برای اینکه خاصیت بازتابی را نداشته باشیم، حالتی که هر ۳ راس کاندیدست حلقه داشته باشند، رد می شود. یعنی $(۲^۳ - ۱) = ۷$ حالت

حالتی که هر ۳ حلقه داشته باشند

تا اینجا داریم

ادامه ۶

حال خاصیت تعدی را بررسی می‌کنیم

$S = \{ (b,b)\ (a,b)\ (b,c)\ (d,c)\ (a,c) \}$

$\left.\begin{matrix}(a,b)\\(b,c)\end{matrix}\right\} \to (a,c)$

را باید اضافه کنیم
تا همین مجموعه متعدی شود.

حالت های مختلف برای متعدی شدن

① (a,d) را اضافه کنیم

$\left.\begin{matrix}(a,d)\\(d,c)\end{matrix}\right\} \to (a,c)$

② (d,a) را اضافه کنیم
که البته (d,b) را نیز باید اضافه کرد.

$\left.\begin{matrix}(d,a)\\(a,c)\end{matrix}\right\} \to (d,c)$

$\left.\begin{matrix}(d,a)\\(a,b)\end{matrix}\right\} \to (d,b)$

$\left.\begin{matrix}(d,b)\\(b,c)\end{matrix}\right\} \to (d,c)$

رابطه جدیدی اضافه نشد.

③ (c,b) را نیز اضافه کنیم

$\left.\begin{matrix}(a,c)\\(c,b)\end{matrix}\right\} \to (a,b)$

④ (c,d) , (a,d) را اضافه کنیم
(b,d) را نیز باید اضافه کرد.

$\left.\begin{matrix}(a,c)\\(c,d)\end{matrix}\right\} \to (a,d)$

$\left.\begin{matrix}(b,c)\\(c,d)\end{matrix}\right\} \to (b,d)$

⑤ (b,a) اضافه کنیم

$\left.\begin{matrix}(b,a)\\(a,c)\end{matrix}\right\} \to (b,c)$

⑥ (b,d) اضافه کنیم
(a,d) را نیز باید اضافه کرد

$\left.\begin{matrix}(b,d)\\(d,c)\end{matrix}\right\} \to (b,c)$

$\left.\begin{matrix}(a,b)\\(b,d)\end{matrix}\right\} \to (a,d)$

مجموع حالت ها

$(2^3-1)(6) = 7 \times 6 = \boxed{42}$