

به نام خدا



نظریه زبان‌ها و ماشین‌ها - بهار ۱۴۰۲  
تمرین شماره ۶  
دستیار آموزشی این مجموعه: پاشا براهیمی  
pashabarahimi@gmail.com



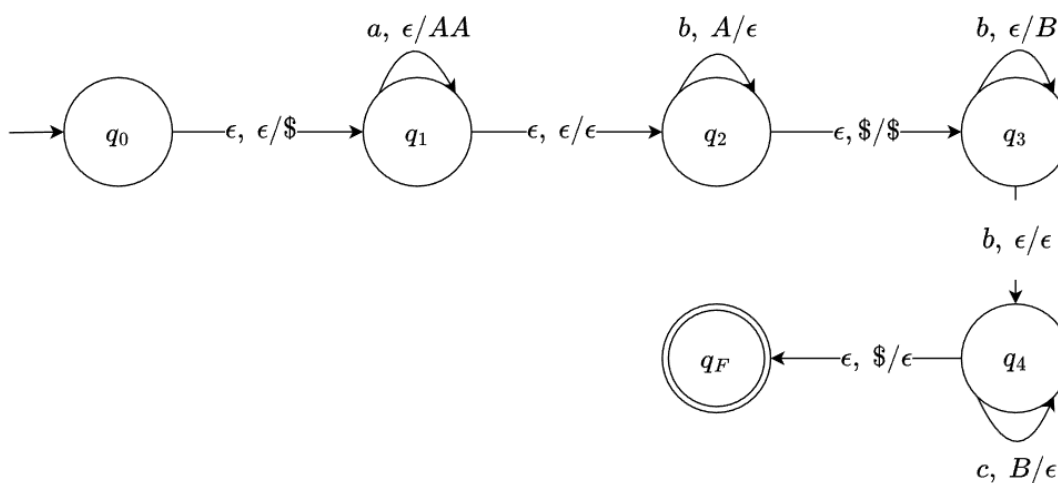
تاریخ تحویل : ۶ اردیبهشت (صفحه درس)

نکته: در تمامی سوالاتی که باید PDA رسم کنید، فرض کنید \$ در استک قرار ندارد و در صورت نیاز باید خودتان این مورد را در استک push کنید.

۱) برای هرکدام از زبان‌های زیر یک PDA رسم کنید. (20 نمره)

الف)  $L_1 = \{a^i b^j c^k \mid j = 2i + k + 1; i, j, k \geq 0\}$

پاسخ:



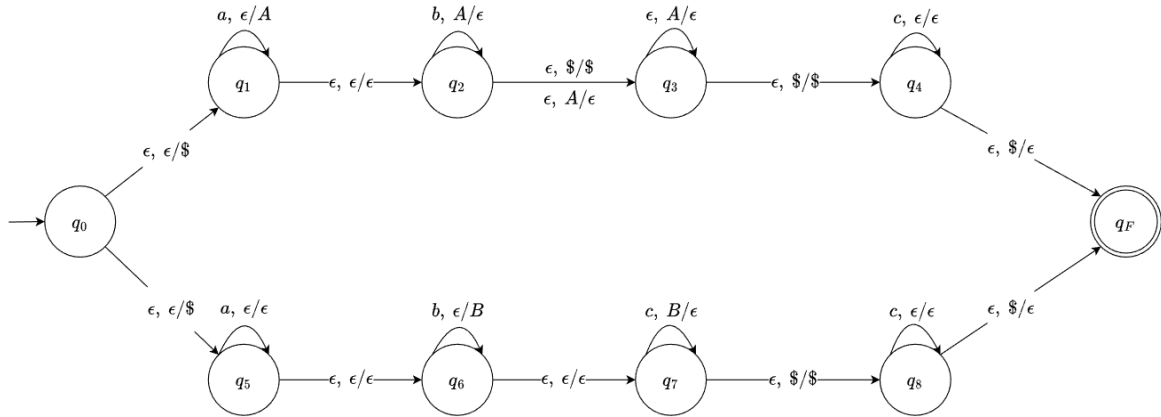
ب)  $L_2 = \{a^i b^j c^k \mid j \leq \max(i, k); i, j, k \geq 0\}$

پاسخ:

در این بخش اجتماع دو زبان را خواهیم داشت:

1- حالتی که تعداد  $b$  از تعداد  $a$  بیشتر نباشد.

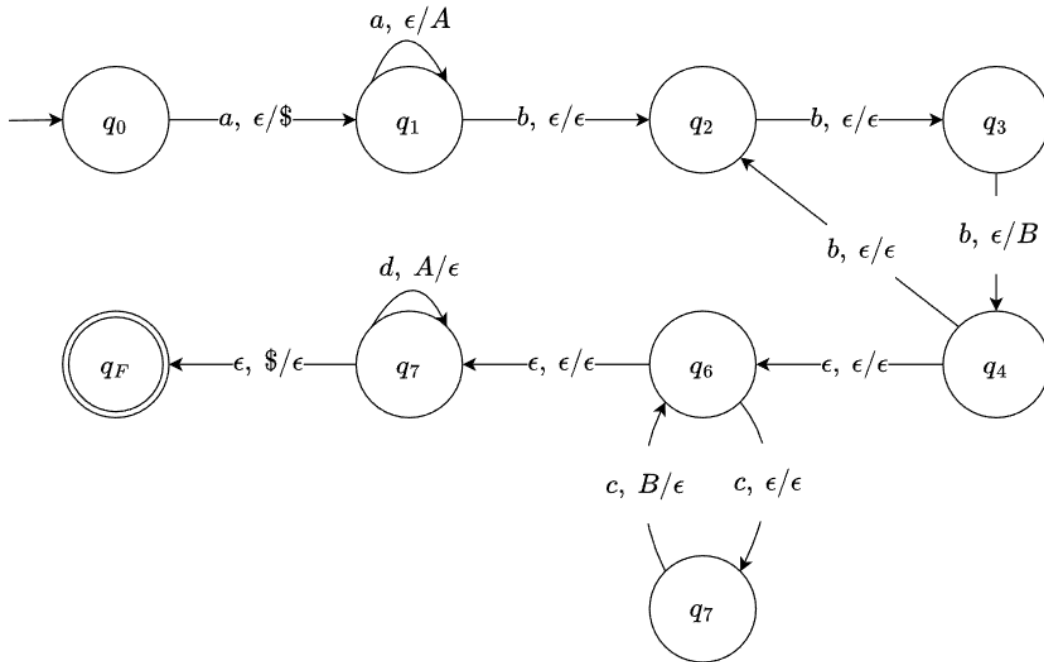
2- حالتی که تعداد b از تعداد c بیشتر نباشد.



ج)  $L_3 = \{a^n b^{3m} c^{2m} d^{n-1} \mid n, m \geq 1\}$

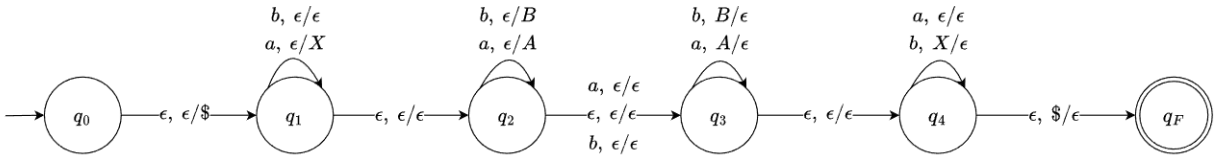
پاسخ:

لازم به ذکر است که PDA شما نباید رشته‌ای را بپذیرد که تعداد a یا b یا c آن برابر با 0 است.



د)  $L_4 = \{xwy \mid x, y, w \in \{a, b\}^* \text{ and } w = w^R \text{ and } n_a(x) = n_b(y)\}$

پاسخ:



(2) برای گرامر زیر یک PDA با حداکثر 3 حالت<sup>1</sup> رسم کنید و سپس زبان گرامر را بنویسید. (15 نمره)

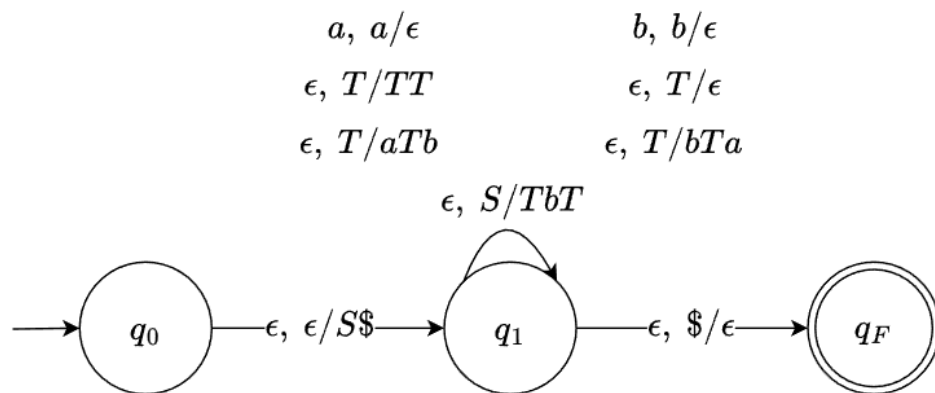
$$S \rightarrow TbT$$

$$T \rightarrow aTb \mid bTa \mid TT \mid \epsilon$$

پاسخ:

زبانی که این گرامر می‌پذیرد برابر است با رشته‌هایی شامل a و b که تعداد b آن‌ها، دقیقاً یکی بیشتر از تعداد a آن‌ها است، یا به عبارت دیگر:

$$L = \{w \mid w \in \{a, b\}^* \text{ and } n_b(w) = n_a(w) + 1\}$$



(3) زبان زیر را در نظر بگیرید: (20 نمره)

$$L = \{w \mid w = (ab)^* cc^* d\}$$

<sup>1</sup> State

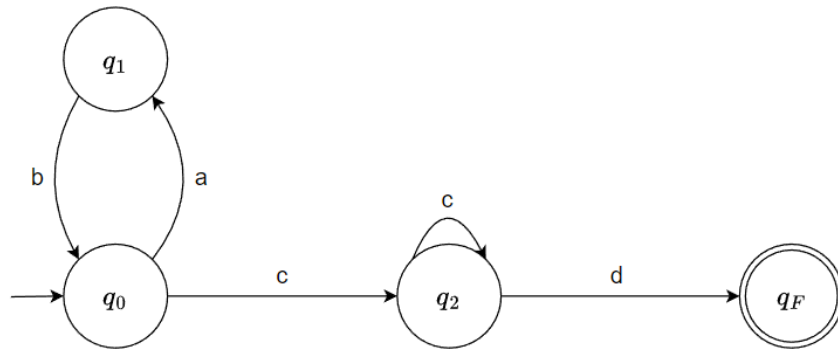
الف) برای این زبان یک NFA رسم کنید.

ب) آیا می‌توانید NFA بخش قبل را با فقط 3 حالت رسم کنید؟ در صورت امکان این کار را انجام دهید و در غیر این صورت، دلیل خود را به صورت خلاصه ذکر کنید.

ج) آیا می‌توانید یک PDA برای این زبان با حداکثر 3 حالت رسم کنید؟ در صورت امکان این کار را انجام دهید و در غیر این صورت، دلیل خود را به صورت خلاصه توضیح دهید.

د) آیا می‌توان برای هر زبان Context-Free یک PDA با 3 حالت رسم کرد؟ در صورت امکان، روش کار خود را توضیح دهید.

پاسخ:



این امکان وجود ندارد که NFA را با کمتر از 4 حالت رسم کنیم، زیرا در NFA تنها روشی که برای ذخیره کردن state فعلی داریم، اضافه کردن حالت به NFA است و در این بخش، 4 حالت متفاوت خواهیم داشت:

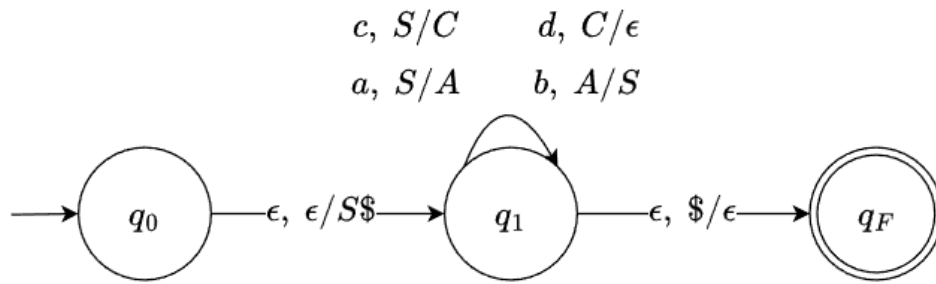
1- حالتی که یک a دیده‌ایم اما بعد از این a، هیچ b-ای ندیده‌ایم.

2- حالتی که به تعداد دلخواه ab دیده‌ایم.

3- حالتی که بعد از مشاهده تعداد دلخواه ab، حداقل یک c دیده‌ایم.

4- حالتی که یک d نیز بعد از حالت سوم دیده‌ایم و به accepting state رسیده‌ایم.

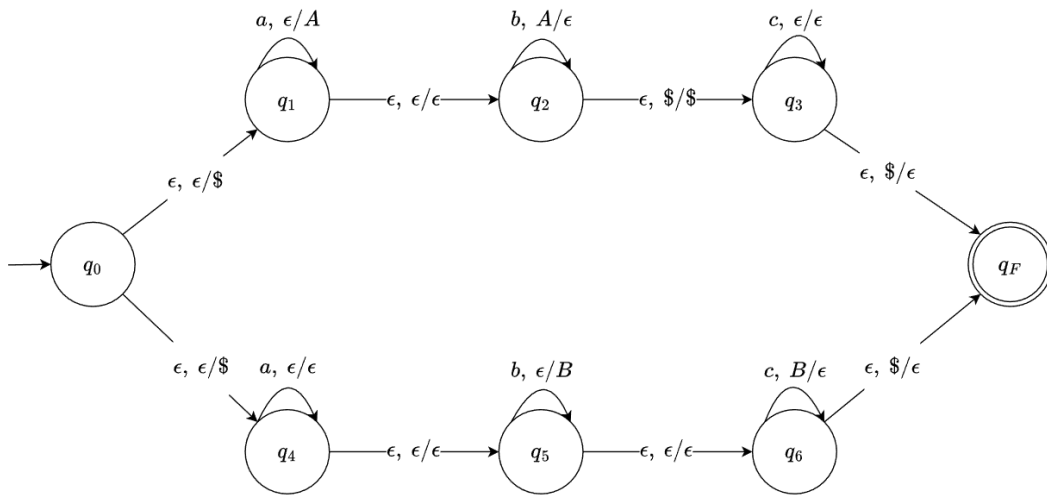
اما در PDA می‌توانیم حالات را جای اضافه کردن state به PDA، در استک ذخیره کنیم. به همین دلیل است که می‌توانیم این زبان را در PDA با تعداد حالات کمتر نشان دهیم.



هر زبان Context-Free را می‌توان با یک PDA با 3 حالت نشان داد. برای این کار ابتدا یک گرامر برای زبان می‌نویسیم. در ابتدای PDA یک S (سمبل شروع) را در استک push می‌کنیم و سپس به ازای هر قانون  $A_i \rightarrow \lambda_i$  (سمت چپ غیر پایانه است)، یک حلقه به صورت  $\epsilon, A_i/\lambda_i$  روی حالت دوم قرار می‌دهیم. در نهایت به ازای هر پایانه a موجود در الفبا، یک حلقه  $a, a/\epsilon$  روی حالت دوم قرار می‌دهیم. تمامی مراحل مشابه پاسخ سوال 2 است.

(4) زبانی که هرکدام از PDAهای زیر می‌پذیرد را بنویسید. (20 نمره)

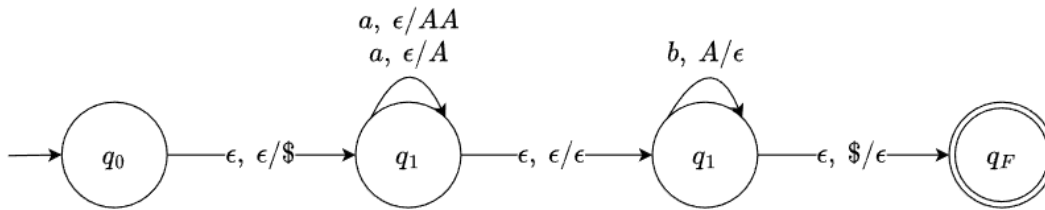
(الف)



پاسخ:

$$L = \{a^i b^j c^k \mid i, j, k \geq 0; i = j \text{ or } j = k\}$$

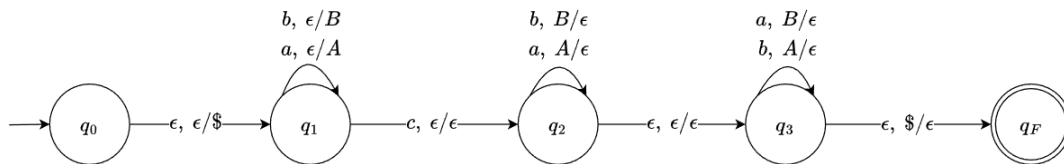
(ب)



پاسخ:

$$L = \{a^n b^m \mid n \leq m \leq 2n\}$$

(5) گرامر متناظر با PDA زیر را بنویسید. (15 نمره)



پاسخ:

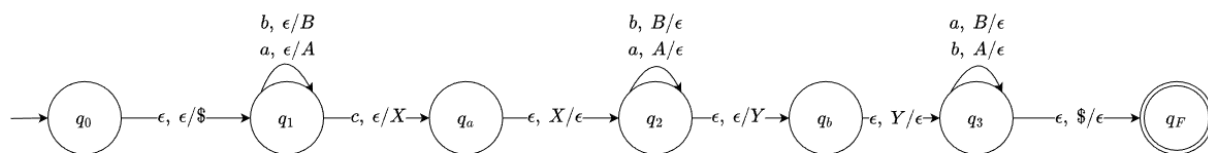
$$S \rightarrow aSb \mid bSa \mid T$$

$$T \rightarrow aTa \mid bTb \mid c$$

روش دوم:

ابتدا باید این PDA را به Simplified PDA تبدیل کنیم. در این نوع PDA شرایط زیر برقرار است:

1. فقط یک accepting state داریم.
2. قبل از قبول کردن رشته stack را خالی می‌کند.
3. هر گذار شامل دقیقا یک push و یا یک pop است ولی شامل هر 2 نیست.



$A_{00} \rightarrow \epsilon$	$A_{01} \rightarrow A_{01}A_{11}$	$A_{11} \rightarrow A_{11}A_{11}$	$A_{a2} \rightarrow A_{a2}A_{22}$	$A_{b3} \rightarrow A_{b3}A_{33}$	$A_{0F} \rightarrow A_{13}$
$A_{11} \rightarrow \epsilon$	$A_{0a} \rightarrow A_{01}A_{1a}$	$A_{1a} \rightarrow A_{11}A_{1a}$	$A_{ab} \rightarrow A_{a2}A_{2b}$	$A_{bF} \rightarrow A_{b3}A_{3F}$	$A_{12} \rightarrow bA_{12}b$
$A_{aa} \rightarrow \epsilon$	$A_{02} \rightarrow A_{01}A_{12}$	$A_{12} \rightarrow A_{11}A_{12}$	$A_{a3} \rightarrow A_{a2}A_{23}$	$A_{33} \rightarrow A_{33}A_{33}$	$A_{12} \rightarrow aA_{12}a$
$A_{22} \rightarrow \epsilon$	$A_{02} \rightarrow A_{0a}A_{a2}$	$A_{12} \rightarrow A_{1a}A_{a2}$	$A_{a3} \rightarrow A_{ab}A_{b3}$	$A_{3F} \rightarrow A_{33}A_{3F}$	$A_{13} \rightarrow bA_{13}a$
$A_{bb} \rightarrow \epsilon$	$A_{02} \rightarrow A_{02}A_{22}$	$A_{12} \rightarrow A_{12}A_{22}$	$A_{a3} \rightarrow A_{a3}A_{33}$		$A_{13} \rightarrow aA_{13}b$
$A_{33} \rightarrow \epsilon$	$A_{0b} \rightarrow A_{01}A_{1b}$	$A_{1b} \rightarrow A_{12}A_{2b}$	$A_{22} \rightarrow A_{22}A_{22}$		$A_{12} \rightarrow cA_{aa}$
$A_{FF} \rightarrow \epsilon$	$A_{0b} \rightarrow A_{0a}A_{ab}$	$A_{13} \rightarrow A_{11}A_{13}$	$A_{2b} \rightarrow A_{22}A_{2b}$		$A_{23} \rightarrow A_{22}$
	$A_{0b} \rightarrow A_{02}A_{2b}$	$A_{13} \rightarrow A_{1a}A_{a3}$	$A_{23} \rightarrow A_{22}A_{23}$		
	$A_{03} \rightarrow A_{01}A_{13}$	$A_{13} \rightarrow A_{12}A_{23}$	$A_{23} \rightarrow A_{2b}A_{b3}$		
	$A_{03} \rightarrow A_{0a}A_{a3}$	$A_{13} \rightarrow A_{1b}A_{b3}$	$A_{23} \rightarrow A_{23}A_{33}$		
	$A_{03} \rightarrow A_{02}A_{23}$	$A_{13} \rightarrow A_{13}A_{33}$	$A_{2F} \rightarrow A_{22}A_{2F}$		
	$A_{03} \rightarrow A_{0b}A_{b3}$	$A_{1F} \rightarrow A_{11}A_{1F}$	$A_{2F} \rightarrow A_{2b}A_{bF}$		
	$A_{03} \rightarrow A_{03}A_{33}$	$A_{1F} \rightarrow A_{1a}A_{aF}$	$A_{2F} \rightarrow A_{23}A_{3F}$		
	$A_{0F} \rightarrow A_{01}A_{1F}$	$A_{1F} \rightarrow A_{12}A_{2F}$			
	$A_{0F} \rightarrow A_{0a}A_{aF}$	$A_{1F} \rightarrow A_{1b}A_{bF}$			
	$A_{0F} \rightarrow A_{02}A_{2F}$	$A_{1F} \rightarrow A_{13}A_{3F}$			
	$A_{0F} \rightarrow A_{0b}A_{bF}$				
	$A_{0F} \rightarrow A_{03}A_{3F}$				

6) آیا زبان زیر مستقل از متن است؟ پاسخ خود را اثبات کنید. (10 نمره)

$$L = \{a^n b^m \mid n \neq 3m + 1, n, m \geq 1\}$$

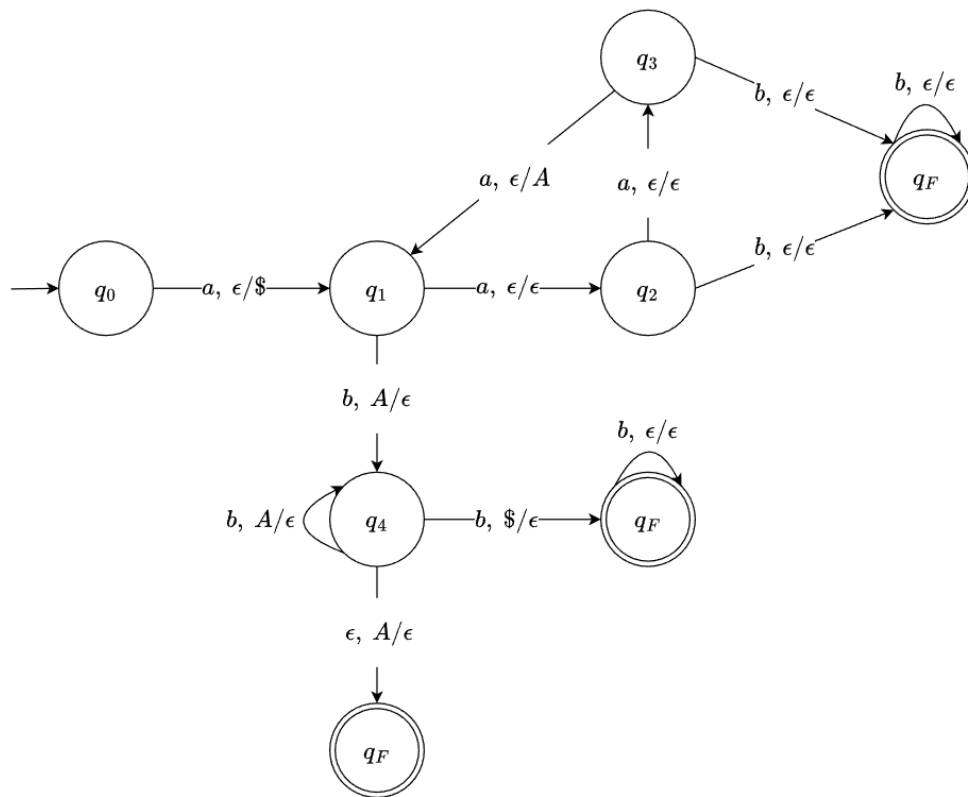
پاسخ:

بله مستقل از متن است. برای اثبات کافیست یک PDA برای این زبان رسم کنیم.

برای این سوال 3 حالت را در نظر می‌گیریم:

1.  $n = 3k$
2.  $n = 3k + 1$
3.  $n = 3k + 2$

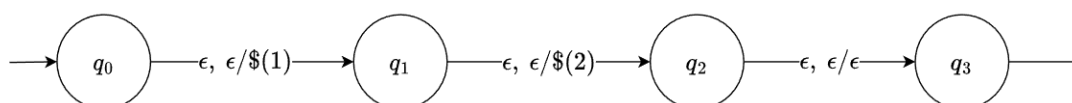
تنها حالتی که ممکن است مشکل ایجاد کند، حالت دوم است. در نتیجه می‌توانیم این 3 حالت را از هم جدا کنیم:





7) امتیازی: به PDA با 2 استک Double-Stack PDA گفته می‌شود. در این PDA شما به 2 عدد استک دسترسی دارید و در هر گذار<sup>2</sup> می‌توانید **فقط در یک استک** عملیات انجام دهید و در هر عملیات مشخص می‌کنید که از کدام استک استفاده می‌کنید. (10 نمره)

برای رسم این PDA به مثال زیر توجه کنید:



در این مثال توسط گذار اول \$ در استک اول push می‌شود و در گذار دوم \$ در استک دوم push می‌شود. در گذار سوم به دلیل عدم انجام عملیات در استک، هیچ استکی مشخص نشده است.

الف) یک Double-Stack PDA برای زبان زیر رسم کنید.

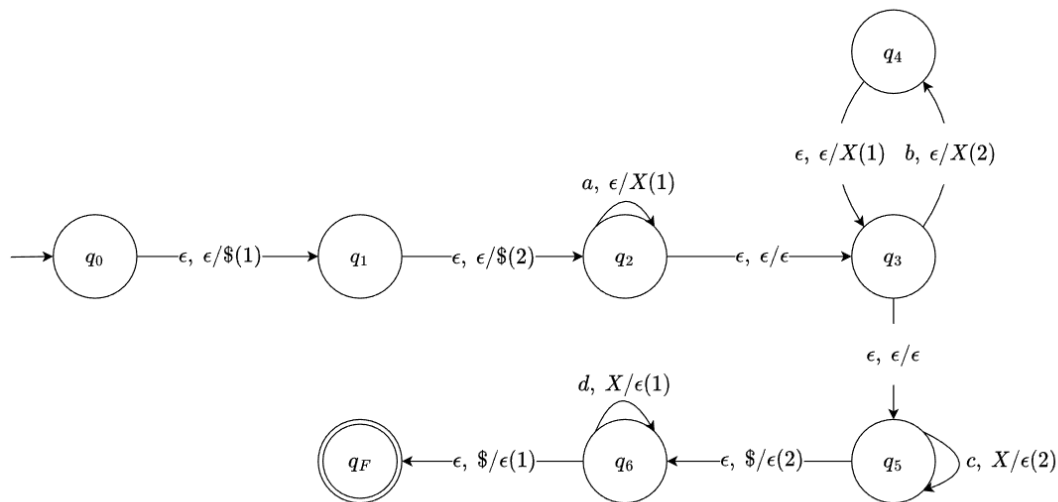
$$L = \{a^n b^m c^m d^{n+m} \mid n, m \geq 0\}$$

ب) آیا قدرت Double-Stack PDA با Single-Stack PDA یکسان است؟ به صورت خلاصه دلیل خود را توضیح دهید. دقت کنید که برای برابر بودن قدرت این دو PDA، لازم است این برابری به صورت دو طرفه وجود داشته باشد؛ در نتیجه این مورد را در دلایل خود (در صورتی که پاسخ شما برابری قدرت است)، لحاظ کنید.

**پاسخ:**

---

<sup>2</sup> Transition



خیر قدرت این دو PDA یکسان نیست. برای مثال همین زبان ذکر شده در صورت سوال را نمی‌توان توسط یک Single-Stack PDA نشان داد. در واقع می‌توان گفت زبان‌هایی که Single-Stack PDA می‌پذیرد زیرمجموعه‌ای از زبان‌هایی است که Double-Stack PDA می‌پذیرد. برای این که این مورد را اثبات کنیم، کافیست نشان دهیم که چگونه با استفاده از یک Double-Stack PDA می‌توانیم یک Single-Stack PDA را شبیه‌سازی کنیم. بدیهیست که برای این کار می‌توانیم فقط از یکی از استک‌های PDA استفاده کنیم. در ادامه درس، با زبان‌هایی که می‌توان آن‌ها را با Double-Stack PDA نشان داد آشنا خواهیم شد.