



ریاضیات گسسته

تمرین ششم - روابط و جمع‌زنی

آریان سلطانی

تاریخ تحویل ۱۴۰۱/۰۱/۲۶

سؤال ۱.

رابطه ی R روی مجموعه ی $\{1, 2, 3, 4\}$ تعریف شده است که $R = \{(1, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 2)\}$ مجموعه ی R^n را برای n های طبیعی بزرگتر از ۱ با حالت بندی بدست آورید.

سؤال ۲.

به ازای هر کدام از رابطه های زیر تعیین کنید کدام یک از خاصیت های تقارنی، پادتقارنی، بازتابی و تعدی را دارا هستند؟ و برای پاسخ خود استدلال بنویسید. (روابط روی فضای اعداد طبیعی تعریف شده اند)

الف) (x, y) عضوی از R است اگر و تنها اگر $x \neq y$

ب) (x, y) عضوی از R است اگر و تنها اگر $x \equiv y \pmod{5}$

ج) (x, y) عضوی از R است اگر و تنها اگر $x \leq y$ باشد.

سؤال ۳.

فرض کنید R و S دو رابطه تقارنی روی مجموعه ناتهی A باشند. هر کدام از گزاره های زیر را اثبات یا نقض کنید.

الف) $R \cup S$ تقارنی است.

ب) $R - S$ تقارنی است.

ج) $R \oplus S$ تقارنی است.

د) $R \circ S$ تقارنی است.

سؤال ۴.

فرض کنید A و B دو مجموعه متناهی باشند. به صورتی که داریم $|A| = |B|$. گزاره‌های زیر را اثبات کنید و به ازای هر گزاره، نشان دهید در صورتی که A و B متناهی نباشند، آن گزاره غلط خواهد بود.

الف) برای هر تابع یک به یک مثل $f: A \rightarrow B$ ، f پوشا نیز خواهد بود.

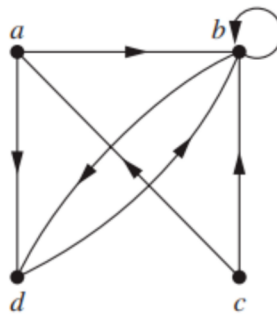
ب) برای هر تابع پوشا مثل $f: A \rightarrow B$ ، f یک به یک نیز خواهد بود.

سؤال ۵.

روی مجموعه $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ چند رابطه ی هم ارزی می توان تعریف کرد که هیچ رابطه ی (x, y) به طوری که $x \leq 5$ و $y > 5$ باشد در مجموعه نباشد؟

سؤال ۶.

می‌دانیم یکی از راه‌های نمایش روابط، استفاده از گراف‌های جهت‌دار است. به طور خلاصه در این گراف‌ها از راس a به b یالی جهت‌دار می‌کشیم، اگر و تنها اگر aRb . برای مثال گراف جهت‌دار رابطه $R = \{(a, b), (a, d), (b, b), (b, d), (c, a), (c, b), (d, b)\}$ به شکل زیر است.



کیارش گراف جهت‌دار زیر را کشیده است. او به چند طریق می‌تواند گراف را کامل کند به طوری که گراف نهایی خاصیت بازتابی نداشته باشد اما نامتقارن بوده و خاصیت تعدی داشته باشد؟

