شهرزاد ... ۸۱۰۱۰۰۲۷۲
تکلیف سری هفتم ...

---

(۱)

صورت سوال
$$m^n \mid n^m,\quad n^k \mid k^n \;\text{ثابت کنید}\; \Rightarrow m^k \mid k^m$$

$$\to m^n \times t = n^m \xrightarrow{\text{به توان } k/n \text{ می‌رسانیم}} m^k \times t^{k/n} = (n)^{\frac{km}{n}}$$

$$\to n^k \times q = k^n \xrightarrow{\text{به توان } m/n \text{ می‌رسانیم}} n^{\frac{km}{n}} \times q^{m/n} = k^m$$

مشترک است $(n)^{\frac{km}{n}}$ ← پس عبارات را ساده‌تر می‌کنیم.

$$m^k \times (t)^{k/n} = \frac{k^m}{q^{m/n}} \longrightarrow m^k \times \underbrace{(t)^{k/n} \times (q)^{m/n}}_{r} = k^m \longrightarrow m^k \times r = k^m \longrightarrow m^k \mid k^m$$

حکم اثبات شد.

لازم به ذکر است t، q، r را عدد های طبیعی تعریف کردیم و طبق اصول عادکردن نتیجه حاصل می‌شود.

(۲)

باید $(a_n , a_{n+1}) = d \xrightarrow{\text{نتیجه می‌شود}} d \mid a_n ,\ d \mid a_{n+1} \to a_n \overset{d}{\equiv} a_{n+1}$

$$\to 10 + n^2 \overset{d}{\equiv} 10 + (n+1)^2 \longrightarrow n^2 \overset{d}{\equiv} n^2 + 2n + 1$$

(باید عددی را پیدا کنیم که خودش و عدد بعدی متوالی اش به توان ۲، بر یک d مشترک بخش پذیر باشند)

پس بزرگترین d ممکن، $1 = d$ است ← پس توان ۲، آنها نیز عامل مشترک ندارند ← می‌دانیم ۲ عدد متوالی عامل مشترک ندارند ⟶

مثال: $n = 1$ $\quad 1 = (11, 14) = (a_n , a_{n+1})$

$n = 2$ $\quad 1 = (14, 19) = (a_n , a_{n+1})$

(۳)

الف) حکم: $T = a+b+c+d$ مرکب است.

$$T = a+b+c+d$$
$$\xrightarrow{\times b \text{ می‌کنیم}} Tb = ab + b^2 + cb + bd$$
$$\xrightarrow[\text{می‌کنیم}]{ab = cd \text{ جایگذاری}} Tb = cd + b^2 + cb + db$$
$$Tb = c(d+b) + b(b+d)$$
$$Tb = (b+d)(c+b)$$
$$T = \frac{(b+d)(c+b)}{b}$$

پس داریم جمع ۴ عدد طبیعی، یک عدد طبیعی است پس T_1 عدد طبیعی است. و ۲ حالت دارد که یا عدد اول است و یا عدد مرکب. با برهان خلف، فرض می‌کنیم T_1 عدد اول است.

اگر T_1 عدد اول باشد باید $T_1 = 1 \times T_1$ باشد. این یعنی $\frac{(b+d)}{b}$ یا $\frac{(c+b)}{b}$ باید برابر ۱ باشد

که چون $\frac{b+d}{b} = 1 + \frac{d}{b} \neq 1$ و $\frac{c+b}{b} = 1 + \frac{c}{b}$، این مورد غیرممکن است. ✗ ← نتیجه می‌شود T_1 مرکب است

ادامه سوال ۳

ب) برای این قسمت نیز مانند قسمت الف عمل می‌کنیم و عبارت را در b^m ضرب می‌کنیم.

$$T_m b^m = b^m a^m + b^m b^m + c^m b^m + d^m b^m$$

$$(cd)^m = (ab)^m \xrightarrow{\text{می‌دانیم}} T_m b^m = c^m d^m + b^m b^m + c^m b^m + d^m b^m$$

$$T_m b^m = c^m(d^m + b^m) + b^m(b^m + d^m)$$

$$T_m = \frac{(c^m + b^m)(d^m + b^m)}{b^m}$$

برهان خلف

مانند قسمت الف، فرض می‌کنیم T_m یک عدد اول است در این صورت $T_m = 1 \times T_m$

و یا $\frac{d^m + b^m}{b^m}$ و یا $\frac{c^m + b^m}{b^m}$ باید مساوی ۱ باشد که ناممکن است. ✗

پس T_m همواره عددی مرکب است.

ج) T_m عدد مرکب است پس آن را به صورت ضرب ۲ عدد طبیعی می‌نویسیم.

$$n^{T_m} - 1 = n^{r \times s} - 1$$

طبق اتحاد می‌دانیم: $x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + 1)$

$$(n^r)^s - 1 = (n^r - 1)(\underbrace{\qquad\qquad}_{\text{یک عدد صحیح}})$$

← پس $n^{r \times s} - 1$ یک عدد مرکب است.

(4)

الف)

$\underbrace{15x^2 - 9}_{\text{عامل ۳ دارد}} = \underbrace{7y^2}_{\text{باید عامل ۳ داشته باشد}}$ $\quad 3 \mid 7y^2 \to y = 3k$

$\xrightarrow{y=3k} 15x^2 - 9 = 7(9k^2) \xrightarrow[\text{که باید شماره ۳ داشته باشد}]{\div 3} 5x^2 - 3 = 21k^2 \to 3 \mid x \to x = 3t$

$\to 5(9t^2) - 3 = 21k^2 \xrightarrow{\div 3} 15t^2 - 1 = 7k^2$ در پیمانه ۳ mod 3 $\to 0 - 1 \overset{3}{\equiv} k^2 \to 2 \overset{3}{\equiv} k^2$

اما k به پیمانه ۳: $k=3a$ ، $k=3a+1$ ، $k=3a-1$

if $k=3a \to 9a^2 \overset{3}{\equiv} 0 \ (\neq 2)$ ✗

if $k=3a+1 \to 9a^2+6a+1 \overset{3}{\equiv} 1 \ (\neq 2)$ ✗

if $k=3a-1 \to 9a^2-6a+1 \overset{3}{\equiv} 1 \ (\neq 2)$ ✗

پس چنین عدد صحیحی وجود ندارد

ب)

اگر $x^2+y^2+z^2 = 2xyz$ باشد، حداقل یکی از x، y، z باید زوج باشد. فرض کنیم $x=2a$ و زوج است. بنابراین: $4a^2+y^2+z^2 = 4ayz$. حال اگر یکی از y و z فرد باشد، دیگری نیز فرد است و همچنین اگر یکی از آنها زوج باشد دیگری نیز زوج است. طبق ⊛ قابل اثبات است که مجموع مربعات ۲ عدد فرد هیچگاه مضرب ۴ نیست. در این صورت $4a^2$ مضرب ۴ هست ولی y^2+z^2 مضرب ۴ نیست و معادله درست نمی‌شود. ($4a^2+y^2+z^2 = 4ayz$) پس z و y نیز هر دو زوج اند در واقع x، y، z همگی زوج می‌باشند.

⊛: مجموع مربعات ۲ عدد فرد بر ۴ بخش‌پذیر نیست! $(2q+1)^2 + (2k+1)^2 = 4(k^2+q^2) + 4(k+q) + 2 = \boxed{4n+2}$

لم: اگر $\exists n \in \mathbb{N} \mid x^2+y^2+z^2 = 2^n xyz$ ، $x,y,z \in \mathbb{Z}$ و $x=2a / y=2b / z=2c$ نتیجه می‌شود که $a^2+b^2+c^2 = 2^{n+1}abc$ هستند.

طبق لم، اثبات زوج بودن x,y,z نتیجه می‌شود که اگر $x^2+y^2+z^2 = 2^n xyz$ برای برخی $x,y,z \in \mathbb{Z}$ باشند آنگاه x,y,z دنباله‌های از اعداد ضرب ۲ تقسیم می‌شوند.

یعنی برای همه $k \in \mathbb{N}$ داریم: $2^k \mid x,y,z$ که این فقط برای $x=y=z=0$ قابل قبول و ممکن است.

۲ (5) طبق قضیه ویلسون $(p-1)! \overset{p}{\equiv} -1$ $\qquad \left(\frac{p-1}{2}\right)! \times \left(\frac{p-1}{2}\right)! \overset{p}{\equiv} (-1)^{\frac{p+1}{2}}$

می‌دانیم در رابطه $a \times b \overset{m}{\equiv} k$ می‌توانیم به جای a اعداد متناظر با آنها هم ارز یکسان به پیمانه m را جایگذین کنیم.

$$1 \times 2 \times \dots \times \frac{p-1}{2} \times \left(-\frac{p-1}{2}\right) \times \dots \times -2 \times -1 \overset{p}{\equiv} -1$$

$$(-1)^n \times \left(\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right)^2 \overset{p}{\equiv} -1 \longrightarrow (-1)^{\frac{p-1}{2}} \left(\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right)^2 \overset{p}{\equiv} -1 \longrightarrow \left(\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right)^2 \overset{p}{\equiv} (-1)^{\frac{p+1}{2}}$$

ادامه

۵. ب) ۱) $p \stackrel{4}{\equiv} 1$ پس $p = 4k+1$ درنتیجه $(-1)^{\frac{p+1}{2}} = (-1)^{2k+1} = -1$

پس $\left(\frac{p-1}{2}!\right)^2$ طبق معادله الف، هم‌ارز -1 می‌باشد.

۲) $p \stackrel{4}{\equiv} 3 \Leftarrow p = 4k-1 \Leftarrow (-1)^{\frac{p+1}{2}} = (-1)^{2k} = 1$

$\Leftarrow \left(\frac{p-1}{2}!\right)^2$ معادل، هم‌ارز با ۱ است (به پیمانه p).

$$\left(\frac{p-1}{2}!\right)^2 \stackrel{p}{\equiv} 1$$

ج) استقرایی:

$$1^2\times 3^2\times 5^2\times\cdots\times(p-4)^2\times(p-2)^2 \stackrel{p}{\equiv}$$

$$(p-4)^2 \stackrel{p}{\equiv} p^2-8p+(4)^2 \stackrel{p}{\equiv} 4^2$$

$$(p-2)^2 \stackrel{p}{\equiv} p^2-4p+(2)^2 \stackrel{p}{\equiv} 2^2$$

$$\vdots$$

$$1\times 3^2\times 5^2\times\cdots\times p^2\times\cdots\times 4^2\times 2^2 \stackrel{p}{\equiv} (p!)$$

پس طبق الف و ب نتیجه می‌شود که اگر $p \stackrel{4}{\equiv} 1$ باشد حاصل، به پیمانه p برابر هم‌ارز -1 می‌شود و اگر $p \stackrel{4}{\equiv} 3$ باشد پاسخ هم‌ارز ۱ خواهد بود.

پس: $1^2\times 3^2\times 5^2\times\cdots\times(p-2)^2 \stackrel{p}{\equiv} (-1)^{\frac{p+1}{2}}$