-۳

ریاضیات گسسته

۸۱۰۱۰۰۲۷۲ شهرزاد محمد

تکلیف سری ۸

۱

الف.

$$r^3 - 2r^2 - 5r + 6 = 0$$

$$(r-1)(r-3)(r+2) = 0 \longrightarrow r_1 = 1,\ r_2 = 3,\ r_3 = -2$$

$$a_n = \alpha_1 1^n + \alpha_2 3^n + \alpha_3 (-2)^n$$

طبق شرایط اولیه سوال

$$\Rightarrow \begin{cases} a_0 = 7 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ a_1 = -4 = \alpha_1 + 3\alpha_2 + (-2)\alpha_3 \\ a_2 = 8 = \alpha_1 + 9\alpha_2 + 4\alpha_3 \end{cases} \Longrightarrow \alpha_1 = 5 \quad \alpha_2 = -1 \quad \alpha_3 = 3$$

$$\Rightarrow \boxed{a_n = 5 - 3^n + 3 \times (-2)^n}$$

ب.

$$r^2 - 6r + 8 = 0$$

$$(r-4)(r-2) = 0 \longrightarrow r_1 = 2,\ r_2 = 4$$

$$a_n = \alpha_1 2^n + \alpha_2 4^n$$

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= 4 = \alpha_1 + \alpha_2 \\ a_1 &= 10 = 2\alpha_1 + 4\alpha_2 \end{aligned}\right\} \longrightarrow \begin{aligned} -8 &= -2\alpha_1 + (-2)\alpha_2 \\ 10 &= 2\alpha_1 + 4\alpha_2 \end{aligned} \longrightarrow \alpha_2 = 1,\ \alpha_1 = 3$$

$$\Rightarrow \boxed{a_n = 3 \times 2^n + 4^n}$$

-۲-

⊛ اگر تعداد a زوج باشد داریم:

$$A:\ 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$e^x + e^{-x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2x^{2k}}{(2k)!} \longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

⊙ اگر تعداد b فرد باشد داریم:

$$B:\ x + x^3/3! + x^5/5! + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

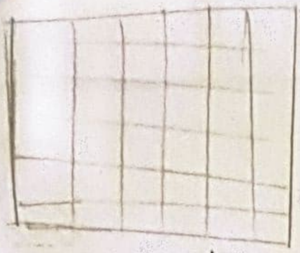
$$e^x - e^{-x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2x^{2k+1}}{(2k+1)!} \longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

(!) چون برای c شرط خاصی نداریم تابع مولد نمایی آن به صورت $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$ خواهد بود.

جواب نهایی: ضرب سه شرط (!)، ⊙، ⊛ :

$$\frac{1}{4}(e^x + e^{-x})(e^x - e^{-x})e^x = \frac{1}{4}(e^{3x} - e^{-x})$$

۳-



۱۰ ردیف

۸ پله

۴-

$$a_n = ۳a_{n-۱} + n^۲$$

$$G(x) - a_۰ = \sum_{n=۱}^{\infty} a_n x^n = ۳\sum_{n=۱}^{\infty} a_{n-۱} x^n + \sum_{n=۰}^{\infty} n^۲ x^n$$

$$= ۳x \sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=۰}^{\infty} n^۲ x^n$$

$$\to G(x) - ۱ = ۳x\, G(x) + \frac{x(x+۱)}{(۱-x)^۳}$$

$$G(x)\,(۱-۳x) = \frac{x(x+۱)}{(۱-x)^۳} + ۱$$

$$G(x) = \frac{-۳}{۲(۳x-۱)} + \frac{۱}{۱-۳x}$$

$$G(x) = \frac{۲}{۱-۳x} - ۱/۲\,\frac{۱}{(۱-x)} + \frac{۱}{(x-۱)^۳}$$

$$G(x) = ۲\sum_{n=۰}^{\infty} ۳^n x^n - ۱/۲ \sum_{n=۰}^{\infty} x^n + \sum_{n=۰}^{\infty} \binom{n+۲}{۲} x^n$$

۵- تعداد روش‌ها معادل این است که تعداد راه‌هایی که می‌توان از مختصات (۰,۰) به مختصات (۲n,۰) رسید، به طوری که y هیچ وقت منفی نشوند را بشماریم چون $a_n = |a_{n-1} \pm 1|$ یعنی قدر مطلق دارد پس منفی نخواهد بود. و یک بالا یا پایین می‌توان رفت. مسیر را طوری تقسیم می‌کنیم که قبل از (۲n,۰) به خط برسیم.
پیش از (۰,i) ← F_i و بعد از آن ← F_{n-i+1} است بنابراین:

$$f_n = \sum_{n=0}^{\infty} F_i F_{n-i+1}$$

۶-

a_n را زیرمجموعه‌های شامل n تعریف می‌کنیم.
تعداد زیرمجموعه‌هایی که n را دارا نیستند مساوی a_{n-1} است.
حالا باید زیرمجموعه‌های شامل n را بدست آوریم.
این تعداد برابر a_n است زیرا از زیرمجموعه‌های a_{n-2} اگر بزرگترین عضو زوجش با n متفاوت بود، n را وارد زیرمجموعه می‌کنیم، و اگر زوجیت یکسان داشت n و n-1 را وارد می‌کنیم

$$\boxed{a_n = a_{n-1} + a_{n-2}}$$