شهزاد محیز - ۸۱۰۱۰۰۲۷۲

آمار احتمال مهندسی تمرین دوم

---

① اطلاعات مربوط مسئله:

A : ایمیل کاری چک می‌کند.

B : ارتباطش همراه برای کار مربوط به شغل استفاده می‌کند

C : لب‌تاب به همراه دارند.

داده مسئله

① $p(A) = 0.4$

② $p(B) = 0.3$

③ $p(C) = 0.25$

④ $p(A \cap B) = 0.23$

⑤ $p(A' \cap B' \cap C') = 0.51 \rightarrow p(A \cup B \cup C) = 0.49$

⑥ $p(A|C) = 0.88 \rightarrow \frac{p(A \cap C)}{p(C)} = 0.88 \rightarrow \underline{p(A \cap C)} = p(C) \times 0.88 = \frac{1}{4} \times 0.88 = \boxed{0.22}$

⑦ $p(C|B) = 0.7 \rightarrow \frac{p(C \cap B)}{p(B)} = 0.7 \rightarrow \underline{p(C \cap B)} = 0.7 \times 0.3 = \boxed{0.21}$

حل ؟

آ) $p(B|A) = ?$

$$p(B|A) = \frac{p(B \cap A)}{p(A)} = \frac{0.23}{0.4} = \boxed{0.575}$$

ب) $p(B|C) = ?$

$$p(B|C) = \frac{p(B \cap C)}{p(C)} = \frac{0.21}{0.25} = \boxed{0.84}$$

ج)

$$p(B|A \cap C) = \frac{p(B \cap A \cap C)}{p(A \cap C)} = \frac{p(B \cap A \cap C)}{0.22} = \frac{0.2}{0.22} = \boxed{\frac{10}{11}}$$

• می‌خواهیم $p(B \cap A \cap C)$ را حساب کنیم!

$$p(A \cup B \cup C) = p(A) + p(B) + p(C) - p(A \cap B) - p(A \cap C) - p(B \cap C) + p(B \cap A \cap C)$$

$$\rightarrow p(A \cap B \cap C) = 0.49 - (0.4 + 0.3 + 0.25) + (0.23 + 0.22 + 0.21)$$

$$p(A \cap B \cap C) = 0.49 - 0.95 + 0.66 = 1.15 - 0.95 = \boxed{0.2}$$

۲

اطلاعات مسئله :

A : احتمال اینکه پاسخ یک عملیات تقسیم اشتباه شود : $\frac{1}{9\text{ میلیارد}}$

نتایج مستقل از هم است

B : احتمال اینکه حداقل یک خطا در یک میلیارد عملیات تقسیم رخ دهد؟

حل ؟

$P(B')$: احتمال اینکه هیچ خطایی در ۱ میلیارد عملیات رخ نده $P($

A' : احتمال درست بودن یک عملیات $\boxed{P(A') = 1 - \frac{1}{9\text{ میلیارد}}}$

$$P(B) = 1 - P(B') = 1 - \left(1 - \frac{1}{9\text{ میلیارد}}\right)^{1\text{ میلیارد}} = \boxed{1 - \left(1 - \frac{1}{9,\dots,\dots,\dots}\right)^{1,\dots,\dots,\dots}} = \boxed{1 - \left(1 - \frac{1}{9\times 10^{9}}\right)^{10^{9}}}$$

۳

اطلاعات مسئله :

G ← پیشامد گناهکار بودن یک مرد متهم به دزدی

E_1 , E_2 ← اتفاق افتاده

۲) آیا ممکن است $P(G|E_1) > P(G)$, $P(G|E_2) > P(G)$ ← $P(G|E_1 \cap E_2) < P(G)$ ؟

فرض می‌کنیم احتمال $P(G) = 5/10$:

$P(E_1) = 3/10$, $P(E_2) = 4/10$, $P(E_1 \cap G) = 2/10$

$P(E_2 \cap G) = 2.5/10$, $P(E_1 \cap E_2 \cap G) = 1/10$, $P(E_1 \cap E_2) = 2.5/10$

$\xrightarrow{\text{در این شرایط}}$ $P(G|E_1) = 2/3 > 5/10$, $P(G|E_2) = 2.5/4 > 5/10$ $P(G|E_1 \cap E_2) = 1/2.5 < 5/10$

پس امکان پذیر است !

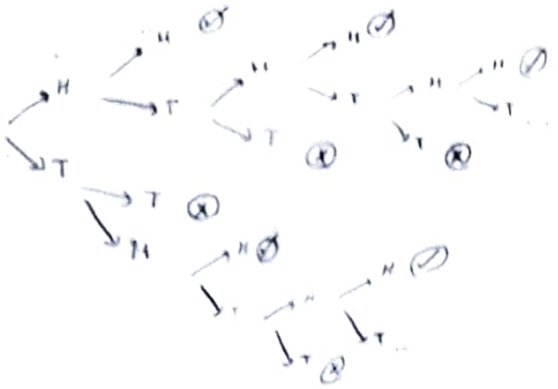
۳) ب)

$$p(E_1 \cap E_2) = p(A)$$

$$\frac{p(G \cap E_1 \cap E_2)}{p(E_1 \cap E_2)} = \boxed{\frac{p(G \cap A)}{p(A)}} \quad , \quad \frac{p(G \cap E_1)}{p(E_1)} = \boxed{\frac{p(A \cap G)}{p(A)}}$$

بنابر تاس را در نظر بگیرید که فرقی نمی‌کند اول محدودیت ۱ را اعمال کنیم بعد محدودیت ۲ را و یا هر دو را باهم اعمال کنیم

۴



$p = P(H)$ شیر

احتمال اینکه در ۳ پرتاب متوالی H بیاید.

طبق سری ها داشتیم: $1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x}$

حالات مربوط به شکل ها:

$HH \to p^2$

$THH \to (1-p)p^2$

$HTHH \to (1-p)p^3$

$THTHH \to (1-p)^2 p^3$

$HTHTHH \to (1-p)^2 p^4$

$THTHTHH \to (1-p)^3 p^4$

$\vdots$

$\xrightarrow{\text{کمک}} (2-p)p^2 + p^3(2-p)(1-p) + p^4(1-p)^2(2-p) + \dots$

$$= p^2(2-p)\underbrace{\left(1 + p(1-p) + p^2(1-p)^2 + \dots\right)}_{\frac{1}{1-p(1-p)}} = \boxed{\frac{p^2(2-p)}{1-p(1-p)}}$$

طبق سری ها:

۵

اطلاعات مسئله:

$0.9 = P(\text{۱ درست})$

$0.9 = P(\text{۲ درست})$

$0.8 = P(\text{۳ درست باشد})$

$0.8 = P(\text{۴ درست باشد})$

$P(\text{آبرسانی درست روستای شمالی}) = P(\text{۱}' \cup \text{۲}') \overset{\text{مستقل}}{=} P(A) + P(B) - P(A)P(B) = 0.9 + 0.9 - \overset{0.81}{(0.9 \times 0.9)} = \boxed{0.99}$

$P(\text{آبرسانی درست روستای جنوبی}) = P(\text{۳}' \cap \text{۴}') = P(\text{۳})P(\text{۴}) = 0.8 \times 0.8 = \boxed{0.64}$

$P(\text{جنوبی درست} \cap \text{شمالی درست}) \overset{\text{مستقل}}{=} P(\text{شمالی درست}) \cdot P(\text{جنوبی درست}) = 0.64 \times 0.99 = \boxed{0.6336}$

۶) الف)

$$p(r_2) = p(r_2 \cap r_1) + p(r_2 \cap r_1') = p(r_1') \times p(r_2) = p \times (p-1) \quad \text{I}$$

چون مساوی نیستند ۰

$$p(r_0') = p(r_0' \cap r_1) + p(r_0' \cap r_1') = p(r_0') \cdot p(r_1) = p \times (p-1) \quad \text{II}$$

اثر کلی ندارند و مساوی هستند:

$$\text{I}, \text{II} \rightarrow p(r_2) = p(r_0') \quad \checkmark$$

به عبارت دیگر:

$$\text{I} \quad p(r_2=1) = p(r_2=1 \mid r_1=1) + p(r_2=1 \mid r_1=0) = p(1-p)$$

$$\text{II} \quad p(r_2=0) = p(r_2=0 \mid r_1=0) + p(r_2=0 \mid r_1=1) = p(1-p)$$

$$\text{I}, \text{II} \longrightarrow p(r_2=0) = p(r_2=1) \longrightarrow$$

پس به احتمال یکسانی ۰ و ۱ را برمی‌گرداند

ب) اصلی‌ترین فرق قطعه کد بالا و پایین در جایی است که $r_1 = \text{unknownRandom}()$ چاپ شده.

اگر $r_1=1$ شده باشد، در قسمت while $r_2=0$ را برمی‌گرداند، اگر $r_1=0$ باشد $r_2=1$ را.

$$\left.\begin{aligned} p(\text{return}=1) &= p(r_1=0) = (1-p) \\ p(\text{return}=0) &= p(r_2=1) = p \end{aligned}\right\}$$

پس احتمال ۰ و ۱ یکسان نیست مگر آنکه $1-p=p$ ، $p=1/2$ باشد که تنها در این صورت احتمال یکسانی دارند.

آ) $p(A)=p(T_1|G)$ ، $p(B)=p(T_2|G)$ ... آیا $p(A\cap B)=p(A).p(B)$ ؟

طبق صورت سوال می‌دانیم: $p(T_1\cap T_2|G)=0.72 \leftarrow p(T_1\cap T_2\cap G)=p(G)\times 0.72$

$\boxed{p(T_1\cap T_2\cap G)=0.72\times 0.6}$

حل؟

$p(A\cap B)=p((T_1|G)\cap(T_2|G))=\dfrac{p(T_1\cap T_2\cap G)}{p(G)}=\dfrac{0.72\times 0.6}{0.6}=\boxed{0.72}$

$p(A).p(B)=0.9\times 0.8=\boxed{0.72}$ $\longrightarrow 0.72=0.72$ ✓

پاسخ آ) بله مستقل اند. زیرا شرط مستقل بودن یعنی $p(A\cap B)=p(A).p(B)$ برقرار است.

ب) $p(T_1\cap T_2|G')\overset{?}{=}\overbrace{p(T_1|G')}^{A}\,\overbrace{p(T_2|G')}^{B}$

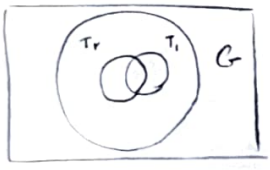
$p(T_1\cup T_2|G')=0\longrightarrow p((T_1\cup T_2)\cap G')=0\longrightarrow p((T_1\cap G')\cup(T_2\cap G'))=0\longrightarrow$

$p(T_1\cap G')+p(T_2\cap G')-p(T_1\cap T_2\cap G')=0\longrightarrow p(T_1\cap T_2\cap G')=p(T_1\cap G')+p(T_2\cap G')$

$\longrightarrow \dfrac{p(T_1\cap T_2\cap G')}{p(G')}=\dfrac{p(T_1\cap G')}{p(G')}+\dfrac{p(T_2\cap G')}{p(G')}\rightsquigarrow A\times B\overset{?}{=}A+B\longrightarrow B=\dfrac{A}{A-1}\xrightarrow{0<A<1}B<0$ ✗

پس A و B به شرط G' استقلال ندارند.

ج)



$p(T_1)=?$

$p(T_1|G)=0.8\longrightarrow p(T_1\cap G)=p(G)\times 0.8\longrightarrow$

$p(T_1\cap G)=p(T_1)=p(G)\times 0.8=0.6\times 0.8=\boxed{0.48}$

د) $p(T_2)=?$

$p(T_2|G)=0.9\longrightarrow p(T_2\cap G)=p(G).p(T_2|G)=0.6\times 0.9=\boxed{0.54}$

هـ) بله وابسته اند زیرا شرط روبرو $p(T_1\cap T_2\cap G)=p(T_1\cap T_2)\overset{?}{=}p(T_1).p(T_2)$ که مربوط به وابسته بودن شباهت است، صحیح می‌باشد.

$0.72\times 0.6\overset{?}{=}0.48\times 0.54$

$0.432\neq 0.2592$

(۸) صورت سوال :

R ← پیش آمد افزایش حقوق مریم در پایان سال

S ← افزایش سود شرکت بیش از ۱۰٪

E ← بیش از ۳۰٪ افزایش تولید است

مستقل

افزایش حقوق ← سود شرکت

$p(S) = 3/4$

$p(R|S) = \frac{p(R\cap S)}{p(S)} = 0/8 \rightarrow p(R\cap S) = \boxed{0/8 \times 3/4}$

$p(R|\bar{S}) = 0/1 \rightarrow \frac{p(R-S)}{p(\bar{S})} = 0/1 \rightarrow p(R-S) = \boxed{0/1 \times 1/4}$

$p(E|S) = 0/95 \rightarrow \frac{p(E\cap S)}{p(S)} = 0/95 \rightarrow p(E\cap S) = \boxed{0/95 \times 3/4}$

$p(E|\bar{S}) = 0/1 \rightarrow p(E-S) = p(\bar{S}) \times 0/1 = \boxed{0/1 \times 1/4}$

می دانیم شرکت بزرگتر تولیدش زیاد شده .

سوال)

$$\frac{p(R|E)}{p(\bar{R}|E)} = \frac{p(R\cap E)}{p(R\cap \bar{E})} = ?$$

$p(S|E) = \frac{p(E|S)}{p(E)} \cdot p(S) = \frac{0/95}{p(E)} \times 3/4$

$p(\bar{R}|S) = 1 - p(R|S) = 0/2$

$p(\bar{S}|E) = \frac{p(E|\bar{S}) \cdot p(\bar{S})}{p(E)} = \frac{0/1 \times 1/4}{p(E)}$

$$\frac{p(\text{افزایش حقوق})}{p(\text{عدم افزایش})} = \frac{p(S|E) \cdot p(R|S) + p(\bar{S}|E) \cdot p(R|\bar{S})}{p(S|E) \cdot p(\bar{R}|S) + p(\bar{S}|E) \cdot p(\bar{R}|\bar{S})} = \frac{p(E)}{p(E)} \times \frac{0/95 \times 3/4 \times 0/8 + 0/1 \times 1/4 \times 0/1}{\frac{3}{4} \times 0/95 \times 0/2 + 1/4 \times 0/1 \times 0/9} = \frac{0/5725}{0/265} =$$

$\boxed{\text{برابر } 3/47 \simeq}$