آمار و احتمالات مهندسی

تمرین پنجم - توزیع بتا

صبا و علی

تاریخ تحویل ۱۴۰۱/۰۹/۳۰

سؤال ۱.

یک تاس چهاروجهی سالم داریم. اگر W_n مجموع اعداد حاصل در n پرتاب مستقل باشد، امید ریاضی و واریانس W_n را به‌دست آورید.

پاسخ .

فرض کنید مقدار متغیر تصادفی X_i برابر با عدد تاس iام باشد و $X_1, X_2, ..., X_n$ متغیرهای تصادفی $i.i.d$ با تابع چگالی احتمال زیر باشند:

$$P_X(x) = \frac{1}{4} \quad for \quad \text{x=1,2,3,4}$$

می‌توانیم W_n را به فرم مجموع n متغیر تصادفی بنویسیم: $W_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$. ابتدا امید ریاضی و واریانس متغیر تصادفی X_i را حساب می‌کنیم:

$$E(X_i) = \frac{1+2+3+4}{4} = 2/5$$

$$E(X_i^2) = \frac{1+2^2+3^2+4^2}{4} = 7/5$$

$$Var(X_i) = E[X_i^2] - (E[X_i])^2 = 7/5 - (2/5)^2 = 1/25$$

با توجه به خاصیت خطی بودن امید ریاضی داریم:

$$E[W_n] = E[X_1] + ... + E[X_n] = 2/5n$$

برای واریانس نیز داریم:

$$Var(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} Cov(X_i, X_j)$$

چون پرتاب ها مستقل از هم هستند پس $Cov(X_i, X_j) = 0$ و واریانس مجموع برابر با مجموع واریانس‌ها می‌شود.

$$Var(W_n) = 1/25n$$

سؤال ۲.

$\phi_X(s)$ و $\phi_Y(s)$ به ترتیب توابع مولد گشتاور دو متغیر تصادفی X و Y هستند. اگر $\phi_X(s) = \frac{۱}{۳}(۲e^{۳s}+۱)\phi_Y(s)$ باشد و بدانیم میانگین و واریانس Y به ترتیب ۱۰ و ۱۲ هستند، واریانس متغیر X را بیابید.

پاسخ .

$$E[Y] = ۱۰ \rightarrow \phi'_Y(۰) = ۱۰$$
$$Var[Y] = ۱۲ \rightarrow E[Y^۲] - (E[Y])^۲ = ۱۲ \rightarrow E[Y^۲] = \phi''_Y(۰) = ۱۱۲$$

$$\phi'_X(s) = \frac{d}{ds}\left[\frac{۱}{۳}(۲e^{۳s}+۱)\phi_Y(s)\right] = ۲e^{۳s}\phi_Y(s) + \frac{۱}{۳}(۲e^{۳s}+۱)\phi'_Y(s)$$
$$\phi''_X(s) = ۶e^{۳s}\phi_Y(s) + ۴e^{۳s}\phi'_Y(s) + \frac{۱}{۳}(۲e^{۳s}+۱)\phi''_Y(s)$$

$$\rightarrow E[X] = \phi'_X(۰) = ۲\phi_Y(۰) + \phi'_Y(۰) = ۱۲$$

$$E[X^۲] = \phi''_X(۰) = ۶\phi_Y(۰) + ۴\phi'_Y(۰) + \phi''_Y(۰) = ۱۵۸$$
$$\rightarrow Var(X) = E[X^۲] - E[X]^۲ = ۱۴$$

سؤال ۳.

تابع چگالی توأم متغیرهای تصادفی X, Y به صورت زیر داده شده است.

$$f(x,y) = \frac{۱}{۲۴}(x+y) \qquad ۰ < x < ۳ \quad , \quad x < y < x+۲$$

الف) تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی X را بیابید.

ب) $E(Y|X=۱)$ را بیابید.

ج) تابع چگالی احتمال شرطی X به شرط $Y=۲$ را بیابید.

پاسخ .

الف)

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dy = \frac{۱}{۲۴}\int_{x}^{x+۲}(x+y)dy =$$

$$\frac{۱}{۲۴}\left(xy + \frac{y^۲}{۲}\Big|_{x}^{x+۲}\right) = \frac{x}{۶} + \frac{۱}{۱۲} \qquad for \quad ۰ < x < ۳$$

ب)

$$E(Y|X=۱) = \int y\, f_{Y|X}(y|x=۱)\, dy$$

ابتدا $f_{Y|X}(y|x=۱)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f_{Y|X}(y|x=۱) = \frac{f_{XY}(۱,y)}{f_X(۱)} = \frac{\frac{۱}{۲۴}(۱+y)}{\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۱۲}} = \frac{۱+y}{۶} \qquad for \quad ۱<y<۳$$

$$\Rightarrow E(Y|X=۱) = \frac{۱}{۶}\int_۱^۳ y(۱+y)\, dy = \frac{۱}{۶}\left(\frac{y^۲}{۲}+\frac{y^۳}{۳}\right)\Big|_۱^۳ \simeq ۲/۱۱$$

ج)

$$f_{X|Y}(x|y=۲) = \frac{f_{XY}(x,۲)}{f_Y(۲)}$$

برای محاسبه $f_Y(y)$ از توزیع احتمال توأم X و Y نسبت به x انتگرال می‌گیریم. برای تعیین حدود انتگرال باید ببینیم به ازای مقادیر مختلف y، x در چه محدوده‌ای قرار می‌گیرد. با توجه به حدود x و y که در صورت سوال مشخص شده، می‌توانیم محدوده y را به سه ناحیه تقسیم کنیم:

$$۰<y\leq ۲ \rightarrow ۰<x<y$$

$$۲<y\leq ۳ \rightarrow y-۲<x<y$$

$$۳<y<۵ \rightarrow y<x<۳$$

$$\rightarrow f_Y(y) = \begin{cases} \int_۰^y f_{XY}(x,y)\, dx & for \quad ۰<y\leq ۲ \\ \int_{y-۲}^y f_{XY}(x,y)\, dx & for \quad ۲<y\leq ۳ \\ \int_y^۳ f_{XY}(x,y)\, dx & for \quad ۳<y\leq ۵ \end{cases}$$

چون می‌خواهیم $f_Y(۲)$ را پیدا کنیم، کافی است فقط انتگرال اول را حساب کنیم:

$$f_Y(y) = \int_۰^y f_{XY}(x,y)\, dx = \frac{۱}{۲۴}\int_۰^y (x+y)\, dx = \frac{y^۲}{۱۶} \qquad for \quad ۰<y\leq ۲$$

$$\rightarrow f_Y(۲) = \frac{۱}{۴} \qquad , \qquad f_{X|Y}(x|y=۲) = \frac{\frac{۱}{۲۴}(x+۲)}{\frac{۱}{۴}} = \frac{x+۲}{۶} \qquad for \quad ۰<x<۲$$

سؤال ۴.

یک آنتن گیرنده در معرض امواج دو ایستگاه رادیویی a, b قرار دارد. می‌دانیم احتمال این‌که پیامی از ایستگاه a دریافت شود برابر p است و همچنین تعداد کل پیام‌های دریافتی در یک بازه t ثانیه‌ای از توزیع پواسون با نرخ λ پیروی می‌کند. اگر $N_a(t)$ تعداد پیام‌های دریافتی از ایستگاه a در بازه زمانی t ثانیه‌ای باشد، توزیع $N_a(t)$ را به دست آورید.

پاسخ .

اگر فرض کنیم تعداد کل پیام‌های دریافتی در t ثانیه برابر n باشد (یعنی $N(t)=n$)، آن‌گاه متغیر تصادفی $N_a(t)$ از توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای p و n پیروی می‌کند :

$$P(N_a(t)=x|N(t)=n)=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$$

حال با استفاده از قضیه احتمال کل، توزیع خواسته شده را پیدا می‌کنیم:

$$P(N_a(t)=x)=\sum_{i=x}^{\infty}P(N_a(t)=x|N(t)=i)P(N(t)=i)=$$

$$\sum_{i=x}^{\infty}\binom{i}{x}p^x(1-p)^{i-x}\frac{(\lambda t)^i}{i!}e^{-\lambda t}=\sum_{i=x}^{\infty}\frac{i!}{x!(i-x)!}\times p^x(1-p)^{i-x}\frac{(\lambda t)^i}{i!}e^{-\lambda t}=$$

$$\frac{p^xe^{-\lambda t}}{x!}(\lambda t)^x\sum_{i=x}^{\infty}\frac{(\lambda t(1-p))^{i-x}}{(i-x)!}=\frac{(p\lambda t)^xe^{-\lambda t}}{x!}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(\lambda t(1-p))^i}{i!}$$

با استفاده از بسط سری توانی ($\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x$) داریم:

$$\frac{(p\lambda t)^xe^{-\lambda t}}{x!}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(\lambda t(1-p))^i}{i!}=\frac{(p\lambda t)^xe^{-\lambda t}}{x!}e^{\lambda t(1-p)}=\frac{(p\lambda t)^x}{x!}e^{-p\lambda t}$$

پس توزیع مورد نظر یک توزیع پواسون با پارامتر λp است.

سؤال ۵.

کامپوزر قطعه‌ای است که موجودات زنده مانند انسان را به ربات‌هایی با نام $promethean$ تبدیل می‌کند و احتمال خراب بودن آن‌ها X است. یک متخصص آمار، به مدیر این شرکت پیشنهاد می‌کند که از توزیع بتا برای مدل کردن X استفاده کنند. بدین‌ترتیب، شرکت سازنده این قطعه ادعا می‌کند که به‌طور میانگین، احتمال خرابی ربات‌ها حدود ۴ درصد و با انحراف معیار ۰٫۰۲ می‌باشد.

الف) مقدار α و β را حساب کنید.

ب) بعد از بدست آوردن توزیع ، مدیر کارخانه تصمیم دارد که اطلاعات را بروز کند. به همین منظور ۱۰۰ قطعه جدید ساخته می‌شود که ۳ تا آنها خراب هستند. پارامترهای توزیع بتا چگونه تغییر می‌کند؟

ج) مقدار میانگین و انحراف معیار توزیع جدید را بدست بیاورید.

پاسخ .

الف)

$$E(X)=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}=\frac{4}{100}$$

$$Var(X)=\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)^2}=(0.02)^2$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha=3.8\\ \beta=91.2\end{cases}$$

ب) برای بدست آوردن پارامترهای جدید، باید به هرکدام تعدادی که اضافه شده‌است را به مقدار قبلی آنها اضافه نماییم:

$$\alpha_1=\alpha+3=3.8+3=6.8$$

$$\beta_1=\beta+(100-3)=91.2+97=188.2$$

ج)

$$E(x) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} = \frac{۶/۸}{۶/۸ + ۱۸۸/۲} = \frac{۶/۸}{۱۹۵} \cong ۰/۰۳۴۸۷$$

$$\sigma_X = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta+۱)(\alpha+\beta)^۲}} = \sqrt{\frac{۶/۸ \times ۱۸۸/۲}{(۱۹۶)(۱۹۵)^۲}} \cong ۰/۰۱۳۱$$

سؤال ۶.

هنگام طراحی یک خودرو حداقل و حداکثر مسافتی که خودرو با باک پر می‌تواند طی کند، به ترتیب با پارامترهای u و v تخمین زده‌شده‌اند. بعد از تولید خودرو، در مرحله تست کیفی مشخص می‌شود مسافتی که خودرو تولید شده می‌تواند در واقعیت طی کند، یک متغیر تصادفی مانند Y است به طوری‌که :

$$Y = u + (v-u)X$$

چنانچه بدانیم متغیر تصادفی X یک متغیر تصادفی بتاست:

الف) تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی Y را بیابید.

ب) با توجه به اطلاعات زیر، احتمال این‌که بنزین خودرو قبل از طی کردن یک مسیر ۳ مایلی تمام شود را محاسبه کنید.

$$X \sim Beta(۲, ۳) \qquad u = ۲ \qquad v = ۶$$

پاسخ .

الف)

فرض می‌کنیم X یک توزیع بتا با پارامترهای a, b باشد. ابتدا با استفاده از تعریف تابع چگالی احتمال متغیر بتا، تابع CDF متغیر Y را حساب می‌کنیم.

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{۱}{B(a,b)} x^{a-۱}(۱-x)^{b-۱} & for \quad ۰ < x < ۱ \\ ۰ & otherwise \end{cases}$$

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(u + (v-u)X \le y) = P(X \le \frac{y-u}{v-u}) =$$
$$\int_۰^{\frac{y-u}{v-u}} \frac{۱}{B(a,b)} x^{a-۱}(۱-x)^{b-۱} dx$$

با جایگذاری $\frac{y-u}{v-u}$ به جای x خواهیم داشت:

$$P(Y \le v) = \int_u^v \frac{۱}{B(a,b)} (\frac{y-u}{v-u})^{a-۱} (۱ - \frac{y-u}{v-u})^{b-۱} \times \frac{۱}{v-u} dy =$$
$$\int_u^v \frac{۱}{v-u} \times \frac{۱}{B(a,b)} (\frac{y-u}{v-u})^{a-۱} (\frac{v-y}{v-u})^{b-۱} dy$$

$$\rightarrow f(y) = \frac{d}{dy}F(y) = \frac{۱}{v-u}\frac{۱}{B(a,b)} (\frac{y-u}{v-u})^{a-۱} (\frac{v-y}{v-u})^{b-۱} \quad , \qquad u < y < v$$

ب)

می‌دانیم $B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$ و $\Gamma(n) = (n-۱)!$:

$$P(Y < ۳) = \int_۲^۳ \frac{۱}{۴} \times \frac{۴!}{۱!۲!} (\frac{y-۲}{۴})(\frac{۶-y}{۴})^۲ dy \approx ۰/۲۷$$

سؤال ۷.

شخصیت اصلی بازی Elden-Ring دارای دو ویژگی Faith (ایمان) و Intelligence (ذکاوت) است. دو متغیر تصادفی X و Y را به این دو ویژگی نسبت می‌دهیم، به‌طوری که دامنه این دو متغیر در $[۰,۱] \times [۰,۱]$ قرار دارد. همچنین می‌دانیم:

$$f(x,y) = c(x^۲ + xy)$$

الف) کوواریانس بین X و Y را حساب کنید.

ب) ضریب همبستگی بین X و Y را بیابید.

ج) تفاوت «الف» و «ب» را بررسی کنید.

نکته : این پرسش ادامه پرسش شش تمرین قبلی می‌باشد.

پاسخ .

یادآوری:

ابتدا c و $F_{XY}(x,y)$ را حساب می‌کنیم. می‌دانیم که $F_{XY}(x,y)$ در بازه $[۰،۱] \times [۰،۱]$ برابر ۱ است که در این صورت می‌توان نوشت:

$$\int_۰^۱ \int_۰^۱ c(x^۲ + xy) dy dx = ۱ \Rightarrow c \int_۰^۱ x^۲ + \frac{x}{۲} dx = c(\frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴}) = \frac{۷c}{۱۲} = ۱ \Rightarrow c = \frac{۱۲}{۷}$$

$$F_{XY}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \frac{۱۲}{۷} \int_۰^x \int_۰^y (u^۲ + uv) dv du = \frac{۱۲}{۷} \int_۰^x (u^۲ y + \frac{uy^۲}{۲}) du = \frac{۱۲}{۷}(\frac{x^۳ y}{۳} + \frac{x^۲ y^۲}{۴})$$

حال $F_{XY}(x,y)$ را حساب می‌کنیم:

$$F_X(x) = F_{XY}(x,۱) = \frac{۱۲}{۷}(\frac{x^۳}{۳} + \frac{x^۲}{۴})$$

$$F_Y(y) = F_{XY}(۱,y) = \frac{۱۲}{۷}(\frac{y}{۳} + \frac{y^۲}{۴})$$

$$E(X) = \int_۰^۱ x f_X(x) dx = \frac{۱۲}{۷} \int_۰^۱ x(x^۲ + \frac{x}{۲}) dx = \frac{۱۲}{۷}(\frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۶}) = \frac{۵}{۷}$$

$$E(X^۲) = \int_۰^۱ x^۲ f_X(x) dx = \frac{۳۹}{۷۰}$$

$$\Rightarrow Var(X) = E(X^۲) - E(X)^۲ \cong ۰/۰۴۶۹$$

الف) می‌دانیم:

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

حال حساب می‌کنیم:

$$E(Y) = \int_۰^۱ y f_Y(y) dy = \frac{۱۲}{۷} \int_۰^۱ y(\frac{۱}{۳} + \frac{y}{۲}) dy = \frac{۴}{۷} \cong ۰/۵۷۱۴$$

$$E(XY) = \int_۰^۱ \int_۰^۱ xyf(x,y) dydx = \frac{۱۲}{۷} \int_۰^۱ \int_۰^۱ x^۳y + x^۲y^۲ dydx = \frac{۱۷}{۴۲} \cong ۰/۴۰۴۸$$

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = ۰/۴۰۴۸ - (\frac{۵}{۷} \times ۰/۵۷۱۴) \cong -۰/۰۰۳۴$$

ب) می‌دانیم :

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}$$

حال حساب می‌کنیم:

$$E(Y^۲) = \int_۰^۱ y^۲ f_Y(y) = \frac{۱۲}{۷} \int_۰^۱ y^۲(\frac{۱}{۳} + \frac{y}{۲}) dy = \frac{۱۷}{۴۲} \cong ۰/۴۰۴۸$$

$$Var(Y) = E(Y^۲) - E(Y)^۲ \cong ۰/۰۷۸۲$$

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} = \frac{-۰/۰۰۳۴}{۰/۰۴۶۹ \times ۰/۰۷۸۲} = -۰/۰۵۶۱$$

ج) هر دو (هم کوواریانس و هم ضریب هم‌بستگی) متغیر تصادفی را در کل بازه بررسی می‌کنند و نه در یک نقطه خاص از بازه. همچنین با توجه به فرمول بندی ضریب هم‌بستگی، می‌توانیم بگوییم که این دو همواره هم‌علامت هستند. کوواریانس نشان‌دهنده این است که دو متغیر در صورت تغییر کردن تا چه مقدار با یکدیگر تغییر می‌کنند. با این‌حال ضریب همبستگی نشان‌دهنده این است که این دو متغیر چقدر با یکدیگر مرتبط هستند. همچنین ضریب هم‌بستگی یک مقیاس از کوواریانس می‌باشد.

سؤال ۸.

N یک متغیر تصادفی با توزیع پواسون و پارامتر λ است که تعداد فایل‌های ویروسی که در طول ۲۴ ساعت به یک سرور وارد می‌شوند را نشان می‌دهد. می‌دانیم هر فایل ویروسی با احتمال p و مستقل از سایر فایل‌ها به درستی توسط آنتی‌ویروس تشخیص داده می‌شود و از بین می‌رود. فرض کنید متغیر تصادفی X تعداد فایل‌هایی باشد که توسط آنتی‌ویروس از بین می‌روند و متغیر تصادفی Y تعداد فایل‌های ویروسی باشد که در سرور باقی می‌مانند.

ضریب همبستگی بین تعداد فایل‌هایی که توسط آنتی‌ویروس از بین می‌روند و تعداد فایل‌های ویروسی که در طول ۲۴ ساعت به یک سرور وارد می‌شوند را بیابید.

پاسخ .
می‌دانیم هر فایلی که به سیستم وارد می‌شود به احتمال p توسط آنتی‌ویروس از بین می‌رود و به احتمال $۱ - p$ در سیستم باقی می‌ماند. پس اگر تعداد کل فایل‌ها n باشد، تعداد فایل‌هایی که توسط آنتی‌ویروس از بین می‌روند از توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای p و n پیروی می‌کند.

$$P(X = x | N = n) \sim Bin(n, p)$$

با استفاده از قانون احتمال کل توزیع متغیر X را به‌دست می‌آوریم:

$$P(X = i, Y = j) = P(X = i, Y = j | N = i + j) P(N = i + j)$$

$$= P(X=i|N=i+j)P(N=i+j)$$

$$= \frac{(i+j)!}{i!j!}p^i(1-p)^j e^{-\lambda}\frac{\lambda^{i+j}}{(i+j)!} = (e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^i}{i!})\times(e^{-\lambda(1-p)}\frac{(\lambda(1-p))^j}{j!}) = P(X=i)\times P(Y=j)$$

در نتیجه X, Y توزیع پواسون دارند و از هم مستقل هستند.

$$\to X \sim Poi(\lambda p) \quad and \quad Y \sim Poi(\lambda(1-p))$$

توجه کنید فقط زمانی می‌توانیم از عبارت $X+Y=N$ وابسته بودن دو متغیر X و Y را نتیجه بگیریم که مقدار N مشخص باشد. اما در این سوال مقدار N مشخص نیست.

$$\rho(X,N) = \frac{Cov(X,N)}{\sqrt{Var(x)Var(N)}}$$

چون متغیرهای X, N توزیع پواسون دارند پس واریانس آن‌ها به‌ترتیب $\sqrt{\lambda}$ و $\sqrt{\lambda p}$ می‌شود.
برای محاسبه کوواریانس نیز داریم:

$$Cov(X,N) = Cov(X,X+Y) = E[X(X+Y)] - E[X]E[X+Y] = E[XX+XY] - E[X]E[X+Y]$$

با توجه به خاصیت خطی بودن امید ریاضی می‌توانیم بنویسیم:

$$E[XX+XY] - E[X]E[X+Y] = E[XX] + E[XY] - E[X](E[X]+E[Y]) =$$

$$(E[XX] - E[X]E[X]) + (E[YX] - E[Y]E[X]) = Cov(X,X) + Cov(X,Y)$$

با توجه به استقلال X, Y بدیهی است که کوواریانس آن ها صفر است و همچنین می‌دانیم $Cov(X,X) = Var(X)$.
در نهایت با جایگذاری موارد به دست آمده ضریب هبستگی را حساب می‌کنیم:

$$\rho(X,N) = \frac{\lambda p}{\sqrt{\lambda p \times \lambda}} = \sqrt{p}$$

سؤال ۹.

تمرین کامپیوتری سری پنجم با موضوع «توزیع بتا و همبستگی متغیرهای تصادفی» را می‌توانید از طریق این لینک [1] دریافت کنید.

- یک کپی از فایل مذکور با نام CA5_SID در گوگل درایو خود تهیه کنید.
- در فایل خود بخش‌هایی که به وسیله مستطیل مشخص شده‌اند را با کدهای مناسب جایگزین کنید.
- سوالاتی که به زبان فارسی و رنگ سفید مطرح شده‌اند را در همان سلول پاسخ دهید.
- فایل کد خود را با ایمیل taha.fakharian@gmail.com با دسترسی Editor به اشتراک بگذارید.
- لینک فایل پاسخ خود را در بخش متنی جایگاه آپلود این تمرین در سامانه ایلرن قرار دهید.
- دقت کنید در صورتی که لازم به ایجاد یک سلول جدید برای اجرای کد داشتید، اول سلول از R%% استفاده کنید تا سلول به عنوان کد R تشخیص داده شود.

[1] https://colab.research.google.com/drive/1QBiQSN98pUk7jJvcVw_q1ZggUqoxkltU?usp=sharing

هرگونه انتقاد، پیشنهاد یا نکته جانبی را می‌توانید از طریق یک سلول متنی در ابتدای فایل (قبل از سرفصل اصلی) به ما منتقل کنید.

پاسخ .

تکمیل شده‌ی فایل صورت سوال از طریق این لینک [2] در دسترس است.

[2]https://colab.research.google.com/drive/1dRgG$_{F}AaungI_{k}T_{9}51QvRVLL5nBXGYi?usp=sharing$