شهرزاد ممیز، ۸۱۰۱۰۰۲۷۲ ، تمرین ۳، آمار و احتمال مهندسی

۱

الف) توزیع پواسون — ب) توزیع هندسی — پ) توزیع ۲ جمله‌ای

ت) توزیع هندسی — ث) فوق هندسی — ج) پواسون

سوال ۲.

الف) در میانگین‌گیری اشتباه کرده. اشتباهش در انتخاب متغیر تصادفی بوده است. در اینجا متغیر تصادفی X را جمعیت هر کلاس در نظر گرفته است.

$$E(X) = 20\times 1/4 + 23\times 1/4 + 17\times 1/4 + 100\times 1/4 = 160/4 = 40$$

برای آنکه احساس دانشجویان را حدس بزنیم، متغیر تصادفی را جمعیت کلاسی که هر دانشجو از آن انتخاب شده است را در نظر می‌گیریم.

$$E(Y) = 20\times 20/160 + 23\times 23/160 + 17\times 17/160 + 100\times 100/160 \simeq 70{,}1$$

که این تعداد بیشتر از نصف است و میزان بالای تقاضا را توجیه می‌کند.

ب) از سالن ۱۰۰ نفره که تعداد افراد بیشتری در آن هستند.

پ) اگر توزیع جمعیت منظم بود، $Var(X)$ به صفر میل می‌کرد. برای مثال اگر به هر سالن ۴۰ نفر جمعیت تخصیص می‌یافت، آنگاه $E(X)=E(Y)=40$ می‌شد.

سوال ۳.

الف) توزیع ۲ جمله‌ای

$$X \sim Bin(n, 2p(1-p))$$

ب)

$$\begin{cases} +1\ \$ & (T,H)\ (H,T) & 2p(1-p) \\ -1\ \$ & (T,T)\ (H,H) & (1-p)^2+p^2 \end{cases}$$

$$Y = X-(n-X) = 2X-n$$

$$E[X] = 2np(1-p)$$

$$E[Y] = 2(\underbrace{2np(1-p)}_{X}) - n = 4np(1-p) - n$$

$$Var(X) = 2np(1-p)(2p^2-2p+1)$$

$$Var(Y) \quad 8np(1-p)(2p^2-2p+1)$$

$$Var(Y) = 4\,Var(X)$$

سوال ۴.

الف) آزمایش تصادفی بین N نفر است. K نفر ویژگی خاص (دریافت برگه نامزد اولی) را دارا هستند.
پس توزیع فوق هندسی است K ← موفقیت آزمایش

ب) تابع جرمی احتمال:

$$P_X(i) = prob\{X=i\} = \frac{\binom{200}{i}\binom{1800}{200-i}}{\binom{2000}{200}}$$

پ) x_i را کسی که تبلیغ نامزد اول را دریافت کرده از نامزد دیگر هم تبلیغ بیاید که ← ۱ ، دیگر ← ۰

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_{200}$$

$$P(X_1 = 1) = \frac{200}{2000} = 1/10 \longrightarrow E(X_i) = 0 \times 9/10 + 1 \times 1/10 = 1/10$$

$$E(X) = E(X_1) + \dots + E(X_{200}) = 200/10 = 20 \longrightarrow$$ امید ریاضی

سوال ۵.

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

X_i را چنان تعریف می‌کنیم که ← ۰ اگر بین کل افراد، نفر i ام با کسی تاس مشابه نداشته باشد
← ۱ اگر " " " داشته باشد.

$A =$ نفر i ام با کسی در بین تمام افراد، تاس یکسان داشته باشد.

$$P(A') = (5/6)^{n-1} \longrightarrow P(A) = 1 - (5/6)^{n-1}$$

$$E(X) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n) = n - n(5/6)^{n-1}$$

سوال ۶.

الف)

$$F(Y) = P(Y \leq y) = 1 - P(Y > y) = 1 - P\left(\min(X_1, X_2, \dots, X_n) > y\right)$$

متغیرهای تصادفی مستقل اند:

$$\longrightarrow 1 - P(X_1 > y)\, P(X_2 > y) \cdots P(X_n > y)$$

توزیع یکنواخت است، و همه احتمالات برابرند

$$\longrightarrow 1 - P(X_n > y)^n$$

$$P(X_n > y) = \frac{b-y}{b-a}$$ اگر y در بازه (a,b) باشد داریم:

$$P(X_n > y) = 1$$ اگر y از a کوچکتر باشد، داریم:

$$P(X_n > y) = 0$$ اگر y از b بزرگتر باشد، داریم:

$$F(Y) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{b-y}{b-a}\right)^n & y \in (a,b) \\ 1 & y < a \\ 0 & y > b \end{cases}$$

ب) منبع: اینترنت بود.

$$F'(Y) = \begin{cases} \frac{n}{b-a}\left(\frac{b-y}{b-a}\right)^{n-1} & y \in (a,b) \\ 0 & y \notin (a,b) \end{cases}$$

$$\longrightarrow E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y\, F(y)\, dy = \frac{b+na}{n+1}$$

منبع اینترنت

سوال ۲.

الف) m = بزرگترین شماره تانک نابود شده توسط دشمن

$$P(N=x)=\begin{cases} 0 & x<m \\ \dfrac{n-1}{n}\times\dfrac{\binom{m-1}{n-1}}{\binom{x}{n}} & x\geq m \end{cases}$$

$$\mu=(m-1)\frac{n-1}{n-2} \quad , \quad \sigma=\sqrt{\frac{(n-1)(m-1)(m-n+1)}{(n-3)(n-2)^2}} \qquad N\simeq\mu\pm\sigma$$

$$\mu=(117-1)\frac{(12-1)}{(12-2)}=127{,}6$$

$$\sigma=\sqrt{\frac{(12-1)(116)(117-12+1)}{9\times(12-2)^2}}\simeq 12$$

$$N\simeq 128\mp 12 \xrightarrow{\text{تقریبا}} 116\leq N\leq 140$$