ریاضیات گسسته

پاسخنامه تمرین پنجم - استقرا

کیمیا محمد طاهری

سؤال ۱.

n نفر داریم که در ابتدا هر یک از آن‌ها یک خبر متمایز دارند ($n \geq ۴$). در هر تماس، دو نفر با هم صحبت می‌کنند و تمامی اخباری را که می‌دانند به یک‌دیگر می‌گویند. ثابت کنید ترتیب تماس‌ها می‌تواند طوری باشد که با $(۲n - ۴)$ بار تماس، تمامی افراد از تمامی اخبار مطلع شوند.

پاسخ.

برای اثبات مسئله از استقرا روی n استفاده می‌کنیم.
پایه استقرا: اگر $n = ۴$ باشد و افراد را $a_۱, \ldots, a_۴$ بنامیم، تماس‌ها را به ترتیب زیر در نظر بگیرید:

$$\{a_۱, a_۲\}, \{a_۳, a_۴\}, \{a_۱, a_۳\}, \{a_۲, a_۴\}$$

پس می‌توانیم با $۴ = ۲ \times ۴ - ۴$ مرحله تماس، تمامی اطلاعات را منتقل کنیم.
حال فرض کنید حکم مسئله برای $n = k$ درست باشد. آن را برای $n = k + ۱$ ثابت می‌کنیم. افراد را $a_۱, \ldots, a_{k+۱}$ بنامید. اگر در اولین مرحله $a_{k+۱}$ و a_k یک تماس داشته باشند، a_k از تمامی اخباری که $a_{k+۱}$ دارد مطلع می‌شود. سپس $a_{k+۱}$ را حذف می‌کنیم و طبق فرض استقرا، مسئله را برای k نفر باقی‌مانده حل می‌کنیم. در نتیجه آن، همه این k نفر توسط $۲k - ۴$ تماس، از اخبار یک‌دیگر مطلع می‌شوند و چون a_k اخبار $a_{k+۱}$ را نیز در بر داشت، نتیجه می‌گیریم که $a_۱, \ldots, a_k$ از همه اخبار کل جمع (با احتساب $a_{k+۱}$) مطلع‌اند. حال یک تماس بین $a_{k+۱}$ و a_k برقرار می‌کنیم. a_k که از کل اخبار مطلع بود، این اخبار را به $a_{k+۱}$ نیز انتقال می‌دهد. پس با $۱ + (۲k - ۴) + ۱ = ۲(k + ۱) - ۴$ تماس، اخبار را بین همه پخش کردیم. پس بنا به استقرا حکم ثابت می‌گردد.

سؤال ۲.

نا مساوی زیر را با استفاده از استقرا، برای تمام nهای طبیعی ثابت کنید.

$$\frac{۱}{۲} \times \frac{۳}{۴} \times \ldots \times \frac{۲n - ۱}{۲n} < \frac{۱}{\sqrt{۳n}}$$

پاسخ.

اگر $n = ۱$ باشد بدیهی است که نامساوی برقرار است : $\frac{۱}{۲} < \frac{۱}{\sqrt{۳} \simeq ۱/۷}$

اما برای اثبات این نامساوی در n های بزرگ تر از ۱، از یک نامساوی قوی تر استفاده می کنیم و آن را اثبات می کنیم :

$$\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \ldots \times \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$$

پایه استقرا : اگر $n = 2$ آنگاه برای نامساوی به دست آمده داریم : $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8} < \frac{1}{\sqrt{7} \simeq 2/65}$ که بدیهی است که برقرار است.

گام استقرا : فرض می کنیم نامساوی به ازای $n = k$ درست است و درستی نامساوی را به ازای $n = k+1$ اثبات می کنیم.

$$n = k : \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \ldots \times \frac{2k-1}{2k} < \frac{1}{\sqrt{3k+1}}$$

$$n = k+1 : \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \ldots \times \frac{2k-1}{2k} \times \frac{2k+1}{2k+2} < \frac{1}{\sqrt{3k+4}}$$

با توجه به این که سمت راست نامساوی دوم از ضرب $\sqrt{\frac{3k+1}{3k+4}}$ در سمت راست نامساوی اول به دست آمده و این که فرض کرده ایم که نامساوی اول درست است، اگر نامساوی زیر را اثبات کنیم، گام استقرا نیز اثبات شده است. (چرا؟) :

$$\frac{2k+1}{2k+2} < \frac{\sqrt{3k+1}}{\sqrt{3k+4}}$$

برای اثبات نامساوی فوق داریم :

$$\frac{2k+1}{2k+2} < \frac{\sqrt{3k+1}}{\sqrt{3k+4}} \Leftrightarrow \frac{4k^2+4k+1}{4k^2+8k+4} < \frac{3k+1}{3k+4} \Leftrightarrow 1 - \frac{4k+3}{4k^2+8k+4} < 1 - \frac{3}{3k+4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4k+3}{4k^2+8k+4} > \frac{3}{3k+4} \Leftrightarrow 12k^2+25k+12 > 12k^2+24k+12 \Leftrightarrow k > 0 (trivial)$$

در نتیجه با توجه به دو گام استقرا نامساوی قوی تر برای $n > 1$ اثبات شد. از آنجا که $\frac{1}{\sqrt{3k}} < \frac{1}{\sqrt{3k+1}}$ می توان گفت که نامساوی اصلی نیز برای $n > 1$ اثبات شده است.

سؤال ۳.

اگر f_n جمله nام دنباله فیبوناچی باشد، تساوی زیر را ثابت کنید:

$$f_{m+n+1} = f_n f_m + f_{n+1} f_{m+1}$$

پاسخ .

پایه استقرا:

$$f_3 = f_1 f_1 + f_2 f_2 = 1 \times 1 + 1 \times 1 = 2$$

فرض استقرا: به ازای هر $n, m < k$ شرط سوال برقرار است. حکم استقرا: به ازای هر $n, m < k+1$ شرط سوال برقرار است.

اثبات: با توجه به تقارن بین n و m کافی است که حکم را به ازای یکی از آنها اثبات کنیم. به ازای هر $a < k$ و $m = k$ داریم:

$$f_{m+a+1} = f_a f_m + f_{a+1} f_{m+1}$$

$$
\begin{aligned}
&f_{m+a} = f_a f_{m-1} + f_{a+1} f_m \\
&\rightarrow f_{m+a+1} + f_{m+a} = f_a f_m + f_{a+1} f_{m+1} + f_a f_{m-1} + f_{a+1} f_m \\
&\rightarrow f_{(m+1)+a+1} = f_a(f_m + f_{m-1}) + f_{a+1}(f_{m+1} + f_m) \\
&\rightarrow f_{(m+1)+a+1} = f_a f_{m+1} + f_{a+1} f_{m+2}
\end{aligned}
$$

بنابراین حکم استقرا ثابت شد و اثبات تمام است.

سؤال ۴.

هر خانه از یک جدول $2n \times 2n$ با یکی از چهار رنگ موجود رنگ شده است طوری که در هر مربع 2×2 هیچ دو خانه‌ای هم‌رنگ نیستند. ثابت کنید هیچ دوتا از چهار خانه‌ی واقع در گوشه‌های جدول نیز هم‌رنگ نیستند.

پاسخ .

ایده حل: با استقرا روی n ثابت می‌کنیم.
پایه به ازای $n = 1$ بدیهی است.
فرض استقرا: به‌ازای هر جدول $2(n-1) \times 2(n-1)$ که شرایط سوال را داشته باشد، رنگ هر ۴ گوشه آن متمایز خواهد بود.
حکم: به‌ازای هر جدول $2n \times 2n$ که شرایط سوال را داشته باشد، رنگ هر ۴گوشه آن متمایز خواهد بود.
ابتدا نشان می‌دهیم که خانه‌های واقع در گوشه‌های مجاور جدول نمی‌توانند هم‌رنگ باشند. به این منطور برای خانه‌های گوشه بالا راست و چپ این موضوع را نشان داده و برای گوشه های مجاور دیگر نیز به همین ترتیب اثبات خواهد شد. دو سطر اول را در نظر می‌گیریم که در آن n مربع 2×2 وجود دارد. مربع اول با مربع دوم در ستون دوم مشترک است. با توجه به این که هر مربع با ۴ رنگ، رنگ شده است و دو رنگ آن در ستون دوم بین مربع اول و دوم مشترک است، بنابراین دو رنگ ستون اول و سوم نیز یکسان خواهد بود. به همین ترتیب ستون های اول، سوم، پنجم و... با هم و ستون های دوم، چهارم، ششم و... نیز باهم در رنگ‌های به کار رفته مشترک خواهند بود. از آن‌جایی که تعداد ستون‌ها زوج است پس ستون اول و آخر زوجیت یکسانی ندارند و در رنگ های به کار رفته مشترک نیستند. بنابراین دو خانه گوشه بالا راست و چپ دو رنگ متمایز دارند.
حال فرض کنید خانه‌های گوشه‌ی متقابل $(1, 1)$ و $(2n, 2n)$ متمایز نباشند و به رنگ یکسان ۱ باشند. نشان می‌دهیم خانه‌های $(2, 2n-1)$ و $(2n-1, 2)$ نیز باید به همین رنگ باشند.
با توجه به توضیحات قبلی، دو رنگ خانه‌های $(1, 2n-1)$ و $(2, 2n-1)$ با $(1, 1)$ و $(2, 1)$ یکسان است و به صورت مشابه دو رنگ خانه های $(2, 2n-1)$ و $(2, 2n)$ با $(2n, 2n)$ و $(2n, 2n-1)$ یکسان است. چون سه خانه‌ی $(1, 2n-1)$ و $(2, 2n-1)$ و $(2, 2n)$ در یک مربع باهم حضور دارند و باید سه رنگ متفاوت داشته باشند، بنابراین خانه‌ی $(2, 2n-1)$ که اشتراک سطر و ستون این مربع است که هر دو رنگ ۱ را در خود دارند، به رنگ ۱ است. به صورت مشابه همین موضوع برای خانه‌ی $(2n-1, 2)$ اثبات می‌شود.
با توجه به این که حذف سطر و ستون اول و آخر شرط جدول را از بین نخواهد برد، با این حذف به یک جدول $2(n-1) \times 2(n-1)$ می‌رسیم که دو گوشه آن هم‌رنگند. این موضوع با فرض استقرا در تناقض است. پس وجود دو گوشه هم‌رنگ ممکن نیست و هر ۴ گوشه رنگ‌های متمایز دارند.

سؤال ۵.

فرض کنید $x_1, x_2, \ldots, x_n$ اعدادی در بازه‌ی $0 \le x_i \le \frac{1}{2}$ باشند. ثابت کنید:

$$
\frac{\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n}}{\left(\prod_{i=1}^{n}(1-x_i)\right)^{1/n}} \le \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(1-x_i)}
$$

(اگر $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ باشد، نامساوی به تساوی تبدیل خواهد شد.)

پاسخ .

مساله را در دو بخش حل می کنیم. ابتدا در بخش ۱ با استفاده از استقرا معمولی، اثبات می‌کنیم که با فرض درست بودن مرحله nاُم، مرحله $2n$ نیز درست خواهد بود. (در واقع اثبات می‌کنیم این حکم به ازای مجموعه بی‌شماری از اعداد طبیعی درست است.) سپس در بخش ۲، گام استقرا **قهقرایی** (اثبات صحت مرحله nاُم با استفاده از فرض درست بودن مرحله $n+1$اُم) را ثابت می کنیم تا مساله حل شود. (در واقع درستی حکم برای کل اعداد طبیعی را اثبات می‌کنیم.)

برای هر $x_1, \dots, x_n \in [0, \frac{1}{2}]$ تعریف می‌کنیم:

$$f(x_k) = \frac{x_k}{1 - x_k}; \quad f(x_1, \dots, x_n) = \frac{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k}{1 - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k}$$

نامساوی روی سوال را بازنویسی می‌کنیم:

$$\mathcal{S}_n : f(x_1, \dots, x_n) \geq \prod_{k=1}^{n} f(x_k)^{\frac{1}{n}}$$

حال فرض می‌کنیم برای $n \geq 2$ عبارت بالا به ازای $(x_1, \dots, x_n) \in [0, \frac{1}{2}]$ برقرار باشد.

۱. می‌دانیم $\mathcal{S}_2$ برقرار است:

$$for x, y \in [0, \frac{1}{2}]; \mathcal{S}_2 : f(x, y) \geq (f(x)f(y))^{\frac{1}{2}}; f(x, y)^2 - f(x)f(y) = \frac{(1 - x - y)(x - y)^2}{(1 - x)(1 - y)(2 - x - y)^2} \geq 0$$

۲. فرض کنیم $\mathcal{S}_n$ برقرار است:

$$for \ \ x_1, x_2, \dots, x_{2n} \in [0, \frac{1}{2}] \ \ let \ \ z_k = \frac{1}{2}(x_{2k-1} + x_{2k}) \ \ for \ \ k = 1, \dots, n$$

$$\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n} x_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} z_k \rightarrow f(x_1, \dots, x_{2n}) = f(z_1, \dots, z_n) \overset{\mathcal{S}_n}{\geq} \prod_{k=1}^{n} f(z_k)^{\frac{1}{n}}$$

$$= \prod_{k=1}^{n} f(x_{2k-1}, x_{2k})^{\frac{1}{n}} \overset{\mathcal{S}_2}{\geq} \prod_{k=1}^{n} \left(f(x_{2k-1})^{\frac{1}{2}} f(x_{2k})^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{n}} = \prod_{k=1}^{2n} f(x_k)^{\frac{1}{2n}}$$

$$So: \ \ \mathcal{S}_n \ \ implies \ \ \mathcal{S}_{2n}$$

۳. فرض کنیم $\mathcal{S}_{n+1}$ به ازای $n \geq 2$ برقرار باشد:

$$for \ \ x_1, x_2, \dots, x_n \in [0, \frac{1}{2}] \ \ let \ \ x_{n+1} = \bar{x} \overset{def}{=} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$$

اگر $\bar{x} = 0$ باشد می‌توان گفت $x_k = 0$ است و نامساوی برقرار است. اگر $\bar{x} \neq 0$ داریم:

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} x_k = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$$

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(\bar{x}) = f(x_1, \dots, x_{n+1}) \overset{\mathcal{S}_{n+1}}{\geq} \left(\prod_{k=1}^{n+1} f(x_k) \right)^{\frac{1}{n+1}} = \left(f(\bar{x}) \prod_{k=1}^{n} f(x_k) \right)^{\frac{1}{n+1}}$$

$$\rightarrow f(x_1, \dots, x_n) \geq \prod_{k=1}^{n} f(x_k)^{\frac{1}{n}}$$

$$So: \ \ \mathcal{S}_{n+1} \ \ implies \ \ \mathcal{S}_n$$

سؤال ۶.

الف) نشان دهید که می‌توان اعداد ۱ تا n را طوری کنار هم نوشت که میانگین هیچ دو عددی بین‌شان نیامده باشد.

ب) حال نشان دهید بی‌نهایت عدد طبیعی n وجود دارد که بتوان اعداد $۱, ۲, ۳, \dots, n^۲$ را در یک جدول $n \times n$ قرار داد طوری که میانگین هیچ دو عددی در کوچک‌ترین مستطیل شامل این دو عدد قرار نگیرد.

پاسخ .

الف) ابتدا حکم را برای $n = ۲^k$ اثبات می‌کنیم. سپس برای باقی اعداد (m) کافی‌ست اولین عدد $n = ۲^k$ را بیابیم که بزرگتر از m باشد ($m < n = ۲^k$). از آنجایی که حکم برای n ثابت شده، کافی‌ست اعداد اضافی بین m و n را از دنباله پاک کنیم تا به چیدمان موردنظر برسیم.

پایه استقرا: حکم برای $k = ۱$ بدیهی‌ست. $(۱, ۲)$

فرض استقرا: فرض کنیم حکم برای $n = ۲^k$ برقرار است. یعنی اعداد ۱ تا ۲^k را می‌توان طوری کنار هم نوشت که میانگین هیچ دو عددی بین آن‌ها نیامده باشد.

حکم استقرا: ثابت می‌کنیم حکم به ازای $n = ۲^{k+۱}$ نیز برقرار است

اثبات: می‌خواهیم اعداد $۱, ۲, \dots, ۲^{k+۱}$ را در یک ردیف بچینیم طوری که میانگین هیچ دو عدد در بین آن‌ها نباشد. طبق فرض استقرا می‌دانیم این کار را می‌توان برای $۱, ۲, \dots, ۲^k$ انجام داد. فرض کنید دنباله مطلوب متناظر این اعداد $\{a_۱, a_۲, \dots, a_{۲^k}\}$ است. می‌دانیم که اعداد $\{۲^k + ۱, ۲^k + ۲, \dots, ۲^{k+۱}\}$ همان اعداد $\{۱, ۲, \dots, ۲^k\}$ هستند که با ۲^k جمع شده‌اند. حال ادعا می‌کنیم دنباله مطلوب متناظر اعداد $۱, ۲, \dots, ۲^{k+۱}$ برابر $\{a_۱, a_۱ + ۲^k, a_۲, a_۲ + ۲^k, \dots, a_{۲^k}, a_{۲^k} + ۲^k\}$ است. طبق نکته‌ی قبل می‌دانیم که این دنباله شامل تمامی اعداد از ۱ تا $۲^{k+۱}$ می‌باشد. حال ثابت می‌کنیم برای هر دو عدد این دنباله، میانگین آن‌ها در بین‌شان قرار نخواهد داشت.

- طبق فرض استقرا می‌دانیم میانگین هیچ دو a_i و a_j به ازای $(۱ \le i, j \le n = ۲^k)$ در بین آن‌ها قرار ندارد.
- به ازای دو عدد $a_i + ۲^k$ و $a_j + ۲^k$: اعداد $\{a_۱ + ۲^k, a_۲ + ۲^k, \dots, a_{۲^k} + ۲^k\}$ همان اعداد $\{a_۱, a_۲, \dots, a_{۲^k}\}$ هستند که ۲^k واحد شیفت یافته‌اند. پس میانگین هر دوتایی از آنها نیز ۲^k واحد انتقال یافته. پس تمام خواص دنباله $\{a_۱, a_۲, \dots, a_{۲^k}\}$ برای این دنباله نیز برقرار است و میانگین هیچ دو $a_i + ۲^k$ و $a_j + ۲^k$ در بین آن‌ها قرار ندارد.

$$\Rightarrow \frac{a_i + a_j}{۲} = a_l \rightarrow \frac{a_i + ۲^k + a_j + ۲^k}{۲} = a_l + ۲^k$$

- یک عدد a_i و یک عدد $a_j + ۲^k$:

$$\frac{a_i + a_j + ۲^k}{۲} = a_l + ۲^{k-۱}$$

طبق فرض می‌دانیم a_l یعنی میانگین a_i و a_j در بین این‌دو قرار ندارد. طبق الگوریتم ارائه شده برای ساختن دنباله‌ی مطلوب، می‌دانیم که $a_l + ۲^{k-۱}$ درست در سمت راست a_l قرار دارد. پس $a_l + ۲^{k-۱}$ بین a_i و a_j قرار ندارد. در نتیجه بین a_i و $a_j + ۲^k$ نیز قرار نخواهد داشت.

به ازای تمامی جفت اعداد ممکن نشان دادیم که میانگین هیچ دو عددی بین آن‌ها قرار ندارد. پس حل ما تکمیل شده و طبق استقرا حکم ثابت می‌شود.

ب) حکم را با استفاده از استقرای قوی برای $n = ۲^k$ اثبات می‌کنیم.

پایه استقرا: حکم برای $k = ۱$ بدیهی‌ست:

۳	۴
۱	۲

فرض استقرا: فرض می‌کنیم حکم برای $n = ۲^k$ برقرار است. جدول آن‌را به شکل مقابل در نظر می‌گیریم: $\boxed{A_k}$

حکم استقرا: ثابت می‌کنیم حکم به ازای $n = ۲^{k+۱}$ نیز برقرار است

اثبات: ادعا می‌کنیم جدول مطلوب برای $n = ۲^{k+۱}$ به شکل زیر ساخته می‌شود:

$۴A_k - ۱$	$۴A_k$
$۴A_k - ۳$	$۴A_k - ۲$

حال ثابت می‌کنیم میانگین هیچ دو عددی در کوچک‌ترین مستطیل شامل این دو عدد قرار ندارد.

- دو عدد از یک بخش $(۴A_k, ۴A_k - ۱, ۴A_k - ۲, ۴A_k - ۳)$: طبق فرض استقرا و نکته مطرح شده در بخش قبل، میانگین هیچ دو عددی در کوچک‌ترین مستطیل شامل این دو عدد قرار ندارد.
- یک عدد از $۴A_k - ۱$ یا $۴A_k - ۳$ و یک عدد از $۴A_k$ یا $۴A_k - ۲$: از آنجایی که اعداد موجود در یک گروه فرد و اعداد موجود در گروه دیگر زوج هستند، میانگین هیچ دو عددی صحیح نخواهد بود و در جدول حضور ندارد.
- یک عدد از $۴A_k$ و دیگری از $۴A_k - ۲$:

$$\begin{cases} a = ۴k & \in ۴A_k \\ b = ۴k' - ۲ & \in ۴A_k - ۲ \end{cases} \rightarrow \frac{a+b}{۲} = \frac{۴k + ۴k' - ۲}{۲} = ۲k'' - ۱ \in ۴A_k - ۱ \, or \, ۴A_k - ۳$$

ثابت کردیم میانگین هر دو عدد انتخابی از این بخش، فرد است و در بخش $۴A_k - ۱$ یا $۴A_k - ۳$ قرار دارد. طبق جدول ارائه شده در بالا، کوچک‌ترین مستطیل شامل دو عدد از بخش‌های $۴A_k$ و $۴A_k - ۲$ شامل بخش $۴A_k - ۱$ یا $۴A_k - ۳$ نیست. پس میانگین هیچ دو عددی در کوچک ترین مستطیل شامل این دو عدد قرار ندارد.

- یک عدد از $۴A_k - ۱$ و دیگری از $۴A_k - ۳$:

$$\begin{cases} a = ۴k - ۱ & \in ۴A_k - ۱ \\ b = ۴k' - ۳ & \in ۴A_k - ۳ \end{cases} \rightarrow \frac{a+b}{۲} = \frac{۴k + ۴k' - ۴}{۲} = ۲k'' - ۲ = ۲k''' \in ۴A_k \; or \; ۴A_k - ۲$$

ثابت کردیم میانگین هر دو عدد انتخابی از این بخش، زوج است و در بخش $۴A_k$ یا $۴A_k - ۲$ قرار دارد. طبق جدول ارائه شده در بالا، کوچک‌ترین مستطیل شامل دو عدد از بخش‌های $۴A_k - ۱$ و $۴A_k - ۳$ شامل بخش $۴A_k$ یا $۴A_k - ۲$ نیست. پس میانگین هیچ دو عددی در کوچک ترین مستطیل شامل این دو عدد قرار ندارد.

به ازای تمامی حالات ممکن نشان دادیم که میانگین هیچ دو عددی بین آن‌ها قرار ندارد. پس حل ما تکمیل شده و طبق استقرا، ثابت کردیم $\forall k \in \mathbb{N}; n = ۲^k$ جدولی با شرایط مطلوب روی سوال وجود دارد.