



آمار و احتمالات مهندسی

تمرین ششم - قضایای حدی

روژین و علی

تاریخ تحویل ۱۴۰۱/۱۰/۸

سؤال ۱.

فرض کنید دو متغیر تصادفی X و Y مستقل، با میانگین صفر و واریانس σ^2 هستند. Z و T را به صورت $Z = X + Y$ و $T = aX + \frac{1}{4}Y$ تعریف می‌کنیم. a را طوری بیابید که ضریب همبستگی بین Z و T برابر $\frac{1}{4}$ باشد.

سؤال ۲.

تابع چگالی احتمال متغیرهای تصادفی X و Y برای $a > 0$ به صورت زیر است:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{a^2} & 0 < x, y < a \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

تابع توزیع انباشته متغیر تصادفی $(\frac{X}{Y}, \frac{Y}{X})$ را بیابید.

سؤال ۳.

دو متغیر $Y \sim U(0, 1)$ و $X \sim U(0, 1)$ را دو متغیر تصادفی مستقل در نظر بگیرید. اگر بدانیم متغیر تصادفی Z به صورت زیر تعریف می‌شود، تابع چگالی Z را بیابید.

$$Z = (-2 \ln X)^{\frac{1}{2}} \cos(2\pi Y)$$

سؤال ۴.

یک بازیکن به طور همزمان یک تاس سالم و یک سکه سالم را پرتاب می‌کند. اگر سکه رو بیاید، ۲ برابر عدد تاس و اگر پشت بیاید، $\frac{1}{4}$ برابر عدد تاس امتیاز می‌گیرد. امید ریاضی امتیاز او را محاسبه کنید.

سؤال ۵.

در یک سیستم نرم‌افزاری، دو سرور برای پاسخ به درخواست‌های کاربران وجود دارد. این درخواست‌ها با احتمال N به سرور اول ارسال می‌شوند که N خود یک متغیر تصادفی با توزیع $U(0, 1)$ است. دو هزار درخواست از طرف کاربران ایجاد شده است. می‌دانیم هر دو هزار درخواست به سمت سرور اول ارسال شده‌اند. مطلوب است محاسبه:

الف) تابع چگالی احتمال شرطی متغیر تصادفی N

ب) امید ریاضی شرطی N

پ) احتمال اینکه دو هزار درخواست بعدی نیز به سرور اول ارسال شوند

سؤال ۶.

می‌خواهیم یک برنامه را به صورت موازی بر روی یک پردازنده با دو هسته اجرا کنیم. هر هسته در این پردازنده دو حالت دارد: آزاد و مشغول. برای اجرا شدن این برنامه لازم است هر دو هسته در حالت آزاد باشند. برنامه برای شروع به اینصورت عمل می‌کند که به صورت یک در میان به هسته‌ها درخواست می‌دهد و اگر هر دو هسته به صورت پشت سر هم درخواست را قبول کنند (آزاد باشند)، برنامه اجرا می‌شود. احتمال اینکه هسته اول در هر درخواست آزاد باشد، p_A و احتمال اینکه هسته دوم در هر درخواست آزاد باشد، p_B است و می‌دانیم $p_B > p_A$.

حال اگر بخواهیم تعداد درخواست‌های مورد انتظار برای شروع برنامه کم‌ترین مقدار را داشته باشند، بهتر است ابتدا برنامه به کدام هسته درخواست بدهد؟ (توجه کنید به جواب نهایی بدون راه حل نمره‌ای تعلق نمی‌گیرد.)

سؤال ۷.

ندا می‌خواهد در N مسابقه شطرنج شرکت کند که N دارای توزیع هندسی با پارامتر s است. فرض کنید احتمال برد او در هر بازی، مستقل از سایر بازی‌ها، برابر p است. اگر T تعداد بازی‌هایی باشد که او می‌برد:

الف) میانگین و واریانس T را محاسبه کنید.

ب) تابع مولد گشتاور T را به دست آورید.

سؤال ۸.

می‌دانیم ایمیل‌ها با فرآیند پواسون با پارامتر λ دریافت می‌شوند. در نتیجه تعداد ایمیل‌ها در inbox در یک بازه زمانی به طول یک ساعت دارای توزیع $Poisson(\lambda)$ است. همچنین می‌دانیم تعداد ایمیل‌هایی که در بازه‌های زمانی مجزا می‌رسند، مستقل از هم هستند. فرض کنید X ، Y و Z تعداد ایمیل‌های دریافتی یک روز خاص در بازه‌های زمانی ۹ صبح تا ۱۲ ظهر، ۱۲ ظهر تا ۶ بعد از ظهر و ۶ بعد از ظهر تا نیمه‌شب باشند.

الف) تابع جرم احتمال مشترک شرطی X ، Y و Z را با شرط $X + Y + Z = 36$ به دست آورید.

ب) تابع جرم احتمال شرطی را برای $X + Y$ با شرط $X + Y + Z = 36$ به دست آورید.

پ) با توجه به قسمت «ب»، $E(X + Y | X + Y + Z = 36)$ را محاسبه کنید.

سؤال ۹.

تمرین کامپیوتری سری ششم با موضوع «نمونه‌برداری» را می‌توانید از طریق این لینک^۱ دریافت کنید.

- یک کپی از فایل مذکور با نام CA6_SID در گوگل درایو خود تهیه کنید.
 - در فایل خود بخش‌هایی که به وسیله مستطیل مشخص شده‌اند را با کدهای مناسب جایگزین کنید.
 - سوالاتی که به زبان فارسی و رنگ سفید مطرح شده‌اند را در همان سلول پاسخ دهید.
 - فایل کد خود را با ایمیل omid.panakari.s@gmail.com با دسترسی Editor به اشتراک بگذارید.
 - لینک فایل پاسخ خود را در بخش متنی جایگاه آپلود این تمرین در سامانه ایلرن قرار دهید.
- هرگونه انتقاد، پیشنهاد یا نکته جانبی را می‌توانید از طریق یک سلول متنی در ابتدای فایل (قبل از سرفصل اصلی) به ما منتقل کنید.

^۱https://colab.research.google.com/drive/1X6Df5jymZhPclsvwOpjxCPSRgBwNe_Na?usp=sharing