به نام خدا

نظریه زبان‌ها و ماشین‌ها- بهار ۱۴۰۱

تمرین شماره 12

دستیار آموزشی این مجموعه: آوا میرمحمدمهدی

avamir80@gmail.com

تاریخ تحویل: 1402/3/24

---

1) درستی یا نادرستی هر یک از عبارات زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید. (12 نمره)

الف) اگر مساله B از کلاس مساله NP-Hard باشد و بدانیم $A \leq_p B$ آنگاه A در کلاس NP-Complete خواهد بود.

ب) اگر مساله A از کلاس NP-Complete باشد و بدانیم $A \leq_p B$ آنگاه B در کلاس NP-Complete خواهد بود.

ج) هر مساله‌ی NP-Complete را می‌توان در زمان چندجمله‌ای به هر مساله‌ی NP-Complete دیگر کاهش داد.

د) اگر داشته باشیم P = NP آنگاه به ازای هر زبان A که در دسته P قرار دارد($A \neq \emptyset, \Sigma^*$)، A در دسته NP-Complete نیز قرار خواهد داشت.

پاسخ:

الف) نادرست؛ می‌توان به جای A یک مساله کلاس NP را قرار دهیم پس لزوما A در کلاس NP-Complete نخواهد بود.

ب) نادرست؛ A در کلاس NP نیز قرار دارد و هر مساله‌ی NP را می‌توان در زمان چندجمله‌ای به یک مساله NP-Hard کاهش داد ولی لزوما B در کلاس NP قرار ندارد پس نمی‌توان گفت در کلاس NP-Complete قرار دارد.

ج) درست؛ هر مساله NP-Complete، در کلاس NP نیز قرار دارد پس می‌توان آن را به هر مساله‌ی NP-Complete دیگر کاهش داد.

د) درست؛ اگر P = NP باشد پس A در دسته NP نیز قرار می‌گیرد و تمامی مسائل NP را می‌توان در زمان چندجمله‌ای به یکدیگر کاهش داد پس A در دسته مسائل NP-Complete نیز قرار می‌گیرد.

2) فرض کنید a, b, c, p اعداد مثبت باینری هستند؛ ثابت کنید که ModeP در دسته مسائل P قرار دارد. (12 نمره)
(راهنمایی: $a^{(1000)_2} = ((a^2)^2)^2$)

$$ModeP = \{\langle a, b, c, p\rangle \mid a^b = c \pmod p\}$$

پاسخ:

الگوریتم زیر را در نظر بگیرید که ModeP را تصمیم گیری می‌کند:

$b = b_1b_2b_3...b_n$

1. let $T = 1$ and $n = \lceil \log_2 b \rceil$ (if $b = 2^k$, $n = \lceil \log_2 b \rceil + 1$)
2. for $i = 1$ to n:
   if $b_i = 1$, $T = (a(T^2)(\text{mod } p))$
   if $b_i = 0$, $T = (T^2(\text{mod } p)$
3. return T (mod p)
4. if $T = c$ (mod p) accept, otherwise reject.

طبق راهنمایی داده شده، به ازای هر 1 دیده شده در نمایش دودویی عدد، T را به توان دو رسانده و در a ضرب می‌کنیم و به ازای هر 0 دیده شده در نمایش دودویی عدد، T را به توان دو می‌رسانیم (دلیل این امر واضح است). در نهایت با مقایسه T نهایی با c می‌توانیم تصمیم بگیریم که reject یا accept کنیم. حال به تحلیل مرتبه زمانی این الگوریتم می‌پردازیم؛ فرض کنید اعداد a, b, c, p حداکثر m بیتی باشند ($n \le m$)، مرتبه زمانی ضرب یا تقسیم (همچنین تعیین باقیمانده) دو عدد m بیتی $o(m^2)$ است و اینکار در یک حلقه به تعداد n باز انجام می‌شود پس پیچیدگی زمانی کل برابر با $o(m^2) \times n = o(m^3)$ است. پیچیدگی این الگوریتم نسبت به ورودی چندجمله‌ای است پس این مساله در دسته مسائل P قرار می‌گیرد.

3) یک دور "گذر دوبل از رئوس" در گراف بدون جهت G، دوری است که از تمامی راس‌های G دقیقا دوبار می‌گذرد. ثابت کنید مساله تشخیص وجود دور "گذر دوبل از رئوس" در گراف G، یک مساله NP-Hard است. (14 نمره)

پاسخ:

برای اثبات NP-Hard بودن این مساله، مساله‌ی دور همیلتونی که یک مساله‌ی NP-Complete است را به آن کاهش می‌دهیم. فرض کنید گراف G ورودی مساله دور همیلتونی باشد، می‌خواهیم آن را به گراف H که ورودی مساله تشخیص وجود دور "گذر دوبل از رئوس" است تبدیل کنیم؛ برای اینکار ابتدا گراف H را برابر گراف G قرار می‌دهیم و سپس به ازای هر راس v در گراف H دو راس v' و v'' به این گراف اضافه می‌کنیم و سه یال $vv', vv'', v'v''$ را بین سه راس v، v' و v'' قرار می‌دهیم. حال ثابت می‌کنیم گراف G دور همیلتونی دارد اگر و تنها اگر گراف H دور "گذر دوبل از رئوس" داشته باشد. اگر دور $v_1 \to v_2 \to v_3 \to ... \to v_n \to v_1$ را یک دور همیلتونی در گراف G در نظر بگیریم، دور "گذر دوبل از رئوس" متناظر آن در گراف H دور $v_1 \to v'_1 \to v''_1 \to v'_1 \to v''_1 \to v_1 \to v_2 \to ... \to v_n \to v_1$ خواهد بود؛ همچنین برای اثبات طرف دیگر، اگر دور "گذر دوبل از رئوس" در گراف H پیدا شود با حذف رئوس v' و v'' اضافه شده، یک دور همیلتونی در گراف G بدست می‌آید.

4) مساله‌ی مقابل را در نظر بگیرید: در شهر پهلوانان، هر پهلوان عضو حداقل یک باشگاه است. شهردار شهر برای افزایش تمرکز پهلوانان قصد دارد تعدادی باشگاه را تعطیل کند به طوری که پس از تعطیلی، هر پهلوان هنوز عضو حداقل یک باشگاه تعطیل نشده باشد. ورودی مساله، لیست پهلوانان، لیست باشگاه‌ها، لیست اعضای هر باشگاه و عدد k می‌باشد. آیا شهردار می‌تواند k باشگاه را طوری انتخاب کنند که پس از تعطیلی آنها هنوز هر پهلوان عضو حداقل یک باشگاه باشد؟ ثابت کنید این مساله NP-Complete است. (راهنمایی: می‌توانید از NP-Complete بودن مساله [set cover] استفاده کنید.) (17 نمره)

پاسخ:

ابتدا باید ثابت کنیم مجموعه NP است. برای اینکار، گواهی را لیست k باشگاهی در نظر می‌گیریم که قرار است تعطیل شوند و verifier به ازای هر پهلوان بررسی می‌کند که آیا هنوز عضو باشگاهی است که در لیست k باشگاه تعطیل شده نباشد؛ اگر این شرط برای همه‌ی پهلوانان صدق کرد، accept می‌کند و در غیر اینصورت reject می‌کند. بدیهی است اینکار در زمان چندجمله‌ای قابل انجام است پس مساله در دسته NP قرار دارد.

در مساله پوشش مجموعه، یک مجموعه متناهی U و خانواده F از زیرمجموعه‌های U داده شده است به طوری که اجتماع این زیرمجموعه‌ها برابر U است. آیا می‌توان با انتخاب k یا کمتر زیرمجموعه از F، U را پوشش داد؟ برای اثبات NP-Hard بودن مساله پهلوانان، مساله پوشش مجموعه را به آن کاهش می‌دهیم و ورودی پوشش مجموعه را به ورودی مساله پهلوانان تبدیل می‌کنیم. اعضای U معادل پهلوانان شهرهستند و به ازای هر خانواده F یک باشگاه می‌سازیم و اعضای باشگاه، اعضای زیرمجموعه مربوطه خواهند بود. در نهایت مقدار $k_{pahlevanan}$ را برابر با $|F| - k_{set\ cover}$ قرار می‌دهیم؛ بدیهی است این کاهش در زمان چندجمله‌ای قابل انجام است. حال نشان می‌دهیم پاسخ مساله پهلوانان بله است اگر و تنها اگر مساله vertex cover پاسخ بله داشته باشد.

طرف اول: اگر ورودی دارای پوشش رئوس به اندازه $k_{set\ cover}$ باشد، آنگاه مساله پهلوانان پاسخ بله دارد؛ در این حالت اگر همه‌ی باشگاه‌ها به جز $k_{set\ cover}$ باشگاه تعطیل شوند هنوز همه‌ی پهلوانان عضو حداقل یک باشگاه (خانواده) هستند.
طرف دوم: اگر بتوان با تعطیلی $|F| - k_{set\ cover}$ باشگاه، هنوز هر پهلوان عضو یک باشگاه باشد، مساله‌ی پوشش مجموعه، پوششی با $k_{set\ cover}$ خواهد داشت. در این حالت چون باشگاه‌های تعطیل نشده، همه‌ی پهلوانان را پوشش می‌دهند پس همه‌ی مجموعه U به کمک $k_{set\ cover}$ عضو قابل پوشش خواهد بود.

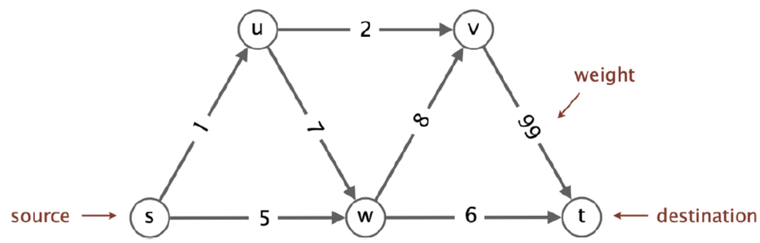
ثابت شد که این مساله هم NP و هم NP-Hard است پس NP-Complete نیز است.

5) دو مساله یافتن کوتاه‌ترین مسیر در گراف را در نظر بگیرید: (25 نمره)

مساله‌ی A: گراف وزن‌دار و جهت‌دار G با وزن‌های غیرمنفی و دوراس مبدا s و مقصد t داده شده است. کوتاه‌ترین مسیر از s به t را پیدا کنید.

مساله‌ی B: گراف وزن‌دار و جهت‌دار G با وزن‌های غیرمنفی و دوراس مبدا s و مقصد t داده شده است. کوتاه‌ترین مسیر از s به t را پیدا کنید اگر بتوانید از یکی از یال‌های این مسیر با وزن صفر عبور کنید؛ به عبارتی، وزن هر مسیر برابر با مجموع وزن یال‌های آن منهای وزن سنگین‌ترین یال است.

به عنوان مثال در گراف زیر کوتاه‌ترین مسیر در مساله‌ی A برابر با $s \to w \to t$ است که وزن 11 دارد و در مساله‌ی B مسیر $s \to u \to v \to t$ است که وزن 3 دارد.



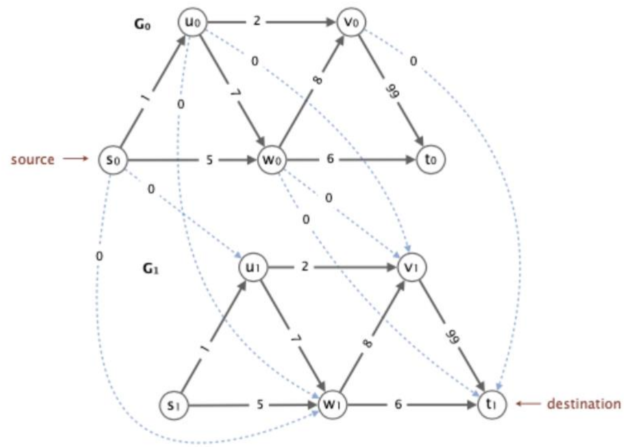
الف) یک reduction با زمان خطی از مساله‌ی A به B ارائه دهید.

ب) یک reduction با زمان خطی از مساله‌ی B به A ارائه دهید.

پاسخ:

الف) از گراف داده شده‌ی G یک گراف جدید G' می‌سازیم بدین صورت که یک راس جدید به نام s' به G اضافه کرده و یال ss' را با وزن $\max\{e \in E : w_e\} + 1$ به آن می‌افزاییم. حال ادعا می‌کنیم کوتاه‌ترین مسیری که مساله‌ی B برای رفتن از s' به t پیدا می‌کند حتما از یال اضافه شده عبور می‌کند و شامل کوتاه‌ترین مسیر از s به t نیز می‌باشد. صحت این ادعا با توجه به نحوه‌ی ساختن G' واضح است زیرا تنها یالی که s' را به بقیه‌ی گراف متصل می‌کند یال اضافه شده است که سنگین‌ترین یال نیز هست و حذف خواهد شد و در نتیجه باقی یال‌ها از s به t مانند مساله‌ی A در نظر گرفته خواهد شد؛ اگر بخواهیم کوتاه‌ترین مسیر برای G' را به کمک مساله A پیدا کنیم، می‌توانیم کوتاه‌ترین مسیر از s به t را یافته و یال ss' را به آن بیفزاییم که چون سنگین‌ترین یال است در انتها در نظر گرفته نخواهد شد؛ پس مساله‌ی A قابá تقلیل به مساله‌ی B در زمان خطی است.

ب) فرض کنید گراف ورودی داده شده G است. یک گراف جدید G' به کمک دو کپی G_0 و G_1 از G می‌سازیم و رئوس اولی را با اندیس 0 و دومی را با اندیس 1 نمایش می‌دهیم. اگر یال $v \to w$ در گراف G وجود داشته باشد، یک یال با وزن صفر از v_0 به w_1 در گراف G' اضافه می‌کنیم. حال ادعا می‌کنیم برای یافتن کوتاه‌ترین مسیر از s به t در گراف G (مساله‌ی B) می‌توان در مساله‌ی A کوتاه‌ترین مسیر از s_0 به t_1 را در گراف G' پیدا کرد. دقت کنید که برای این منظور، وقتی کوتاه‌ترین مسیر در مساله‌ی B پیدا شد، مسیری که از گراف G_0 به گراف G_1 می‌رود معادل یالی است که الگوریتم B از آن با وزن صفر عبور می‌کند. باقی مسیر در گراف G_1 طی می‌شود که معادل آن در G_0 وجود دارد. به طور مشابه، کوتاه‌ترین مسیر در گراف G (در مساله‌ی B) را می‌توان به جوابی در مساله‌ی A تبدیل کرد بدین صورت که یالی که از آن با وزن صفر عبور کرده‌ایم یالی خواهد بود که از G_0 به G_1 می‌رویم و باقی مسیر را به طور متناظر در G_1 طی می‌کنیم. پس مساله‌ی B قابل تقلیل به مساله‌ی A در زمان خطی است.



6) مجموعه A مجموعه‌ای با تعداد اعضای محدود است. مجموعه $Z = \{z_1, z_2, \dots, z_m\}$ نیز وجود دارد به طوری که هر z_i را تعدادی از اعضای A تشکیل می‌دهند و درواقع هر z_i زیرمجموعه‌ای از A است. می‌خواهیم مجموعه A را با دو رنگ قرمز و سبز به گونه‌ای رنگ کنیم که در تمام اعضای هیچ z_i ای همرنگ نباشند. نشان دهید این مساله در دسته NP-Complete قرار دارد. (20 نمره)

پاسخ:

مساله‌ی صورت سوال را Opposite-Color می‌نامیم. ابتدا ثابت می‌کنیم این مساله در دسته‌ی NP قرار دارد؛ برای اینکار یک verifier ارائه می‌دهیم که به ازای تمامی z_i ها چک می‌کند که تمامی اعضای آن همرنگ نباشند؛ بدیهی است اینکار در زمان چندجمله‌ای امکان پذیر است پس مساله‌ی فوق در کلاس NP است.

برای اثبات NP-Hard بودن Opposite-Color، مساله‌ی 3-SAT که یک مساله‌ی NP-Complete است را به آن کاهش می‌دهیم. همانطور که می‌دانیم ورودی مساله 3-SAT یک 3-cnf مثل Φ است و متغیرهای آن $x_1, x_2, \dots, x_n$ است. برای تبدیل این ورودی به ورودی مساله‌ی Opposite-Color، مجموعه‌ی A را به صورت زیر تعریف می‌کنیم: $A = \{x_1, \overline{x_1}, x_2, \overline{x_2}, \dots, x_n, \overline{x_n}, y\}$. در واقع A شامل تمام متغیرهای موجود در Φ به همراه نقیض آنها و متغیر y است؛ حال به ازای هر clause در Φ، z_i را برابر با متغیرهای موجود در آن clause به همراه متغیر y در نظر می‌گیریم؛ برای مثال به ازای $c_i = \overline{x_1} \vee x_3 \vee x_8$ مجموعه $z_i = \{\overline{x_1}, x_3, x_8, y\}$ را تشکیل می‌دهیم. همچنین مجموعه‌ی Z علاوه بر z_i ها شامل n مجموعه $t_i = \{x_i, \overline{x_i}\}$ نیز است. حال اگر Φ یک فرمول satisfiable باشد، رنگ‌آمیزی literal ها با دو رنگ، همان اختصاص true یا false به آنها است. اگر تمامی مقادیر true را با سبز و مقادیر false و متغیر y را با قرمز رنگ کنیم، هر یک از اعضای Z حداقل شامل یک قرمز هستند چون می‌دانیم y قرمز است و همچنین در مجموعه‌هایی که به صورت $t_i = \{x_i, \overline{x_i}\}$ تعریف شده بوند نیز قطعا یک عضو قرمز و یک عضو سبز وجود دارد؛ هر یک از اعضای Z شامل حداقل یک عضو سبز نیز هست که clause متناظر با آن را true می‌کند؛ پس اگر در 3-SAT، accept شود در Opposite-Color نیز accept می‌شود و درصورتی که در Opposite-Color، accept شود در 3-SAT نیز accept می‌شود چون قطعا یک سبز در هر عضو مجموعه‌ی Z وجود داشته پس حداقل یکی از متغیرهایی که در 3-SAT باهم or شده‌اند true بوده است و این رنگ‌آمیزی معادل با یک satisfying assignment است. با اینکار در زمان چندجمله‌ای مساله‌ی Opposite-Color را به 3-SAT کاهش دادیم پس NP-Hard است و در پاراگراف اول اثبات شد NP است پس در دسته‌ی NP-Complete قرار دارد.

7) با توجه به اینکه می‌دانیم مساله‌ی A، NP-Complete است، ثابت کنید مساله‌ی B در دسته مسائل NP-hard قرار دارد. (10 نمره امتیازی)
مساله‌ی A: تعیین اینکه آیا می‌توان مجموعه‌ای از اعداد را به دو گروه تقسیم کرد به طوری که جمع دو گروه باهم برابر شود.
مساله‌ی B: تعیین اینکه آیا می‌توان با کنارهم قرار دادن کاشی‌های مستطیلی در کف مستطیل شکل یک اتاق، تمام مساحت زمین را پوشاند بدون اینکه نیاز باشد کاشی‌ها را بشکنیم؟ (طول و عرض کاشی‌ها عدد طبیعی است)

پاسخ:

برای اینکه اثبات کنیم مساله‌ی B در دسته‌ی NP-Hard قرار دارد باید مساله‌ی A که در دسته‌ی NP-Complete قرار دارد را در زمان چندجمله‌ای به آن کاهش دهیم؛ اگر مجموعه وردی مساله A را برابر با $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ در نظر بگیریم، برای تبدیل ورودی مساله‌ی A به ورودی مساله‌ی B، هر عدد x_i در مساله A را به یک کاشی $1 \times 4x_i$ تبدیل می‌کنیم و همچنین ابعاد کف اتاق را $2 \times \sum_{i=1}^{n} y_i$ در نظر می‌گیریم. دلیل در نظر گرفتن ضریب 4 در طول کاشی‌های این است که نتوانیم آن را در جهت عمودی در کف اتاق قرار دهیم. برای چیدن کاشی‌ها در کف اتاق باید آن را در دو ردیف بگنجانیم یعنی $\sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{\sum_{i=1}^{n} 4x_i}{2}$ پس اگر مساله‌ی A جواب داشته باشد در مساله‌ی B نیز $\sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{n} 2x_i$ و مجموع هر دو ردیف باهم برابرند و اگر مساله‌ی B جواب داشته باشد، پس دو ردیف از کاشی‌ها چیده شده‌اند که مجموع طول آنها باهم برابر است. پس توانستیم در زمان چند جمله‌ای مساله‌ی A را به B کاهش دهیم پس B در دسته‌ی NP-Hard قرار دارد.