ریاضیات گسسته

پاسخنامه تمرین دوم - ترکیبیات پیشرفته

محمد مهدی جعفری

سؤال ۱.

در چند شماره تلفن ۷ رقمی مانند $d_1d_2d_3d_4d_5d_6d_7$ دنباله $d_1d_2d_3$ حداقل با یکی از دنباله‌های $d_4d_5d_6$ یا $d_5d_6d_7$ برابر است؟ هر d_i برابر هر یک از ۱۰ رقم $0, 1, \ldots, 8, 9$ می تواند باشد.

پاسخ .

فرض کنید A مجموعه شماره‌هایی باشد که دنباله $d_1d_2d_3$ برابر $d_4d_5d_6$ باشد و B مجموعه آن‌هایی باشد که دنباله $d_1d_2d_3$ برابر $d_5d_6d_7$ است. در این صورت:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 10^4 + 10^4 - 10 = 19990$$

سؤال ۲.

۱۰۱ عدد طبیعی دور یک دایره نوشته شده است. جمع تمامی این اعداد ۳۰۰ است. ثابت کنید می‌توان دنباله‌ای متوالی از این اعداد انتخاب کرد بطوری که جمع آنها ۲۰۰ باشد.

پاسخ .

یکی از اعداد را به دلخواه در نظر بگیرید. آن را a_1 می‌نامیم. بقیه اعداد را به صورت ساعتگرد به ترتیب $a_2, a_3, \ldots a_{101}$ می‌نامیم. حال دنباله زیر را به ازای $1 \leq k \leq 101$ در نظر بگیرید.

$$sum_k = a_1 + a_2 + \ldots + s_k$$

از آنجایی که اعداد طبیعی هستند پس sum_k دنباله‌ای قویا صعودی از ۱۰۱ عدد طبیعی بین ۱ و ۳۰۰ است. چون کلا ۱۰۰ حالت برای دو رقم سمت راست این اعداد وجود دارد، پس طبق اصل لانه کبوتری حداقل یک جفت sum_i و sum_{i+j} وجود دارند به صورتی که دو رقم سمت راست آنها یکسان است. پس بازه اعداد بین این دو اندیس مجموعه‌ای بخش‌پذیر بر ۱۰۰ و کوچک‌تر از ۳۰۰ است.

$$sum_{i+j} - sum_i = a_{i+1} + a_{i+2} + \ldots + a_{i+j}$$

حال دو حالت بوجود می‌آید، یا $sum_{i+j} - sum_i = 200$ است که بازه بالا جواب مساله است و یا $sum_{i+j} - sum_i = 100$ است که چون مجموع همه اعداد ۳۰۰ است، متمم بازه بالا جواب مساله خواهد بود.

سؤال ۳.

۱. فرم بسته و ساده شده تابع مولد هر یک از دنباله‌های زیر را بیابید.

الف) $< 1, 3, 9, \ldots, 3^k, \ldots >$

ب) $< \frac{1}{0!}, \frac{1}{1!}, \frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, \ldots >$

ج) $< 0, 1, 0, 5, 0, 25, 0, 125, 0, \ldots >$

۲. با استفاده از تابع مولد به دست آورید.

به چند طریق می‌توان از بین میوه‌های سیب، پرتقال، شلیل و هلو n میوه انتخاب کنیم به طوری که حداکثر ۳ سیب، به تعداد زوج پرتقال و ۰ یا ۱ عدد شلیل داشته باشیم. هم‌چنین تعداد هلوها مضربی از ۴ باشد.

پاسخ .

۱.

الف)

$$A(x) = 1 + x + x^2 + \ldots = \frac{1}{1-x}$$
$$A(3x) = 1 + 3x + 9x^2 + \ldots = \frac{1}{1-3x}$$

ب) طبق جدول Useful Generating Functions از کتاب Rosen داریم:

$$B(x) = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots = e^x$$

ج) در اینگونه سوالات معمولا از دنباله اولیه $< 1, 1, 1, 1, \ldots >$ شروع کرده و سعی می‌کنیم که دنباله ی خواسته‌شده‌ی سوال را گام به گام بسازیم.

$$C(x) = 1 + x + x^2 + \ldots = \frac{1}{1-x} \iff < 1, 1, 1, \ldots >$$
$$C(x^2) = 1 + x^2 + x^4 + \ldots = \frac{1}{1-x^2} \iff < 1, 0, 1, 0, \ldots >$$
$$C(5x^2) = 1 + 5x^2 + 25x^4 + \ldots = \frac{1}{1-5x^2} \iff < 1, 0, 5, 0, 25, \ldots >$$

شیفت یافته:

$$xC(5x^2) = x + 5x^3 + 25x^5 + \ldots = \frac{x}{1-5x^2} \iff < 0, 1, 0, 5, 0, 25, \ldots >$$

۲.

تابع مولد مسئله از ضرب تابع مولد تک تک شروط به دست می‌آید. ضریب جمله‌ی x^i در تابع مولد نشان دهنده‌ی i میوه‌ی انتخاب‌شده از آن حالت است. پس برای به دست آوردن تعداد حالات ممکن برای n میوه باید ضریب جمله‌ی x^n را به دست آوریم.

سیب:

$$S(x) = 1 + x + x^2 + x^3 = \frac{1-x^4}{1-x}$$

پرتقال:

$$P(x) = 1 + x^2 + x^4 + ... = \frac{1}{1-x^2}$$

شلیل:

$$L(x) = 1 + x = \frac{1-x^2}{1-x}$$

هلو:

$$H(x) = x^0 + x^4 + x^8 + ... = \frac{1}{1-x^4}$$

از حاصل ضرب توابع مولد داریم:

$$Y(x) = S(x) \times P(x) \times L(x) \times H(x) = (\frac{1-x^4}{1-x})(\frac{1}{1-x^2})(\frac{1-x^2}{1-x})(\frac{1}{1-x^4}) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

حال با استفاده از جدول Useful Generating Functions از کتاب Rosen ضریب جمله‌ی x^n را به دست می‌آوریم.

$$Y(x) = 1 + 2x + 3x^2 + ...$$

در نتیجه ضریب جمله‌ی x^n برابر است با : $(n+1)$

سؤال ۴.

هر یک از اتحادهای زیر را با استفاده از روش ترکیبیاتی (دوگانه‌شماری) اثبات کنید.

الف) $\binom{n+1}{m} = \binom{n}{m-1} + \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}$

ب) $\sum_{r=1}^{n} r.\binom{n}{r} = n.2^{n-1}$

ج) $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = (1+2+3+..+n)^2$

پاسخ .

الف) برای حل سوال از دوگانه‌شماری استفاده می‌کنیم.

اثبات سمت چپ:

می خواهیم یک گروه m نفره از میان یک کلاس n نفره (که یکی از آنها زینب است) به همراه معلمشان انتخاب کنیم. تعداد حالات ممکن برای انتخاب این گروه m نفره برابر است با:

$$\binom{n+1}{m}$$

اثبات سمت راست:

مسئله قبلی را این بار به این صورت می‌شماریم. برای حضور معلم دو حالت داریم، اگر معلم حتما در گروه m نفره باشد، پس لازم است $m-1$ نفر از دانش آموزان انتخاب کنیم، این کار به $\binom{n}{m-1}$ روش ممکن است. حال حالاتی را به دست می‌آوریم که معلم در گروه m نفره نیست. این حالات را به دو دسته تقسیم می‌کنیم، حالاتی که زینب در گروه m نفره هست و حالاتی که نیست. تعداد حالاتی که زینب در گروه هست و معلم نیست برابر $\binom{n-1}{m-1}$ و تعداد حالاتی که معلم و زینب در گروه نیستند برابر $\binom{n-1}{m}$ است.

پس تعداد حالات ممکن برای این مسئله برابر است با:

$$\binom{n}{m-1} + \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}$$

چون یک مسئله را به دو حالت شمردیم پس جواب ها در هر دو حالت باهم برابرند و ثابت می‌شود که:

$$\binom{n+1}{m} = \binom{n}{m-1} + \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}$$

ب) برای حل سوال از دوگانه‌شماری استفاده می‌کنیم.
اثبات سمت راست:
می‌خواهیم از میان دانش آموزان یک کلاس n نفره، گروهی از دانش آموزان (حداقل یک نفر) به همراه سرگروه (که دانش آموز است) را برای مسابقه علمی انتخاب کنیم. برای اینکار ابتدا یک نفر را به عنوان سرگروه انتخاب می‌کنیم، سپس برای هر یک از $n-1$ نفر دیگر کلاس دو حالت داریم که در مسابقه شرکت کند یا نکند. تعداد حالات ممکن این مسئله برابر است با:

$$n.2^{n-1}$$

اثبات سمت چپ:
مسئله قبلی را این بار به این صورت می‌شماریم. تعداد اعضای گروه حداقل ۱ و حداکثر n نفر است. پس r را تعداد اعضای گروه در نظر میگیریم که $1 \leq r \leq n$ است. حال r نفر از میان n نفر برای مسابقه انتخاب می‌کنیم و یکی از r نفر را به عنوان سرگروه قرار می‌دهیم. تعداد حالات ممکن این مسئله برابر است با:

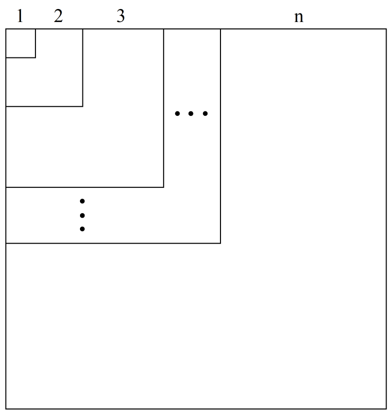
$$\sum_{r=1}^{n} r.\binom{n}{r}$$

چون یک مسئله را به دو حالت شمردیم پس جواب ها در هر دو حالت باهم برابرند و ثابت می‌شود که:

$$\sum_{r=1}^{n} r.\binom{n}{r} = n.2^{n-1}$$

ج) برای حل سوال از دوگانه‌شماری استفاده می‌کنیم.
اثبات سمت راست:
می‌خواهیم مساحت یک مربع به ضلع $n.(n+1)/2$ را به دست آوریم. از آنجا که $n.(n+1)/2 = (1+2+3+...+n)$ پس مساحت چنین مربعی برابر است با:

$$(1+2+3+...+n)^2$$



اثبات سمت چپ:
مسئله قبلی را این بار به این صورت محاسبه می‌کنیم. مشابه شکل زیر مربع را به قسمت‌های L شکل تقسیم‌بندی می‌کنیم، سپس مساحت هر یک را حساب می‌کنیم و باهم جمع می‌کنیم. ثابت می‌کنیم مساحت kامین قسمت L شکل برابر k^3 است.

مساحت L شکل قسمت kام برابر است با:

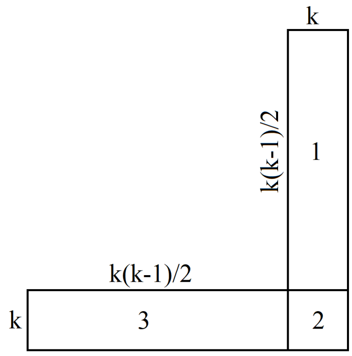
$$k^۲ + ۲ * (k * k(k-۱)/۲) = k^۲ + k^۲(k-۱) = k^۲ + k^۳ - k^۲ = k^۳$$

پاسخ این مسئله برابر است با:

$$۱^۳ + ۲^۳ + ۳^۳ + ... + n^۳$$

چون یک مسئله را به دو حالت شمردیم پس جواب ها در هر دو حالت باهم برابرند و ثابت می‌شود که:

$$۱^۳ + ۲^۳ + ۳^۳ + ... + n^۳ = (۱ + ۲ + ۳ + .. + n)^۲$$



سؤال ۵.

برنامه تمرین ماهانه یک تیم بسکتبال تنظیم شده است. این تیم در ماه ۳۰ روزه‌ای که در پیش است، قرار است هر روز حداقل یک بازی و در کل ماه حداکثر ۴۵ بازی انجام دهد. بررسی کنید با رعایت شرایط مذکور، به ازای چه mهایی، برنامه تیم به هر صورتی که چیده شود، تعدادی روز متوالی وجود دارد که تیم در این روزها دقیقا m بازی انجام دهد؟

پاسخ .

لم: در دنباله‌ای متوالی به طول n، چند عضو متوالی وجود دارد که مجموعشان بر n بخش پذیر است.

اثبات لم: فرض کنید $s[k]$ باقی مانده مجموع k عضو اول دنباله بر n باشد،

$$k = ۱, ۲, ۳, ..., n$$

میدانیم این n عدد از مجموعه $۰, ۱, ۲, ۳, ...n - ۱$ هستند. اگر kای وجود داشته باشد که $s[k] = ۰$ پس kعضو اول دنباله مجموعشان بر n بخشپذیر است؛ در غیر این صورت $s[k]$ها n عدد از مجموعه $۱, ۲, ۳, ..., n - ۱$ هستند و طبق اصل لانه کبوتری حداقل ۲ تا از این اعداد باهم برابرند، بنابراین i و j وجود دارند $(j < i)$ بصورتی که $s[i]$ و $s[j]$ بر پیمانه n هم باقی مانده باشند، پس مجموع عضو $j + ۱$ام تا iام بر n بخشپذیر است.

اثبات: ثابت میکنیم به ازای $۱ \leq m \leq ۳۰$ چند روز متوالی وجود دارد که تیم در طی آن روزها دقیقا m بازی کرده است.

برای اثبات این حکم ۳ حالت برای m داریم.

$۱ \leq m \leq ۱۴$، ۱. فرض کنید $s[k]$ برابر تعداد بازی‌های تیم از روز اول تا روز kام باشد.

$$k = ۱, ۲, ۳, ...۳۰$$

چون در ماه حداکثر ۴۵ بازی انجام می‌شود، پس $s[۳۰] \leq ۴۵$، همچنین چون هر روز حداقل یک بازی انجام می‌شود پس

$$۱ \leq s[۱] < s[۲] < s[۳]... < s[۳۰] \leq ۴۵$$

ما به دنبال زیردنباله ای با مجموع m هستیم، پس اگر چنین بازه ای وجود داشته باشد (مثل i تا j) پس در این صورت $s[j] - s[i] = m$ است و $s[j] = s[i] + m$. پس به هر یک از $s[k]$ها m واحد اضافه میکنیم، در این صورت

$$s[۱] + m < s[۲] + m < ... < s[۳۰] + m \leq ۴۵ + m$$

این ۳۰ عدد به همراه ۳۰ عدد قبلی، ۶۰ عدد از مجموعه $۱, ۲, ۳, ...۴۵ + m$ هستند که چون $۱۴ \leq m$ است، این مجموعه حداکثر $۵۹ = ۱۴ + ۴۵$ عضو دارد. پس بنا بر اصل لانه کبوتری حداقل ۲ تا از این اعداد باهم برابرند ولی هیچ دو عددی از اعداد $s[۱], s[۲], ...s[۳۰]$ و هیچ دو عددی از اعداد $s[۱] + m, s[۲] + m, ...s[۳۰] + m$ باهم برابر نیستند، بنابراین i, j وجود دارند که $s[j] - s[i] = m$ این تساوی به این معناست که تیم از روز $i + ۱$ تا روز jام دقیقا m بازی کرده است.

$m = ۱۵$، $s[k]$ را مثل بند قبل تعریف میکنیم، به هر یک از $s[k]$ ها ۱۵ واحد اضافه می‌کنیم. در این صورت

$$s[۱] + ۱۵ < s[۲] + ۱۵ < ... < s[۳۰] + ۱۵ \leq ۶۰$$

این ۳۰ عدد به همراه ۳۰ عدد قبلی ۶۰ عدد از مجموعه $۱, ۲, ..., ۶۰$ هستند. اگر حداقل ۲ تا از این اعداد برابر باشند، حکم کاملا مشابه قسمت قبل اثبات می‌شود، اگر هیچ ۲ عددی باهم برابر نباشند و ۶۰ عدد متمایز باشند، پس یعنی یکی از آنها برابر ۱۵ است. از انجا که $۱ \leq s[۱] < s[۲] < ... < s[۳۰] \leq ۴۵$ و در نتیجه $۱۶ \leq s[۱] + ۱۵ < s[۲] + ۱۵ < ... < s[۳۰] + ۱۵$ پس یکی از $s[k]$ها برابر ۱۵ است. پس $s[k]$ وجود دارد که این تیم از روز اول تا k دقیقا ۱۵ بازی کند.

$۱۶ \leq m \leq ۳۰$، طبق لم چند روز متوالی وجود دارند که مجموعشان مضرب m است. از سوی دیگر این مجموع حتماً برابر m است چرا که اگر در m روز اول چند روز متوالی باشند که مجموعشان حداقل 2m باشد، این تیم در کل ماه حداقل

$$۲m + (۳۰ - m) = ۳۰ + m$$

بازی کرده است که چون $m > ۱۵$ است یعنی در ماه $۳۰ + m > ۴۵$ بازی کرده است که خلاف فرض مسئله است. (در m روز اول مضربی از m بازی کرده است که خود m نیست، پس حداقل 2m بازی کرده و چون روزی حداقل ۱ بازی می کند، در $۳۰ - m$ روز بعدی ماه حداقل $۳۰ - m$ بازی می کند) در نتیجه چند روز متوالی وجود دارد که طی آن روزها تیم دقیقا m بازی می کند. بدیهی است برای $m \geq ۳۱$ برقرار نیست و اگر تیم روزی دقیقا ۱ بازی کند در ماه ۳۰ بازی می کند و هیچ چند روز متوالی وجود ندارد که طی آنها تیم m بازی کند.

سؤال ۶.

خانه های یک صفحه شطرنجی $۷ * ۷$ با دو رنگ، رنگ‌آمیزی شده است. ثابت کنید دست کم ۲۱ مستطیل وجود دارد که راس‌های هر یک از آن‌ها در مرکزهای خانه‌های همرنگ واقع شده باشد و ضلع‌های آن‌ها با اضلاع صفحه شطرنجی موازی باشد.

پاسخ.

برای هر زوج مرتب مانند $(\{i, j\}, c)$ که $\{i, j\}$ زیرمجموعه ای دو عضوی از مجموعه $\{۱, ۲, ..., ۷\}$ و c یکی از دو رنگ سیاه و سفید باشد، یک دسته (لانه) در نظر می گیریم. تعداد این دسته ها برابر $۴۲ = ۲ * \binom{۷}{۲}$ است. هر دو خانه همرنگ را که در یک ستون از جدول قرار داشته باشند، یک کبوتر می نامیم و هر چنین کبوتری را بسته به این که دو خانه آن در کدام سطر های جدول قرار داشته باشند و به چه رنگی باشند در یکی از ۴۲ لانه قرار می دهیم. هر دو کبوتری که در یک لانه قرار داشته باشند، یک مستطیل تشکیل می دهند که رئوس آن در ۴ خانه همرنگ واقع است. زیرا در تقاطع دو سطر و دو ستون خانه های همرنگ وجود دارد و آن ها تشکیل یک مستطیل با رئوس همرنگ می دهد.

فرض کنید در ۴۲ لانه به ترتیب $x_۱, x_۲, ..., x_{۴۲}$ کبوتر وجود داشته باشد، در این صورت تعداد مستطیل های مطلوب برابر $\sum_{i=۱}^{۴۲} \binom{x_i}{۲}$ است.

حال این تعداد را از راه دیگری میشماریم. فرض کنید در ستون iام جدول w_i خانه سفید و b_i خانه سیاه وجود داشته باشد، در این صورت تعداد کبوتر ها برابر $\sum_{i=۱}^{۷}(\binom{w_i}{۲} + \binom{b_i}{۲})$ است و چون $w_i + b_i = ۷$ ، لذا در بد ترین حالت

$$\binom{w_i}{۲} + \binom{b_i}{۲} \geq \binom{۳}{۲} + \binom{۴}{۲} = ۹$$

۹ عدد جفت خانه همرنگ داریم. پس حداقل $۶۳ = ۷ * ۹$ کبوتر وجود دارد، لذا $\sum_{i=۱}^{۴۲} x_i \geq ۶۳$ و چون $۶۳ = ۴۲ * ۱ + ۲۱$ ، لذا حداقل ۲۱ تا از کبوتر ها در لانه هایی هستند که حداقل یک کبوتر دیگر هم وجود دارد(که با همان تشکیل یک مستطیل می دهد) برای اثبات

این هم می توان گفت که فرض کنیم تمام لانه ها حداقل یک کبوتر دارند.(اگر لانه ای خالی باشد حکم راحت تر اثبات می شود.) پس حداقل $۲۱ = ۴۲ - ۶۳$ کبوتر هستند که یک جفت دارند که با آن مستطیل همرنگ بسازند.

$$\sum_{i=۱}^{۴۲} \binom{x_i}{۲} \geq ۲۱\binom{۲}{۲} = ۲۱$$

پس حداقل ۲۱ مستطیل با ویژگی های موردنظر مسئله وجود دارد.