Subject

Date

شهرزاد تمیز

۸۱۰۱۰۰۲۷۲ - آمار و احتمال

سوال ۱.

$X \sim N(\mu, \sigma^2) = N(۲۸۰, (۸٫۵)^2)$ آ)

الف) $p(x \leq 273) \to p\left(\frac{x-280}{8.5} \leq \frac{273-280}{8.5}\right) = p\left(z \leq \frac{-7}{8.5}\right)$

$= p(z \leq -0.823) = 1 - p(0.823) = 1 - 0{,}7939 = 0{,}2061$

ب) $p(273 \leq x \leq 286) = p\left(\frac{273-280}{8.5} \leq x \leq \frac{286-280}{8.5}\right) =$

$p\left(\frac{-7}{8.5} \leq x \leq \frac{6}{8.5}\right) = p\left(\frac{6}{8.5}\right) - p\left(\frac{-7}{8.5}\right) = p(0.7058) - (1 - p(0.823)) =$

$0.7580 - (0.2061) = 0.5519$

ج) $p(x > d) = 0.95 \to 1 - p(x > d) = 1 - 0{,}95$

تحویل زودتر ← زمان یا

$p(x \leq d) = 0{,}05$

$p(x \leq d) = \Phi\left(\frac{d-\mu}{}\right) \to \Phi\left(\frac{d-280}{8.5}\right) = 0{,}05$ در جدول نرمال

$\Phi(-d) = 1 - \Phi(d)$؟

پس: $\Phi(-d) = 1 - \Phi(d) \to x = \frac{d-280}{8.5} = -1.65 \to x = 266$

$273 - 266 = 7$

سوال ۲.

متغیر تصادفی X = تعداد کلماتی که نیاز به جایگزین شدن دارند. از توزیع ۲ جمله‌ای استفاده می‌کنیم

چون ۰٫۴ = p نزدیک به ½ است می‌توانیم با توزیع نرمال تخمین بزنیم: $X \simeq Y \sim N(np, \sqrt{np(1-p)})$

(ادامه دارد...)

ادامه سوال ۲)

$np = ۰{,}۴ \times ۶۰۰ = ۲۴۰$

$\sqrt{np(1-p)} = \sqrt{۲۴۰ \times ۰{,}۶} = \sqrt{۶ \times ۶ \times ۴} = ۶ \times ۲ = ۱۲$

$\longrightarrow N(۲۴۰, ۱۲)$

فضای تصحیح را اعمال می‌کنیم:

$P\{X \geq ۲۷۰\} \rightarrow P\{Y \geq ۲۶۹{,}۵\}$

محاسبه می‌کنیم:

$P\{Y \geq ۲۶۹{,}۵\} = 1 - P\{Y < ۲۶۹{,}۵\}$

$P\{Y < ۲۶۹.۵\} = P\left\{\frac{Y-240}{12} < \frac{۲۶۹.۵-240}{12}\right\} = P\left\{Z < \frac{۲۹.۵}{۱۲}\right\} = \Phi\left(\frac{۲۹.۵}{۱۲}\right) =$

$\Phi(۲.۴۵) = ۰{,}۰۹۹۲۹ \rightarrow \boxed{P\{Y \geq ۲۶۹.۵\} = 1 - ۰{,}۰۹۹۲۹ = ۰{,}۰۰۷۱}$

سوال ۳.

الف) طبق جدول احتمالی را انتخاب می‌کنیم که $x=1, y=1$ باشد.

$\boxed{P(X=1, Y=1) = 0.20}$

ب) $P_{XY}(0,0) + P_{XY}(0,1) + P_{XY}(1,0) + P_{XY}(1,1) = 0.10 + 0.04 + 0.08 + 0.20 = \boxed{0.42}$

ج) $P(X \neq 0, Y \neq 0) = P_{XY}(1,1) + P_{XY}(1,2) + P_{XY}(2,1) + P_{XY}(2,2) = 0.20 + 0.06 + 0.14 + 0.30 = \boxed{0.70}$

د) $f_X(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dy \longrightarrow$ X تابع چگالی احتمال حاشیه‌ای

$P_X(0) = 0.1 + 0.04 + 0.02 = 0.16$

$P_X(1) = 0.08 + 0.20 + 0.06 = 0.34$

$P_X(2) = 0.06 + 0.14 + 0.30 = 0.5$

(ادامه دارد...)

سوال ۳ - ادامه)

$P_Y(0) = 0.1 + 0.08 + 0.06 = 0.24$

$P_Y(1) = 0.04 + 0.20 + 0.14 = 0.38$

$P_Y(2) = 0.02 + 0.06 + 0.30 = 0.38$

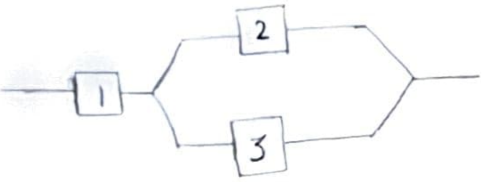
د) $P(X \leq 1) = P_X(0) + P_X(1) = 0.16 + 0.34 = \boxed{0.5}$

و) $P\{X = x_i, Y = y_j\} = P\{X = x_i\}\, P\{Y = y_j\}$ برای همه i ,j

$P\{X=0, Y=0\} = 0.1 \neq \underset{0.16}{P\{X=0\}}\ \underset{0.24}{P\{Y=0\}}$

بنابراین ≠ چون برابری شرط‌های تأیید نیست، و با حکم برابری شرط نتیجه می‌شود که مستقل نیستند.

سوال ۴.



توزیع نمایی : $X \sim EXP(\lambda)$

$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad ; \quad x \geq 0, \lambda > 0$

(عنصر ۱) and ((عنصر ۲) OR (عنصر ۳))

$$\hookrightarrow \lambda e^{-\lambda x}\left(\lambda e^{-\lambda x} + \lambda e^{-\lambda x}\right) = 2\left(\lambda e^{-\lambda x}\right)^2$$

$$E[X] = \int x f_X(x)\,dx = 2\lambda^2 \int x e^{-2\lambda x}\,dx = 2\lambda^2\left(\frac{x e^{-\lambda x}}{-2\lambda} + \frac{1}{4\lambda^2} e^{-\lambda m}\right)$$

سوال ۵.

آ) PDF ، تابع چگالی احتمال

$$f_X(x) = d\,\frac{F_X(x)}{dx}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x < 1 \\ -\frac{3}{4}x^2 + \frac{7}{4} & 1 \leq x \leq \frac{7}{3} \\ 0 & x > \frac{7}{3} \end{cases}$$

ساده‌سازی رشته خط سوم : $1 - \frac{1}{4}\left(\frac{7}{3} - x\right)\left(\frac{7}{8} - \frac{3}{8}x\right) = 1 - \left(\frac{49}{24} \overset{-\frac{7}{4}}{\cancel{-\frac{7}{8}x - \frac{7}{8}x}} + \frac{3}{8}x^2\right) = -\frac{3}{8}x^2 + \frac{7}{4}x - \frac{25}{24}$

$\xrightarrow{\text{مشتق}} -\frac{3}{4}x^2 + \frac{7}{4}$

ب)

$P(0.5 \leq X \leq 2) = P(X \leq 2) - P(X \leq ۰٫۵) = F_X(2) - F_X(0.5)$

$\rightarrow F_X(۰٫۵) = \frac{(۰٫۵)^3}{۳} = \frac{۰٫۱۲۵}{۳} \quad , \quad F_X(2) = -3/2 + 7/2 - 25/24 = 23/24$

$\rightarrow F_X(2) - F_X(0.5) = 23/24 - \frac{۰٫۱۲۵}{۳} = 11/12$

ج)

$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx \rightarrow$ تعریف انتگرالی پیوسته امید ریاضی

$$E[X] = \int_{0}^{1} x^{۲} \cdot x\, dx + \int_{1}^{7/3} x \cdot \left(-\tfrac{3}{4}x^{۲} + \tfrac{7}{4}\right) dx = \frac{x^{۴}}{۴}\Big|_{0}^{1} + \left(\frac{-3x^4}{16} + \frac{7}{8}x^2\right)\Big|_{1}^{7/3} = \frac{131}{108} = ۱٫۲۱$$

سوال ۲.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\, dx\, dy = 1$$

$$\int_{0}^{1}\int_{0}^{1} c(x^{۲} + xy)\, dx\, dy = 1 \rightarrow c\int_{0}^{1} \frac{x^{۳}}{۳} + \frac{x^{۲}}{۲}y \Big|_{0}^{1} dy = c\int_{0}^{1} \left(۱/۳ + y/۲\right) dy =$$

$$c\left(y/3 + y^{۲}/۴\right)\Big|_{0}^{1} = c\left(7/12\right) = 1 \rightarrow \boxed{c = 12/7}$$

د)

تابع cdf مشترک

$$\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{XY}(u,v)\, dv\, du = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} 12/7\,(u^2 + uv)\, dv\, du \rightarrow$$

$$12/7 \int_{0}^{x}\int_{0}^{y} u^{۲} + uv\; dv\, du = 12/7 \int_{0}^{x} u^{۲}v + u\frac{v^{۲}}{۲}\Big|_{0}^{y} du = 12/7 \int_{0}^{x} yu^{۲} + \frac{uy^{2}}{۲}\, du =$$

$$4/7\, x^3 y + 3/7\, x^{۲} y^{۲}$$

CDF حاشیه‌ای y : $F_Y(y) = F_{XY}(-\infty, y) \xrightarrow{x \in [0,1]} F_{XY}(1,y) = 4/7\, y + 3/7\, y^2$

CDF حاشیه‌ای x : $F_X(x) = F_{XY}(x, +\infty) \xrightarrow{Y \in [0,1]} F_{XY}(x,1) = 4/7\, x^3 + 3/7\, x^2$

PDF حاشیه‌ای y : $\frac{dF_Y(y)}{dy} = 4/7 + 6/7\, y$

PDF حاشیه‌ای x : $\frac{dF_X(x)}{dx} = 12/7\, x^{۲} + 6/7\, x$

ادامه سوال ۶ - ج)

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx=\int_0^1 x\left(\tfrac{4}{7}x^3+\tfrac{3}{7}x^2\right)=\tfrac{1}{7}x^4+\tfrac{1}{7}x^3\Big|_0^1=\boxed{2/7}$$

$$E[X^2]=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\,dx=\int_0^1 x^2\left(\tfrac{4}{7}x^3+\tfrac{3}{7}x^2\right)\quad \tfrac{4}{35}x^5+\tfrac{3}{28}x^4\Big|_0^1=\tfrac{4}{35}+\tfrac{3}{28}$$

$$\rightarrow Var(X)=E(X^2)-E^2(X)=\frac{4}{35}+\frac{3}{28}-\frac{4}{49}=\boxed{\frac{151}{980}}$$

۲۲/۴۹.

→ [illegible]

سوال ۷.

الف)

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy=1\rightarrow\int_{20}^{30}\int_{x=20}^{30} k(x^2+y^2)\,dx\,dy=$$

$$k\int_{20}^{30}\frac{x^3}{3}+y^2x\Big|_{20}^{30}dy=k\int_{20}^{30}\left(\frac{27000}{3}+30y^2\right)-\left(\frac{8000}{3}+20y^2\right)dy=$$

$$k\int_{20}^{30}\frac{19000}{3}+10y^2\,dy=k\left(\frac{19000y}{3}+\frac{10y^3}{3}\right)\Big|_{20}^{30}=\frac{190000\times2}{3}=\frac{1}{k}\rightarrow\boxed{k=\frac{3}{380000}}$$

ب)

$$P\{X\leq26,Y\leq26\}=F_{XY}(26,26),\ X,Y\in[20,30]$$

$$\rightarrow F_{XY}(26,26)=\int_{20}^{26}\int_{2}^{26}\frac{3}{3800}(x^2+y^2)\,dx\,dy=\frac{3}{380000}\int_{30}^{26}\left(6y^2+\frac{9576}{3}\right)dy$$

$$=\frac{3}{380000}\left(2y^3+\frac{9576}{3}y\right)\Big|_{20}^{26}=\frac{3\times38304}{380000}=\boxed{0{,}3024}$$

ج)

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{3}{380000}(x^2+y^2)\,dy\qquad y\in[20,30]$$

$$\frac{3}{380000}\left(x^2y+\tfrac{1}{3}y^3\right)\Big|_{2}^{30}=\frac{3}{380000}\left(10x^2+\frac{30^3}{3}-\frac{20^3}{3}\right)=\boxed{\frac{3}{380000}\left(10x^2+\frac{19000}{3}\right)}$$

د) به دلیل تقارن که در قسمت ج دیدیم. شرط مستقل بودن:

$$F_{XY}(x,y)=F_X(x)\cdot F_Y(y)$$

$$\frac{3}{380000}\left(10x^2+\frac{19000}{3}\right)\times\frac{3}{380000}\left(10y^2+\frac{19000}{3}\right)\neq\frac{3}{380000}(x^2+y^2)$$

↘

X و Y وابسته اند.

سؤال ۸.

۱۲

$E[x] = \sum x_i p(x_i) \rightarrow E(X) = 1/4(1+2+3+4) = 10/4 = 2.5$

$E[x^2] = \sum x_i^2 p(x_i) \rightarrow E[x^2] = 1/4(1+4+9+16) = 30/4 = 7.5$

$Var(X) = \frac{30}{4} - \frac{25}{4} = 5/4 \rightarrow \sigma = \boxed{\frac{\sqrt{5}}{2}}$

$E[Y] = \sum y_j p(y_j) \Rightarrow E(Y) = 1/6(1+\cdots+6) = \boxed{21/6}$

$E[Y^2] = \sum y_j^2 p(y_j) \Rightarrow E(Y^2) = 1/6(1+4+9+\cdots+36) = \boxed{91/6}$

$Var(Y) = 91/6 - 49/4 = 35/12 \rightarrow \sigma = \boxed{\sqrt{35/12}}$

ب)

$Z = \frac{Y+X}{2}$

$P\{Z=z\} = P\{\frac{X+Y}{2} = z\}$

$P\{Z=1\} = P\{X+Y=2\} = P\{X=1, Y=1\} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{6} = 1/24$

$P\{Z=1.5\} = P\{X+Y=3\} = P\{X=2, Y=1\} + P\{X=1, Y=2\} = 2/24$

$P\{Z=2\} = P\{X=3, Y=1\} + P\{X=1, Y=3\} + P\{X=2, Y=2\} = 3/24$

$P(Z=2.5) = P\{X=1, Y=4\} + P\{X=۲, Y=3\} + \cdots = 4/24$

$P(Z=3) = 4/24$

$P(Z=3.5) = 4/24$

$P(Z=4) = 3/24$

$P(Z=4.5) = 2/24$

$P(Z=5) = 1/24$

$$P\{Z \le z\} = F_Z(z) = \begin{cases} 1/24 & z=1 \\ 3/24 & z=1.۵ \\ 6/24 & z=۲ \\ 10/24 & z=۲.۵ \\ 14/24 & z=۳ \end{cases} \qquad \begin{matrix} 18/24 & z=3.5 \\ 21/24 & z=4 \\ 23/24 & z=۴.۵ \\ 1 & z=5 \end{matrix}$$

ج)

$X = \begin{cases} ۲X & x > Y \\ -1 & x \le Y \end{cases} \rightarrow E[X] = \sum_i k_i p(k_i)$

$x=1 \rightarrow E[x_1] = ۲\times۱\times۰ + (-1) \times 1/6 = -4/24$

$x=2 \rightarrow E[k_۲] = ۲\times۲\times۱/۲۴ + (-1)\times۵/۲۴ = -1/24$

$x=3 \rightarrow E[k_۳] = ۲\times۳\times۲/۲۴ + (-1)\times۴/۲۴ = ۸/24$

$x=4 \rightarrow E[k_۴] = 2\times4\times3/24 + (-1)\times3/24 = 21/24$

$E[K] = \sum_i E[k_i] = 1$

امید ریاضی عدد ۵٪ بازی برابر ۵٪ است