به نام خدا

۱۴۰۱ نظریه زبان ها و ماشین ها – بهار

پاسخ تمرین شماره سه

ایمیل دستیار آموزشی این مجموعه:

f24moh@gmail.com

- در مواردی که خواسته شده نامنظم بودن یا نبودن زبان‌ها را اثبات کنید، نامنظم بودن هیچ زبانی را به صورت پیش فرض در نظر نگیرید.
- یکی از اهداف این تمرین یادگیری "لم تزریق" میباشد، درصورتی که از روش دیگری برای نشان دادن نامنظم بودن زبانها استفاده کنید نمره‌ای به حل شما تعلق نمیگیرد.
- برای نشان دادن منظم بودن زبان ها کافی است DFA آنرا رسم کنید و توجه کنید DFA به صورت کمینه شده تنها قابل قبول است.

1) نامنظم بودن زبان‌های زیر را اثبات کنید.

a) $L_1 = \{0^i 1^j \mid gcd(i,j) = 1\}$

1. devil: picks p

2. you: w = $0^{p'}\ 1^{(p'-1)!}$,

P' اولین عدد اول بزرگتر از p میباشد.

3. devil: w = xyz , |xy| ≤ p, |y| != 0

=> y = 0^k ; $k \geq 1$

4. you: i = 0

=> w' = $xy^o z = 0^{(p'-k)} 1^{(p'-1)!}$

=> gcd(p-k, (p-1)!) = p - k ; $k \geq 1$

=> w' ∉ l_1

=> L_1 is not regular.

b) $L_2 = \{(ab)^n a^k : n > k, k \geq 0\}$

1. devil: picks p

2. you: w = $(ab)^{p+1} a^p$

3. devil: w = xyz , |xy| ≤ p, |y| != 0

چون طول رشته xy بایستی از p کمتر باشد هر دو جز رشته ساخته شده از $(ab)^{p+1}$ خواهند بود

4. you:

برای y چندین حالت داریم:

- y = a…a or a (با a شروع میشود و با a تمام میشود)

در این صورت با قرار دادن i = 0 رشته ی ایجاد شده شامل bb میشود که واضح است این رشته نمیتواند جز زبان باشد.

- $y = (ba)^m$ یا $y = (ab)^m$

در این صورت با قرار دادن i = 0 رشته ی ایجاد شده دارای تعداد بیشتری a در انتهای رشته نسبت به ab ها میباشد و دیگر جز زبان نیست.

- y = b…b or b

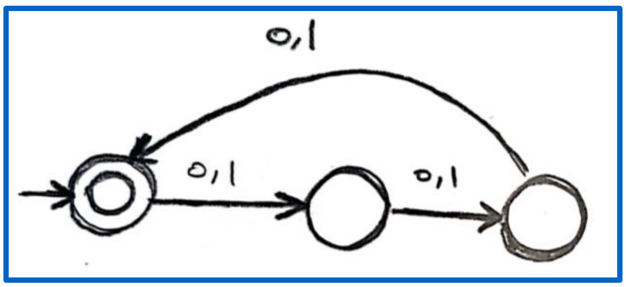
در این صورت با قرار دادن i = 0 رشته ایجاد شده شامل aa میشود که واضح است این رشته نمیتواند جز زبان باشد. (چرا که یا دو aa بین دو bb داریم و یا در اخر رشته داریم که در حالت اول شکل کلی رشته جز زبان نیست و در حالت دوم تعداد a ها بیشتر از ab ها میشود)

با توجه به اینکه ما در هرحال استراتژی برد داریم، زبان نامنظم است

c) $L_3 = \{w | w \in \{a,b,c\}^* \ and \ n_a(w) \le n_b(w) \le n_c(w)\}$
1. devil: picks p
2. you: w = $a^p b^p c^p$
3. devil: w = xyz , |xy| ≤ p, |y| != 0
=> y = a^k
4. you: i = 2
=> new string w' = $a^{k+P} b^p c^p$, $k \,!= \, 0 \;=>\; n_a(w') > n_b(w) \;=>\; w' \notin L_3$
در نتیجه زبان مورد نظر نامنظم است.

2) منظم بودن یا نامنظم بودن زبان‌های زیر را مشخص کنید. (پاسخ خود را اثبات کنید.)

a) $L_1 = \{ w_1 w_2 \,|\, w_1, w_2 \in \{0,1\}* \ and \ |w_1| = 2|w_2| \}$
منظم است.
درواقع زبان داده شده را میتوان به صورت زیر نوشت:
$L_1 = \{ w \,|\, w \in \{0,1\}* \ and \ |w| = 3k, k \ge 0 \}$
که میتوان DFA انرا به صورت زیر رسم کرد:



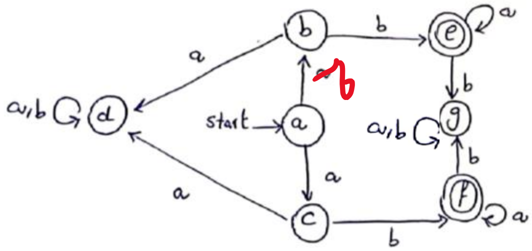
b) $L_2 = \{a^n b^m c^k | n = m \ and \ n \ne k\}$
نامنظم است.
1. devil: picks p
2. you: w = $a^p b^p c^{2p}$
3. devil: w = xyz , |xy| ≤ p, |y| != 0
4. you: i = 0 => $xy^i z = a^{p-|y|} b^p c^{2p}$
باتوجه به اینکه |y| صفر نمیباشد، رشته جدید نمیتوان جز زبان مورد نظر باشد، زبان نامنظم است

c) $L_3 = \{w \,| w \in \{a,b,c\}*, |w| \ is \ prime \ number\}$
نامنظم است.
1. devil: picks p
2. you: w = a^q , q is prime number , q > p
3. devil: w = xyz , |xy| ≤ p , |y| != 0
=> y = a^k ; $k \ge 1$
4. you: i = q + 1
=> w' = xy^iz = $a^{q+qk} = a^{q(k+1)}$
=>w' ∉ L_3
=> L_3 is not regular

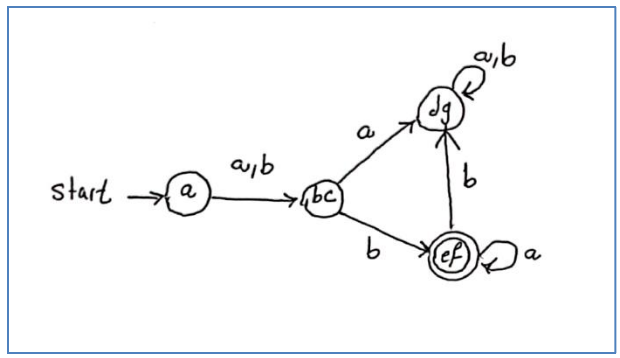
توجه شود هیچ یک از k+1 یا q نمیتوانند یک باشند، پس q(k+1) اول نیست.

3) DFA های داده شده را کمینه کنید.

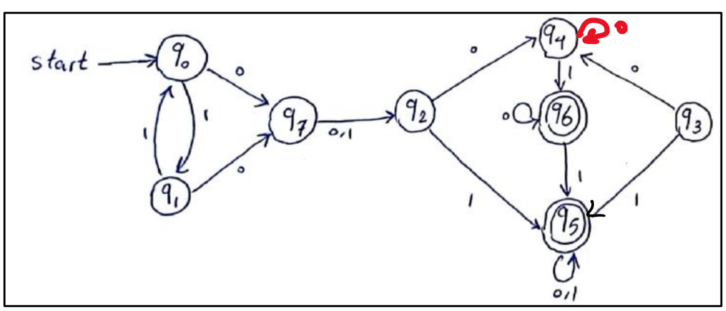
a) $\sum = \{a\,,b\}$



a						
	b					
	bc	c				
			d			
				e		
				ef	f	
			dg			g

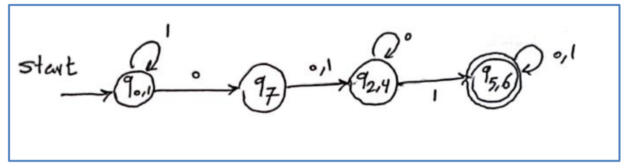


b) $\sum = \{0,1\}$

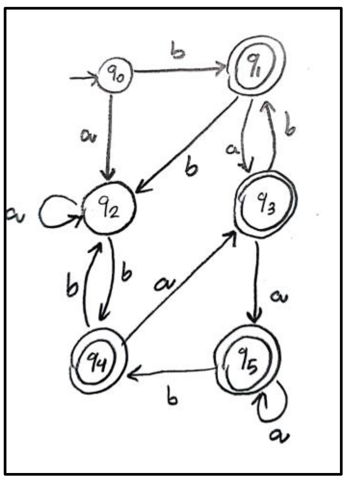


با توجه به اینکه مسیری از q_0 به q_3 (هیچ مسیری برای رسیدن به این استیت وجود ندارد)، این استیت قابل حذف از DFA میباشد، پس از حذف این استیت، استیت های برابر را پیدا میکنیم.

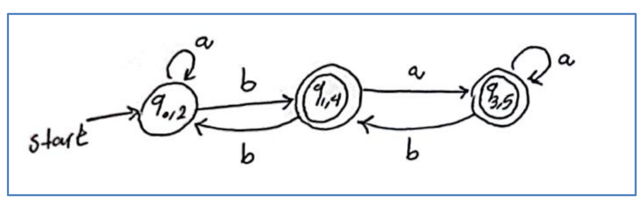
q0							
q0,1	q1						
		q2					
-	-	-	q3				
		q2,4	-	q4			
			-		q5		
			-		q5,6	q6	
			-				q7



c) $\sum = \{a, b\}$



q0					
	q1				
q0,2		q2			
			q3		
	q1,4			q4	
			q3,5		q5



4) یک دانشجو علاقمند به مباحث تئوری علوم کامپیوتر با استفاده از لم تزریق میخواهد اثبات کند که این زبان نامنظم است:

$$L = \{w_1w_2 \mid w_i \in \{a.b\}*, n_a(w_1) = n_b(w_2)\}$$

پاسخ این دانشجو به صورت زیر است:

1. حریف مقدار $p \geq 1$ انتخاب میکند
2. من رشته $w = a^p b^p$ را انتخاب میکنم
3. حریف رشته w را به صورت xyz تقسیم بندی میکند و چون طول xy کمتر p باید باشد، y حتما به صورت a^p میباشد.
4. اگر من i = 0 قرار بدهم، تعداد a ها کمتر از تعداد b ها میشود و دیگر این رشته متعلق به زبان نمیباشد، پس زبان نامنظم است.

یا از نظر شما این استدلال صحیح است ؟

اگر خیر اشکال کار کجاست؟

(اگر فکر میکنید زبان منظم است کافی است DFA مربوط به زبان را رسم کنید)

استدلال صحیح نیست؛

1.طول y میتواند متغیر باشد.

2. در مرحله 4 ام میتوانست رشته را به گونه ای بشکند که جز زبان باشد.

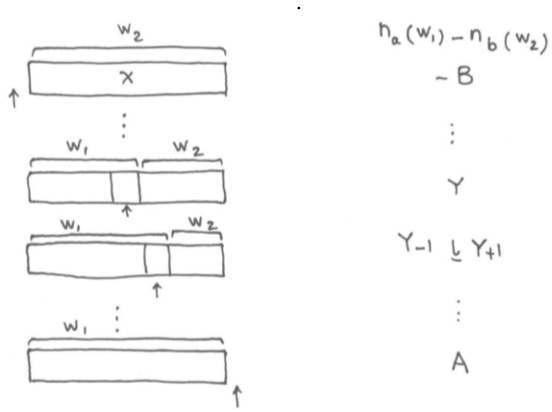
زبان منظم است.

اثبات :

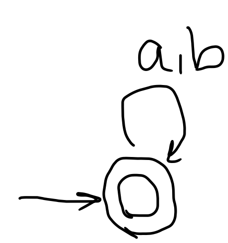
بر روی الفبای $\Sigma = \{a,b\}$ می توان هر رشته دلخواه $x \in \Sigma^*$ را به صورت $x = w_1 w_2$ نوشت که در آن $n_a(w_1) = n_b(w_2)$. پس زبان منظم است.

اثبات. فرض کنیم برای رشته دلخواه x ، $n_a(x) = A$ و $n_b(x) = B$ باشد.

هنگام خواندن x از چپ به راست مقدار $n_a(w_1) - n_b(w_2)$ را در نظر می گیریم.



در حین خواندن x از چپ به راست، مقدار $n_a(w_1) - n_b(w_2)$ از عدد منفی $(-B)$ به عددی مثبت (A) به طور پیوسته (اضافه یا کم شدن یک واحد در هر مرحله) می رسد. در این تغییرات به ناچار در جایی مقدار آن صفر می شود.



5) زبان $L_{p(n)}$ به صورت زیر تعریف میشود، به این صورت که $p(n)$ یک چند جمله ای با ضرایب طبیعی باشد.

$$L_{p(n)} = \{w \mid w = 0^{p(n)}, n > 0, n \in N\}$$

ثابت کنید زبان $L_{P(n)}$ منظم است اگر و تنها اگر درجه جند جمله ای $p(n)$ برابر صفر یا یک باشد.

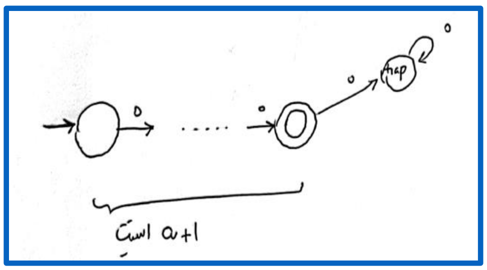
کافی است منظم بودن زبان مورد نظر را برای سه حالت که درجه چند جمله ای صفر - یک - یا بیشتر از یک باشد را بررسی کنیم.

- اگر درجه چند جمله ای صفر باشد:

p(n) = a

L = $\{0^a\}$

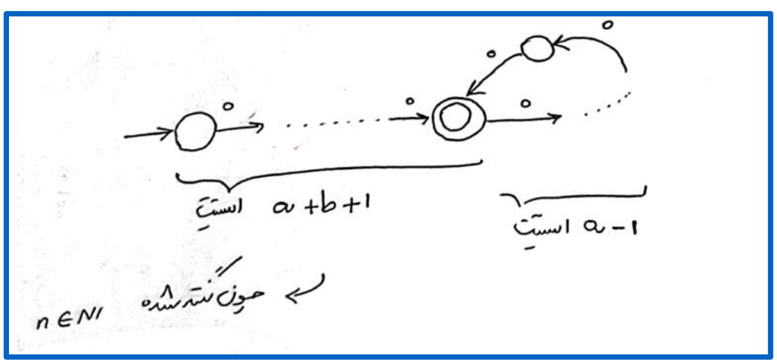
این زبان تنها یک عضو دارد و متناهی است و واضح است که منظم میباشد. (میتوان DFA مطابق زیر برای این زبان رسم کرد:)



- اگر درجه چند جمله ای یک باشد:

p(n) = an + b

برای این زبان نیز میتوان DFA زیر را رسم کرد:



- اگر درجه چند جمله ای بیشتر از یک باشد:

با استفاده از لم تزریق نشان میدهیم که که نمیتوانم منظم باشد:

1. devil: picks q
2. you: w = $0^{p(q)}$
3. devil: w = xyz , |xy| ≤ p, |y| != 0

4. you: w' = $xy^iz, i = a$

=> $|w'| = a|y| + |x| + |z| = a|y| + |xz|$ = an + b

با توجه به اینکه اندازه رشته w'= an + b است، طول رشته جدید با افزایش a به صورت خطی افزایش پیدا میکند و مقدار آن روی خط با شیب a و عرض از مبدا b قرار میگیرد.

همچنین میدانیم برای اینکه زبان مرود نظر منظم باشد، باید رشته جدید $w' = xy^iz$عضو زبان L باشد، پس باید به ازای هر مقدار i = a مقدار an + b برابر با روی منحنی $p(n)$ قرار بگیرد، درصورتی که که میدانیم رشد چند جمله ای ها با درجه بیشتر از یک مسلما بیشتر از چند جمله ای با درجه یک میباشد و نمیتوان تمام مقادیر an + b را روی یک چند جمله با درجه بیشتر از یک و با ضرایب ثابت منطبق کرد، پس این زبان نمیتواند منظم باشد.

6) (امتیازی) زبان(L(K را به صورت زیر تعریف میکنیم:

$$L(K) = \{w_1w_2 | w_i \in (0+1)*, |w_2| = m, \quad w_1 \; ends \; with \; 0\}$$

اثبات کنید DFA کمینه حداقل 2^{m+1} استیت دارد.

این زبان رشته هایی را توصیف میکند که حرف m + 1 ام از آخر آن برابر a است.

برهان خلف: فرض کنید DFA کمینه این زبان کمتر از 2^{m+1} استیت دارد.

چون در مجموع 2^{m+1} ترکیب مختلف برای m + 1 حرف آخری که تا کنون خوانده شده وجود دارد. طبق اصل الانه کبوتری, استیتی وجود دارد که پس از خواندن دو دنباله m + 1 حرفی متفاوت به آن میرسیم.

این استیت را با q و این دو دنباله را با $n_1, n_2 .. n_{m+1}$ و $k_1, k_2 .. k_{m+1}$. نشان میدهیم. چون دو دنباله متمایز هستند, حداقل در یک حرف تفاوت دارند. اولین نقطه تفاوت آنها را i مینامیم. به دلیل تقارن میتوان فرض کرد که $n_i = b, k_i = a$.

استیتی که با خواندن دنبالهb^{i-1} با شروع از استیت q به آن میرسیم را در نظر بگیرید. این استیت یک استیت accepting است چون پس از خواندن دنباله $k_i, k_{i+1} .. k_{m+1}\, b^{i-1}$ به آن رسیدیم و m + 1 امین حرف از آخر برابر a است. از طرفی این استیت یک استیت non-accepting است چون با خواندن دنباله $n_i, n_{i+1} .. n_{m+1} b^{i-1}$ به آن میرسیم و m + 1 امین حرف از آخر برابر b است. تناقض حاصل نشان میدهد که DFA کمینه این زبان حداقل 2^{m+1} استیت دارد.