ریاضیات گسسته

پاسخنامه تمرین نهم - گراف مقدماتی

امیرمحمد خسروی

تاریخ تحویل ۱۴۰۱/۰۲/۲۳

سؤال ۱.

فرض کنید G گرافی ۱۰ منتظم با ۹۰ رأس باشد. ثابت کنید هر رأس از G متعلق به دوری به طول ۴ است.

پاسخ .

یک رأس مانند a در نظر بگیرید. همسایه‌های a را با $b_1, b_2, \ldots, b_{10}$ و مابقی رئوس را با $c_1, c_2, \ldots, c_{79}$ نشان می‌دهیم. اگر یکی از b_i ها به دوتای دیگر، مثلاً به b_j و b_k، وصل باشد، در این صورت دوری به طول ۴ شامل a به وجود می‌آید. در غیر این صورت هر b_i حداقل به ۸ تا از c_j ها وصل است و لذا حداقل ۸۰ یال یافت می‌شود که یک سر هر یک در بین b_i ها و سر دیگر در بین c_i ها است. نتیجه می گیریم اندیس j وجود دارد که c_j حداقل به دوتا از b_i ها وصل است و لذا در این حالت نیز دوری به طول ۴ شامل رأس a به وجود می‌آید.

سؤال ۲.

نشان دهید اگر گراف ساده و همبند G اجتماعی از گراف‌های G_1 و G_2 باشد، آنگاه G_1 و G_2 حداقل يك رأس مشترك دارند.

پاسخ .

طبق برهان خلف فرض می‌کنیم G_1 و G_2 هیچ رأس مشترکی ندارند. پس در اجتماعشان هیچ یالی از G_1 به G_2 وجود ندارد، یعنی $\forall v_1 \in V(G_1)$ و $\forall v_2 \in V(G_2)$، داریم $v_1 v_2 \notin E(G)$. حال چون هیچ مسیری از گراف G_1 به گراف G_2 وجود ندارد و همچنین گراف G از اجتماع گرافهای G_1 و G_2 تشکیل شده است، می‌توان گفت که گراف G همبند نیست زیرا گراف G را زمانی همبند گوییم، که يك مسیر بین هر دو رأس آن وجود داشته باشد. پس فرض خلف باطل است در نتیجه G_1 و G_2 حداقل يك رأس مشترك دارند

سؤال ۳.

فرض کنید G گرافی اویلری است و دو یال e_1 و e_2 دارای راس مشترک‌اند و این راس مشترک، راس برشی نمی‌باشد. ثابت کنید تور اویلری وجود دارد که این دو یال پشت هم آمده‌اند.

پاسخ .
راس مشترک بین دو یال را v_0 می‌نامیم و راس دیگر یال‌های e_1 و e_2 را به ترتیب v_1 و v_2 می‌نامیم. حال این دو یال را از گراف حذف می‌کنیم، می‌دانیم راس v_0 که راس مشترک این دو یال بود، راس غیر برشی می‌باشد، بنابراین گراف با حذف این دو یال همواره همبند می‌ماند. حال گراف اویلری با حذف این دو یال به گراف شبه‌اویلری تبدیل شده که دو راس درجه فرد آن v_1 و v_2 هستند. بنابراین اگر تور شبه‌اویلری گراف را با شروع از یکی از این دو رئوس شروع کنیم، پس از پیمایش تمام یال‌های این گراف شبه‌اویلری به راس دیگر می‌رسیم. در نهایت تور شبه‌اویلری داریم که دو سر آن v_1 و v_2 است و با برگرداندن دو یال e_1 و e_2 به گراف، دو سر تور شبه‌اویلری یعنی v_1 و v_2 به هم وصل می‌شوند و تور اویلری ما ساخته می‌شود که دو یال e_1 و e_2 در آن پشت‌هم آمده‌اند. زیرا ما دو یال را که یکی به v_1 و دیگری به v_2 متصل است و در راس v_0 مشترک هستند را به تور شبه‌اویلری که دو سر آن v_1 و v_2 بود اضافه کردیم که در این صورت حکم مسئله اثبات می‌شود.

سؤال ۴.

زیر گراف القایی یک زیر گراف است که رئوسش یک زیر مجموعه از رئوس اصلی و یال‌هایش تمام یال‌های میان آن رئوس است. گراف G، گرافی است که هیچ زیر گراف القایی به شکل P_4 (مسیر به طول ۳) و C_3 (دور به طول ۳) ندارد.

الف) ثابت کنید این گراف دوبخشی است.

ب) با این فرض که گراف G همبند است، ثابت کنید این گراف دوبخشی کامل است.

پاسخ .

الف)

می‌دانیم که یک گراف دو بخشی است اگر و تنها اگر دور فرد نداشته باشد. بنابراین برای اثبات این بخش کافی است اثبات کنیم که گرافی که دور فرد دارد حتما دارای یک زیرگراف القایی به شکل P_4 یا C_3 دارد. برای اثبات این موضوع نیز از برهان خلف استفاده می‌کنیم. برهان خلف: فرض می‌کنیم گراف G، گرافی است که دور فرد دارد ولی هیچ زیرگراف القایی به شکل P_4 یا C_3 ندارد.

کوچک‌ترین دور فرد این گراف را در نظر می‌گیریم. اگر طول این دور برابر با ۳ باشد، آنگاه با فرض ما تناقض دارد چرا که ما فرض کرده بودیم گراف G زیرگراف القایی به شکل C_3 ندارد.

در غیر این صورت طول این دور فرد حداقل برابر با ۵ است. ۴ رأس ابتدایی این دور را در نظر می‌گیریم و آن‌ها را به ترتیب A، B، C و D می‌نامیم. اگر زیرگراف القایی حاصل از این ۴ رأس را در نظر بگیریم، یال‌های AB، BC و CD حتما در این زیرگراف وجود دارد. حال ۳ حالت داریم:

۱- اگر هیچ یال دیگری در این زیرگراف القایی وجود نداشته باشد، آنگاه به تناقض می‌رسیم چرا که یک زیر گراف القایی به شکل P_4 تشکیل می‌شود و این با فرض ما تناقض دارد.

۲- اگر هر کدام از یال‌های AC یا BD در این زیر گراف القایی وجود داشته باشد، آنگاه باز هم به تناقض برخورد می‌کنیم چرا که زیر گراف القایی به شکل C_3 تشکیل می‌شود.

۳- در صورتی که یال AD در این زیر گراف القایی وجود داشته باشد، آنگاه می‌توان یال‌های AB، BC و CD را حذف کرده و به جای آن‌ها یال AD را قرار داد و به دور فردی کوچک‌تر از دور فرد انتخاب شده رسید که تناقض است چرا که فرض کرده بودیم دور فرد انتخاب شده، کوچک‌ترین دور فرد گراف G است.

بنابراین با استفاده از برهان خلف اثبات کردیم که گرافی که دور فرد دارد حتما زیرگراف القایی به شکل P_4 یا C_3 دارد. حال با توجه این که در فرض سوال گفته شده است که گراف ما زیرگراف القایی به شکل P_4 یا C_3 ندارد، بنابراین طبق اثبات بخش قبل نتیجه می‌گیریم که گراف G دور فرد ندارد و در نتیجه گراف G دوبخشی است.

ب)

با توجه به اثبات بخش الف، می‌دانیم که گراف G دوبخشی است. حال با استفاده از برهان خلف اثبات می‌کنیم که در صورت همبند بودن گراف G، این گراف دوبخشی کامل است.

برهان خلف: فرض می‌کنیم دو رأس مانند u و v در دو بخش مختلف از گراف G وجود دارند که به هم یال ندارند.

با توجه به این که گراف G همبند است بنابراین حتما مسیری در این گراف بین دو رأس u و v وجود دارد. کوتاه‌ترین مسیر بین این دو رأس را در نظر می‌گیریم. آنگاه ۲ حالت داریم:

۱- اگر طول این مسیر برابر با ۳ باشد، آنگاه تناقض است چرا که زیرگراف القایی به شکل $P_۴$ تشکیل می‌شود و می‌دانیم که در گراف G زیرگراف القایی به شکل $P_۴$ یا $C_۳$ وجود ندارد.

۲- اگر این طول این مسیر بیش از ۳ (حداقل برابر با ۵) باشد، آنگاه ۴ رأس اول این مسیر را در نظر می‌گیریم و آن‌ها را به صورت u، $u_۱$، $u_۲$ و $u_۳$ نامگذاری می‌کنیم. حال با توجه به این که این مسیری که بین u و v در نظر گرفتیم، یال بین دو رأس u و $u_۳$ نمی‌تواند وجود داشته باشد، چرا که مسیری کوتاه‌تر بین u و v به وجود می‌آید. بنابراین اگر این ۴ رأس را در نظر بگیریم، زیر گراف القایی به شکل $P_۴$ تشکیل می‌شود که تناقض است.

بنابراین اثبات شد در گراف G، هیچ دو رأس در در بخش متفاوت وجود ندارند که به هم یال نداشته باشند. در نتیجه اثبات شد که گراف G، گراف دوبخشی کامل است.

سؤال ۵.

ثابت کنید در یک تورنمنت(گراف کامل ساده جهت‌دار) قویا همبند ، به ازای هر k به طوری که $n \geq k \geq ۳$، دوری جهت‌دار به طول k وجود دارد.

پاسخ .

روی k استقرا می‌زنیم و داریم:

پایه: $k = ۳$. رأس v را در نظر بگیرید. اگر رئوسی که به v یال دارند را در مجموعه A و رئوسی که v به آن‌ها یال دارد را در مجموعه B قرار دهیم، با توجه به اینکه گراف قویاً همبند است، مجموعه‌های A و B تهی نیستند و رأس w در B وجود دارد که به رأس u در A یال دارد. بنابراین رئوس w و u و v دور به طول ۳ تشکیل می‌دهند.

فرض: در این گراف دوری به طول k داریم.

حکم: در این گراف دوری به طول $k + ۱$ داریم.

دور به طول k را (با توجه به فرض) در نظر بگیرید. حال اگر رأس u خارج از این دور وجود داشته باشد که ره رئوس داخل دور، هم یال ورودی و هم یال خروجی داشته باشد (حداقل یک یال ورودی و یک یال خروجی)، با توجه به این که گراف تورنمنت قویاً همبند است و u به تمام رئوس داخل دور یال ورودی یا خروجی دارد، رئوس x و y همسایه باشند و از x با یال خروجی به u برویم و با یال ورودی به y برگردیم. پس دور به طول $k + ۱$ هم داریم.

در غیر این صورت، اگر رئوسی داشته باشیم که همه به رئوس داخل دور وارد می‌شوند (مجموعه A) و رئوسی داشته باشیم که همه از آن‌ها خارج می‌شوند (مجموعه B)، چون گراف قویاً همبند است پس حتماً از B به A مسیر داریم، پس دور به طول $k + ۱$ داریم.

سؤال ۶.

G گرافی است غیر دوبخشی و بدون مثلث (دور به طول ۳) با n رأس و حداقل درجه‌ی یک رأس در آن برابر با k است. L را طول کوتاه‌ترین دور فرد در این گراف در نظر می‌گیریم:

الف) اگر C یک دور به طول L در گراف G باشد، آنگاه ثابت کنید که هر رأسی که در دور C نباشد، حداکثر دو همسایه در رئوس دور C دارد.

ب) ثابت کنید $n \geq (k \times L)/۲$.

ج) به ازای مقادیر زوج k ثابت کنید گرافی وجود دارد که $n = kL/۲$.

پاسخ .

الف)

رأس بیرون از دور C را v می‌نامیم. برای اثبات حکم سؤال کافی است ابتدا اثبات می‌کنیم که اگر v حداقل ۲ همسایه در در رئوس دور C داشته باشد، آنگاه فاصله‌ی هر دو همسایه‌ی رأس v در دور C باید دقیقا برابر با ۲ باشد.

بدون از دست رفتن کلیت مسأله دو همسایه از همسایه‌های رأس v را در دور C در نظر می‌گیریم و آن‌ها را a و b می‌نامیم. در صورتی که فاصله‌ی این دو رأس در دور C برابر با یک باشد آنگاه فرض مساله نقض می‌شود چرا که می‌دانیم گراف G بدون مثلث است. در صورتی که فاصله‌ی این دو همسایه بیش از ۲ باشد، آنگاه با توجه به این که L فرد است، روی دور C دو مسیر به زوج و فرد بین دو رأس a و b تشکیل می‌شود. با توجه به این که طول قسمت زوج حداقل برابر با ۴ است، بنابراین طول مسیر فرد حداکثر برابر با $L - ۴$ است. حال اگر این مسیر به همراه دو یال va و vb را در نظر بگیریم به یک دور فرد با طول حداکثر $L - ۲$ می‌رسیم که تناقض است چرا که طبق فرض سؤال C کوچک‌ترین دور گراف است.

بنابراین ثابت شد که فاصله‌ی همسایه‌های رأس v در C دقیقا برابر با ۲ است. با توجه به این موضوع رأس v حداکثر ۳ همسایه در دور C دارد چرا که در غیر این صورت شرط فاصله‌ی دو به دو برابر با ۲ نقض می‌شود. برای داشتن ۳ همسایه در دور C نیز باید $L = ۶$ باشد که باز هم با فرض سؤال در تناقض است چرا که می‌دانیم L عددی فرد است.

بنابراین اثبات شد که هر رأس بیرون از دور C مانند رأس v حداکثر ۲ همسایه در دور C دارد.

ب)

برای اثبات این بخش یال‌های بین رأس‌های دور C و رأس‌های بیرون از آن را به دو روش می‌شماریم. تعداد این یال‌ها را e در نظر می‌گیریم. حال با توجه به قسمت قبل رئوس بیرون از دور C حداکثر دو همسایه داخل این دور دارند بنابراین خواهیم داشت که $e \leq ۲ \times (n - L)$. از طرفی با توجه به این که درجه‌ی هر رأس در گراف G حداقل برابر با k است و رئوس داخل دور C نمی‌توانند یال دیگری به جز دو رأس قبل و بعد از خود در دور C داشته باشند چرا که تشکیل دور فرد کوچک‌تر می‌دهد و تناقض با فرض مساله است، بنابراین این رئوس حداقل $k - ۲$ یال به رئوس بیرون از دور C دارند. بنابراین خواهیم داشت که $e \geq L \times (k - ۲)$.

یال اگر این ۲ نامساوی را در کنار هم بگذاریم به نامساوی $L \times (k - ۲) \leq ۲ \times (n - L)$ می‌رسیم که در نهایت نتیجه می‌گیریم که $n \geq \frac{L \times k}{۲}$.

ج)

برای تشکیل این گراف، L تا بخش که هر کدام $\frac{k}{۲}$ رأس دارند را در نظر می‌گیریم و آن‌ها را از ۱ تا L شماره گذاری می‌کنیم. سپس رئوس بخش i را به رئوس بخش $i + ۱$ وصل می‌کنیم. رئوس بخش L را نیز به رئوس بخش ۱ وصل می‌کنیم. با این کار گراف مورد نظر تشکیل می‌شود.