# آمار و احتمالات مهندسی

تمرین اول - اصول احتمال

علی و اولدوز

تاریخ تحویل ۱۴۰۱/۰۷/۲۷

## سؤال ۱.

یکی از روش‌های تخمین جمعیت و تراکم حیات وحش، روش نشانه‌گذاری و دوباره‌گیری جانوران است.(Capture-Recapture)به عنوان مثال در جنگلی N آهو وجود دارد که به کمک جنگلبان از بین N آهو، n عدد انتخاب و نشانه‌گذاری می‌شوند.(فرض کنید که احتمال انتخاب هر یک از آهوها با یکدیگر برابر است.) سپس آن‌ها را به جمعیت اصلی باز می‌گردانیم و یک نمونه جدید به اندازه m انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه از m آهو انتخاب شده دقیقا k آهو دارای نشانه باشند، چقدر است؟(فرض کنید که نمونه‌برداری که برای بار دوم صورت گرفته است مستقل از نمونه‌برداری بار اول است.)

**پاسخ .**
پیشامد این که از m آهو دقیقا k آهو علامت داشته باشند را A می‌نامیم.
جهت محاسبه پیشامد A ، ما باید K آهو از n آهویی که نشانه‌گذاری شده‌اند انتخاب کنیم و m-K آهو را باید از N-n آهویی که علامتی ندارند انتخاب کنیم. در نتیجه داریم:

$$P(A) = \frac{\binom{n}{k} \cdot \binom{N-n}{m-k}}{\binom{N}{m}}$$

این سوال را به یاد داشته باشید زیرا در قسمت توزیع‌ها دوباره با آن مواجه می‌شوید (توزیع فوق‌هندسی).

## سؤال ۲.

به چند طریق می‌توان ۸ نفر را به ۴ اتاق ۴ ,۳ ,۲ ,۱ تقسیم کرد، به طوری که اتاق خالی نداشته باشیم و تعداد افراد حاضر در اتاق‌های ۲ ,۱ برابر باشند؟

**پاسخ .**
حالت‌های مختلف برای برقراری شرطی که تعداد افراد اتاق‌های ۱ و ۲ باید برابر باشد:

۱. هیچ شخصی در این دو اتاق نباشد: مطلوب نیست زیرا نباید اتاق خالی داشته باشیم و در این حالت اتاق‌های ۱ و ۲ خالی می‌شوند.

۲. یک نفر در هر یک از اتاق‌های ۱ و ۲ باشد.

۳. دو نفر در هر یک از اتاق‌های ۱ و ۲ باشند.

۴. سه نفر در هر یک از اتاق‌های ۱ و ۲ باشند.

۵.چهار نفر در هر یک از اتاق‌های ۱ و ۲ باشند: مطلوب نیست زیرا نباید اتاق خالی داشته باشیم و در این حالت اتاق‌های ۳ و ۴ خالی می‌شوند.

در حالت دوم که یک نفر در هر یک از اتاق‌های ۱ و ۲ است:

در این صورت برای هریک از اتاق‌های ۱و۲ یک نفر را انتخاب می‌کنیم، سپس حالات مختلف قراردادن ۶ نفر در دو اتاق را بررسی می‌کنیم. هر یک از افراد برای قرارگیری ۲ حالت دارند، اما از میان تمام حالات، حالتی که همه ۶ نفر در اتاق ۳ یا همه ۶ نفر در اتاق ۴ باشند، برای ما نامطلوب هستند، پس در کل تعداد راه‌های تقسیم ۶ نفر در دو اتاق با شرط مذکور:

$$۲^{۶} - ۲ = ۶۲ \tag{۱}$$

پس، کل روش‌ها در این حالت:

$$\binom{۸}{۱}\binom{۷}{۱} \times ۶۲ = ۸ \times ۷ \times ۶۲ = ۳۴۷۲ \tag{۲}$$

درحالت سوم که دو نفر در هر یک از اتاق‌های ۱ و ۲ هستند:

در این صورت برای هر یک از اتاق‌های ۱ و ۲ دو نفر را انتخاب می‌کنیم، سپس حالات مختلف قراردادن ۴ نفر در دو اتاق به طوری که هیچ اتاقی خالی نباشد را محاسبه می‌کنیم مشابه حالت قبل هر شخص ۲ حالت دارد برای قرارگیری اما در کل ۲ حالت نامطلوب داریم:

$$۲^{۴} - ۲ = ۱۴ \tag{۳}$$

پس کل روش‌ها در این حالت:

$$\binom{۸}{۲}\binom{۶}{۲} \times ۱۴ = ۲۸ \times ۱۵ \times ۱۴ = ۵۸۸۰ \tag{۴}$$

در حالت چهارم که سه نفر در هر یک از اتاق‌های ۱ و۲ هستند:

در این صورت قراردادن ۲ نفر باقی مانده در اتاق‌های ۳ و ۴ تنها ۲ حالت دارد، پس کل روش‌ها در این حالت:

$$\binom{۸}{۳}\binom{۵}{۳} \times ۲ = ۵۶ \times ۱۰ \times ۲ = ۱۱۲۰ \tag{۵}$$

پس کل حالات:

$$(۲), (۴), (۵) \rightarrow ۳۴۷۲ + ۵۸۸۰ + ۱۱۲۰ = ۱۰۴۷۲ \tag{۶}$$

## سؤال ۳.

احتمال آن که یکی از زیرمجموعه‌های ۸ عضوی از مجموعه اعداد طبیعی ۱ تا ۱۲ را بنویسیم و حداکثر ۳ عضو آن متعلق به مجموعه اعداد طبیعی ۱ تا ۶ باشد، چقدر با احتمال آن که یکی از زیر مجموعه‌های ۷ عضوی را بنویسیم و حداکثر ۳ عضو آن متعلق به مجموعه اعداد طبیعی ۱ تا ۶ باشد تفاوت دارد؟

**پاسخ .**

احتمال آن که مجموعه‌ای ۸ عضوی با حداکثر ۳ عضو از ۶ عضو اول داشته باشیم برابر است با:

$$\frac{\binom{۶}{۳}\binom{۶}{۵} + \binom{۶}{۲}\binom{۶}{۶}}{\binom{۱۲}{۸}} = \frac{۲۰ \times ۶ + ۱۵ \times ۱}{۴۹۵} = \frac{۱۳۵}{۴۹۵} = \frac{۳}{۱۱} \tag{۷}$$

توضیحات تکمیلی: حداکثر ۳ عضو یعنی ۲ ,۱ ,۰ یا ۳ عضو اما اگر ۰ یا ۱ عضو برداریم باید از ۶ عضو دوم به ترتیب ۸ یا ۷ عضو برداریم که این امکان‌پذیر نیست پس از ۶ عضو اول ۲ یا ۳ عضو باید برداریم.

احتمال آن که مجموعه‌ای ۷ عضوی با حداکثر ۳ عضو از ۶ عضو اول داشته باشیم برابر است با:

$$\frac{\binom{۶}{۳}\binom{۶}{۴}+\binom{۶}{۲}\binom{۶}{۵}+\binom{۶}{۱}\binom{۶}{۶}}{\binom{۱۲}{۷}}=\frac{۳۰۰+۹۰+۶}{۷۹۲}=\frac{۱}{۲} \qquad (۸)$$

توضیحات تکمیلی: مشابه حالت قبل حداکثر ۳ عضو یعنی ۲, ۱, ۰ یا ۳ عضو اما اگر ۰ عضو برداریم باید از ۶ عضو دوم ۷ عضو برداریم که این امکان‌پذیر نیست. پس از ۶ عضو اول ۱, ۲ یا ۳ عضو باید برداریم.

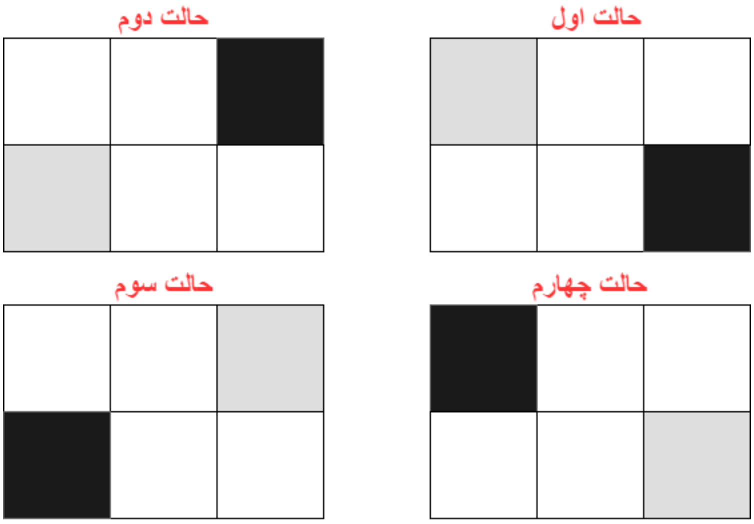
حال اختلاف این دو احتمال را به دست می‌آوریم:

$$|\frac{۱}{۲}-\frac{۳}{۱۱}|=\frac{۵}{۲۲} \qquad (۹)$$

## سؤال ۴.

به چند طریق می‌توان یک مهره اسب سفید و یک مهره اسب سیاه را در صفحه شطرنج ۸ × ۸ قرار داد، به طوری که یکدیگر را تهدید بکنند؟

**پاسخ .**
دو مهره اسب باید در دو گوشه مقابل از یک مستطیل ۳ × ۲ قرار بگیرند. چون صفحه شطرنج مربع شکل است تعداد مستطیل‌های افقی و عمودی با یکدیگر برابر است . فرض کنید می‌خواهیم تعداد مستطیل‌های افقی را محاسبه کنیم. برای انتخاب ۳ ستون متوالی ۶حالت وجود دارد و برای انتخاب ۲ سطر متوالی از صفحه هم ۷ حالت وجود دارد. لذا ۴۲ = ۷ × ۶ مستطیل افقی داریم . به دلیل تقارن ۴۲ مستطیل عمودی هم داریم. پس در کل ۸۴ = ۴۲ + ۴۲ مستطیل ۳ × ۲ داریم. حال حالت های قرارگیری دو اسب سیاه و سفید را در یک مستطیل ۳ × ۲ را بررسی می‌کنیم:




همان طور که قابل مشاهده است به ۴ حالت می‌توانیم دو اسب را در مستطیل ۳ × ۲ قرار دهیم. پس کل حالات قراردهی دو اسب در صفحه شطرنج برابر می‌شود با : ۳۳۶ = ۴ × ۸۴

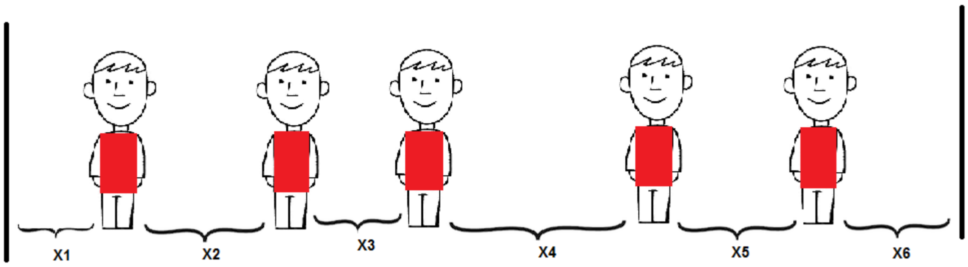
## سؤال ۵.

صفی داریم که در آن ۵۰ نفر با پیراهنی تیره به صورت یک ردیف در کنار هم قرار گرفته‌اند. به ۵ نفر از این افراد قصد داریم به طوری

پیراهن قرمز بدهیم که در فاصله بین هر دو نفر که پیراهن‌شان قرمز است حداقل ۴ نفر با پیراهنی تیره قرار گرفته باشند. برای انجام این کار چند حالت داریم؟

**پاسخ .**

جایگاه این پنج نفر با پیراهن قرمز را در صف تصور کنید، بین آن‌ها و قبل از اولین فرد با پیراهن قرمز و بعد از آخرین فرد با پیراهن قرمز در مجموع ۶ فاصله وجود دارد که در فاصله‌های میانی بین افرادی که پیراهن قرمز دارند باید حداقل ۴ نفر با پیراهنی تیره قرار گرفته باشند:




از آنجایی که فواصل بین افرادی که پیراهن قرمز دارند، می‌توانند هر مقداری اختیار کنند به طوری که مجموعا $(50-5)$نفر در این فواصل جا شوند، پس برای حل سوال از معادله سیاله استفاده می‌کنیم:

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 = 45$$
$$X_2, X_3, X_4, X_5 \geq 4$$
$$X_1, X_6 \geq 0$$

برای حل مسئله به روش معادله سیاله باید تغییر متغیر دهیم به طوری که $X_i \geq 0$ باشد در نتیجه داریم:

$$X_1 + X_2' + X'_3 + X'_4 + X'_5 + X_6 = 29$$
$$X_1, X'_2, X'_3, X'_4, X'_5, X_6 \geq 0$$

همانطور که در درس آموختیم، تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $X_1 + X_2 + \ldots + X_n = r$ برابر است با $\binom{n+r-1}{r}$ در نتیجه با جایگذاری اعداد مربوطه به $\binom{34}{5}$ می‌رسیم.

## سؤال ۶.

بستنی فروشی که فقط بستنی قیفی به قیمت ۱۰۰۰۰ تومان می‌فروشد، دارای طرفداران زیادی در منطقه شده است. یک روز صبح که دیر به محل کارش می‌رسد، مشاهده می‌کند که کارتخوان مغازه خراب است و ۴۰۰ نفر جلوی مغازه صف کشیده‌اند و هیچ پولی همراه خود یا در صندوق مغازه ندارد. آرزو می‌کند که صف خریداران به نحوی تشکیل شده باشد که هنگام فروش، همواره به جز لحظه آغاز، حداقل یک ۱۰۰۰۰ تومانی در صندوق داشته باشد. اگر بدانیم ۱۰۰ نفر از خریداران فقط دارای اسکناس ۲۰۰۰۰ تومانی و ۳۰۰ نفر دیگر دارای اسکناس ۱۰۰۰۰ تومانی هستند، احتمال برآورده شدن آرزوی فروشنده چقدر است؟

راهنمایی: برای حل سوال ابتدا مقاله موجود در این $link$ را مطالعه کنید. [1]

**پاسخ .**
تعریف دنباله غالب(dominating): دنباله‌ی متناهی از$a$، $b$ را غالب گوییم اگر در هر پیشوند ناتهی آن تعداد ظهور حروف $a$ اکیدا از تعداد ظهور حروف $b$ بیشتر باشد.

[1]http://www.cs.tau.ac.il/ nachum/papers/CL.pdf

لم دور: به ازای هر $w = p_1p_2...p_{n+m}$ که از $m$ حرف $a$ و $n$ حرف $b$ که $m > n$ تشکیل شده باشد، دقیقا تعداد $m - n$ انتقال دوری $w$ وجود دارد که غالب(dominating) باشد.

برای اثبات لم دور به همان لینک صورت سوال مراجعه شود.

پیشامد برآورده شدن آرزوی فروشنده را $X$، افراد دارای اسکناس ۱۰۰۰۰ تومانی را $\alpha$ و افراد دارای اسکناس ۲۰۰۰۰ تومانی را $\beta$ در نظر می‌گیریم.

دقت کنید که هر فرد $\alpha$، یک ۱۰۰۰۰ تومانی به صندوق فروشنده اضافه و هر فرد $\beta$ یک ۱۰۰۰۰ تومانی از صندوق فروشنده کم می‌کند. زیرا فروشنده باید ۱۰۰۰۰ تومان به هر فرد $\beta$ بازگرداند. پس هر $\alpha\beta$ که کنار یکدیگر قرار بگیرند، هم دیگر را خنثی می‌کنند.

زمانی آرزوی فروشنده برآورده می‌شود که دنباله‌ای غالب از این ۴۰۰ حرف تشکیل شود، کافی است تعداد واژه های غالبی که با ۳۰۰ حرف $\alpha$ و ۱۰۰ حرف $\beta$ می‌توانیم بسازیم را بیابیم.

با توجه به توضیحات داده شده و بنابر لم دور، $۳۰۰ - ۱۰۰ = ۲۰۰$ انتقال دوری که واژه‌هایی غالب هستند، وجود دارد. همچنین در کل ما قادر به ساختن $۴۰۰ = ۳۰۰ + ۱۰۰$ واژه هستیم. بنابراین خواهیم داشت:

$$P(X) = \frac{۲۰۰}{۴۰۰} = \frac{۱}{۲}$$

پس به احتمال $\frac{۱}{۲}$ آرزوی بستنی فروش برآورده می‌شود.

## سؤال ۷.

در چند جایگشت از اعداد $۱, ۱, ۲, ۲, \ldots, n, n$ هیچ دو عدد مجاوری برابر نیستند؟ (به عنوان مثال توالی ۱, ۳, ۲, ۳, ۲, ۱ قابل قبول ولی ۳, ۱, ۳, ۲, ۲, ۱ غیر قابل قبول است)

## پاسخ .

با استفاده از اصل شمول و عدم شمول داریم:

$$N(\text{حالات مطلوب}) = N(\text{کل جایگشت‌ها}) - N(\text{جایگشت‌ها با یک جفت مجاور برابر})$$

$$+N(\text{جایگشت‌ها با دو جفت مجاور برابر}) - \ldots + (-۱)^n N(\text{جایگشت‌ها با n جفت مجاور برابر})$$

تعداد کل جایگشت‌های ممکن بدون محاسبه تکرار برابر $(۲n)!$ است. حال چون هر عدد دو بار در این جایگشت ظاهر می‌شود، برای هر عدد $۱ \leq i \leq n$ باید این عبارت را بر ۲ تقسیم کرد. پس تعداد کل جایگشت‌ها برابر $\frac{(۲n)!}{۲^n}$ خواهد بود.

تعریف می‌کنیم: $P_i$ تعداد جایگشت‌های مختلف $۱, ۱, ۲, ۲, \ldots, n, n$ به ازای $i = ۱, ۲, \ldots, n$ باشد به طوری که در این جایگشت یک جفت از عدد $i$ مجاور باشند. پاسخ مسئله ما برابر با $(\bigcup_{i=۱}^{n} P_i)^c$ خواهد بود. پس داریم:

$$\begin{aligned}
a_n &= |(\cup_{i=۱}^{n} P_i)^c| \\
&= \frac{(۲n)!}{۲^n} - \sum_{i=۱}^{n} |P_i| + \sum_{i<j} |P_i \cap P_j| - \sum_{i<j<k} |P_i \cap P_j \cap P_k| - \ldots + (-۱)^n |P_۱ \cap P_۲ \ldots \cap P_n| \\
&= \frac{(۲n)!}{۲^n} - n\,|P_۱| + \binom{n}{۲} |P_۱ \cap P_۲| - \ldots + (-۱)^n \binom{n}{n} |P_۱ \cap P_۲ \ldots \cap P_n| .
\end{aligned}$$

عبارت $|P_۱ \cap P_۲ \ldots \cap P_k|$ به روش مقابل قابل محاسبه است:

$$۱, ۱, ۲, ۲, \ldots, k, k, k+۱, k+۱, \ldots, n, n$$

هر یک از جفت اعداد ۱ تا $k$ را به شکل یک بسته در نظر می‌گیریم. حال کافیست جایگشت $k+2(n-k)$ بسته (شامل رقم یا جفت رقم) موجود را محاسبه کنیم. تعداد این جایگشت‌ها برابر $\frac{(2n-k)!}{2^{n-k}}$ خواهد بود. در نهایت خواهیم داشت:

$$a_n = \frac{(2n)!}{2^n} + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{(2n-k)!}{2^{n-k}} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{(2n-k)!}{2^{n-k}}.$$

برای توضیحات بیشتر در رابطه با مسئله به این لینک مراجعه کنید.

## سؤال ۸.

ابتدا اعداد ۱ تا $m$ $(m \geq 3)$ را به ترتیب دور یک دایره می‌چینیم. اگر $\alpha(k)$ تعداد زیرمجموعه‌های $k$ عضوی $(0 \leq k \leq \lfloor\frac{m}{2}\rfloor)$ مجموعه $\{1, 2, 3, \ldots, m\}$ باشد که هیچ کدام از اعضایشان در دایره مجاور نیستند، آنگاه ثابت کنید:

$$\alpha(k) = \frac{m}{k}\binom{m-k-1}{k-1}$$

راهنمایی: می‌توانید از رابطه زیر استفاده کنید (لازم است ابتدا اثبات آن را ارائه کنید).

تعداد زیرمجموعه‌های $r$ عضوی مجموعه $\{1, 2, \ldots, n\}$ که هیچ دو عضو متوالی ندارند برابر است با $\binom{n-r+1}{r}$

### پاسخ .

لم: تعداد زیرمجموعه‌های $r$ عضوی مجموعه $\{1, 2, \ldots, n\}$ که هیچ دو عضو پشت سرهمی ندارند برابر است با $\binom{n-r+1}{r}$

اثبات: برای ساختن یک زیرمجموعه با ویژگی مطلوب مانند $A$ کافی است یک زیرمجموعه $r$ عضوی از مجموعه $\{1, 2, .., n-r+1\}$ مانند $B$ انتخاب کنیم و سپس مجموعه A را از روی B و با فرض $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_r\}$ و $b_1 < b_2 < .. < b_r$ به شکل زیر بسازیم:

$$A = \{b_1, b_2+1, b_3+2, \ldots, b_r+r-1\}$$

به سادگی قابل بررسی است که $A$ یک زیرمجموعه‌ی $r$عضوی از مجموعه $\{1, 2, .., n\}$ است که هیچ دو عضو متوالی ندارد.

همچنین با عکس این عمل هر زیرمجموعه مانند $A$ به یک زیرمجموعه مانند $B$ تبدیل می‌شود و به این ترتیب به ازای هر زیرمجموعه $r$عضوی از مجموعه $\{1, 2, .., n-r+1\}$ مانند B یک و فقط یک زیرمجموعه $r$ عضوی از مجموعه $\{1, 2, .., n\}$ که هیچ دو عضو متوالی‌ای ندارد، به دست می‌آید. پس تعداد این زیرمجموعه‌ها برابر است با تعداد زیرمجموعه‌های $r$عضوی از مجموعه $\{1, 2, .., n-r+1\}$ که خود برابر است با: $\binom{n-r+1}{r}$

حالا به سراغ اثبات مسئله اصلی می‌رویم: تعداد زیرمجموعه‌های $k$ عضوی خوب (زیرمجموعه از مجموعه $\{1, 2, 3, \ldots, m\}$ که هیچ کدام از اعضایش در دایره مجاور نیستند) که شامل $i$ $(i = 1, 2, .., m)$ باشند را با $\alpha_i(k)$ نشان می‌دهیم. حال به محاسبه $\alpha_1(k)$ می‌پردازیم.

برای ساختن یک زیرمجموعه $k$ عضوی خوب شامل ۱ باید $k-1$ عضو دیگر از مجموعه $\{3, 4, \ldots, m-1\}$ انتخاب شوند که هیچ دوتایی از آن‌ها متوالی نباشند (به علت مجاورت با ۱، دو عدد ۲ و $m$ قابل انتخاب شدن نیستند و در نتیجه مجاورت در دایره معادل همان متوالی بودن است). پس طبق لم‌ای که اثبات کردیم:

$$\alpha_1(k) = \binom{(m-3)-(k-1)+1}{k-1} = \binom{m-k-1}{k-1}$$

با توجه به تعریف $\alpha_i$ها و با توجه به تقارن داریم:

$$\alpha_1(k) = \alpha_2(k) = \ldots = \alpha_m(k) \Rightarrow \sum_{i=1}^{m}\alpha_i(k) = m\binom{m-k-1}{k-1}$$

از طرفی $\alpha(k)$ برابر است با مجموع همه‌ی $\alpha_i(k)$ها تقسیم بر $k$ (تقسیم بر $k$ به این علت است که در مجموع $\alpha_i$ها، هر زیر مجموعه‌ی خوب دقیقا یک بار به ازای هر عضو یعنی $k$ بار شمرده می‌شود). در نتیجه حکم حاصل می‌شود:

$$\alpha(k) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{m}\alpha_i = \frac{m}{k}\binom{m-k-1}{k-1}$$

## سؤال ۹.

تمرین کامپیوتری سری اول با موضوعات «تعریف حدی احتمال» و «مسئله روز تولد» را می‌توانید از طریق این لینک [2] دریافت کنید.

- یک کپی از فایل مذکور با نام CA1_S1_SID در گوگل درایو خود تهیه کنید.
- در فایل خود بخش‌هایی که به وسیله مستطیل مشخص شده‌اند را با کدهای مناسب جایگزین کنید.
- سوالاتی که به زبان فارسی و رنگ سفید مطرح شده‌اند را در همان سلول پاسخ دهید.
- فایل کد خود را با ایمیل kianoosharshi@gmail.com با دسترسی Editor به اشتراک بگذارید.
- لینک فایل پاسخ خود را در بخش متنی جایگاه آپلود این تمرین در سامانه ایلرن قرار دهید.
- دقت کنید در صورتی که لازم به ایجاد یک سلول جدید برای اجرای کد داشتید، اول سلول از R%% استفاده کنید تا سلول به عنوان کد R تشخیص داده شود.

هرگونه انتقاد، پیشنهاد یا نکته جانبی را می‌توانید از طریق یک سلول متنی در ابتدای فایل (قبل از سرفصل اصلی) به ما منتقل کنید.

**پاسخ .**

تکمیل شده‌ی فایل صورت سوال از طریق این لینک [3] در دسترس است.

[2] https://colab.research.google.com/drive/1xIcF6Vs-DXjOAYULv1MOhAqjOwDh69yd?usp=sharing
[3] https://colab.research.google.com/drive/1PIwkFA2kVCQ2oqWZuI2eNgZxyyV$_U Xpu?usp=sharing$