

به نام خدا

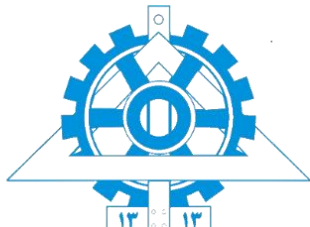
دانشگاه تهران، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر

تحلیل و طراحی الگوریتم‌ها

تمرین کتبی ششم

موعد تحویل:

طراحان: سیدحامد میرامیرخانی، ملیکا صادقی



۱. درستی یا نادرستی گزاره های زیر را با استدلال مشخص کنید :

الف) ترتیب مقادیر در یک سطر از جدول برنامه نویسی پویا برای مسئله کوله پشتی همیشه غیر نزولی است.

ب) ترتیب مقادیر در یک ستون از جدول برنامه نویسی پویا برای مسئله کوله پشتی همیشه غیر نزولی است.

۲. اطلاعات زیر در رابطه با مسئله کوله پشتی به شما داده شده است. با رسم جدول و با استفاده از الگوریتم bottom-up مقدار بهینه را بدست بیاورید.

$Weights = \{3, 2, 1, 4, 5\}$, $Values = \{25, 20, 15, 40, 50\}$, $capacity\ W = 6$

۳. در یک ردیف تعدادی کارت پشت سر هم چیده شده است و روی کارت i ام عدد v_i نوشته شده است. پارسا و پرویز در هر نوبت کارت ها را برمی دارند به طوریکه پارسا بعنوان نفر اول یکی از کارت ها را برمی دارد و در ادامه پرویز باید کارت قبلی و کارت بعدی پارسا را بردارد. بازی به همین شکل ادامه پیدا میکند. نفر اول یعنی پارسا یک محدودیت دارد و آن این است که مجموع ارزش کارت هایی که برمی دارد نباید بیشتر از k مقدار شود. بیشترین مقداری که کارت های پارسا میتواند داشته باشد چقدر خواهد بود؟

۴. سارا جدیداً به تئاتر علاقه مند شده و با خودش تصمیم گرفته در اوقات فراغت خود به تئاتر برود. در حال حاضر در تهران n نمایش برگزار میشود بطوریکه مدت زمان نمایش i ام t_i دقیقه است و در کل c_i بار برگزار میشود. همچنین زمان های شروع نمایش i ام $t_i[0], t_i[1], \dots, t_i[c_i - 1]$ است. سارا در مجموع میخواهد L دقیقه زمان صرف این کار کند. ممکن است او از نمایشی خوشش نیاید و هر زمانی در میانه ی نمایش سالن را ترک کند و همچنین میتواند هر زمانی دیدن نمایش را شروع کند و لزومی ندارد از ابتدای نمایش در سالن حضور داشته باشد.

الگوریتمی با مرتبه زمانی $O(2^n \times n \times \log \max(c_i))$ ارائه دهید که سارا با استفاده از آن بتواند تشخیص دهد میتواند از زمان ۰ تا زمان L به صورت متوالی فیلم ببیند یا خیر.

۵. خیابان ولیعصر n درخت دارد که برخی از آن ها رنگ آمیزی شده اند، اما برخی دیگر بدون رنگ اند. درختان رنگی با m رنگ مختلف رنگ آمیزی شده اند. هم چنین، هزینه ی رنگ هر درخت با هر رنگ، مقداری مشخص است. به عنوان مثال، هزینه رنگ کردن درخت i با رنگ j برابر p_{ij} است. شهردار تصمیم گرفته است که درختان رنگ نشده ی خیابان را نیز رنگ آمیزی کند. از نظر شهردار، زیبایی یک رنگ آمیزی برابر حداقل تعداد گروه های یک رنگ متوالی است، به گونه ای که هر گروه شامل تعدادی درخت کنار هم و هم رنگ باشد؛ به عنوان مثال، اگر رنگ درختان به شکل: ۳، ۱، ۳، ۲، ۲، ۱، ۱، ۲ باشد، زیبایی رنگ آمیزی درختان برابر ۷ است که در آن گروه ها به شکل: $[۳]$ ، $[۱]$ ، $[۳]$ ، $[۲]$ ، $[۲]$ ، $[۱]$ ، $[۱]$ ، $[۲]$ هستند. شهردار میخواهد با صرف حداقل هزینه ی ممکن، درختان رنگ نشده را به گونه ای رنگ آمیزی کند که زیبایی رنگ آمیزی دقیقاً برابر k شود. الگوریتمی برای این کار ارائه دهید.

۶. یک گراف را «خوب» می نامیم اگر تعداد یال های آن حداکثر ۸ تا بیش تر از تعداد راس های آن باشد. فرض کنید یک گراف «خوب» وزن دار با وزن های متمایز روی یال هایش به شما داده شده است. الگوریتمی ارائه دهید که در زمان $O(n)$ درخت پوشای کمینه ی این گراف را پیدا کند.

۷. سینا n مرغ دارد که وزن مرغ i ام برابر w_i است. هم چنین می دانیم که w_i ها طبیعی و بزرگتر از ۳ هستند. تا مسابقه ی بزرگ تنها یک هفته مانده است و او برای آماده سازی مرغ های خود از رژیم به خصوصی از گندم استفاده میکند. او می تواند به هر مرغ آن قدر گندم بدهد که وزن مرغ ۱ واحد اضافه شود یا می تواند وزن هر مرغ را همان مقدار نگه دارد و یا مدتی به مرغش فقط آب بدهد که وزنش ۱ واحد کم شود. او برای بالا بردن شانس خود در مسابقات نیاز دارد مرغ هایی با وزنهای متفاوت داشته باشد. الگوریتمی طراحی کنید که در مرتبه زمانی $O(n \times \log n)$ بتواند حداکثر تعداد مرغ هایی که در روز مسابقه وزنشان با یک دیگر متفاوت است را حساب کند.

۸. یک آرایه به طول n داریم. در هر خانه از آرایه یا یک پلیس وجود دارد یا یک دزد هر پلیس می تواند حداکثر یک دزد را که در خانه ای با فاصله ی کمتر از k از او قرار دارد دستگیر کند الگوریتمی با پیچیدگی زمانی $O(n)$ آرایه دهید که حساب کند بیشترین تعداد دزدی که می توانیم دستگیر کنیم چقدر است.

۹. قرار است تعدادی کارگاه در کلاسهای یک ساختمان برگزار شوند، کارگاه i ام زمان s_i شروع میشود و تا زمان f_i ادامه دارد. در هر زمان هر کلاس فقط میتواند میزبان یک کارگاه باشد. الگوریتمی از مرتبه $O(n \times \lg n)$ طرح کنید که حداقل تعداد کلاسهای مورد نیاز را بدست آورد و درستی الگوریتم خود را اثبات کنید.

۱۰. یک شرکت مخابراتی میخواهد به خانه هایی که در طول یک مسیر و به موازات آن قرار دارند، خدمات ارتباطی ارائه کند. برای این منظور، شرکت از دکل هایی با طول برد ۸ کیلومتر استفاده میکند. الگوریتمی بیابید که این شرکت به کمک آن بتواند با کم ترین تعداد دکل، به تمام خانه های این مسیر خدمات ارائه دهد و در ادامه درستی الگوریتم خود را ثابت کنید.
۱۱. تعداد n سکه در اختیار دارید که ارزش سکه ی i ام برابر c_i تومان است (i یک عدد طبیعی است). دقت کنید سکه ها مرتب شده اند و برای هر سکه داریم $c_i \leq c_{i+1}$ هم چنین دقت کنید که ارزش بعضی سکه ها می تواند برابر باشند. هدف شما این است که بتوانید با سکه های که در اختیار دارید هر مقداری بین ۱ تومان تا k تومان را بپردازید ولی ممکن است این امکان وجود نداشته باشد. برای مثال اگر ۲ سکه با ارزشهای ۱ و ۳ تومان داشته باشید و $k = 4$ باشد این امکان وجود ندارد. فرض کنید شما میتوانید تعدادی سکه به سکه های خود اضافه کنید. همچنین انتخاب با شماست و می توانید ارزش هر سکه را مشخص کنید (البته ارزش هر سکه باید یک عدد طبیعی باشد). هدف این است که کمترین تعداد سکه را اضافه کنید که بتوانید هر مقداری بین ۱ تومان تا k تومان را پرداخت کنید. الگوریتمی با زمان اجرای $O(n + \log k)$ برای حل مسئله طراحی کنید و درستی الگوریتم خود را اثبات کنید.