

به نام خدا

نظریه زبان‌ها و ماشین‌ها- بهار ۱۴۰۱

تمرین شماره 12

دستیار آموزشی این مجموعه: آوا میرمحمد مهدی

[avamir80@gmail.com](mailto:avamir80@gmail.com)



تاریخ تحویل: 1402/3/24

1) درستی یا نادرستی هر یک از عبارات زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید. (12 نمره)

الف) اگر مساله  $B$  از کلاس مساله NP-Hard باشد و بدانیم  $A \leq_p B$  آنگاه  $A$  در کلاس NP-Complete خواهد بود.

ب) اگر مساله  $A$  از کلاس NP-Complete باشد و بدانیم  $A \leq_p B$  آنگاه  $B$  در کلاس NP-Complete خواهد بود.

ج) هر مساله‌ی NP-Complete را می‌توان در زمان چندجمله‌ای به هر مساله‌ی NP-Complete دیگر کاهش داد.

د) اگر داشته باشیم  $P = NP$  آنگاه به ازای هر زبان  $X$  که در دسته  $P$  قرار دارد  $(A \neq \emptyset, \Sigma)$  در دسته NP-Complete نیز قرار خواهد داشت.

2) فرض کنید  $a, b, c, p$  اعداد مثبت باینری هستند؛ ثابت کنید که ModeP در دسته مسائل  $P$  قرار دارد. (12 نمره)  
(راهنمایی:  $(a^{1000})_2 = ((a^2)^2)^2$ )

$\text{ModeP} = \{ \langle a, b, c, p \rangle \mid a^b = c \pmod{p} \}$

3) یک دور "گذر دوبل از رئوس" در گراف بدون جهت  $G$ ، دوری است که از تمامی رئوس  $G$  دقیقاً دوبار می‌گذرد. ثابت کنید مساله تشخیص وجود دور "گذر دوبل از رئوس" در گراف  $G$ ، یک مساله NP-Hard است. (14 نمره)

4) مساله‌ی مقابل را در نظر بگیرید: در شهر پهلوانان، هر پهلوان عضو حداقل یک باشگاه است. شهردار شهر برای افزایش تمرکز پهلوانان قصد دارد تعدادی باشگاه را تعطیل کند به طوری که پس از تعطیلی، هر پهلوان هنوز عضو حداقل یک باشگاه تعطیل نشده باشد. ورودی مساله، لیست پهلوانان، لیست باشگاه‌ها، لیست اعضای هر باشگاه و عدد  $k$  می‌باشد. آیا شهردار می‌تواند  $k$  باشگاه را طوری انتخاب کند که پس از تعطیلی آنها هنوز هر پهلوان عضو حداقل

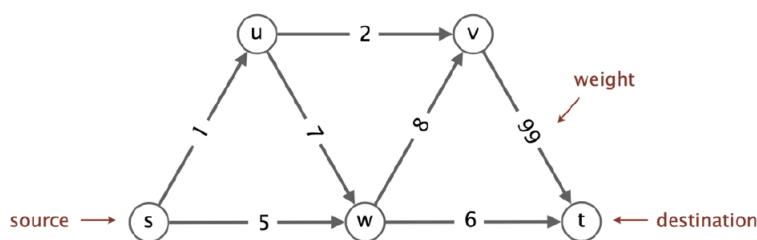
یک باشگاه باشد؟ ثابت کنید این مساله NP-Complete است. (راهنمایی: می‌توانید از NP-Complete بودن مساله [set cover](#) استفاده کنید.) (17 نمره)

(5) دو مساله یافتن کوتاهترین مسیر در گراف را در نظر بگیرید: (25 نمره)

مساله‌ی A: گراف وزن‌دار و جهت‌دار  $G$  با وزن‌های غیرمنفی و دو راس مبدا  $s$  و مقصد  $t$  داده شده است. کوتاهترین مسیر از  $s$  به  $t$  را پیدا کنید.

مساله‌ی B: گراف وزن‌دار و جهت‌دار  $G$  با وزن‌های غیرمنفی و دو راس مبدا  $s$  و مقصد  $t$  داده شده است. کوتاهترین مسیر از  $s$  به  $t$  را پیدا کنید اگر بتوانید از یکی از یال‌های این مسیر با وزن صفر عبور کنید؛ به عبارتی، وزن هر مسیر برابر با مجموع وزن یال‌های آن منهای وزن سنگین‌ترین یال است.

به عنوان مثال در گراف زیر کوتاهترین مسیر در مساله‌ی A برابر با  $s \rightarrow w \rightarrow t$  است که وزن 11 دارد و در مساله‌ی B مسیر  $s \rightarrow u \rightarrow v \rightarrow t$  است که وزن 3 دارد.



الف) یک reduction با زمان خطی از مساله‌ی A به B ارائه دهید.

ب) یک reduction با زمان خطی از مساله‌ی B به A ارائه دهید.

(6) مجموعه  $A$  مجموعه‌ای با تعداد اعضای محدود است. مجموعه  $Z = \{z_1, z_2, \dots, z_m\}$  نیز وجود دارد به طوری که هر  $z_i$  را تعدادی از اعضای  $A$  تشکیل می‌دهند و درواقع هر  $z_i$  زیرمجموعه‌ای از  $A$  است. می‌خواهیم مجموعه  $A$  را با دو رنگ قرمز و سبز به گونه‌ای رنگ کنیم که در تمام اعضای هیچ  $z_i$  ای هم‌رنگ نباشند. نشان دهید این مساله در دسته NP-Complete قرار دارد. (20 نمره)

(7) با توجه به اینکه می‌دانیم مساله‌ی A، NP-Complete است، ثابت کنید مساله‌ی B در دسته مسائل NP-hard قرار دارد. (10 نمره امتیازی)

مساله‌ی A: تعیین اینکه آیا می‌توان مجموعه‌ای از اعداد را به دو گروه تقسیم کرد به طوری که جمع دو گروه باهم برابر شود.

مساله‌ی B: تعیین اینکه آیا می‌توان با کنار هم قرار دادن کاشی‌های مستطیلی در کف مستطیل شکل یک اتاق، تمام مساحت زمین را پوشاند بدون اینکه نیاز باشد کاشی‌ها را بشکنیم؟ (طول و عرض کاشی‌ها عدد طبیعی است)