

آمار و احتمالات مهندسی

تمرین چهارم - متغیرهای تصادفی توأم توزیع شده

فاطمه و سامان

تاریخ تحویل ۱۴۰۱/۰۹/۰۸

سؤال ۱.

طول زمانی دوران حاملگی انسان را می‌توان به خوبی با استفاده از توزیع نرمال با میانگین ۲۸۰ و انحراف معیار ۸/۵ تقریب زد. فرض کنید فردی حامله بوده و فرزند وی ۲۵ شهریور به دنیا خواهد آمد. علاوه بر آن فرد مذکور در یک شرکت مشغول به کار بوده و باید ۱۸ام شهریور ماه یک پروژه را تحویل دهد. (فاصله ۱۸ام تا ۲۵ام شهریور را از نیمه شب هر دو روز محاسبه کنید؛ این مقدار برابر ۷ روز است.)

آ احتمال اینکه فرزند او قبل یا همان روز تحویل پروژه به دنیا بیاید چقدر است؟

ب احتمال اینکه فرزند او در شهریور ماه و روزی بعد از تحویل پروژه به دنیا بیاید چقدر است؟

ج اگر او بخواهد زمان تحویل پروژه‌اش را جلوتر بیندازد تا با احتمال ۹۵ درصد بعد از تحویل پروژه فرزندش را به دنیا بیاورد، چه روزی را باید انتخاب کند؟

سؤال ۲.

به تازگی یک دایره المعارف بسیار قدیمی یافت شده است، تخمین زده‌ایم احتمال آنکه کلمه‌ای در آن استفاده شده باشد که اکنون استفاده نمی‌شود و هم اکنون نیاز به جایگزین شدن به کلمات امروزی داشته باشد، ۴۰ درصد است. احتمال اینکه در صفحه‌ای با ۶۰۰ کلمه حداقل ۲۷۰ کلمه نیاز به جایگزین شدن داشته باشد، چقدر است؟

سؤال ۳.

آب یک شهر توسط دو سد تامین می‌شود، اگر هرکدام از سدها دارای دو خروجی باشد و تعداد خروجی‌های فعال در سد اول را با X و در دیگری با Y نشان دهیم. تابع چگالی احتمال مشترک X و Y با استفاده از جدول شرطی زیر می‌توان نشان داد:

$p(x,y)$		y		
		0	1	2
x	0	0.10	0.04	0.02
	1	0.08	0.20	0.06
	2	0.06	0.14	0.30

آ) احتمال $P(X=1, Y=1)$ را بدست آورید.

ب) احتمال $P(X \leq 1, Y \leq 1)$ را بدست آورید.

ج) احتمال $P(X \neq 0, Y \neq 0)$ را بدست آورید.

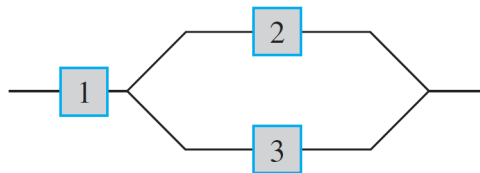
د) تابع چگالی احتمال حاشیه‌ای X و Y را بدست آورید.

ه) احتمال $P(X \leq 1)$ را با استفاده از تابع چگالی احتمال حاشیه‌ای $(P_X(x))$ بدست آورید:

و) بررسی کنید آیا X و Y مستقل هستند؟

سؤال ۴.

یک سیستم متشکل از سه عنصر را به صورت زیر در نظر بگیرید. سیستم تا زمانی به کار خود ادامه خواهد داد که اولین عنصر و حداقل یکی از عناصر دوم و سوم فعال باشند. فرض کنید X_1 و X_2 و X_3 به ترتیب طول عمر عناصر اول و دوم و سوم را نشان دهند. همچنین فرض کنید X_i ها مستقل از یکدیگر هستند و هر یک دارای توزیع نمایی با پارامتر λ است. امید ریاضی طول عمر سیستم چقدر است؟



سؤال ۵.

متغیر تصادفی X نشان دهنده مدت زمان انجام یک فعالیت مشخص می‌باشد. تابع CDF زمان انجام این فعالیت بصورت زیر می‌باشد:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x^2}{4} & 0 \leq x < 1 \\ 1 - \frac{1}{4}(\frac{5}{4} - x)(\frac{5}{4} - \frac{3}{4}x) & 1 \leq x \leq \frac{5}{4} \\ 1 & x > \frac{5}{4} \end{cases}$$

آ) مقدار $f(x)$ را برای PDF این متغیر بدست آورید.

ب) مقدار $P(0.5 \leq X \leq 2)$ را بدست آورید.

ج) امید ریاضی متغیر تصادفی X را بدست آورید.

سؤال ۶.

فرض کنید دو متغیر تصادفی X و Y تابع PDF مشترک بصورت $f(x, y) = c(x^2 + xy)$ دارند. بازه ورودی های X و Y بصورت $[0, 1]$ می باشد. $(Y \in [0, 1] \text{ و } X \in [0, 1])$.

آ مقدار c و تابع CDF مشترک این دو متغیر را بدست آورید.

ب توابع CDF حاشیه ای و PDF حاشیه این دو متغیر را بدست آورید.

ج مقدار $E(X)$ و $Var(X)$ را بدست آورید.

سؤال ۷.

هریک از تایرهای جلوی یک نوع ماشین به صورت ایده آل تا فشار ۲۶psi پر می شود، اما به صورت واقع بینانه فشار هوا در هریک از تایرها می تواند با یک متغیر تصادفی مدل شود.

اگر متغیر تصادفی X را برای فشار هوای تایر سمت راست و برای فشار هوای تایر دیگر متغیر تصادفی Y را در نظر بگیریم، تابع چگالی احتمال مشترک فشار هوای این دو تایر به صورت زیر است:

$$f(x, y) = \begin{cases} K(x^2 + y^2) & 20 \leq x \leq 30, 20 \leq y \leq 30 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

آ مقدار K را بدست آورید.

ب احتمال اینکه فشار هر دو تایر کمتر از مقدار ایده آل باشد را بدست آورید.

ج تابع چگالی احتمال حاشیه ای تایر سمت راست را بدست آورید.

د بررسی کنید آیا دو متغیر تصادفی فشار دو تایر مستقل هستند؟

سؤال ۸.

متغیر تصادفی X نتیجه انداختن یک تاس سالم ۴ وجهی است. متغیر تصادفی Y نیز نتیجه انداختن یک تاس سالم ۶ وجهی است. متغیر Z را برابر میانگین X و Y در نظر بگیرید.

آ انحراف معیار X و Y را بدست آورید.

ب مقادیر PMF و CDF متغیر Z را بدست آورید.

ج فرض کنید در یک بازی اگر $X > Y$ ، مقدار $2X$ تومان برنده می شوید و در غیر اینصورت یک تومان از دست می دهید. پس از ۶۰ بار انجام این بازی، امید ریاضی مقدار پولی که بدست آوردید (در صورتی که مثبت باشد) یا از دست دادید (در صورتی که منفی باشد) چقدر خواهد بود؟

سؤال ۹.

تمرین کامپیوتری سری چهارم با موضوع «توزیع‌های احتمالی پیوسته» را می‌توانید از طریق این لینک^۱ دریافت کنید.

- یک کپی از فایل مذکور با نام CA4_SID در گوگل درایو خود تهیه کنید.
 - در فایل خود بخش‌هایی که به وسیله مستطیل مشخص شده‌اند را با کدهای مناسب جایگزین کنید.
 - سوالاتی که به زبان فارسی و رنگ سفید مطرح شده‌اند را در همان سلول پاسخ دهید.
 - فایل کد خود را با ایمیل Hamed.gholami14@gmail.com با دسترسی Editor به اشتراک بگذارید.
 - لینک فایل پاسخ خود را در بخش متنی جایگاه آپلود این تمرین در سامانه ایلرن قرار دهید.
 - دقت کنید در صورتی که لازم به ایجاد یک سلول جدید برای اجرای کد داشتید، اول سلول از $R\%$ استفاده کنید تا سلول به عنوان کد R تشخیص داده شود.
- هرگونه انتقاد، پیشنهاد یا نکته جانبی را می‌توانید از طریق یک سلول متنی در ابتدای فایل (قبل از سرفصل اصلی) به ما منتقل کنید.

¹<https://colab.research.google.com/drive/1ilP-zQ2dJcsXvPJlof87qpAZaWdQH5bo?usp=sharing>