ریاضیات گسسته

پاسخنامه تمرین چهارم - ناوردایی

زینب پیش‌بین

سؤال ۱.

چند علامت $+$ و $-$ روی یک تخته نوشته شده اند. می توانید دو علامت را پاک کنید و در عوض، اگر برابر بودند، $+$ ، و اگر نابرابر بودند، $-$ را بنویسید. ثابت کنید آخرین علامت روی تخته به ترتیب پاک کردن بستگی ندارد.

پاسخ .

یادآوری از ضرب علامت ها:

$$+ * + = +$$

$$- * - = +$$

$$+ * - = -$$

در هر مرحله دو علامت را حذف می‌کنیم و ضربشان را می‌نویسیم. از آنجا که بین چند عمل ضرب متوالی اولویت وجود ندارد، در نهایت ضرب تمام علامت ها بر روی تخته می‌ماند و ترتیب (یا به عبارتی پرانتزگذاری) تغییری در نتیجه آخر حاصل نمی‌شود.

سؤال ۲.

یک اژدها ۱۴۰۰ سر دارد. یک شوالیه می تواند با یک ضربه شمشیر ۱۱، ۱۷، ۵ یا ۳۰ سر از آن را ببرد و در عوض در هر حالت به ترتیب ۱۷, ۱۴, ۲, ۲۴ سر جدید روی شانه های اژدها رشد می کند. اگر همه سرها قطع شوند، اژدها می‌میرد. آیا می توان اژدها را کشت؟ اگر می‌شود مثالی ارائه دهید در غیر این صورت اثبات کنید اژدها نامیراست.

پاسخ .

تغییرات تعداد سرهای اژدها به ترتیب در هر حالت برابر است با:

+۶، -۳، -۳ و -۶.

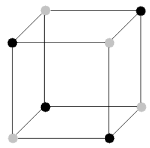
کافی است ۴۶۵ بار از حالت سوم (بریدن ۵ سر و روییدن ۲ سر) استفاده کنیم تا به $۱۴۰۰ - (۴۶۵ * (۵ - ۲)) = ۵$ سر برسیم و در انتها هم با یک بار دیگه استفاده از حالت سوم ۵ سر باقی‌مانده را از بین ببریم و اژدها را بکشیم. پس اژدها نامیرا نیست.

سؤال ۳.

۷ راس یک مکعب با ۰ و یک راس دیگر ۱ نشانه‌گذاری شده است. می‌توانید به طور متوالی یک یال را انتخاب کنید، و ۱ واحد به عدد های دو سر آن بیفزایید. آیا می‌توان به ۸ عدد برابر رسید؟ اگر می‌شود مثالی ارائه دهید و در غیر این صورت اثبات کنید همچین حالتی وجود ندارد.

پاسخ .

راس های مکعب را مانند شکل زیر با دو رنگ سیاه و سفید رنگ می‌کنیم به طوری که هیچ دو راس همرنگی مجاور نباشند و یالی بینشان وجود نداشته باشد. مجموع اعداد راس های سفید را با A و مجموع اعداد راس های سیاه را با B نشان می دهیم.



مسئله را با ناوردایی حل می‌کنیم. مقدار ناوردا را $|A-B|$ تعریف می‌کنیم.

در ابتدا $|A-B| = ۱$ چرا که یکی از مقادیر A یا B برابر ۱ و دیگری برابر صفر است. چون هر مرحله یک یال انتخاب می کنیم و دو سرش را یک واحد افزایش می دهیم، مقادیر A و B به یک میزان افزایش پیدا می کنند و پس از هر اضافه کردن هم مقدار $|A-B|$ تغییر نمی کند. پس هیچ گاه مجموع اعداد سیاه و سفید با هم برابر نمی شود و در کل نمی توان به ۸ عدد برابر رسید.

سؤال ۴.

یارا که از ریاضی‌دانان پرآوازه شهر فنلاند هست، در یک بعدازظهر کسل‌کننده، بازی زیر را برای خود طرح می‌کند. او طی سیستمی، تمام اعداد طبیعی را به رنگ‌های آبی یا قرمز رنگ می‌زند. تنها شرط سیستم آن است که اگر دو عدد طبیعی a و b ناهم‌رنگ باشند، جمع آنها($a+b$) آبی و ضرب آنها($a \times b$) قرمز خواهد بود. حال یارا شما را به چالش می‌کشد تا رنگ عدد حاصل از ضرب دو عدد طبیعی قرمز را بدست آورید. او همچنین از شما می‌خواهد تا تمامی چنین اعدادی را پیدا کنید. (یعنی رابطه بین اعدادی که حاصل ضرب دو عدد قرمز هستند را بنویسید).

پاسخ .

دو عدد طبیعی قرمز m و n را در نظر بگیرید. ثابت می‌کنیم mn قرمز خواهد بود.

یک عدد طبیعی آبی مانند k در نظر بگیرید. طبق قوانین سیستم، $m+k$ آبی رنگ خواهد بود؛ به دلیل مشابه، $(m+k) \times n$ قرمز رنگ است. حال از آنجایی که kn قرمز است، پس mn نمی‌تواند آبی باشد (تناقض: در آن صورت $mn+kn$ باید آبی باشد) و باید قرمز باشد.

x را کوچک‌ترین عدد قرمز در نظر بگیرید (چون حد پایین داریم چنین عددی وجود دارد)، از نتایج بالا مشخص است که تمامی مضارب x قرمز رنگ خواهند بود. حال کافی است ثابت کنیم عدد قرمز دیگری وجود ندارد. فرض کنید عدد طبیعی y نیز قرمز رنگ باشد؛ از آنجایی که $y != x$ پس می‌توانیم بنویسیم $y = qx + r$ به طوری که $۰ < r < x$. دقت کنید که r باید آبی باشد (چون کوچک‌ترین عدد طبیعی قرمز، x بود)؛ از طرفی می‌دانیم qx نیز قرمز است پس y آبی رنگ خواهد شد که با فرض ما در تناقض است؛ پس تمامی اعداد قرمز مضرب یک عدد قرمز بزرگ‌تر از یک، مانند x هستند.

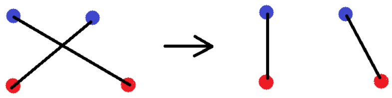
سؤال ۵.

n نقطه آبی و n نقطه قرمز در صفحه داریم به طوری که هیچ ۳ تایی هم‌خط نیستند. آیا می‌توان با n پاره‌خط، آبی‌ها و قرمزها را متناظرا به هم وصل کرد، به طوری که n پاره‌خط هیچ اشتراکی نداشته باشند و یکدیگر را قطع نکنند؟ ثابت کنید.

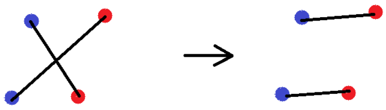
پاسخ .

ابتدا به صورت رندوم نقاط آبی و قرمز را به یکدیگر وصل می‌کنیم. حال یک عملکرد اصلاحی به نام $switch$ ارائه می‌دهیم.
عمل $switch$: در هر مرحله اگر دو پاره‌خط یکدیگر را قطع کرده بودند، برای ۴ نقطه دو سر این دو پاره‌خط، جفتشان را با یکدیگر عوض کن. (برای درک بیشتر به شکل زیر توجه کنید)

مثال ۱:



مثال ۲:



مسئله را با ناوردایی حل می‌کنیم. مقدار ناوردا را مجموع طول پاره‌خط‌های رسم‌شده در صفحه تعریف می‌کنیم.

پس از هر عمل $switch$، طبق اصل حمار مجموع طول پاره‌خط های رسم شده در صفحه کاهش می‌یابد. در نتیجه این عمل پایان‌پذیر است و در نهایت به حالتی می‌رسیم که هیچ ۲ پاره‌خطی یکدیگر را قطع نکرده‌اند.

سؤال ۶.

در خانه‌های جدول $n * n$ اعداد $1, 2, \ldots, n$ هر کدام n بار نوشته شده‌اند. ثابت کنید سطری یا ستونی با حداقل $\lceil \sqrt[2]{n} \rceil$ عدد متفاوت وجود دارد.

پاسخ .

طبق گفته سوال، می‌دانیم که هر عدد در n خانه از جدول ظاهر شده است، پس برای هر عدد مثل i داریم:

$$n \leq x \times y$$

تعداد سطرهایی که i در آنها ظاهر شده $= x$، تعداد ستون‌هایی که i در آنها ظاهر شده $= y$

داریم:

$$n \leq x \times y \tag{1}$$

$$\rightarrow 2n \leq 2x \times y \tag{2}$$

از طرفی طبق قضیه‌ی نامساوی میانگین هندسی و حسابی می‌دانیم:

$$2x \times y \leq x^2 + y^2 \tag{3}$$

$$(2), (3) \rightarrow 2n \leq x^2 + y^2 \tag{۴}$$

$$(1), (4) \rightarrow 4n \leq 2x \times y + x^2 + y^2 \tag{۵}$$

$$\rightarrow 4n \leq (x + y)^2$$

$$\rightarrow 2\sqrt[2]{n} \leq x + y$$

$$\rightarrow \lfloor \sqrt[2]{n} \rfloor + \lceil \sqrt[2]{n} \rceil \leq x + y$$

پس اثبات کردیم:

$$n \leq x \times y \rightarrow \lfloor \sqrt[2]{n} \rfloor + \lceil \sqrt[2]{n} \rceil \leq x + y$$

پس هر عدد در حداقل $\lceil \sqrt[2]{n} \rceil + \lfloor \sqrt[2]{n} \rfloor$ سطر و ستون ظاهر شده است.

در نتیجه حداقل یک سطر یا ستون با حداقل $\lceil \frac{n*(\lfloor \sqrt[2]{n} \rfloor + \lceil \sqrt[2]{n} \rceil)}{2n} \rceil = \lceil \sqrt[2]{n} \rceil$ عدد وجود دارد.