

به نام خدا



نظریه زبان ها و ماشین ها - بهار ۱۴۰۲

تمرین شماره ۸

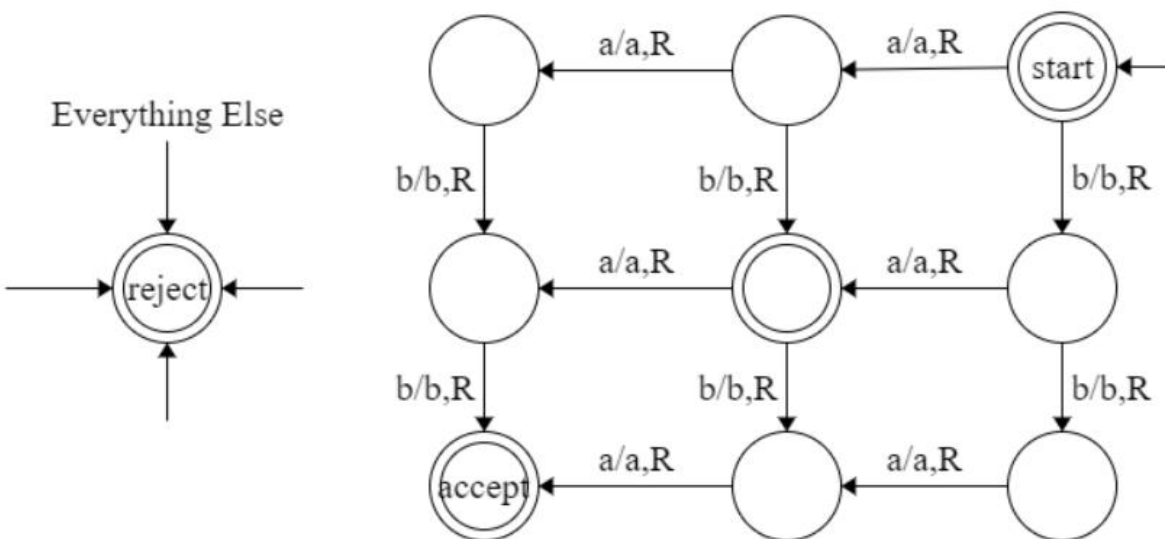
دستیار آموزشی این مجموعه: کیانوش عرشی

kianoosharshi@gmail.com



تاریخ تحویل: ۲۰ اردیبهشت (صفحه درس)

۱. برای هریک از زبان های زیر ماشین تورینگ متناظر را توصیف کنید. (منظور از توصیف ماشین تورینگ طراحی به همراه state diagram و تمامی جزئیات مربوط به جابجایی head می باشد)
- الف) $L = \{w \mid N_a(w) \equiv N_b(w) \bmod 3, w \in (a+b)^*\}$
- پاسخ: در این ماشین باقیمانده تقسیم تعداد a و b به ۳ باید یکسان باشد.

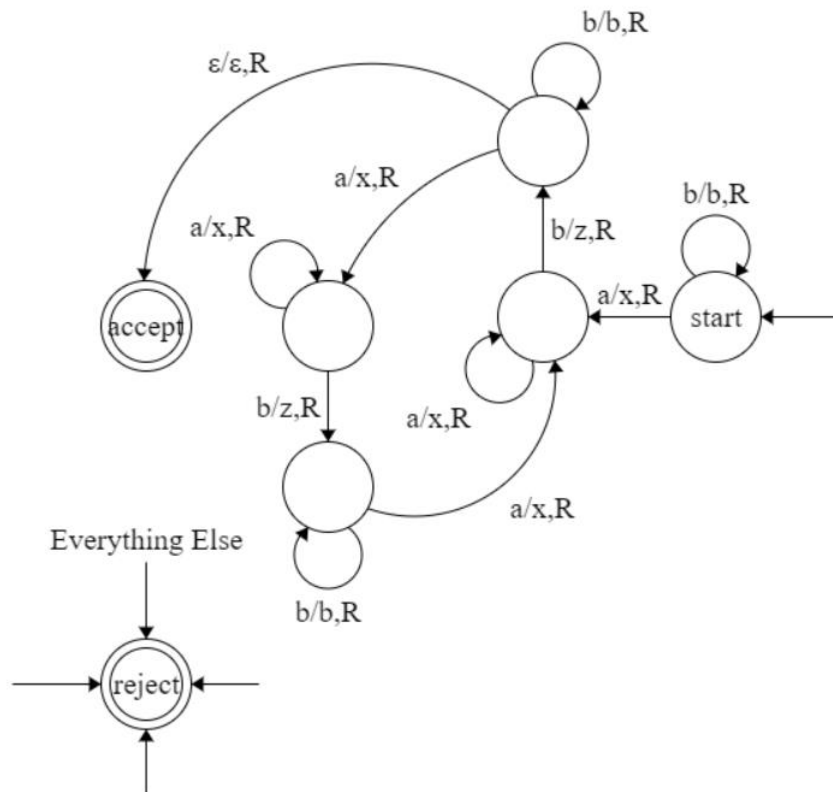


ب) $L = \{w \mid N_a(w) = 3N_b(w), w \in (a+b)^*\}$

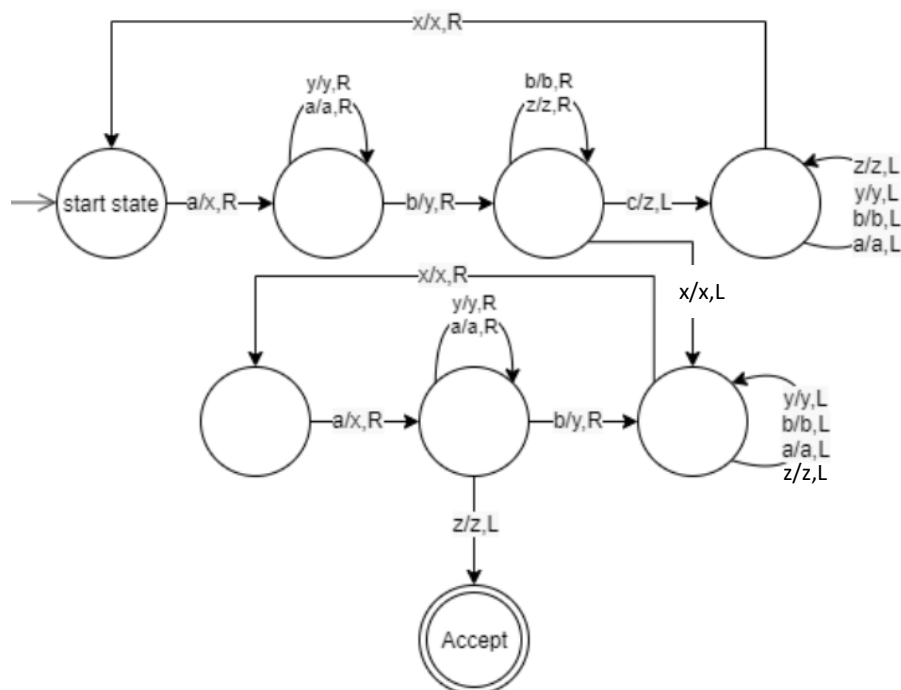
در این ماشین باید به ازای هر b ، ۳ تا a علامت بخورد. از اول نوار شروع می کنیم و با هر بار دیدن یک b ، آنرا علامت زده و به اول نوار (یا آخرین خط خورده) برمی گردیم. بعد به دنبال ۳ عدد a می گردیم و در صورت یافتن آنها دوباره به اول نوار (یا آخرین خط خورده) بر می گردیم. این کار را آنقدر ادامه می دهیم تا b ها تمام شوند. در صورتی که به ازای b دیگر a نمانده بود باید reject کنیم.

$$L = \{w \mid N_{ab}(w) \equiv 1 \bmod 2, w \in (a+b)^*\} \quad \text{ج}$$

پاسخ: در این مسئله قصد داریم ماشین تورینگی طراحی کنیم که زبانی را قبول کند که رشته‌ها با فرد عدد زیر رشته 'ab' را قبول می‌کند. اول باید یک 'a' پیدا کنیم و آنرا علامت 'x' بنزنیم، اگر بعد آن 'b' داشتیم باید یک علامت مناسب (برای مثال 'z') رو آن بنزنیم و در غیر این صورت (که 'a' دیدیم یا به پایان رسیدیم) باید یا دوباره 'x' بنزنیم یا بر اساس فرد یا زوج بودن تعداد 'ab' قبول یا رد کنیم:



۲. توضیح دهید هر کدام از ماشین تورینگ‌های زیر چه زبانی را قبول می‌کنند یا چه تغییراتی روی رشته ورودی اعمال می‌کنند.
(الف)



پاسخ: در این مسئله در هر گام یکی از a ها و یکی از b ها و یکی از c ها را خط میزنیم و اگر c تمام شد برای a و b این کار را ادامه داده تا در نهایت اگر تنها a وجود داشت یا رشته تمام شده بود، قبول می‌کنیم. این ماشین زبان زیر را قبول می‌کند:

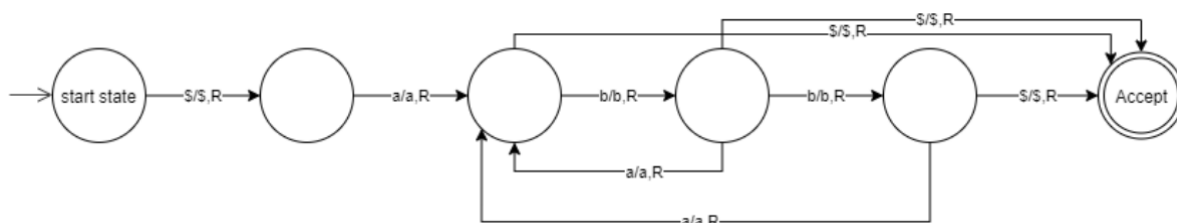
$$L = \{a^i b^j c^k \mid i \geq j \geq k, k \geq 1\}$$

The diagram shows a Turing machine with the following states and transitions:

- States:** start, accept, reject, and four unlabeled states.
- Transitions:**
 - start to top-left: $0,1/R$
 - start to bottom-left: $0/\epsilon,R$
 - start to top-right: $1/\epsilon,R$
 - start to bottom-right: $\epsilon/\epsilon,R$
 - start to accept: $\epsilon/\epsilon,R$
 - top-left to top-right: $\#/\#,R$
 - top-right to top-left: $x/x,R$
 - top-right to bottom-right: $1/x,L$
 - bottom-right to top-right: $0,1,\#,x/L$
 - bottom-right to bottom-left: $0/x,L$
 - bottom-left to bottom-right: $\#/\#,R$
 - bottom-left to top-left: $0,1/R$
 - bottom-left to reject: $x/x,R$
 - reject to reject: Everything Else

4

(ج)



پاسخ: این ماشین رشته‌هایی که متشکل از زیررشته‌های 'ab' یا 'abb' هستند را قبول می‌کند. اول و آخر نوار هم با \$ مشخص شده است.

$$L = \{x_1x_2...x_n \mid n > 0, \forall i > 0 : x_i = ab \vee x_i = abb\}$$

۳. ماشین تورینگی طراحی کنید که خروجی توابع زیر را روی نوار قرار دهد. دقت کنید در این سوال تمامی ورودی‌های توابع (X و Y) بصورت unary هستند. (منظور از طراحی ماشین تورینگ طراحی به همراه state diagram و تمامی جزئیات مربوط به جابجایی head می‌باشد)

$$f(x) = x + 1 \text{ (الف)}$$

پاسخ: در این مسئله صرفاً به انتهای نوار می‌رویم و یک 1 به انتهای نوار اضافه می‌کنیم.

$$f(x, y) = x - y \text{ (ب)}$$

پاسخ: فرض کنیم ورودی‌ها با یک # از هم جدا شده اند (11#11). سمت راست # ورودی X و سمت چپ ورودی Y خواهد بود. از اول نوار شروع می‌کنیم و به ازای هر 1 سمت راست یک 1 از سمت چپ خط می‌زنیم. در نهایت اگر سمت راست # 1 مانده بود پاسخ 1های سمت راست است و اگر سمت چپ مانده بود پاسخ 1های سمت چپ خواهد بود که یک عدد منفی است.

$$f(x, y) = xy \text{ (ج)}$$

پاسخ: در این بخش به تعداد Y بار باید X روی نوار تکرار شود. ورودی‌ها با # جدا شده اند و انتهای نوار یک X قرار می‌دهیم که سمت راست آن پاسخ خواهد بود. از اول نوار شروع می‌کنیم تا به # برسیم بعد اولین 1 را علامت می‌زنیم و به اول نوار برمیگردیم. حال به ازای هر 1 ی که اول نوار هست باید به انتهای نوار 1 اضافه کنیم که این کار با علامت زدن 1 اول نوار، حرکت به انتها و اضافه کردن 1، بازگشت و علامت زدن 1های بعدی تا رسیدن به # میسر می‌شود. بعد هم برمیگردیم و دوباره علامت 1ها را برمی‌داریم. این کار تا علامت خوردن تمامی 1های بعد # و قبل X تکرار می‌شود.

۴. ماشین تورینگ توصیف کنید که زبان زیر را قبول کند:

$$L = \{a^n b^{m+1} | n, m > 0, m \leq n\}$$

الف) تعریف رسمی^۱ ماشین تورینگ را بنویسید.

ب) state diagram ماشین را رسم کنید.

ج) نوار ماشین را به ازای ورودی‌های aabb و aaaa رسم کنید.

پاسخ:

$Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, \text{reject}\}$

$\Sigma = \{a, b\}$

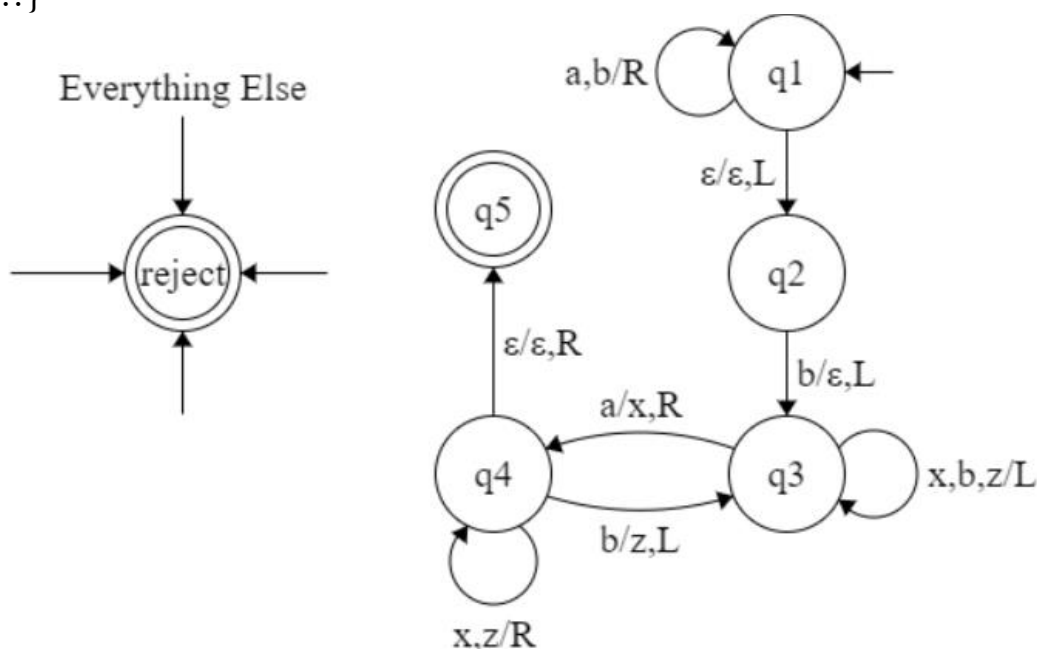
$\Gamma = \{a, b, x, z, \varepsilon\}$

init = q_1

$q_{\text{acc}} = q_5$

$q_{\text{rejet}} = \text{reject}$

$\delta = \{(q_1, a) \rightarrow (q_1, a, R), (q_1, b) \rightarrow (q_1, b, R), (q_1, \varepsilon) \rightarrow (q_2, \varepsilon, L), (q_2, b) \rightarrow (q_3, \varepsilon, L), \varepsilon, L), \dots\}$



به ازای ورودی aaaa ماشین reject می‌کند اما با aabb ماشین accept می‌کند:

| | | | | |
|---|---|---|---|--|
| a | a | a | a | |
| a | a | a | a | |
| a | a | a | a | |
| a | a | a | a | |
| a | a | a | a | |

¹ Formal Definition

| | | | | |
|------|------|------|------|--|
| a | a | b | b | |
| a | a | b | b | |
| a | a | b | b | |
| a | a | b | b | |
| a | a | b | b | |
| a | a | b | b->ε | |
| a | a | b | ε | |
| a | a->x | b | ε | |
| a | x | b->z | ε | |
| a | x | z | ε | |
| a->x | x | z | ε | |
| ... | | | | |
| x | x | z | ε | |

۵. ماشین تورینگی طراحی کنید که تابع زیر را پیاده سازی کند. ارائه شبه کد به همراه توضیحات لازم کافی است.

$$f(x) = 3^x + x^3$$

پاسخ: شبه کد تابع را برای مشخص کردن الگوریتم مینویسیم:

```
func f(x):
```

```
    cube <- x
```

```
    cube <- cube *x
```

```
    cube <- cube *x
```

```
    exp <- 1
```

```
    i <- 1
```

```
    while i <= x do
```

```
        exp <- exp*3
```

```
    endwhile
```

```
    return exp+cube
```

```
endfunc
```

۶. ماشین تورینگ طراحی کنید که رشته های ab را دو برابر می کند. برای مثال با وارد کردن عبارت $aaba$ در نهایت خروجی $aababa$ می شود. (منظور از طراحی ماشین تورینگ طراحی به همراه $state diagram$ و تمامی جزئیات مربوط به جابجایی $head$ می باشد)

پاسخ: عملکرد ماشین به صورت زیر است:

نخست اولین زیررشته ای که دوبار نشده را پیدا کن. سپس آنرا علامت بزنی. بعد به انتهای ورودی برس.

همه چیز را از انتهای ورودی به آخرین کاراکتر علامت گذاری شده به چپ دوبار شیفت بده تا جا برای کپی زیررشته روی نوار باز شود.

سپس با نوشتن ab روی جاهای خالی، زیررشته را کپی کنه و بعد به سمت راست برو. در اینجا لازم است تا ab جدید هم علامت گذاری شود تا دوباره کپی نشود.

این کارها را تکرار کن تا در نهایت تمامی زیررشته های ab ورودی را علامت گذاری کرده باشی (در واقع تمامی ab ها را علامت گذاری کرده باشی) بعد هم علامت ها را بردار.

۷. (امتیازی) رمزنگاری جانشینی^۲ یکی از روش های رمزنگاری پیام های مخبره شده بوده. این روش امنیت بالایی ندارد و با حملات ساده قابل شکست است. در این مدل رمزنگاری به ازای هر حرف رشته ورودی حرف دیگری جایگزین می شود. برای مثال رشته $flat$ با عبور از این رمزنگار می تواند تبدیل به $ghzy$ شود. برای اطلاعات بیشتر از این مدل رمزنگاری می توانید به اینترنت مراجعه کنید. توجه داریم که این رمزنگاری قاعده خاصی برای تخصیص هر کاراکتر ندارد. ما مسلط به زبان مبدأ دستگاه هستیم و بی نهایت رشته به آن زبان داریم. ماشین تورینگ طراحی کنید که رشته رمزنگاری شده را بازگشایی کند. (توصیف سطح بالا از ماشین کافی است)

پاسخ: اگر تمامی جایگشت های ممکن برای تناظر یک حرف به حرف دیگری را بسازیم (که برای یک زبان n حرفی $n!$ حالت خواهد بود) می توان با کمک لغت نامه ای که در اختیار داریم پیام را دیکد کرد. پس به همین صورت عمل می کنیم. دو راه داریم: اول تمامی حالات ممکن را برای ورودی تولید کنیم، بعد هر کدام را با لغت نامه در دسترس مقایسه کنیم. به این صورت که کلمات تولید شده را با کلمات لغت نامه مقایسه کرد و آنهایی که میچ شدند را مشخص میکنیم. اگر تمامی کلمات به مفهوم مناسبی رسیده بودند حالات مورد بررسی قابل قبول خواهد بود. میتوان تک تک حالات را هم اول تولید کرد بعد مقایسه و بعد به سراغ حالت بعدی برویم.

² Substitution cipher