آمار احتمال مهندسی ،
810100272 ، شهرزاد منیر

(۱)

$$\begin{cases} T = ax + y/2 \\ Z = X + Y \end{cases}$$

$\mathrm{Cov}(Z,T) = E[Z,T] - E[Z]\,E[T] =$

$E\left((x+y)(ax+y/2) - E(x+y)\,E(ax+y/2)\right)$

$= E\left(ax^2 + \frac{1}{2}xy + axy + \frac{1}{2}y^2\right) - \left(E(x)+E(y)\right)\left(E(ax+y/2)\right)$

$= a\,E(x^2) + \left(\frac{1}{2}+a\right)E(xy) + \frac{1}{2}E(y^2)$

$\cancel{E(xy)}$ ، $E(y^2) = \sigma^2$ ، $E(x^2) = \sigma^2$, $E(xy) = E(x)\,E(y) = 0$

$\longrightarrow \mathrm{Cov}(Z,T) = (a + 1/2)\,\sigma^2 \qquad \mathrm{Var}(Z) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(y) = 2\sigma^2$

$\mathrm{Var}(T) = \mathrm{Var}(ax + \frac{1}{2}y) = a^2\sigma^2 + \frac{1}{4}\sigma^2$

$\rho = \frac{\mathrm{Cov}(z,T)}{\sqrt{\mathrm{Var}(Z)\,\mathrm{Var}(T)}} = 1/2 \Rightarrow \frac{(a+1/2)\,\sigma^2}{\sigma^2\sqrt{2(a^2+1/4)}} = 1/2 \Longrightarrow a = \frac{-2 \pm \sqrt{3}}{2} \Rightarrow$

$$\boxed{a = -1 \pm \sqrt{3}/2}$$

(۲)

$\cancel{Z = x/y}$ $\qquad Z = \frac{X}{Y}$

در صورتی که $z \geq 1 \xrightarrow{\mathrm{I}} p(Z \le z) = p(X \le zy) = 1/a^2 \int_0^a \int_0^a \chi_{x \le zy}\, dy\, dx$

$= \frac{1}{a^2}\int_0^a \min(a, zy)\, dy = 1/a^2 \left(\int_0^{a/z} yz\, dy + \int_{a/z}^a a\, dy\right) = 1/a^2\left(\frac{a^2}{2z} + a^2 - \frac{a^2}{z}\right) =$

$$\boxed{1 - \frac{1}{2z}}$$

در صورتی که $z < 1 \xrightarrow{\mathrm{II}} p(z \le z) = p(x \le zy) = 1/a^2 \int_0^a \int_0^a \chi_{x \le zy}\, dx\, dy =$

$$\boxed{1/a^2 \int_0^a zy\, dy = z/2}$$

$w \geq 1$ در صورتی که $\xrightarrow{\mathrm{III}} p(W \le w) = p(1/w \le Z \le w) = p(z \le w) - p(z < 1/w) =$

$$\boxed{1 - \frac{1}{2w} - \frac{1}{2w} = 1 - \frac{1}{w}}$$

$$\boxed{F_W(w) = \int \frac{1}{w^2}\, dw = -\frac{1}{w}}$$

۳

$$\begin{cases} X \sim U(0,1) \\ Y \sim U(0,1) \\ Z = (-2\ln X)^{1/2}\cos(2\pi Y) \end{cases}$$

$W = \sqrt{-2\ln X}\,\sin(2\pi y) \rightarrow$ متغیر کمکی $\Rightarrow \frac{w}{z} = \tan(2\pi y) \rightarrow$

$Z = \sqrt{-2\ln X}\,\cos(2\pi y)$

$$Y = \frac{1}{2\pi}\tan^{-1}\left(\frac{w}{z}\right) \rightarrow X = e^{-\frac{(z^2+w^2)}{2}}$$

$$f(z,w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial Z} & \frac{\partial X}{\partial W} \\ \frac{\partial Y}{\partial Z} & \frac{\partial Y}{\partial W} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -z e^{-\frac{1}{2}(z^2+w^2)} & -w e^{-\frac{(z^2+w^2)}{2}} \\ -\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{w}{z^2+w^2} & \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{w}{z^2+w^2} \end{vmatrix}$$

$\Downarrow$

$$f(z,w) = \left| -\frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(z^2+w^2)} \right| = \left[\frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-z^2/2}\right]\left[\frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{w^2}{2}}\right]$$

$$\rightarrow \boxed{f(z) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-z^2/2}}$$

۴

X: (امتیاز حاصل از بازی) متغیر تصادفی

C: متغیر تصادفی وضعیت سکه (رو: ۱، پشت: ۰)

D: متغیر تصادفی نتیجه تاس

$$E[D] = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \boxed{7/2}$$

$X = 2D(C) + \frac{D}{2}(1-C) \longrightarrow$

$E[X] = P(C=1)\,2E[D] + P(C=0)\,\frac{E[D]}{2}$

$E[X] = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}E[D]\right) = \frac{35}{8} = \boxed{4.375}$

۵

X: متغیر تصادفی تعداد درخواست‌های ارسال شده به سرور اول

N=n: احتمال ارسال به سرور اول

$\Rightarrow X|N \sim Bin(2000, n)$

می‌خواهیم $f_{N|X}(n|x)$ را حساب کنیم.

$$f_{N|X}(n|x) = \frac{P(X=2000 \mid N=n)\, f_N(n)}{P(X=2000)} \quad \to N \sim U(0,1)$$

$$= \frac{\binom{2000}{2000} n^{2000} \times 1}{P(X=2000)} = \frac{\binom{2000}{2000} n^{2000} \times 1}{P(X=2000)} = \frac{1}{c} n^{2000} \xrightarrow{\text{احتمال کل / تعریف پیش}}$$

(ا

$$\int_0^1 \frac{1}{c} n^{2000} dn = 1 \longrightarrow c = \beta(2001,1) \Rightarrow \boxed{f_{N|X}(n|2000) = \frac{1}{\beta(2001,1)} n^{2000}}$$

$$\xrightarrow{\text{توزیع}} \boxed{N \mid X=2000 \sim Beta(2001,1)} \to \cancel{E(N|X=2000)} = \boxed{\frac{2001}{2002}}$$

ب)

$$\boxed{E(N \mid X=2000) = \frac{2001}{2002}}$$

ج) توزیع بتا را به عنوان توزیع احتمال پیشین در نظر می‌گیریم.

$$N \mid X=2000 \sim Beta(4001,1)$$

$\downarrow$ $Beta(2001,1)$

4)

B = تعداد درخواست با شروع از دفعه اول ؛ A = تعداد درخواست با شروع از دفعه دوم

$$E[A] = E[B|A✓]P_A + E[B|A✗](1-P_A) \to E[B|A✓] = 2P_B + (E[A]+2)(1-P_B)$$

$$E[B|A\times] = \underset{\text{درخواست اول}}{1} + E[B]$$

$$\to E[A] = (2P_B + (E[A]+2)(1-P_B))P_A + (1+E[B])(1-P_A) =$$

$$2P_AP_B + P_A E[A] - P_AP_B E[A] + 2P_A - 2P_AP_B + 1 - P_A + E[B] - P_A E[B]$$

$$(1 - P_A + P_AP_B) E[A] = (1-P_A)E[B] + P_A + 1$$

$$E[B] = E[A|B✓]P_B + E[A|B\times](1-P_B) \to E[A|B✓] = 2P_A + (E[B]+2)(1-P_A)$$

$$E[A|B\times] = 1 + E[A]$$

$$E[B] = (2P_A + (E[B]+2)(1-P_A))P_B + (1+E[A])(1-P_B)$$

$\rightarrow (1-p_B+p_Ap_B)E[B] = (1-p_B)E[A] + p_B + 1$

(1

جایگذاری $\Rightarrow (1-p_B+p_Ap_B)E[B] = (1-p_B)\cancel{E[A]+p_B+1} \times \frac{(1-p_A)E[B]+p_A+1}{1-p_A+p_Ap_B} + p_B + 1$

$\Rightarrow E[B] = \frac{p_Ap_B^2 - p_Ap_B + 2}{2p_Ap_B - p_A^2p_B - p_Ap_B^2 + p_A^2p_B^2}$ $\xrightarrow{\text{جایگذاری}}$

$(1-p_A+p_Ap_B)E[A] = (1-p_A)\frac{p_Ap_B^2 - p_Bp_A + 2}{2p_Ap_B - p_A^2p_B - p_Ap_B^2 + p_A^2p_B^2}$

$\Rightarrow E[A] = \frac{p_A^2p_B - p_Ap_B + 2}{2p_Ap_B - p_Ap_B^2 - p_A^2p_B + p_A^2p_B^2}$ $\quad p_B > p_A \Rightarrow$

$p_Ap_B^2 > p_A^2p_B \Rightarrow E[B] > E[A]$

نکته: به همراه کمک [illegible] دوستان سوال سختی بود!

7

الف)

$T \sim Bin(N,p) \qquad N \sim Geo(s)$

$T = \sum_{i=1}^{N} X_i \qquad X_i \rightarrow$ متغیر تصادفی که مربوط به جنسیت را نشان میده

$E[T] = \underbrace{E[N]}_{1/s}\,\underbrace{E[X]}_{p} = \frac{p}{s}$ $\xrightarrow[\text{random sums}]{\text{طبق}}$ $\sigma_T^2 = \sigma_X^2\mu_N + \mu_X^2\sigma_N^2$

$$\left\{\begin{array}{ll} \mu_N = 1/s, & \mu_X = p \\ \sigma_N^2 = \frac{1-s}{s^2} & \sigma_X^2 = p(1-p) \end{array}\right\}$$

ب)

$M_T(t) = E(e^{tT}) = E(E(e^{tT}|N)) = E((pe^t+q)^N) = \sum_{n=1}^{\infty}(pe^t+q)^n(1-s)^{n-1}s =$

$s\sum_{n=0}^{\infty}(pe^t+q)^{n+1}(1-s)^n = s(pe^t+q)\sum_{n=0}^{\infty}((pe^t+q)(1-s))^n = \frac{s(pe^t+q)}{1-(pe^t+q)(1-s)}$

$X \sim poi(3\lambda) \qquad Y \sim poi(6\lambda) \qquad Z \sim poi(6\lambda)$ ۸

$$p(\underbrace{X \mid Y+Z=36-X}_{M \sim poi(15\lambda)}) = \frac{P_{X,M}(x, 36-x)}{P_M(36-x)} = \frac{36!}{x!\,y!\,z!} \left(\frac{3}{15}\right)^x \left(\frac{6}{15}\right)^y \left(\frac{6}{15}\right)^z$$

$$P(X+Y=t \mid X+Y+Z=36) = \frac{P(X+Y=t, X+Y+Z=36)}{P(X+Y+Z=36)} = \frac{p(X+Y=t)\,p(Z=36-t)}{p(T=36)}$$ (ب

$$= \frac{e^{-9\lambda}\frac{(9\lambda)^t}{t!} \cdot e^{-6\lambda}\frac{(6\lambda)^{36-t}}{(36-t)!}}{e^{-15\lambda}\frac{(15\lambda)^{36}}{36!}} = \binom{36}{t}\left(\frac{9}{15}\right)^t \left(\frac{6}{15}\right)^{36-t}$$

$Bi(36, 3/5) \sim X+Y \mid X+Y+Z=36$

$$E[X+Y \mid X+Y+Z=36] = 36 \times 3/5 = \boxed{\frac{108}{5}}$$ (ج