

(الف) ①

I) نمایش به ترتیب : اول به ترتیب رتبه می دهیم و سپس به ترتیب زیر درخت ها :

۱, ۳, ۵, ۴, ۹, ۷, ۶, ۲, ۸, ۱۰, ۱۱, ۱۳, ۱۲, ۱۴

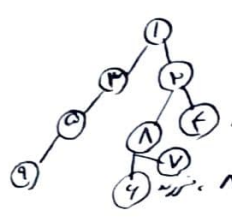
II) نمایش به ترتیب : رتبه می دهیم و سپس به ترتیب زیر درخت ها :

۵, ۳, ۹, ۴, ۶, ۷, ۱, ۸, ۲, ۱۳, ۱۲, ۱۱, ۱۴, ۱۰

III) نمایش به ترتیب :

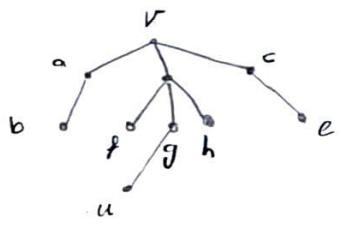
۵, ۹, ۶, ۷, ۴, ۳, ۸, ۱۳, ۱۲, ۱۴, ۱۱, ۱۰, ۲, ۱

ب) به ترتیب اول به کار



احتیاج داریم رأس الیست در این حالت است
سریع می دهیم به ترتیب ۱, ۵, ۳, ۶, ۴, ۲, ۸, ۱۰, ۱۱, ۱۳, ۱۲, ۱۴
۲ فرزند ۱ الیست. رأس ۸, ۳ فرزند ۱, ۴ فرزند ۲, ۵ فرزند ۳, ۶ فرزند ۴, ۷ فرزند ۸, ۹ فرزند ۸
۲ الیست. ۶ فرزند ۸ الیست, ۴ فرزند ۲ الیست, ۵ فرزند ۳ الیست, ۷ فرزند ۴ الیست.
در نهایت درخت قابل رسم الیست.

نمایش درخت



برای حل سوال از استقرا کمک می گیریم.

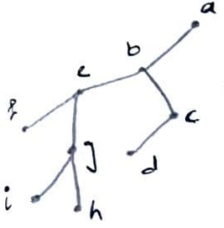
• پایه استقرا : (تعداد رأس $n=2$) (واضح الیست چون باید یک برگ داشته باشیم!)

درخت T را از یک رأس درخت آیزن برگ می کنیم و این ترن برگ را u نامگذاری می کنیم. فرض می کنیم پدر به پسین برگ برگ v باشد. در این صورت همه بچه های v برگ هستند. اگر v همان رتبه باشد که حکم واضح الیست (چون v بقیه رتبه برگ است). در غیر این صورت با حذف تمام بچه های v برگ هستند. درخت T با حذف رأس می دهیم که حداقل ۲ رأس دارد و رأس درجه ۲ ندارد پس فرض استقرا برای آن برقرار الیست. فرض کنید تعداد برگ ها در این درخت A' و غیر برگ ها B' . طبق فرض استقرا $A' > B'$ الیست.

حال دوباره بچه های v را اضافه می کنیم. اگر ۶ تا بچه داشته باشد آن u تغییراتی که در درخت اعمال می شود به این صورت الیست که ① ادغام رأس v از برگ بدون خارج می شود ② نهایتاً تمام بچه های v به برگ ها اضافه می شوند.

پس اگر تعداد برگ ها، غیر برگ ها، به ترتیب A و B بنامیم داریم: $A = A' + 1$

از آن جا که $B = B' + 1$ و $A > B$ پس همچنان $A > B$ برقرار است پس



$$A = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$$

$$B = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$$

برای سادگی دیدن میزنیم:

در درجه A ، تعداد رأس بیتری وجود دارد پس داریم رأس درجه 1 درخت، رأس بیتری یا برگ نامیده می شود. در اینجا $\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$ برگ هستند.

با همان خفت ثابت می کنیم. درجه با رأس بیتری را N_1 ، درجه ای که رأس بیتری دارد را N_2 می نامیم (کل $N_1 + N_2 = 2n$)

فرض خفت: در N_2 که تعداد رأس بیتری دارد، برگ وجود ندارد. پس فرض تمام N_2 رأس بخش خفته، ریشه ای است. پس یک رأس بخش خفته را باید در N_1 وجود داشته باشد که در این صورت تعداد رأس بخش دم \leftarrow (توده سادی) بخش نخست می شود. پس $N_1 \leftarrow N_2$ می شود که من با فرض سادگی درخت است. نتیجه می شود که دره ای که تعداد رأس بیتری داشته، حاصل یک برگ وجود دارد.

از القاء القاء می کنیم. از این انتقال می کنیم، آن را به ریشه تبدیل می کنیم

$$(2) \leq 1$$

نمایه: $n=2$

بر $n=3$ باشد \leftarrow یا \leftarrow (الته) \leftarrow $(3) \leq 2$ \leftarrow $(3) \leq 3$

فرض: برای $n=k$ درخت است. حکم: برای $n=k+1$ نیز درخت است.

اثبات: چنانچه رؤس در حالت درخت می گیریم:

① نسبت سرهم جدید شده اند که مجموع نواصل برابر $\frac{k(k+1)}{2} \geq \frac{(k+1)(k+1)}{2}$

(۳) ثبت می‌کنیم چیده شده‌ها آنقدر کم است که در این صورت برای هر n از یک چیده شده باشد
 به شکل زیر عمل می‌کنیم



(در واقع آن را به چند سبزه درخت ثبت می‌کنیم و تقسیم می‌کنیم)

می‌دانیم تا آنکه در هر سبزه از یک A, B سبزه‌ها باشند زیرا تعداد سبزه‌ها در A یا B کوچکتر از k است

حال اثبات می‌کنیم که مجموع نواص در تحت کوچکتر از $(\frac{n}{2})$ است اگر تعداد سبزه‌ها در

برابر n_1 تا n_c باشد

$$\rightarrow n_1 + n_2 + \dots + n_c = (k+1) - 1$$

$$\left[\binom{n_1+1}{2} + \binom{n_2+1}{2} + \dots + \binom{n_c+1}{2} \right] \leq (\text{مجموع نواص در تحت})$$

$$\binom{n_1+1}{2} + \binom{n_c+1}{2} + \dots \leq \binom{k+1}{2}$$

حال باید اثبات کنیم که

$$n_1 + \dots + n_c = kn_1$$

یعنی هر سبزه را انتخاب می‌کنیم برابر این کار می‌کنیم انتخاب برای هر سبزه تا آن کار را انجام دهد.

(خوش به شوم می‌تواند انتخاب کند) سواصل حالت کار $\binom{n_1+1}{2} + \dots + \binom{n_c+1}{2}$ در نظر

می‌گیریم مجموع حالت کمتر از $\binom{n_1 + \dots + n_c + 1}{2}$ خواهد بود

حال می‌دانیم اگر از ۲ تا n مختلف انتخاب کنیم پس نتیجه استلال این می‌شود که

$$\sum_{i=1}^n i \leq \binom{n}{2}$$

به حکم می‌رسیم و:

قسمت اثبات شد

در صورت مسلم می‌شود مقدار یک‌بار افزایش می‌دهد، یک‌بار کاهش می‌دهد و همچنان درخت

بهر بعد با تغییرات کمین می‌شود در درخت را به هم تبدیل می‌کند و به تعادل می‌رسد

التماس می‌کنیم در بالاترین پل در T دارد تغییر می‌کنیم که در T وجود ندارد آن را حذف می‌کنیم

کمی به تامل می‌کنیم که می‌تواند با حذف سبزه‌ها که در درخت دیده می‌شود این درخت را

به یک پل هم وصل می‌کند این درخت را به یک پل هم وصل می‌کنیم و یک سبزه را حذف می‌کنیم

در این حالت اختلاف طول کم می‌شود در حاکم روی اختلاف طول التماس می‌کنیم

