



## آمار و احتمالات مهندسی

تمرین اول - اصول احتمال

علی و اولدوز

تاریخ تحویل ۱۴۰۱/۰۷/۱۷

### سؤال ۱.

یکی از روش‌های تخمین جمعیت و تراکم حیات وحش، روش نشانه‌گذاری و دوباره‌گیری جانوران است. (Capture-Recapture) به عنوان مثال در جنگلی  $N$  آهو وجود دارد که به کمک جنگلبان از بین  $N$  آهو،  $n$  عدد انتخاب و نشانه‌گذاری می‌شوند. (فرض کنید که احتمال انتخاب هر یک از آهوها با یکدیگر برابر است.) سپس آن‌ها را به جمعیت اصلی باز می‌گردانیم و یک نمونه جدید به اندازه  $m$  انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه از  $m$  آهو انتخاب شده دقیقاً  $k$  آهو دارای نشانه باشند، چقدر است؟ (فرض کنید که نمونه‌برداری که برای بار دوم صورت گرفته است مستقل از نمونه‌برداری بار اول است.)

### سؤال ۲.

به چند طریق می‌توان ۸ نفر را به ۴ اتاق ۱، ۲، ۳، ۴ تقسیم کرد، به طوری که اتاق خالی نداشته باشیم و تعداد افراد حاضر در اتاق‌های ۱، ۲ برابر باشند؟

### سؤال ۳.

احتمال آن که یکی از زیرمجموعه‌های ۸ عضوی از مجموعه اعداد طبیعی ۱ تا ۱۲ را بنویسیم و حداکثر ۳ عضو آن متعلق به مجموعه اعداد طبیعی ۱ تا ۶ باشد، چقدر با احتمال آن که یکی از زیرمجموعه‌های ۷ عضوی را بنویسیم و حداکثر ۳ عضو آن متعلق به مجموعه اعداد طبیعی ۱ تا ۶ باشد تفاوت دارد؟

### سؤال ۴.

به چند طریق می‌توان یک مهره اسب سفید و یک مهره اسب سیاه را در صفحه شطرنج  $8 \times 8$  قرار داد، به طوری که یکدیگر را تهدید نکنند؟

## سؤال ۵.

صفی داریم که در آن ۵۰ نفر با پیراهنی تیره به صورت یک ردیف در کنار هم قرار گرفته‌اند. به ۵ نفر از این افراد قصد داریم به طوری پیراهن قرمز بدهیم که در فاصله بین هر دو نفر که پیراهن‌شان قرمز است حداقل ۴ نفر با پیراهنی تیره قرار گرفته باشند. برای انجام این کار چند حالت داریم؟

## سؤال ۶.

بستی فروشی که فقط بستنی قیفی به قیمت ۱۰۰۰۰ تومان می‌فروشد، دارای طرفداران زیادی در منطقه شده است. یک روز صبح که دیر به محل کارش می‌رسد، مشاهده می‌کند که کارتخوان مغازه خراب است و ۴۰۰ نفر جلوی مغازه صف کشیده‌اند و هیچ پولی همراه خود یا در صندوق مغازه ندارد. آرزو می‌کند که صف خریداران به نحوی تشکیل شده باشد که هنگام فروش، همواره به جز لحظه آغاز، حداقل یک ۱۰۰۰۰ تومانی در صندوق داشته باشد. اگر بدانیم ۱۰۰ نفر از خریداران فقط دارای اسکناس ۲۰۰۰۰ تومانی و ۳۰۰ نفر دیگر دارای اسکناس ۱۰۰۰۰ تومانی هستند، احتمال برآورده شدن آرزوی فروشنده چقدر است؟

راهنمایی: برای حل سوال ابتدا مقاله موجود در این *link* را مطالعه کنید.<sup>۱</sup>

## سؤال ۷.

در چند جایگشت از اعداد  $1, 2, \dots, n, n$ ،  $1, 2, \dots, n$  هیچ دو عدد مجاور برای برابر نیستند؟ (به عنوان مثال توالی  $1, 2, 3, 2, 3, 1$  قابل قبول ولی  $1, 2, 3, 1, 2, 3$  غیر قابل قبول است)

## سؤال ۸.

ابتدا اعداد  $1$  تا  $m$  ( $m \geq 3$ ) را به ترتیب دور یک دایره می‌چینیم. اگر  $\alpha(k)$  تعداد زیرمجموعه‌های  $k$  عضوی ( $0 \leq k \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ ) مجموعه  $\{1, 2, 3, \dots, m\}$  باشد که هیچ کدام از اعضایشان در دایره مجاور نیستند، آنگاه ثابت کنید:

$$\alpha(k) = \frac{m}{k} \binom{m-k-1}{k-1}$$

راهنمایی: می‌توانید از رابطه زیر استفاده کنید (لازم است ابتدا اثبات آن را ارائه کنید).

تعداد زیرمجموعه‌های  $r$  عضوی مجموعه  $\{1, 2, \dots, n\}$  که هیچ دو عضو متوالی ندارند برابر است با  $\binom{n-r+1}{r}$

## سؤال ۹.

تمرین کامپیوتری سری اول با موضوعات «تعریف حدی احتمال» و «مسئله روز تولد» را می‌توانید از طریق این لینک<sup>۲</sup> دریافت کنید.

- یک کپی از فایل مذکور با نام CA1\_S1\_SID در گوگل درایو خود تهیه کنید.
- در فایل خود بخش‌هایی که به وسیله مستطیل مشخص شده‌اند را با کدهای مناسب جایگزین کنید.
- سوالاتی که به زبان فارسی و رنگ سفید مطرح شده‌اند را در همان سلول پاسخ دهید.

<sup>1</sup><http://www.cs.tau.ac.il/~nachum/papers/CL.pdf>

<sup>2</sup><https://colab.research.google.com/drive/1xIcF6Vs-DXjOAYULv1MOhAqjOwDh69yd?usp=sharing>

- فایل کد خود را با ایمیل [kianoosharshi@gmail.com](mailto:kianoosharshi@gmail.com) با دسترسی Editor به اشتراک بگذارید.
  - لینک فایل پاسخ خود را در بخش متنی جایگاه آپلود این تمرین در سامانه ایلرن قرار دهید.
  - دقت کنید در صورتی که لازم به ایجاد یک سلول جدید برای اجرای کد داشتید، اول سلول از  $R\%$  استفاده کنید تا سلول به عنوان کد R تشخیص داده شود.
- هرگونه انتقاد، پیشنهاد یا نکته جانبی را می‌توانید از طریق یک سلول متنی در ابتدای فایل (قبل از سرفصل اصلی) به ما منتقل کنید.