



به نام خدا

نظریه زبان ها و ماشین ها- بهار ۱۴۰۱

تمرین شماره ۷

دستیار آموزشی این مجموعه: پاریاب مرادی

paryabmoradi1378@gmail.com

تاریخ تحویل: ۱۴۰۲/۲/۱۲ ۲۳:۵۹

1. با استفاده از لم تزریق (Pumping lemma)، اثبات کنید که زبان مربوطه، عضو کلاس زبان های منظم نیست: (20 نمره)

a. $L = \{a^i b^j \mid j = i \text{ or } j = 2i\}$

b. $L = \{w \mid w \in \{a, b\}^* \text{ and } n_a(w) < 2n_b(w)\}$

c. $L = \{a^{2^n} \mid n \geq 0\}$

d. $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w = w_1 b w_2 b \dots b w_k, \text{ for } k \geq 0, \text{ each } w_i \in a^*, \text{ and } w_i \neq w_j \text{ for } i \neq j\}$

2. نسخه ی تغییر یافته ای از لم تزریق را با تعریف زیر در نظر بگیرید:

اگر L یک زبان منظم باشد، ثابت n را می توان یافت، به نحوی که به ازای هر z_1 و z_2 و z_3 که $z_1 z_2 z_3 \in L$

صدق کند و $|z_2| = n$ ، بتوانیم z_2 را به صورت uvw بازنویسی کنیم، طوری که $|v| \geq 1$ و به ازای هر

$i \geq 0$ رشته ی $z_1 u v^i w z_3$ عضو زبان L باشد. (15 نمره)

a. لم جدید را اثبات کنید.

b. با به کارگیری لم مربوطه، نشان دهید که $L = \{a^i b^j c^j \mid i, j \geq 1\}$ زبانی نامنظم است.

3. زبان های مستقل از متن قطعی نسبت به کدام یک از عملگرهای اجتماع (Union)، مکمل (Complement) و اتصال (Concatenation) بسته هستند؟ اثبات کنید. (15 نمره)

4. نشان دهید اگر L زبان مستقل از متن قطعی باشد و M یک زبان منظم باشد آنگاه زبان $L \cap M$ یک زبان مستقل

از متن قطعی است. (10 نمره)

5. برای زبان های زیر DPDA رسم کنید. ($\Sigma = \{a, b\}$) (20 نمره)

a. $L = \{a^n b^m \mid m \geq n + 3\}$

b. $L = \{wcw^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$

6. در خصوص ماشین‌های پشته‌ای دارای قطعیت (DPDA) به پرسش‌های زیر پاسخ دهید: (20 نمره)
- نشان دهید که برای هر زبان منظم، یک ماشین پشته‌ای قطعی قابل رسم است که رشته‌های آن زبان را می‌پذیرد، تنها دو حالت دارد، هیچ گذار ϵ ندارد و در آن نمادها هیچ‌گاه از پشته حذف نمی‌شوند.
 - نشان دهید که اگر برای L یک ماشین پشته‌ای قطعی وجود داشته باشد که رشته‌های این زبان را بپذیرد، یک ماشین پشته‌ای قطعی دیگر قابل تعریف است که رشته‌های زبان $\{x\#y \mid x \in L, xy \in L\}$ را بپذیرد. فرض می‌کنیم نماد $\#$ در هیچ‌یک از رشته‌های L ظاهر نمی‌شوند.
7. (امتیازی) قضیه‌ی زیر معروف به لم اوگدن را در نظر گرفته، با استفاده از آن اثبات کنید که موارد a و b زبان‌های مستقل از متن نیستند. (20 نمره)
- Ogden's Lemma: فرض کنید که L یک زبان مستقل از متن باشد. ثابت n وجود دارد، به نحوی که اگر w یک رشته‌ی دلخواه عضو زبان L باشد، و ما n تا، یا بیشتر، از نمادهای w را انتخاب کنیم، بتوانیم w را به صورت $uvxyz$ بنویسیم، به نحوی که سه شرط مقابل ارضاء شوند:
- v و y روی هم دست‌کم یک نماد منتخب داشته باشند
 - uxy حداکثر n نماد منتخب داشته باشد
 - به ازای هر $i \geq 0$ رشته‌ی $uv^i xy^i z$ عضو زبان L باشد.
- $L = \{a^p b^q c^r d^s \mid p = 0 \text{ or } q = r = s\}$
 - $L = \{a^n b^n c^i \mid i \neq n\}$