

آمار و احتمالات مهندسی

تمرین دوم - احتمال شرطی و استقلال

امیرحسین و سیاوش

تاریخ تحویل ۱۴۰۱/۰۸/۰۸

سؤال ۱.

اطلاعات زیر درباره مسافران سفرهای تابستانی است که از طریق یک نظرسنجی بدست آمده است: ۴۰٪ از مسافران ایمیل کاری خود را چک می کنند، ۳۰٪ از تلفن همراه برای انجام کارهای مربوط به شغل خود استفاده می کنند، ۲۵٪ لپتاپ با خود به همراه می برند، ۲۳٪ هم ایمیل کاری خود را چک می کنند و هم از تلفن همراه برای انجام کارهای مربوط به شغل شان استفاده می کنند؛ ۵۱٪ نه ایمیل کاری خود را چک کرده و نه از تلفن همراه برای انجام کارهای مربوط به شغل شان استفاده کرده و نه حتی با خود لپتاپ به همراه می برند.

همچنین می دانیم ۸۸ نفر از هر ۱۰۰ نفر که لپتاپ به همراه دارند، ایمیل کاری خود را هم چک می کنند و همچنین ۷۰ نفر از هر ۱۰۰ نفر که از تلفن همراه برای انجام کارهای مربوط به شغل شان استفاده می کنند، لپتاپ هم به همراه دارند.

آ احتمال اینکه مسافری که به صورت تصادفی انتخاب شده، از تلفن همراه برای انجام کارهای شغلی خود استفاده کند، در صورتی که بدانیم ایمیل کاری خود را چک می کند، چقدر است؟

ب احتمال اینکه یک نفر که در سفر با خود لپتاپ به همراه دارد از تلفن همراه نیز برای انجام کارهای شغلی خود استفاده کند، چقدر است؟

ج یک مسافر که به صورت تصادفی انتخاب شده و ایمیل کاری خود را چک می کند و لپتاپ به همراه دارد، چقدر احتمال دارد که از تلفن همراه نیز برای انجام کارهای شغلی خود استفاده کند؟

سؤال ۲.

در اکتبر ۱۹۹۴، عیبی در چیپ های پنتیوم اینتل کشف شد که در نتیجه آن پاسخ عملیات تقسیم می توانست دچار خطا شود. شرکت اینتل در ابتدا ادعا می کرد احتمال اینکه پاسخ یک عملیات تقسیم اشتباه شود، ۱ در ۹ میلیارد است بنابراین هزاران سال طول می کشد که یک کاربر معمولی با چنین خطایی مواجه شود. با این حال استفاده آمادانان از این چیپ ها مانند کاربران معمولی نیست. برخی از تکنیک های پیشرفته آماری پرمحاسبه^۱ هستند که انجام یک میلیارد تقسیم در یک بازه زمانی کوتاه در آن ها دور از انتظار نیست. با فرض اینکه احتمال خطای ۱ در ۹ میلیارد ادعا شده توسط شرکت تولید کننده درست باشد و نتایج عملیات های تقسیم مختلف، مستقل از یکدیگر باشند، احتمال اینکه حداقل یک خطا در یک میلیارد عملیات تقسیم در این چیپ رخ دهد چقدر است؟

^۱Computationally intensive

سؤال ۳.

فرض کنید G پیشامد گناهکار بودن یک فرد متهم به دزدی است. در جمع آوری شواهد، وکیل متهم متوجه می شود که پیشامد E_1 اتفاق افتاده است و کمی بعد متوجه می شود پیشامد E_2 هم اتفاق افتاده است.

آیا امکان دارد که این شواهد به صورت جداگانه احتمال G را افزایش دهند، اما در نظر گرفتن آن‌ها در کنار هم، احتمال G را کاهش دهد؟ به بیان دیگر آیا ممکن است $P(G|E_1) > P(G)$ و $P(G|E_2) > P(G)$ ، اما $P(G|E_1 \cap E_2) < P(G)$ ؟ اگر امکان پذیر است ذکر یک مثال کفایت می کند و در غیر اینصورت ثابت کنید چنین چیزی امکان پذیر نیست.

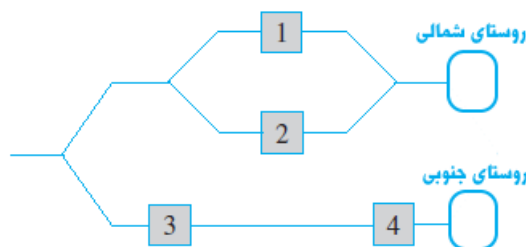
ب نشان دهید تفاوتی وجود ندارد که به روز رسانی احتمال G را در یک مرحله انجام دهیم یا در دو مرحله. منظور از یک مرحله این است که محاسبه $P(G|E_1 \cap E_2)$ در یک مرحله باشد: $P(G|E_1 \cap E_2) \leftarrow P(G)$. در دو مرحله منظور این است که پس از اینکه متوجه شدیم اولین پیشامد اتفاق افتاده به روز رسانی کرده و نیز دوباره بعد از اینکه متوجه شدیم دومین پیشامد هم اتفاق افتاده است به روز رسانی کنیم: $P(G|E_1) \leftarrow P(G)$ سپس $P(G|E_1 \cap E_2) \leftarrow P(G|E_1)$.

سؤال ۴.

فرض کنید قرار است یک بازی با یک سکه انجام دهیم، به این صورت که اگر در دو پرتاب متوالی نتیجه شیر بیاید (HH) شما برنده می شوید و اگر در دو پرتاب متوالی نتیجه خط بیاید (TT) من برنده می شوم و شما می بازید. در غیر اینصورت (حالت TH یا HT) به پرتاب سکه ادامه می دهیم. همچنین به دلیل شکل خاص سکه، احتمال آمدن شیر برابر p است. احتمال اینکه شما در این بازی برنده شوید را به دست آورید.

سؤال ۵.

سیستم آبرسانی دو روستا را مطابق شکل زیر را در نظر بگیرید. پمپ ۱ و ۲ به صورت موازی به هم متصل شده اند بنابراین ساکنین قسمت شمالی به آب دسترسی خواهند داشت اگر و تنها اگر یکی از پمپ های ۱ یا ۲ به درستی عمل کند. همچنین از آنجا که پمپ های ۳ و ۴ به صورت سری متصل شده اند، اگر و تنها اگر هر دو پمپ ۳ و ۴ به درستی عمل کنند آنگاه ساکنین بخش جنوبی هم به آب دسترسی خواهند داشت. اگر بدانیم پمپ ها مستقل از هم کار می کنند و احتمال اینکه پمپ های ۱ تا ۴ به درستی کار کنند به ترتیب ۹۰ درصد، ۹۰ درصد، ۸۰ درصد و ۸۰ درصد باشد. احتمال اینکه آبرسانی به این دو روستا به درستی انجام شود چقدر است؟



سیستم آبرسانی مطرح شده در سؤال ۵

سؤال ۶.

فرض کنید می خواهیم الگوریتم `fairRandom()` را طوری طراحی کنیم که به صورت تصادفی و با احتمال یکسان یکی از اعداد ۰ یا ۱ را تولید کند. متأسفانه تنها تابعی که در دسترس ماست تابع `unknownRandom()` است که با احتمال p که لزوماً برابر $\frac{1}{2}$ نیست عدد ۱ را تولید می کند و با احتمال $1-p$ عدد ۰ را تولید می کند. الگوریتم زیر را در نظر بگیرید:

```
int fairRandom() {
```

```

int r1, r2;
while (true) {
    r1 = unknownRandom();
    r2 = unknownRandom();
    if (r1 != r2)
        break;
}
return r2;
}

```

آ به صورت ریاضی اثبات کنید که fairRandom به درستی کار می کند. به بیان دیگر نشان دهید که این تابع با احتمال یکسانی ۰ یا ۱ تولید می کند.

ب ما می خواهیم این تابع را ساده تر کنیم بنابراین تابع simpleRandom() زیر را می نویسیم. آیا این تابع هم اعداد ۰ و ۱ را با احتمال یکسان تولید می کند؟ پاسخ خود را توضیح دهید. (راهنمایی: احتمال اینکه این تابع ۱ را خروجی دهد (برحسب p) محاسبه کنید.)

```

int simpleRandom() {
    int r1, r2;
    r1 = unknownRandom();
    while (true) {
        r2 = unknownRandom();
        if (r1 != r2)
            break;
        r1 = r2;
    }
    return r2;
}

```

سؤال ۷.

دوستان شما در یکی از آزمایشگاه های دانشکده برق و کامپیوتر دانشگاه تهران، توالی DNA جمعیت بزرگی را بررسی کرده اند تا متوجه شوند که ژن (G) چگونه می تواند بر دو خصیصه خاص (T_1 و T_2) اثرگذار باشد. آن ها نتایج زیر را بدست آوردند:

$$P(G) = 0.6, P(T_1|G) = 0.8, P(T_2|G) = 0.9$$

آن ها همچنین مشاهده کردند که اگر شخصی ژن (G) را نداشته باشد، هیچکدام از خصیصه های (T_1 و T_2) در او بروز پیدا نمی کند و نیز احتمال اینکه یک فرد هردو خصیصه (T_1 و T_2) را داشته باشد به شرط داشتن آن ژن (G) برابر با ۷۲٪ است.

آ آیا به شرط وجود ژن G ، دو خصیصه T_1 و T_2 مستقلند؟

ب آیا دو خصیصه T_1 و T_2 استقلال شرطی دارند اگر ژن G نباشد؟

ج $P(T_1)$ را بیابید.

د $P(T_2)$ را بیابید.

ه آیا T_1 و T_2 وابسته اند؟

سؤال ۸.

مریم برای یک شرکت تولیداتی کار می کند، افزایش حقوق کارمندان شرکت بستگی به افزایش سود شرکت دارد. فرض کنید R پیش آمدی باشد که حقوق مریم در پایان سال افزایش یابد، S پیش آمدی است که سود شرکت بیشتر از ۱۰٪ افزایش یابد. و E پیش آمدی است که تولیدات

شرکت بیشتر از ۳۰٪ افزایش یابد. همچنین می‌دانیم که افزایش حقوق او به سود شرکت بستگی دارد، و نه مستقیماً به میزان فروش. اگر احتمال اینکه سود شرکت بیش از ۱۰٪ افزایش یابد برابر ۷۵٪ باشد و داشته باشیم:

$$P(R|S) = 0.8, \quad P(R|\bar{S}) = 0.1, \quad P(E|S) = 0.95, \quad P(E|\bar{S}) = 0.1$$

در صورتی که بدانیم تولیدات شرکت ۳۳٪ افزایش داشته است، احتمال این که حقوق مریم افزایش پیدا کند چند برابر احتمال افزایش نیافتن حقوق اوست؟ (راهنمایی: دو پیش‌آمد E و R به شرط S از هم مستقل هستند)

سؤال ۹.

تمرین کامپیوتری سری دوم با موضوعات «احتمال شرطی» و «مسئله موتی هال» را می‌توانید از طریق این [لینک](#)^۲ دریافت کنید.

- یک کپی از فایل مذکور با نام CA2_SID در گوگل درایو خود تهیه کنید.
- در فایل خود بخش‌هایی که به وسیله مستطیل مشخص شده‌اند را با کدهای مناسب جایگزین کنید.
- سوالاتی که به زبان فارسی و رنگ سفید مطرح شده‌اند را در همان سلول پاسخ دهید.
- فایل کد خود را با ایمیل kianoosharshi@gmail.com با دسترسی Editor به اشتراک بگذارید.
- لینک فایل پاسخ خود را در بخش متنی جایگاه آپلود این تمرین در سامانه ایلرن قرار دهید.
- دقت کنید در صورتی که لازم به ایجاد یک سلول جدید برای اجرای کد داشتید، اول سلول از %%R استفاده کنید تا سلول به عنوان کد R تشخیص داده شود.

هرگونه انتقاد، پیشنهاد یا نکته جانبی را می‌توانید از طریق یک سلول متنی در ابتدای فایل (قبل از سرفصل اصلی) به ما منتقل کنید.

^۲https://colab.research.google.com/drive/1_qEp9WUiWpni9UZIx7xW5GVL4tao5Qi?usp=sharing