ریاضیات گسسته

پاسخنامه تمرین سوم - منطق

سینا کمالی

سؤال ۱.

۱. عبارت زیر را به صورت گزاره منطقی بنویسید و نقیض آن را بیابید.

هر فرد موفق حتما سخت‌کوش است و دوستان خوبی دارد.

۲. تعاریف دلخواه خود را را توابع استفاده شده در گزاره زیر ارائه دهید و با استفاده از آن یک عبارت فارسی بنویسید که معادل این گزاره باشد.

$$\exists x \in P \quad \forall y \in P : F(x,y) \rightarrow (G(y) \land (\exists z : F(y,z)))$$

پاسخ .

۱. مجموعه افراد را با P نشان می‌دهیم. S(x) یعنی x فرد موفقی است، H(x) یعنی x سختکوش است و F(x) یعنی x دوستان خوبی دارد. پس می‌توان نوشت:

$$\forall x \in P : S(x) \rightarrow (F(x) \land H(x))$$

۲. توابع را به صورت زیر تعریف می‌کنیم: F(x،y) یعنی x دوست y است و G(x) یعنی x موفق است. پس یک عبارت معادل عبارت بالا به صورت زیر است:

فردی وجود دارد که تمام دوستان او موفق هستند و حداقل یک دوست دارند.

سؤال ۲.

با استفاده از قوانین استنتاج و ذکر آن‌ها در هر مرحله، ثابت کنید نتیجه‌گیری زیر درست است:

همه‌ی پرتقال‌ها گرد هستند و وجود دارد پرتقالی که ترش باشد. بنابراین بعضی از میوه‌های ترش گرد هستند.

پاسخ .

تعریف می کنیم:

- M : مجموعه‌ی همه‌ی میوه ها
- $P(m)$: میوه ی m پرتقال است
- $G(m)$: میوه ی m گرد است
- $T(m)$: میوه ی m ترش است

داریم:

(از فرض)	$\forall m \in M : P(m) \Rightarrow G(m)$	(۱)
(از فرض)	$\exists m \in M : P(m) \wedge T(m)$	(۲)
(نمونه برداری وجودی از ۲)	$P(c) \wedge T(c)$	(۳)
(ساده سازی عطفی از ۳)	$P(c)$	(۴)
(ساده سازی عطفی از ۳)	$T(c)$	(۵)
(نمونه برداری عمومی از ۱)	$P(c) \Rightarrow G(c)$	(۶)
(قاعده انتزاع از ۴ و ۶)	$G(c)$	(۷)
(ترکیب عطفی ۵ و ۸)	$T(c) \wedge G(c)$	(۸)
(تعمیم به سور وجودی از ۸)	$\exists m \in M : T(m) \wedge G(m)$	(۹)

سؤال ۳.

اگر داشته باشیم:

$p \equiv$ رستوران رفتن امیر

$q \equiv$ پول نداشتن علی

$s \equiv$ خواب بودن محمد

$t \equiv$ بارانی بودن هوا

آنگاه ثابت کنید که گزاره «امیر به رستوران می رود مگر علی پول نداشته باشد و محمد خواب باشد و هوا بارانی باشد.» با گزاره زیر معادل است:

$$\equiv ((((p \vee q) \wedge s) \vee ((p \vee q) \wedge p)) \wedge t) \vee ((((p \vee q) \wedge s) \vee ((p \vee q) \wedge p)) \wedge p)$$

پاسخ .

با توجه به جزوه، می‌دانیم که گزاره « q مگر p' » با گزاره « p آنگاه q » معادل است. با دانستن این موضوع معادل جمله سوال را می‌نویسیم:

$$(q \wedge s \wedge t)' \rightarrow p$$

همینطور می‌دانیم که $p \to q \equiv p' \vee q$. می‌نویسیم:

$$\equiv ((q \wedge s \wedge t)')' \vee p \equiv (q \wedge s \wedge t) \vee p$$

این عبارت با عبارت نهایی خواسته شده معادل است. از هرطرف اثبات این امر بلامانع است. ما همین مسیر را ادامه می‌دهیم:

$$(q \wedge s \wedge t) \vee p \equiv (q \vee p) \wedge (s \vee p) \wedge (t \vee p) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee s) \wedge (t \vee p)$$

حال از قانون پخشی استفاده می‌کنیم:

$$\equiv (((p \vee q) \wedge p) \vee ((p \vee q) \wedge s))) \wedge (t \vee p) \equiv (((p \vee q) \wedge s) \vee ((p \vee q) \wedge p))) \wedge (t \vee p)$$

حال دوباره از قانون پخشی استفاده می‌کنیم:

$$\equiv ((((p \vee q) \wedge s) \vee ((p \vee q) \wedge p)) \wedge t) \vee ((((p \vee q) \wedge s) \vee ((p \vee q) \wedge p)) \wedge p)$$

سؤال ۴.

درستی گزاره‌های زیر را با استفاده از قوانین هم ارزی اثبات کنید.

۱. $(p \vee (p \wedge q) \vee (p \wedge q \wedge \neg r)) \wedge ((p \wedge r \wedge t) \vee t) \equiv (p \wedge t)$

۲. $(p \Rightarrow s) \vee (q \Rightarrow s) \equiv (p \wedge q) \Rightarrow s$

۳. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow s \equiv (\neg p \Rightarrow s) \wedge (q \Rightarrow s)$

پاسخ .

.۱

$$\begin{aligned}
&(p \vee (p \wedge q) \vee (p \wedge q \wedge \neg r)) \wedge ((p \wedge r \wedge t) \vee t)\\
&\equiv (p \vee (p \wedge q \wedge T) \vee (p \wedge q \wedge \neg r)) \wedge ((p \wedge r \wedge t) \vee (T \wedge t)\\
&\equiv (p \vee (((p \wedge q) \wedge T) \vee ((p \wedge q) \wedge \neg r))) \wedge (((p \wedge r) \wedge t) \vee (T \wedge t)\\
&\equiv (p \vee ((p \wedge q) \wedge (T \vee \neg r)) \wedge (((p \wedge r) \vee T) \wedge t)\\
&\equiv (p \vee ((p \wedge q) \wedge T) \wedge (T \wedge t)\\
&\equiv (p \vee (p \wedge q)) \wedge t)\\
&\equiv ((p \wedge T) \vee (p \wedge q)) \wedge t\\
&\equiv (p \wedge (T \vee q)) \wedge t\\
&\equiv (p \wedge T) \wedge t\\
&\equiv p \wedge t
\end{aligned}$$

.۲

$$\begin{aligned}
&(p \Rightarrow s) \vee (q \Rightarrow s)\\
&\equiv (\neg p \vee s) \vee (\neg q \vee s)\\
&\equiv (\neg p \vee \neg q) \vee s\\
&\equiv \neg(\neg p \vee \neg q) \Rightarrow s\\
&\equiv (p \wedge q) \Rightarrow s
\end{aligned}$$

.۳

$$
\begin{aligned}
&(p \Rightarrow q) \Rightarrow s \\
&\equiv (\neg p \vee q) \Rightarrow s \\
&\equiv \neg(\neg p \vee q) \vee s \\
&\equiv (p \wedge \neg q) \vee s \\
&\equiv (p \vee s) \wedge (\neg q \vee s) \\
&\equiv (\neg p \Rightarrow s) \wedge (q \Rightarrow s)
\end{aligned}
$$

سؤال ۵.

دیشب در شهر Yharnam دکتر لودویگ کشته شده است. حال شما مظنونین را پیدا کرده و از هر کدام از آنها بازجویی می‌کنید. وظیفه شما پیدا کردن دروغگوها است. دقت کنید که می‌دانیم، دروغگوها همیشه دروغ می‌گویند. (فرض کنید بی گناهی و راستگویی معادل یکدیگراند. دقت کنید جملاتی که به راست گو یا دروغ گو بودن افراد اشاره نمی‌کنند برای داستان هستند.)

بازجویی ها:

۱. حمید می‌گوید: منو مرتضی مثل داداشیم. او بدون شک راستگو است.

۲. مرتضی می‌گوید: دیروز هاشم با من بود و داشتیم تو مزرعه کار می‌کردیم. او بی گناه و راستگو است.

۳. هاشم می‌گوید: مریم بدون شک دروغگو است. دیشب نزدیک قبرستون دیدمش!

۴. زهرا می‌گوید: اگر من راستگو باشم مریم هم راستگو است. اگر هم من دروغگو باشم مریم هم عین من دروغگو است. به نفعتونه به ما دوتا مشکوک نباشید.

۵. امید می‌گوید: من حمید رو دیدم که داشت یواشکی می‌رفت پشت کلیسا. بدون شک دروغگو است! من به راستگو بودن شهرت دارم اینو می‌تونید از هرکسی که می‌خواید بپرسید!

۶. شایان می‌گوید: من به امید اعتماد کامل دارم. او راستگو است.

۷. حمید می‌گوید: آها راستی، می‌دونم که شایان و زهرا آب‌شون باهم تو یه جوب نمی‌ره! اینا بدون شک حداقل یکیشون دروغگو است. پیشنهاد می‌کنم با همین تحقیقات رو شروع کنید.

پاسخ.

- برای حل سوال باید از حرف زهرا شروع کنید. حالت بندی می‌کنیم:

  ۱. زهرا راست می‌گوید. در این صورت طبق جمله‌ای که گفته است مریم هم راست می‌گوید.

  ۲. زهرا دروغ می‌گوید. در این صورت گزاره وی هم باید دروغ باشد پس در صورتی که وی دروغ گو باشد هم مریم راست می‌گوید.

  پس در هر صورت مریم راستگو است.

- حال که می‌دانیم مریم راستگو است، مسئله بسیار ساده تر می‌شود. هاشم گفته است مریم دروغگو است. این یک دروغ است، پس هاشم دروغگو است.

- مرتضی می‌گوید هاشم راستگو است. طبق گزاره قبل این یک دروغ است، پس مرتضی هم دروغگو است.

- حمید می‌گوید مرتضی راستگو است. این گزاره طبق گزاره قبلی دروغ است، پس حمید هم دروغگو است. علاوه بر این حمید ادعا می‌کند که زهرا یا شایان حداقل یکیشان دروغگو است. می‌دانیم حمید دروغگو است، پس نقیض این گزاره که می‌شود شایان و زهرا هردو راست گواند درست می‌باشد. پس شایان و زهرا راستگواند.

- می‌دانیم شایان راستگو است. شایان می‌گوید امید راستگو است، پس امید راستگو است.

به حرفی که امید زده است هم برای حل مسئله احتیاج نداریم. پس دروغگوهای مسئله هاشم، مرتضی، حمید هستند.

سؤال ۶.

۲۰ نفر دور دایره نشسته‌اند و روی سر هر کدام یک کلاه قرار دارد. هر کلاه یک رنگ مشخص دارد.افراد از تعداد رنگ‌های متفاوت اطلاعی ندارند اما می‌دانند که از هر رنگ حداقل دو کلاه وجود دارد. این افراد بازی زیر را انجام می‌دهند: هر فرد تلاش می‌کند که رنگ کلاه خود را حدس بزند و می‌تواند رنگ کلاه همه به جز خودش را ببیند. در هر مرحله پس از مدتی یک زنگ به صدا در می‌آید و هر کس که رنگ کلاه خود را فهمیده باشد آن را اعلام می‌کند و جمع را ترک می‌کند. رنگی که بیشترین تعداد کلاه را دارد در نظر بگیرید. اگر تعداد کلاه‌های این رنگ را با n نشان دهیم، یک استراتژی ارائه کنید که همه افراد حداکثر پس از زنگ $n - ۱$ ام، رنگ کلاه خود را فهمیده باشند.

پاسخ .

رنگی را در نظر بگیرید که از آن دو کلاه وجود دارد، فردی که این رنگ را بر سر دارد فقط یک نفر را با این رنگ می‌بیند، بنابراین متوجه می‌شود که کلاه خودش هم همان رنگ است چون می‌داند که از هر رنگ حداقل دو کلاه داریم. حال استراتژی بالا را گسترش می‌دهیم. اگر رنگی را در نظر بگیریم که از آن سه کلاه وجود دارد، فردی که این کلاه را دارد متوجه می‌شود که دو نفر کلاهی به این رنگ دارند، پس اگر فرض کند که رنگ کلاه خودش با آن‌ها متفاوت است، انتظار دارد که این افراد پس از زنگ اول بلند شوند. وقتی بلند نشوند متوجه می‌شود که از این رنگ سه کلاه وجود دارد و متوجه می‌شود که کلاه خودش هم همان رنگ است. بنابراین به ازای هر رنگ x که k کلاه از آن رنگ داریم، هر فرد حداکثر بعد از $k - ۱$ زنگ رنگ کلاه خود را می‌فهمد به این صورت که در صورتی که پس از زنگ $k - ۲$ افرادی که این رنگ را دارند بلند نشوند، متوجه می‌شود که کلاه خودش هم همان رنگ است.