



ریاضیات گسسته

تمرین نهم - گراف مقدماتی

امیرمحمد خسروی

تاریخ تحویل ۱۴۰۱/۰۲/۲۳

سؤال ۱.

فرض کنید G گرافی ۱۰ منتظم با ۹۰ رأس باشد. ثابت کنید هر رأس از G متعلق به دوری به طول ۴ است.

سؤال ۲.

نشان دهید اگر گراف ساده و همبند G اجتماعی از گرافهای G_1 و G_2 باشد، آنگاه G_1 و G_2 حداقل یک رأس مشترک دارند.

سؤال ۳.

فرض کنید G گرافی اوپلری است و دو یال e_1 و e_2 دارای رأس مشترک اند و این رأس مشترک، رأس برشی نمی باشد. ثابت کنید تور اوپلری وجود دارد که این دو یال پشت هم آمده اند.

سؤال ۴.

زیر گراف القایی یک زیر گراف است که رئوسش یک زیر مجموعه از رئوس اصلی و یالهایش تمام یالهای میان آن رئوس است. گراف G ، گرافی است که هیچ زیر گراف القایی به شکل P_4 (مسیر به طول ۳) و C_3 (دور به طول ۳) ندارد.

الف) ثابت کنید این گراف دوبخشی است.

ب) با این فرض که گراف G همبند است، ثابت کنید این گراف دوبخشی کامل است.

سؤال ۵.

ثابت کنید در یک تورنمنت (گراف کامل ساده جهت دار) قویا همبند، به ازای هر k به طوری که $3 \leq k \leq n$ ، دوری جهت دار به طول k وجود دارد.

سؤال ۶.

G' گرافی است غیر دوبخشی با n رأس و حداقل درجه‌ی یک رأس در آن برابر با k است. L را طول کوتاه‌ترین دور فرد در این گراف در نظر می‌گیریم:

الف) اگر C یک دور به طول L در گراف G باشد، آنگاه ثابت کنید که هر رأسی که در دور C نباشد، حداکثر دو همسایه در رئوس دور C دارد.

ب) ثابت کنید $n \geq (k \times L)/2$.

ج) به ازای مقادیر زوج k ثابت کنید گرافی وجود دارد که $n = kL/2$.