



به نام خدا

نظریه زبان ها و ماشین ها- بهار ۱۴۰۲

پاسخ تمرین شماره 9
دستیار آموزشی این مجموعه: سپهر آزرदार

sepehr81sepehr@gmail.com

1. در ماشین تورینگ استاندارد، اگر در ابتدای نوار باشیم و بخواهیم به سمت چپ حرکت کنیم، آنگاه در همان جا خواهیم ماند. ماشین تورینگ M' را در نظر بگیرید. این ماشین در شرایط گفته شده به تریب استییت میروود و در همان جا برای همیشه خواهد ماند. نشان بدهید که چگونه میتوان ماشین تورینگ استاندارد را به ماشین تورینگ گفته شده تبدیل کرد به طوری که هر دو یک زبان را بپذیرند.

پاسخ:

ماشین تورینگ M را در نظر بگیرید، میخواهیم M را به ماشین تورینگ M' تبدیل کنیم به نحوی که هر دو یک زبان را بپذیرند برای اینکار، نوار را به اندازه یک خانه به سمت راست شیفت میدهیم و یک سمبل جدید را در ابتدا نوار وارد میکنیم مثلاً $*$. حال به خانه دوم میرویم که معادل اولین خانه برای تورینگ صورت سوال میباشد. حال ماشین تورینگ صورت سوال را قدم به قدم شبیه سازی میکنیم. حال هرگاه در نوار M' به $*$ رسیدیم یعنی در ماشین تورینگ استاندارد (صورت سوال) سعی داشتیم که به خانه سمت چپ خانه اول نوار بریم. پس در M' به یک تریب استییت میرویم. به نحوی که به ازای تمام الفبای زبان، یه قانون داریم: $a, l / a$ و از آنجایی که در ماشین تورینگ استاندارد (همانی که در سرکلاس گفته شده) حرکت به سمت چپ در ابتدای نوار معادل stay هست. برای همیشه در ابتدا نوار خواهیم ماند.

2. تورینگ-ماشین ای داریم که از پس نوشته شدن ورودی روی نوار، در هر خانه ی نوار حداکثر یکبار می توانیم بنویسیم. اثبات کنید که این ماشین با ماشین تورینگ استاندارد برابر است.

پاسخ:

برای اینکار، ابتدا، تورینگ ماشین ای که تنها میتوانیم دوبار در هر خانه بنویسیم را بررسی میکنیم و اثبات میکنیم که با تورینگ ماشین استاندارد برابر است. برای شبیه سازی تورینگ ماشین استاندارد توسط ماشین گفته شده، هر بار کل (قسمت فعلی) نوار را در یک قسمت دست نخورده از نوار که در سمت راست قسمت فعلی قرار دارد. کپی میکنیم. برای اینکار کاراکتر به کاراکتر کپی را انجام میدهیم و علامت میزنیم که کاراکتر آیا کپی شده است یا نه. در حین وقتی به خانه ای میرسیم که هدر روی آن قرار دارد، قانون خواسته شده در آن وضعیت را اجرا میکنیم. پس بدین صورت به ازای هر قانون، قسمت فعلی نوار را همراه با اجرا اون rule (اپدیت کردن خانه مورد نظر) دوباره در سمت راست کپی میکنیم. بدین صورت ماشین تورینگ را شبیه سازی میکنیم. با توجه به اینکه در این ماشین تنها اجازه داریم که در هر خانه حداکثر دوبار بنویسیم (یکی برای نوشتن اولیه، بار دیگر برای علامت دار کردن هنگام کپی کردن آن). در نتیجه این کار قابل انجام هست و این ماشین با ماشین تورینگ استاندارد معادل است.

حال با دانستن اینکه ماشین تورینگ گفته شده، با تورینگ ماشین استاندارد معادل است میتوانیم نشان دهیم که write-only-TM نیز با تورینگ ماشین استاندارد معادل است:

فرایندی مشابه با ماشین تورینگ گفته شده در بالا را انجام میدهیم. فقط از آنجایی که نمیتوانیم در یک خانه دوبار بنویسیم برای اینکه بفهمیم که آن خانه کپی شده است یا نه (نقش علامت زدن در بالا را ایفا میکند). به ازای هر خانه، دوخانه در نظر میگیریم. به طوری که یکی برای نوشتن محتویات و دیگری به عنوان علامت (خالی یا پر بودن اون خونه) در هنگام کپی.

3. نشان دهید ماشین های صفدار معادل ماشین تورینگ استاندارد هستند.

ماشین های صفدار مانند pda ها هستند. با این تفاوت که به جای پشته، یک صف قرار گرفته است. صف، در حکم یک نوار است که نمادها صرفاً از انتهای چپ نوشته و از انتهای راست خوانده می شوند (یا برعکس). درواقع این ماشین یک اتوماتای محدود با تعدادی استیت است که میتواند در هر مرحله بر اساس عنصر ورودی و استیتی که در آن قرار دارد و عنصر سر صف استیت خود را عوض کند. این ماشین ها از یک سمبل خاص برای نشان دادن ته صف استفاده می کنند.

پاسخ:

باید ثابت کنیم:

(الف) هر ماشین تورینگ M قابل تبدیل به یک ماشین صف Q است که همان زبان را می پذیرد.

(ب) هر ماشین صف Q قابل تبدیل به یک ماشین تورینگ M است که همان زبان را می پذیرد.

(الف)

می خواهیم ثابت کنیم برای ماشین تورینگ M ، یک ماشین صف Q معادل داریم. صف را در ماشین Q اینگونه در نظر می گیریم که از سمت راست به آن می توانیم پوش کنیم و از سمت چپ از آن پول کنیم.

$$\text{pull} \leftarrow [a, b, c, d, e] \leftarrow \text{push}$$

فرض می کنیم در ماشین M این کانفیگ را داریم:

$$a, b, c, \dots, h, \dots, x, y, z$$

و هد خواندن بر روی h است.

در ماشین Q ، از h شروع می کنیم و در صف پوش می کنیم. وقتی به آخر رسیدیم $\$$ را پوش می کنیم، سپس دوباره از سمت چپ شروع به پوش کردن می کنیم. پس صف معادل برای ماشین Q به این صورت خواهد بود (با فرض این که هد خواندن روی h قرار داشته است):

$$\text{pull} \leftarrow [h, \dots, x, y, z, \$, a, b, c, \dots] \leftarrow \text{push}$$

در این حالت، در ماشین صف Q ، در سر صف همان h قرار دارد. در واقع ماشین صف، همان ورودی ای را در ابتدا داشت که M داشته است، با توجه به این که هد M در کجا قرار دارد، یک بار در Q کل ورودی را پیمایش می کنیم و صف را اینگونه تشکیل می دهیم. همچنین می توانیم فرض کنیم که در ابتدا همیشه هد خواندن M در ابتدای ورودی است.

برای اثبات اینکه Q همانند M رفتار می کند، باید دو عمل M را که عبارتند از:

$$a \rightarrow x, R$$

$$b \rightarrow y, L$$

را در Q شبیه سازی کنیم. ای دو عمل، دو عملی اصلی در ماشین تورینگ هستند که عبارتند از نوشتن بر روی tape و حرکت به راست و برعکس. برای عمل اول، کافیهست در Q ، ابتدا a را pull کنیم و x را پوش کنیم:

$$M: [a, b, c] \text{ ----> } [x, b, c]$$

$$Q: [a, b, c, \$] \rightarrow [b, c, \$, x]$$

که در بالا، بعد از این عملیات، هد خواندن در هر دو ماشین بر روی b خواهد بود. برای عملیات دوم این مراحل را در Q طی می کنیم:

۱. یک نماد $\#$ را در صف پوش می کنیم که نشان دهنده مکان فعلی هد خواندن است.
۲. به ازای هر دو حرف پشت سر هم در صف، یک دوتایی (y, x) در نظر می گیریم. این کار را با $state$ های در Q می توان انجام داد. دوتایی آخر که به $\#$ منجر می شود را به طور برعکس در صف پوش می کنیم.
۳. دوتایی ها را از ابتدای صف $pull$ کرده و هر حرف را جدا جدا در صف پوش می کنیم.
۴. نماد $\#$ را از صف حذف می کنیم ($pull$).

$$M: [a, b, c] \rightarrow [a, y, c]$$

● در ابتدا هد خواندن بر روی b بوده است.

Q :

1. $[b, c, \dots, \$, a] \rightarrow [b, c, \dots, \$, a, \#]$
2. $[b, c, \dots, \$, a, \#] \rightarrow [(b, c), (c, d), \dots, (\$, a), \#, a]$
3. $[(b, c), (c, d), \dots, (\$, a), \#, a] \rightarrow [\#, a, y, c, d, \dots, \$]$
4. $[a, y, c, d, \dots, \$]$

● در این میان، b را نیز به y تغییر دادیم.

پس به ازای هر دو عمل اصلی در M ، معادل در Q می توانیم رفتار کنیم. پس هر ماشین تورینگ به ماشین صف قابل تبدیل است که همان زبان را می پذیرد.

(ب)

فرض می کنیم ماشین صف Q را داریم. سعی می کنیم ماشین تورینگ M معادل را بسازیم. برای این کار مثل قبل، باید دو عمل $push$ و $pull$ کردن در Q را در M شبیه سازی کنیم.

با پوش کردن یک حرف d در صف، در ماشین M ، به انتهای رشته می رویم و d را اضافه می کنیم:

$$Q: [a, b, c] \rightarrow [a, b, c, d]$$

$$M: [\sqcup, a, b, c, \sqcup] \rightarrow [\sqcup, a, b, c, d, \sqcup]$$

برای $pull$ کردن نیز اولین حرف را به \sqcup تبدیل می کنیم:

Q: $[a, b, c] \rightarrow [b, c]$

M $[L, a, b, c, L] \rightarrow [L, L, b, c, L]$

همچنین در ماشین M، علامت L (اولی از سمت چپ) را ابتدای ورودی در نظر می گیریم.

پس طبق الف) و ب) زبان ماشین تورینگ و صف معادل هستند.

4. ماشین تورینگ را در نظر بگیرید که n اشاره گر برای خواندن از نوار دارد. هر حرکت در این ماشین به استیت و نمادهای زیر هر اشاره گر بستگی دارد. در هر حرکت، میتوان یک نماد در هر یک از خانه هایی که اشاره گر خوانده است نوشت، هر اشاره گر را به راست یا چپ حرکت داد یا هیچ حرکتی انجام نداد. اشاره گر ها را از 1 تا n شماره گذاری می کنیم. ممکن است چند اشاره گر به یک خانه اشاره کنند؛ در این صورت نمادی که اشاره گر بزرگتر می نویسد در آن خانه قرار می گیرد. ثابت کنید این ماشین تورینگ با ماشین تورینگ استاندارد هم ارز است. (راهنمایی از ماشین تورینگ 3 نواره استفاده کنید.)

پاسخ:

واضح است که این ماشین می تواند ماشین تورینگ استاندارد را شبیه سازی کند. کافی است همه اشاره گر ها با هم حرکت کنند و فقط اشاره گر n ام در خانه بنویسد. این گونه انگار همان یک اشاره گر را داریم. سپس اثبات می کنیم که ماشین تورینگ می تواند ماشین n اشاره گره را شبیه سازی کند. به جای ماشین تورینگ استاندارد از ماشین تورینگ 3 نواره استفاده می کنیم و چون هم ارز هستند مشکلی پیش نمی آید. نوار اول برابر با نوار ماشین n اشاره گره خواهد بود و همان ورودی روی آن نوشته می شود. نوار دوم در ابتدا خالی است. در نوار سوم به ازای همه زیرمجموعه های $\{1, 2, \dots, n\}$ یک نماد جدید در نظر می گیریم و در i امین خانه نمادی را می نویسیم که آن زیرمجموعه از اشاره گر ها به آن اشاره می کنند. در هر مرحله در ماشین n اشاره گره به ازای هر اشاره گر، یک نماد و یک جهت حرکت خواهیم داشت. با استفاده از نوار سوم ماشین تورینگ که جایگاه هر اشاره گر را داریم در نوار دوم در جایگاه فعلی اشاره گر نماد جدید را می نویسیم. (از مکان اشاره گر اول شروع می کنیم. در این صورت اگر چند اشاره گر به یک خانه اشاره کنند، نمادی که اشاره گر بزرگتر می نویسد نهایی می شود) سپس نماد های نوار سوم را آپدیت می کنیم تا جایگاه جدید اشاره گر ها را نشان بدهد. سپس هر خانه ای از نوار دوم که خالی نیست را در نوار اول می نویسیم و در نوار دوم آن را به blank تبدیل می کنیم. بدین صورت در هر مرحله نوار اول ماشین تورینگ با ماشین گفته شده یکسان خواهد بود.

5. ماشین تورینگ با یک نوار به عنوان ورودی و یک نوار برای محاسبات داریم. در نوار اولی نمیتوان بنویسیم ولی بر روی نوار محاسبات میتوان نوشت. ثابت کنید توان محاسباتی این ماشین تورینگ با ماشین تورینگ استاندارد یکسان است.

پاسخ:

به سادگی میتوان هر حرف ورودی نوار ورودی را در نوار محاسبات کپی کرد و ادامه‌ی کار را از ابتدای نوار محاسبات پیش برد. به این طریق اثبات کردیم که هر ماشین تورینگ استاندارد با ماشین تورینگ مسئله قابل شبیهسازی است. حال برعکس آن را نیز اثبات میکنیم. برای این کار کافیهست از ماشین تورینگ دو نواره (که اثبات شد معادل ماشین تورینگ استاندارد است) استفاده کنیم. به همان طریق یک نوار را برای ورودی و یک نوار را برای محاسبات داریم. حال میتوان گفت که این دو ماشین تورینگ با هم از نظر توان محاسباتی، یکسان هستند.

6. ماشین تورینگ داریم که عمل چپ رفتن روی نوار را ندارد و به جای آن میتواند به اول نوار برود. ثابت کنید این ماشین تورینگ معادل ماشین تورینگ استاندارد است.

پاسخ:

ماشین تورینگ گفته شده را میتوان با ماشین تورینگ استاندارد شبیهسازی کرد؛ زیرا کافی است که اول نوار حرفی را اضافه کرده و تمامی ورودی را یک shift به راست دهیم. پس از آن به ازای هر اول نوار رفتن، کافی است که تا جایی که به حرف ابتدایی نرسیده‌ایم، چپ برویم. حال باید نشان دهیم که ماشین تورینگ استاندارد را میتوان به ماشین تورینگ گفته شده تبدیل کرد. از آن جایی که به جز چپ رفتن بقیه‌ی عملیاتها را داریم، پس اگر بتوانیم این عمل را به خوبی تبدیل کنیم، کار تمام است.

1. خانه فعلی را علامت میزنیم

2. به ابتدا برمیگردیم.

3. کل نوار را به راست شیفت میدهیم. درحالیکه علامت را در موقعیت فعلی اش نگه میداریم.

$aa\ b\ b \rightarrow \sqcup\ a\ a\ bb$ (علامت " " در جایگاه سوم باقی مانده است. و خانه اول خالی میشود).

4. به ابتدا میرویم و به راست میرویم تا به خانه مارک شده برسیم.

پایان.

7. (امتیازی) زبان برنامه نویسی را در نظر بگیرید که نواری همانند ماشین تورینگ استاندارد دارد. الفبای نوار به صورت $\{a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}\}$ است و الفبای زبان شامل a_0 نمی شود. در ابتدا ورودی روی نوار نوشته شده و در ادامه آن بی نهایت a_0 می آید. دستورات زیر در این زبان تعریف شده اند:

< : حرکت اشاره گر به سمت چپ در صورت امکان. در غیر این صورت حرکتی انجام نمی شود.

> : حرکت اشاره گر به سمت راست

+ : اضافه کردن به نماد زیر اشاره گر:

a_0 به a_1 تبدیل شده، a_1 به a_2 و همینطور الی آخر. a_{n-1} به a_0 تبدیل می شود.

- : کم کردن از نماد زیر اشاره گر: a_1 به a_0 تبدیل شده، a_2 به a_1 و همینطور الی آخر. a_0 به a_{n-1} تبدیل می شود.

[cmds] : همانند یک حلقه while عمل می کند: تا زمانی که نماد زیر اشاره گر a_0 نیست، دستورات cmds اجرا می شوند. این حلقه ها می توانند تو در تو باشند.

ثابت کنید هر برنامه به این زبان را می توان در یک ماشین تورینگ استاندارد اجرا کرد

پاسخ:

الفبای ماشین تورینگ را نیز a_1 تا a_n در نظر می گیریم و به جای a_0 از blank استفاده می کنیم. از ماشین تورینگ استفاده می کنیم که قابلیت stay را نیز دارد. دستورات < و > که به سادگی در ماشین تورینگ قابل پیاده سازی هستند. کافی است همان نمادی که اشاره گر به آن اشاره می کند باز نویسی شود و اشاره گر به راست یا چپ برود. برای - نیز هر کاراکتر را با کاراکتر پایین تر از خود جایگزین کرده و اشاره گر را تکان نمی دهیم. a_0 به blank تبدیل می شود. برای + هم به همین صورت عمل می کنیم و فقط a_n به blank تبدیل می شود. برای پیاده سازی حلقه کافی است که استیت های درون حلقه را پیاده سازی کنیم و اگر در آخرین استیت اشاره گر به blank اشاره می کرد به استیت جدید برویم و درواقع دستور بیرون حلقه اجرا شود و در غیر این صورت دوباره به استیت اولی که توسط این حلقه وارد آن شدیم برگردیم.

