ریاضیات گسسته

پاسخنامه تمرین دهم - گراف پیشرفته

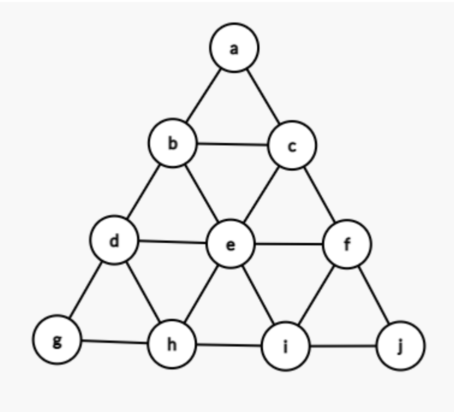
علی پاکدل صمدی

تاریخ تحویل ۱۴۰۱/۰۳/۰۶

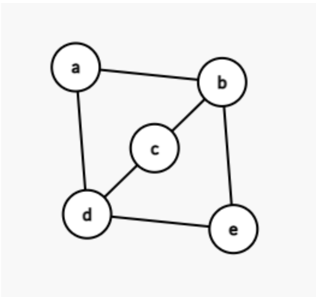
سؤال ۱.

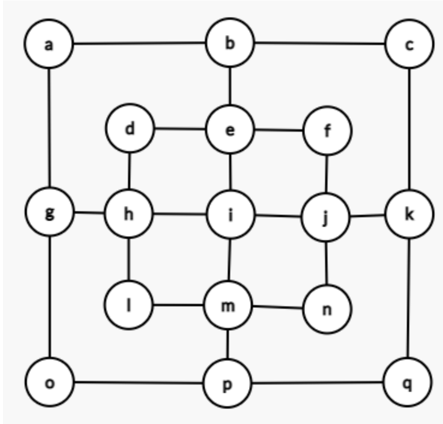
آیا گراف‌های زیر دور همیلتونی دارند؟ در صورت وجود یک مورد نام ببرید؛ در غیر این صورت، اثبات کنید که دور همیلتونی وجود ندارد.

الف)



ب)



ج) 

پاسخ .

الف) وجود دارد؛ مثلا $a, b, d, g, h, i, j, f, e, c, a$

ب) وجود ندارد. دقت کنید که در این گراف برای اینکه رئوس a, c و e را ببینیم، باید از دو یالی که این رئوس روی آنها قرار دارند، گذر کنیم. به عبارتی نیاز است تا تمامی یال‌ها در دور همیلتونی پیمایش شوند که این باعث می‌شود رئوس d و b را دوبار ببینیم. نتیجتا این گراف دور همیلتونی ندارد.

ج) وجود ندارد. فرض کنید دور همیلتونی وجود داشته باشد. یکی از رئوس d, f, n, l که نقطه شروع دور نیست را در نظر بگیرید. بدون کم شدن از کلیت مسئله فرض کنید این راس d باشد. دو حالت برای راس d در دور همیلتونی وجود دارد. از هر دو راس h و e می‌توان به آن رسید. فرض کنید از h به راس d برویم. (حالت e به d نیز متقارن همین حالت است). در گام بعدی باید از d به e برویم. حال اگر از e به b برویم، جلوتر هنگامی که f را ببینیم مجبور هستیم از e بگذریم. از طرفی اگر قبل‌تر f را دیده باشیم یعنی e را نیز دیده‌ایم پس باز به تناقض می‌خوریم. پس مجبور هستیم از e به f و سپس به j برویم. باز به طریق مشابه باید از j به n و سپس m برویم. بار دیگر باید از m به l و سپس h برویم. پس به تناقض می‌رسیم و نمی‌توان دور همیلتونی در این گراف پیدا کرد.

سؤال ۲.

نشان دهید چندجمله‌ای رنگی دور به طول n برابر است با:

$$P(C_n, k) = (k-۱)^n + (-۱)^n(k-۱)$$

پاسخ .

قبل از شروع اثبات، چندجمله‌ای رنگی گراف مسیر P_n را محاسبه می‌کنیم. فرض کنید k رنگ داریم، از راس اول مسیر شروع می‌کنیم و برای اولین راس k رنگ داریم، برای راس دوم $k-۱$ حالت، برای راس سوم می‌توان از رنگ راس اول نیز استفاده کرد، بنابراین برای این راس نیز $k-۱$ حالت داریم، به همین صورت برای باقی رئوس نیز $k-۱$ حالت خواهیم داشت.

$$P(P_n, k) = k(k-۱)^{n-۱}$$

حال به کمک استقرا روی تعداد رئوس حکم را اثبات می‌کنیم:

پایه استقرا: واضح است که یک دور حداقل ۳ راس دارد، پس پایه استقرا $n = ۳$ می‌باشد. می‌خواهیم $C_۳$ را با k رنگ، رنگ‌آمیزی کنیم. برای راس اول k حالت و برای راس دوم که با راس اول مجاور است $k-۱$ حالت و برای راس سوم که با دو راس دیگر مجاور است $k-۲$ حالت داریم. بنابراین خواهیم‌داشت:

$$P(C_۳, k) = k(k-۱)(k-۲) = k^۳ - ۳k^۲ + ۲k = (k-۱)^۳ + (-۱)^۳(k-۱)$$

پس پایه استقرا برقرار است.

فرض استقرا: برای گراف C_n داریم:

$$P(C_n, k) = (k-1)^n + (-1)^n(k-1)$$

اثبات حکم: از قضیه‌ی تجزیه‌ی چندجمله‌ای رنگی می‌دانیم:

$$P(C_{n+1}, k) = P(C_{n+1} - e, k) - P(C_{n+1}/e, k) \qquad (I)$$

می‌دانیم گراف $C_{n+1} - e$ با گراف P_{n+1} یک‌ریخت می‌باشد، بنابراین داریم:

$$P(C_{n+1} - e, k) = k(k-1)^n \qquad (II)$$

همچنین گراف C_{n+1}/e نیز با گراف C_n یک‌ریخت می‌باشد، بنابراین طبق فرض استقرا داریم:

$$P(C_{n+1}/e, k) = P(C_n, k) = (k-1)^n + (-1)^n(k-1) \qquad (III)$$

حال با جایگذاری روابط (II) و (III) در رابطه (I) داریم:

$$P(C_{n+1}, k) = k(k-1)^n - (k-1)^n - (-1)^n(k-1) = (k-1)^n(k-1) - (-1)^n(k-1) = (k-1)^{n+1} + (-1)^{n+1}(k-1)$$

سؤال ۳.

فرض کنید G گرافی اویلری و نامسطح است که با حذف هر یک از یال‌هایش مسطح می‌شود. اگر e تعداد یال‌ها و v تعداد رئوس این گراف باشد، ثابت کنید: $e - v = 5$

پاسخ .

گراف هم‌ریخت با $K_{3,3}$ یا K_5 را "خوشتیپ" می‌نامیم.

طبق قضیه کوراتوفسکی، G دارای حداقل یک زیرگراف خوشتیپ مثل H است. اگر H تمام یال های G را در بر نگیرد، گراف حاصل از حذف یکی از یال‌های خارج از H همچنان نامسطح می‌ماند؛ پس H تمام یال های گراف اویلری و در نتیجه همبند G را در بر می گیرد بنابراین داریم $H = G$ پس خود G خوشتیپ است.

از طرفی گراف‌های هم‌ریخت با $K_{3,3}$ حتما شامل ۶ راس درجه ۳ موجود در آن هستند (چون عملیات زیربخش مقدماتی فقط رئوس درجه ۲ به گراف اضافه می کند) اما G اویلری است و درجه تمام رئوس آن زوج است پس نمی‌تواند هم‌ریخت $K_{3,3}$ باشد.

برای K_5 داریم $e - v = 10 - 5 = 5$ و هر عمل زیربخش مقدماتی دقیقا یک راس و یک یال به گراف اضافه می کند. پس این رابطه برای G که هم‌ریخت K_5 است نیز برقرار است.

سؤال ۴.

نشان دهید که در گراف مسطح، رأسی وجود دارد که در حداکثر ۵ یال حضور دارد.

پاسخ .

درستی این موضوع را با برهان خلف اثبات می کنیم. فرض کنید حکم برقرار نباشد. در این صورت خواهیم داشت:

$e \geq \frac{6*v}{2} \rightarrow e \geq 3*v > 3*v - 6$

در این توضیحات، e نشان‌دهنده تعداد یالها و v نشان‌دهنده تعداد رأسها است. پس داریم: $e > ۳ * v - ۶$، ولی می‌دانستیم که در گراف مسطح باید داشته باشیم: $e \leq ۳ * v - ۶$. از این تناقض نتیجه می‌گیریم که فرض خلف اشتباه بوده و درستی حکم نتیجه می‌شود.

سؤال ۵.

ابرمکعب n بعدی Q_n، گراف ساده‌ای است که مجموعه رئوس آن $\{(x_۱, x_۲, ..., x_n) | x_i \in \{۰, ۱\}\}$. دو رأس در این گراف مجاور هستند اگر و تنها اگر دقیقا در $n - ۱$ مختصات یکسان باشند ($n - ۱$ عدد از x_i های آن‌ها با هم برابر باشد) ثابت کنید برای $n > ۲$، Q_n دور همیلتونی دارد.

پاسخ .

با استفاده از استقرا اثبات می‌کنیم.

پایه استقرا: مکعب دو بعدی دارای دور همیلتونی است.

$Q_۱ = C_{۲,۱} = (n_۰, ..., n_j)$،

فرض استقرا: فرض میکنیم در Q_k دور همیلتنی وجود دارد (حکم برای $n = k$ برقرار است).

حکم استقرا: $Q_{k+۱}$ دور همیلتنی دارد (حکم برای $n = k + ۱$ برقرار است).

اثبات: فرض می‌کنیم $C_{k,۱} = (u_۰, ..., u_j)$ و $C_{k,۲} = (v_۰, ..., v_j)$ ، حال با $C_{k,۱}$ و $C_{k,۲}$ یک ابرمکعب می‌سازیم، به این صورت که از رأس $u_۰$ به u_j می‌رویم، سپس از u_j به v_j و بعد از آن $Q_{k,۲}$ را از v_j به $v_۰$ می‌پیماییم و در نهایت نیز $v_۰$ را به $u_۰$ وصل می‌کنیم. با این کار یک ابرمکعب Q_k و دور همیلتنی ایجاد می‌شود. حال اگر حالت پایه را در نظر بگیریم و به طور مشابه مراحل بالا را برای اضافه کردن $C_{۲,۱}$ به $C_{k,۱}$ و $C_{k,۲}$ انجام دهیم، ابرمکعب $Q_{k+۱}$ با دور همیلتنی ایجاد می‌شود. در نتیجه برای $n \geq ۲$ ، Q_n دارای دور همیلتنی است.

سؤال ۶.

برای گراف G داریم: $\Delta(G) \leq ۱۴۰۱$ نشان دهید یال‌های G را می‌توان با ۱۱ رنگ طوری رنگ کرد که زیرگراف مشخص شده توسط هر رنگ دو بخشی باشد..

پاسخ .

روشی ارائه می‌کنیم که به کمک آن بتوان گراف را طوری رنگ کرد که هر رنگ یک زیرگراف دوبخشی را مشخص کند:

- رئوش گراف را به صورت تصادفی به دو مجموعه A و B افراز می‌کنیم. هر رأس v تعدادی یال خواهد داشت که رأسی که به سر دیگر آن وصل است داخل مجموعه‌ای قرار دارد که v عضو آن است. این یال‌ها را یال داخلی می‌نامیم که در واقع بین دو مجموعه A و B می‌باشد.
- اگر تعداد یال‌های داخلی یک رأس از یال‌های خارجی آن بیشتر بود، مجموعه‌ی آن را تغییر می‌دهیم. یکی یکی رأس‌ها را بررسی میکنیم و این مرحله را برای آن‌ها اجرا می‌کنیم. چون یال‌های وسطی در حال افزایشند، به نقطه‌ای خواهیم رسید که یال‌های خارجی همه رئوس از یال‌های داخلی آن‌ها بیشتر است، پس الگوریتم پایان‌پذیر خواهد بود.
- تمام یال‌های وسطی را به یک رنگ در می‌آوریم. چون در مرحله دوم مطمئن شدیم بیشتر یال‌های متصل به یک رأس جزو یال‌های وسطی قرار می‌گیرد با رنگ‌آمیزی این یال‌ها حداقل نصف درجات رئوس گراف رنگ می‌شود.

پس با اجرای این روش هر بار نصف درجات باقی‌مانده‌ی(رنگ نشده) رئوس آنچنان که مدنظرمان است رنگ می‌شوند و باید روش را برای نصفه‌ی دیگر دوباره اجرا کنیم در نتیجه با توجه به اینکه روش پایان‌پذیر است، با اجرای این روش به تعداد حداکثر $\lceil log(\Delta(G)) \rceil$ بار تمام یال‌ها طوری رنگ می‌شوند که هر رنگ، زیرگرافی دوبخشی مشخص کند. چون $۱۱ \leq \lceil log(۱۴۰۱) \rceil$ است، پس با ۱۱ رنگ می‌توانیم رنگ‌آمیزی مورد نظرمان را انجام دهیم.