



## ریاضیات گسسته

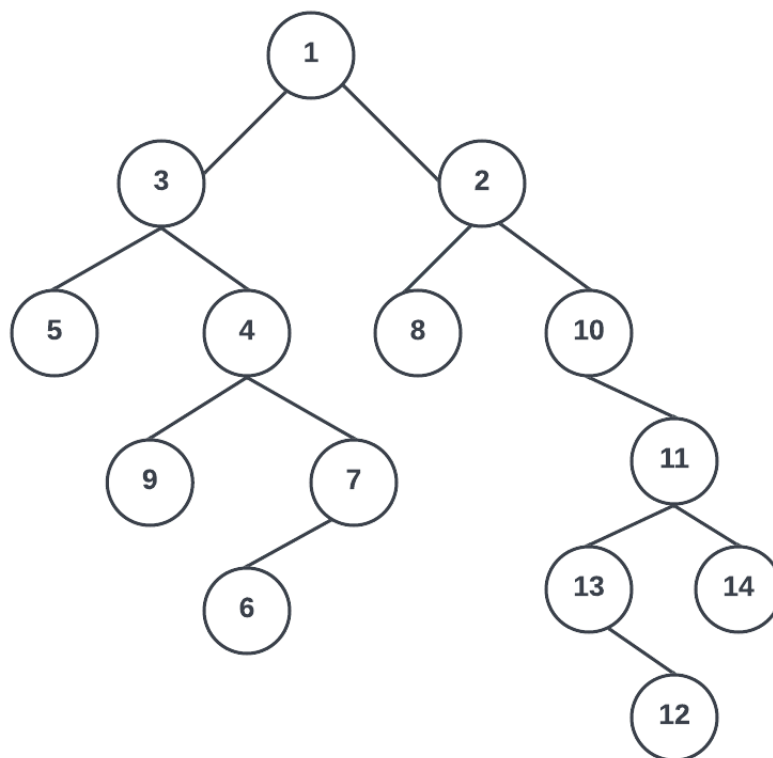
تمرین یازدهم - درخت

علی کرامتی

تاریخ تحویل ۱۴۰۱/۰۳/۱۵

### سؤال ۱.

الف) برای درخت زیر پیمایش‌های پیش‌ترتیب، میان‌ترتیب و پس‌ترتیب را بنویسید.



ب) از درختی تنها پیمایش‌های پیش‌ترتیب و میان‌ترتیب آن باقی مانده است! آیا می‌توانید با استفاده از این پیمایش‌ها درخت را پیدا کنید و پیمایش پس‌ترتیب آن را بنویسید؟ آیا درخت پیدا شده یکتا است؟ اگر یکتا است آنرا ثابت کنید و در غیر این صورت حداقل دو حالت ممکن را ترسیم کنید (پیمایش‌ها را از راست به چپ بخوانید).

- پیش‌ترتیب: ۱، ۳، ۵، ۲، ۸، ۶، ۷، ۴

- میان‌ترتیب: ۹، ۵، ۳، ۱، ۶، ۸، ۷، ۲، ۴

## سؤال ۲.

درخت  $T$  را داریم که در آن هیچ راسی درجه ۲ ندارد. ثابت کنید تعداد راس‌های برگ بیشتر از تعداد راس‌های غیربرگ می‌باشد.

## سؤال ۳.

راس‌های یک درخت را به دو دسته تقسیم کرده ایم، به طوری که یالی بین راس‌هایی که در دسته‌ی مشابه هستند وجود ندارد. ثابت کنید در دسته‌ای که تعداد راس بیشتری دارد، حداقل یک برگ وجود دارد. (فرض کنید تعداد راس‌های دسته‌ها متفاوت است)

## سؤال ۴.

اگر  $u$  یک رأس از درخت  $T$  با  $n$  رأس باشد، نشان دهید مجموع فاصله  $u$  از بقیه رئوس کوچکتر یا مساوی  $\binom{n}{2}$  است.

$$\sum d(u, v) \leq \binom{n}{2}$$

## سؤال ۵.

گراف  $G$  گرافی همبند و  $n$  راسی است.  $T$  را مجموعه‌ی همه‌ی درخت‌های پوشا در این گراف در نظر می‌گیریم. حال گراف  $G_2$  را به این صورت تشکیل می‌دهیم که مجموعه رئوس آن را  $T$  در نظر می‌گیریم (هر راس در آن نماینده‌ی یکی از درخت‌های پوشا در مجموعه‌ی  $T$  است). در گراف  $G_2$ ، دو راس که نماینده‌ی دو درخت پوشا همانند  $T_1$  و  $T_2$  هستند، در صورتی به یک دیگر یال دارند که تنها در یک یال اختلاف داشته باشند. ثابت کنید گراف  $G_2$  همبند است.

## سؤال ۶.

درختی  $n$  راسی داریم که تمام رئوس آن را با دو رنگ سیاه و سفید رنگ کرده‌ایم و هیچ دو راس مجاور هم‌رنگ نیستند. همچنین تعداد رئوس سفید آن همواره از تعداد رئوس سیاه بیشتر است. ثابت کنید رئوس سفید این درخت را می‌توان با اعداد  $0, 1, \dots, n-1$  به گونه‌ای مقداردهی کرد که مجموع اعداد رئوس مجاور تمام رئوس سیاه صفر شود به شرط اینکه حداقل یک مقدار غیر صفر استفاده شده باشد.