ریاضیات گسسته

پاسخنامه تمرین اول - ترکیبیات مقدماتی

محمد فرهی

سؤال ۱.

فرض کنید S مجموعه ای با ۱۰ عضو باشد. چند دوتایی مرتب (A, B) می توان داشت، به طوری که داشته باشیم $A \subseteq B \subset S$ و $A \neq \varnothing$.

پاسخ .

راه حل کلی به این صورت است که ابتدا سه زیر مجموعه مجزا A و $B - A$ و $S - B$ که با هم هیچ اشتراکی ندارند در نظر می‌گیریم. در این صورت (حداکثر) سه انتخاب (با توجه به شرایط و قیدها) برای قرار دادن هر عضو S در این زیر مجموعه‌ها داریم. به این ترتیب برای به دست آوردن کل حالات از اصل ضرب و اصل متمم استفاده می‌کنیم.

ابتدا تعداد دوتایی‌های مرتب را با این شرایط که $A \subseteq B \subseteq S$ به دست می‌آوریم. باتوجه به صحبت های بالا داریم : (منظور از $total$ در اینجا این است که هیچ قیدی به جز $A \subseteq B \subseteq S$ نداریم).

$$ANS_{total} = ۳^{۱۰}$$

حال تعداد دوتایی‌هایی که شرط $A \subseteq B = S$ را برآورده می‌کند را به دست می‌آوریم. در این حالت باید هیچ عضوی در زیر مجموعه $S - B$ قرار نگیرد. در نتیجه تعداد انتخاب‌ها برای هر عضو به ۲ انتخاب کاهش می‌یابد:

$$ANS_{S=B} = ۲^{۱۰}$$

تعداد دوتایی‌هایی که در آنها $A = \varnothing$ و $A \subseteq B \subseteq S$ نیز همانند حالت قبل به دست می آید (باید هیچ عضوی در زیر مجموعه A قرار نگیرد) :

$$ANS_{A=\varnothing} = ۲^{۱۰}$$

تعداد دوتایی‌های اشتراک دوحالت قبلی نیز برابر ۱ است. چون برابر بودن S با B و تهی بودن A یعنی هر عضو فقط یک اتخاب دارد (انتخاب زیرمجوعه $B - A$):

$$ANS_{S=B \cap A=\varnothing} = ۱$$

طبق اصل متمم، برای جواب نهایی که قیدهای $(A \subseteq B \subset S)$ و $(A \neq \varnothing)$ را برآورده سازد داریم :

$$ANS_{total} - (ANS_{S=B} + ANS_{A=\varnothing} - ANS_{S=B \cap A=\varnothing}) = ۳^{۱۰} - ۲^{۱۰} - ۲^{۱۰} + ۱ = ۵۷۰۰۲$$

سؤال ۲.

چند جایگشت از حروف کلمه $natornitelani$ وجود دارد به طوری که:

الف) حروف صدادار و بی‌صدا به صورت یکی درمیان قرار گرفته باشند.

ب) حرف اول صدادار و حرف آخر بی‌صدا باشد.

پ) هر حرف n حداقل با یک حرف a مجاور باشد.

ج) هر حرف t دقیقا با یک حرف a مجاور باشد.

پاسخ .

$$natornitelani : \{a, a\}, e, \{i, i\}, l, \{n, n, n\}, o, r, \{t, t\}$$

الف) کلمهٔ $natornitelani$، دارای ۶ حرف صدادار و ۷ حرف بی‌صدا است. پس تنها در صورتی حروف صدادار و بی‌صدا به صورت یکی درمیان قرار می‌گیرند که حروف بی‌صدا در جایگاه‌های اول و سوم و … و حروف صدادار در جایگاه‌های دوم و چهارم و … قرار بگیرند:

$$\overline{consonant}\ \overline{vowel} \cdots \overline{consonant}\ \overline{vowel}\ \overline{consonant}$$

حروف بی‌صدا یعنی $l, \{n, n, n\}, r, \{t, t\}$ را به $\frac{۷!}{۲!۳!}$ طریق و حروف صدادار یعنی $\{a, a\}, e, \{i, i\}, o$ را به $\frac{۶!}{۲!۲!}$ طریق می‌توان در جایگاه‌ها قرار داد. در نتیجه پاسخ برابر است با:

$$\frac{۷!}{۲!۳!} \times \frac{۶!}{۲!۲!}$$

ب) همانطور که دیدیم، کلمهٔ $natornitelani$، ۱۳ حرف دارد که ۷ تا از آن‌ها بی‌صدا و ۶ تا از آن‌ها صدادار هستند. برای تشکیل جایگشتی که حرف اول صدادار و حرف آخر بی‌صدا باشد، ۱۳ جایگاه در نظر می‌گیریم. برای حروف بی‌صدا ابتدا ۶ جایگاه از ۱۱ جایگاهِ دوم تا دوازدهم را انتخاب می‌کنیم و جایگشت حروف را محاسبه می‌کنیم. پس تعداد جایگشت حروف بی‌صدا برابر است با: $\frac{۷!}{۳!۲!} \times \binom{۱۱}{۶}$. حال حروف صدادار را در جایگاه اول و ۶ جایگاه باقی‌مانده قرار می‌دهیم. پس جواب نهایی برابر است با:

$$\binom{۱۱}{۶} \times \frac{۷!}{۳!۲!} \times \frac{۶!}{۲!۲!}$$

پ) بسته‌های an یا na و nan را در نظر می‌گیریم. تعداد جایگشت‌های این دو بسته با سایر حروف برابر است با:

$$i, t, e, r, t, i, o, l, nan, \frac{an}{na}$$

$$\frac{۱۰!}{۲!۲!} \times ۲$$

باید دقت کنیم که عبارت $nanan$ در جایگشت بالا دو بار محاسبه شده است. (یک‌بار در حالتی که na قبل از nan قرار بگیرد و یک‌بار وقتی an بعد از nan قرار بگیرد) پس باید تعداد جایگشت‌های $nanan$ را از مقدار محاسبه شده در بالا کم کنیم:

$$i, t, e, r, t, i, o, l, nanan$$

$$\frac{۹!}{۲!۲!}$$

پس پاسخ نهایی برابر است با:

$$\frac{۱۰!}{۲!۲!} \times ۲ - \frac{۹!}{۲!۲!}$$

ج) می‌خواهیم هر حرف t دقیقا با یک حرف a مجاور باشد پس ابتدا ۲ بسته at در نظر می‌گیریم. حال تعداد کل جایگشت‌های عناصر با استفاده از فرمول جایگشت تکراری برابر $\frac{۱۱!}{۲!۲!۳!} \times ۲! \times ۲!$ خواهد بود. با کمی دقت متوجه می‌شویم که جایگشت‌های شامل عبارات $atat$ و $tata$ هم در فرمول بالا شمرده شده‌اند که در آن‌ها حرف t با ۲ حرف a مجاور است. پس تعداد کل جایگشت‌های شامل $tata$ و $atat$ را می‌یابیم:

$$\frac{atat}{tata}, i, n, e, r, n, i, o, n, l$$

$$\frac{۱۰!}{۲!۳!} \times ۲$$

همچنین حالتی که یک tat جدا از یک a دیگر داشته باشیم نیز مورد قبول خواهد بود. برای شمارش تعداد جایگشت‌های این حالت ابتدا ۹ عنصر را با استفاده از فرمول جایگشت تکراری می‌چینیم و سپس از بین ۱۰ جایگاه به وجود آمده، ۲ جایگاه را برای قرارگیری tat و a انتخاب می‌کنیم. پس پاسخ نهایی برابر است با:

$$\frac{۱۱!}{۲!۲!۳!} \times ۲! \times ۲! - \frac{۱۰!}{۲!۳!} \times ۲ + \frac{۹!}{۲!۳!} \times P(۱۰, ۲)$$

سؤال ۳.

لئون به دهکده‌ای در اسپانیا سفر کرده است. او در آنجا تصمیم گرفته است که به خرید ادکلن بپردازد. در این دهکده ۸ ادکلن متفاوت وجود دارد. ادکلن‌های ۱ تا ۷ هرکدام ۴Lei قیمت دارند. ادکلن شماره ۸ که گران ترین ادکلن این دهکده است ۷Lei قیمت دارد.

لئون در کل ۶۴Lei پول دارد و از آنجا که راه بسیار زیادی را آمده است، می‌خواهد تمام پول خود را خرج کند. لئون به چند حالت می‌تواند پول خود را خرج کند؟

پاسخ .

برای حل این سوال از معادله سیاله کمک می‌گیریم. از آنجا که قیمت یکی از عطرها با بقیه برابر نیست و لئون می‌خواهد که همه پول خود را خرج کند، حتما باید آن عطر را از معادله خارج کنیم. حال چون که عطر شماره ۸ قیمتی برابر ۷ دارد و باقی عطرها و پول کل لئون همگی مضرب ۴ اند، باید با مضربی از ۴ از عطر شماره ۸ خرید کند تا باقی پول لئون مضربی از ۴ باقی بماند. در این صورت حالات ما برابر خواهند بود با ۰،۴ و ۸ عدد از عطر شماره ۸! حال حالت بندی می‌کنیم و مسئله را در هر حالت حل می‌کنیم:

۱. ۰ عدد از ادکلن شماره ۸ بخریم:

در این صورت معادله سیاله ما برای باقی ادکلن های به صورت زیر در می‌اید:

$$۴(x_۱ + x_۲ + ... + x_۷) = ۶۴ \to x_۱ + x_۲ + ... + x_۷ = ۱۶$$

۲. ۴ عدد از ادکلن شماره ۸ بخریم:

در این صورت معادله سیاله ما به صورت زیر می‌شود:

$$۴(x_۱ + x_۲ + ... + x_۷) = ۶۴ - ۴ * ۷ \to x_۱ + x_۲ + ... + x_۷ = ۹$$

۳. ۸ عدد از ادکلن شماره ۸ بخریم:

در این صورت معادله سیاله به صورت زیر می‌شود:

$$۴(x_۱ + x_۲ + ... + x_۷) = ۶۴ - ۸ * ۷ \to x_۱ + x_۲ + ... + x_۷ = ۲$$

حل همگی این معادله سیاله‌ها به آسانی با توجه به روش حل معادله سیاله خطی ممکن است و جواب نهایی مسئله برابر است با:

$$\binom{۱۶+۷-۱}{۷-۱} + \binom{۹+۷-۱}{۷-۱} + \binom{۲+۷-۱}{۷-۱}$$

سؤال ۴.

به چند طریق می‌توان دو مربع ۴ × ۴ از یک جدول ۱۰ × ۱۰ جدا کرد به طوری که مربع‌ها از روی خط‌های جدول بریده شوند و هیچ خانه‌ی مشترکی با هم نداشته باشند.

پاسخ .

۵ حالت در نظر می‌گیریم:

۱. ضلع بالایی دو مربع حداقل ۴ واحد اختلاف داشته باشند: در این صورت به $۶ = ۱+۲+۳$ حالت می‌توان ضلع بالایی مربع‌ها را تعیین کرد و برای تعیین اضلاع عمودی نیز به ازای هر مربع ۷ حالت داریم. بنابراین تعداد روش‌ها برابر می‌شود با $۲۹۴ = (۱+۲+۳)\times۷\times۷$

۲. ضلع بالایی دو مربع ۳ واحد اختلاف داشته باشند: در این صورت برای تعیین ضلع بالایی مربع‌ها ۴ حالت داریم و برای تعیین اضلاع عمودی نیز $۱۲ = ۳+۲+۱+۱+۲+۳$ حالت داریم. بنابراین تعداد روش‌ها برابر می‌شود با: $۴۸ = (۳+۲+۱+۱+۲+۳)\times۴$
برای محاسبه تعداد حالت‌های این بخش در واقع ابتدا مکان ضلع عمودی چپ مربع اول را مشخص می‌کنیم و سپس تعداد حالت‌هایی که مربع دوم را می‌توانیم به درستی از جدول انتخاب کنیم را به دست می‌آوریم.

۳. ضلع بالایی دو مربع ۲ واحد اختلاف داشته باشند: در این صورت برای تعیین ضلع بالایی مربع‌ها ۵ حالت داریم و برای تعیین اضلاع عمودی نیز $۱۲ = ۳+۲+۱+۱+۲+۳$ حالت داریم. بنابراین تعداد روش‌ها برابر می‌شود با: $۶۰ = (۳+۲+۱+۱+۲+۳)\times۵$

۴. ضلع بالایی دو مربع ۱ واحد اختلاف داشته باشند: در این صورت برای تعیین ضلع بالایی مربع‌ها ۶ حالت داریم و برای تعیین اضلاع عمودی نیز $۱۲ = ۳+۲+۱+۱+۲+۳$ حالت داریم. بنابراین تعداد روش‌ها برابر می‌شود با: $۷۲ = (۳+۲+۱+۱+۲+۳)\times۶$

۵. ضلع بالایی دو مربع روی یک خط باشند: در این صورت برای تعیین ضلع بالایی مربع‌ها ۷ حالت داریم و برای تعیین اضلاع عمودی نیز $۶ = ۱+۲+۳$ حالت داریم. بنابراین تعداد روش‌ها برابر می‌شود با: $۴۲ = (۱+۲+۳)\times۷$

بنابراین تعداد کل حالات برابر می‌شود با:

$$۲۹۴+۴۸+۶۰+۷۲+۴۲ = ۵۱۶$$

سؤال ۵.

در یک مسابقه فوتبال، نفرات هر تیم در داخل زمین باید ۵ نفر باشند(به جز دروازه‌بان). به طور دقیق تر هر تیم در داخل زمین باید ۲ مدافع، ۱ میانه، و ۲ مهاجم داشته باشد. یک تیم فوتبال شامل ۱۳ نفر است که از آن‌ها، ۱ نفر در پست دروازه‌بان، ۵ نفر در پست دفاع، ۳ نفر در پست میانه و ۴ نفر در پست مهاجم تخصص دارند. افرادی که در پست میانه تخصص دارند می‌توانند در پست مهاجم نیز بازی کنند. همچنین ۲ نفر از افراد که در دفاع تخصص دارند و یک نفر از افراد مهاجم در پنالتی زدن ماهر هستند. از طرفی یکی از افراد که تخصص بازی در پست میانه را دارد، با آن فردی از مهاجم‌ها که توانایی پنالتی زدن دارد، مشکل دارد و نمی‌تواند زمانی که او در پست مهاجم حضور دارد، خودش هم در پست مهاجم بازی کند. با این شرایط چند چینش مختلف برای ۵ نفر داخل زمین امکان‌پذیر است به طوری که حداقل یک پنالتی‌زن در ترکیب ۵ نفره وجود داشته باشد.

پاسخ .

بر اساس اینکه حداقل یک نفر پنالتی‌زن در پست دفاع داشته باشیم، حالت بندی می‌کنیم :

الف) هیچ یک از افراد مدافع پنالتی‌زن نباشند:

در این صورت مهاجم پنالتی‌زن در ترکیب حضور دارد. درنتیجه برای پست دیگر مهاجم دو انتخاب داریم. یا باید از ۳ مهاجم دیگر انتخاب شود یا باید از دو فرد میانه‌ای که با مهاجم پنالتی‌زن مشکلی ندارند انتخاب شود. تعداد افرادی که می‌توان از بین آن‌ها برای خط میانی انتخاب کرد نیز با توجه به دو حالت بیان‌شده مشخص می‌شود:

$$ans_۱ = \binom{۵-۲}{۲} \times ۱ \times (\binom{۳}{۱} \times \binom{۳}{۱} + \binom{۲}{۱} \times \binom{۲}{۱}) = ۳۹$$

ب) حداقل یک نفر از مدافع‌ها پنالتی‌زن باشد: در این صورت اصراری بر انتخاب مهاجم پنالتی‌زن نیست. برای انتخاب دو پست مهاجم سه حالت داریم. ۱- همه از افراد مهاجم انتخاب شوند؛ ۲- همه از افراد خط میانی انتخاب شوند؛ ۳- یکی از مهاجم‌ها و یکی از خط میانی انتخاب شود. در حالت سوم با اصل متمم، یک حالت خاص که دو فردی که با هم مشکل دارند در پست مهاجم باشند، را جدا می‌کنیم.

$$ans_{۲۱} = (\binom{۵}{۲} - \binom{۳}{۲}) \times \binom{۴}{۲} \times \binom{۳}{۲} = ۱۲۶$$

$$ans_{۲۲} = (\binom{۵}{۲} - \binom{۳}{۲}) \times \binom{۳}{۲} \times \binom{۳-۲}{۱} = ۲۱$$

$$ans_{۲۳} = (\binom{۵}{۲} - \binom{۳}{۲}) \times (\binom{۴}{۱} \times \binom{۳}{۱} - ۱) \times \binom{۳-۱}{۱} = ۱۵۴$$

$$ans_۲ = ans_{۲۱} + ans_{۲۲} + ans_{۲۳} = ۳۰۱$$

جواب نهایی طبق اصل جمع برابر:

$$ans = ans_۱ + ans_۲ = ۳۴۰$$

سؤال ۶.

تعداد جایگشت‌های دوری رشته‌ی $aaaabbbbccccdddd$ را به دست آورید.

پاسخ .

تعداد حروف ۱۶ حرف است. پس رشته‌ای که با حروف داده شده ساخته می‌شود دارای دور تناوب t است که مقسوم علیهی از ۱۶ می‌باشد. پس حالت‌های ممکن $t = ۱, ۲, ۴, ۸, ۱۶$ است که آنها را بررسی می‌کنیم.

حالت $t = ۱$: در این حالت رشته‌هایی مانند $xxxxxxxxxxxxxxxx$ مد نظر است که امکان پذیر نیست چرا که ۱۶ حرف یکسان نداریم.

حالت $t = ۲$: در این حالت رشته‌هایی مانند $xyxyxyxyxyxyxyxy$ مد نظر است که امکان پذیر نیست چرا که ۸ حرف یکسان نداریم.

حالت $t = ۴$: در این حالت رشته‌هایی مانند $xywzxywzxywzxywz$ مد نظر است که تعداد حالات ممکن برابر تعداد روش‌های تناظر دادن a, b, c, d به x, y, w, z است. چنین جایگشتی روی دایره با چرخش ۴ حرف بر روی خودش قرار می‌گیرد و یکسان می‌شود. در نتیجه تعداد جایگشت‌های دوری این حالت برابر است با:

$$\frac{۴!}{۴} = ۳! = ۶$$

حالت $t = ۸$: در این حالت رشته‌هایی مانند $xywzpqvuxywzpqvu$ مد نظر است که تعداد حالات ممکن برابر تعداد جایگشت‌های خطی ۲ تا از هرکدام از حروف a, b, c, d است (چرا که نیمه دوم معادل نیمه اول است، توجه شود که باید حالاتی که $t = ۴$ است را حذف کنیم). چنین جایگشتی روی دایره با چرخش ۸ حرف بر روی خودش قرار می‌گیرد و یکسان می‌شود. در نتیجه تعداد جایگشت های دوری این حالت برابر است با:

$$\frac{\frac{۸!}{۲!۲!۲!۲!} - ۴!}{۸} = \frac{۲۴۹۶}{۸} = ۳۱۲$$

حالت $t = ۱۶$: از میان تمام جایگشت های ممکن، جایگشت‌هایی که جزو هیچ یک از این حالات نبوده‌اند در این دسته قرار دارند. در نتیجه تعداد جایگشت‌های دوری این حالت برابر است با:

$$\frac{\frac{۱۶!}{۴!۴!۴!۴!} - ((\frac{۸!}{۲!۲!۲!۲!} - ۴!) + ۴!)}{۱۶} = \frac{۶۳۰۶۳۰۰۰ - ۲۵۲۰}{۱۶} = \frac{۶۳۰۶۰۴۸۰}{۱۶}$$

در نتیجه کل جایگشت‌های دوری ممکن برابر است با:

$$۶ + ۳۱۲ + ۳۹۴۱۲۸۰ = ۳۹۴۱۵۹۸$$