



ریاضیات گسسته

تمرین چهارم - ناوردایی

زینب پیش‌بین

تاریخ تحویل ۱۴۰۱/۰۱/۱۲

سؤال ۱.

چند علامت $+$ و $-$ روی یک تخته نوشته شده اند. می توانید دو علامت را پاک کنید و در عوض، اگر برابر بودند، $+$ و اگر نابرابر بودند، $-$ را بنویسید. ثابت کنید آخرین علامت روی تخته به ترتیب پاک کردن بستگی ندارد.

سؤال ۲.

یک اژدها ۱۴۰۰ سر دارد. یک شوالیه می تواند با یک ضربه شمشیر ۱۱، ۱۷، ۵ یا ۳۰ سر از آن را ببرد و در عوض در هر حالت به ترتیب ۱۷، ۱۴، ۲، ۲۴ سر جدید روی شانه های اژدها رشد می کند. اگر همه سرها قطع شوند، اژدها می میرد. آیا می توان اژدها را کشت؟ اگر می شود مثالی ارائه دهید در غیر این صورت اثبات کنید اژدها نامیراست.

سؤال ۳.

۷ راس یک مکعب با ۰ و یک راس دیگر ۱ نشانه گذاری شده است. می توانید به طور متوالی یک یال را انتخاب کنید، و ۱ واحد به عدد های دو سر آن بیفزایید. آیا می توان به ۸ عدد برابر رسید؟ اگر می شود مثالی ارائه دهید و در غیر این صورت اثبات کنید همچنین حالتی وجود ندارد.

سؤال ۴.

یارا که از ریاضی دانان پراوازه شهر فنلاند هست، در یک بعدازظهر کسل کننده، بازی زیر را برای خود طرح می کند. او طی سیستمی، تمام اعداد طبیعی را به رنگ های آبی یا قرمز رنگ می زند. تنها شرط سیستم آن است که اگر دو عدد طبیعی a و b ناهم رنگ باشند، جمع آنها $(a + b)$ آبی و ضرب آنها $(a \times b)$ قرمز خواهد بود. حال یارا شما را به چالش می کشد تا رنگ عدد حاصل از ضرب دو عدد طبیعی قرمز را بدست آورید. او همچنین از شما می خواهد تا تمامی چنین اعدادی را پیدا کنید. (یعنی رابطه بین اعدادی که حاصل ضرب دو عدد قرمز هستند را بنویسید).

سؤال ۵.

n نقطه آبی و n نقطه قرمز در صفحه داریم به طوری که هیچ ۳ تایی هم خط نیستند. آیا می توان با n پاره خط، آبی ها و قرمز ها را متناظرا به هم وصل کرد، به طوری که n پاره خط هیچ اشتراکی نداشته باشند و یکدیگر را قطع نکنند؟ ثابت کنید.

سؤال ۶.

در خانه های جدول $n * n$ اعداد $1, 2, \dots, n$ هر کدام n بار نوشته شده اند. ثابت کنید سطری یا ستونی با حداقل $\lceil \sqrt{n} \rceil$ عدد متفاوت وجود دارد.