



ریاضیات گسسته

تمرین دوم - ترکیبیات پیشرفته

محمد مهدی جعفری

تاریخ تحویل ۱۴۰۰/۱۲/۱۳

سؤال ۱.

در چند شماره تلفن ۷ رقمی مانند $d_1d_2d_3d_4d_5d_6d_7$ دنباله $d_1d_2d_3$ حداقل با یکی از دنباله‌های $d_4d_5d_6$ یا $d_5d_6d_7$ برابر است؟ هر d_i برابر هر یک از ۱۰ رقم ۰، ۱، ...، ۸، ۹ می‌تواند باشد.

سؤال ۲.

۱۰۱ عدد طبیعی دور یک دایره نوشته شده است. جمع تمامی این اعداد ۳۰۰ است. ثابت کنید می‌توان دنباله‌ای متوالی از این اعداد انتخاب کرد بطوری که جمع آنها ۲۰۰ باشد.

سؤال ۳.

۱. فرم بسته و ساده شده تابع مولد هر یک از دنباله‌های زیر را بیابید.

الف) $\langle 1, 3, 9, \dots, 3^k, \dots \rangle$

ب) $\langle \frac{1}{1}, \frac{1}{1!}, \frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, \dots \rangle$

ج) $\langle 0, 1, 0, 5, 0, 25, 0, 125, 0, \dots \rangle$

۲. با استفاده از تابع مولد به دست آورید.

به چند طریق می‌توان از بین میوه‌های سیب، پرتقال، شلیل و هلو n میوه انتخاب کنیم به طوری که حداکثر ۳ سیب، به تعداد زوج پرتقال و ۰ یا ۱ عدد شل داشته باشیم. هم‌چنین تعداد هلوها مضربی از ۴ باشد.

سؤال ۴.

هر یک از اتحادهای زیر را با استفاده از روش ترکیباتی (دوگانه‌شماری) اثبات کنید.

$$\binom{n+1}{m} = \binom{n}{m-1} + \binom{n}{m} + \binom{n}{m+1} \quad (\text{الف})$$

$$\sum_{r=1}^n r \cdot \binom{n}{r} = n \cdot 2^{n-1} \quad (\text{ب})$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2 \quad (\text{ج})$$

سؤال ۵.

برنامه تمرین ماهانه یک تیم بسکتبال تنظیم شده است. این تیم در ماه ۳۰ روزه‌ای که در پیش است، قرار است هر روز حداقل یک بازی و در کل ماه حداکثر ۴۵ بازی انجام دهد. بررسی کنید با رعایت شرایط مذکور، به ازای چه m هایی، تیم به هر صورتی که چیده شود، تعدادی روز متوالی وجود دارد که تیم در این روزها دقیقاً m بازی انجام دهد؟

سؤال ۶.

خانه‌های یک صفحه شطرنجی 7×7 با دو رنگ، رنگ آمیزی شده است. ثابت کنید دست کم ۲۱ مستطیل وجود دارد که راس‌های هر یک از آن‌ها در مرکزهای خانه‌های هم‌رنگ واقع شده باشد و ضلع‌های آن‌ها با اضلاع صفحه شطرنجی موازی باشد.