



ریاضیات گسسته

تمرین سوم - منطق

سینا کمالی

تاریخ تحویل ۱۴۰۰/۱۲/۲۰

سؤال ۱.

۱. عبارت زیر را به صورت گزاره منطقی بنویسید و نقیض آن را بیابید.
هر فرد موفق حتما سخت کوش است و دوستان خوبی دارد.
۲. تعاریف دلخواه خود را را توابع استفاده شده در گزاره زیر ارائه دهید و با استفاده از آن یک عبارت فارسی بنویسید که معادل این گزاره باشد.

$$\exists x \in P \quad \forall y \in P : F(x, y) \rightarrow (G(y) \wedge (\exists z : F(y, z)))$$

سؤال ۲.

با استفاده از قوانین استنتاج و ذکر آن‌ها در هر مرحله، ثابت کنید نتیجه‌گیری زیر درست است:
همه‌ی پرتقال‌ها گرد هستند و وجود دارد پرتقالی که ترش باشد. بنابراین بعضی از میوه‌های ترش گرد هستند.

سؤال ۳.

اگر داشته باشیم:

$$p \equiv \text{رستوران رفتن امیر}$$

$$q \equiv \text{پول نداشتن علی}$$

$$s \equiv \text{خواب بودن محمد}$$

$$t \equiv \text{بارانی بودن هوا}$$

آنگاه ثابت کنید که گزاره «امیر به رستوران می رود مگر علی پول نداشتنه باشد و محمد خواب باشد و هوا بارانی باشد.» با گزاره زیر معادل است:

$$\equiv (((p \vee q) \wedge s) \vee ((p \vee q) \wedge p)) \wedge t \vee (((p \vee q) \wedge s) \vee ((p \vee q) \wedge p)) \wedge p$$

سؤال ۴.

درستی گزاره‌های زیر را با استفاده از قوانین هم ارزی اثبات کنید.

$$1. (p \vee (p \wedge q) \vee (p \wedge q \wedge \neg r)) \wedge ((p \wedge r \wedge t) \vee t) \equiv (p \wedge t)$$

$$2. (p \Rightarrow s) \vee (q \Rightarrow s) \equiv (p \wedge q) \Rightarrow s$$

$$3. (p \Rightarrow q) \Rightarrow s \equiv (\neg p \Rightarrow s) \wedge (q \Rightarrow s)$$

سؤال ۵.

دیشب در شهر Yharnam دکتر لودویگ کشته شده است. حال شما مظنونین را پیدا کرده و از هر کدام از آنها بازجویی می‌کنید. وظیفه شما پیدا کردن دروغگوها است. دقت کنید که می‌دانیم، دروغگوها همیشه دروغ می‌گویند. (فرض کنید بی گناهی و راستگویی معادل یکدیگراند. دقت کنید جملاتی که به راست گو یا دروغ گو بودن افراد اشاره نمی‌کنند برای داستان هستند.)

بازجویی ها:

۱. حمید می‌گوید: منو مرتضی مثل داداشیم. او بدون شک راستگو است.
۲. مرتضی می‌گوید: دیروز هاشم با من بود و داشتیم تو مزرعه کار می‌کردیم. او بی گناه و راستگو است.
۳. هاشم می‌گوید: مریم بدون شک دروغگو است. دیشب نزدیک قبرستون دیدمش!
۴. زهرا می‌گوید: اگر من راستگو باشم مریم هم راستگو است. اگر هم من دروغگو باشم مریم هم عین من دروغگو است. به نفع‌تونه به ما دوتا مشکوک نباشید.
۵. امید می‌گوید: من حمید رو دیدم که داشت یواشکی می‌رفت پشت کلیسا. بدون شک دروغگو است! من به راستگو بودن شهرت دارم اینو می‌تونید از هرکسی که می‌خواید پرسید!
۶. شایان می‌گوید: من به امید اعتماد کامل دارم. او راستگو است.
۷. حمید می‌گوید: آها راستی، می‌دونم که شایان و زهرا آب‌شون باهم تو یه جوب نمی‌ره! اینا بدون شک حداقل یکیشون دروغگو است. پیشنهاد می‌کنم با همین تحقیقات رو شروع کنید.

سؤال ۶.

۲۰ نفر دور دایره نشسته‌اند و روی سر هر کدام یک کلاه قرار دارد. هر کلاه یک رنگ مشخص دارد. افراد از تعداد رنگ‌های متفاوت اطلاعی ندارند اما می‌دانند که از هر رنگ حداقل دو کلاه وجود دارد. این افراد بازی زیر را انجام می‌دهند: هر فرد تلاش می‌کند که رنگ کلاه خود را حدس بزند و می‌تواند رنگ کلاه همه به جز خودش را ببیند. در هر مرحله پس از مدتی یک زنگ به صدا در می‌آید و هر کس که رنگ کلاه خود را فهمیده باشد آن را اعلام می‌کند و جمع را ترک می‌کند. رنگی که بیشترین تعداد کلاه را دارد در نظر بگیرید. اگر تعداد کلاه‌های این رنگ را با n نشان دهیم، یک استراتژی ارائه کنید که همه افراد حداکثر پس از زنگ $n - 1$ ام، رنگ کلاه خود را فهمیده باشند.