محمد [illegible] ۸۱۰۱۰۰۸۲ تکلیف ۴ آمار مهندسی استاد [illegible]

۱) الف)

$$P(X < 273) = P\left(\frac{X-280}{8.5} < \frac{273-280}{8.5}\right) = P\left(\frac{X-280}{8.5} < \frac{-7}{8.5}\right)$$

$$F_0\left(\frac{-14}{17}\right) = 1 - F\left(\frac{14}{17}\right) = 1 - F(0.82) = 1 - 0.7939 = \boxed{0.2061}$$

با استفاده از جدول توزیع نرمال std

ب)

$$X \sim Norm(280, 8.5)$$

$$P(276 < X < 284) = P\left(\frac{276-280}{8.5} < \frac{X-280}{8.5} < \frac{284-280}{8.5}\right) \longrightarrow$$

$$P\left(\frac{-4}{8.5} < z < \frac{4}{8.5}\right) = \Phi\left(\frac{4}{8.5}\right) - \Phi\left(\frac{-4}{8.5}\right) = 0.758 - 0.242$$

$$= \boxed{0.516}$$ [redacted]

ج)

$$P(a < X) = 95\% \rightarrow P\left(\frac{a-280}{8.5} < \frac{X-280}{8.5}\right)$$

$$= 1 - F\left(\frac{a-280}{8.5}\right) = 0.95 \Rightarrow F\left(\frac{a-280}{8.5}\right) = 0.05$$

طبق جدول

$$\Rightarrow \frac{a-280}{8.5} = -1.64 \Rightarrow a = 280 - 8.5 \times 1.64$$

$$= \boxed{266} \Rightarrow$$ تاریخ تحویل پروژه را باید تاریخ ۱۴ روز زودتر یعنی ۱۱ شهریور منتقل کند.

۲) توزیع دو جمله‌ای است

$$X \sim Bin(400, 0.6)$$

$$P(X \geq 270) = 1 - P(X < 270)$$

- طبق قضیه دموآور و لاپلاس با توزیع نرمال تقریب می‌زنیم چون که $\underbrace{400 \times 0.4 \times 0.6}_{npq} = 144$ و از ۱۰ بیشتر است

$$P(X < 270) \Rightarrow P\left(\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}} < \frac{270-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) = P\left(z < \frac{270-240}{12}\right).$$

$$= P(z < 2.5) = 0.9938 \Rightarrow P(X \geq 270) = \boxed{0.0062}$$

طبق جدول

۳) الف) طبق جدول: $P(X=1, Y=1) = \boxed{0/2}$

ب) طبق جدول: $P(X \geq 1, Y \geq 1) = 0/08 + 0/1 + 0/04 + 0/2 = \boxed{0/42}$

ج) $P(X \neq 0, Y \neq 0) = 0/2 + 0/06 + 0/14 + 0/3 = \boxed{0/7}$

د)
$$P(X) = \begin{cases} X=0 & 0/1 + 0/04 + 0/02 = 0/16 \\ X=1 & 0/08 + 0/2 + 0/06 = 0/34 \\ X=2 & 0/06 + 0/14 + 0/3 = 0/5 \end{cases}$$

ه) $P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1) = 0/16 + 0/34 = \boxed{0/5}$

د) ادامه دال:
$$P(Y) = \begin{cases} Y=0 & 0/1 + 0/08 + 0/06 = 0/24 \\ Y=1 & 0/04 + 0/2 + 0/14 = 0/38 \\ Y=2 & 0/02 + 0/06 + 0/3 = 0/38 \end{cases}$$

و) اگر مستقل باشند برای هر i و j داریم: $P(X=x_i, Y=y_j) = P(X=x_i)P(Y=y_j)$

$P(X=2, Y=2) =$

$P(X=2) = 0/5 \quad P(Y=2) = 0/38 \Rightarrow P(X=2)P(Y=2) = 0/19$

$0/19 \neq 0/3$ مثال نقض

- بدین ترتیب که مثال نقض یافت شد حکم برای استقلال دو متغیر تصادفی صادق نیست و دو متغیر تصادفی وابسته هستند.

۴

۵

الف) مشتق‌گیری از F :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x < 1 \\ -\frac{3}{4}x + 7/4 & 1 \leq x \leq 7/3 \\ 0 & x > 7/3 \end{cases}$$

ب)

$$P(0.5 \leq X \leq 2) = F(2) - F(0.5) = \frac{23-1}{24} = \boxed{11/12}$$

ج)

$$\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\, dx = \int_0^1 x \times x^2\, dx + \int_1^{7/3} \left(7/4 - \frac{3}{4}x\right) x\, dx$$

$$\frac{x^4}{4}\Big|_0^1 + \frac{7}{8}x^2\Big|_1^{7/3} - \frac{3}{12}x^3\Big|_1^{7/3} = \frac{1}{4} + \frac{7}{8} \times \frac{7^2}{9} - \frac{7}{8} - \left(\frac{3}{12} \times \frac{7^3}{27} - \frac{3}{12}\right)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{7 \times 40}{8 \times 9} - \frac{3 \times 316}{9 \times 27 \times 12} = \frac{1}{4} + \frac{3 \times 7 \times 40 - 2 \times 316}{216} = \frac{1}{4} + \frac{208}{216} = \frac{262}{216}$$

$$= 1.21$$

(۲) الف)

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1 \Rightarrow \int_0^1\int_0^1 cx^2 + cxy \;dx\,dy$$

$$\int_0^1 \frac{c}{3}x^3 + \frac{c}{2}x^2y \Big|_0^1 = \int_0^1 \frac{c}{3} + \frac{c}{2}y = \frac{c}{3}y + \frac{c}{4}y^2 \Big|_0^1$$

$$= \frac{c}{3} + c/4 = \frac{7c}{12} = 1 \Rightarrow \boxed{c = 12/7}$$

$$F_{XY}(x,y) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f_{xy}(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^y\int_0^x \frac{12}{7}(x^2+xy)\,dx\,dy = \int_0^y \frac{12}{7}\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2y}{2}\right)\Big|_0^x dy$$

$$\int_0^y \frac{12}{7}\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2y}{2}\right)dy = \frac{12}{7}\left(\frac{x^3y}{3} + \frac{x^2y^2}{4}\right)\Big|_0^y$$

$$= \frac{12}{7}\left(\frac{x^3y}{3} + \frac{x^2y^2}{4}\right) = \boxed{\frac{4x^3y}{7} + \frac{3x^2y^2}{7}}$$

ب)

$$f_x(x) = \int_0^1 \frac{12}{7}(x^2+xy)\,dy = \frac{12}{7}x^2y + \frac{xy^2}{2}\times\frac{12}{7}\Big|_0^1 = \boxed{\frac{12}{7}x^2 + \frac{6}{7}x}$$

$$f_Y(y) = \int_0^1 \frac{12}{7}(x^2+xy)\,dx = \frac{12}{7}\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2y}{2}\right)\Big|_0^1 = \left(\frac{1}{3} + y/2\right)\times\frac{12}{7}$$

$$= \boxed{\frac{4}{7} + \frac{6}{7}y}$$

$$F_X(x) = F_{XY}(x,+\infty) = F_{XY}(x,1) = \boxed{\frac{4x^3}{7} + \frac{3x^2}{7}}$$

$$F_Y(y) = F_{XY}(+\infty,y) = F_{XY}(1,y) = \boxed{\frac{4y}{7} + \frac{3y^2}{7}}$$

ج)

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_x(x) = \int_0^1 x\times\left(\frac{12}{7}x^2 + \frac{6}{7}x\right)dx = \frac{x^4+x^3}{7}\Big|_0^1 = \boxed{2/7}$$

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_x(x) = \int_0^1 x^2\left(\frac{12}{7}x^2 + \frac{6}{7}x\right)dx = \frac{4}{35}x^5 + \frac{3}{28}x^4\Big|_0^1 = \frac{16+15}{140} = \boxed{\frac{31}{140}}$$

$$\mathrm{var}(X) = \underbrace{\frac{31}{140}}_{E[X^2]} - \underbrace{\left(\frac{2}{7}\right)^2}_{E[X]^2} = \boxed{\frac{151}{980}}$$

۲

$$\int_{20}^{30}\int_{20}^{30} K(x^2+y^2)\,dx\,dy = 1 \Rightarrow K\int_{20}^{30}\left(\frac{x^3}{3}+xy^2\right)\Big|_{20}^{30} dy = 1$$

$$\Rightarrow K\left(\frac{19000}{3}y+10\,y^3/3\right)\Big|_{20}^{30} = 1 \Rightarrow K\left(\frac{190000}{3}\times 2\right) = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{K = \frac{3}{380000}}$$

ب)

$$P(X \leq 26,\ Y \leq 26) =$$

$$\int_{20}^{26}\int_{20}^{26}\frac{3}{380000}(x^2+y^2)\,dx\,dy = \frac{3}{380000}\left(\frac{9576}{3}y+2y^3\right)\Big|_{20}^{26} = \boxed{0/3024}$$

ج)

$$f_X(x) = \int_{20}^{30}\frac{3}{380000}(x^2+y^2)\,dy = \frac{3}{380000}\left(x^2y+y^3/3\right)\Big|_{20}^{30}$$

$$= \frac{3}{380000}\left(10x^2+\frac{19000}{3}\right) = \boxed{\frac{3x^2}{38000}+\frac{1}{20}}$$

$$\boxed{f_Y(y) = \frac{3y^2}{38000}+1/20}$$

به دلیل تقارن

د)

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x)\,f_Y(y)$$

شرط استقلال

$$\left(\frac{3x^2}{38000}+\frac{1}{20}\right)\left(\frac{3y^2}{38000}+\frac{1}{20}\right) \neq (x^2+y^2)\times\frac{3}{380000}$$

پس مستقل نیستند

۱

الف)

$$E[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i) = ۱ \times \frac{۱}{۴} + ۲ \times \frac{۱}{۴} + ۳ \times \frac{۱}{۴} + ۴ \times \frac{۱}{۴} = \boxed{۲/۵}$$

$$E(Y) = \frac{۱}{۶} + \frac{۲}{۶} + \cdots + \frac{۶}{۶} = \boxed{۳/۵}$$

$$E[X^۲] = ۱^۲ \times \frac{۱}{۴} + \cdots + ۴^۲ \times \frac{۱}{۴} = \boxed{۷/۵}$$

$$E[Y^۲] = ۱^۲ \times \frac{۱}{۶} + \cdots + ۶^۲ \times \frac{۱}{۶} = \boxed{\frac{۹۱}{۶}}$$

$$var(X) = \frac{۱۵}{۲} - \frac{۲۵}{۴} = \boxed{۵/۴}$$

$$var(Y) = \frac{۹۱}{۶} - \frac{۴۹}{۴} = \boxed{۳۵/۱۲}$$

ب)

PMF:

Z	۱	۱/۵	۲	۲/۵	۳	۳/۵	۴	۴/۵	۵
	$\frac{۱}{۲۴}$	۲/۲۴	۳/۲۴	۴/۲۴	۴/۲۴	۴/۲۴	۳/۲۴	۲/۲۴	۱/۲۴

CDF:

Z	۱	۱/۵	۲	۲/۵	۳	۳/۵	۴	۴/۵	۵
	۱/۲۴	۳/۲۴	۶/۲۴	۱۰/۲۴	۱۴/۲۴	۱۸/۲۴	۲۱/۲۴	۲۳/۲۴	۱