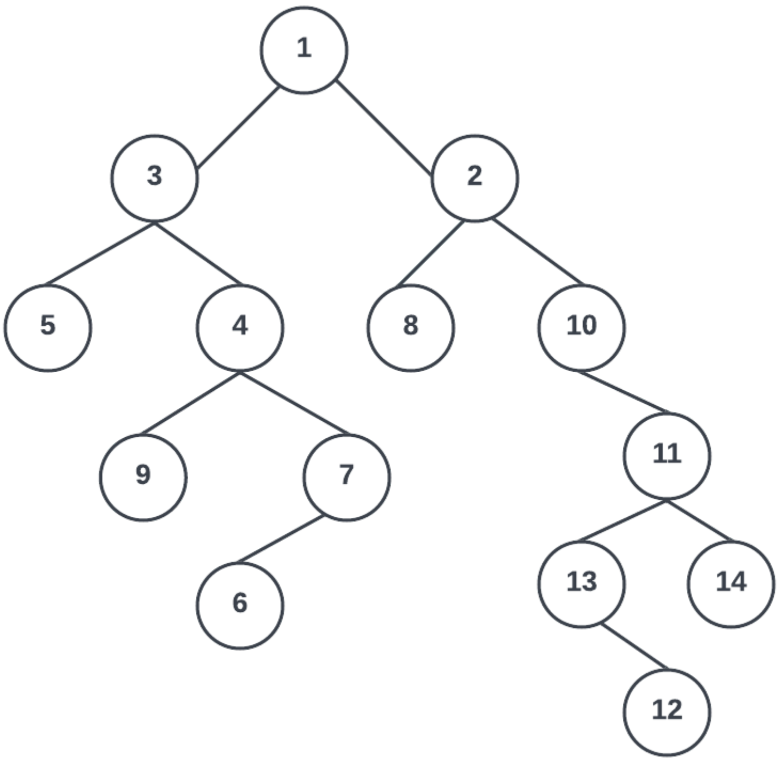
ریاضیات گسسته

پاسخنامه تمرین یازدهم - درخت

علی کرامتی

سؤال ۱.

الف) برای درخت زیر پیمایش‌های پیش ترتیب، میان ترتیب و پس ترتیب را بنویسید.



ب) از درختی تنها پیمایش‌های پیش ترتیب و میان ترتیب آن باقی مانده است! آیا می‌توانید با استفاده از این پیمایش‌ها درخت را پیدا کنید و پیمایش پس ترتیب آن را بنویسید؟ آیا درخت پیدا شده یکتا است؟ اگر یکتا است آنرا ثابت کنید و در غیر این صورت حداقل دو حالت ممکن را ترسیم کنید(پیمایش‌ها را از راست به چپ بخوانید).

- پیش ترتیب: ۱، ۳، ۵، ۹، ۲، ۸، ۶، ۷، ۴
- میان ترتیب: ۹، ۵، ۳، ۱، ۶، ۸، ۷، ۲، ۴

پاسخ.

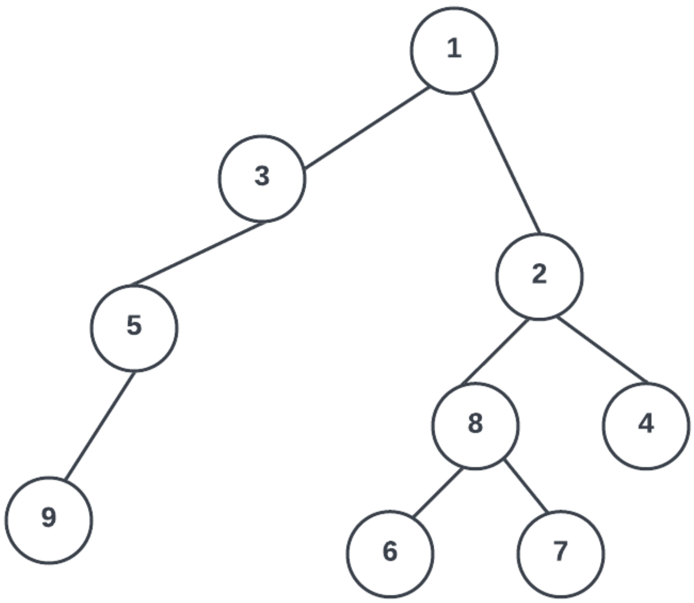
- سه پیمایش به این صورت هستند:

$Preorder$: ۱, ۳, ۵, ۴, ۹, ۷, ۶, ۲, ۸, ۱۰, ۱۱, ۱۳, ۱۲, ۱۴

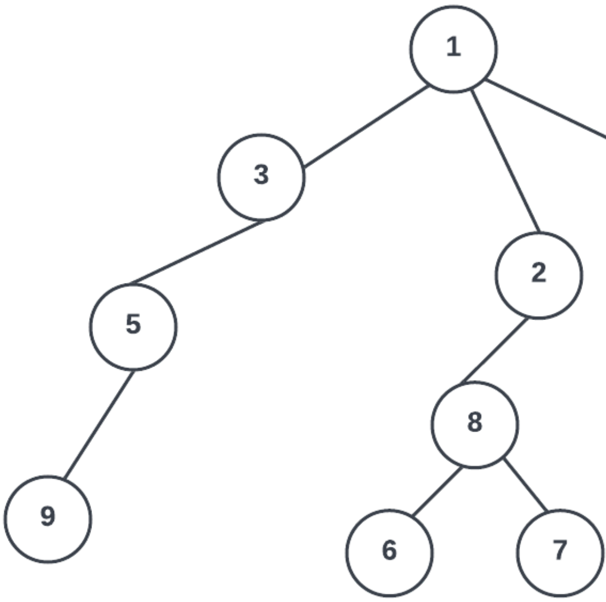
$Inorder$: ۵, ۳, ۹, ۴, ۶, ۷, ۱, ۸, ۲, ۱۰, ۱۳, ۱۲, ۱۱, ۱۴

$Postorder$: ۵, ۹, ۶, ۷, ۴, ۳, ۸, ۱۲, ۱۳, ۱۴, ۱۱, ۱۰, ۲, ۱

- این درخت با مثال‌های زیادی یکتا نیستریا، اما بهترین آن‌ها با دقت کردن به انتهای هر دو پیمایش بدست می‌آید. در انتهای هر دو پیمایش ما گره شماره ۴ را می‌بینیم. حال سوال می‌شود که آیا این گره، فرزند یک برگ متصل به ریشه است و یا متصل به یکی از فرزندان ریشه؟ به شکل زیر دقت کنید:



$Postorder$: ۹, ۵, ۳, ۶, ۷, ۸, ۴, ۲, ۱



$$Postorder: ۹, ۵, ۳, ۶, ۷, ۸, ۲, ۴, ۱$$

هردوی این درخت‌ها دارای پیمایش میان ترتیب و پیش ترتیب مشابه هستند، اما پیمایش پس ترتیب آنها متفاوت است.

سؤال ۲.

درخت T را داریم که در آن هیچ راسی درجه ۲ ندارد. ثابت کنید تعداد راس‌های برگ بیشتر از تعداد راس‌های غیربرگ می‌باشد.

پاسخ .

می‌دانیم در درخت رابطه $|E| = |V| - ۱$ برقرار می‌باشد. ما تعداد کل راس‌ها را n و تعداد برگ‌ها را l در نظر می‌گیریم. بنابراین تعداد راس‌های غیربرگ برابر با $n - l$ می‌شود. از آنجایی که درجه رئوس برابر با ۱ و یا حداقل ۳ می‌باشد، رابطه زیر را خواهیم داشت:

$$|E| \geq \frac{l + ۳(n - l)}{۲} \implies n - ۱ \geq \frac{l + ۳(n - l)}{۲}$$

$$۲n - ۲ \geq ۳n - ۲l \implies l \geq \frac{n}{۲} + ۱$$

بنابراین تعداد راس‌های برگ از راس‌های غیربرگ بیشتر می‌باشد.

سؤال ۳.

راس های یک درخت را به دو دسته تقسیم کرده ایم، به طوری که یالی بین راس هایی که در دسته‌ی مشابه هستند وجود ندارد. ثابت کنید در دسته‌ای که تعداد راس بیشتری دارد، حداقل یک برگ وجود دارد. (فرض کنید تعداد راس‌های دسته‌ها متفاوت است)

پاسخ .

با برهان خلف مساله را حل می‌کنیم. فرض می‌کنیم که دسته‌ای که راس بیشتری دارد هیچ برگی ندارد. ابتدا درخت را ریشه‌دار می‌کنیم. فرض می کنیم تعداد راس های دسته ی بزرگتر m است. اکنون به ازای هر کدام از راس های این دسته تعداد بچه های آن را در درخت ریشه دار می شماریم. هر راسی یا ریشه است یا حداکثر بچه ی یک راس است. بنابراین اگر گراف n راس داشته باشد این مقدار حداکثر n است. از طرف دیگر طبق اصل لانه کبوتری دسته ی بزرگتر حداقل $\lceil \frac{n}{۲} \rceil$ راس دارد از آنجا که درجه ای هر راس حداقل ۲ است و تعداد راس های دو دسته برابر نیست این مقدار بیشتر از n می شود که هم ثابت کردیم کمتر یا مساوی n باید باشد هم بیشتر از آن که تناقض دارد. بنابراین حکم ثابت می شود.

سؤال ۴.

اگر u یک رأس از درخت T با n رأس باشد، نشان دهید مجموع فاصله u از بقیه رئوس کوچکتر یا مساوی $\binom{n}{۲}$ است.

$$\sum d(u,v) \leq \binom{n}{۲}$$

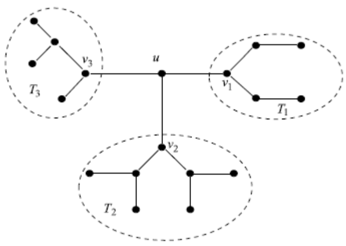
پاسخ .

ما برای حل این سوال از استقرای قوی روی n استفاده می‌کنیم:

حالت پایه: برای درختی با ۲ رأس برقرار است.

فرض: فرض می‌کنیم برای درختی با تعداد رئوس کمتر از n برقرار است.

حکم: حال باید اثبات کنیم برای درختی با n رأس نیز برقرار است.



می‌دانیم $T-u$ یک جنگل است که از تعدادی درخت تشکیل شده است. رأس‌های همسایه u هر را v_i در نظر می‌گیریم که هر کدام داخل درخت T_i هستند. می‌دانیم $\sum_{x\in T_i} d(v_i,x)$ نشان دهنده مجموع فاصله ها از رأس v_i تا باقی رأس های T_i می‌باشد، بنابراین داریم:

$$\sum_{v\in T} d(u,v) = (n-۱) + \sum_{x\in T_۱} d(v_۱,x) + \sum_{x\in T_۲} d(v_۲,x) + \ldots$$

*$n-۱$) در عبارت بالا به این علت می‌باشد که می‌دانیم فاصله u از v_i ها یک واحد است، به همین دلیل باید به تعداد رأس های موجود در T_i ها عدد یک اضافه شود که در کل می‌شود $n-۱$)

طبق فرض استقرا می‌دانیم عبارت سوأل برای درخت‌هایی با تعداد رأس کمتر از n برقرار است: $\sum_{x\in T_i} d(v_i,x) \leq \binom{n_i}{۲}$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\sum_{x\in T_۱} d(v_۱,x) + \sum_{x\in T_۲} d(v_۲,x) + ... \leq \underbrace{\binom{n_۱}{۲} + \binom{n_۲}{۲} + ...}_{=\sum\binom{n_i}{۲}}$$

حال به دو طرف معادله $n-۱$ را اضافه می‌کنیم:

$$(n-۱)+\sum_{x\in T_۱} d(v_۱,x)+\sum_{x\in T_۲} d(v_۲,x)+... \leq (n-۱)+\sum_i \binom{n_i}{۲} \implies \sum_{v\in T} d(u,v) \leq (n-۱)+\sum_i \binom{n_i}{۲}$$

ادعا می کنیم که $\sum_i \binom{n_i}{۲} \leq \binom{\sum n_i}{۲}$
اثبات ادعای بالا: می‌دانیم انتخاب ۲ از t یعنی تعداد یال های گراف کامل t رأسی، بنابراین اگر به این شکل به عبارت بالا نگاه کنیم، می‌بینیم که عبارت $\sum_i \binom{n_i}{۲}$ برابر با مجموع یال های a گراف کامل می‌باشد و عبارت $\binom{\sum n_i}{۲}$ به این معنا می‌باشد که رأس های آن a گراف کامل را کنار هم قرار داده و یک گراف کامل بزرگتر بسازیم که واضح است علاوه بر آنکه یال‌های آن a گراف کامل را شامل می‌شود، یال‌های جدیدی نیز به آن اضافه خواهد شد، بنابراین داریم: $\sum_i \binom{n_i}{۲} \leq \binom{\sum n_i}{۲}$

با توجه به ادعای بالا داریم:

$$\sum_{v\in T} d(u,v) \leq (n-۱) + \binom{\sum n_i}{۲}$$

$\sum n_i$ مجموع رأس های درخت های T_i می‌باشد که می‌دانیم برابر $n-۱$ می‌باشد:

$$\sum_{v\in T} d(u,v) \leq (n-۱)+\binom{n-۱}{۲} \implies \sum_{v\in T} d(u,v) \leq \binom{n-۱}{۱}+\binom{n-۱}{۲} \xrightarrow{\text{پاسکال}} \sum_{v\in T} d(u,v) \leq \binom{n}{۲}$$

سؤال ۵.

گراف G گرافی همبند و n راسی است. T را مجموعه‌ی همه‌ی درخت‌های پوشا در این گراف در نظر می‌گیریم. حال گراف $G_۲$ را به این صورت تشکیل می‌دهیم که مجموعه رئوس آن را T در نظر می‌گیریم (هر راس در آن نماینده‌ی یکی از درخت‌های پوشا در مجموعه‌ی T است). در گراف $G_۲$، دو راس که نماینده‌ی دو درخت پوشا همانند $T_۱$ و $T_۲$ هستند، در صورتی به یک دیگر یال دارند که تنها در یک یال اختلاف داشته باشند. ثابت کنید گراف $G_۲$ همبند است.

پاسخ .

لم ۱: اگر بین ۲ رأس مانند u و v در گراف یک گشت وجود داشته باشد، آنگاه بین این دو رأس یک مسیر وجود دارد. اثبات:

برای اثبات این موضوع کوتاه ترین گشت بین دو رأس u و v را در نظر می‌گیریم. ادعا می‌کنیم که این گشت حتما یک مسیر است. در صورتی که این گشت یک مسیر نباشد، به این معنی است که رأس تکراری در آن وجود دارد که بنابراین به این شکل می‌شود:

$$v_۱e_۱..e_{i-۱}ye_i...ye_j....e_{k-۱}u$$

حال می‌توان دور موجود در گشت بالا را حذف کرد و به گشت کوتاه‌تری که در ادامه آمده است رسید:

$$v_۱e_۱..e_{i-۱}ye_j....e_{k-۱}u$$

که این تناقض است چرا که ما فرض کرده بودیم گشتی که در نظر گرفتیم کوتاه‌ترین گشت بین دو رأس u و v است. بنابراین لم ما اثبات شد.

اثبات سؤال: می‌خواهیم اثبات کنیم که بین رأس‌های متناظر با هر دو درخت پوشا مانند T_1 و T_2 در گراف G_2، یک گشت وجود دارد. برای اثبات این موضوع از استقرا استفاده می‌کنیم:

پایه‌ی استقرا: در صورتی که T_1 و T_2 با هم در هیچ یالی اختلاف نداشته باشند، آنگاه رئوس متناظر با آن‌ها در گراف G_2 یکسان می‌شوند که به این معناست گشتی به طول صفر بین آن وجود دارد.

حال با فرض درست بودن فرض استقرا در صورتی که T_1 و T_2 در k یال اختلاف داشته باشند، درست بودن موضوع را برای اختلاف داشتن T_1 و T_2 در $k+1$ یال اثبات می‌کنیم:

یک یال مانند e که T_1 و T_2 در آن اختلاف دارند را در نظر می‌گیریم. بدون از دست رفتن کلیت مساله فرض می‌کنیم که این یال در T_1 وجود دارد ولی در T_2 نیست. دو سر این یال را u و v در نظر می‌گیریم. با توجه به این که یال e در T_2 وجود ندارد بنابراین مسیری مانند P در T_2 بین دو رأس u و v وجود دارد. بنابراین یالی در مسیر P مانند f وجود دارد که دو مولفه‌ی به وجود آمده در گراف $T_1 - e$ را به هم متصل می‌کند. بنابراین گراف $T_1 - e + f$ که آن را T_1' می‌نامیم نیز یک درخت پوشا است که با درخت T_1 در یک یال اختلاف دارد و در گراف G_2 با هم همسایه‌اند. از طرفی درخت T_1' با درخت T_2 در k یال اختلاف دارد که طبق فرض استقرا نتیجه می‌گیریم بین رئوس متناظر با T_1' و T_2 در گراف G_2، یک گشت وجود دارد. حال با توجه به این که بین دو رأس متناظر با T_1 و T_1' نیز یال وجود دارد، نتیجه می‌گیریم که بین دو رأس متناظر با دو درخت T_1 و T_2 در گراف G_2 یک گشت وجود دارد. بنابراین حکم به ازای $k+1$ نیز اثبات شد.

با توجه به این که اثبات کردیم که بین هر دو رأس از گراف G_2 یک گشت وجود دارد، می‌توانیم با استفاده از لم ۱ نتیجه بگیریم که بین هر دو رأس از گراف G_2 یک مسیر وجود دارد. بنابراین اثبات شد که گراف G_2 همبند است.

سؤال ۶.

درختی n راسی داریم که تمام رئوس آن را با دو رنگ سیاه و سفید رنگ کرده‌ایم و هیچ دو راس مجاوری هم‌رنگ نیستند. همچنین تعداد رئوس سفید آن همواره از تعداد رئوس سیاه بیشتر است. ثابت کنید رئوس سفید این درخت را می توان با اعداد $-1, 1, 0$ به گونه‌ای مقداردهی کرد که مجموع اعداد رئوس مجاور تمام رئوس سیاه صفر شود به شرط اینکه حداقل یک مقدار غیر صفر استفاده شده باشد.

پاسخ .

برای حل سوال، از قوی کردن حکم و استقرا با دو پایه استفاده می کنیم.

حکم را برای جنگلی با ویژگی های مذکور اثبات می کنیم.

پایه استقرا: در حالت $n = 3$ اگر جنگل بیش از یک درخت داشت، مطمئنا یک راس تنهای سفید دارد که به آن یک مقدار دلخواه غیر صفر و به بقیه رئوس سفید مقدار صفر را اختصاص می دهیم. حال اگر جنگل ما فقط یک درخت داشت در این صورت آن درخت یک مسیر به طول ۳ با راس مرکزی سیاه است که در این صورت به یک برگ سفید مقدار ۱ و به دیگری مقدار -1 را نسبت می دهیم.

در حالت $n = 4$ حداقل ۳ راس سفید داریم. در حالتی که بیش از یک درخت در جنگل داشته باشیم، مطمئنا یکی از رئوس سفید راسی تنها خواهد بود، که در این صورت به آن راس یک مقدار دلخواه غیر صفر و به بقیه مقدار صفر را نسبت می دهیم. در حالتی که جنگل مورد نظر فقط یک درخت داشته باشد، راس سیاه راس وسط بوده و ۳ برگ سفید خواهد داشت که در این صورت مقادیر یک، صفر و منفی یک را به رئوس اختصاص می دهیم.

فرض استقرا: فرض کنید حکم برای جنگلی با n راس درست است.

حال حکم را برای جنگلی با $n+2$ راس با ویژگی های مذکور اثبات می کنیم.

در حالتی که برگ سیاهی داشته باشیم، برگ و راس سفید متصل به آن را حذف می کنیم. n راس باقی مانده همچنان ویژگی های صورت سوال را دارند. یعنی تعداد رئوس سفید بیشتر از رئوس سیاه می باشد و هر راس سفید فقط به رئوس سیاه متصل می شود و بلعکس. با حذف دو راس مذکور نیز، با توجه به ساختار درخت، جنگلیn راسی باقی خواهد ماند(یا جز راس پدر و برگ سیاه، راس دیگری به راس سفید حذف شده متصل نیست که آن مولفه همبندی درخت باقی می ماند، و یا خلاف مورد فوق است که در نتیجه، آن مولفه به چند مولفه درخت دیگر تبدیل خواهد شد) که با توجه به فرض استقرا امکان اختصاص دادن اعداد به رئوس باقیمانده و اختصاص عدد صفر به راس سفید حذف شده وجود دارد و حکم برقرار است.

حال حالتی را در نظر می گیریم که درخت هیچ برگ سیاهی نداشته باشد. در این صورت همه برگ ها سفید هستند. اول همه مولفه ها را از راسی دلخواه ریشه دار می کنیم. راس سیاه با بیشترین عمق(بیشترین فاصله از ریشه مولفه خود) را در نظر بگیرید؛ حداکثر یکی از رئوس سفید متصل به آن برگ نیست. حال اگر دو برگ سفید به راس سیاه مورد نظر متصل باشد می توان به آن دو راس مقدار های ۱ و -1 را نسبت داد و مقدار بقیه رئوس سفید را ۰ گذاشت. اما اگر این راس دقیقا یک برگ سفید متصل به آن داشت؛ بعد از حذف این دو راس و مقداردهی

بقیه راس ها با فرض استقرا می توان مقدار قرینه راس دیگر متصل به راس سیاه را به راس سفید اختصاص داد(راس سیاه برگ نیست و حداقل دو راس متصل به خود دارد) که حکم را اثبات می کند.