



آمار و احتمالات مهندسی

تمرین پنجم - توزیع بتا

صبا و علی

تاریخ تحویل ۱۴۰۱/۰۹/۲۵

سؤال ۱.

یک تاس چهاروجهی سالم داریم. اگر W_n مجموع اعداد حاصل در n پرتاب مستقل باشد، امید ریاضی و واریانس W_n را به دست آورید.

سؤال ۲.

$\phi_X(s)$ و $\phi_Y(s)$ به ترتیب توابع مولد گشتاور دو متغیر تصادفی X و Y هستند. اگر $\phi_X(s) = \frac{1}{4}(2e^{3s} + 1)\phi_Y(s)$ باشد و بدانیم میانگین و واریانس Y به ترتیب ۱۰ و ۱۲ هستند، واریانس متغیر X را بیابید.

سؤال ۳.

تابع چگالی توأم متغیرهای تصادفی X, Y به صورت زیر داده شده است.

$$f(x, y) = \frac{1}{24}(x + y) \quad 0 < x < 3, \quad x < y < x + 2$$

الف) تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی X را بیابید.

ب) $E(Y|X=1)$ را بیابید.

ج) تابع چگالی احتمال شرطی X به شرط $Y=2$ را بیابید.

سؤال ۴.

یک آنتن گیرنده در معرض امواج دو ایستگاه رادیویی a, b قرار دارد. می دانیم احتمال این که پیامی از ایستگاه a دریافت شود برابر p است و همچنین تعداد کل پیام های دریافتی در یک بازه t ثانیه ای از توزیع پواسون با نرخ λ پیروی می کند. اگر $N_a(t)$ تعداد پیام های دریافتی از ایستگاه a در بازه زمانی t ثانیه ای باشد، توزیع $N_a(t)$ را به دست آورید.

سؤال ۵.

کامپوزر قطعه‌ای است که موجودات زنده مانند انسان را به ربات‌هایی با نام *promethean* تبدیل می‌کند و احتمال خراب بودن آن‌ها X است. یک متخصص آمار، به مدیر این شرکت پیشنهاد می‌کند که از توزیع بتا برای مدل کردن X استفاده کنند. بدین ترتیب، شرکت سازنده این قطعه ادعا می‌کند که به‌طور میانگین، احتمال خرابی ربات‌ها حدود ۴ درصد و با انحراف معیار $0.2/0$ می‌باشد.

الف) مقدار α و β را حساب کنید.

ب) بعد از بدست آوردن توزیع، مدیر کارخانه تصمیم دارد که اطلاعات را بروز کند. به همین منظور ۱۰۰ قطعه جدید ساخته می‌شود که ۳ تا آنها خراب هستند. پارامترهای توزیع بتا چگونه تغییر می‌کند؟

ج) مقدار میانگین و انحراف معیار توزیع جدید را بدست بیاورید.

سؤال ۶.

هنگام طراحی یک خودرو حداقل و حداکثر مسافتی که خودرو با باک پر می‌تواند طی کند، به ترتیب با پارامترهای u و v تخمین زده شده‌اند. بعد از تولید خودرو، در مرحله تست کیفی مشخص می‌شود مسافتی که خودرو تولید شده می‌تواند در واقعیت طی کند، یک متغیر تصادفی مانند Y است به طوری که:

$$Y = u + (v - u)X$$

چنانچه بدانیم متغیر تصادفی X یک متغیر تصادفی بتاست:

الف) تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی Y را بیابید.

ب) با توجه به اطلاعات زیر، احتمال این که بنزین خودرو قبل از طی کردن یک مسیر ۳ مایلی تمام شود را محاسبه کنید.

$$X \sim \text{Beta}(2, 3) \quad u = 2 \quad v = 6$$

سؤال ۷.

شخصیت اصلی بازی Elden-Ring دارای دو ویژگی Faith (ایمان) و Intelligence (ذکاوت) است. دو متغیر تصادفی X و Y را به این دو ویژگی نسبت می‌دهیم، به‌طوری که دامنه این دو متغیر در $[0, 1] \times [0, 1]$ قرار دارد. همچنین می‌دانیم:

$$f(x, y) = c(x^2 + xy)$$

الف) کوواریانس بین X و Y را حساب کنید.

ب) ضریب هم‌بستگی بین X و Y را بیابید.

ج) تفاوت «الف» و «ب» را بررسی کنید.

نکته: این پرسش ادامه پرسش شش تمرین قبلی می‌باشد.

سؤال ۸.

N یک متغیر تصادفی با توزیع پواسون و پارامتر λ است که تعداد فایل‌های ویروسی که در طول ۲۴ ساعت به یک سرور وارد می‌شوند را نشان می‌دهد. می‌دانیم هر فایل ویروسی با احتمال p و مستقل از سایر فایل‌ها به درستی توسط آنتی‌ویروس تشخیص داده می‌شود و از بین می‌رود. فرض کنید متغیر تصادفی X تعداد فایل‌هایی باشد که توسط آنتی‌ویروس از بین می‌روند و متغیر تصادفی Y تعداد فایل‌های ویروسی باشد که در سرور باقی می‌مانند.

ضریب همبستگی بین تعداد فایل‌هایی که توسط آنتی‌ویروس از بین می‌روند و تعداد فایل‌های ویروسی که در طول ۲۴ ساعت به یک سرور وارد می‌شوند را بیابید.

سؤال ۹.

تمرین کامپیوتری سری پنجم با موضوع «توزیع بتا و همبستگی متغیرهای تصادفی» را می‌توانید از طریق این لینک^۱ دریافت کنید.

- یک کپی از فایل مذکور با نام CA5_SID در گوگل درایو خود تهیه کنید.
- در فایل خود بخش‌هایی که به وسیله مستطیل مشخص شده‌اند را با کدهای مناسب جایگزین کنید.
- سوالاتی که به زبان فارسی و رنگ سفید مطرح شده‌اند را در همان سلول پاسخ دهید.
- فایل کد خود را با ایمیل taha.fakharian@gmail.com با دسترسی Editor به اشتراک بگذارید.
- لینک فایل پاسخ خود را در بخش متنی جایگاه آپلود این تمرین در سامانه ایلرن قرار دهید.
- دقت کنید در صورتی که لازم به ایجاد یک سلول جدید برای اجرای کد داشتید، اول سلول از R%% استفاده کنید تا سلول به عنوان کد R تشخیص داده شود.

هرگونه انتقاد، پیشنهاد یا نکته جانبی را می‌توانید از طریق یک سلول متنی در ابتدای فایل (قبل از سرفصل اصلی) به ما منتقل کنید.

^۱https://colab.research.google.com/drive/1QBiqSN98pUk7jJvcVw_q1ZggUqoxkltU?usp=sharing