

تمرین شماره 5

Graph



ساختمان های داده و الگوریتم - پاییز 1401

مهلت تحویل:

دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر

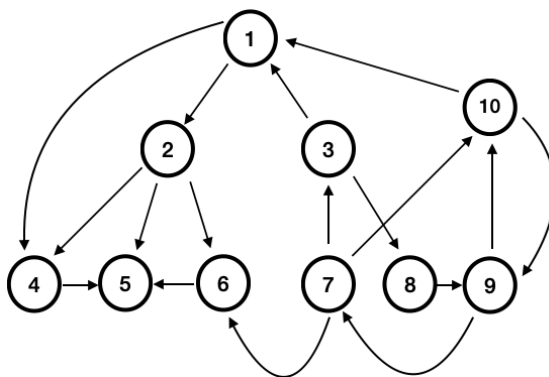
طراح تمرین: **علیرضا آقایی**

1401/10/20، ساعت: 23:59

استاد: دکتر هشام فیلی

### سوال ۱ ( ۱۵ نمره)

در گراف زیر الگوریتم dfs را اجرا کنید (از هر رأسی به عنوان رأس شروع می‌توانید استفاده کنید و پیمایش شما باید روی همه رأس‌ها صدا زده شود). هم‌چنین به ازای هر رأس زمان‌های ورود و خروج (starting time و finishing time) محاسبه کنید و به ازای یال‌های بیرون از درخت پیمایش، مشخص کنید از چه نوعی هستند (cross-edge یا back-edge). هم‌چنین یک بار هم الگوریتم bfs را روی گراف اجرا کرده و یال‌های درخت bfs را نیز مشخص کنید.



### سوال ۲ ( ۲۰ نمره)

رأس برشی در یک گراف به رأسی گفته می‌شود که با حذف آن رأس و یال‌های مربوط به آن از گراف، تعداد مولفه‌های همبندی گراف افزایش یابد.

گراف ساده  $G$  به شما داده شده است. الگوریتمی با مرتبه‌ی زمانی  $O(n + m)$  طراحی کنید که رؤس برشی گراف را به دست آورد. شبه کد الگوریتم خود را بنویسید.

### سوال ۳ ( ۱۵ نمره)

یه‌قل و دوقل، از زندگی روزمره‌ی خود خسته شده و برای فراهم کردن موجبات شادی خود، یک بازی جدید ابداع می‌کنند. آن‌ها ابتدا یک درخت  $n$  رأسی ریشه‌دار که یک وسیله‌ی بسیار عادی برای تفریح است را روی زمین گذاشته، سپس یه‌قل روی رأس ریشه و دوقل روی رأس  $x$  از آن می‌ایستد. بازی را دوقل شروع می‌کند. در هر نوبت، شخصی که نوبت اوست می‌تواند روی رأسی که هست بماند و یا به یک رأس همسایه برود. بعد از انجام حرکت انتخاب شده نوبت به نفر بعد می‌رسد. بازی زمانی به پایان می‌رسد که یه‌قل و دوقل دقیقاً روی یک رأس از درخت ایستاده باشند. هدف یه‌قل، سریع تمام کردن بازی و هدف دوقل طولانی‌تر کردن بازی است. دوقل که شما (قله‌ک) را دوست و یاور خود و تنها کسی که در قلستان اصول هک را بلد است می‌بیند، از شما خواسته تا بیشترین تعداد نوبتی که می‌تواند بازی را طولانی کند را برای او مشخص کنید.

به شما به عنوان ورودی، اطلاعات مربوط به درخت و شماره رأس  $x$  که دوقل روی آن ایستاده است، داده شده است. الگوریتمی طراحی کنید تا بیشترین تعداد نوبتی که دوقل می‌تواند بازی را طولانی کند را در  $O(n)$  بیابد.

#### سوال ۴ ( ۱۵ نمره)

شهر بوئنوس آیرس از  $n$  منطقه و  $m$  جاده‌ی دو طرفه بین آن‌ها، تشکیل شده است. هر جاده دو منطقه‌ی متفاوت را به یک دیگر متصل می‌کند و بین هر دو منطقه حداکثر یک جاده وجود دارد. نماینده‌ی این شهر دستور ساخت یک جاده‌ی جدید برای راحتی بیشتر شهروندان را به شهردار داده است. بعد از قهرمانی آرژانتین در جام جهانی، یکی از تفریحات شهردار که به طور اتفاقی جام قهرمانی به دست او رسیده است، رانندگی از محل کار خود در منطقه‌ی  $a$  به خانه‌ی خود در منطقه‌ی  $b$  و شاد کردن دل مردم با نشان دادن جام به آن‌ها است. به همین دلیل، او که نمی‌خواهد مدت زمان رانندگی‌اش در جاده‌ها با احداث یک جاده‌ی جدید کاهش یابد، از شما خواسته است تا تعداد جفت مناطقی را که بین آن‌ها جاده‌ای نیست و با ساخت جاده‌ی جدید میان آن‌ها فاصله‌ی دو منطقه  $a$  و  $b$  کاهش نمی‌یابد را پیدا کنید. الگوریتمی با پیچیدگی  $O(n^2)$  برای کمک به شهردار طراحی کنید.

## سوال ۵ ( ۱۵ نمره)

شهر گودرت (Goddert) در آلمان، دارای یک سیستم پیشرفتهی مترو است. در این شهر  $n$  ایستگاه وجود دارد که توسط  $n$  تونل دو طرفه به یک دیگر متصل شده‌اند. از هر ایستگاه می‌توان با عبور از تونل‌ها به سایر ایستگاه‌ها رسید و بین دو ایستگاه متفاوت حداکثر یک تونل وجود دارد. به تازگی ریاضی‌دانان این شهر اثبات کرده‌اند که در گراف متناظر با این سیستم پیشرفتهی مترو، دقیقاً یک دور (متشکل از ایستگاه‌ها و تونل‌های بینشان) وجود دارد. بعد از اعلام این خبر و با توجه به خاص بودن این دور، مردم این شهر به این فکر افتادند تا فاصله ایستگاه محله‌ی خود را تا این دور را محاسبه کنند. شهردار این شهر برای جلوگیری از هرج و مرج از شما خواسته است تا الگوریتمی طراحی کنید تا در پیچیدگی زمانی  $O(n)$  فاصله‌ی تمام ایستگاه‌های شهر را از دور معروف را محاسبه کنید. شهردار به عنوان ورودی، نقشه‌ی سیستم پیشرفته متروی شهر متشکل از  $n$  ایستگاه و  $n$  تونل را به شما داده است.

## سوال ۶ ( ۲۰ نمره)

یکی از الگوریتم‌های پیدا کردن مؤلفه‌های قویا همبند در یک گراف جهت دار ( $SCC$ ) مطالعه کرده و کامل توضیح دهید. (یکی از دو الگوریتم Kosarajo یا Tarjan)