



آمار و احتمالات مهندسی

تمرین سوم - متغیر تصادفی، میانگین و واریانس

محمد و ثمر

تاریخ تحویل ۱۴۰۱/۰۸/۲۲

سؤال ۱.

برای هر یک از متغیرهای زیر نوع توزیع را مشخص کنید.

الف) یک برنامه‌ی نظارت شبکه به طور مداوم درخواست‌ها را از طریق یک شبکه ارسال می‌کند. گاهی اوقات این درخواست‌ها به دلیل مشکلات شبکه با شکست مواجه می‌شوند و باید دوباره ارسال شوند. متغیر تصادفی A ، تعداد عملیات ارسال مجدد را در یک ساعت نشان می‌دهد.

ب) یک مهندس ایمنی در حال بررسی حوادث صنعتی در یک کارخانه است. او فکر می‌کند که ۴۰ درصد حوادث، ناشی از عدم رعایت دستورالعمل‌ها توسط کارکنان است. برای آزمایش این تئوری، گزارش‌های حوادث به‌طور تصادفی انتخاب می‌شوند تا زمانی که گزارشی پیدا شود که حادثه‌ی ذکرشده‌اش ناشی از عدم رعایت روش‌های ایمنی کارمند است. متغیر تصادفی B تعداد گزارش تا قبل از رسیدن به مورد عدم رعایت دستورالعمل‌ها است.

پ) فرض کنید یک درمان جدید برای نوعی سرطان ارائه می‌شود که ۱۰ درصد احتمال موفقیت دارد. ۵۰۰ بیمار به طور آزمایشی دارو را مصرف کرده‌اند. متغیر تصادفی C تعداد بیماران بهبود یافته است.

ت) یک حافظه‌ی خالی از رم کامپیوتر ایجاد می‌شود. از بین n مکان حافظه، k عدد اختصاص داده شده و بقیه آزاد هستند؛ همچنین هر دو مکان یک احتمال مساوی برای اختصاص داده شدن داشته‌اند. متغیر تصادفی D نشان‌دهنده‌ی طول یک بلوک پیوسته از حافظه آزاد است.

ث) قضیه‌ی اعداد اول بیان می‌کند که برای n به اندازه‌ی کافی بزرگ، احتمال آنکه یک عدد صحیح با n^2 رقم، عدد اول باشد برابر است با $\frac{1}{n^2}$. فرض کنید می‌خواهیم یک عدد اول بزرگ با n^2 رقم پیدا کنیم و این کار را با انتخاب یک عدد n^2 رقمی و سپس چک کردن اول بودنش انجام می‌دهیم. متغیر تصادفی E تعداد اعداد صحیحی است که تا قبل از رسیدن به جواب امتحان می‌کنیم.

ج) فروشگاه لباس فروشی که در شهری کوچک و سرد واقع شده است، از ساعت ۶ تا ۲۰ باز است. مدیر این فروشگاه می‌خواهد برای باز بودن فروشگاه در نوبت شب (ساعت ۲۰ تا ۶) تصمیم بگیرد. برای این کار به مدت یک هفته فروشگاه را در نوبت شب نیز باز نگه داشته و میزان فروش در نوبت شب را محاسبه می‌کند. متغیر تصادفی F ، تعداد فروش در نوبت شب است.

سؤال ۲.

در دوران همه‌گیری ویروس کرونا، افراد تمایل به دوری از جمعیت‌های زیاد دارند و دوست دارند به خصوص در فضاهای سرپسته مانند سالن‌های سینما کنار جمعیت کمتری باشند. مدیر یک مجموعه تفریحی که سینما هم دارد، این نکته را با مسئول فروش بلیت‌ها در میان می‌گذارد. مسئول فروش سانس‌های مختلف را چک می‌کند. می‌گوید: "به طور مثال برای ساعت ۱۷، هر یک از ۴ سالن مجموعه، به ترتیب ۲۰، ۲۳، ۱۷ و ۱۰۰ تماشاچی دارند. در نتیجه به طور میانگین در هر سالن ۴۰ تماشاچی هستند و با توجه به ۱۲۰ نفره بودن سالن‌ها این تعداد یک سوم ظرفیت

سالن است و جمعیت زیاد نیست. برای بقیه‌ی سانس‌ها هم حدوداً به همین شکل است. ”اما آن شب تعداد زیادی تماس با قسمت انتقادات و پیشنهادات مجموعه گرفته می‌شود و از جمعیت زیاد سالن سینما در دوران همه‌گیری ویروس کرونا در سانس‌هایی از جمله سانس ساعت ۱۷ شکایت می‌شود.

الف) آیا مسئول فروش در اعلام تعداد میانگین جمعیت هر سالن و پیش‌بینی احساس تماشاچیان اشتباه کرده است؟ اگر خیر، دلیل احساس تماشاچیان چیست و اگر بله، تعداد میانگین درست برای سانس ساعت ۱۷ چقدر است؟

ب) احتمالاً تماس‌های مربوط به سانس ساعت ۱۷ بیشتر از تماشاچیان کدام سالن‌ها بوده است؟

پ) به نظر شما با چه ترکیب جمعیتی در سالن‌های سینما، با همین روش استدلال و میانگین‌گیری مسئول فروش، نظر تماشاچیان مانند پیش‌بینی مسئول فروش می‌بود؟ (منظور این است که در چه صورتی اگر مسئول فروش پیش‌بینی شلوغ یا خلوت بودن سالن‌ها را می‌کرد، تماشاچیان هم همان احساس را می‌کردند؟ همچنین در این بخش صرفاً استفاده از مفهوم هم کافی است اما در صورت نیاز می‌توان از فرمول‌ها هم برای توضیح بهتر پاسخ کمک گرفت.)

سؤال ۳.

یک جفت سکه را بطور همزمان پرتاب می‌کنیم. احتمال شیر آمدن هر سکه p هست.

الف) اگر این دو را همزمان با هم n بار پرتاب کنیم و X مجموع تعداد پرتاب‌هایی باشد که نتایج این سکه با هم متفاوت‌اند، X از چه توزیع احتمالی پیروی می‌کند؟

ب) فرض کنید اگر نتایج این دو سکه متفاوت باشند، شما ۱ دلار جایزه می‌گیرید و در غیر آن صورت ۱ دلار از دست می‌دهید. اگر Y کل سود شما باشد، Y را برحسب X بدست آورید. امید ریاضی و واریانس Y چقدر است؟

سؤال ۴.

۲ نامزد انتخابات کارگروه آموزشی دانشکده در حال پخش کردن برگه‌های تبلیغات خود در بین ۲۰۰۰ نفر از دانشجویان هستند. با توجه به محدودیت زمان و هزینه، هر نامزد توانسته در بخش انتشارات تنها ۲۰۰ برگه تبلیغ پرنیت بگیرد؛ سپس به طور تصادفی و با احتمال یکسان آن‌ها را بین ۲۰۰ نفر از ۲۰۰۰ دانشجوی پخش کرده است. فرض کنید دانستن اینکه چه کسانی تبلیغ نامزد اول را دریافت کرده‌اند، هیچ اطلاعاتی در مورد افرادی که تبلیغ نامزد دوم را دریافت کرده‌اند نمی‌دهد. شایان ذکر است که از دید دو نامزد انتخابات، بعید است که یک دانشجوی برگه‌ی تبلیغ هر دو را گرفته باشد و با اطلاعات کافی از هر دو نامزد رای بدهد.

الف) توزیع تعداد دانشجویانی که توانسته‌اند بعد از دریافت و مطالعه‌ی هر دو تبلیغ و با اطلاعات کافی رای بدهند از چه نوع است؟ چرا؟ (متغیر تصادفی تعداد دانشجویان با این شرایط را X در نظر بگیرید.)

ب) تابع جرمی احتمال X را بیابید.

پ) امید ریاضی X را با استفاده از متغیرهای شاخص بیابید.

سؤال ۵.

هر یک از اعضای یک گروه n نفره، مستقل از یکدیگر، تاس سالمی را پرتاب می‌کنند. به ازای هر k فردی که طی پرتاب تاس هایشان عدد مشابهی مشاهده کنند، k امتیاز به گروه داده می‌شود. به عنوان مثال در یک گروه ۱۱ نفره ($n = 11$)، اگر پس از پرتاب تاس‌ها سه بازیکن عدد ۲، چهار بازیکن عدد ۵، یک بازیکن عدد ۱، یک بازیکن عدد ۳، یک بازیکن عدد ۴ و یک بازیکن عدد ۶ را مشاهده کنند، ۷ امتیاز (یعنی $4 + 3$) به گروه تعلق می‌گیرد. میانگین امتیاز گروه را بر حسب n حساب کنید.

سؤال ۶.

فرض کنید که X_1, X_2, \dots, X_n متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع یکنواخت در بازه (a, b) باشند.

$$X_i \sim \text{Uniform}(a, b) \quad , \quad a < b$$

الف) فرض کنید $Y = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$ ، تابع توزیع انباشته Y را بیابید.

ب) امید ریاضی متغیر تصادفی Y را محاسبه کنید.

سؤال ۷.

تانک‌های ارتش یک کشور از ۱ تا N شماره گذاری شده‌اند. این کشور در یک جنگ، n عدد از تانک‌های خود را از دست می‌دهد و تانک‌ها به دست دشمن می‌افتد. دشمن درمی‌یابد که تانک‌های تصاحب‌شده شماره گذاری شده‌اند.

الف) دشمن چگونه می‌تواند تخمینی برای تعداد کل تانک‌های این کشور (یعنی N) به دست آورد؟

ب) اگر دشمن ۱۲ تانک تصاحب کند و بیشترین و کمترین شماره‌های تصاحب شده ۲ و ۱۱۷ باشند، تخمین تعداد کل تانک‌های این کشور چقدر است؟

سؤال ۸.

تمرین کامپیوتری سری سوم با موضوع «توزیع احتمال‌های گسسته» را می‌توانید از طریق این لینک^۱ دریافت کنید.

- یک کپی از فایل مذکور با نام CA3_SID در گوگل درایو خود تهیه کنید.
- در فایل خود بخش‌هایی که به وسیله مستطیل مشخص شده‌اند را با کدهای مناسب جایگزین کنید.
- سوالاتی که به زبان فارسی و رنگ سفید مطرح شده‌اند را در همان سلول پاسخ دهید.
- فایل کد خود را با ایمیل hesam.as.sa.as@gmail.com به دسترسی Editor به اشتراک بگذارید.
- لینک فایل پاسخ خود را در بخش متنی جایگاه آپلود این تمرین در سامانه ایلرن قرار دهید.
- دقت کنید در صورتی که لازم به ایجاد یک سلول جدید برای اجرای کد داشتید، اول سلول از %%R استفاده کنید تا سلول به عنوان کد R تشخیص داده شود.

هرگونه انتقاد، پیشنهاد یا نکته جانبی را می‌توانید از طریق یک سلول متنی در ابتدای فایل (قبل از سرفصل اصلی) به ما منتقل کنید.

¹TODO