ریاضیات گسسته

پاسخنامه تمرین ششم - روابط و جمع‌زنی

آریان سلطانی

سؤال ۱.

رابطه ی R روی مجموعه ی $\{۱,۲,۳,۴\}$ تعریف شده است که $R = \{(۱,۲),(۱,۳),(۲,۴),(۳,۲)\}$ مجموعه ی R^n را برای n های طبیعی بزرگتر از ۱ با حالت بندی بدست آورید.

پاسخ .

$$n = ۲:$$
$$R^۲ = \{(۱,۴),(۱,۲),(۳,۴)\}$$
$$n = ۳:$$
$$R^۳ = \{(۱,۴)\}$$
$$n \geq ۴:$$
$$R^n = \emptyset$$

سؤال ۲.

به ازای هر کدام از رابطه های زیر تعیین کنید کدام یک از خاصیت های تقارنی، پادتقارنی، بازتابی و تعدی را دارا هستند؟ و برای پاسخ خود استدلال بنویسید. (روابط روی فضای اعداد طبیعی تعریف شده اند)

الف) (x,y) عضوی از R است اگر و تنها اگر $x \neq y$

ب) (x,y) عضوی از R است اگر و تنها اگر $x \equiv y (mod ۵)$

ج) (x,y) عضوی از R است اگر و تنها اگر $x \leq y$ باشد.

پاسخ .

الف)

خاصیت بازتابی را ندارد زیرا باید به ازای هر x ، رابطه ی (x,x) وجود داشته باشد در صورتی که به ازای هیچ x ای این رابطه وجود ندارد.

خاصیت تقارنی وجود دارد زیرا اگر $y \neq x$ باشد آنگاه $x \neq y$ خواهد بود که تقارنی بودن را نتیجه می دهد.

خاصیت پادتقارنی وجود ندارد زیرا به عنوان مثال هم $(۱,۲)$ و هم $(۲,۱)$ عضو R هستند.

خاصیت تعدی نیز وجود ندارد به عنوان مثال $(۱,۲)$ و $(۲,۱)$ عضو R هستند ولی $(۱,۱)$ نیست.

ب)

خاصیت تقارنی برقرار است زیرا اگر x و y باقی مانده ی یکسانی به ۵ داشته باشند آنگاه هم (x, y) و هم (y, x) عضو این مجموعه خواهند بود.

خاصیت بازتابی هم دارا است زیرا به ازای هر x (x, x) در مجموعه R وجود دارد.

خاصیت تعدی نیز برقرار است زیرا اگر (x, y) و (y, z) در مجموعه باشند هر سه عدد x و y و z باقی مانده ی یکسانی به ۵ دارند. بنابراین (x, z) نیز در R وجود دارد.

خاصیت پادتقارنی برقرار نیست به عنوان مثال (۵,۱۰) و (۱۰,۵) هر دو در R وجود دارند.

ج)

خاصیت تقارنی برقرا نیست به عنوان مثال (۱,۲) عضو مجموعه است ولی (۲,۱) نیست که خلاف تعریف تقارنی است.

خاصیت بازتابی برقرار است زیرا عبارت $x \leq x$ درست است.

خاصیت پادتقارنی برقرار است زیرا اگر (x, y) و (y, x) هر دو در R باشند آنگاه $x = y$ می شود که همان تعریف پادتقارنی است.

خاصیت تعدی هم برقرار است زیرا اگر $x \leq y$ و $z \leq y$ باشد آنگاه $x \leq z$ عبارت درستی خواهد شد.

سؤال ۳.

فرض کنید R و S دو رابطه تقارنی روی مجموعه ناتهی A باشند. هر کدام از گزاره‌های زیر را اثبات یا نقض کنید.

الف) $R \cup S$ تقارنی است.

ب) $R - S$ تقارنی است.

ج) $R \oplus S$ تقارنی است.

د) $R \circ S$ تقارنی است.

پاسخ.

الف) فرض کنید $(a, b) \in R \cup S$. لذا $(a, b) \in R$ یا $(a, b) \in S$. در صورتی که $(a, b) \in R$، با توجه به اینکه R یک رابطه تقارنی است، خواهیم داشت $(b, a) \in R$ و لذا داریم $(b, a) \in R \cup S$.

به طرز مشابه، در صورتی که داشته باشیم $(a, b) \in S$، با توجه به اینکه S یک رابطه تقارنی است، خواهیم داشت $(b, a) \in S$ و لذا داریم $(b, a) \in R \cup S$.

لذا $R \cup S$ تقارنی است.

ب) فرض کنید $(a, b) \in R - S$. در این صورت داریم $(a, b) \in R$ و $(a, b) \notin S$. با توجه به اینکه R تقارنی است، خواهیم داشت $(b, a) \in R$.

حال فرض کنید $(b, a) \in S$. با توجه به اینکه S تقارنی است، باید داشته باشیم $(a, b) \in S$، اما این عبارت با توضیحات بالا در تناقض است. از این تناقض نتیجه می‌گیریم که $(b, a) \notin S$ و هم‌چنین داشتیم $(b, a) \in R$، پس داریم $(b, a) \in R - S$.

لذا $R - S$ تقارنی است.

ج) می‌دانیم $R \oplus S = (R - S) \cup (S - R)$. از طرفی با توجه به اینکه S و R هردو تقارنی هستند، از قسمت ب نتیجه می‌گیریم که $R - S$ و $S - R$ هردو تقارنی خواهند بود. از طرفی از قسمت الف می‌دانیم که اجتماع دو تقارنی، تقارنی خواهد بود. لذا $(R - S) \cup (S - R)$ تقارنی خواهد بود و طبق توضیحات اولیه، $R \oplus S$ تقارنی خواهد بود.

د) این گزاره نادرست است. به عنوان مثال نقض، دو رابطه $R = \{(۱, ۲), (۲, ۱)\}$ و $S = \{(۲, ۳), (۳, ۲)\}$ روی مجموعه اعداد طبیعی را در نظر بگیرید. واضح است که هر دو رابطه تقارنی هستند، اما برای $R \circ S$ داریم: $R \circ S = \{(۳, ۱)\}$ که واضحاً تقارنی نیست. لذا $R \circ S$ تقارنی نیست.

سؤال ۴.

فرض کنید A و B دو مجموعه متناهی باشند، به صورتی که داریم $|B| = |A|$. گزاره‌های زیر را اثبات کنید و به ازای هر گزاره، نشان دهید در صورتی که A و B متناهی نباشند، آن گزاره غلط خواهد بود.

الف) برای هر تابع یک به یک مثل $f : A \to B$، f پوشا نیز خواهد بود.

ب) برای هر تابع پوشا مثل $f : A \to B$، f یک به یک نیز خواهد بود.

پاسخ .

هر دو گزاره را با برهان خلف اثبات می‌کنیم:

الف) فرض کنید f پوشا نباشد و $b \in B$ عضوی باشد که در برد f حضور نداشته باشد. فرض کنید z شیئ‌ای باشد که در A حضور نداشته باشد. در این صورت تعریف می‌کنیم $A_۱ = A \cup \{z\}$ و تابع $g : A_۱ \to B$ را به این صورت تعریف می‌کنیم:

$$g(x) = \begin{cases} b & x = z \\ f(x) & x \neq z \end{cases} \qquad (۱)$$

به سادگی قابل مشاهده است که g نیز یک به یک است، در حالی که داریم $|B| > |B| + ۱ = |A| + ۱ = |A_۱|$ که این موضوع با اصل لانه کبوتری در تناقض است. از این تناقض نتیجه می‌گیریم که f باید پوشا باشد. در صورتی که A و B متناهی نباشند، فرض کنید $A = \mathbb{N}, B = \mathbb{Z}$. همچنین تعریف f نیز به این صورت باشد که $f : A \to B$ و $f(n) = n$. در این صورت f یک به یک خواهد بود ولی پوشا نیست(اعداد منفی در برد f نیستند).

ب) فرض کنید f یک به یک نباشد و $a_۱, a_۲ \in A$ را در نظر بگیرید، بصورتی که $a_۱ \neq a_۲$ و $f(a_۱) = f(a_۲)$. تعریف می‌کنیم $A_۱ = A - \{a_۲\}$ و تابع $g : A_۱ \to B$ را به این صورت تعریف می‌کنیم: $g(x) = f(x)$. به سادگی قابل مشاهده است که g نیز پوشا است، در حالی که داریم $|B| < |B| - ۱ = |A| - ۱ = |A_۱|$ و این موضوع با اصل لانه کبوتری در تناقض است. از این تناقض نتیجه می‌گیریم که f باید یک به یک باشد. در صورتی که A و B متناهی نباشند، فرض کنید $A = \mathbb{N} * \mathbb{N}, B = \mathbb{N}$ و $f((m, n)) = n$. در این صورت، واضح است که f پوشاست ولی یک به یک نیست(برای مثال $f((۱, ۲)) = f((۲, ۲)) = ۲$.

سؤال ۵.

روی مجموعه ی $\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹, ۱۰\}$ چند رابطه ی هم ارزی می توان تعریف کرد که هیچ رابطه ی (x, y) به طوری که $x \leq ۵$ و $y > ۵$ باشد در مجموعه نباشد؟

پاسخ .

طبق گفته ی سوال می توان نتیجه گرفت که مجموعه ی $\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ و $\{۶, ۷, ۸, ۹, ۱۰\}$ کلاس های هم ارزی مجزایی می سازند پس کافی است تعداد روابطی که می توان از این مجموعه ها ساخت را در هم ضرب کرد که برای هر دو مجموعه این مقدار برابر تعداد روابطی که می توان روی مجموعه ی ۵ عضوی ساخت است.

برای بدست آوردن این مقدار روی تعداد کلاس های هم ارزی حالت بندی می کنیم.

۱ کلاس: ۱ حالت تنها حالت این است که همه عضو یک کلاس هم ارزی باشند.

۲ کلاس: $\frac{۲^۵-۲}{۲} = ۱۵$ از هر عضو می گوییم در کدام یک از دو کلاس باشد و ۲ حالتی که همه ی اعضا در یک کلاس هم ارزی اند را کم می کنیم و در انتها تقسیم بر ۲ نیز می کنیم چون دو کلاس با هم فرقی ندارند و هر حالت دو بار شمرده شده است.

۳ کلاس: $۲۵ = \binom{۵}{۳} + \frac{\binom{۵}{۴}*\binom{۴}{۲}}{۲}$ روی تعداد اعضای ۳ کلاس حالت بندی می کنیم یا یک کلاس ۳ عضو و دو کلاس دیگر یک عضو که کافی است اعضای کلاس ۳ با ۳ عضو صرفا مشخص شود حالت دیگر هم حالتی است که ۲ کلاس ۲ عضو و کلاس دیگر یک عضو که می شود انتخاب ۴ عضو باری ۲ کلاس و یک کلاس ۲ عضو از ۴ عضو انتخاب می کنیم و تقسیم بر ۲ هم چون هر حالت دو بار شمرده می شود.

۴ کلاس: $۱۰ = \binom{۵}{۲}$ تنها حالت ۴ کلاس حالتی است که یک کلاس ۲ عضو و بقیه ۱ عضو که با انتخاب آن دو عضو بقیه کلاس ها یکتا مشخص می شوند.

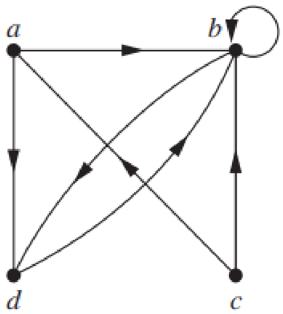
۵ کلاس: ۱ حالت فقط یک حالت که هر کلاس یک عضو

تعداد مجموعه های هم ارزی روی مجموعه ی ۵ عضو = $۵۲ = ۱ + ۱۵ + ۲۵ + ۱۰ + ۱$

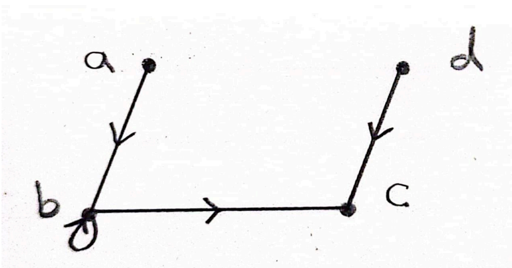
جواب مساله = $۲۷۰۴ = ۵۲ * ۵۲$

سؤال ۶.

می‌دانیم یکی از راه‌های نمایش روابط، استفاده از گراف‌های جهت‌دار است. به طور خلاصه در این گراف‌ها از راس a به b یالی جهت‌دار می‌کشیم، اگر و تنها اگر aRb . برای مثال گراف جهت‌دار رابطه $\mathbf{R} = \{(a,b),(a,d),(b,b),(b,d),(c,a),(c,b),(d,b)\}$ به شکل زیر است.



کیارش گراف جهت‌دار زیر را کشیده است. او به چند طریق می‌تواند گراف را کامل کند به طوری که گراف نهایی خاصیت بازتابی نداشته باشد اما نامتقارن بوده و خاصیت تعدی داشته باشد؟



پاسخ.

به گراف شکل نگاه کنید. از آنجایی که باید نامتقارن باشد، پس بین هیچ دو راسی، یال‌های رفت و برگشتی وجود ندارند. پس می‌توان به گراف اولیه حداکثر ۶ یال اضافه کرد (۳ یال طوقه است). روی این یال‌ها حالت بندی می‌کنیم. یالهای طوقه رئوس a, c, d کلا $۲^۳$ حالت دارند که در یک حالت آنها گراف خاصیت بازتابی خواهد داشت. پس ۷ حالت برای یال‌های طوقه داریم. از طرفی یال ac به دلیل خاصیت تعدی، وجود دارد. حال با حالت‌بندی روی یال ad (و در صورت نیاز یال db) طبق شکل زیر، ۶ حالت برای سایر یال‌ها داریم. پس جواب نهایی برابر با ۷×۶ خواهد بود (توجه کنید در شکل وسط، پس از اینکه یال da مشخص می‌شود، یال db به جهت حفظ خاصیت تعدی اضافه شده است. همچنین در شکل سمت راست، اگر از b به d یال داشته باشیم، به دلیل خاصیت تعدی، به حالت تکراری می‌رسیم؛ پس جهت یال

باید از d به b باشد).