آمار و احتمالات مهندسی

تمرین چهارم - متغیرهای تصادفی توأماً توزیع شده

فاطمه و سامان

تاریخ تحویل ۱۴۰۱/۰۹/۱۴

سؤال ۱.

طول زمانی دوران حاملگی انسان را می‌توان به خوبی با استفاده از توزیع نرمال با میانگین ۲۸۰ و انحراف معیار ۸/۵ تقریب زد. فرض کنید فردی حامله بوده و فرزند وی ۲۵ شهریور به دنیا خواهد آمد. علاوه بر آن فرد مذکور در یک شرکت مشغول به کار بوده و باید ۱۸ام شهریور ماه یک پروژه را تحویل دهد. (فاصله ۱۸ام تا ۲۵ام شهریور را از نیمه شب هر دو روز محاسبه کنید؛ این مقدار برابر ۷ روز است.)

آ احتمال اینکه فرزند او قبل یا همان روز تحویل پروژه به دنیا بیاید چقدر است؟

ب احتمال اینکه فرزند او در شهریور ماه و روزی بعد از تحویل پروژه به دنیا بیاید چقدر است؟

ج اگر او بخواهد زمان تحویل پروژه‌اش را جلوتر بیندازد تا با احتمال ۹۵ درصد بعد از تحویل پروژه فرزندش را به دنیا بیاورد، چه روزی را باید انتخاب کند؟

پاسخ .

آ متغییر تصادفی X را برابر اختلاف روزهای بین زمان واقعی به دنیا آمدن نوزاد و زمان مقرر آن (۲۵ شهریور) در نظر می‌گیریم. به دنبال مقدار $P(X \leq -۷)$ هستیم و می‌دانیم $X \sim N(۰, ۸/۵)$:

$$P(X \leq -۷) = P(Z \leq \frac{-۷}{۸/۵}) = ۰/۲۰۵$$

ب به دنبال احتمال به دنیا آمدن نوزاد در روزی بین ۱۹ شهریور $(X = -۶)$ و ۳۱ شهریور $(X = ۶)$ هستیم:

$$P(-۶ \leq X \leq ۶) = P(\frac{-۶}{۸/۵} \leq Z \leq \frac{۶}{۸/۵}) = ۰/۵۲۰$$

ج باید مقداری از x را بیابیم به طوری که $P(X \geq x) > ۰/۹۵$ این معادل $P(Z \geq \frac{x}{۸/۵}) \geq ۰/۹۵$ است. با استفاده از جدول CDF توزیع نرمال استاندارد، $X \approx -۱۴$ بدست می‌آید. این یعنی زمان تحویل پروژه باید به ۱۱ام شهریور منتقل شود.

سؤال ۲.

به تازگی یک دایره المعارف بسیار قدیمی یافت شده‌است، تخمین زده‌ایم احتمال آنکه کلمه‌ای در آن استفاده شده‌باشد که اکنون استفاده نمی‌شود و هم اکنون نیاز به جایگزین شدن به کلمات امروزی داشته‌باشد، ۴۰ درصد است. احتمال اینکه در صفحه‌ای با ۶۰۰ کلمه حداقل ۲۷۰ کلمه نیاز به جایگزین شدن داشته‌باشد، چقدر است؟

پاسخ .

هر کلمه یا استفاده می‌شود و یا منقرض شده است، در نتیجه با توزیع دوجمله ای مواجه هستیم. متغیر تصادفی X را تعداد کلمات منقرض شده در n کلمه تعریف می‌کنیم. X خود متغیر تصادفی گسسته با مقادیر ممکن ۰ تا n می‌باشد.

پس تعداد کلماتی که نیاز به جایگزین شدن در این صفحه دارند با متغیر تصادفی X به صورت زیر مدل می‌کنیم:

$$X \sim Bin(n, p)$$

با توجه به داده های مسئله داریم:

$$p = ۰/۴, n = ۶۰۰$$

در نتیجه داریم:

$$X \sim Bin(۶۰۰, ۰/۴)$$

احتمال خواسته شده را به صورت زیر می‌توان بدست آورد:

$$f(x) = P(X = x) = \binom{۶۰۰}{x} \times ۰/۴^x \times ۰/۶^{۶۰۰-x}$$

در مثال بالا چون n بزرگ است، بدست آوردن پاسخ دشوار است. می‌دانیم برای n های بزرگ می‌توانیم از تقریب با توزیع نرمال استفاده کنیم، ابتدا شروط لازم برای این مسئله را بررسی می‌کنیم :

$$۱. \quad np = ۲۴۰ > ۱۰$$

$$۲. \quad np(۱-p) = ۱۴۴ > ۱۰$$

با توجه به اینکه n به اندازه کافی بزرگ است و همچنین دو شرط لازم برقرار است می‌توانیم از تقریب با توزیع نرمال استفاده کنیم.

$$X \approx Y \sim N(\mu, \sigma^۲)$$

با توجه به نرمال بودن توزیع، واریانس و میانگین از روابط زیر بدست می‌آوریم:

$$\mu = np = ۲۴۰ \quad , \sigma^۲ = np(۱-p) = ۱۴۴$$

$$\Rightarrow X \approx Y \sim N(۲۴۰, ۱۴۴)$$

حال به محاسبه‌ی احتمال خواسته شده با استفاده از تقریب نرمال و تصحیح پیوستگی می‌پردازیم:

$$P(X \geq ۲۷۰) \approx P(Y > ۲۶۹/۵)$$

با استفاده از تبدیل خطی $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ داریم:

$$P(Y > ۲۶۹/۵) = P(Y - \mu > ۲۶۹/۵ - \mu) = P(\frac{Y-\mu}{\sigma} > \frac{۲۶۹/۵ - \mu}{\sigma})$$

$$= P(\frac{Y - ۲۴۰}{۱۲} > \frac{۲۶۹/۵ - ۲۴۰}{۱۲}) = P(Z > ۲/۴۵۸۳)$$

$$P(Z > ۲/۴۵۸۳) \cong P(Z > ۲/۴۶) = ۱ - P(Z < ۲/۴۶) = ۱ - \Phi(۲/۴۶)$$

مقدار $\Phi(۲/۴۶)$ را با استفاده از جدول داریم : $\Phi(۲/۴۶) = ۰/۹۹۳۱$

$$\Rightarrow P(X \geq ۲۷۰) \cong ۱ - ۰/۹۹۳۱ = ۰/۰۰۶۹$$

سؤال ۳.

آب یک شهر توسط دو سد تامین می‌شود، اگر هرکدام از سدها دارای دو خروجی باشد و تعداد خروجی‌های فعال در سد اول را با X و در دیگری با Y نشان دهیم. تابع چگالی احتمال مشترک X و Y با استفاده از جدول شرطی زیر می‌توان نشان داد:

p(x,y)		y = 0	y = 1	y = 2
x	0	0.10	0.04	0.02
	1	0.08	0.20	0.06
	2	0.06	0.14	0.30

آ) احتمال $P(X = ۱, Y = ۱)$ را بدست آورید.

ب) احتمال $P(X \leq ۱, Y \leq ۱)$ را بدست آورید.

ج) احتمال $P(X \neq ۰, Y \neq ۰)$ را بدست آورید.

د) تابع چگالی احتمال حاشیه‌ای X و Y را بدست آورید.

ه) احتمال $P(X \leq ۱)$ را با استفاده از تابع چگالی احتمال حاشیه‌ای $(P_X(x))$ بدست آورید:

و) بررسی کنید آیا X و Y مستقل هستند؟

پاسخ .

آ) با استفاده از جدول داده شده داریم:

$$P(X = ۱, Y = ۱) = ۰/۲۰$$

ب)

$$P(X \leq ۱, Y \leq ۱) = P(۰, ۰) + P(۰, ۱) + P(۱, ۰) + P(۱, ۱) = ۰/۴۲$$

ج)

$$P(X \neq ۰, Y \neq ۰) = P(۱, ۱) + P(۱, ۲) + P(۲, ۱) + P(۲, ۲) = ۰/۷۰$$

د) برای به دست آوردن تابع چگالی احتمال حاشیه‌ای متغیر گسسته X داریم:

$$P_X(x_i) = \sum_j P(x_i, y_j)$$

x	0	1	2
$P_X(x)$	0.16	0.34	0.50

کافی‌است مقادیر هر ردیف داخل جدول داده شده را با یکدیگر جمع ببندیم، در آخر داریم:

برای بدست آوردن تابع چگالی احتمال حاشیه‌ای متغیر Y همانند X داریم:

$$P_Y(y_j) = \sum_i P(x_i, y_j)$$

کافی‌است مقادیر داخل هر ستون را با یکدیگر جمع ببندیم:

y	0	1	2
$P_Y(y)$	0.24	0.38	0.38

ه) با توجه به قسمت قبل داریم:

$$P(X \leq ۱) = P(X = ۰) + P(X = ۱) = ۰/۱۶ + ۰/۳۴ = ۰/۵۰$$

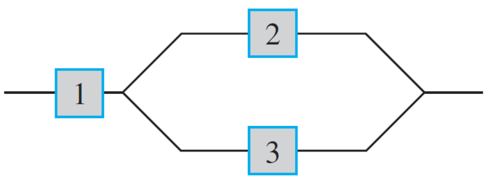
و) برای مستقل بودن دو متغیر تصادفی باید رابطه‌ی $f(x, y) = f_X(x) \times f_Y(y)$ در تمامی حالات برقرار باشد.

$$P(۰, ۰) = ۰/۱۰$$
$$P_X(۰) \times P_Y(۰) = (۰/۱۶) \times (۰/۲۴) = ۰/۰۳۸۴$$
$$\Rightarrow P(۰, ۰) \neq P_X(۰) \times P_Y(۰)$$

با توجه به اینکه $P(۰, ۰) \neq P_X(۰) \times P_Y(۰)$ می‌توان گفت این دو متغیر مستقل نیستند.

سؤال ۴.

یک سیستم متشکل از سه عنصر را به صورت زیر در نظر بگیرید. سیستم تا زمانی به کار خود ادامه خواهد داد که اولین عنصر و حداقل یکی از عناصر دوم و سوم فعال باشند. فرض کنید $X_۱$ و $X_۲$ و $X_۳$ به ترتیب طول عمر عناصر اول و دوم و سوم را نشان دهند. همچنین فرض کنید X_iها مستقل از یکدیگر هستند و هر یک دارای توزیع نمایی با پارامتر λ است. امید ریاضی طول عمر سیستم چقدر است؟



پاسخ .

متغیر تصادفی Y را برای طول عمر سیستم در نظر می‌گیریم. ابتدا تابع توزیع انباشته را به دست آورده و سپس می‌توانیم با مشتق گرفتن از آن، تابع چگالی احتمال را حساب می‌کنیم.

واضح است طول عمر سیستم را مدت زمانی که سیستم به کار خود ادامه می‌دهد در نظر می‌گیریم که به این منظور طبق صورت سوال عنصر اول و عنصر دوم یا عنصر سوم سالم باشند، پس خواهیم داشت:

$$F(y) = P(Y \leq y) = P[(X_1 \leq y) \cup ((X_2 \leq y) \cap (X_3 \leq y))]$$

$$= P(X_1 \leq y) + P[(X_2 \leq y) \cap (X_3 \leq y)] - P[(X_1 \leq y) \cap (X_2 \leq y) \cap (X_3 \leq y)]$$
$$= (1 - e^{-\lambda y}) + (1 - e^{-\lambda y})^2 - (1 - e^{-\lambda y})^3 \qquad y \geq 0$$

با مشتق گیری از تابع توزیع انباشته داریم:

$$f(y) = F'(y) = \lambda e^{-\lambda y} + 2(1 - e^{-\lambda y})(\lambda e^{-\lambda y}) - 3(1 - e^{-\lambda y})^2(\lambda e^{-\lambda y})$$

$$= 4\lambda e^{-2\lambda y} - 3\lambda e^{-3\lambda y} \qquad y \geq 0$$

بنابراین برای امید ریاضی طول عمر سیستم داریم:

$$E(Y) = \int_0^\infty y.f(y)dy = \int_0^\infty y.(4\lambda e^{-2\lambda y} - 3\lambda e^{-3\lambda y})dy = 2(\frac{1}{2\lambda}) - \frac{1}{3\lambda} = \frac{2}{3\lambda}$$

سؤال ۵.

متغیر تصادفی X نشان دهنده مدت زمان انجام یک فعالیت مشخص می‌باشد. تابع CDF زمان انجام این فعالیت بصورت زیر می‌باشد:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x^3}{3} & 0 \leq x < 1 \\ 1 - \frac{1}{2}(\frac{7}{3} - x)(\frac{7}{4} - \frac{3}{4}x) & 1 \leq x \leq \frac{7}{3} \\ 1 & x > \frac{7}{3} \end{cases}$$

آ) مقدار $f(x)$ را برای PDF این متغییر بدست آورید.

ب) مقدار $P(0/5 \leq X \leq 2)$ را بدست آورید.

ج) امید ریاضی متغیر تصادفی X را بدست آورید.

پاسخ .

آ) می‌دانیم تابع PDF مشتق تابع CDF می‌باشد. بنابراین از تابع CDF داده شده مشتق می‌گیریم:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x < 1 \\ \frac{7}{4} - \frac{3}{4}x & 1 \leq x \leq \frac{7}{3} \\ 0 & x > \frac{7}{x} \end{cases}$$

ب)

$$P(۰/۵ \leq X \leq ۲) = P(X \leq ۲) - P(X \leq ۰/۵) = F(۲) - F(۰/۵) = ۰/۹۵۸ - ۰/۰۴۱ = ۰/۹۱۷$$

ج) مقدار $E[X]$ برابر انتگرال زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx \\ &= \int_۰^۱ x \times x^۲\, dx + \int_۱^{\frac{۷}{۳}} x \times (\frac{۷}{۴} - \frac{۳}{۴}x)\, dx + \int_{\frac{۷}{۳}}^{\infty} ۰\, dx \\ &= ۰/۲۵ + ۰/۹۶۲ \\ &= ۱/۲۱۳ \end{aligned}$$

سؤال ۶.

فرض کنید دو متغییر تصادفی X و Y تابع PDF مشترک بصورت $f(x, y) = c(x^۲ + xy)$ دارند. بازه ورودی های X و Y بصورت $[۰, ۱]$ می‌باشد. ($X \in [۰, ۱]$ و $Y \in [۰, ۱]$).

آ مقدار c و تابع CDF مشترک این دو متغییر را بدست آورید.

ب توابع CDF حاشیه ای و PDF حاشیه این دو متغییر را بدست آورید.

ج مقدار $E(X)$ و $Var(X)$ را بدست آورید.

پاسخ .

آ از آنجا که مجموع احتمال تمام حالات برابر یک است، انتگرال زیر ما را به حواب می‌رساند.

$$\int_۰^۱ \int_۰^۱ c(x^۲ + xy)\, dx\, dy = c(\frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴}) = \frac{۷c}{۱۲} = ۱ \Rightarrow c = \frac{۱۲}{۷}$$

$$\begin{aligned} F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) &= \frac{۱۲}{۷} \int_۰^x \int_۰^y (u^۲ + uv)\, du\, dv \\ &= \frac{۱۲}{۷} \left(\frac{x^۳ y}{۳} + \frac{x^۲ y^۲}{۴} \right) \end{aligned}$$

ب توابع PDF حاشیه‌ای:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_۰^۱ f(x, y)\, dy = \frac{۱۲}{۷} \left(x^۲ + \frac{x}{۲}) \right) \\ f_Y(y) &= \int_۰^۱ f(x, y)\, dx = \frac{۱۲}{۷} \left(\frac{۱}{۳} + \frac{y}{۲} \right) \end{aligned}$$

توابع CDF حاشیه‌ای:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= F(x, ۱) = \frac{۱۲}{۷} \left(\frac{x^۳}{۳} + \frac{x^۲}{۴} \right) \\ F_Y(y) &= F(۱, y) = \frac{۱۲}{۷} \left(\frac{y}{۳} + \frac{y^۲}{۴} \right) \end{aligned}$$

ج

$$E(X) = \int_{۰}^{۱} x f_X(x)\, dx = \frac{۱۲}{۷} \int_{۰}^{۱} x \left(x^{۲} + \frac{x}{۲}\right)\, dx = \frac{۱۲}{۷} \left(\frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۶}\right) = \frac{۵}{۷}$$
$$E(X^{۲}) = \int_{۰}^{۱} x^{۲} f_X(x)\, dx = \frac{۳۹}{۷۰}$$
$$\Rightarrow Var(X) = E(X^{۲}) - E^{۲}(X) \simeq ۰/۰۴۶۹$$

سؤال ۷.

هریک از تایرهای جلوی یک نوع ماشین به صورت ایده‌آل تا فشار ۲۶psi پر می‌شود، اما به صورت واقع‌بینانه فشار هوا در هریک از تایرها می‌تواند با یک متغیر تصادفی مدل شود.

اگر متغیر تصادفی X را برای فشار هوای تایر سمت راست و برای فشار هوای تایر دیگر متغیر تصادفی Y را در نظر بگیریم، تابع چگالی احتمال مشترک فشار هوای این دو تایر به صورت زیر است:

$$f(x,y) = \begin{cases} K(x^{۲}+y^{۲}) & ۲۰ \leq x \leq ۳۰, ۲۰ \leq y \leq ۳۰ \\ ۰ & otherwise \end{cases}$$

آ) مقدار K را بدست آورید.

ب) احتمال اینکه فشار هردو تایر کمتر از مقدار ایده‌آل باشد را بدست آورید.

ج) تابع چگالی احتمال حاشیه‌ای تایر سمت راست را بدست آورید.

د) بررسی کنید آیا دو متغیر تصادفی فشار دو تایر مستقل هستند؟

پاسخ .

آ) می‌دانیم، برای آنکه $f(x,y)$ یک تابع چگالی احتمال باشد، باید دو ویژگی زیر را داشته باشد :

$$۱. \quad (x) \geq ۰, \quad x \in \mathbb{R}$$
$$۲. \quad \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy \ = ۱$$

با توجه به این دو ویژگی داریم:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy \ = ۱$$
$$\Rightarrow \int_{۲۰}^{۳۰}\int_{۲۰}^{۳۰} K(x^{۲}+y^{۲})dxdy = ۱$$
$$\Rightarrow \int_{۲۰}^{۳۰}\int_{۲۰}^{۳۰} K(x^{۲})dxdy + \int_{۲۰}^{۳۰}\int_{۲۰}^{۳۰} K(y^{۲})dxdy = ۱$$

$$\Rightarrow ۱۰K\int_{۲۰}^{۳۰}(x^{۲})dx + ۱۰K\int_{۲۰}^{۳۰}(y^{۲})dy = ۱$$
$$\Rightarrow ۱۰K \times \frac{۱۹۰۰۰}{۳} + ۱۰K \times \frac{۱۹۰۰۰}{۳} = ۱$$
$$\Rightarrow ۲۰K \times \frac{۱۹۰۰۰}{۳} = ۱ \Rightarrow K = \frac{۳}{۳۸۰۰۰۰}$$

ب) مقدار ایده‌آل $۲۶psi$ می‌باشد پس احتمال آنکه X ، Y هردو کمتر از ۲۶ باشند را باید بدست آوریم.

برای بدست آوردن این احتمال با استفاده از انتگرال گیری از تابع چگالی احتمال مشترک داریم:

$$P(X < ۲۶, Y < ۲۶) = \int_{-\infty}^{۲۶}\int_{-\infty}^{۲۶} K(x^{۲}+y^{۲})dxdy =$$
$$= \int_{۲۰}^{۲۶}\int_{۲۰}^{۲۶} K(x^{۲}+y^{۲})dxdy$$
$$= ۶\int_{۲۰}^{۲۶} K(x^{۲})dx + ۶\int_{۲۰}^{۲۶} K(y^{۲})dy = ۱۲K\int_{۲۰}^{۲۶} x^{۲}dx$$
$$= ۴K(۲۶^{۳} - ۲۰^{۳}) = ۳۸۳۰۴K = ۰٫۳۰۲۴$$

ج) برای بدست آوردن تابع چگالی احتمال حاشیه‌ای یک متغیر با استفاده از تابع چگالی احتمال مشترک کافی‌است نسبت به متغیر دیگری از تابع چگالی احتمال مشترک انتگرال بگیریم :

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \int_{۲۰}^{۳۰} K(x^{۲}+y^{۲})dy = ۱۰Kx^{۲}+K\frac{y^{۳}}{۳}\Big|_{۲۰}^{۳۰} = ۱۰Kx^{۲}+۰٫۰۵, \qquad (۲۰ \le x \le ۳۰)$$

د) برای مستقل بودن دو متغیر تصادفی باید رابطه‌ی $f(x,y) = f_X(x).f_Y(y)$ در تمامی حالات برقرار باشد
اگر تابع چگالی احتمال حاشیه‌ای متغیر Y را حساب کنیم، داریم :

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = \int_{۲۰}^{۳۰} K(x^{۲}+y^{۲})dx = ۱۰Ky^{۲}+K\frac{x^{۳}}{۳}\Big|_{۲۰}^{۳۰} = ۱۰Ky^{۲}+۰٫۰۵, \qquad (۲۰ \le y \le ۳۰)$$

با توجه به قسمت قبل سوال داریم:

$$f_X(x) = ۱۰Kx^{۲} + ۰٫۰۵$$

حال به بررسی شرط لازم برای استقلال دو متغیر می‌پردازیم:

$$(۱۰Kx^{۲} + ۰٫۰۵) \times (۱۰Ky^{۲} + ۰٫۰۵) \neq K(x^{۲}+y^{۲}) \quad , K = \frac{۳}{۳۸۰۰۰۰}$$
$$\Rightarrow f(x,y) \neq f_Y(y) \times f_X(x)$$

در نتیجه از یکدیگر مستقل نیستند.

سؤال ۸.

متغیر تصادفی X نتیجه انداختن یک تاس سالم ۴ وجهی است. متغیر تصادفی Y نیز نتیجه انداختن یک تاس سالم ۶ وجهی است. متغیر Z را برابر میانگین X و Y در نظر بگیرید.

آ) انحراف معیار X و Y را بدست آورید.

ب) مقادیر PMF و CDF متغیر Z را بدست آورید.

ج) فرض کنید در یک بازی اگر $X > Y$، مقدار $۲X$ تومان برنده می‌شوید و در غیر اینصورت یک تومان از دست می‌دهید. پس از ۶۰ بار انجام این بازی، امید ریاضی مقدار پولی که بدست آوردید (در صورتی که مثبت باشد) یا از دست دادید (در صورتی که منفی باشد) چقدر خواهد بود؟

پاسخ .

آ) ابتدا با توجه به معادله $Var(X) = E(X^۲) - E^۲(X)$ و از طریق جداول زیر، مقدار واریانس را محاسبه می‌کنیم:

X	1	2	3	4
$p(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
X^2	1	4	9	16

Y	1	2	3	4	5	6
$p(y)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
Y^2	1	4	9	16	25	36

$$\Rightarrow E(X) = \frac{۱}{۴}(۱+۲+۳+۴) = \frac{۵}{۲},$$
$$E(X^۲) = \frac{۱}{۴}(۱+۴+۹+۱۶)$$
$$\Rightarrow Var(X) = E(X^۲) - E^۲(X) = \frac{۵}{۴}$$
$$\Rightarrow \sigma_X = \frac{\sqrt{۵}}{۲}$$

مشابه X برای Y خواهیم داشت:

$$E(Y) = \frac{۱}{۶}(۱+۲+۳+۴+۵+۶) = \frac{۷}{۲},$$
$$E(Y^۲) = \frac{۱}{۶}(۱+۴+۹+۱۶+۲۵+۳۶) = \frac{۹۱}{۶}$$
$$\Rightarrow Var(Y) = E(Y^۲) - E^۲(Y) = \frac{۳۵}{۱۲}$$
$$\Rightarrow \sigma_Y = \sqrt{\frac{۳۵}{۱۲}} = \frac{\sqrt{۱۰۵}}{۶}$$

ب) مقادیر خواسته شده را برای هر مقدار از Z بدست می‌آوریم.
در این حین باید به این نکته توجه کرد که هر مقداری از Z حاصل میانگین چند ترکیب مختلف از X و Y است. برای مثال، برای $Z = ۱/۵$ دو حالتِ $(X = ۱, Y = ۲)$ و $(X = ۲, Y = ۱)$ را داریم. هر مقدار از Z حاصل اجتماع حالت‌های مختلف X و Y است. از آنجا که این حالات اشتراکی با هم ندارند، واضح است که مقدار اجتماع‌شان با جمع کردن‌شان بدست می‌آید. علاوه بر آن هر حالت حاصل اشتراک مقادیر خاصی از X و Y می‌باشد و از آنجا که این دو متغیر از هم مستقل هستند، با ضرب احتمال‌شان می‌توان احتمال اشتراک‌شان را بدست آورد.

$$P(Z = ۱) = P(X = ۱ \cap Y = ۱) = P(X = ۱) \times P(Y = ۱) = \frac{۱}{۲۴}$$
$$P(Z = ۱/۵) = P((X = ۱ \cap Y = ۲) \cup (X = ۲ \cap Y = ۱)$$
$$= P(X = ۱) \times P(Y = ۲) + P(X = ۲) \times P(Y = ۱)$$
$$\dots$$

Z	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
PMF	$\frac{1}{24}$	$\frac{2}{24}$	$\frac{3}{24}$	$\frac{4}{24}$	$\frac{4}{24}$	$\frac{4}{24}$	$\frac{3}{24}$	$\frac{2}{24}$	$\frac{1}{24}$

Z	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
CDF	$\frac{1}{24}$	$\frac{3}{24}$	$\frac{6}{24}$	$\frac{10}{24}$	$\frac{14}{24}$	$\frac{18}{24}$	$\frac{21}{24}$	$\frac{23}{24}$	$\frac{24}{24}$

توجه کنید که تابع CDF همان جمع مقادیر PMF قبل از مقدار خواسته شده است.

$$CDF(x) = \sum_{i<x} PMF(i)$$

ج) تنها جفت‌های (X, Y) ای که نامساوی $X > Y$ را برآورده می‌کنند بصورت زیر می‌باشند:

$$(۲,۱), (۳,۱), (۳,۲), (۴,۱), (۴,۲), (۴,۳)$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$P(X > Y) = P(X = ۲) \times P(Y = ۱) + P(X = ۳) \times P(Y = ۱) + P(X = ۳) \times P(Y = ۲) + ...$$
$$= ۶ \times (\frac{۱}{۴} \times \frac{۱}{۶}) = \frac{۶}{۲۴} \Rightarrow P(X > Y) = \frac{۶}{۲۴}$$

علاوه بر آن داریم:

$$P(X > Y | X = ۲) = \frac{۱}{۶}, P(X > Y | X = ۳) = \frac{۲}{۶}, P(X > Y | X = ۴) = \frac{۳}{۶}$$

بنابراین امید ریاضی مقدار برد در یک بازی برابر مقدار زیر خواهد بود:

$$E(Win) = (-۱)P(Y \geq X) + ۲(۲P(X > Y | X = ۲)P(X = ۲) + ۳P(X > Y | X = ۳)P(X = ۳)$$
$$+۴P(X > Y | X = ۴)P(X = ۴)) =$$
$$-\frac{۱۸}{۲۴} + \frac{۴۰}{۲۴} = \frac{۱۱}{۱۲}$$

حال در صورتی که ۶۰ بازی انجام دهیم، امید ریاضی مقدار پول بدست آمده برابر مقدار زیر خواهد بود:

$$E(Win_{total}) = E(Win_۱ + Win_۲ + ... + Win_{۶۰}) = ۶۰ \times \frac{۱۱}{۱۲} = ۵۵$$

سؤال ۹.

تمرین کامپیوتری سری چهارم با موضوع «توزیع‌های احتمالی پیوسته» را می‌توانید از طریق این لینک [1] دریافت کنید.

- یک کپی از فایل مذکور با نام CA4_SID در گوگل درایو خود تهیه کنید.
- در فایل خود بخش‌هایی که به وسیله مستطیل مشخص شده‌اند را با کدهای مناسب جایگزین کنید.
- سوالاتی که به زبان فارسی و رنگ سفید مطرح شده‌اند را در همان سلول پاسخ دهید.
- فایل کد خود را با ایمیل Hamed.gholami14@gmail.com با دسترسی Editor به اشتراک بگذارید.

[1] https://colab.research.google.com/drive/1ilP-zQ2dJcsXvPJlof87qpAZaWdQH5bo?usp=sharing

- لینک فایل پاسخ خود را در بخش متنی جایگاه آپلود این تمرین در سامانه ایلرن قرار دهید.
- دقت کنید در صورتی که لازم به ایجاد یک سلول جدید برای اجرای کد داشتید، اول سلول از R%% استفاده کنید تا سلول به عنوان کد R تشخیص داده شود.

هرگونه انتقاد، پیشنهاد یا نکته جانبی را می‌توانید از طریق یک سلول متنی در ابتدای فایل (قبل از سرفصل اصلی) به ما منتقل کنید.

پاسخ.

تکمیل شده‌ی فایل صورت سوال از طریق این لینک [2] در دسترس است.

[2] https://colab.research.google.com/drive/1YprXSHYV$_IxNjLeIFK44obOVFKEcG94-?usp=sharing$