

# به نام خدا



نظریه زبان‌ها و ماشین‌ها - بهار ۱۴۰۲

تمرین شماره ۱۱

دستیار آموزشی این مجموعه: سامان اسلامی نظری

Saman.Eslami78@gmail.com

تاریخ تحویل: ۱۴ خرداد (صفحه درس)



۱. ثابت کنید زبان  $EQ_{CFG}$  تصمیم‌پذیر<sup>۱</sup> نیست. این زبان نشان می‌دهد آیا دو گرامر داده شده زبان یکسانی تولید می‌کنند یا خیر. (از تصمیم‌ناپذیری زبان  $ALL_{CFG}$  استفاده کنید)
  ۲. یک ماشین تورینگ با دو نوار را فرض کنید. اثبات کنید مسئله اینکه آیا این ماشین تورینگ در حین اجرا روی نوار دومش یک کاراکتر non-blank را می‌نویسد یا خیر، یک مسئله Undecidable است.
  ۳. ثابت کنید مسئله PCP با مجموعه  $\Sigma$  که تنها یک عضو دارد، decidable است.
  ۴. ثابت کنید زبان زیر undecidable است:
- زبان T شامل تمام ماشین تورینگ‌های M-ای است که M در آن تنها در صورتی رشته w را قبول می‌کند که  $w^R$  را نیز قبول کند.

۵. ثابت کنید که زبان زیر Turing-undecidable است.

$$AMBIG_{CFG} = \{ \langle G \rangle \mid G \text{ is an ambiguous CFG.} \}$$

راهنمایی: مسئله PCP را به این زبان کاهش دهید. یک نمونه به صورت  $P = \left\{ \left[ \frac{t_1}{b_1} \right], \left[ \frac{t_2}{b_2} \right], \dots, \left[ \frac{t_k}{b_k} \right] \right\}$  را به گرامر

$$S \rightarrow S_1 \mid S_2$$

$$S_1 \rightarrow t_1 S_1 a_1 \mid \dots \mid t_k S_1 a_1 \mid t_1 a_1 \mid \dots \mid t_k a_k$$

$$S_2 \rightarrow b_1 S_1 a_1 \mid \dots \mid b_k S_1 a_1 \mid b_1 a_1 \mid \dots \mid b_k a_k$$

به طوری که  $a_1, a_2, \dots, a_k$  ترمینال‌های جدید نسبت به حروف مسئله PCP هستند.

۶. تابع زیر را در نظر بگیرید:

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 1 & \text{for odd } x \\ x/2 & \text{for even } x \end{cases}$$

دامنه این تابع، اعداد طبیعی می‌باشد. حالتی را در نظر بگیرید که در آن با یک  $x$  شروع کرده و یک دنباله به صورت  $x, f(x), f(f(x)), \dots$  را می‌سازیم؛ این کار را تا زمانی که به عدد ۱ برسیم ادامه می‌دهیم. محاسبات کامپیوتری نشان داده‌اند

که برای اعداد طبیعی از یک تا عددی بسیار بزرگ، این دنباله از اعداد در نهایت به یک ختم می‌شود. با این حال این پرسش که آیا به ازای تمام اعداد طبیعی، این دنباله به یک ختم می‌شود یا نه بی‌پاسخ مانده است؛ این مسئله، به مسئله  $3x + 1$  معروف است. فرض کنید که مسئله  $A_{TM}$  یک مسئله تصمیم‌پذیر باشد؛ با این فرض اثبات کنید که مسئله  $3x + 1$  نیز تصمیم‌پذیر است.

۷. یک استیت بی‌فایده در یک ماشین تورینگ، استیتی است که به ازای هیچ رشته ورودی، ماشین وارد این استیت نمی‌شود. اثبات کنید که مسئله مشخص کردن وجود استیت بی‌فایده در یک ماشین تورینگ، یک مسئله undecidable است.

۸. (امتیازی) برای تمام ماشین تورینگ‌های این مسئله، زبان نوار را به صورت  $\Gamma = \{0, 1, \sqcup\}$  فرض کنید. تابع busy beaver به صورت  $BB: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$  به طوریکه در ادامه توضیح داده شده، تعریف می‌شود؛ به ازای هر مقدار از  $k$ ، تمام ماشین تورینگ‌های  $k$ -استیتی را در نظر بگیرید که با شروع از یک نوار خالی، در نهایت halt می‌کنند.  $BB(k)$  را حداکثر تعداد یک‌ها میان تمام ماشین تورینگ‌ها در نظر می‌گیریم که روی نوار باقی می‌ماند. اثبات کنید این تابع قابل محاسبه نمی‌باشد.