



دانشگاه تهران، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر تحلیل و طراحی الگوریتم‌ها

تمرین کتبی هفتم
طراح: امید پناکاری، ملیکا صادقی

۱. فرض کنید برای گراف وزن دار G طول کوتاهترین مسیر بین هر دو راس را در اختیار داریم. حال اگر وزن یال e از w_e به w'_e کاهش یابد، آنگاه با مرتبه زمانی $O(n^2)$ مقادیر کوتاهترین مسیر بین رئوس را به روزرسانی کنید.

۲. در یک بازار مالی هر ارز را می‌توان با نرخ مشخصی به ارزهای دیگر تبدیل کرد. برای مثال اگر نرخ تبدیل ارز A به ارز B برابر با ۲ باشد، به این معنا است به ازای هر واحد از ارز A می‌توان دو واحد از ارز B را به دست آورد. Arbitrage به حالتی گفته می‌شود که در آن می‌توان با شروع از مقدار مشخصی از ارز A و انجام مجموعه‌ای از تبدیل‌ها، بتوان در نهایت مقدار بیشتری از ارز A به دست آورد. حال الگوریتمی ارائه دهید که با گرفتن ارزها و نرخ‌های تبدیل میان آن‌ها به ما بگوید که آیا در این بازار مالی امکان Arbitrage وجود دارد یا خیر.

۳. گراف جهت دار G با وزنهای مثبت داده شده است. می‌خواهیم از بین کوتاه‌ترین مسیرهای از راس S به راس t مسیری را پیدا کنیم که بیشترین وزن یال‌ها در این مسیر کمینه باشد. الگوریتم دایکسترا را طوری تغییر بدهید (به همراه ارائه شبهه کد) که این را پیدا کند. پیچیدگی زمان اجرای الگوریتم خود را بدست آورده و نشان دهید پاسخ صحیح را پیدا می‌کند.

۴. شهردار شهر s به تازگی می‌خواهد به شهر دیگری سفر کند. شهرها با جاده‌های یک طرفه با یکدیگر ارتباط دارند. همچنین بعضی از جاده‌ها به تازگی آسفالت شده‌اند و او می‌خواهد برای بررسی وضعیت اینگونه جاده‌ها حداکثر از ۲ تای آنها در مسیر خود بگذرد. از طرفی او عجله دارد و می‌خواهد در سریع‌ترین زمان ممکن به شهرهای دیگر دسترسی پیدا کند.

(۱) الگوریتمی ارائه دهند که کمترین مسافت بین شهری تا همه شهرهای دیگر محاسبه کند و شرط داده شده برای آن برقرار باشد. مرتبه زمانی را بر اساس تعداد شهرها و جاده‌های شهر محاسبه کنید و درستی آن را نشان دهید.
(ب) شبهه کدی ارائه دهید که کوتاه‌ترین مسیر از مبدا s را به سایر شهرها پیدا می‌کند. (نیازی به در نظر گرفتن شرط گذشتن از جاده‌های آسفالت در شبهه که نیست)

۵. علی و دوستانش به علت خوردن غذای فاسد، دچار مسمومیت غذایی شده‌اند و نیاز دارند تا هرچه سریع‌تر خود را به بیمارستان برسانند. خانه علی در تقاطع A و تنها بیمارستان موجود در شهر در تقاطع B قرار دارد. تعدادی خیابان در این شهر وجود دارد که هر خیابان یک تقاطع را به تقاطع دیگر متصل می‌کند. به عبارت دیگر خیابان i ام، تقاطع $u[i]$ را به تقاطع $v[i]$ متصل می‌کند و همچنین مدت زمان عبود از این خیابان نیز برابر با $t[i]$ می‌باشد. همچنین هر تقاطع دارای یک چراغ راهنمایی می‌باشد که به صورت دوره‌ای قرمز و سبز می‌شود. تقاطع i ام به مدت $r[i]$ ثانیه قرمز و برای $g[i]$ ثانیه نیز سبز خواهد بود. در هنگامی چراغ یک تقاطع قرمز باشد، نمی‌توان از هیچ‌کدام از خیابان‌های متصل به آن استفاده کرد. حال الگوریتمی ارائه دهید که با گرفتن داده‌های مربوط خیابان‌ها و تقاطع‌ها و وضعیت اولیه چراغ‌ها در هر تقاطع، کمترین زمان ممکن برای رسیدن علی به بیمارستان را بیابد.