



## ریاضیات گسسته

تمرین هفتم - نظریه اعداد

حسام اسدالله زاده

تاریخ تحویل ۱۴۰۱/۰۲/۰۲

### سؤال ۱.

برای اعداد طبیعی  $n, m, k$  ثابت کنید اگر  $m^n | n^m$  و  $n^k | k^n$  آنگاه  $m^k | k^m$ .

### سؤال ۲.

دنباله  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  را به صورت  $a_n = 10 + n^2$  تعریف می‌کنیم. فرض کنید  $d$  بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عضو متوالی این دنباله باشد. بیش‌ترین مقدار ممکن برای  $d$  را بیابید.

### سؤال ۳.

برای اعداد طبیعی  $a, b, c, d$  داریم  $ab = cd$ . برای هر عدد طبیعی  $m$  تعریف می‌کنیم  $T_m = a^m + b^m + c^m + d^m$ . ثابت کنید:

(الف)  $T_1$  مرکب است.

(ب) برای هر  $m$  طبیعی،  $T_m$  مرکب است.

(ج) برای هر عدد طبیعی  $n \geq 2$ ،  $n^{T_m} - 1$  مرکب است.

### سؤال ۴.

(الف) ثابت کنید معادله  $15x^2 - 7y^2 = 9$  هیچ جواب صحیحی ندارد.

(ب) ثابت کنید برای معادله  $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$  هیچ جواب صحیحی به جز  $(0, 0, 0)$  وجود ندارد.

## سؤال ۵.

فرض کنید  $p$  عدد اول فرد باشد.

الف) نشان دهید:

$$\left(\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right)^2 \equiv (-1)^{\frac{p+1}{2}} \pmod{p}$$

ب) اگر  $p \equiv 1 \pmod{4}$  باشد، ثابت کنید  $\left(\frac{p-1}{2}\right)!$  پاسخی برای معادله  $x^2 \equiv -1 \pmod{p}$  است.

و اگر  $p \equiv 3 \pmod{4}$  باشد، ثابت کنید  $\left(\frac{p-1}{2}\right)!$  پاسخی برای معادله  $x^2 \equiv 1 \pmod{p}$  است.

ج) امتیازی: در نهایت نشان دهید

$$1^2 \times 3^2 \times 5^2 \times \dots \times (p-4)^2 \times (p-2)^2 \equiv (-1)^{\frac{p+1}{2}} \pmod{p}$$

## سؤال ۶.

الف) با استفاده از قضیه فرما نشان دهید هر عدد صحیح به شکل  $a^2 \pm a + 1$  نمی‌تواند عامل اول به شکل  $3k+2$  داشته باشد.

ب) فرض کنید دنباله  $x_n$  از اعداد صحیح به این صورت تعریف می‌شود که  $x$  یک عدد صحیح نامنفی دلخواه بوده و باقی اعضای دنباله به صورت:

$$x_{n+1} = \prod_{i=1}^n x_i + 1$$

تعریف می‌شود. ثابت کنید بی‌نهایت عدد اول  $p$  وجود دارد که هیچ‌کدام از جملات این دنباله را عاد نمی‌کند.