آمار و احتمالات مهندسی

تمرین دوم - احتمال شرطی و استقلال

امیرحسین و سیاوش

تاریخ تحویل ۱۴۰۱/۰۸/۱۴

سؤال ۱.

اطلاعات زیر درباره مسافران سفرهای تابستانی است که از طریق یک نظرسنجی بدست آمده است:
۴۰ از مسافران ایمیل کاری خود را چک می‌کنند، ۳۰ از تلفن همراه برای انجام کارهای مربوط به شغل خود استفاده می‌کنند، ۲۵ لپتاپ با خود به همراه می‌برند، ۲۳ هم ایمیل کاری خود را چک می‌کنند و هم از تلفن همراه برای انجام کارهای مربوط به شغل‌شان استفاده می‌کنند؛ ۵۱ نه ایمیل کاری خود را چک کرده و نه از تلفن همراه برای انجام کارهای مربوط به شغل‌شان استفاده کرده و نه حتی با خود لپتاپ به همراه می‌برند.
همچنین می‌دانیم ۸۸ نفر از هر ۱۰۰ نفر که لپتاپ به همراه دارند، ایمیل کاری خود را هم چک می‌کنند و همچنین ۷۰ نفر از هر ۱۰۰ نفر که از تلفن همراه برای انجام کارهای مربوط به شغل‌شان استفاده می‌کنند، لپتاپ هم به همراه دارند.

آ احتمال اینکه مسافری که به صورت تصادفی انتخاب شده، از تلفن همراه برای انجام کارهای شغلی خود استفاده کند، در صورتی که بدانیم ایمیل کاری خود را چک می‌کند، چقدر است؟

ب احتمال اینکه یک نفر که در سفر با خود لپتاپ به همراه دارد از تلفن همراه نیز برای انجام کارهای شغلی خود استفاده کند، چقدر است؟

ج یک مسافر که به صورت تصادفی انتخاب شده و ایمیل کاری خود را چک می‌کند و لپتاپ به همراه دارد، چقدر احتمال دارد که از تلفن همراه نیز برای انجام کارهای شغلی خود استفاده کند؟

پاسخ.
فرض کنید E، C و L به ترتیب پیشامدهای متناظر با ایمیل، تلفن همراه و لپتاپ باشند. با توجه به صورت مسئله می‌دانیم:

$$P(E) = ۴۰،\ P(C) = ۳۰،\ P(L) = ۲۵\ ,$$

همچنین با توجه به اینکه گفته شده ۲۳ هم ایمیل چک می‌کنند هم از تلفن همراه استفاده می‌کنند بنابراین:

$$P(E \cap C) = ۲۳\ ,$$

و نیز گفته شده ۵۱ نه ایمیل،نه تلفن همراه و نه لپتاپ که بیانگر اشتراک متمم سه پیشامد تعریف شده است:

$$P(E' \cap C' \cap L') = ۵۱$$

گفته شده از هر ۱۰۰ نفر که لپتاپ به همراه دارند (که معادل وقوع پیشامد L است) ۸۸ نفر ایمیل هم چک می‌کنند. یعنی در صورت وقوع پیشامد L احتمال اینکه پیشامد E رخ دهد ۸۸ از ۱۰۰ است:

$$P(E|L) = ۸۸$$

و به صورت کاملاً مشابه توضیحات بالا می‌توان از صورت سوال عبارت زیر را نتیجه گرفت:

$$P(L|C) = ۷۰$$

آ پیشامد اینکه یک مسافر که ایمیل کاری خود را چک می‌کند انتخاب شود را با E نمایش دادیم که اینجا شرط سوال است. به بیان دیگر وقتی یک مسافری که ایمیل کاری خود را چک می‌کند انتخاب می‌شود یعنی پیشامد E رخ داده و حال سوال از ما می‌خواهد بگوییم که در صورت وقوع این پیشامد، چقدر احتمال وجود دارد که مسافر انتخاب شده از تلفن همراه نیز برای انجام کارهای شغل خود استفاده کند که همان پیشامد C است. پس به بیان ریاضی ما احتمال وقوع پیشامد C به شرطی که پیشامد E رخ داده باشد را می‌خواهیم:

$$P(C|E) = \frac{P(E \cap C)}{P(E)} = \frac{۰/۲۳}{۰/۴۰} = ۰/۵۷۵$$

ب حل این قسمت مشابه قسمت اول است با این تفاوت که در اینجا شرط مسئله وقوع پیشامد L است. پس ما احتمال وقوع پیشامد C به شرط وقوع پیشامد L را می‌خواهیم. با استفاده از قانون بیز:

$$P(C|L) = \frac{P(C \cap L)}{P(L)} = \frac{P(C)P(L|C)}{P(L)} = \frac{(۰/۳)(۰/۷)}{۰/۲۵} = ۰/۸۴$$

ج این بخش هم مشابه دو بخش قبل است و صرفاً شرط مسئله اشتراک دو پیشامد E و L است زیرا گفته شده که مسافر انتخاب شده هم ایمیل چک می‌کند و هم لپتاپ به همراه دارد. پس داریم:

$$P(C|E \cap L) = \frac{P(C \cap E \cap L)}{P(E \cap L)}$$

محاسبه مخرج:

$$P(E \cap L) = P(L)P(E|L) = (۰/۲۵)(۰/۸۸) = ۰/۲۲$$

محاسبه صورت:

$$P(E \cup C \cup L) = ۱ - P(E' \cap C' \cap L') = ۰/۴۹$$

بنابراین:

$$P(E \cup C \cup L) = P(C) + P(E) + P(L) - P(E \cap C) - P(C \cap L) - P(E \cap L) + P(E \cap C \cap L)$$

با جایگذاری موارد داده شده در صورت سوال خواهیم داشت:

$$P(C \cap E \cap L) = ۰/۲۰$$

در نهایت:

$$P(C|E \cap L) = \frac{۰/۲}{۰/۲۲} = ۰/۹۰۹۱$$

سؤال ۲.

در اکتبر ۱۹۹۴، عیبی در چیپ‌های پنتیوم اینتل کشف شد که در نتیجه آن پاسخ عملیات تقسیم می‌توانست دچار خطا شود. شرکت اینتل در ابتدا ادعا می‌کرد احتمال اینکه پاسخ یک عملیات تقسیم اشتباه شود، ۱ در ۹ میلیارد است بنابراین هزاران سال طول می‌کشد که یک کاربر معمولی با چنین خطایی مواجه شود.با این حال استفاده آماردانان از این چیپ‌ها مانند کاربران معمولی نیست. برخی از تکنیک‌های پیشرفته آماری پرمحاسبه[1] هستند که انجام یک میلیارد تقسیم در یک بازه زمانی کوتاه در آن‌ها دور از انتظار نیست. با فرض اینکه احتمال خطای ۱ در ۹ میلیارد ادعا شده توسط شرکت تولید کننده درست باشد و نتایج عملیات‌های تقسیم مختلف، مستقل از یکدیگر باشند، احتمال اینکه حداقل یک خطا در یک میلیارد عملیات تقسیم در این چیپ رخ دهد چقدر است؟

[1] Computationally intensive

پاسخ .
اگر احتمال رخ دادن یک پیشامد p باشد و به تعداد n مرتبه آزمایش تکرار شود، احتمال اینکه این پیشامد هیچوقت رخ ندهد برابر است با:

$$(۱-p)(۱-p)...(۱-p)(۱-p)=(۱-p)^n,$$

و بنابراین احتمال اینکه حداقل یکبار رخ دهد برابر با $۱-(۱-p)^n$ است.
در این مثال با توجه به صورت مسئله $p=\frac{۱}{۹۰۰۰۰۰۰۰۰}$ و $n=۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰$ که با جایگذاری این موارد داریم:

$$۱-۰/۹۰۴۸=۰/۰۹۵۲$$

بنابراین ادعای اینتل مبنی بر اینکه این عیب جدی نیست ادعای چندان درستی نیست و مشاهده می‌شود که حدود ۱۰ احتمال دارد که در محاسبات آماری یک آماردان خطا ایجاد شود که احتمال کمی نیست و کوچکترین خطایی در محاسبات می‌تواند باعث شود کل نتایج غیر قابل استفاده شوند.
توجه: برای مقادیر بسیار کوچک p می‌توان از تقریب $(۱-p)^n\approx ۱-np$ استفاده کرد بنابراین در این مثال احتمال خواسته شده به صورت تقریبی برابر با $۱-(۱-np)=np$ است که با جایگذاری مقادیر به عدد $\frac{۱}{۹}$ می‌رسیم.

سؤال ۳.

فرض کنید G پیشامد گناهکار بودن یک فرد متهم به دزدی است. در جمع‌آوری شواهد، وکیل متهم متوجه می‌شود که پیشامد $E_۱$ اتفاق افتاده است و کمی بعد متوجه می‌شود پیشامد $E_۲$ هم اتفاق افتاده است.

آ آیا امکان دارد که این شواهد به صورت جداگانه احتمال G را افزایش دهند، اما در نظر گرفتن آن‌ها در کنار هم، احتمال G را کاهش دهد؟ به بیان دیگر آیا ممکن است $P(G|E_۱)>P(G)$ و $P(G|E_۲)>P(G)$، اما $P(G|E_۱\cap E_۲)<P(G)$؟
اگر امکان‌پذیر است ذکر یک مثال کفایت می‌کند و در غیر اینصورت ثابت کنید چنین چیزی امکان‌پذیر نیست.

ب نشان دهید تفاوتی وجود ندارد که به‌روز رسانی احتمال G را در یک مرحله انجام دهیم یا در دو مرحله.
منظور از یک مرحله این است که محاسبه $P(G|E_۱\cap E_۲)$ در یک مرحله باشد: $P(G)\leftarrow P(G|E_۱\cap E_۲)$.
در دو مرحله منظور این است که پس از اینکه متوجه شدیم اولین پیشامد اتفاق افتاده به‌روز رسانی کرده و نیز دوباره بعد از اینکه متوجه شدیم دومین پیشامد هم اتفاق افتاده است به‌روز رسانی کنیم: $P(G)\leftarrow P(G|E_۱)$ سپس $(P(G|E_۱\cap E_۲)\leftarrow P(G|E_۱))$.

پاسخ .

آ اینکه شواهد به صورت جداگانه احتمال G را افزایش دهند به این معنی است که به شرط وقوع پیشامد $E_۱$ یا $E_۲$ (به تنهایی و نه هر دو با هم) احتمال وقوع پیشامد G بیشتر باشد نسبت به حالتی که از وقوع هیچکدام از این دو پیشامد اطلاعی نداریم:

$$P(G|E_۱)>P(G)$$

$$P(G|E_۲)>P(G)$$

اما اگر از وقوع هر دو پیشامد $E_۱$ و $E_۲$ (همزمان با هم) اطلاع داشته باشیم احتمال وقوع G کاهش یابد:

$$P(G|E_۱\cap E_۲)<P(G)$$

در مثال زیر پیشامدها طوری تعریف شده‌اند که مشاهده می‌شود که این موضوع امکان‌پذیر است:

$$G=E_۱\cup E_۲-E_۱\cap E_۲$$

$$P(E_۱)=P(E_۲)=\frac{۱}{۳},P(E_۱\cap E_۲)=\frac{۱}{۹}$$

$$P(G) = P(E_۱ \cup E_۲ - E_۱ \cap E_۲) = \frac{۱۶}{۲۷}$$
$$P(G \cap E_۱) = P(G \cap E_۲) = \frac{۸}{۲۷}$$

و خواهیم داشت:

$$P(G|E_۱) = \frac{P(G \cap E_۱)}{P(E_۱)} = \frac{۸}{۹} > \frac{۱۶}{۲۷} = P(G)$$
$$P(G|E_۲) = \frac{P(G \cap E_۲)}{(P(E_۲)} = \frac{۸}{۹} > \frac{۱۶}{۲۷} = P(G)$$
$$P(G|E_۱ \cap E_۲) = \frac{P(G \cap E_۱ \cap E_۲)}{P(E_۱ \cap E_۲)} = ۰ < \frac{۱۶}{۲۷} = P(G)$$

یک مثال شهودی برای درک بهتر مسئله:
اگر بدانیم دزدی در بازه‌ی ساعت ۱ تا ۳ انجام شده، این که مظنون در ساعت ۱ تا ۲ در کافه‌ای نزدیک محل دزدی بوده (پیشامد $E_۱$) یا این که از ساعت ۲ تا ۳ در همان کافه بوده (پیشامد $E_۲$) هر کدام به تنهایی باعث افزایش احتمال مجرم بودن می‌شوند اما اگر با هم در نظر گرفته شوند مظنون بی‌گناه خواهد بود.

ب) $P_{new}(E)$ را برابر با احتمال پیشامد E پس از به‌روز رسانی با در نظر گرفتن پیشامد $E_۱$ در نظر می‌گیریم. به عبارت دیگر:

$$P_{new}(E) = P(E|E_۱)$$

طبق تعریف احتمال شرطی حکم را اثبات می‌کنیم:

$$P_{new}(G|E_۲) = \frac{P_{new}(G \cap E_۲)}{P_{new}(E_۲)} = \frac{P(G \cap E_۲|E_۱)}{P(E_۲|E_۱)} = \frac{\frac{P(G \cap E_۱ \cap E_۲)}{P(E_۱)}}{\frac{P(E_۱ \cap E_۲)}{P(E_۱)}} = P(G|E_۱ \cap E_۲)$$

سؤال ۴.

فرض کنید قرار است یک بازی با یک سکه انجام دهیم، به این صورت که اگر در دو پرتاب متوالی نتیجه شیر بیاید (HH) شما برنده می‌شوید و اگر در دو پرتاب متوالی نتیجه خط بیاید (TT) من برنده می‌شوم و شما می‌بازید. در غیر اینصورت (حالت TH یا HT) به پرتاب سکه ادامه می‌دهیم. همچنین به دلیل شکل خاص سکه، احتمال آمدن شیر برابر p است. احتمال اینکه شما در این بازی برنده شوید را به دست آورید.

پاسخ .
احتمال خط آمدن را q می‌نامیم همچنین می‌دانیم $p + q = ۱$
اگر W مجموعه پیشامدهایی باشد که منجر به برنده شدن در بازی می‌شود باشد، آنگاه این مجموعه به صورت زیر خواهد بود.

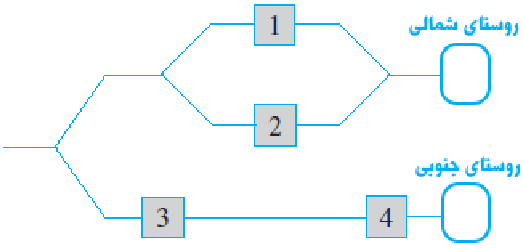
$$W = \{HH, HTHH, HTHTHH, ...\} \cup \{THH, THTHH, THTHTHH, ...\}$$

پس احتمال برنده شدن شما در بازی به صورت زیر محاسبه خواهد شد

$$\begin{aligned}
W &= P(\{HH, HTHH, HTHTHH, ...\}) + P(\{THH, THTHH, THTHTHH, ...\}) \\
&= P(HH) + P(HTHH) + P(HTHTHH) + ... + P(THH) + P(THTHH) + P(THTHTHH) + ... \\
&= p^۲ + p^۳q + p^۴q^۲ + ... + p^۲q + p^۳q^۲ + p^۴q^۳ + ... \\
&= p^۲(۱ + pq + (pq)^۲ + ...) + p^۲q(۱ + pq + (pq)^۲ + ...) \quad (\text{فاکتور گیری } p^۲ \text{ از معادله قسمت اول و } p^۲q \text{ از معادله قسمت دوم}) \\
&= p^۲(۱ + q)(۱ + pq + (pq)^۲ + ...) \quad (\text{فرمول جمع دنباله هندسی}) \\
&= \frac{p^۲(۱ + q)}{۱ - pq} \quad (q = ۱ - p \text{ جایگذاری}) \\
&= \frac{p^۲(۲ - p)}{۱ - p + p^۲}
\end{aligned}$$

سؤال ۵.

سیستم آبرسانی دو روستا را مطابق شکل زیر را در نظر بگیرید. پمپ ۱ و ۲ به صورت موازی به هم متصل شده‌اند بنابراین ساکنین قسمت شمالی به آب دسترسی خواهند داشت اگر و تنها اگر یکی از پمپ‌های ۱ یا ۲ به درستی عمل کند. همچنین از آنجا که پمپ‌های ۳ و ۴ به صورت سری متصل شده‌اند، اگر و تنها اگر هر دو پمپ ۳ و ۴ به درستی عمل کنند آنگاه ساکنین بخش جنوبی هم به آب دسترسی خواهند داشت.
اگر بدانیم پمپ‌ها مستقل از هم کار می‌کنند و احتمال اینکه پمپ‌های ۱ تا ۴ به درستی کار کنند به ترتیب ۹۰ درصد، ۹۰ درصد، ۸۰ درصد و ۸۰ درصد باشد. احتمال اینکه آبرسانی به این دو روستا به درستی انجام شود چقدر است؟



سیستم آبرسانی مطرح شده در سوال ۵

پاسخ .
اگر A_i را پیشامد کارکرد درست پمپ i فرض کنیم $(i = ۱, ۲, ۳, ۴)$؛ آنگاه با توجه به طراحی شبکه آبرسانی، پیشامدی که آبرسانی به درستی انجام شود به صورت $(A_۱ \cup A_۲) \cap (A_۳ \cap A_۴)$ است.
محاسبه $P(A_۱ \cup A_۲)$:

$$P(A_۱ \cup A_۲) = P(A_۱) + P(A_۲) - P(A_۱ \cap A_۲) = ۰/۹ + ۰/۹ - (۰/۹)(۰/۹) = ۰/۹۹$$

در عبارت فوق از استقلال پیشامدهای $A_۱$ و $A_۲$ استفاده کرده‌ایم.
برای محاسبه $P(A_۳ \cap A_۴)$ به طور مشابه از استقلال پیشامدهای $A_۳$ و $A_۴$ داریم:

$$P(A_۳ \cap A_۴) = (۰/۸)(۰/۸) = ۰/۶۴$$

حال با استفاده از استقلال داریم:

$$P((A_۱ \cup A_۲) \cap (A_۳ \cap A_۴)) = P(A_۱ \cup A_۲) \times P(A_۳ \cap A_۴) = (۰/۹۹)(۰/۶۴) = ۰/۶۳۳۶$$

توجه:برای محاسبه عبارت فوق می‌توانستیم از قوانین دمورگان و ... نیز استفاده کنیم برای مثال می‌توانستیم در ابتدا بنویسیم:

$$P(A_۱ \cup A_۲) = ۱ - P(\overline{A_۱ \cup A_۲}) = ۱ - P(\bar{A}_۱ \cap \bar{A}_۲) = ۱ - P(\bar{A}_۱) \times P(\bar{A}_۲) = ۱ - (۱ - ۰/۹)(۱ - ۰/۹) = ۰/۹۹$$

و در بقیه قسمت‌ها نیز به طور مشابه می‌توانستیم قوانین دمورگان را اعمال کنیم.

سؤال ۶.

فرض کنید می‌خواهیم الگوریتم fairRandom() را طوری طراحی کنیم که به صورت تصادفی و با احتمال یکسان یکی از اعداد ۰ یا ۱ را تولید کند. متأسفانه تنها تابعی که در دسترس ماست تابع unknownRandom() است که با احتمال p که لزوماً برابر $\frac{۱}{۲}$ نیست عدد ۱ را تولید می‌کند و با احتمال $۱ - p$ عدد ۰ را تولید می‌کند. الگوریتم زیر را در نظر بگیرید:

```
int fairRandom() {
    int r1, r2;
```

```
    while (true) {
        r1 = unknownRandom();
        r2 = unknownRandom();
        if (r1 != r2)
            break;
    }
    return r2;
}
```

آ به صورت ریاضی اثبات کنید که fairRandom به درستی کار می‌کند. به بیان دیگر نشان دهید که این تابع با احتمال یکسانی ۰ یا ۱ تولید می‌کند.

ب ما می‌خواهیم این تابع را ساده‌تر کنیم بنابراین تابع simpleRandom() زیر را می‌نویسیم. آیا این تابع هم اعداد ۰ و ۱ را با احتمال یکسان تولید می‌کند؟ پاسخ خود را توضیح دهید. (راهنمایی: احتمال اینکه این تابع ۱ را خروجی دهد (برحسب p) محاسبه کنید.)

```
int simpleRandom() {
    int r1, r2;
    r1 = unknownRandom();
    while (true) {
        r2 = unknownRandom();
        if (r1 != r2)
            break;
        r1 = r2;
    }
    return r2;
}
```

پاسخ .

آ با توجه به استقلال $r_۱$ و $r_۲$ می‌توان به سادگی نتیجه گرفت:
$$\begin{cases} P(r_۱=۰,r_۲=۰) &= (۱-p)^۲ \\ P(r_۱=۰,r_۲=۱) &= p(۱-p) \\ P(r_۱=۱,r_۲=۰) &= p(۱-p) \\ P(r_۱=۱,r_۲=۱) &= p^۲ \end{cases}$$
از آنجا که ما فقط در حالات $P(r_۱=۰,r_۲=۱)$ و $P(r_۱=۱,r_۲=۰)$ از تابع خارج می‌شویم و احتمال هر دوی این حالات یکسان است بنابراین این تابع با احتمال یکسانی ۰ یا ۱ تولید می‌کند.

ب نکته اصلی این بخش از سوال این است که باید توجه داشته باشیم خط $r_۱ = r_۲$ در این تابع عملاً اضافه است؛ زیرا وقتی به این خط می‌رسیم که شرط $r_۱ \neq r_۲$ برقرار نباشد که یعنی وقتی به این خط می‌رسیم، $r_۱$ برابر با $r_۲$ بوده و بنابراین خط مذکور تاثیری در الگوریتم ندارد و می‌توان فرض کرد این خط وجود ندارد. با توجه به این موضوع به سادگی می‌توان دید که این تابع اعداد ۰ یا ۱ را با احتمال یکسان تولید نمی‌کند؛ زیرا وقتی $r_۱ = ۱$ باشد آنگاه حلقه آنقدر ادامه پیدا می‌کند تا وقتی که $r_۲ = ۰$ شود و بعد از حلقه خارج می‌شود یعنی وقتی $r_۱ = ۱$ باشد (با احتمال p این اتفاق رخ می‌دهد) آنگاه تابع خروجی ۰ می‌دهد پس این تابع با احتمال p عدد ۰ را تولید می‌کند و بنابراین با احتمال $۱-p$ عدد ۱ را تولید می‌کند که چون لزوماً p برابر $\frac{۱}{۲}$ نیست پس تابع عملکرد مطلوب ما را ندارد.

سؤال ۷.

دوستان شما در یکی از آزمایشگاه‌های دانشکده برق و کامپیوتر دانشگاه تهران، توالی DNA جمعیت بزرگی را بررسی کرده‌اند تا متوجه شوند که ژن (G) چگونه می‌تواند بر دو خصیصه خاص ($T_۱$ و $T_۲$) اثرگذار باشد. آن‌ها نتایج زیر را بدست آوردند:

$$P(G) = ۰/۶, P(T_۱|G) = ۰/۸, P(T_۲|G) = ۰/۹$$

آن‌ها همچنین مشاهده کردند که اگر شخصی ژن (G) را نداشته باشد، هیچکدام از خصیصه‌های ($T_۱$ و $T_۲$) در او بروز پیدا نمی‌کند و نیز احتمال اینکه یک فرد هردو خصیصه ($T_۱$ و $T_۲$) را داشته باشد به شرط داشتن آن ژن (G) برابر با ۷۲ است.

آ آیا به شرط وجود ژن G، دو خصیصه $T_۱$ و $T_۲$ مستقلند ؟

ب آیا دو خصیصه $T_۱$ و $T_۲$ استقلال شرطی دارند اگر ژن G نباشد؟

ج $P(T_۱)$ را بیابید.

د $P(T_۲)$ را بیابید.

ه آیا $T_۱$ و $T_۲$ وابسته‌اند؟

پاسخ.

آ با توجه به صورت سوال می‌دانیم $P(T_۱ \cap T_۲|G) = ۰/۷۲$. از طرفی :

$$P(T_۱|G)P(T_۲|G) = (۰/۸)(۰/۹) = ۰/۷۲$$

پس:

$$P(T_۱ \cap T_۲|G) = P(T_۱|G)P(T_۲|G)$$

بنابراین نتیجه می گیریم دو رویداد مستقلند.
یادآوری:
در حالت غیر شرطی برای استقلال تعریف زیر را داشتیم:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

به طور مشابه در حالت شرطی هم داریم:

$$P(A \cap B|C) = P(A|C)P(B|C)$$

ب با توجه به توضیحات مسئله:

$$P(T_۱ \cap T_۲|\bar{G}) = P(T_۱|\bar{G}) = P(T_۲|\bar{G}) = ۰$$

در نتیجه:

$$P(T_۱ \cap T_۲|G) = P(T_۱|\bar{G})P(T_۲|\bar{G})$$

پس دو رویداد در این حالت هم مستقلند.

ج با توجه به قانون احتمال کل:

$$P(T_۱) = P(T_۱|\bar{G})P(\bar{G}) + P(T_۱|G)P(G) \ = ۰ + (۰/۸)(۰/۶) = ۰/۴۸$$

د مشابه قبل:

$$P(T_۲) = P(T_۲|\bar{G})P(\bar{G}) + P(T_۲|G)P(G)$$
$$P(T_۲) = ۰ + (۰/۹)(۰/۶) = ۰/۵۴$$

ه

$$P(T_۱ \cap T_۲) = P(T_۱ \cap T_۲|G)P(G) + P(T_۱ \cap T_۲|\bar{G})P(\bar{G}) = (۰/۷۲)(۰/۶) + ۰ = ۰/۴۳۲$$

$$(۰/۷۲)(۰/۶) = ۰/۴۳۲ \neq (۰/۴۸)(۰/۵۴) = ۰/۲۵۹۲ \rightarrow P(T_۱ \cap T_۲) \neq P(T_۱)P(T_۲)$$

بنابراین وابسته‌اند.

یادآوری قانون احتمال کل:

اگر مجموعه مرجع U را به زیر مجموعه‌های $A_۱, A_۲, ..., A_n$ افراز کنیم و B یک پیشامد دلخواه در مجموعه مرجع باشد آنگاه:

$$P(B) = \sum_i P(B \cap A_i) = \sum_i P(B|A_i)P(A_i)$$

سؤال ۸.

مریم برای یک شرکت تولیداتی کار می‌کند، افزایش حقوق کارمندان شرکت بستگی به افزایش سود شرکت دارد. فرض کنید R پیش‌آمدی باشد که حقوق مریم در پایان سال افزایش یابد، S پیش‌آمدی است که سود شرکت بیشتر از ۱۰ افزایش یابد. و E پیش‌آمدی است که تولیدات شرکت بیشتر از ۳۰ افزایش یابد. همچنین می‌دانیم که افزایش حقوق او به سود شرکت بستگی دارد، و نه مستقیما به میزان فروش. اگر احتمال اینکه سود شرکت بیش از ۱۰ افزایش یابد برابر ۷۵ باشد و داشته باشیم:

$$P(R|S) = ۰/۸, \quad P(R|\overline{S}) = ۰/۱, \quad P(E|S) = ۰/۹۵, \quad P(E|\overline{S}) = ۰/۱$$

در صورتی که بدانیم تولیدات شرکت ۳۳ افزایش داشته است، احتمال این‌که حقوق مریم افزایش پیدا کند چند برابر احتمال افزایش نیافتن حقوق اوست؟ (راهنمایی: دو پیش‌آمد E و R به شرط S از هم مستقل هستند)

پاسخ .

طبق قضیه احتمال کل داریم:

$$P(R \cap E) = P(S)P(R \cap E|S) + P(\overline{S})P(R \cap E|\overline{S})$$

همچنین طبق صورت سوال می‌دانیم:

$$P(R \cap E|S) = P(R|S)P(E|S)$$
$$P(R \cap E|\overline{S}) = P(R|\overline{S})P(E|\overline{S})$$

پس برای به دست آوردن نسبت خواسته شده داریم:

$$\begin{aligned}\frac{P(R|E)}{P(\overline{R}|E)} = \frac{P(R \cap E)}{P(\overline{R} \cap E)} &= \frac{P(S)P(R \cap E|S) + P(\overline{S})P(R \cap E|\overline{S})}{P(S)P(\overline{R} \cap E|S) + P(\overline{S})P(\overline{R} \cap E|\overline{S})} \\ &= \frac{P(S)P(R|S)P(E|S) + P(\overline{S})P(R|\overline{S})P(E|\overline{S})}{P(S)P(\overline{R}|S)P(E|S) + P(\overline{S})P(\overline{R}|\overline{S})P(E|\overline{S})} \\ &= \frac{۰/۷۵ \times ۰/۸ \times ۰/۹۵ + ۰/۲۵ \times ۰/۱ \times ۰/۱}{۰/۷۵ \times ۰/۲ \times ۰/۹۵ + ۰/۲۵ \times ۰/۹ \times ۰/۱} = ۳/۴۶۷۹\end{aligned}$$

سؤال ۹.

تمرین کامپیوتری سری دوم با موضوعات «احتمال شرطی» و «مسئله مونتی هال» را می‌توانید از طریق این لینک [۲] دریافت کنید.

- یک کپی از فایل مذکور با نام CA2_SID در گوگل درایو خود تهیه کنید.
- در فایل خود بخش‌هایی که به وسیله مستطیل مشخص شده‌اند را با کدهای مناسب جایگزین کنید.

[2] https://colab.research.google.com/drive/1_q9Ep9WUiWpni9UZIx7xW5GVL4tao5Qi?usp=sharing

- سوالاتی که به زبان فارسی و رنگ سفید مطرح شده‌اند را در همان سلول پاسخ دهید.
- فایل کد خود را با ایمیل kianoosharshi@gmail.com با دسترسی Editor به اشتراک بگذارید.
- لینک فایل پاسخ خود را در بخش متنی جایگاه آپلود این تمرین در سامانه ایلرن قرار دهید.
- دقت کنید در صورتی که لازم به ایجاد یک سلول جدید برای اجرای کد داشتید، اول سلول از R%% استفاده کنید تا سلول به عنوان کد R تشخیص داده شود.

هرگونه انتقاد، پیشنهاد یا نکته جانبی را می‌توانید از طریق یک سلول متنی در ابتدای فایل (قبل از سرفصل اصلی) به ما منتقل کنید.

پاسخ .

تکمیل شده‌ی فایل صورت سوال از طریق این لینک [۳] در دسترس است.

[3] https://colab.research.google.com/drive/14BVAYjbsBcY0blvFpBunCypcA7AsCfKa?usp=sharing