محمدرضا مولو ۸۱۰۱۰۰۸۴ تکلیف ۲ - آمار و احتمال مهندسی - استاد [illegible]

۱)

الف) پواسون — n زیاد، همراه p کم

ب) هندسی — استقلال بررسی‌ها - احتمال ثابت و n, p به صورت تغییر نمی‌کند - توالی وجود ندارد - تنها ۲ حالت - تعداد n ثابت نیست

پ) دوجمله‌ای — احتمال موفقیت زیاد - استقلال بررسی‌ها - احتمال ثابت

ت) فوق هندسی — پس از هر آزمایش احتمال آزاد بودن فرق می‌کند - تعداد آزمایش ثابت است

ث) هندسی — تعداد آزمایش‌ها ثابت نیست - عدم استقلال آزمایش‌ها

ج) پواسون — تعداد خرید لباس در شب یکشنبه مانند پواسون است

---

۲)

الف)

$$E(Y) = 20 \times \frac{20}{140} + 24 \times \frac{34}{140} + 17 \times \frac{17}{140} + 100 \times \frac{100}{140} = \boxed{70.1}$$

$$E(n) = 40$$

تماشاچیان حس ۷۰٫۱ را تجربه می‌کنند اما سالن‌ها ۴۰ را تجربه می‌کنند!

ب) سالن ۴ چراکه امید ریاضی ۲ بیشتر است

پ) اگر توزیع یکنواخت بود و همه سالن‌ها ۴۰ نفری بودند برابر می‌شد!

---

۳)

الف)

$$X \sim Bin(n, 2p(1-p))$$

ب)

$$E(X) = 2np(1-p)$$

$$Y = X - (n-X) = 2X - n$$

$$E(Y) = 2E(X) - n = 4np(1-p) - n$$

$$var(Y) = ۴\, var(X) = ۴n(۲p(1-p))(1-۲p(1-p)) = ۸np(1-p)(1-۲p+۲p^۲)$$

X ۴

۵

$$X = X_1 + X_۲ + \dots X_n$$

$$X_i = Bin(n, 1/۶)$$ تعداد افرادی که تاس‌شان i آمده

$$Y_i = \begin{cases} X_i & X_i \geq ۲ \\ 0 & X_i = 0,1 \end{cases} \rightarrow Y = Y_1 + Y_۲ + \dots + Y_۶$$

$$E(Y_i) = E(X_i) - 1 \times p(X_i = 1) - 0 \times p(X_i = 0) = np - 1 \times \binom{n}{1}\left(\frac{1}{۶}\right)\left(\frac{۵}{۶}\right)^{n-1}$$

$$= \frac{n}{۶} - \frac{n}{۶}\left(\frac{۵}{۶}\right)^{n-1}$$

$$E(Y) = ۶ \times \left(\frac{n}{۶} - \frac{n}{۶}\left(\frac{۵}{۶}\right)^{n-1}\right) = \boxed{n - n\left(\frac{۵}{۶}\right)^{n-1}}$$

---

۶ الف

$$X_i \sim uniform(a, b) \quad a < b$$

$$Y = Min(X_i)$$

$$\underset{CDF}{F_Y(y)} = P(Y \geq y) = 1 - P(Y < y) = 1 - p(\min(X_1, \dots, X_n) < y)$$

$$= 1 - p(X_i > y) = 1 - p(X_1 > y)^n \Rightarrow F_Y(y) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{b-y}{b-a}\right)^n & a < y < b \\ 0 & y < a \\ 1 & y > b \end{cases}$$

ب)

$$F'(Y) = \begin{cases} \dfrac{n}{b-a}\left(\dfrac{b-y}{b-a}\right)^{n-1} & y \in (a,b) \\ 0 & y \notin (a,b) \end{cases}$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y\, F(y)\, dy = \frac{-(b+ny)}{n+1}\left(\frac{y-b}{a-b}\right)^{n}\Bigg|_{a}^{b} = \frac{b+na}{n+1}$$

---

۲ الف)

$m =$ بزرگترین شماره تاکسی مشاهده شده $\rightarrow$

$x < m \qquad P(N=x) = 0$

$x \geq m \qquad P(N=x) = \dfrac{\frac{n-1}{n}\binom{m-1}{n-1}}{\binom{x}{n}}$

$$\mu = (m-1)\,\frac{n-1}{n-2}$$

$$\delta = \frac{(n-1)(m-1)(m-n+1)}{(n-3)(n-2)(n-2)}$$

$$\Rightarrow N = \mu \pm \delta = (m-1)\frac{(n-1)}{n-2} \pm \frac{(n-1)(m-1)(m-n+1)}{(n-3)(n-2)^2}$$

ب)

$m = ۱۱۷ \qquad n = ۱۲$

$\mu = (۱۱۷-۱) \times \frac{۱۱}{۱۰} = ۱۲۷,۶$

جای تاکسی ؛

$\delta = \dfrac{۱۱ \times ۱۱۶ \times ۱۰۶}{۹ \times ۱۰۰} = ۱۲,۲$

$\Rightarrow N = \begin{cases} ۱۳۹,۸ \\ ۱۱۵,۴ \end{cases}$