به نام خدا

نظریه زبان‌ها و ماشین‌ها -بهار ۱۴۰۲

تمرین شماره ۴

دستیار آموزشی این مجموعه: مجید فریدفر

majid.faridfar@gmail.com

پاسخنامه

1) برای هر کدام از زبان‌های زیر، یک گرامر مستقل از متن بنویسید.

2) $\mathrm{L} = \{\mathrm{w} \in \{\mathrm{a,b,c}\} * \mid 2\mathrm{n_a(w)} = \mathrm{n_b(w)} + \mathrm{n_c(w)}\}$

پاسخ:

$\mathrm{S} \rightarrow \mathrm{aTTS|TaTS|TTb}S|\varepsilon$

$\mathrm{T} \rightarrow \mathrm{b|c}$

a) زبانی شامل رشته‌هایی شامل حروف a و b، به طوری که کاراکترهایی که در جایگاه فرد قرار دارند، باهم برابرند و کاراکترهایی که در جایگاه زوج قرار دارند، باهم.

پاسخ:

$\mathrm{s} \rightarrow \mathrm{A|B|C|D}$

$\mathrm{A} \rightarrow \mathrm{Aaa|a}|\varepsilon$

$\mathrm{B} \rightarrow \mathrm{Bab|b}|\varepsilon$

$\mathrm{C} \rightarrow C\mathrm{ba|a}|\varepsilon$

$\mathrm{D} \rightarrow \mathrm{Bbb|b}|\varepsilon$

b) $\mathrm{b(b}c + \mathrm{a}) * \mathrm{a(a+b)} * \mathrm{c} *$

پاسخ:

$\mathrm{S} \rightarrow \mathrm{bAaCD}$

$\mathrm{A} \rightarrow \mathrm{b}c\mathrm{A|aA}|\varepsilon$

$\mathrm{C} \rightarrow \mathrm{aC|bC}|\varepsilon$

$\mathrm{D} \rightarrow \mathrm{cD}|\varepsilon$

c) $L = \{a^n b^m \mid n \leq m + 3\}$

پاسخ:

$S \rightarrow \mathrm{aaaA|aaA|aA}|\varepsilon$

$A \rightarrow aAb|B$

$\mathrm{B} \rightarrow \mathrm{Bb}|\varepsilon$

d) $\mathrm{L} = \{\mathrm{w} \in \{\mathrm{a,b}\} * \mid 2\mathrm{n_a(w)} = \mathrm{n_b(w)}\}$

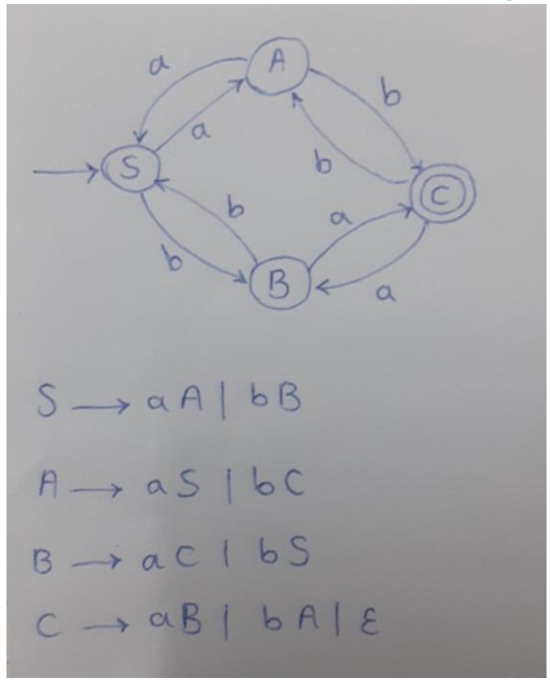
پاسخ:

$\mathrm{s} \rightarrow \mathrm{SbSbSa|SaSbSa|SbSaSa}|\varepsilon$

2) برای زبان‌های زیر، ابتدا اتوماتون معادل آن را رسم کنید و سپس گرامر مستقل از متنش را بنویسید.

a) $L = \{w \in \{a,b\}* \mid n_a(w) * n_b(w) \equiv 1 \bmod 2\}$

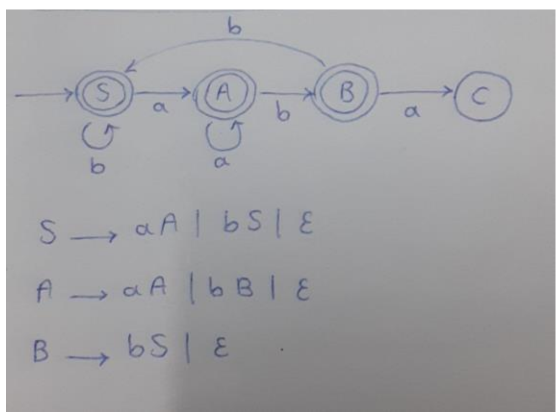
پاسخ: یعنی رشته‌هیی که تعداد aها و تعداد bهایشان فرد است.



b)

زبانی که رشته‌هایش، شامل aba نمی‌شوند.

پاسخ:



3) گرامری بنویسید که تمام production ruleهای گرامری را تولید بکند که شامل terminalهای a و b و c و همین طور non-terminalهای A و B و C و D می‌شود.
سپس تمام مراحل اشتقاق رشته‌ی زیر را با گرامری که نوشته‌اید، بنویسید.

$A \rightarrow BCa|aA|\varepsilon$

پاسخ:

$S \longrightarrow (N \longrightarrow X)$

$X \longrightarrow (Y \mid X) \mid Y \mid (\varepsilon)$

$Y \longrightarrow TY \mid NY \mid T \mid N$

$T \longrightarrow a \mid b \mid c$

$N \longrightarrow A \mid B \mid C \mid D$

$S \longrightarrow (N \rightarrow X) \longrightarrow (A \rightarrow X) \longrightarrow (A \rightarrow (Y \mid X)) \longrightarrow (A \rightarrow (Y \mid Y \mid X))$

$\longrightarrow (A \rightarrow (Y \mid Y \mid \varepsilon)) \longrightarrow (A \rightarrow TY \mid Y \mid \varepsilon) \longrightarrow (A \rightarrow TTY \mid Y \mid \varepsilon)$

$\longrightarrow (A \rightarrow TTN \mid Y \mid \varepsilon) \longrightarrow (A \rightarrow TTN \mid NY \mid \varepsilon) \longrightarrow (A \rightarrow TTN \mid NT \mid \varepsilon)$

B c a a A

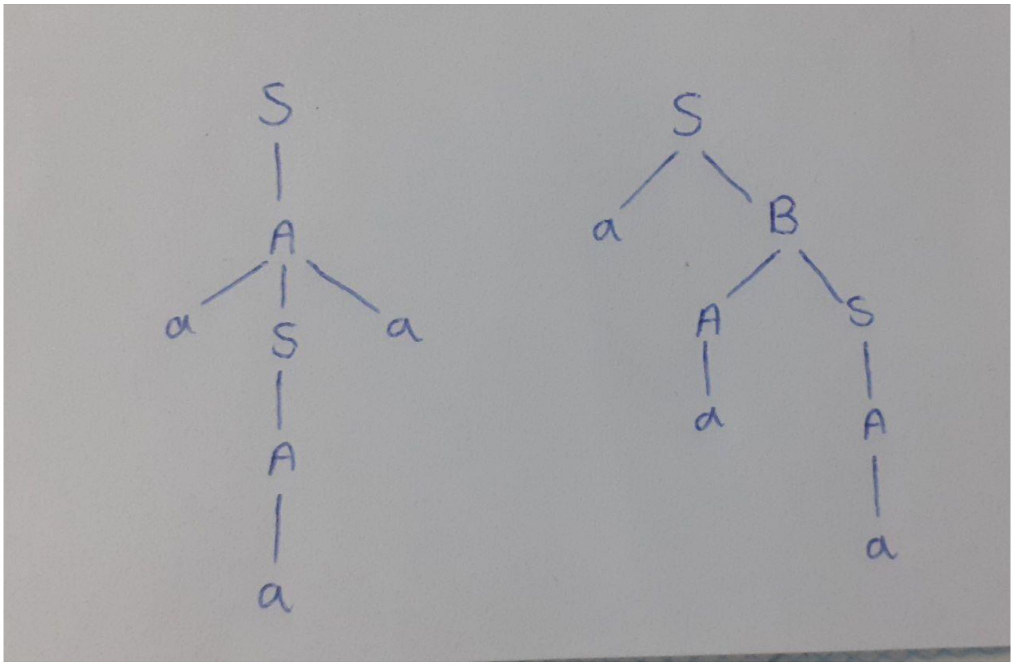
4) گرامر زیر را در نظر بگیرید:

$S \rightarrow A|aB$
$A \rightarrow aSa|SB|a$
$B \rightarrow AS$

a) نشان دهید که این گرامر ابهام دارد. (یعنی رشته‌ای پیدا کنید که برای آن دو درخت اشتقاق مختلف به دست می‌آید).

پاسخ:

این قسمت جواب یکتایی ندارد. اما برای مثال، این گرامر برای رشته‌ی aaa دوتا درخت اشتقاق دارد:



b) آیا این گزاره صحیح است؟

با توجه به این که زبان این گرامر معادل زبان *aa است، پس می‌توان گرامر را به این صورت بازنویسی کرد:

$$S \rightarrow aS|a$$

پاسخ:

خیر. این گزاره صحیح نیست. در واقع، زبان این گرامر معادل *aa نیست. چون برای مثال aa را نمی‌پذیرد.

c) گرامر $S \rightarrow aS|aSbS|c$ را رفع ابهام کنید (نیازی به اثبات مبهم بودن آن نیست).

پاسخ:

$$S \rightarrow T|R$$

$$T \rightarrow aTbT|c$$

$$R \rightarrow aS|aTbR$$

5) الگوریتمی برای تبدیل گرامر خطی چپ به گرامر خطی راست ارائه دهید.

پاسخ:

اگر گرامرخطی چپ، قانونی دارد که سمت راست آن با متغیر S شروع می‌شود، قانون زیر را به گرامر اضافه می‌کنیم:

$$S' \rightarrow S$$

به این صورت، non-terminal شروع، S’ خواهد بود.

فرض کنید، A و B، non-terminal و p یک terminal است. حالا تا جایی که ممکن است، مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

۱.اگر گرامر قانونی به شکل $S \to \mathrm{p}$ دارد، آن را نگه می‌داریم.
۲.اگر گرامر قانونی به شکل $A \to \mathrm{p}$ دارد، قانون $\mathrm{S} \to \mathrm{pA}$ را با آن جاگزین می‌کنیم.
۳.اگر گرامر قانونی به شکل $\mathrm{B} \to \mathrm{Ap}$ دارد، قانون $\mathrm{A} \to \mathrm{pB}$ را با آن جایگزین می‌کنیم.
۴.اگر گرامر قانونی به شکل $\mathrm{s} \to \mathrm{Ap}$ دارد، قانون $\mathrm{A} \to \mathrm{p}$ را با آن جایگزین می‌کنیم.

درنهایت، گرامر حاصل، خطی راست خواهد بود.

6) (امتیازی) فرض کنید گرامر زیر، زبان L_2 را توصیف می‌کند:

$$A \to bAA|AbA|AAb|a$$

همچنین زبان L_1 به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\mathrm{L}_1 = \{\mathrm{w} \in \{\mathrm{a,b}\}* \mid \mathrm{n_a(w)} = \mathrm{n_b(w)} + 1\}$$

ثابت کنید:

$$\mathrm{L}_1 = \mathrm{L}_2$$

پاسخ:
اثبات دو طرفه است. یعنی باید دو مورد زیر را اثبات کنیم.
۱. $\mathrm{L}_2 \subseteq \mathrm{L}_1$. هر رشته‌ای که گرامر داده شده تولید می‌کند، متعلق به زبان L1 است. به عبارت دیگر هر رشته‌ای که این گرامر تولید می‌کند، تعداد aهایش یکی بیشتر از تعداد bهایش است.
۲.$\mathrm{L}_1 \subseteq \mathrm{L}_2$. گرامر داده شده توانایی تولید تمام رشته‌های زبان L1 را دارد. به عبارت دیگر تمام رشته‌هایی که تعداد aهایشان یکی بیشتر از تعداد bهایشان است، توسط این گرامر تولید می‌شوند.

در ادامه با استقرای قوی، هر دو موضوع بالا را اثبات می‌کنیم.

پایه: حکم برای رشته‌ای به طول k = 1 به وضوح برقرار است. (a)

فرض: رشته‌هایی به طول 1 تا 2k-1 که از گرامر به دست می‌آیند، تعداد aهایشان، یکی بیشتر از تعداد bهایشان است (I). همین طور تمام رشته‌هایی که تعداد aهایشان دقیقا یکی بیشتر از تعداد bهایشان است، قابل اشتقاق از این گرامر هستند (II).

حکم:
۱.فرض کنید می‌خواهیم یک رشته به طول 2k+1 را از این گرامر به دست بیاوریم (w). چون 2k+1 > 1، پس اولین قانونی که باید برای به دست آوردن w استفاده کنیم، یکی از سه تای اول خواهد بود. مثلا اگر از اولی استفاده کرده باشیم ($\mathrm{A} \to \mathrm{bAA}$)، یعنی قرار داده‌ایم: w = buv. واضح است که طول u و v کمتر از 2k+1 است. طبق فرض استقرا (قسمت I)، هر دو (u و v) تعداد aهایشان، دقیقا یکی بیشتر از bهایشان است (چون هر دو از جنس A –رشته های متعلق به این گرامر- هستند). پس:

$\mathrm{n_a(w)} = \mathrm{n_a(u)} + \mathrm{n_a(v)}$ و $\mathrm{n_b(w)} = 1 + \mathrm{n_b(u)} + \mathrm{n_b(v)}$

در نتیجه تعداد aهای w دقیقا یکی بیشتر از تعداد bهایش است.

۲.یک رشته‌ی دلخواه به طول 2k+1 در نظر بگیرید که تعداد aهایش دقیقا یکی بیشتر از تعداد bهایش است (w). می‌خواهیم ثابت کنیم که این رشته از این گرامر به دست می‌آید. دو حالت زیر را در نظر بگیرید:
۱.رشته‌ی w با حرف b شروع می‌شود.

اگر از کاراکتر دوم در رشته شروع به پیمایش کنیم و در هر جایگاهی که هستیم، اختلاف تعداد aها و bهای خوانده شده از جایگاه دوم را در متغیر x بریزیم، در جایگاه دوم (خانه‌ی اول پیمایش) خواهیم داشت: $x = 0$. هم چنین در نهایت خواهیم داشت: $x = 2$ (پس از رد کردن آخرین کاراکتر). پس حتما در این بین، $x = 1$ می‌شود (چون تغییر x در هر محله یا +1 است یا -1). پس می‌توانیم بنویسیم: w=buv به طوری که تفاوت تعداد aها و bهای u و v هرکدام، برابر ۱ است (چون تفاوت تعداد aها و bهای w هم برابر یک بود و u را هم به نحوی پیدا کردیم که این خاصیت را داشته باشد (از کاراکتر دوم تا جایی که x=1 شده بود) پس v هم این ویژگی را دارد). پس از قانون $A \rightarrow bAA$ استفاده می‌کنیم و طبق فرض استقرا (II) می‌توانیم u و v را هر چه که باشند، تولید کنیم. پس رشته‌ی w توسط این گرامر قابل تولید شدن است.

- دقت کنید که اگر حرف آخر هم b باشد، مسئله با استدلالی مشابه ثابت می‌شود (پیمایش از آخر). پس حالت دوم را کامل تر می‌کنیم:

۲.رشته‌ی w با حرف a شروع می‌شود و با حرف a تمام می‌شود

اگر حرف دوم b بود، کافی است از قانون $A \rightarrow AbA$ استفاده کنیم. چون داریم: w=abu به طوری که تفاوت تعداد aها و bهای u هم برابر یک است و طبق فرض استقرا (II) چون طول آن برابر 2k-1 است، می‌توان آن را تولید کرد.

- اگر آخر رشته، ba داشته باشیم هم مسئله با استدلالی مشابه اثبات می‌شود (w = uba). پس در ادامه می‌گوییم:

حالا حالتی را بررسی می‌کنیم که رشته با aa شروع شده و با aa تمام می‌شود. ثابت می‌کنیم حتما bای وجود دارد، مقدار x (این بار مقدار x برابر است با اختلاف aها و bهای خوانده از خانه‌ی اول) در آن جایگاه برابر ۱ باشد (تا از قانون دوم $A \rightarrow AbA$ استفاده کنیم).

مقدار x را در سمت چپ‌ترین bی رشته در نظر بگیرید. این مقدار طبق فرضی که کرده‌ایم، بزرگ تر یا مساوی ۲ است (چون حداقل دو تا a قبل از آن داریم). همین طور در سمت راست ترین b، مقدار آن کمتر یا مساوی صفر است (چون حداقل دو تا a مانده).

همین طور مقدار x در خانه‌ی مربوط به یک b تا bی بعدی، یا بیشتر می‌شود (حداقل دو تا a ببینیم)، یا ثابت می‌ماند (یک a ببینیم) یا یک واحد کمتر (هیچ aای نبینیم) می‌شود. پس در این پیمایش از چپ به راست، حتما به جایی می‌رسیم که مقدار x در یکی از bها برابر ۱ می‌شود (چون باید از مقداری بیشتر از ۲ به مقداری کمتر از ۰ برسیم).

حالا از قانون دوم استفاده کرده و طبق فرض استقرا، رشته‌ی w را می‌سازیم (w = ubv).