شهزاد سمیز - تکلیف آمار و احتمال مهندسی - استاد برک / شماره دانشجویی: ۸۱۰۱۰۰۲۷۳

۱) متغیر تصادفی x را حاصل پرتاب یک تاس چهار وجهی در نظر می‌گیریم که $x = 1, 2, 3, 4$

$$E[x] = \frac{1}{4}\times 1 + \frac{1}{4}\times 2 + \frac{1}{4}\times 3 + \frac{1}{4}\times 4 = \frac{5}{2}$$

$$E[x^2] = \frac{1}{4}\times 1 + \frac{1}{4}\times 4 + \frac{1}{4}\times 9 + \frac{1}{4}\times 16 = \frac{15}{2}$$

$$Var(x) = \frac{30}{4} - \frac{25}{4} = \frac{5}{4}$$

$$W_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$$ پرتاب‌ها مستقل اند

$$E[W_n] = E[x_1] + \dots + E[x_n] = nE[x] = \frac{5}{2}n$$

$$Var(W_n) = Var(x_1) + \dots + Var(x_n) = n\,Var(x)$$

$$= \frac{5}{4}n$$

۲)

$$\phi_Y(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^0 f_Y(y)\,dy = 1$$

$$\phi'_Y(0) = E[Y] = 10$$

$$Var(Y) = 12 = \phi''_Y(0) - (\underbrace{\phi'_Y(0)}_{10})^2 \rightarrow \phi''_Y(0) = 112$$

$$E[x] = \phi'_x(0) = ۲\cancel{e^{۳×۲}}\phi_y(0) + \frac{۲}{۳}\cancel{e^{۳×۲}}\phi'_y(0) + \frac{۱}{۳}\cancel{\phi_y(0)} = ۱۲$$

$\frac{۲۰}{۳}$ $\frac{۱۰}{۳}$

$$\phi''_x(0) = ۶\cancel{e^{۳×۰}}\phi_y(0) + ۲\cancel{e^{۳×۰}}\phi_y(0) + ۲\cancel{e^{۳×۰}}\phi'_y(0) + \frac{۲}{۳}\cancel{e^{۳×۰}}\phi''_y(0)$$

۶ ۲۰ ۲۰ $\frac{۲}{۳}×۱۲$

$$+\frac{۱}{۳}\phi''_y(0) = ۱۵۸ = E[x^2]$$

$\frac{۱}{۳}×۱۱۲$

$$Var(x) = E[x^2] - E[x]^2 = ۱۵۸ - ۱۲^2 = ۱۴$$

الف) ۳

$$f_X(x) = \int_x^{x+۲} \frac{۱}{۲۴}x + \frac{۱}{۲۴}y \, dy = \frac{۱}{۲۴}xy + \frac{۱}{۴۸}y^2 \Big|_x^{x+۲}$$

$$= \frac{۴x+۲}{۲۴} \qquad ۰<x<۳$$

ب)

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{x+y}{۴x+۲}$$

$$E(Y|x=۱) = \int_x^{x+۲} y\, f_{Y|X}(y|x)\, dy = \int_۱^۳ y\, f_{Y|x=۱}(y|x=۱)\, dy = \int_۱^۳ y \frac{۱+y}{۴+۲}\, dy = \frac{y^2}{۱۲} + \frac{y^3}{۱۸}\Big|_۱^۳ = \frac{۹}{۱۲} + \frac{۲۷}{۱۸} - \frac{۱}{۱۲} - \frac{۱}{۱۸} = \frac{۷۶}{۳۶}$$

ج)

$$f_{X|Y=۲} = \frac{f_{X,Y}(x,۲)}{f_Y(۲)} = \frac{\frac{x+۲}{۲۴}}{\frac{۹}{۴۸}+\frac{۲}{۸}} = \frac{۲}{۲۱}(x+۲)$$

$$f_Y(y) = \int_0^3 \frac{x}{24} + \frac{y}{24}\, dx = \frac{x^2}{48} + \frac{xy}{24} \Big|_0^3 = \frac{9}{48} + \frac{y}{8}$$

۴) N_t تعداد کل پیام های دریافتی است که توزیع پواسون دارد.

$Na(t)$ تعداد پیام های دریافتی از ایستگاه a :

$Na(t) \mid N_t \sim Bin(N_t, p)$

$Na(t)$: تعداد پیام های دریافتی از ایستگاه b :

$N_b(t) \mid N_t \sim Bin(N_t, 1-p)$

از قضیه احتمال کل داریم :

$P(Na(t) = n, N_b(t) = m) = P(Na(t) = n, N_b(t) = m \mid Na(t)$

$+ N(b)t = n+m)\, P(Na(t) + N_b(t) = n+m) +$

$P(Na(t) = n, N_b(t) = m \mid Na(t) + N_b(t) \neq n+m)$

$P(N_a(t) + N_b(t) \neq n+m) = P(N_a(t) = n, N_b(t) = m \mid$

$Na(t) + N_b(t) = m+n)\, P(Na(t) + N_b(t) = m+n) =$

$$\binom{n+m}{n} p^n (1-p)^m \times e^{-\lambda} \frac{\lambda^{m+n}}{(m+n)!} = \frac{(n+m)!}{n!\,m!}$$

$$(\lambda p)^n (\lambda(1-p))^m e^{-\lambda(p+1-p)} \times \frac{1}{(m+n)!}$$

$$= e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^n}{n!} \times e^{-\lambda(1-p)} \frac{(\lambda(1-p))^m}{m!} = P(N_a(t)=n) P(N_b(t)=m)$$

$$N_a(t) + N_b(t) = m+n) P(N_a(t) + N_b(t) = m+n) = \binom{n+m}{n}$$

$$p^n (1-p)^m \times e^{-\lambda} \frac{\lambda^{m+n}}{(m+n)!} = \frac{\cancel{(n+m)!}}{n!\, m!} (\lambda p)^n (\lambda(1-p))^m$$

$$e^{-\lambda(p+1-p)} \times \frac{1}{(m+n)!} = e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^n}{n!} \times e^{-\lambda(1-p)} \frac{(\lambda(1-p))^m}{m!}$$

$$= P(N_a(t)=n) P(N_b(t)=m) \Rightarrow N_a(t) \sim Poi(\lambda p)$$

$N_a(t)$ و $N_b(t)$ مستقل اند.

قسمت الف)

$$X \sim Beta(\alpha, \beta)$$

$$E[X] = ۰/۰۴ = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \Rightarrow \beta = ۲۴\alpha$$

$$\sigma = ۰/۰۲ \Rightarrow Var(X) = ۰/۰۰۰۴ = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} \xrightarrow{\beta = ۲۴\alpha}$$

$$Var(X) = \frac{۲۴\alpha^2}{(۲۵\alpha)^2(۲۵\alpha+1)} = \frac{۲۴}{۲۵^2(۲۵\alpha+1)} = \frac{۴}{۱۰۰۰۰} \Rightarrow \alpha = ۳/۸$$

$$\Rightarrow \beta = ۹۱/۲ \Rightarrow X \sim Beta(۳/۸, ۹۱/۲)$$

(ب

$$X|N=x \sim \text{Beta}(۳٫۸+\sum y,\ ۹۱٫۲+\sum x) = \text{Beta}(۴٫۸,\ ۱۸۸٫۲)$$

(ج

$$E[X]=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}=\frac{۴٫۸}{۴٫۸+۱۸۸٫۲}=۰٫۰۲۴۸$$

$$Var(X)=\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^{۲}(\alpha+\beta+1)}=\frac{۴٫۸\times ۱۸۸٫۲}{۱۹۳^{۲}\times ۱۹۴} \Longrightarrow \sigma=۰٫۰۱۱$$

(۴

$$F_Y(y)=P(Y\leq y)=P(u+(v-u)X\leq y)=P\left(X\leq \frac{y-u}{v-u}\right)$$

$$=F_X\left(\frac{y-u}{v-u}\right)$$

$$f_Y(y)=\frac{d}{dy}F_Y(y)=\frac{d}{dy}F_X\left(\frac{y-u}{v-u}\right)=\frac{1}{v-u}f_X\left(\frac{y-u}{v-u}\right)$$

$$X\sim \text{Beta}(a,b) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow f_X\left(\frac{y-u}{v-u}\right)=\begin{cases}\frac{1}{B(a,b)}\left(\frac{y-u}{v-u}\right)^{a-1}\left(1-\frac{y-u}{v-u}\right)^{b-1} & 0<\frac{y-u}{v-u}<1\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{v-u}\frac{1}{B(a,b)}\left(\frac{y-u}{v-u}\right)^{a-1}\left(1-\frac{y-u}{v-u}\right)^{b-1} & 0<y<v\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

ب)

$$f_Y(3) = F_X\left(\frac{3-2}{6-2}\right) = F_X\left(\frac{1}{4}\right) = \int_0^{\frac{1}{4}} f_X(x)\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{1}{B(2,3)}\, x(1-x)^2\,dx$$

$$\frac{1}{B(2,3)} = \frac{\Gamma(2+3)}{\Gamma(2)\Gamma(3)} = \frac{4!}{1!\,2!} = 12 \Rightarrow 12\int_0^{\frac{1}{4}} x(1-x)^2\,dx =$$

$$3x^4 - 8x^3 + 6x^2 \Big|_0^{\frac{1}{4}} = \frac{7}{16}$$

۷) الف) در تمرین قبلی $E[X]$ را برابر $\frac{5}{7}$ بدست آوردیم و را نیز برابر $\frac{12}{7}$ بدست آوردیم.

همچنین $f_Y(y) = \frac{4}{7} + \frac{6}{7}y$

$$E[Y] = \int_0^1 \frac{4}{7}y + \frac{6}{7}y^2\,dy = \frac{2}{7}y^2 + \frac{2}{7}y^3 \Big|_0^1 = \frac{4}{7}$$

$$\text{cov}(X,Y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x - E[X])(y - E[Y])\, f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$$

$$\int_0^1\int_0^1 \left(x - \frac{5}{7}\right)\left(y - \frac{4}{7}\right)\frac{12}{7}(x^2 + xy)\,dx\,dy =$$

$$\int_0^1 \frac{(7y-4)(-2y+1)}{343}\,dy = \frac{-1}{294}$$

با به تمرین قبل $Var(X)$ برابر $\frac{46}{980}$ بدست آوردیم.

$$E[Y^2] = \int_0^1 \frac{4}{7}y^2 + \frac{6}{7}y^3 \, dy = \frac{4}{21}y^3 + \frac{6}{28}y^4 \Big|_0^1 = \frac{17}{42}$$

$$\rho(x, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(x)Var(Y)}} = \frac{\frac{-1}{294}}{\sqrt{\frac{46}{980} \times \frac{23}{294}}} = -\frac{\sqrt{51}}{49}$$

ج) کواریانس تنها جهت ارتباط بین دو متغیر را نشان می‌دهد نه شدت ولی ضریب همبستگی جهت و شدت را نشان می‌دهد. اگر ρ به $+1$ یا -1 نزدیک باشد یعنی بین دو متغیر ارتباط خطی مثبت یا منفی زیادی وجود دارد و اگر نزدیک به صفر باشد ارتباط بین این دو کم است.

۸) دقیقاً مانند سوال ۴ عمل می‌کنیم و به این نتیجه می‌رسیم $X \sim Poi(\lambda p)$ و $Y \sim Poi(\lambda(1-p))$ و مستقل اند ~~...~~ درنتیجه $E[XY] = E[X]E[Y]$ پس $Cov(X,Y)$، $\rho(X,Y)$ برابر صفر است.