



## آزمایش 7

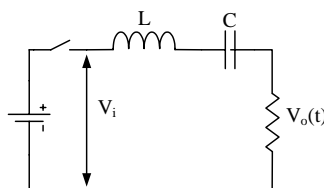
پاسخ زمانی مدارهای  
مرتبه دوم

هدف از انجام این آزمایش بررسی رفتار انواع حالت‌های گذرای مدارهای مرتبه دوم  $RLC$ ، اندازه‌گیری پارامترهای مختلف معادله مشخصه، بررسی مقاومت بحرانی و آشنایی با پدیده  $Overshoot$  است.

## مقدمات

### ✓ مدار $RLC$ سری

با توجه به اینکه در کارکرد یک مدار  $RLC$  سری ابتدا سلف تأثیرات عمیقی در پاسخ مدار ایجاد می‌کند و سپس خازن اثرات خود را در انتها ظاهر می‌سازد، انتظار می‌رود مداری شامل هر دوی این عناصر مضاف بر مقاومت که عامل میرایی است، رفتاری ارائه کند که در یک محدوده زمانی شبیه رفتار یک مدار  $RL$  و در محدوده زمانی دیگری رفتاری شبیه به مدار  $RC$  داشته باشد. این رفتار در نمودارهایی که خواهیم دید بنا به مقادیر  $R$ ،  $L$  و  $C$  مشهود است. در تمامی این نمودارهای که ولتاژ دو سر مقاومت خروجی مدار در نظر گرفته شده است، مشاهده می‌شود که ابتدای مدار یک نمایی افزایشی یعنی مبتدا به صفر و انتهای آن یک نمایی منتهی به صفر است زیرا در ابتدا سلف شدیداً اثر خود را اعمال و خازن تقریباً اتصال کوتاه است و بنابراین یک مدار  $RL$  (پایین‌گذر) داریم که شکل ولتاژ خروجی نمایی صعودی خواهد بود. پس از مدتی اثر سلفی نامحسوس و سلف مثل اتصال کوتاه عمل می‌کند و خازن که تقریباً شارژ شده خواص خازنی خود را شدیداً ظاهر می‌سازد و یک مدار  $RC$  (بالاگذر) خواهیم داشت که قاعدتاً ولتاژ دو سر مقاومت باید در آن نزولی باشد.



شکل (7-1)

هنگامی که این مدار با یک ولتاژ پله‌ای تحریک می‌شود، پاسخ گذرای مدار دارای دو شکل کاملاً متمایز خواهد بود. برای تعیین معادله پاسخ، معادله ولتاژ مدار را پس از بسته شدن کلید می‌نویسیم:

$$V = L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt + Ri$$

که با مشتق گرفتن از طرفین معادله حاصل می‌شود:

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0$$

که دارای معادله مشخصه زیر با ریشه‌های  $s_1$  و  $s_2$  می‌باشد:

$$s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = 0$$

$$s_1 = \frac{-R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$$

$$s_2 = \frac{-R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$i(t) = k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t}$$

$$i(0) = 0$$

$$\frac{di(0)}{dt} = \frac{V}{L}$$

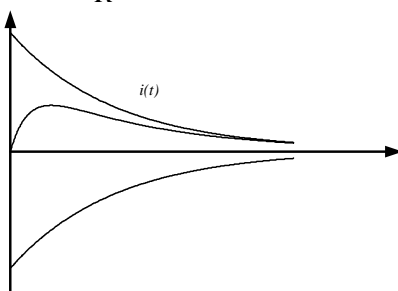
برحسب اینکه  $\frac{R}{2L}$  بزرگتر از، مساوی با و یا کوچکتر از  $\frac{1}{\sqrt{LC}}$  باشد، پاسخ مدار (یا جریان  $i(t)$ ) دارای شکلهای زیر خواهد بود:

1- اگر  $\frac{R}{2L} > \frac{1}{\sqrt{LC}}$  باشد پاسخ مدار به یک مقدار ماکزیمم می‌رسد و با ثابت زمانی معینی به سوی صفر میل می‌کند. این پاسخ به حالت فوق میرایی موسوم است که در آن:

$$i(t) = \frac{V}{L\omega} e^{-t/\tau} \left[ \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2} \right]$$

$$\omega = \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$$

$$\tau = \frac{2L}{R}$$



شکل (2-7)

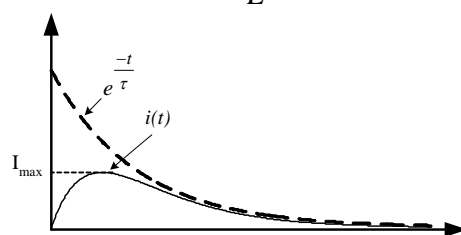
نکته جالب توجه مقدار ثابت زمانی است که دو برابر مقدار آن در مدار  $RL$  می‌باشد. البته ثابت زمانی واقعی این مدار چندان مشخص نیست زیرا عوامل  $\omega$  و  $-\omega$  نیز در ایجاد آن نقش دارند و تنها تحت شرایطی که  $\omega$  خیلی کوچک باشد می‌توان گفت که تقریباً ثابت زمانی  $\frac{2L}{R}$  است که این وضعیت در حالت میرای بحرانی محسوس‌تر است.

2- اگر  $\frac{R}{2L} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  باشد جریان به مقدار ماکزیمم  $I_{\max}$  می رسد و با ثابت زمانی  $\tau = \frac{2L}{R}$  به سمت صفر میل می کند. این حالت به میرای بحرانی یا *Critically Damped* موسوم است.

$$i(t) = \frac{V}{L} t e^{-t/\tau}$$

$$\tau = \frac{2L}{R}$$

$$I_{\max} = \frac{V \tau}{L} e^{-1}$$



شکل (7-3)

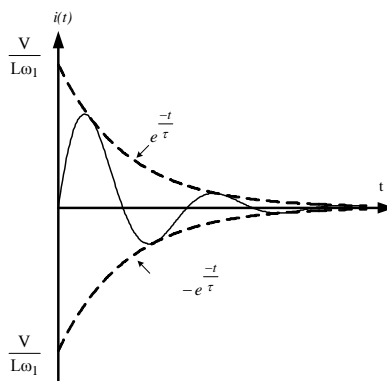
3- اگر  $\frac{R}{2L} < \frac{1}{\sqrt{LC}}$  باشد، پاسخ مدار بصورت یک موج سینوسی است که دامنه آن رفته رفته کم شده و به صفر می رسد. این حالت به نوسانی میرا یا *Oscillatory Damped* موسوم می باشد.

$$i(t) = \frac{V}{L\omega_1} e^{-t/\tau} \sin \omega_1 t$$

$$\omega_1 = j\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

و فرکانس نوسانات برابر است با:

$$f_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

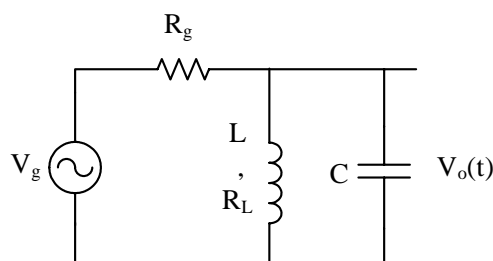


شکل (7-4)

جمله  $\frac{R^2}{4L^2}$  اثر کمی روی  $f_1$  دارد زیرا معمولاً در مقایسه با  $\frac{1}{LC}$  خیلی کوچک است. در این حالت می توان مقدار  $f_1$  را به صورت  $f_1 \approx \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$  نوشت.

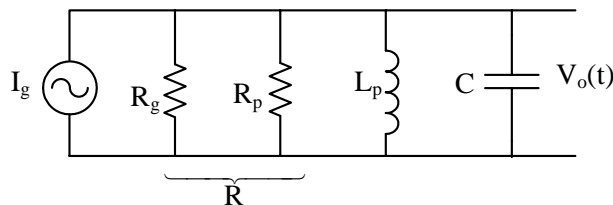
### ✓ مدار RLC موازی

شکل زیر مدار RLC موازی را نمایش می دهد:



شکل (5-7)

با توجه به اینکه مدار فوق را می توان به صورت زیر نمایش داد:



شکل (6-7)

پس از اعمال جریان پله ای به دامنه  $I_g$ ، می توان نوشت:

$$I_g = \frac{V_o}{R} + \frac{1}{L_p} \int V_o dt + C \frac{dV_o}{dt} \Rightarrow \frac{d^2 V_o}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{dV_o}{dt} + \frac{1}{L_p C} V_o = 0$$

معادله مشخصه رابطه فوق دارای دو ریشه با مقادیر زیر است:

$$s_1, s_2 = \frac{-1}{2RC} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{L_p C}}$$



نظیر مدار سری سه حالت زیر در پاسخ گذرا مشاهده می شود:

$$1. \quad \frac{1}{2RC} > \frac{1}{\sqrt{L_p C}} \quad \text{حالت فوق میرایی یا Over Damped خواهد بود.}$$

$$2. \quad \frac{1}{2RC} = \frac{1}{\sqrt{L_p C}} \quad \text{حالت میرایی بحرانی یا Critically Damped خواهد بود.}$$

$$3. \quad \frac{1}{2RC} < \frac{1}{\sqrt{L_p C}} \quad \text{حالت نوسانی میرا یا Oscillatory Damped خواهد بود.}$$

با توجه به اینکه مقاومت موجود در سلف بسیار کوچک است می توان از آن صرف نظر نمود؛ در این صورت  $R_p$  بسیار بزرگ و  $R_g \approx R_g$  و  $R = R_p \parallel R_g \approx R_g$  و  $L_p \approx L$  خواهد بود. همچنین توجه داریم که در حالات 2 و 3 در فوق ثابت زمانی برابر است با:

$$\tau = 2RC$$

ضریب میرایی یا Damping Factor نسبت  $\alpha = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{2RC}$  را می گویند.

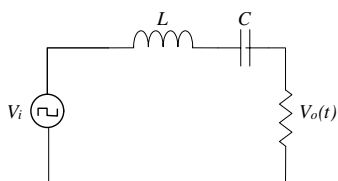
مقاومت بحرانی یا Critical Resistance مقدار  $R_c = \frac{1}{2} \sqrt{L/C}$  می باشد.

## خودآزمایی

- 1- انواع حالات پاسخ گذرای مدارهای مرتبه دوم را رسم کرده و توضیح دهید.
- 2- مقاومت بحرانی، فرکانس نوسانات، ضریب میرایی و فراجهش (*Overshoot*) را در مدارهای مرتبه دوم تعریف کرده و روابط هر کدام را در مدار  $RLC$  سری و موازی بیان کنید.
- 3- به ازای  $C = 3,3 \text{ nF}$  و  $L = 18 \text{ mH}$ ، مقاومت بحرانی و به ازای مقاومت  $1 \text{ K}\Omega$  فرکانس نوسانات را برای  $RLC$  سری و موازی محاسبه کنید.
- 4- ثابت زمانی ( $\tau$ ) در حالت میرای بحرانی و نوسانی میرا در مدار  $RLC$  سری و موازی از چه رابطه ای محاسبه می شود، مقدار آن را به ازای مقادیر سؤال 3 محاسبه کنید.
- 5- یک روش آزمایشگاهی برای اندازه گیری  $\tau$ ، در هر کدام از حالت های میرای بحرانی و نوسانی میرا در مدار  $RLC$  ارائه کنید.
- 6- مدار  $RLC$  سری را با مقادیر سلف 18 میلی هانری و خازن 3,3 نانوفاراد و یک ولتاژ موج مربعی با دامنه 2 ولت و فرکانس 1 KHz به کمک نرم افزار شبیه سازی کرده و با تغییر مقدار مقاومت، 4 حالت پاسخ گذرای مدار را در یک نمودار رسم کنید. خروجی از دوسر خازن گرفته شود.

## شرح آزمایش

✓ مطابق شکل زیر مدار  $RLC$  سری را با مقادیر سلف 18 میلی هانری و خازن 3,3 نانوفاراد و پتانسیومتر 1 تا 10 کیلو اهم ساخته و یک ولتاژ مربعی با دامنه 2 ولت و فرکانس 1,5 KHz و آفست صفر به آن اعمال می کنیم و خروجی را از دو سر مقاومت می بینیم.



شکل (7-7)

1- با تغییر مقاومت، سه حالت پاسخ گذرای مدار شامل فوق میرا، میرای بحرانی و نوسانی میرا را روی اسیلوسکوپ مشاهده و رسم کرده و مقدار مقاومت بحرانی را اندازه بگیرید. برای اندازه گیری مقاومت بحرانی با دقت بیشتر پروب را در حالت ضربدر 10 قرار داده، دامنه سیگنال ورودی را روی 9 ولت تنظیم کنید و یک پتانسیومتر  $100 \times$  با پتانسیومتر اولیه سری نمایید. پس از اندازه گیری مقاومت بحرانی، دامنه ورودی و پروب را به حالت قبل برگردانید. مقدار مقاومت بحرانی اندازه گیری شده را با مقدار تئوری مقایسه کرده و در صورت اختلاف علت را توضیح دهید.

2- ثابت زمانی و ضریب میرایی مدار را در حالت میرای بحرانی به ازای مقاومت بحرانی و در حالت نوسانی میرا به ازای مقاومت  $1 K\Omega$  به کمک روش پیشنهادی خودتان اندازه بگیرید. فرکانس نوسانات در حالت نوسانی میرا به ازای مقاومت  $1 K\Omega$  چقدر اندازه گیری شده است؟ مقادیر به دست آمده ثابت زمانی و فرکانس نوسانات را با مقادیر تئوری مقایسه کرده و در صورت اختلاف علت را توضیح دهید.

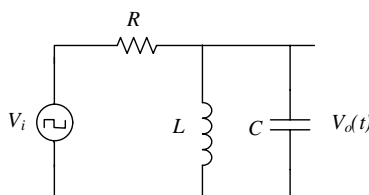
3- مقاومت را از مدار خارج کنید و شکل موج ولتاژ دو سر خازن را مشاهده و رسم نمایید. آیا مدار در حالت نوسانی کامل قرار می گیرد؟ توضیح دهید. میزان ثابت زمانی و فرکانس نوسانات مدار نسبت به حالت قبل بیشتر شده یا کمتر (اندازه بگیرید)؟ از لحاظ تئوری به ازای مقاومت صفر ثابت زمانی و فرکانس نوسانات مدار باید چقدر می شد؟

4- آیا در مداری با شرایط بالا می توان درصد فراجش ( $Overshoot$ ) را برای ولتاژ دو سر مقاومت محاسبه کرد؟ چرا؟ در صورتی که منبع ورودی دارای مقدار  $DC$  باشد، چطور؟ برای بررسی این مطلب به منبع ورودی موج مربعی مقدار  $DC$  به اندازه 2 ولت اضافه کرده و ولتاژ دو سر مقاومت را مجدد رسم کنید. مقدار  $DC$  را به کمک پیچ تنظیم آفست منبع  $AC$  به موج مربعی اضافه نمایید. درصد فراجش، نسبت ولتاژ فراجش به ولتاژ پایدار ضربدر 100 می باشد. (در پایان این بخش مقدار  $DC$  منبع را مجدد به مقدار صفر برگردانید.)

5- درصد فراجاهش را در حالت نوسانی میرا به ازای مقاومت  $1 K \Omega$  از دو سر خازن اندازه بگیرید. مقادیر به‌دست آمده را با مقادیر تئوری مقایسه کرده و در صورت اختلاف علت را توضیح دهید.

6- فکر می‌کنید ولتاژ دو سر کدام عنصر مدار ممکن است در لحظات جهش ولتاژ موج مربعی ورودی نسبت به ولتاژ منبع دارای جهش ولتاژ باشد (دقت کنید که جهش ولتاژ در لحظه جهش ولتاژ موج مربعی از مفهوم فراجاهش که در بند 5 اشاره شده و با صرف زمان اتفاق می‌افتد، متفاوت است)؟ از طریق تئوری شکل موج منبع و شکل موج ولتاژ دو سر هر سه عنصر مدار را در حالت نوسانی میرا رسم کرده و به کمک تحلیل‌های لازم این مسئله را توضیح دهید. به طور همزمان شکل موج ولتاژ مورد نظر (دارای جهش) و شکل موج منبع ورودی را در حالت نوسانی میرا به کمک اسیلوسکوپ مشاهده و رسم کنید. مقدار جهش ولتاژ روی شکل یادداشت شود.

✓ مدار  $RLC$  موازی را مطابق شکل زیر با مقادیر سلف 18 میلی هانری و خازن  $3/3$  نانوفاراد و پتانسیومتر 1 تا 10 کیلو اهم به جای مقاومت  $R$  ساخته و یک ولتاژ مربعی با دامنه 2 ولت و فرکانس  $1,5 KHz$  به آن اعمال می‌کنیم و خروجی را از دو سر خازن می‌بینیم.



شکل (7-8)

1- با تغییر مقاومت، سه حالت پاسخ گذرای مدار شامل فوق میرا، میرای بحرانی و نوسانی میرا را روی اسیلوسکوپ مشاهده و رسم کرده و مقدار مقاومت بحرانی را اندازه بگیرید. برای اندازه‌گیری مقاومت بحرانی با دقت بیشتر، مانند حالت قبل، پروب را در حالت ضربدر 10 قرار داده و دامنه سیگنال ورودی را روی 9 ولت تنظیم کنید، پس از اندازه‌گیری نیز دامنه ورودی و پروب را به حالت قبل برگردانید. مقدار مقاومت بحرانی اندازه‌گیری شده را با مقدار تئوری مقایسه کرده و در صورت اختلاف علت را توضیح دهید.

2- به نظر شما کدام یک از سه پاسخ مدار دارای سرعت میرایی بیشتری است؟ (سرعت میرایی آنها را هم از لحاظ تئوری و هم از روی شکل ظاهری شکل موج‌ها با رسم شکل با هم مقایسه کنید).

3- ثابت زمانی و ضریب میرایی مدار را در حالت میرای بحرانی به ازای مقاومت بحرانی و در حالت نوسانی میرا به ازای مقاومت  $3 K \Omega$  به کمک روش پیشنهادی خودتان اندازه بگیرید. مقادیر به‌دست آمده را با مقادیر تئوری مقایسه کرده و در صورت اختلاف علت را توضیح دهید.





4- فرکانس نوسانات را در حالت نوسانی میرا به ازای مقاومت  $3\text{ K}\Omega$  اندازه بگیرید و مقادیر به دست آمده را با مقادیر تئوری مقایسه کرده و در صورت اختلاف علت را توضیح دهید.

5- با توجه به داده‌های اندازه‌گیری شده فرکانس‌های طبیعی مدار شکل (7-8) به ازای مقاومت  $3\text{ K}\Omega$  چقدر است؟ فرکانس‌های طبیعی اندازه‌گیری شده را با مقادیر تئوری آن مقایسه کنید.

✓ **نمره مثبت**

آیا روشی برای اندازه‌گیری فرکانس‌های طبیعی مدار مرتبه دوم در حالت میرایی شدید وجود دارد؟