شهرزاد منیر ۸۱۰۱۰۰۲۷۲

سری ۲ تا ایف گرفته.

$d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 d_6 d_7$

شروع $d_1d_2d_3d_4$ با $d_4d_5d_6d_7$

① $|A\cup B| = |A|+|B|-|A\cap B| = 10^4+10^4-10 = 20000-10 = \boxed{19990}$

پایان $d_4d_5d_6d_7$ با $d_1d_2d_3d_4$ برابر باشد.

کل حالات را منهای اشتراکشان می‌کنیم

$$A: \longrightarrow \underbrace{10\times10\times10}_{d_1d_2d_3}\times\underbrace{1\ 1\ 1}_{d_4d_5d_6}\times\underbrace{10}_{d_7}=10^4$$

$$B: \longrightarrow \underbrace{10^3}\times\underbrace{10}_{d_4}\underbrace{1\times1\times1}_{d_5d_6d_7}=10^4$$

$$A\cap B \xrightarrow[\text{همهٔ ارقام یکی است.}]{} \underbrace{10\times1\times1}\times1\times1\times1\times1=10$$

$\left\lceil \frac{300}{101} \right\rceil = \boxed{3}$

②

فرمول لانه کبوتری: $\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil$ است.

یعنی اگر در همهٔ خانه‌ها عدد حداکثر ۲ قرار داشته باشد، حداقل ۱ خانه وجود دارد که در آن عدد حداقل ۳ قرار گرفته باشد.

$d_1+d_2+\dots+d_{101}=300$

$a_1, a_2, \dots$

۱۰۱ عدد داریم

هر جمله می‌شود جمع اعداد تا آن جا سپس باقیمانده آنها به ۱۰۰ را می‌گیریم چون ۱۰۱ عدد داریم حتماً

هر دو عدد، باقیمانده یکسان دارند یعنی یا ۱۰۰ تا اختلاف دارند یا ۲۰۰ چون روی دایره اعداد ۲۰۰=۱۰۰−۳۰۰

یعنی اگر ۱۰۰ اختلاف داشته باشند از طرف دیگر، ۲۰۰ تا اختلاف دارد.

پس در هر صورت اختلاف ۲ جمله از یک طرف دایره ۲۰۰ تا می‌شود

سوال ۳

الف)

$\langle 1,3,9,\dots,3^n,\dots\rangle$

$\langle 1,1,1,\dots\rangle \longrightarrow 1+x+x^2+x^3+\dots = \frac{1}{1-x}$

به جای x، $3x$ می‌گذاریم

$\longrightarrow 1+3x+(3x)^2+(3x)^3+\dots = 1+3x+9x^2+27x^3+\dots = \boxed{\frac{1}{1-3x}}$

ب)

$\langle \frac{1}{0!}, \frac{1}{1!}, \frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, \dots\rangle$

$n+1$

$\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\dots = \boxed{e^x}$

ج)

$\langle 0,1,0,5,0,25,0,125,0,\dots\rangle$

$\langle 1,1,1,1,1,\dots\rangle$

$1+x+x^2+x^3+\dots = \frac{1}{1-x}$

به جای x، $5x$ می‌گذاریم.

$\longrightarrow 1+5x+(5x)^2+(5x)^3+\dots = (1)+5x+25x^2+125x^3+\dots = \frac{1}{1-5x}$

به جای x، x^2 می‌گذاریم

$\longrightarrow 1+5x^2+(5(x^2))^2+125(x^2)^3+\dots = 1+5x^2+25x^4+125x^6+\dots = \frac{1}{1-5x^2}$

در x ضرب می‌کنیم

$\longrightarrow x+5x^3+25x^5+125x^7+\dots = \boxed{\frac{x}{1-5x^2}}$

$\langle 0,1,0,5,0,25,0,0,125,0,0\rangle$

قسمت ۲)

$e_1+e_2+e_3+e_4=n$

سیب حداکثر ۳ تا: $1+x+x^2+x^3$

تمشک صفر یا یک: $1+x$

هلو مضرب ۴: $1+x^4+x^8+\dots$

پرتقال زوج تا: $1+x^2+x^4+x^6$

$(1+x+x^2+x^3)(1+x^2+x^4+x^6+\dots)(1+x)(1+x^4+x^8+\dots)$

$= \left(\frac{1-x^4}{1-x}\right)\left(\frac{1}{1-x^2}\right)(1+x)\left(\frac{1}{(1-x^4)}\right) = \boxed{\left(\frac{1}{1-x}\right)^2}$

۴

الف) $n+1$ نفر برای شرکت در مسابقه اعلام آمادگی کرده اند. m نفر از آن $n+1$ را در ابتدا انتخاب می‌کنیم. به صورتی دیگر می‌توانیم در ابتدا n نفر از $m-1$ نفر را برگزینیم سپس از $n-1$ نفر باقی مانده که m را انتخاب می‌کنیم و در نهایت $n-1$ نفر را از میان $m-1$ نفر انتخاب می‌کنیم تا بتوانیم برای شرکت در مسابقه m نفر را از $n+1$ نفر انتخاب کرده باشیم.

هر دو روش برابر هستند پس به روش ۲ گانه شماری اثبات می‌شود.

ب) قسمت الف: n نفر داریم می‌خواهیم از بین آنها یک گروه تشکیل بدهیم که اعضای آن مشخص نیست این گروه یک سرگروه دارد.

اول سرگروه را انتخاب می‌کنیم که n حالت است. و این نفر باقی مانده را تعداد زیرمجموعه‌هایشان را حساب می‌کنیم به عبارتی دیگر برای هر کدام از $(n-1)$ نفر ۲ حالت وجود دارد که شرکت کنند یا نکنند

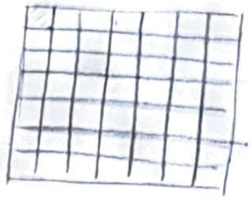
قسمت چپ:
ابتدا تعداد اعضای گروه را مشخص می‌کنیم که k نفر باشند و k نفر را از بین n نفر انتخاب می‌کنیم $\binom{n}{k}$ و برای انتخاب سرگروه نیز k حالت داریم. و k (تعداد اعضای گروه) می‌تواند از 1 تا n متغیر باشد.

پس $\sum$ آنها برابر قسمت الف می‌گردد

با توجه به روش دوگانه شماری متوجه می‌شویم که هر دو روش به یک جواب واحد می‌رسیم.

ج) قسمت چپ: فرض کنید می‌خواهیم تعداد مکعب‌های کوچک تشکیل دهنده مکعب‌های بزرگ را بشماریم.
برای مکعب $1\times1\times1$ ، 1^3 برای مکعب $2\times2\times2 \leftarrow 2^3$ ، 3^3 ، ... n^3 مکعب داریم

قسمت راست: حال اگر تعدادی از این مکعب‌ها به صورت صفحه‌ای از 1 تا n بچینیم که طول و عرض آن $(1+2+\dots+n)$ باشد و آن را به توان ۲ برسانیم و مساحت آن را حساب کنیم به عدد یکسانی می‌رسیم.



۵ طبق اصل لانه کبوتری اگر هر یک از روزها را یک خانه در نظر بگیریم در هر خانه حداقل یک بازی و $\left\lceil \frac{45}{30} \right\rceil = 2$

در ۱۵ روز آن ۲ بازی صورت می‌گیرد.

کل روزها = ۳۰ روز. $\longleftarrow$ $m = 45$

$m = 44$

$\boxed{1 < m < 15}$ نمی‌تواند باشد زیرا اگر $m=1$ باشد قبول است زیرا می‌توان

در خانه را انتخاب کرد که ۱ بازی در آن انجام شده باشد. برای $m=2$ ، $m=3$ ، $m=4$ ، ...

$\boxed{m=15}$ نیز همین صورت است زیرا هر طرفی که حساب کنیم می‌توانیم ۱۵ بازی ثبت شده را داشته

باشیم در روزهای متوالی.

دنباله صعودی $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{30}$

۶۰ عدد طبیعی $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{30}, a_1+m, \dots, a_{30}+m \longrightarrow$