מטוטלות מרקדות: השפעת תדירות כוח מאלץ על הכאוטיות של מערכת מטוטלת כפולה

שקד סוקניק, ניר כהן

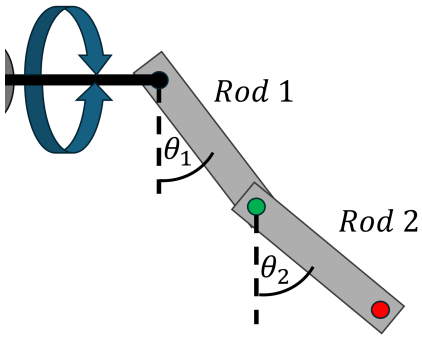
30 במאי 2026

תקציר

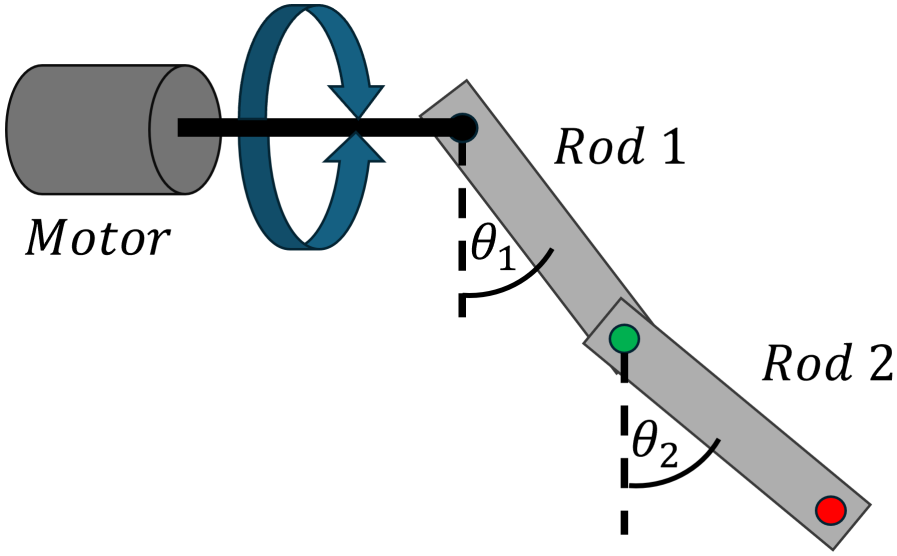
מטוטלת כפולה היא הדוגמה הקלאסית למערכת כאוטית, אך מה קורה כאשר מוסיפים כוח מאלץ למערכת? כדי לבדוק זאת בחנו את הדינמיקה של מערכת מטוטלת כפולה אשר חובר לציר הראשי שלה מנוע, שיצר כוח מאלץ על המטוטלת הראשונה. בוצעו דגימות שבהן המנוע הופעל בתדירויות שונות, ובכך יכלנו לבדוק את הקשר בין תדירות הכוח המאלץ לתכונות הכאוטיות של המערכת. מצאנו כי בלהבלה

1 מבוא

ראשית נגדיר כמה מושגי יסוד.



איור 1: ת



איור 2: דיאגרמה סכמתית של המערכת: המערכת של המטוטלת הכפולה מורכבת משני מוטות זהים, כאשר המוט הראשון מחובר בציר אל מנוע והמוט השני מחובר אל המוט הראשון בציר. הציר המחבר המנוע למוט הראשון אינו חופשי, כלומר המנוע והמוט הראשון מסתובבים באותו האופן, בניגוד לציר השני המחבר בין המוט הראשון לשני שהוא כן ציר חופשי, כלומר המוטות יכולים לנוע סביבו בחופשיות.

2 שיטות

מערך הניסוי:
ניתן לראות דיאגרמה של המערכת באיור 2. #פירוט על המערכת#.

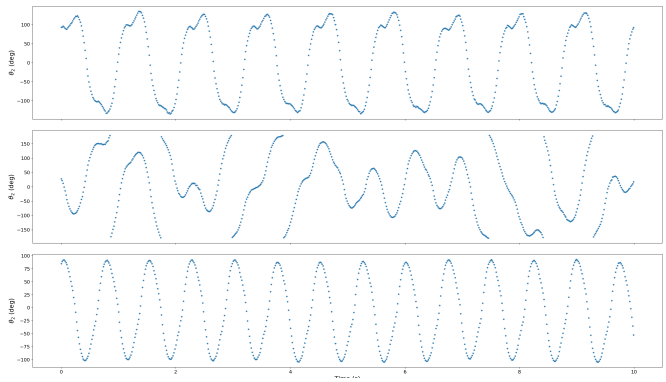
#פירוט על עיבוד נתונים.#.

איור 3: תמונות מסרטון

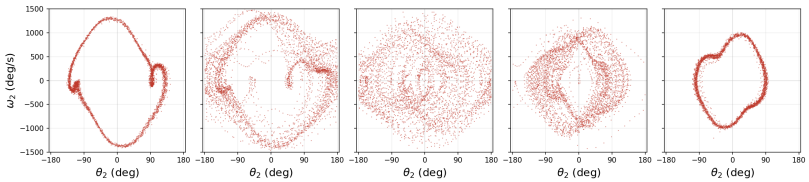
איור 4: גרפים של זוויות?

3 תוצאות

נסיים עם תיאור גורמי השגיאות.
ראשית היו כמה סיבות טכניות שהקשו על תהליך עיבוד הסרטונים. היו הרבה ארטיפקטים וויזואליים בתמונות שצילמנו, לא ברור אם מקורם במצלמה או בחומר, ועל כן עיבוד המידע פחות מדויק. התאורה על החומר הייתה לא אחידה והפחיתה מדיוק הניתוח. בנוסף, הסיווג של כל פיקסל לדומיין מסויים לא מדויק עבור הפיקסלים שבהם עוברים גבולות הדומיינים, שכן אנו מחשיבים אותם רק לדומיין אחד כאשר הם מכילים שני סוגים. לא פחות זניח הן רעידות של החומר ביחס למצלמה, שנבעו מגורמים בסביבת המערכת.
מקור נוסף לשגיאות הוא שבתדירויות גבוהות היה קשה לסנכרן את זמני קובץ המתחים והסרטון, מה שמוסיף שגיאה במדידת המתח של כל נקודה.



איור 5: גרפים של זווית המוט השני במעלות כתלות בזמן. כל גרף נוצר מדגימה שונה, כאשר ההבדל הוא תדירות הכוח המאלץ. התדירויות המתאימות לגרפים מלמעלה למטה הן $0.9Hz, 1.26Hz, 1.34Hz$. ניתן לראות כי התנועה בתדירויות $0.9Hz, 1.34Hz$ אינה כאוטית ובפרט מחזורית, אך לעומתה הדגימה בתדירות $1.26Hz$ אינה מחזורית ומתנהגת באופן לא צפוי.



איור 6: גרפים של מרחב הפאזה של המוט השני, כלומר של המהירות הזוויתית לעומת הזוויות. כל גרף נוצר מדגימה שבה תדירות הכוח המאלץ הייתה שונה, כאשר התדירויות המתאימות משמאל לימין הן $[0.9, 0.94, 1.19, 1.28, 1.34]\ Hz$. ניתן לראות כי בקצוות מרחב הפאזה הוא קוו סגור, והמשמעות היא שתנועת המטוטלת מחזורית. בתדירויות האמצעיות מרחב הפאזה אינו קוו בודד סגור, אלא ממלא את המרחב, ומכך ניתן להסיק שבתחומי תדר אילוץ כאלה התנועה כאוטית.

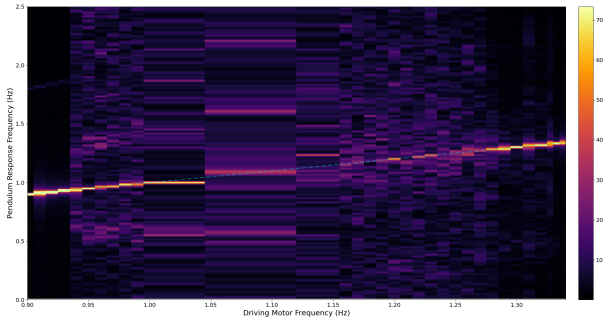
4 דיון

מצאנו כי לתדירות האילוץ יש השפעה משמעותית על רמת הכאוטיות של המערכת. קיבלנו כי קיימת תדירות מינימלית שמתחתיה המערכת אינה כאוטית, וכשעוברים אותה התנועה בחדות נהית כאוטית. ייתכן כי זה נובע מכך שנדרש סף מינימלי של אנרגיה במוט התחתון על מנת לקבל תנועה כאוטית, ורק כאשר עוברים תדירות אילוץ מינימלית המנוע מכניס מספיק אנרגיה למערכת.

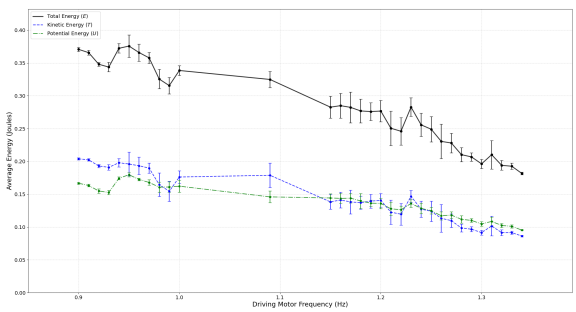
בנוסף, ראינו כי קיימת תדירות סף שמעליה התנועה מפסיקה להיות כאוטית. ייתכן שזה נובע מכך שכאשר תדירות המנוע גדלה, המערכת לא מספיקה להגיב לתדירות זאת ולא עוברת מספיק אנרגיה למוט התחתון על מנת לאפשר תנועה כאוטית.

בעייה שקרתה תוך כדי מהלך הניסוי היא שביצענו יחסית מעט דגימות בתחום התדרים המרכזי,אלא התמקדנו בתחום הכניסה והיציאה מהכאוס אילו תחום זה היה נדגם, זה היה עוזר לכימות רמת הכאוס במערכת מעבר לאמרה האם המערכת כאוטית או לא.

.



איור 7: מפת חום של התדרים הפעילים של θ_2 כתלות בתדירות הכוח המאלץ. הצבע של כל משבצת מתאר את עוצמת התדירות בדגימה של זווית θ_2 לפי התמרת פורייה. הקו המקווקו מתאר את העקומה שבה התדר בדגימת הזווית זהה לתדר האילוץ. בגרף ניתן לראות כי בקצוות תחום תדרי האילוץ (בתחומי תדר $[0.9, 0.93]\ Hz, [1.29, 1.34]\ HZ$) קיים תדר תגובה יחיד הזהה לתדר האילוץ, מה שמעיד על תנועה מחזורית יציבה בתדר האילוץ. לעומת זאת בתחום תדרי האילוץ המרכזי קיים מגוון תדרים פעילים במקביל, מה שמעיד על שבירת המחזוריות ומעבר לתנועה כאוטית.



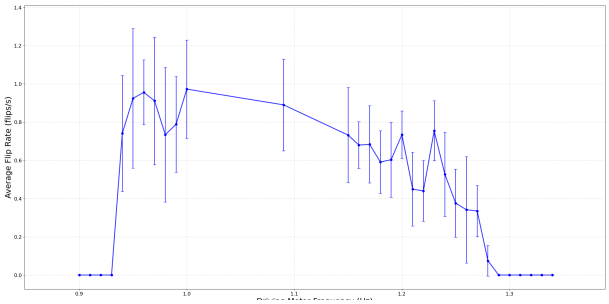
איור 8: גרף של האנרגיות הממוצעות בדגימה כתלות בתדירות הכוח המאלץ. בגרף יש 3 עקומות המתארות לכל דגימה את האנרגיה המכנית הכוללת הממוצעת, האנרגיה הקינטית הממוצעת, האנרגיה הפוטנציאלית הממוצעת ויחס האנרגיה הקינטית לפוטנציאלית. ניתן לראות כי באופן כללי יש מגמת ירידה בכמות האנרגיה הממוצעת כתלות בתדר האילוץ.

כדי להתקדם במחקר היינו נוקטים בצעדים הבאים.

ראשית, היינו מתקנים את הבעיה שציינו על ידי דגימת תחום התדרים באופן שווה.

ניתן גם להרחיב את תחום התדרים יותר ולראות האם המערכת נכנסת לכאוס שוב.

בנוסף, ניתן לשנות המתח למנוע ולראות כיצד זה משפיע על רמת הכאוטיות.



איור 9: גרף של תדירות ההיפוכים שביצע המוט השני בתנועתו כתלות בתדירות הכוח המאלץ. תדירות ההיפוכים בדגימה וסטיית התקן חושבו על ידי פיצול הדגימה ל10 חלונות זמן, חישוב תדירות ההיפוכים בכל חלון ומיצוע על החלונות לקבלת הערך וסטיית התקן. ניתן לראות כי עבור תדרי האילוץ בקצוות (בתחומי תדר $[0.9, 0.93]\,Hz, [1.29, 1.34]\,HZ$) אין היפוכים כלל, ואילו במרכז קיימת תדירות היפוכים משתנה. בנוסף ניתן לראות שהשונות במרכז מאוד גדולה, מה שמעיד על כך שהתנועה כאוטית שכן תדריות הסיבובים מאוד משתנה לאורך הדגימה.