FACULTAD REGIONAL ROSARIO

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL

INTRODUCCIÓN A LA PROBABILIDAD

INTRODUCCIÓN A LA PROBABILIDAD

Introducción

Existen experiencias cuyo resultado final puede predecirse, siempre y cuando, se conozcan las condiciones bajo las cuales se realizan. Por ejemplo, si se suelta una piedra desde cierta altura es posible determinar el tiempo que tardará en chocar contra el piso.
Hay otro tipo de experiencias que tienen la particularidad de generar resultados que no son susceptibles de predecirse con certeza; aun cuando se realicen repetidamente bajo condiciones análogas, existen factores no controlables que generan variación, y por lo tanto, no siempre se observa el mismo resultado. Éstos varían de una repetición a otra de manera imprevisible.
Si arrojáramos un dado, no podríamos predecir el número que saldría en la cara superior. Tampoco podríamos anticipar el tiempo de duración de un dispositivo electrónico, ni el número de automóviles que llegarían a un puesto de peaje en un período determinado de tiempo.
Se denomina aleatoriedad a la imposibilidad de predecir con certeza el resultado de una experiencia. Las experiencias con esas características se denominan aleatorias, por lo tanto, observar el número que sale en la cara superior de un dado, el tiempo de duración de un dispositivo electrónico o el número de autos que llegan a un puesto de peaje en un período de tiempo dado, constituyen experiencias aleatorias.
También suele utilizarse el término azar para hacer referencia al carácter imprevisible de esas experiencias.
La Teoría de Probabilidad proporciona las bases matemáticas y el lenguaje para la descripción de la variación implícita en las experiencias aleatorias. Muchos autores atribuyen el origen de esta teoría a la necesidad de comprender los juegos de azar, es decir, juegos de apuestas en que domina fuertemente una componente de incertidumbre. Pascal (1623-1662) y Fermat (1601-1665) consiguieron un auténtico y crucial progreso en la conceptualización de la probabilidad.
La teoría de la probabilidad siempre ha estado presente en numerosas aplicaciones fundamentalmente de predicción. En la actualidad, en muchos ámbitos, se realizan predicciones a partir de la información obtenida en el pasado. Por ejemplo, en meteorología, a partir de los datos previos recabados durante años, se pueden dar (de manera aproximada) valores de probabilidades de ocurrencia de eventos futuros como lluvias o nevadas. Estos conceptos también se hacen presente al momento de dar respuesta a preguntas como ¿qué posibilidad hay de que se interrumpa el servicio de wifi durante una determinada operación que dura 3 horas? o ¿qué posibilidad hay de que una persona que ingresa a una página de internet haga click sobre cierto botón correspondiente a una publicidad?, etc.

El tratamiento de estos problemas permite apreciar lo importante que resulta explicitar el conjunto formado por todos los posibles resultados de una experiencia aleatoria. Por tal razón, nos interesa precisar las definiciones de estos conjuntos y llegar a la definición formal de probabilidad.

Experiencias aleatorias. Espacio muestral asociado a una experiencia aleatoria

En lo que sigue presentamos ejemplos de experiencias aleatorias, para luego señalar particularidades en común que las caracterizan.

1) Se lanza un dado y se observa el número que sale en la cara superior.
2) Se lanza un dado y se observa si el número obtenido es par o impar.
3) Se lanza un dado dos veces y se observan los números que salen en la cara superior.
4) Se cuenta el número de interrupciones en el servicio de wifi durante la ejecución de una operación particular.
5) De una caja que contiene cien azulejos se extrae uno al azar y se observa si tiene o no fallas.
6) De todos los back ups de bases de datos que resguarda una empresa se elige uno al azar y se observa el espacio que ocupa.

Estas experiencias tienen en común las siguientes características:

- Se realizan de acuerdo a reglas definidas.
- Se pueden repetir sin cambiar esencialmente las condiciones.
- Los resultados varían de una repetición a otra de una manera imprevisible, pero es posible definir el conjunto de todos los posibles resultados.
- Los resultados individuales no son previsibles, sin embargo, cuando la experiencia se repite un gran número de veces, aparece un modelo definido de regularidad. Por ejemplo si repetimos <u>n</u> veces el lanzamiento de un dado equilibrado, observamos que la proporción de números pares e impares tiende a ser igual a 0.5 para valores de <u>n</u> convenientemente grandes.

Esa regularidad hace posible la construcción de un modelo matemático (representación abstracta y simplificada de un fenómeno real) con el cual se analiza la experiencia. A tal fin resulta útil la siguiente definición.

Se llama **espacio muestral** asociado a una experiencia ale**atoria**, y simbolizamos con S, al conjunto formado por todos los resultados posibles de dicha experiencia.

Si notamos con S_i al espacio muestral asociado a la experiencia definida en el ejemplo i, entonces:

$S_1 = \{ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 \}$
$S_2 = \{ p , i \}$ (p e i representa par e impar respectivamente)
$S_3 = \{ (a , b) \text{ con } a=1, 2, 3, 4, 5, 6 \text{ y } b=1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
$S_4 = \{ 0 , 1 , 2 , ...n.....\} = N_0$
$S_5 = \{ b , d \}$ (b y d denota bueno y defectuoso respectivamente)
$S_6 = \{ e \in R : e \geq 0 \}$

Observaciones:
Los espacios muestrales S_1, S_2, S_3 y S_5 son finitos, S_4 es infinitos numerables, en cambio S_6 es infinito no numerable.
Un **suceso elemental** de un espacio muestral S, es un conjunto formado por un único

resultado de S.
Un **suceso** A de un espacio muestral S, es un conjunto de resultados de S.

Algunos ejemplos.
El conjunto {2} es un suceso elemental del espacio muestral S_1 y A={2, 4, 6} es un suceso del mismo espacio muestral que corresponde a la proposición "se obtiene un número par". B={1, 2} es otro suceso del espacio muestral que corresponde a "se obtiene un número menor o igual que 2".

Propuestas

1) En relación al ejemplo 4 considere los sucesos:

A: ocurren a lo sumo 3 interrupciones.
B: ocurren por lo menos dos interrupciones.
Explicite los elementos de los sucesos A y B.

2) En relación a S_6 considere el suceso A: el espacio que ocupa un backup es superior a 2 Gb e inferior a 4 Gb. Exprese el suceso A mediante un intervalo.

Si en un backup y se observa que el espacio que ocupa es igual a 3.1 Gb decimos que ocurre el suceso A, en virtud de que 3.1 es superior a 2 e inferior a 4. En cambio si el espacio es igual a 1,5 Gb decimos que el suceso A no ocurre. En este caso, ocurre el suceso complemento de A, que notamos $\overline{A}$.

En general

Sea A un suceso del espacio muestral S. Decimos que en una realización de la experiencia **ocurre el suceso A** si y sólo si el resultado de esa realización, que notamos con x, es un elemento de A. De lo contrario decimos que el suceso A no ha ocurrido, en cuyo caso $x \in \overline{A}$, lo que equivale a decir que **ocurre el suceso complementario**.

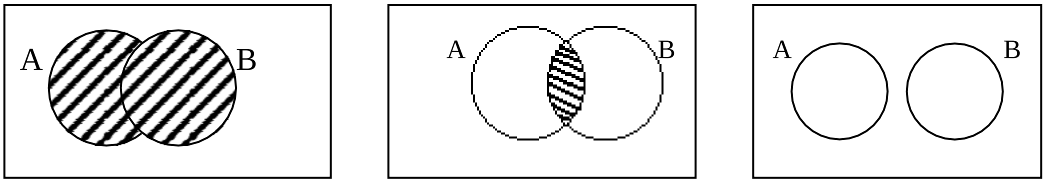
Algunas observaciones:

- El espacio muestral S es en particular un suceso que llamamos **suceso seguro o cierto** puesto que siempre ocurre ante la realización de la experiencia.
- El complemento de S es el suceso que nunca ocurre, lo llamamos **suceso imposible** y lo notamos Φ.
- El espacio muestral y los sucesos asociados a una experiencia aleatoria se representan a través de un diagrama de Venn.

Los sucesos pueden combinarse para obtener nuevos sucesos. En lo que sigue presentamos las operaciones de unión e intersección, como así también el concepto de sucesos excluyentes.

- Decimos que **ocurre el suceso** $\mathbf{A \cup B}$ $\Leftrightarrow$ al menos uno de los sucesos A ó B ocurre.
- Decimos que **ocurre el suceso** $\mathbf{A \cap B}$ $\Leftrightarrow$ A y B ocurren simultáneamente.

➢ Decimos que A y B son **sucesos excluyentes** $\Leftrightarrow A \cap B = \Phi$.



$A \cup B$ $\qquad$ $A \cap B$ $\qquad$ $A \cap B = \Phi$.

* Propuestas

1- Generalice las definiciones anteriores para un número finito e infinito numerable de sucesos.

2- Sea A, B y C sucesos de un espacio muestral S. Exprese los siguientes enunciados en notación de conjunto y represente en un diagrama de Venn.

✓ Ninguno de los sucesos A, B y C ocurre.
✓ Solamente ocurre el suceso A.
✓ Exactamente uno de los tres sucesos ocurre.
✓ Ocurre a lo sumo uno de los tres sucesos.
✓ Al menos uno de los tres sucesos ocurre.
✓ Ocurren los sucesos A y C y no ocurre el suceso B.
✓ Ocurren exactamente dos de los tres sucesos.
✓ Ocurren los tres sucesos.

3- Exprese $A \cup B$ como unión de tres sucesos excluyentes.

Probabilidad de ocurrencia de un suceso

Si A es un suceso del espacio muestral asociado a una experiencia aleatoria, no podemos decir a priori si A ocurrirá o no, al realizar la experiencia. Por tal razón interesa asociar con cada suceso del espacio muestral un número que mida, de alguna manera, la posibilidad que tiene A de ocurrir. Esta tarea nos conduce al concepto de probabilidad.

Si consideramos el suceso A: sale un número par al tirar un dado, resulta razonable considerar que ese suceso tiene una posibilidad de ocurrir igual a 0,5 en virtud de que el 50 % de los resultados posibles pertenecen al suceso A.
Este razonamiento es factible en virtud de que:

- podemos calcular el porcentaje de resultados que hay en A, con respecto al espacio muestral S, ya que éste tiene un número finito de elementos.
- suponemos que cada resultado de S tiene la misma posibilidad de ocurrir.

Esta última consideración es admisible si el dado está bien construido (dado equilibrado) y en consecuencia las seis caras tienen la misma posibilidad de salir.

El primer intento de definir con rigor matemático el concepto de probabilidad es debido a Laplace (1812) quien dio la definición que se conoce con el nombre de definición clásica, y dice:

La probabilidad de un suceso es igual al cociente entre el número de resultados favorables y el número total de resultados posibles, siempre y cuando todos los resultados tengan igual posibilidad de ocurrir.

Esta definición, incluso para la misma época, resulta circular y restrictiva, y sólo ofrece un método práctico de cálculo para algunas situaciones.

En los siguientes problemas te proponemos calcular probabilidades a partir de la definición clásica. En cada caso te sugerimos reflexionar sobre el cumplimiento de las condiciones establecidas en la definición.

Propuestas

1) Calcule la probabilidad de que al elegir al azar un alumno de la clase, el mismo resulte: a) de Rosario, b) de otra localidad.

2) Calcule la probabilidad de los sucesos A, B (definidos en la página 4), $A \cup B$ y $A \cap \overline{B}$ en relación a la experiencia aleatoria 1.

Importante:
Al resolver la propuesta 1, aplicando la definición clásica de Laplace, habrá observado que **en ese tipo de situaciones la probabilidad está asociada a la proporción o porcentajes de "elementos" del grupo que cumplen el suceso definido**. Si por ejemplo, el 30% de los alumnos fuesen de otra localidad, la probabilidad de que al elegir un alumno al azar de la clase, sea de otra localidad, es 0,3. Esta idea podría extenderse a cualquier situación donde **se elige un elemento al azar de un conjunto**, que podría ser muy grande y ni siquiera conocerse la cantidad de elementos que lo conforman. Por ejemplo, si se sabe que el 10% de las personas que ingresan a una página de telefonía celular hacen click sobre un botón que ofrece cambiar de plan con descuentos, puede afirmarse que la probabilidad de que una persona elegida al azar que ingresa a la página haga click sobre ese botón es 0,1.

Como señalamos anteriormente, la definición de Laplace resulta restrictiva y no permite asignar probabilidades a los sucesos de espacios muestrales en los que no se cumple la condición de que todos los resultados son igualmente posibles. Esto ocurre en los ejemplos 4 y 6.

Surge la pregunta: ¿cómo asignar las probabilidades de sucesos en estos casos?

Supongamos que estamos interesados en determinar la probabilidad del suceso A: el espacio que ocupa un backup elegido al azar es superior a 2 Gb e inferior a 4 Gb
Una primera aproximación podría ser la siguiente. Repetimos n veces la experiencia de elegir un backup y vemos el espacio que ocupa. Luego observamos la cantidad de valores medidos que se encuentran en el intervalo definido por el suceso A, es decir, la frecuencia absoluta del suceso A (definida en el material 1). Si nA es dicho número, el cociente nA/n (frecuencia relativa del suceso A) puede usarse como una medida de la posibilidad de que A ocurra.
Si bien es cierto que el valor de la frecuencia relativa puede variar cada vez que se realizan n observaciones, esta variación tiende a ser insignificante en la medida que n es convenientemente grande. Dicho de otra manera, la frecuencia relativa de A varía en cada

muestra de n observaciones, pero a la larga surge cierta regularidad; la frecuencia relativa de A tiende a acercarse a un valor.
Ese valor, que llamaremos probabilidad del suceso A y que notamos P(A) puede imaginarse como la frecuencia relativa de A en “la población infinita” que resulta de observar indefinidamente el espacio que ocupa un backup elegido al azar.
En esta aproximación, el concepto de probabilidad de un suceso surge como el valor hacia el cual tiende la frecuencia relativa en una larga serie de observaciones. Entonces, de esta manera, también la probabilidad está asociada a la proporción (frecuencia relativa) o porcentaje que cumple el suceso definido en un determinado grupo, la diferencia es que aquí el “grupo” estaría conformado por las “infinitas” repeticiones de la experiencia aleatoria, es decir, no es un grupo concreto de elementos si no algo conceptual.
Es importante remarcar que, más allá de que pueda repetirse o de que alguna vez se repita la experiencia aleatoria, **conceptualmente siempre se puede pensar en esas repeticiones y en el valor de la probabilidad**. Por ejemplo, si alguien vende una cantidad alta de dólares un determinado día y se pregunta en la probabilidad de que al día siguiente el dólar se dispare, claramente la persona no pensará en repeticiones de la experiencia para encontrarle un valor a esa probabilidad. Ni siquiera podría basarse en alguna experiencia anterior porque se sabe que cada momento es diferente a otro. Pero de igual modo, conceptualmente, **el valor de la probabilidad es la proporción de veces que ocurriría ese suceso si la misma experiencia (exactamente igual) se repetiría “infinitas” veces**.

Analicemos cuál es la diferencia entre este enfoque y la definición dada por Laplace.

En el modelo introducido por Laplace la probabilidad de un suceso se determina a priori a partir de ciertas hipótesis, sin necesidad de realizar experiencias, en tanto que la probabilidad que se piensa a través de las frecuencias relativas es conceptual al pensar en la repetición indefinidamente de la experiencia aleatoria. Lo importante es que ambas tienden a coincidir, siempre y cuando se cumplen las hipótesis o supuestos que se realizan.
Si el dado es equilibrado, la frecuencia relativa de cada valor se estabiliza en 1/6. Este valor puede considerarse como la frecuencia relativa en las “infinitas” tiradas del dado, por lo tanto, es la probabilidad de obtener cualquiera de los números, al tirar un dado equilibrado.

Veamos algunas propiedades de la frecuencia relativa (ya observadas en el material 1):

- $0 \leq f_A \leq 1$ $(0 \leq n_A \leq n \leq 1)$
- $f_S = 1$, siendo S el espacio muestral asociado a la experiencia. $(n_S = n)$
- Si $B \cap C = \Phi$ entonces $f_{B \cup C} = f_B + f_C$ $(n(B \cup C) = n(B) + n(C) = n_B + n_C)$

Estas propiedades se cumplen también para las probabilidades:

- $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(S) = 1$
- Si A y B son sucesos excluyentes entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Y a partir de esas propiedades surgen estas otras:

1) $P(\Phi) = 0$
2) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
3) Si $A \subset B$ entonces $P(A) \leq P(B)$
4) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
Para probar la propiedad 4) se expresa al suceso $A \cup B$ como unión de sucesos excluyentes.

Probabilidad condicional

Ejemplo introductorio
Se conoce que el 30% de las personas de una determinada población utiliza la red social imstagram frecuentemente. Supongamos también que en esa población el 40% son jóvenes de entre 15 y 30 años, y que el 20% de la población cumplen ambas condiciones, son "jóvenes" y utilizan la red social. Ahora bien, ¿cuál es la probabilidad de que un joven de esa población elegido al azar utilice la red social? Viendo que el 40% es joven y el 20% es joven y utiliza la red social, claramente podemos ver que la mitad de los jóvenes utiliza la red social. De donde la probabilidad es 0,5.
Sean los sucesos:
A: La persona utiliza la red social imstagram frecuentemente
B: La persona es joven

Entonces, si notamos con $P(A \mid B)$ la probabilidad condicional de que una persona que se sabe que es joven, utilice la red social imstagram frecuentemente, $P(A \mid B) = 0{,}5$

Le proponemos verificar que:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$P(A \mid B)$ es la probabilidad de ocurrencia del suceso A, en un espacio muestral reducido al suceso B

La relación $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ válida para el ejemplo anterior es general y nos da un medio para definir formalmente la probabilidad condicional.

Definición de probabilidad condicional

Sean A y B dos sucesos de un espacio muestral S.
Se define la probabilidad condicional del suceso A, cuando se sabe que el suceso B ha ocurrido, y se nota $P(A \mid B)$ al cociente:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Propuesta
Pruebe que la definición dada cumple con los axiomas de probabilidad, es decir:

$P(A \mid B) \geq 0$

$P(S \mid B) = 1$

Si $A \cap C = \Phi$ entonces $P(A \cup C \mid B) = P (A \mid B) + P (C \mid B)$

Realizada la prueba puede concluir que también se cumplen las siguientes propiedades:

$P (\overline{A} \mid B) = 1 – P (A \mid B)$

$P(A \cup C \mid B) = P (A \mid B) + P (C \mid B) - P (A \cap C \mid B)$

Propuesta

El personal de una compañía se encuentra separado en dos secciones: administración (A) y operación de planta (P). La siguiente tabla muestra el número de empleados en cada sección clasificados por sexo.

	Mujer (M)	Hombre (H)
Administración (A)	30	10
Operación de planta (P)	20	140

Sean los sucesos:

A: un empleado trabaja en administración

P: un empleado trabaja en planta

M: un empleado de la compañía es mujer

H: un empleado de la compañía es varón

Se elige al azar un empleado de la compañía, calcule la probabilidad de que ocurra cada uno de los siguientes sucesos:

a) es un hombre
b) trabaja en planta
c) es hombre y trabaja en planta
d) trabaja en planta sabiendo que es un hombre
e) trabaja en planta sabiendo que es una mujer
f) trabaja en administración sabiendo que es una mujer

En relación al problema resuelto observa que:

❖ $P (P \mid H) + P (P \mid M) \neq 1 \quad (M = \overline{H})$

En general $P (A \mid B) + P (A \mid \overline{B}) \neq 1$ o equivalentemente $P (A \mid \overline{B}) \neq 1 - P (A \mid B)$

❖ $P (P) < P (P \mid H)$ y $P (P) > P (P \mid M)$

Si nos restringimos a los empleados de la compañía que son hombres la proporción de los mismos que trabajan en planta es mayor que la proporción de empleados que trabajan en la compañía, en cambio la relación se invierte cuando nos restringimos a los empleados de la compañía que son mujeres.

Este ejemplo nos muestra que la probabilidad condicional de un suceso puede ser mayor o menor que la probabilidad incondicional del suceso.

Si A y B son sucesos de un espacio muestral *S*, también puede darse que P(A | B) = P(A).
En lo que sigue estudiaremos e interpretaremos situaciones en que P(A | B) = P(A)

Sucesos Independientes
Propuesta
Sean A y B dos sucesos de un espacio muestral S, ambos con probabilidad distinto de cero y uno.
Pruebe que:
- ✓ si A y B son excluyentes entonces P (A | B) = 0
- ✓ si $B \subset A$ entonces P (A | B) = 1

En cada caso, sabiendo que ocurrió el suceso B, se nos da una información precisa acerca de la probabilidad de ocurrencia del suceso A. Más aún, P (A | B) $\neq$ P (A), lo que nos indica que la probabilidad de ocurrencia A se ve afectada por la ocurrencia del suceso B.

Veamos ahora un ejemplo en que esto no ocurre.
En relación al ejemplo introductorio de la página 8, consideremos el suceso C: la persona tiene vehículo propio. Además de lo que se menciona en el ejemplo, se sabe que el 40% de las personas de la población tienen vehículo propio y el 12% verifica las condiciones de los sucesos A y C simultáneamente, es decir, utiliza la red social y tienen vehículo propio.
Tenemos que: $P(A \cap C) = 0{,}12$, $P(A) = 0{,}3$, $P(C) = 0{,}4$

Entonces $P(A/C)=0{,}3$ y $P(C/A)=0{,}4$

Y se verifica:

- $P(A \mid C) = P(A)$
- $P(C \mid A) = P(B)$
- $P(A \cap C) = P (A) \cdot P (C)$

Las tres igualdades que se verifican en relación al ejemplo en estudio nos indican respectivamente que:
- ♦ la información de que el suceso C ha ocurrido no modifica la probabilidad de ocurrencia del suceso A,
- ♦ que la ocurrencia de A tampoco modifica la probabilidad de ocurrencia del suceso C,
- ♦ que la probabilidad de la ocurrencia de A y C es igual al producto de la probabilidades de A y C.

En general vale la siguiente propiedad
Si A y B son dos sucesos de un espacio muestral *S* con probabilidades distintas de cero entonces las siguientes condiciones son equivalentes (la validez de una de ellas implica la validez de cualquiera de las restantes).

1- $P(A \mid B) = P(A)$
2- $P(B \mid A) = P(B)$
3- $P(A \cap B) = P (A) \cdot P (B)$

Propuesta
Pruebe la equivalencia de las tres condiciones.

Recuerde que:

$P(A \cap B) = P(A)\,P(B \mid A)$ y

$P(A \cap B) = P(B)\,P(A \mid B)$

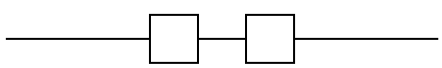
Decimos que los suceso A y B de un espacio muestral S, son **independientes**, si y sólo si se verifica cualquiera de las condiciones de la propiedad anterior.

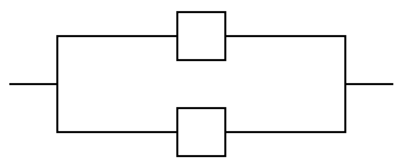
Propuesta
Pruebe que si A y B son sucesos independientes entonces también lo son:

- A y $\overline{B}$
- $\overline{A}$ y B
- $\overline{A}$ y $\overline{B}$

Confiabilidad de sistemas

Aplicamos el concepto de sucesos independientes para resolver dos problemas de confiabilidad de sistemas.
Las siguientes figuras muestran dos sistemas.





El primero está formado por dos componentes acopladas en serie.
El segundo está formado por dos componentes acopladas en paralelo.

En el primer caso el sistema funciona cuando ambas componentes funcionan. En el segundo caso el sistema funciona cuando al menos una de las componentes funciona.
La probabilidad de funcionamiento de una componente, en un período de tiempo, es igual a 0.99.
Nos proponemos calcular la probabilidad de funcionamiento de cada sistema, en el mismo período de tiempo en que esta dado la probabilidad de funcionamiento de una componente.
Sean los sucesos:
S : el sistema funciona
F_i : la componente i funciona, para i = 1 , 2.

Para el sistema en serie :

$$P(S) = P(F_1 \cap F_2) = P(F_1)\cdot P(F_2) = (0.9)^2 = 0.81$$

Para el sistema en paralelo:

$$P(S) = P(F_1 \cup F_2) = P(F_1) + P(F_2) - P(F_1 \cap F_2) =$$

$P(F_1) + P(F_2) - \mathbf{P(F_1)\cdot P(F_2)} = 0.99$

Observa que en el cálculo de $\mathbf{P(F_1 \cap F_2)}$ hemos realizado el supuesto de que las componentes funcionan independientemente. Esto significa que el funcionamiento de una de las componentes no influye en el funcionamiento de la otra componente. **Los sucesos F_1 y F_2 los consideramos independientes.**

Teorema de la probabilidad total

Antes de probar el teorema de la probabilidad total le proponemos reflexionar sobre el siguiente problema resuelto.
Una provincia se ha dividido en tres regiones: N (norte), C (centro) y S (sur). En cada región se ha determinado el porcentaje de la población que es desocupada obteniéndose los siguientes valores. En el norte el 10 % de la población es desocupada, en cambio en el centro y en el sur estos porcentajes son el 8 y 5 % respectivamente. Asimismo se conoce que en el norte vive el 50 % de la población total de la provincia, mientras que en el centro y en el sur viven respectivamente el 30 % y 20 % de la población.
¿ Permite esta información determinar el porcentaje de desocupados en toda la provincia?

Si notamos con **x** al total de la población de la provincia entonces, $\mathbf{x} \cdot 0.5$ representa el número de habitantes del norte y $\mathbf{x} \cdot 0.5 \cdot 0.10$ el número de desocupados que viven en el norte.
De manera análoga se establece que $\mathbf{x} \cdot 0.30 \cdot 0.08$ y $\mathbf{x} \cdot 0.20 \cdot 0.05$ representan el número de desocupados en el centro y sur respectivamente.
En consecuencia $\mathbf{x} \cdot 0.5 \cdot 0.10 + \mathbf{x} \cdot 0.30 \cdot 0.08 + \mathbf{x} \cdot 0.20 \cdot 0.05$ representan el total de desocupados en la provincia.
Aplicando el modelo de Laplace se tiene que la probabilidad, **p**, de que al elegir al azar un habitante de la provincia resulte un desocupado es: $\mathbf{p} = 0.5 \,.\, 0.10 + 0.30 \,.\, 0.08 + 0.20 \,.\, 0.05 = 0.084$
Por lo tanto el 8.4 % de la población es desocupada.
Hemos determinado el porcentaje de desocupados en la provincia a partir de la información de los porcentajes de desocupados en cada región y conociendo cuánto representa la población de cada región, respecto a la población total de la provincia.

Si notamos con
D: un habitante elegido al azar es desocupado
N: un habitante elegido al azar habita en el norte
C: un habitante elegido al azar habita en el centro
S: un habitante elegido al azar habita en el sur

entonces, $P(D) = P(N) \cdot P(D \mid N) + P(C) \cdot P(D \mid C) + P(S) \cdot P(D \mid S)$

El resultado obtenido constituye un caso particular del teorema de la probabilidad total que pasamos a considerar.
Decimos que los sucesos $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n$ constituyen **una partición del espacio muestral S** cuando:

- $A_1 \cup A_2 \cup ...... \cup A_n = S$
- $A_i \cap A_j = \Phi \quad \forall\, i \neq j$
- $P(A_i) > 0 \quad \forall\, i$

El teorema de la probabilidad total permite calcular la probabilidad de un suceso $B \subset S$ cuando se conocen:

$P(B \mid A_i)$ y $P(A_i)\ \forall\ i = 1, 2, ...n$; siendo $A_1, A_2, ..., A_n$ una partición de S.

En efecto:

$B = B \cap S = B \cap (A_1 \cup A_2 \cup ...... \cup A_n) = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup ...... \cup (B \cap A_n)$

$P(B) = P[(B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup ... \cup (B \cap A_n)]$

Siendo $B \cap A_1$, $B \cap A_2$, ... $B \cap A_n$ sucesos excluyentes , resulta:

$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + ... + P(B \cap A_n)$ y por lo tanto

$P(B) = P(B \mid A_1)\, P(A_1) + P(B \mid A_2)\, P(A_2) + ... + P(B \mid A_n)\, P(A_n) =$

$$= \sum_{1}^{n} P(B \mid A_i)\, P(A_i).$$

El resultado obtenido se conoce como Teorema de la Probabilidad Total

Le proponemos probar como una consecuencia del teorema de la probabilidad total que :

$$P(A_k \mid B) = \frac{P(B \mid A_k)\, P(A_k)}{\sum_1^n P(B \mid A_i)\, P(A_i)}$$

Este resultado se conoce con el nombre de **Teorema de Bayes**

Propuesta

En relación al problema introductorio:

a) Calcula la probabilidad de que un habitante elegido al azar pertenezca a cada región cuando se sabe que se trata de un desocupado.
b) ¿Cuánto suman las probabilidades calculadas en a)?

Propuesta

Una planta recibe microcircuitos provenientes de tres fabricantes A, B y C. El 50% del total se compra a A mientras que a B y a C se le compra el 25% a cada uno. El porcentaje de circuitos defectuosos producidos por A, B y C es de 3%, 5% y 6% respectivamente. Los circuitos se almacenan en la planta sin importar quien fue el proveedor.

a) Calcule la probabilidad de que una unidad armada en la planta contenga un circuito defectuoso.
b) Si se elige al azar un circuito que resulta no defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que provenga del proveedor B?

BIBLIOGRAFÍA

- Canavos, George. “Probabilidad y Estadística. Aplicaciones y Métodos”. México. McGraw Hill. 1988.
- Devore Jay L. “Probabilidad y Estadística para Ingeniería y Ciencias”. México. Thomson Editores 1998.
- Hines William, Montgomery Douglas, Goldsman David, Borror Connie. “Probabilidad y Estadística para Ingeniería”. México. CECSA. 2006.
- Meyer Paul L. “Probabilidad y Aplicaciones Estadísticas”. México. Addison Wesley Iberoamericana .1993.
- Miller Irwin y Freund J. “Probabilidad y Estadística para Ingenieros”. Prentice Hall. 1993.
- Montgomery Douglas, Runger George. “Probabilidad y Estadística Aplicadas a la Ingeniería”. México. McGraw Hill 1996.
- Navidi William. “Estadística para Ingenieros y Científicos”. México. McGrawHill. 2006.
- Scheaffer R., MaClave James. “Probabilidad y Estadística para Ingeniería” . México. Grupo Editorial Iberoamericana.1993.
- Walpole Ronald, Myers Raymond. “Probabilidad y Estadística”. México. Pearson Educación. 1999.