EJEMPLOS CODIGOS LINEALES

1 -Dada la siguiente Matriz Generadora del Código de Grupo encontrar:

a) El Código de Grupo
b) Que errores no se detectan
c) analizar cómo se comporta el Código frente a los errores simples, realizando el análisis para todos los síndromes.

n=6 columnas (dígitos)

$$G = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 100011 \\ 101101 \\ 111000 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \mathbf{g_1} \\ \mathbf{g_2} \\ \mathbf{g_3} \end{array} \end{array} \qquad m = 3 \text{ Filas}$$

a) Para hallar el Código de Grupo V se debe realizar la combinación lineal de los vectores $\mathbf{g_i}$ de G:

$$\mathbf{v_i = k_1 \times g_1 + k_2 \times g_2 \ldots\ldots\ldots + K_m \times g_m}$$

+ : Suma sin Acarreo

Entonces damos todas las combinaciones posibles de K obteniendo los vectores de V

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	k_3	k_2	k_1	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	$v_1 = k_1xg_1 + k_2xg_2 + k_3xg_3 = 0xg_1 + 0xg_2 + 0xg_3$
1	0	0	0	1	1	0	0	1	$v_2 = k_1xg_1 + k_2xg_2 + k_3xg_3 = 1xg_1 + 0xg_2 + 0xg_3$
1	0	1	1	0	1	0	1	0	$v_3 = k_1xg_1 + k_2xg_2 + k_3xg_3 = 0xg_1 + 1xg_2 + 0xg_3$
0	0	1	1	1	0	0	1	1	$v_4 = k_1xg_1 + k_2xg_2 + k_3xg_3 = 1xg_1 + 1xg_2 + 0xg_3$
1	1	1	0	0	0	1	0	0	$v_5 = k_1xg_1 + k_2xg_2 + k_3xg_3 = 0xg_1 + 0xg_2 + 1xg_3$
0	1	1	0	1	1	1	0	1	$v_6 = k_1xg_1 + k_2xg_2 + k_2xg_3 = 1xg_1 + 0xg_2 + 1xg_3$
0	1	0	1	0	1	1	1	0	$v_7 = k_1xg_1 + k_2xg_2 + k_3xg_3 = 1xg_1 + 1xg_2 + 0xg_3$
1	1	0	1	1	0	1	1	1	$v_8 = k_1xg_1 + k_2xg_2 + k_3xg_3 = 1xg_1 + 1xg_2 + 1xg_3$

Quedando entonces el Código de Grupo:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathbf{V}$$

$\mathbf{2^m}$ filas (palabras código) **x n Columnas = 8 x 6**

(8 palabras códigos de 6 dígitos cada una)

b) Los errores que no se detectan son donde hay unos en las palabras códigos (es decir los errores que no se detectan coinciden con las palabras códigos)

Error Triple en x_1, x_5 y x_6

Error Triple en x_3, x_4 y x_5

Error Triple en x_1, x_2 y x_3

Error Triple en x_2, x_4 y x_6

Error Cuádruple en x_1, x_3, x_4 y x_6

Error Cuádruple en x_2, x_3, x_5 y x_6

Error Cuádruple en x_1, x_2, x_4 y x_5

c) Para realizar el análisis del comportamiento del código frente a los errores se debe encontrar primero la Matriz de Control de Paridad **H** base de **V'**

Para esto primero aplicamos la condición de ortogonalidad que permite encontrar **V':**

Para todo $\mathbf{v'_i} \in \mathbf{V'}$ resulta $\mathbf{v'_i \times G^T = 0}$ **entonces:**

$$(\mathbf{x'_1}, \mathbf{x'_2}, \mathbf{x'_3}, \mathbf{x'_4}, \mathbf{x'_5}, \mathbf{x'_6}) \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = (0) = (0, 0, 0)$$

Recordando el procedimientopara el producto de matrices resulta:

$$\mathbf{x'_1\,x1 + x'_2\,x0 + x'_3x0 + x'_4\,x0 + x'_5\,x1 + x'_6\,x1 = 0}$$

$$\mathbf{x'_1\,x1 + x'_2\,x0 + x'_3x1 + x'_4\,x1 + x'_5\,x0 + x'_6\,x1 = 0}$$

$$\mathbf{x'_1\,x1 + x'_2\,x1 + x'_3x1 + x'_4\,x0 + x'_5\,x0 + x'_6\,x0 = 0}$$

Queda entonces un sistema de ecuaciones de 6 incógnitas con tres ecuaciones:

$$\begin{cases} \mathbf{x'_1 + x'_5 + x'_6 = 0} \\ \mathbf{x'_1 + x'_3 + x'_4 + x'_6 = 0} \\ \mathbf{x'_1 + x'_2 + x'_3 = 0} \end{cases}$$

Si fueran variables naturales tendría infinitas soluciones , pero como las variables son binarias podemos darle todos los valores a tres de las variables, de manera de obtener un sistema de ecuaciones de 3 ecuaciones con 3 variables (3x3)

Para esto es conveniente elegir aquellas 3 variables que más se repten en las ecuaciones de manera de tener todas las variables independientes de un lado de la igualdad.

Además debemos recordar que la suma es sin acarreo y las variables binarias con lo cual las ecuaciones se resuelven según:

Si a y b son variables binarias resulta:

a + b = 0 ➔ a = b (ambas variables son **0** o´ **1**)

a + b = 1 ➔ a = 1 + b (**a** = $\overline{\mathbf{b}}$ y esto lo representamos sumando **1**)

a + a = 0 Siempre para todo valor de a (0 ó 1)

Entonces observando nuestro sistema de ecuaciones vemos que las variables que más se repiten en las ecuaciones pueden ser $\mathbf{(x_1 , x_3 , x_6)}$

Con lo cual ahora despejamos según lo visto anteriormente:

$x'_5 = x'_1 + x'_6$

$x'_4 = x'_1 + x'_3 + x'_6$

$x'_2 = x'_1 + x'_3$

Ahora dando todos los valores a **(x'_1 , x'_3 , x'_6)** obtenemos el espacio ortogonal V´y luego extraemos la matriz H

n = 6 columnas

$$V' = \begin{array}{c} \begin{matrix} x'_1 & x'_2 & x'_3 & x'_4 & x'_5 & x'_6 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \quad 2^{n-m} \text{ filas } = 2^{6-3} = 2^3 = 8$$

Ahora hay que elegir una base de n x (n-m) = 6 columnas x 3filas cuyos vectores sean independientes

Si elegimos los vectores:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \neq \mathbf{H}$$

Vemos que el vector $h_3 = h_1 + h_2$

Por lo tanto no es Base Generadora de V'

Debemos elegir otro conjunto de 3 vectores que resulten linealmente independientes:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{H}$$

Vemos que el vector $h_3 \neq h_1 + h_2$

Podríamos elegir también:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{H}$$

Vemos que el vector $h_3 \neq h_1 + h_2$

Cada uno puede elegir una base distinta obteniendo iguales resultados

No quedamos con esta última:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{H}$$

Ahora planteamos que una palabra de V con error multiplicada por H^T debe dar distinto de cero (síndrome):

$$\mathbf{V_{ie} \times H^T = S_i}$$

Como no conocemos la palabra con error será una incógnita de nuestra ecuación, $\mathbf{(x_1 , x_2 , x_3 , x_4 , x_5 , x_6)}$, conocemos $\mathbf{H^T}$ y el síndrome conocemos sus dimensiones (1x n-m), así que lo proponemos :

$$\underbrace{\mathbf{(x_1 , x_2 , x_3 , x_4 , x_5 , x_6)}}_{\text{No concemos el error}} \mathbf{\times\, H^T} = Si$$

dato proponemos $Si \neq 0$

<u>SÍNDROME 001</u>

$$\mathbf{(x_1 , x_2 , x_3 , x_4 , x_5 , x_6) \times} \begin{bmatrix} 0\ 0\ 1 \\ 1\ 1\ 1 \\ 1\ 1\ 0 \\ 1\ 0\ 1 \\ 0\ 1\ 1 \\ 0\ 1\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0\ 0\ 1}$$

Podemos elegir cualquier síndrome, en particular y por una cuestión de comodidad elegimos contar en binario (1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7) ya que son $2^{n-m} - 1 = 2^3 – 1 = 7$ Síndromes distintos

Queda entonces un sistema de ecuaciones de 6 incógnitas con tres ecuaciones:

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_5 + x_6 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 1 \end{cases}$$

Si fueran variables naturales tendría infinitas soluciones , pero como las variables son binarias podemos darle todos los valores a tres de las variables, de manera de obtener un sistema de ecuaciones de 3 ecuaciones con 3 variables (3x3)

Para esto es conveniente elegir aquellas 3 variables que más se repiten en las ecuaciones de manera de tener todas las variables independientes de un lado de la igualdad, por ejemplo . $\mathbf{x_2}$ **,** $\mathbf{x_3}$ **y** $\mathbf{x_5}$

Además debemos recordar que la suma es sin acarreo y las variables son binarias con lo cual las ecuaciones se resuelven según:

$$\begin{cases} x_4 = x_2 + x_3 \\ x_6 = x_2 + x_3 + x_5 \\ x_1 = 1 + x_2 + x_4 + x_5 = 1 + x_2 + x_5 + x_2 + x_3 = 1 + x_3 + x_5 \end{cases} \qquad x_2 + x_2 = 0$$

$$\begin{cases} x_4 = x_2 + x_3 \\ x_6 = x_2 + x_3 + x_5 \\ x_1 = 1 + x_3 + x_5 \end{cases}$$

Ahora damos todos los valores a las variables $\mathbf{x_2}$ **,** $\mathbf{x_3}$ **,** $\mathbf{x_5}$ y obtenemos los valores de $\mathbf{x_1}$ **,** $\mathbf{x_4}$ **y** $\mathbf{x_6}$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	1
0	0	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0
1	1	0	1	0	1
0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	0	0
1	1	1	0	1	1

Esta es la Familia de palabras de V que tienen un determinado error que dá como resultado el Síndrome $\mathbf{S_1 = 001}$, resumiendo es **Familia de Errores asociadas al Síndrome 001**

Observando el Código V y una palabra código con error por ejem. 111011 , no no se puede deducir en cuál dígito está el error.

Pero en el Código hay una palabra muy particular, la (000000) , entonces si a esa palabra le generamos un error simple por ejemplo en x_1 resulta:

$$
\begin{array}{cc}
X_1 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 \\
+ & + \\
e_{x1} & 1\,0\,0\,0\,0\,0 \\
\hline
x_{ex1} & 1\,0\,0\,0\,0\,0
\end{array}
$$

Queda como resultado la palabra con error e_{x1}

Entonces observando la Familia de Errores Asociadas al **Síndrome 001** vemos que todas las palabras se corresponden a las palabras códigos con un error en x_1, en particular la 000000 → 000001 Por ejemplo retomando la palabra 111011 la palabra correcta es la 011011

La conclusión es que con el Síndrome 001 se detecta y corrige error simple en x_1

También podría ser este síndrome causado por :

Error Doble en x_5 y x_6

Error Doble en x_2 y x_3

Error Triple en x_3, x_4 y x_6

Error Triple en x_2, x_4 y x_5

Error Cuádruple en x_1, x_3, x_4 y x_5

Error Cuádruple en x_1, x_2, x_4 y x_6

Error Quíntuple en x_1, x_2, x_3 , x_5 y x_6

Pero vamos a considerar el criterio de la mayor probabilidad, en este caso Error unitario en x_1.

SÍNDROME 010

Veamos ahora la Familia de Errores asociadas al **Síndrome 010**

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0\ 1\ 0}$$

Las ecuaciones quedan ahora:

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_5 + x_6 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

Elegimos las mismas tres variables como independientes x_2, x_3, x_5 quedando las ecuaciones:

$$\begin{cases} x_4 = x_2 + x_3 \\ x_6 = 1 + x_2 + x_3 + x_5 \\ x_1 = x_3 + x_5 \end{cases}$$

Ahora damos todos los valores a las variables x_2, x_3, x_5 y obtenemos los valores de x_1, x_4 y x_6

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Esta es la Familia de palabras de V que tienen un determinado error que dá como resultado el Síndrome $\mathbf{S_2 = 010}$, resumiendo es **Familia de Errores asociadas al Síndrome 010**

Al igual que en el síndrome anterior nos fijamos en el error en la palabra nula , es decir vemos la palabra con todos ceros y un solo uno

Entonces vemos que el error se produce en el dígito x_6, además valen las mismas consideraciones en cuanto a los errores de orden superior.

La conclusión es que con el Síndrome 010 se detecta y corrige error simple en x_6

SÍNDROME 011

Veamos ahora la Familia de Errores asociadas al **Síndrome 011:**

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \times \begin{bmatrix} 0\,0\,1 \\ 1\,1\,1 \\ 1\,1\,0 \\ 1\,0\,1 \\ 0\,1\,1 \\ 0\,1\,0 \end{bmatrix} = \mathbf{0\,1\,1}$$

Las ecuaciones quedan ahora:

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_5 + x_6 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 1 \end{cases}$$

Elegimos las mismas tres variables como independientes x_2, x_3, x_5 quedando las ecuaciones:

$$\begin{cases} x_4 = x_2 + x_3 \\ x_6 = 1 + x_2 + x_3 + x_5 \\ x_1 = 1 + x_3 + x_5 \end{cases}$$

Ahora damos todos los valores a las variables x_2, x_3, x_5 y obtenemos los valores de x_1, x_4 y x_6

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Esta es la Familia de palabras de V que tienen un determinado error que dá como resultado el Síndrome $\mathbf{S_3 = 011}$, resumiendo es **Familia de Errores asociadas al Síndrome 011**

Al igual que en el síndrome anterior nos fijamos en el error en la palabra nula , es decir vemos la palabra con todos ceros y un solo uno

Entonces vemos que el error se produce en el dígito $\mathbf{x_5}$, además valen las mismas consideraciones en cuanto a los errores de orden superior.

La conclusión es que con el Síndrome 011 se detecta y corrige error simple en $\mathbf{x_5}$

SÍNDROME 100

Veamos ahora la Familia de Errores asociadas al **Síndrome 100**

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)\ x \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{1\ 0\ 0}$$

Las ecuaciones quedan ahora:

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 + x_5 + x_6 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

Elegimos las mismas tres variables como independientes $\mathbf{x_2, x_3, x_5}$ quedando las ecuaciones:

$$\begin{cases} x_4 = 1 + x_2 + x_3 \\ x_6 = x_2 + x_3 + x_5 \\ x_1 = x_3 + x_5 \end{cases}$$

Ahora damos todos los valores a las variables $\mathbf{x_2, x_3, x_5}$ y obtenemos los valores de $\mathbf{x_1, x_4}$ **y** $\mathbf{x_6}$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Esta es la Familia de palabras de V que tienen un determinado error que dá como resultado el Síndrome **S_4 = 100**, resumiendo es **Familia de Errores asociadas al Síndrome 100**

Al igual que en el síndrome anterior nos fijamos en el error en la palabra nula , es decir vemos la palabra con todos ceros y un solo uno

Entonces vemos que el error se produce en el dígito $\mathbf{x_4}$, además valen las mismas consideraciones en cuanto a los errores de orden superior.

La conclusión es que con el Síndrome 100 se detecta y corrige error simple en x_4

<u>SÍNDROME 101</u>

Veamos ahora la Familia de Errores asociadas al **Síndrome 101**

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \times \begin{bmatrix} 0\ 0\ 1 \\ 1\ 1\ 1 \\ 1\ 1\ 0 \\ 1\ 0\ 1 \\ 0\ 1\ 1 \\ 0\ 1\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{1\ 0\ 1}$$

Las ecuaciones quedan ahora:

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 + x_5 + x_6 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 1 \end{cases}$$

Elegimos las mismas tres variables como independientes $\mathbf{x_2}$, $\mathbf{x_3}$, $\mathbf{x_5}$ quedando las ecuaciones:

$$\begin{cases} x_4 = 1 + x_2 + x_3 \\ x_6 = x_2 + x_3 + x_5 \\ x_1 = 1 + x_3 + x_5 \end{cases}$$

Ahora damos todos los valores a las variables **x_2 , x_3 , x_5** y obtenemos los valores de **x_1 , x_4 y x_6**

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \hline \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Esta es la Familia de palabras de V que tienen un determinado error que dá como resultado el Síndrome **S_5 = 101**, resumiendo es **Familia de Errores asociadas al Síndrome 101**

Al igual que en el síndrome anterior nos fijamos en el error en la palabra nula**,** es decir vemos la palabra con todos ceros y un solo uno

En este caso no hay ninguna palabra con todos ceros y un solo uno, entonces debemos ver lo que sigueen probabilidad de error, en este caso el error doble, si hay una sola palabra con todos ceros y dos unos , se detecta y corrige error doble, vemos que hay tres palabras con todos ceros y dos unos , por lo tanto no se puede corregir y solo podemos detectar

La conclusión es que con el Síndrome 101 SOLO se detecta error DOBLE en:

$x_1\ x_4$ ó $x_3\ x_6$ ó $x_2\ x_5$

<u>SÍNDROME 110</u>

Veamos ahora la Familia de Errores asociadas al **Síndrome 110**

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{1\ 1\ 0}$$

Las ecuaciones quedan ahora:

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 + x_5 + x_6 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

Elegimos las mismas tres variables como independientes $\mathbf{x_2}$, $\mathbf{x_3}$, $\mathbf{x_5}$ quedando las ecuaciones:

$$\begin{cases} x_4 = 1 + x_2 + x_3 \\ x_6 = 1 + x_2 + x_3 + x_5 \\ x_1 = x_3 + x_5 \end{cases}$$

Ahora damos todos los valores a las variables $\mathbf{x_2}$, $\mathbf{x_3}$, $\mathbf{x_5}$ y obtenemos los valores de $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_4}$ **y** $\mathbf{x_6}$

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Esta es la Familia de palabras de V que tienen un determinado error que dá como resultado el Síndrome $\mathbf{S_5 = 110}$, resumiendo es **Familia de Errores asociadas al Síndrome 110**

Al igual que en el síndrome anterior nos fijamos en el error en la palabra nula, es decir vemos la palabra con todos ceros y un solo uno

Entonces vemos que el error se produce en el dígito $\mathbf{x_2}$, además valen las mismas consideraciones en cuanto a los errores de orden superior.

La conclusión es que con el Síndrome 110 se detecta y corrige error simple en $\mathbf{x_2}$

SÍNDROME 111

Veamos ahora la Familia de Errores asociadas al **Síndrome 111**

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \times \begin{bmatrix} 0\ 0\ 1 \\ 1\ 1\ 1 \\ 1\ 1\ 0 \\ 1\ 0\ 1 \\ 0\ 1\ 1 \\ 0\ 1\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{1\ 1\ 1}$$

Las ecuaciones quedan ahora:

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 + x_5 + x_6 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 1 \end{cases}$$

Elegimos las mismas tres variables como independientes x_2, x_3, x_5 quedando las ecuaciones:

$$\begin{cases} x_4 = 1 + x_2 + x_3 \\ x_6 = 1 + x_2 + x_3 + x_5 \\ x_1 = 1 + x_3 + x_5 \end{cases}$$

Ahora damos todos los valores a las variables x_2, x_3, x_5 y obtenemos los valores de x_1, x_4 y x_6

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Esta es la Familia de palabras de V que tienen un determinado error que dá como resultado el Síndrome $\mathbf{S_5 = 111}$, resumiendo es **Familia de Errores asociadas al Síndrome 111**

Al igual que en el síndrome anterior nos fijamos en el error en la palabra nula, es decir vemos la palabra con todos ceros y un solo uno

Entonces vemos que el error se produce en el dígito $\mathbf{x_3}$, además valen las mismas consideraciones en cuanto a los errores de orden superior.

La conclusión es que con el Síndrome 111 se detecta y corrige error simple en $\mathbf{x_3}$

----

2 -Dada la siguiente Matriz Generadora del Código de Grupo encontrar:

a) El Código de Grupo
b) Que errores no se detectan
c) analizar cómo se comporta el Código frente a los errores simples, realizando el análisis para todos los síndromes.

n = 5 columnas (5 dígitos)

$$G = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 11000 \\ 00011 \\ 01110 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \mathbf{g_1} \\ \mathbf{g_2} \\ \mathbf{g_3} \end{array} \end{array} \qquad m = 3 \text{ Filas}$$

d) Para hallar el Código de Grupo V se debe realizar la combinación lineal de los vectores $\mathbf{g_i}$ de G:

$$\mathbf{v_i = k_1 \times g_1 + k_2 \times g_2 \ldots\ldots + K_m \times g_m}$$

+ : Suma sin Acarreo

Entonces damos todas las combinaciones posibles de K obteniendo los vectores de V

$x_1\ x_2\ x_3\ x_4 x_5$	$k_3\ k_2\ k_1$	
0 0 0 0 0	**0 0 0**	$v_1 = k_1 x g_1 + k_2 x g_2 + k_3 x g_3 = 0 x g_1 + 0 x g_2 + 0 x g_3$
1 1 0 0 0	**0 0 1**	$v_2 = k_1 x g_1 + k_2 x g_2 + k_3 x g_3 = 1 x g_1 + 0 x g_2 + 0 x g_3$
0 0 0 1 1	**0 1 0**	$v_3 = k_1 x g_1 + k_2 x g_2 + k_3 x g_3 = 0 x g_1 + 1 x g_2 + 0 x g_3$
1 1 0 1 1	**0 1 1**	$v_4 = k_1 x g_1 + k_2 x g_2 + k_3 x g_3 = 0 x g_1 + 0 x g_2 + 0 x g_2$
0 1 1 1 0	**1 0 0**	$v_5 = k_1 x g_1 + k_2 x g_2 + k_3 x g_3 = 1 x g_1 + 0 x g_2 + 0 x g_3$
1 0 1 1 0	**1 0 1**	$v_6 = k_1 x g_1 + k_2 x g_2 + k_3 x g_3 = 1 x g_1 + 0 x g_2 + 1 x g_3$
0 1 1 0 1	**1 1 0**	$v_7 = k_1 x g_1 + k_2 x g_2 + k_3 x g_3 = 1 x g_1 + 1 x g_2 + 0 x g_3$
1 0 1 0 1	**1 1 1**	$v_8 = k_1 x g_1 + k_2 x g_2 + k_3 x g_3 = 1 x g_1 + 1 x g_2 + 1 x g_3$

Quedando entonces:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} = \mathbf{V} \qquad \mathbf{2^m} \text{ filas } \mathbf{x} \text{ } \mathbf{n \ Columnas}$$

e) Los errores que no se detectan son donde hay unos en las palabras códigos (es decir los errores que no se detectan coinciden con las palabras códigos)

Error Doble en x_1 y x_2

Error Doble en x_5 y x_6

Error Triple en x_2, x_3 y x_4

Error Triple en x_1, x_3 y x_4

Error Triple en x_2, x_3 y x_5

Error Triple en x_1, x_3 y x_5

Error Cuádruple en x_1, x_2, x_4 y x_5

f) Para realizar el análisis del comportamiento del código frente a los errores se debe encontrar primero la Matriz de Control de Paridad **H** base de **V'**

Para esto primero aplicamos la condición de ortogonalidad que permite encontrar **V':**

Para todo **v'_i € V'** resulta **v'_i x G^T = 0** **entonces:**

$$(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4, x'_5) \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = (0) = (0, 0, 0)$$

Recordando el procedimientopara el producto de matrices resulta:

$$x'_1\, x1 + x'_2\, x1 + x'_3 x0 + x'_4\, x0 + x'_5\, x0 = 0$$

$$x'_1\, x0 + x'_2\, x0 + x'_3 x0 + x'_4\, x1 + x'_5\, x1 = 0$$

$$x'_1\, x0 + x'_2\, x1 + x'_3 x1 + x'_4\, x01 + x'_5\, x0 = 0$$

Queda entonces un sistema de ecuaciones de 5 incógnitas con tres ecuaciones:

$$\begin{cases} x'_1 + x'_2 = 0 \\ x'_4 + x'_5 = 0 \\ x'_2 + x'_3 + x'_4 = 0 \end{cases}$$

Si fueran variables naturales tendría infinitas soluciones , pero como las variables son binarias podemos darle todos los valores a dos de las variables, de manera de obtener un sistema de ecuaciones de 3 ecuaciones con 3 incognitas (3x3)

Para esto es conveniente elegir aquellas 2 variables que más se repten en las ecuaciones de manera de tener todas las variables independientes de un lado de la igualdad.

Entonces observando nuestro sistema de ecuaciones vemos que las variables que más se repiten en las ecuaciones pueden ser **(x_2 , x_4)**

Con lo cual ahora despejamos según lo visto anteriormente:

$$x'_1 = x'_2$$

$$x'_5 = x'_4$$

$$x'_3 = x'_2 + x'_4$$

Ahora dando todos los valores a **(x'_2 , x'_4)** obtenemos el espacio ortogonal V´y luego extraemos la matriz H n = 5 columnas

$$V' = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x'_1 & x'_2 & x'_3 & x'_4 & x'_5 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

2^{n-m} filas $= 2^{5-3} = 2^2 = 4$

Ahora hay que elegir una base de n x (n-m) = 5 columnas x 2 filas cuyos vectores sean independientes

En este caso cualquier par de vectores que NO contengan al vector Nulo será base

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ahora planteamos que una palabra de V con error multiplicada por H^T debe dar distinto de cero (síndrome):

$$\mathbf{v_{ie} \times H^T = S_i}$$

Como no conocemos la palabra con error, será una incógnita de nuestra ecuación, $\mathbf{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)}$, conocemos $\mathbf{H^T}$ y el síndrome conocemos sus dimensiones (1x n-m), así que lo proponemos :

$$\underbrace{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)}_{\text{No concemos el error}} \times \underset{\text{dato}}{H^T} = \underset{\text{proponemos } Si \neq 0}{Si}$$

<u>SÍNDROME 01</u>

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \times \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0\ 1}$$

Podemos elegir cualquier síndrome, en particular y por una cuestión de comodidad elegimos contar en en binario (1, 2, 3) - Ya que son $2^{n-m} - 1 = 2^{5-3} – 1 = 3$ Síndromes distintos

Queda entonces un sistema de ecuaciones de 5 incógnitas con dos ecuaciones:

$$\begin{cases} x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

Si fueran variables naturales tendría infinitas soluciones , pero como las variables son binarias podemos darle todos los valores a tres de las variables, de manera de obtener un sistema de 2 ecuaciones con 2 variables (2x2)

Para esto es conveniente elegir aquellas 3 variables que más se repiten en las ecuaciones de manera de tener todas las variables independientes de un lado de la igualdad, por ejemplo . $\mathbf{x_2}$ **,** $\mathbf{x_3}$ **y** $\mathbf{x_4}$

Además debemos recordar que la suma es sin acarreo y las variables son binarias con lo cual las ecuaciones se resuelven según:

$$\begin{cases} X_5 = x_3 + x_4 \\ X_1 = 1 + x_2 + x_3 \end{cases}$$

Ahora damos todos los valores a las variables $\mathbf{x_2}$ **,** $\mathbf{x_3}$ **,** $\mathbf{x_4}$ y obtenemos los valores de $\mathbf{x_1}$ **y** $\mathbf{x_5}$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	0

Esta es la Familia de palabras de V que tienen un determinado error que dá como resultado el Síndrome $\mathbf{S_1 = 01}$, resumiendo es **Familia de Errores asociadas al Síndrome 01**

Entonces observando la Familia de Errores Asociadas al **Síndrome 01** vemos que hay dos palabras con todos ceros y un solo uno en x_1 y en x_2, por lo tanto no podemos corregir sólo se puede detectar.

La conclusión es que con el Síndrome 01 SOLO se detecta error simple en x_1 ó x_2

También podría ser este síndrome causado por :

Error Doble en x_3 y x_5

Error Doble en x_3 y x_4

Error Triple en x_1, x_4 y x_5

Error Triple en x_2, x_4 y x_5

Error Cuádruple en x_1, x_3, x_4 y x_5

Error Cuádruple en x_1, x_2, x_3 y x_4

Pero vamos a considerar el criterio de la mayor probabilidad, en este caso detección de Error unitario en x_1 ó x_2

<u>SÍNDROME 10</u>

Veamos ahora la Familia de Errores asociadas al **Síndrome 10**

$$(x_1\,,\ x_2\,,\ x_3\ ,\ x_4\,,\ x_5\,)\ x \begin{bmatrix} 0\ 1 \\ 0\ 1 \\ 1\ 1 \\ 1\ 0 \\ 1\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{1\ 0}$$

Queda entonces un sistema de ecuaciones de 5 incógnitas con dos ecuaciones:

$$\begin{cases} x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Elegimos las mismas variables anteriores **x_2 , x_3 y x_4**

$$\begin{cases} X_5 = 1 + x_3 + x_4 \\ X_1 = x_2 + x_3 \end{cases}$$

Ahora damos todos los valores a las variables **x_2 , x_3 , x_4** y obtenemos los valores de **x_1 y $x5_6$**

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Esta es la Familia de palabras de V que tienen un determinado error que dá como resultado el Síndrome $\mathbf{S_2 = 10}$, resumiendo es **Familia de Errores asociadas al Síndrome 10**

Entonces observando la Familia de Errores Asociadas al **Síndrome 01** vemos que hay dos palabras con todos ceros y un solo uno en $\mathbf{x_4}$ y en $\mathbf{x_5}$, por lo tanto no podemos corregir sólo se puede detectar.

La conclusión es que con el Síndrome 10 SOLO se detecta error simple en $\mathbf{x_4}$ ó $\mathbf{x_5}$

<u>SÍNDROME 11</u>

Veamos ahora la Familia de Errores asociadas al **Síndrome 10**

$$(x_1 , x_2 , x_3 , x_4 , x_5) \times \begin{bmatrix} 0\ 1 \\ 0\ 1 \\ 1\ 1 \\ 1\ 0 \\ 1\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{1\ 1}$$

Queda entonces un sistema de ecuaciones de 5 incógnitas con dos ecuaciones:

$$\begin{cases} x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

Elegimos las mismas variables anteriores $\mathbf{x_2}$ **,** $\mathbf{x_3}$ **y** $\mathbf{x_4}$

$$\begin{cases} X_5 = 1 + x_3 + x_4 \\ X_1 = 1 + x_2 + x_3 \end{cases}$$

Ahora damos todos los valores a las variables x_2, x_3, x_4 y obtenemos los valores de x_1 y $x5_6$

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Esta es la Familia de palabras de V que tienen un determinado error que dá como resultado el Síndrome $\mathbf{S_2 = 11}$, resumiendo es **Familia de Errores asociadas al Síndrome 11**

Entonces observando la Familia de Errores Asociadas al **Síndrome 01** vemos que hay una palabras con todos ceros y un solo uno en x_3 por lo tanto podemos corregir

La conclusión es que con el Síndrome 11 se detecta y corrige error simple en x_3 .

----

3 -Dada la siguiente Matriz de Control de Paridad H encontrar:

a) El Código de Grupo y una de sus matrices generadoras
b) Indicar que errores no se detectan
c) Analizar cómo se comporta el Código frente a los errores simples, realizando el análisis para todos los síndromes.

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (n\text{-}m) \times n = 2 \times 5$$

a) Para hallar el Código de Grupo V aplicamos la condición de ortogonalidad, donde Para todo vector perteneciente a **Código de Grupo V** es: $\mathbf{v_i \times H^T = 0}$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \times \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 0 = (0, 0)$$

$$\begin{cases} X_3 + X_4 + X_5 = 0 \\ X_1 + X_2 + X_5 = 0 \end{cases}$$

Nos queda un Sistema de 2 ecuaciones con 5 incógnitas, por lo tanto podemos darle valores a 3 de ellas y obtener el resto de las variables , por ejemplo elegimos **x_1 ,x_3 ,x_5**

Quedando entonces:

$X_4 = X_3 + X_5$

$X_2 = X_1 + X_5$ Ahora damos todos los valores x_2 ,x_3 ,x_4 y obtenemos los valores de **x_1 ,x_5** :

$$\begin{array}{c} x_1 \; x_2 \; x_3 \; x_4 \; x_5 \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} = V$$ **Código de Grupo**

Una matriz Generadora es:

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Donde verificamos que ningún vector de G resulta combinación lineal de los restantes vectores, por ejemplo: $\mathbf{g_3 \neq g_1 + g_2}$

b) Los errores que no se detectan son aquellos que coinciden con las palabras códigos, o sea donde tengo unos en las palabras código:

Error Doble en x_3 y $x4_5$ - Error Doble en x_1 y x_2

Error Triple en x_2, x_4 y x_5 - Error Triple en x_2, x_3 y x_5

Error Triple en x_1, x_4 y x_5 - Error Triple en x_1, x_3 y x_5

Error Cuádruple en x_1, x_2, x_3 y x_4

c) Ahora planteamos que una palabra de V con error multiplicada por H^T debe dar distinto de cero (síndrome):

$$\mathbf{v_{ie} \times H^T = S_i}$$

Como no conocemos la palabra con error, será una incógnita de nuestra ecuación, $\mathbf{(x_1 , x_2 , x_3 , x_4 , x_5)}$, conocemos $\mathbf{H^T}$ y el síndrome conocemos sus dimensiones (1x n-m) = 1 x (5 -3) = 1fila x 2 columnas , así que lo proponemos :

$$\underbrace{(\mathbf{x_1 , x_2 , x_3 , x_4 , x_5})}_{\text{No concemos el error}} \mathbf{\times H^T} = Si$$

No concemos el error dato proponemos Si $\neq$ 0

<u>SÍNDROME 01</u>

$$\mathbf{x_{ie} \times H^T = S_I}$$

$$(\mathbf{x_1 ,x_2 ,x_3 ,x_4 ,x_5}) \times \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{01}$$

$$\begin{cases} X_3 + X_4 + X_5 = 0 \\ X_1 + X_2 + X_5 = 1 \end{cases}$$

Nos queda un Sistema de 2 ecuaciones con 5 incógnitas, por lo tanto damos valores a 3 de ellas y obtener el resto de las variables , elegimos igual que antes $\mathbf{x_1 ,x_3 ,x_5}$

Quedando entonces:

$$X_4 = X_3 + X_5$$

$$X_2 = 1 + X_1 + X_5$$

Ahora damos todos los valores x_1 ,x_3 ,x_5 y obtenemos los valores de $\mathbf{x_2 ,x_4}$:

$$\begin{array}{c} x_1 \; x_2 \; x_3 \; x_4 \; x_5 \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Esta es la Familia de palabras de V que tienen un determinado error y que dá como resultado el Síndrome **S_1 = 01**, resumiendo es la **Familia de Errores asociadas al Síndrome 01**

Entonces observando la Familia de Errores asociadas al **Síndrome 01**

vemos que hay dos palabras con todos ceros y un solo uno en x_1 y en x_2, por lo tanto no podemos corregir sólo se puede detectar.

La conclusión es que con el Síndrome 01 SOLO se detecta error simple en x_1 ó x_2

<u>SÍNDROME 10</u>

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \times \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 10$$

$$\begin{cases} X_3 + X_4 + X_5 = 1 \\ X_1 + X_2 + X_5 = 0 \end{cases}$$

Elegimos igual que antes **x_1, x_3, x_5 -** Quedando entonces:

$$X_4 = 1 + X_3 + X_5$$
$$X_2 = X_1 + X_5$$

Ahora damos todos los valores x_1, x_3, x_4 y obtenemos los valores de **x_2, x_4**:

$$\begin{array}{c} x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Esta es la Familia de palabras de V que tienen un determinado error y que dá como resultado el Síndrome $\mathbf{S_1 = 10}$, resumiendo es la **Familia de Errores asociadas al Síndrome 10**

Entonces observando la Familia de Errores asociadas al **Síndrome 10**

vemos que hay dos palabras con todos ceros y un solo uno en $\mathbf{x_3}$ **y en** $\mathbf{x_4}$, por lo tanto no podemos corregir sólo se puede detectar.

La conclusión es que con el Síndrome 10 SOLO se detecta error simple en x_3 ó x_4

<u>SÍNDROME 11</u>

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 11$$

$$\begin{cases} X_3 + X_4 + X_5 = 1 \\ X_1 + X_2 + X_5 = 1 \end{cases}$$

Elegimos igual que antes $\mathbf{x_1, x_3, x_5}$ **-** Quedando entonces:

$$X_4 = 1 + X_3 + X_5$$
$$X_2 = 1 + X_1 + X_5$$

Ahora damos todos los valores x_1, x_3, x_4 y obtenemos los valores de $\mathbf{x_2, x_4}$:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Esta es la Familia de palabras de V que tienen un determinado error y que dá como resultado el Síndrome $\mathbf{S_1 = 11}$, resumiendo es la **Familia de Errores asociadas al Síndrome 11**

Entonces observando la Familia de Errores asociadas al **Síndrome 11** vemos que hay una palabras con todos ceros y un solo uno en $\mathbf{x_5}$, por lo tanto podemos corregir

La conclusión es que con el Síndrome 11 se detecta y corrige error simple en $\mathbf{x_5}$

---

4 –Se requiere transmitie 7 mensajes protegidos contra error simple, encontrar el código lineal que lo verifica:

Para dar respuesta a estas condiciones debemos recordar las dimensiones de los espacios y las condiciones de detección y corrección de errores simples que se deben cumplir.

n columnas (n dígitos de la palabra código)

$$\textbf{Código de Grupo } V = \begin{bmatrix} 0101\ldots010 \\ (\ldots\ldots v_i \ldots\ldots) \\ \ldots\ldots \; \ldots\ldots \\ 011\ldots.100 \end{bmatrix} \quad \mathbf{2^m \text{ filas (palabras Códigos) con } m<n}$$

Vector $\mathbf{v_i = (x_1 , x_2 \ldots x_j \ldots x_n)}$

Siendo el elemento $\mathbf{x_j = 0}$ **ó 1**

n columnas

$$\textbf{Matriz generadora de V } G = \begin{bmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots \; g_i \; \ldots\ldots \\ \end{bmatrix} \quad \mathbf{m \text{ filas con } m<n}$$

$\mathbf{g_i}$: **Linealmente Independientes**

$$\textbf{S.E.V} \qquad V' = \begin{array}{c} \textbf{n columnas} \\ \begin{bmatrix} 0101\ldots010 \\ (\ldots\ldots v_i \ldots\ldots) \\ \ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots \\ 1011\ldots.100 \end{bmatrix} \end{array} 2^{n-m} \text{ filas}$$

ortogonal a V

$v'_i = (x'_1, x'_2 \ldots\ldots x'_j \ldots x'_n)$

Siendo el elemento $x'_j = 0$ **ó** 1

Cuya base generadora llamada Matriz de Control de Paridad H:

$$H = \begin{array}{c} \textbf{n columnas} \\ \begin{bmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ h_i \ \ldots\ldots \\ \end{bmatrix} \end{array} \ n-m \text{ filas}$$

Condición de ortogonalidad V ⊥ V'

Para todo $v_i \in V$ resulta $v_i \times H^T = 0$ siendo H^T la matriz **transpuesta** de **H**

Para todo $v'_i \in V'$ resulta $v'_i \times G^T = 0$ siendo G^T la matriz **transpuesta** de **G**

Por lo tanto el SÍNDROME es el resultado del producto del vector V_l con error o lo que es igual al vector que modeliza el error por la matriz de control de paridad que tendrá como dimensión: 1 fila x n-m columnas

$$\underset{1xn}{V_{ea}} \times \underset{nx(n-m)}{H^T} = \underset{1x(n-m)}{S_{ea}}$$

→ **La cantidad de Síndromes distintos será $2^{n-m} - 1$**

(La combinación 0..0 corresponde a palabra OK no es síndrome)

Si se pretende **detectar y corregir error simple** en **cada uno de los n dígitos** de la palabra código debe haber tantos **síndromes distintos** como dígitos tenga la palabra código:

$$x_i = (\underset{S_{e1}}{x_1},\ \underset{S_{e2}}{x_2},\ \ldots\ldots\ldots\ \underset{S_{en}}{x_n})$$

Es decir para detectar y corregir error simple en cada uno de los n dígitos de la palabra código debe cumplirse que la cantidad de síndromes distintos debe ser mayor ó igual a n:

$$2^{n-m} - 1 \geq n$$

RESOLUCIÓN

Habiendo realizado el repaso procedemos a resolver lo solicitado

Se solicita codificar 7 mensajes por lo tanto el Código de Grupo debe tener al menos 7 palabras código es decir :

$$V=\left[\overbrace{(\ldots\ldots vi \ldots\ldots)}^{\text{n dígitos}}\right] \quad 2^m \geq 7 \quad ==> \boxed{m = 3}$$

Se requiere que se detecte y corrija error simple en cada uno de los n dígitos de las palabras código, entonces:

$$\mathbf{x_i = (\underset{\substack{\uparrow \\ S_{e1}}}{x_1}\,,\ \underset{\substack{\uparrow \\ S_{e2}}}{x_2}\,,\ \ldots\ldots\ \underset{\substack{\uparrow \\ S_{en}}}{x_n})}$$

Se requiere un síndrome distinto para el error en cada uno de los n dígitos es decir es decir **"n Síndromes distintos"**

Como la cantidad de Síndromes es :

$$\underset{\substack{\uparrow \\ 1xn}}{V_{ea}} \ \mathbf{x}\ \underset{\substack{\uparrow \\ nx(n-m)}}{H^T} = \underset{\substack{\uparrow \\ 1x(n-m)}}{S_{ea}} \quad \rightarrow$$

La cantidad de Síndromes distintos será $2^{n-m} - 1$

Deberá ser $2^{n-m} - 1 \geq n$ con m = 3 en nuestro caso

Quedando

$2^{n-3} - 1 \geq n$ como n se encuentra en el numerador y como potencia no se puede despejar y se debe encontrar por prueba y error

Con n=4 $\quad 2^{4-3} - 1 \ngeq 4$

Con n=5 $\quad 2^{5-3} - 1 \ngeq 5$

Con n=6 $\quad 2^{6-3} - 1 \geq 6$ por lo tanto la cantidad de dígitos será $\boxed{n = 6}$

Ahora planteamos $\boxed{V_{ea} \ \mathbf{x}\ H^T = S_{ea}}$

.Donde si bien no conocemos las palabras con error simple conocemos que la palabra nula con error simple es una palabra con todos ceros y un “1” en la posición del error.

- La matriz H^T no la conocemos, sólo tenemos sus dimensiones:

n filas x (n-m) columnas , en nuestro caso será de 6 filas x (6-3) columnas es decir 6x3

-Los síndromes asociados a cada error los proponemos sabiendo que todos son distintos de cero y de dimensión 1 x (n – m) es decir 1x3 . Puede igualarse a cualquier configuración de tres dígitos, pero lo más adecuado es contar en binario (1, 2, 3, 4 , 5 y 6)

$$(1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0) \times \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \\ h_{41} & h_{42} & h_{43} \\ h_{51} & h_{52} & h_{53} \\ h_{61} & h_{62} & h_{63} \end{bmatrix} = 0\ 0\ 1$$

haciendo el producto resulta:

$$\boxed{h_{11}\ \ h_{12}\ \ h_{13} = 0\ 0\ 1}$$

$$(0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0) \times \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \\ h_{41} & h_{42} & h_{43} \\ h_{51} & h_{52} & h_{53} \\ h_{61} & h_{62} & h_{63} \end{bmatrix} = 0\ 1\ 0 \quad \Longrightarrow \boxed{h_{21}\ \ h_{22}\ \ h_{23} = 0\ 1\ 0}$$

$$(0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0) \times \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \\ h_{41} & h_{42} & h_{43} \\ h_{51} & h_{52} & h_{53} \\ h_{61} & h_{62} & h_{63} \end{bmatrix} = 0\ 1\ 1 \quad \Longrightarrow \boxed{h_{31}\ \ h_{32}\ \ h_{33} = 0\ 1\ 1}$$

$$(0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0) \times \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{32} \\ h_{41} & h_{42} & h_{43} \\ h_{51} & h_{52} & h_{53} \\ h_{61} & h_{62} & h_{63} \end{bmatrix} = 1\ 0\ 0 \qquad ===> \boxed{h_{41}\ h_{42}\ \ h_{43} = 1\ 0\ 0}$$

$$(0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0) \times \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \\ h_{41} & h_{42} & h_{43} \\ h_{51} & h_{52} & h_{53} \\ h_{61} & h_{62} & h_{63} \end{bmatrix} = 1\ 0\ 1 \qquad ===> \boxed{h_{51}\ h_{52}\ \ h_{53} = 1\ 0\ 1}$$

$$(0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1) \times \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \\ h_{41} & h_{42} & h_{43} \\ h_{51} & h_{52} & h_{53} \\ h_{61} & h_{62} & h_{63} \end{bmatrix} = 1\ 1\ 0 \qquad ===> \boxed{h_{61}\ h_{62}\ \ h_{63} = 1\ 1\ 0}$$

Entonces la matriz H^T encontrada es:

$$H^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ahora solo resta aplicar la condición de ortogonalidad para encontrar los vectores de V:

Para todo $\mathbf{v_i}$ **€ V** resulta $\boxed{\mathbf{v_i \times H^T = 0}}$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \times \begin{bmatrix} 0\ 0\ 1 \\ 0\ 1\ 0 \\ 0\ 1\ 1 \\ 1\ 0\ 0 \\ 1\ 0\ 1 \\ 1\ 1\ 0 \end{bmatrix} = 0\ 0\ 0$$

$$\begin{cases} x_4 + x_5 + x_6 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_6 = 0 \\ x_1 + x_3 + x_5 = 0 \end{cases}$$

Queda un Sistema de 3 ecuaciones con 6 incógnitas Cómo son variables binarias le doy todos los valores posibles a 3 (que más se repiten en las ecuaciones y obtenemos las restantes 3 variables:

$$x_4 = x_5 + x_6$$

$$x_2 = x_3 + x_6$$

$$x_1 = x_3 + x_5$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} = V \quad \textbf{Código de Grupo}$$

El código requerido es de 7 palabras códigos por lo tanto debemos elegirlas de las 8 que tiene V . cualquiera de las 8 no hay criterio de elección)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \textbf{Código solicitado (una propuesta)}$$

OBSERVACIÓN : Como todos los errores simples son detectados y corregidos entonces el síndrome S_7 = 111 corresponderá a un error de orden superior

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \times \begin{bmatrix} 0\,0\,1 \\ 0\,1\,0 \\ 0\,1\,1 \\ 1\,0\,0 \\ 1\,0\,1 \\ 1\,1\,0 \end{bmatrix} = 1\,1\,1$$

$$\begin{cases} x_4 + x_5 + x_6 = 1 \\ x_2 + x_3 + x_6 = 1 \\ x_1 + x_3 + x_5 = 1 \end{cases}$$

Queda un Sistema de 3 ecuaciones con 6 incógnitas Cómo son variables binarias le doy todos los valores posibles a 3 (que más se repiten en las ecuaciones y obtenemos las restantes 3 variables:

$x_4 = 1 + x_5 + x_6$

$x_2 = 1 + x_3 + x_6$

$x_1 = 1 + x_3 + x_5$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Familia de errores asociadas al Síndrome S7 = 111

Con el Síndrome 111 sólo se detectan errores Dobles en $x_1 x_6$ ó $x_2 x_5$ ó x_3 x_4

----

5 –<u>Se requiere transmitie 6 mensajes protegidos contra error simple los dos bit más significativos y sólo detectar el resto, encontrar el código lineal que lo verifica:</u>

$$V=\left[\overbrace{(\ldots\ldots vi \ldots\ldots)}^{\text{n dígitos}}\right] \quad 2^m \geq 6 \implies \boxed{m = 3}$$

Se requiere que se detecte y corrija error simple en los dos dígitos más significativos de las palabras código y sólo detectar error simple en el resto de los dígitos, entonces:

$$x_i = (\underset{S_{e1}}{x_1}, \underset{S_{e2}}{x_2}, \underbrace{\ldots\ldots x_n}_{S_{e3}})$$

Se requiere un síndrome distinto para el error en x_1 **y** x_2 y otro síndrome distinto para solo detectar el resto de los errores simples en los restantes dígitos

Como la cantidad de Síndromes es :

$$\underset{1xn}{V_{ea}} \times \underset{nx(n-m)}{H^T} = \underset{1x(n-m)}{S_{ea}} \rightarrow$$

La cantidad de Síndromes distintos será $2^{n-m} - 1$

Deberá ser $2^{n-m} - 1 \geq 3$ con m = 3 en nuestro caso $2^{n-3} - 1 \geq 3$

Con n=4 $2^{4-3} - 1 \cancel{\geq} 3$

Con n=5 $2^{5-3} - 1 \geq 3$ por lo tanto la cantidad de dígitos será $\boxed{n = 5}$

Ahora planteamos $\boxed{v_{ea} \times H^T = S_{ea}}$

.Donde si bien no conocemos las palabras con error simple conocemos que la palabra nula con error simple es una palabra con todos ceros y un "1" en la posición del error.

- La matriz H^T no la conocemos, sólo tenemos sus dimensiones:

n filas x (n-m) columnas , en nuestro caso será de 5 filas x (5-3) columnas es decir 5x2

-Los síndromes asociados a cada error los proponemos sabiendo que todos son distintos de cero y de dimensión 1 x (n – m) es decir 1x2 . Puede igualarse a cualquier configuración de dos dígitos, pero lo más adecuado es contar en binario (1, 2, 3)

$$(1\ 0\ 0\ 0\ 0) \times \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \\ h_{31} & h_{32} \\ h_{41} & h_{42} \\ h_{51} & h_{52} \end{bmatrix} = 0\ 1 \implies \boxed{h_{11}\ \ h_{12} = 0\ 1}$$

$$(0\ 1\ 0\ 0\ 0) \times \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \\ h_{31} & h_{32} \\ h_{41} & h_{42} \\ h_{51} & h_{52} \end{bmatrix} = 1\ 0 \implies \boxed{h_{21}\ \ h_{22} = 1\ 0}$$

este síndrome debe ser distinto al anterior para poder corregir error simple

$$(0\ 0\ 1\ 0\ 0) \times \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \\ h_{31} & h_{32} \\ h_{41} & h_{42} \\ h_{51} & h_{52} \\ h_{61} & h_{62} \end{bmatrix} = 1\ 1 \implies \boxed{h_{31}\ h_{32} = 1\ 1}$$

este síndrome debe ser distinto a los anterior para poder corregir error simple

$$(0\ 0\ 0\ 1\ 0) \times \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \\ h_{31} & h_{32} \\ h_{41} & h_{42} \\ h_{51} & h_{52} \end{bmatrix} = 1\ 1 \implies \boxed{h_{41}\ h_{42} = 1\ 1}$$

este síndrome debe ser igual al anterior porque sólo pide detectar error simple

$$(0\ 0\ 0\ 0\ 1) \times \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \\ h_{31} & h_{32} \\ h_{41} & h_{42} \\ h_{51} & h_{52} \end{bmatrix} = 1\ 1 \implies \boxed{h_{51}\ h_{52} = 1\ 1}$$

este síndrome debe ser igual al anterior porque sólo pide detectar error simple

Entonces la matriz H^T encontrada es:

$$H^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ahora solo resta aplicar la condición de ortogonalidad para encontrar los vectores de V:

Para todo $\mathbf{v_i} \in \mathbf{V}$ resulta $\boxed{v_i \times H^T = 0}$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \times \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 0\ 0$$

$$\begin{cases} X_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ X_1 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

Queda un Sistema de 2 ecuaciones con 5 incógnitas Cómo son variables binarias le doy todos los valores posibles a 3 (que más se repiten en las ecuaciones y obtenemos las restantes 2 variables:

$$X_2 = x_3 + x_4 + x_5$$

$$X_1 = x_3 + x_4 + x_5$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} = V \quad \textbf{Código de Grupo}$$

El código requerido es de 6 palabras códigos por lo tanto debemos elegirlas de las 8 que tiene V (cualquiera de las 8 no hay criterio de elección)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \textbf{Código requerido}$$

6 –Se requiere transmitie 5 mensajes protegidos contra error simple el bit más significativos y sólo detectar el resto, excepto el bit menos significativo que no se necesita detectar error - encontrar el código lineal que lo verifica:

$$V = \overbrace{\left[(\ldots.. v_i \ldots\ldots) \right]}^{\text{n dígitos}} \quad 2^m \geq 5 \implies \boxed{m = 3}$$

Se requiere que se detecte y corrija error simple en el bit más significativo sólo detectar error simple en el resto excepto en el menos significativo que no se requiere detectar error simple:

$$x_i = (\underset{S_{e1}}{x_1}, \underbrace{x_2, \ldots x_{n-1}}_{S_{e2}}, \underset{=0}{x_n})$$

Se requiere un síndrome para el error en x_1 y otro síndrome distinto para solo detectar el resto de los errores simples excepto en el menos significativo que no se requiere detectar error simple

Como la cantidad de Síndromes es :

$$\underset{1xn}{v_{ea}} \times \underset{nx(n-m)}{H^T} = \underset{1x(n-m)}{S_{ea}}$$

→ **La cantidad de Síndromes distintos será $2^{n-m} - 1$**

Deberá ser $2^{n-m} - 1 \geq 2$ con m = 3 en nuestro caso $2^{n-3} - 1 \geq 2$

Con n=4 $2^{4-3} - 1 \not\geq 2$

Con n=5 $2^{5-3} - 1 \geq 2$ por lo tanto la cantidad de dígitos será $\boxed{n = 5}$

Ahora planteamos $\boxed{v_{ea} \times H^T = S_{ea}}$

.Donde si bien no conocemos las palabras con error simple conocemos que la palabra nula con error simple es una palabra con todos ceros y un "1" en la posición del error.

- La matriz H^T no la conocemos, sólo tenemos sus dimensiones:

n filas x (n-m) columnas , en nuestro caso será de 5 filas x (5-3) columnas es decir 5x2

-Los síndromes asociados a cada error los proponemos sabiendo que todos son distintos de cero y de dimensión 1 x (n – m) es decir 1x3 . Puede igualarse a cualquier configuración de dos dígitos, pero lo más adecuado es contar en binario (1, 2, 3, 4 , 5)

$$(1\ 0\ 0\ 0\ 0) \times \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \\ h_{31} & h_{32} \\ h_{41} & h_{42} \\ h_{51} & h_{52} \end{bmatrix} = 0\ 1 \implies \boxed{h_{11}\ \ h_{12} = 0\ 1}$$

$$(0\ 1\ 0\ 0\ 0) \times \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \\ h_{31} & h_{32} \\ h_{41} & h_{42} \\ h_{51} & h_{52} \end{bmatrix} = 1\ 0 \implies \boxed{h_{21}\ \ h_{22} = 1\ 0}$$

este síndrome debe ser distinto al anterior para poder corregir error simple

$$(0\ 0\ 1\ 0\ 0) \times \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \\ h_{31} & h_{32} \\ h_{41} & h_{42} \\ h_{51} & h_{52} \\ h_{61} & h_{62} \end{bmatrix} = 1\ 0 \implies \boxed{h_{31}\ \ h_{32} = 1\ 0}$$

este síndrome debe ser distinto a los anterior para poder corregir error simple

$$(0\ 0\ 0\ 1\ 0) \times \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \\ h_{31} & h_{32} \\ h_{41} & h_{42} \\ h_{51} & h_{52} \end{bmatrix} = 1\ 0 \implies \boxed{h_{41}\ h_{42} = 1\ 0}$$

este síndrome debe ser igual al anterior porque sólo pide detectar error simple

$$(0\ 0\ 0\ 0\ 1) \times \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \\ h_{31} & h_{32} \\ h_{41} & h_{42} \\ h_{51} & h_{52} \end{bmatrix} = 0\ 0 \implies \boxed{h_{51}\ h_{52} = 0\ \ 0}$$

Como no se desea detectar error debe ser el producto igual a cero como si fuera palabra ok

Entonces la matriz H^T encontrada es:

$$H^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ahora solo resta aplicar la condición de ortogonalidad para encontrar los vectores de V:

Para todo $\mathbf{v_i} \in \mathbf{V}$ resulta $\boxed{\mathbf{v_i \times H^T = 0}}$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \times \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0\ 0$$

$$\begin{cases} X_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ X_1 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Queda un Sistema de 2 ecuaciones con 4 incógnitas (en realidad son 5 incógnitas) aunque x_5 no figure en las ecuaciones también se le debe dar todos los valores posibles

$X_2 = x_3 + x_4$

$X_1 = x_3 + x_4$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \end{array} = V$$

Código de Grupo

Cómo se puede observar en el código de grupo, la palabra código con error unitario en x_5 no va a ser detectada como error porque pertenece al código

El código requerido es de 5 palabras códigos por lo tanto debemos elegirlas de las 8 que tiene V (cualquiera de las 8 no hay criterio de elección)

$$\left[\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] = \textbf{Código solicitado}$$

===

RESUMIENDO

SE PUEDEN PRESENTAR TRES TIPOS DE REQUERIMIENTOS

- **Datos G – Obtener V y análisis de Síndromes**

G → Comb. Lin. → V - Aplic. Con. Ortog. $v'_i \times G^T = 0$ → V' → H base → H^T → $v_{ie} \times H^T = S_i$ Se tiene la familia de errores asociados a cada síndrome

- **Datos H - Obtener V y Análisis de Síndromes**

Aplic. Con. Ortog. $v_i \times H^T = 0$ → V - Teniendo H → H^T → $v_{ie} \times H^T = S_i$ Se tiene la familia de errores asociados a cada síndrome

- **Datos cant. Palabras Códigos y Condición de Detección y Corrección de Errores Simples - Obtener V**

  -Cant. Palabras Códigos $= 2^m$ → m
  -Cond. Detecc y Correcc. $2^{n-m} - 1 \geq$ Cant Sind Neces. → n
  -Planteando $e_i \times H^T = S_i$, siendo e_i = (00..010..0) Todos ceros y un 1 donde hay error, se adopta los S_i →se encuentran las filas de H^T
  - Planteando la cond. Ortog. $v_i \times H^T = 0$ →se encuentra V →se eligen las palabras códigos que se necesitan.