Métodos Numéricos

Prof. Lic. Mariel Ugarte

Análisis Numérico

FRRO - UTN - 2023

Definición de Errores

En este curso trabajaremos con las siguientes definiciones de errores:

Error verdadero

$$E_t = valor\ verdadero - valor\ aproximado = x_v - x_a$$

Error relativo porcentual verdadero

$$\varepsilon_t = \left|\frac{error\ verdadero}{valor\ verdadero}\right| 100\,\% = \left|\frac{E_t}{x_v}\right| 100\,\% = \left|\frac{x_v - x_a}{x_v}\right| 100\,\%$$

Error relativo porcentual aproximado

$$\varepsilon_a = \left|\frac{aproximación\ actual - aproximación\ anterior}{aproximación\ actual}\right| 100\,\%$$

Definición de Errores

Observaciones

- Es usual buscar (imponer) que el error relativo porcentual aproximado sea menor que una tolerancia porcentual prefijada, que notaremos ε_s. En tales casos, los cálculos se repiten hasta que

$$\varepsilon_a < \varepsilon_s$$

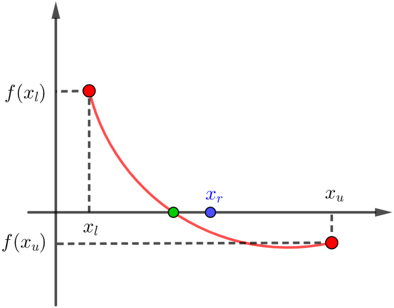
- Es conveniente también relacionar estos errores con el número de cifras significativas en la aproximación. Es posible demostrar (Scarborough, 1966) que si el siguiente criterio se cumple, se tendrá la seguridad que el resultado es correcto en al menos n cifras significativas.

$$\varepsilon_s = (0{,}5 \times 10^{2-n})\,\%$$

Cap. 5: Métodos cerrados

Métodos Cerrados

Estos métodos aprovechan el hecho de que una función cambia de signo en la vecindad de una raíz. Se llaman métodos cerrados, o de intervalos, porque se necesita de dos valores iniciales que deben “encerrar” a la raíz. Los métodos particulares descriptos aquí emplean diferentes estrategias para reducir sistemáticamente el tamaño del intervalo y así converger a la respuesta correcta.



Los métodos de búsqueda incremental, una vez encontrado un intervalo en el que la función cambia de signo (y, en consecuencia, donde se encuentra la raíz), intenta lograr más exactitud al dividir el intervalo en varios subintervalos. Se investiga cada uno de estos subintervalos para encontrar el cambio de signo. El proceso se repite y la aproximación a la raíz mejora cada vez más en la medida que los subintervalos se dividen en intervalos cada vez más pequeños.

Método de Bisección

El Método de Bisección, conocido también como de corte binario, de partición de intervalos o de Bolzano, es un tipo de búsqueda incremental en el que el intervalo se divide siempre a la mitad. Si la función cambia de signo sobre un intervalo, se evalúa el valor de la función en el punto medio. Una aproximación de la raíz se determina situándola en el punto medio del subintervalo, dentro del cual ocurre un cambio de signo. El proceso se repite hasta obtener una mejor aproximación.

Es decir, en cada paso, se considerará

$$\boxed{x_r = \frac{x_l + x_u}{2}}$$

Luego, el valor de x_r reemplazará a cualquiera de los dos valores iniciales, x_l o x_u, que dé un valor de la función con el mismo signo de $f(x_r)$.

De esta manera, los valores x_l y x_u siempre encierran la verdadera raíz. El proceso se repite hasta que la aproximación a la raíz sea adecuada.

ALGORITMO MÉTODO DE BISECCIÓN

Paso 1: Elija valores iniciales inferior, x_l, y superior, x_u, que encierren la raíz, de forma tal que la función cambie de signo en el intervalo. Esto se verifica comprobando que $f(x_l)\, f(x_u) < 0$.

Paso 2: Una aproximación de la raíz x_r se determina mediante:

$$x_r = \frac{x_l + x_u}{2}$$

Paso 3: Realice las siguientes evaluaciones para determinar en qué subintervalo está la raíz:

a) Si $f(x_l)f(x_r) < 0$, entonces la raíz se encuentra dentro del subintervalo inferior o izquierdo. Por lo tanto, haga $x_u = x_r$ y vuelva al paso 2.

b) Si $f(x_l)f(x_r) > 0$, entonces la raíz se encuentra dentro del subintervalo superior o derecho. Por lo tanto, haga $x_l = x_r$ y vuelva al paso 2.

c) Si $f(x_l)f(x_r) = 0$, la raíz es igual a x_r; termina el cálculo.

Ejemplo

Utilice el método de bisección para determinar el coeficiente de arrastre c necesario para que un paracaidista de masa $m = 68{,}1kg$ tenga una velocidad de $40m/s$ después de una caída libre de $t = 10s$. Es decir, encontrar la raíz de

$$f(c) = \frac{667,38}{c}\left(1 - e^{-0{,}146843c}\right) - 40$$

Consideraremos los valores iniciales $x_l = 12$ y $x_u = 16$.

- Primera iteración:

$$x_l = 12 \qquad f(x_l) = 6,0699$$

$$x_u = 16 \qquad f(x_u) = -2,2688$$

$$x_r = \frac{12+16}{2} = 14$$

$\varepsilon_t = 5,3\,\%$ (Valor verdadero de la raíz: 14,7802)

EJEMPLO

- Segunda iteración:

$f(x_l) \cdot f(x_r) = 6,067 \cdot 1,569 = 9,517 > 0 \longrightarrow x_l = x_r = 14$

$x_l = 14 \qquad x_u = 16$

$$x_r = \frac{14+16}{2} = 15$$

$\varepsilon_t = 1,5\,\%$

- Tercera iteración

$f(x_l) \cdot f(x_r) = 1,569 \cdot (-0,425) = -0,666 < 0 \longrightarrow x_u = x_r = 15$

$x_l = 14 \qquad x_u = 15$

$$x_r = \frac{14+15}{2} = 14,5$$

$\varepsilon_t = 1,9\,\%$

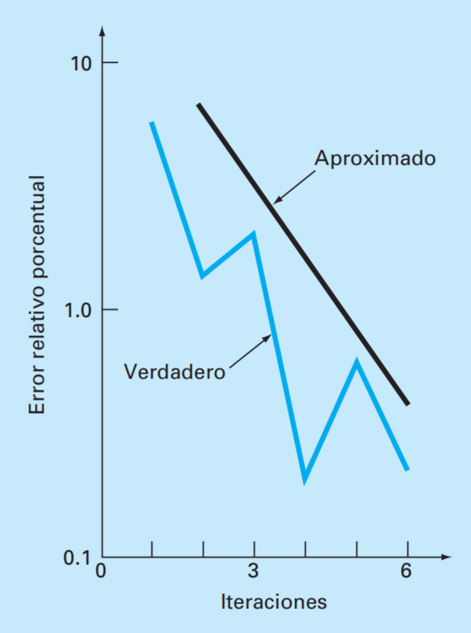
Este método se repite hasta que el resultado sea suficientemente exacto para satisfacer sus necesidades.

Ejemplo

Si seguimos iterando, y ahora sumamos el cálculo de ε_a a partir de la segunda iteración se tiene

Iteración	x_l	x_u	x_r	ε_a (%)	ε_t (%)
1	12	16	14		5.279
2	14	16	15	6.667	1.487
3	14	15	14.5	3.448	1.896
4	14.5	15	14.75	1.695	0.204
5	14.75	15	14.875	0.840	0.641
6	14.75	14.875	14.8125	0.422	0.219

Aunque el error aproximado no proporciona una estimación exacta del error verdadero, la siguiente figura sugiere que ε_a toma la tendencia general descendente de ε_t y, además, que ε_a siempre es mayor que ε_t.


10
1.0
0.1
Aproximado
Verdadero
Error relativo porcentual
0
3
6
Iteraciones

Errores en el Método de Bisección

Para este método, podemos encontrar una fórmula específica para el error relativo porcentual aproximado.

Teniendo en cuenta que

$$x_r^{nuevo} - x_r^{anterior} = \frac{x_u - x_l}{2}$$

$$x_r^{nuevo} = \frac{x_l + x_u}{2}$$

Se tiene:

$$\varepsilon_a = \left| \frac{x_u - x_l}{x_u + x_l} \right| 100\,\%$$

Por otro lado, debido a que en cada iteración se reduce el error a la mitad, la fórmula para el error absoluto en la iteración n es

$$E_a^n = \frac{\Delta x^0}{2^n} = \frac{x_u^0 - x_l^0}{2^n}$$

PSEUDOCÓDIGO DEL MÉTODO DE BISECCIÓN

```
FUNCTION Bisect(xl, xu, es, imax, xr, iter, ea)
    iter = 0
    fl = f(xl)
    DO
        xrold = xr
        xr = (xl + xu) / 2
        fr = f(xr)
        iter = iter + 1
        IF xr ≠ 0 THEN
          ea = ABS((xr - xrold) / xr) * 100
        END IF
        test = fl * fr
        IF test < 0 THEN
          xu = xr
        ELSE IF test > 0 THEN
           xl = xr
           fl = fr
        ELSE
           ea = 0
        END IF
        IF ea < es OR iter ≥ imax EXIT
    END DO
    Bisect = xr
END Bisect
```

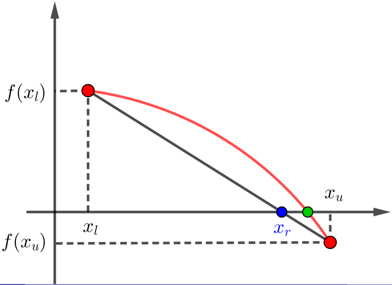
Método de la Falsa Posición

En el ejemplo anterior se tenía que

$$f(x_l) = f(12) = 6{,}0699 \qquad f(x_u) = f(16) = -2{,}2688$$

El método de bisección no tuvo en cuenta que $f(x_u)$ está mucho más cercana a cero que $f(x_l)$, y podría ser lógico que la raíz se encuentre más cerca de x_u que de x_l.

El Método de la Falsa Posición o Regula Falsi, aprovecha esta intuición gráfica, uniendo $(x_l, f(x_l)$ y $(x_u, f(x_u))$ con una línea recta. La intersección de esta línea con el eje de las x representa una mejor aproximación de la raíz.



Desarrollo del Método

La ecuación de la recta que pasa por $(x_l, f(x_l)$ y $(x_u, f(x_u))$ es

$$y - f(x_u) = \frac{f(x_l) - f(x_u)}{x_l - x_u}(x - x_u)$$

Si $y = 0$

$$-f(x_u) = \frac{f(x_l) - f(x_u)}{x_l - x_u}(x - x_u) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x - x_u = -\frac{f(x_u)(x_l - x_u)}{f(x_l) - f(x_u)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = x_u - \frac{f(x_u)(x_l - x_u)}{f(x_l) - f(x_u)}$$

Desarrollo del Método

Fórmula de la falsa posición:

$$\boxed{x_r = x_u - \frac{f(x_u)\,(x_l - x_u)}{f(x_l) - f(x_u)}}$$

El valor de x_r calculado con esta ecuación, reemplazará, después, a cualquiera de los dos valores iniciales, x_l o x_u, que dé un valor de la función con el mismo signo de $f(x_r)$.

De esta manera, los valores x_l y x_u siempre encierran la verdadera raíz. El proceso se repite hasta que la aproximación a la raíz sea adecuada.

PSEUDOCÓDIGO DEL MÉTODO DE LA FALSA POSICIÓN

```
FUNCTION Falpos(xl, xu, es, imax, xr, iter, ea)
    iter = 0
    fl = f(xl)
    DO
        xrold = xr
```

$$x_r = x_u - \frac{f(x_u)(x_l - x_u)}{f(x_l) - f(x_u)}$$

```
        fr = f(xr)
        iter = iter + 1
        IF xr ≠ 0 THEN
          ea = ABS((xr - xrold) / xr) * 100
        END IF
        test = fl * fr
        IF test < 0 THEN
          xu = xr
        ELSE IF test > 0 THEN
           xl = xr
           fl = fr
        ELSE
           ea = 0
        END IF
        IF ea < es OR iter ≥ imax EXIT
    END DO
    Falpos = xr
END Falpos
```

EJEMPLO

Consideremos el ejemplo inicial,

$$f(c) = \frac{667,38}{c}\left(1 - e^{-0,146843c}\right) - 40$$

Como antes,se empieza el cálculo con los valores iniciales $x_l = 12$ y $x_u = 16$.

- Primera iteración:

$x_l = 12 \qquad f(x_l) = 6,0699$

$x_u = 16 \qquad f(x_u) = -2,2688$

$$x_r = 16 - \frac{-2,2688(12 - 16)}{6,0699 - (-2,2688)} = 14,9113$$

$\varepsilon_t = 0,89\,\%$

EJEMPLO

- Segunda iteración:

$$f(x_l) \cdot f(x_r) = -1,5426 < 0 \longrightarrow x_u = x_r = 14,9113$$

$$x_l = 12 \qquad f(x_l) = 6,0699$$

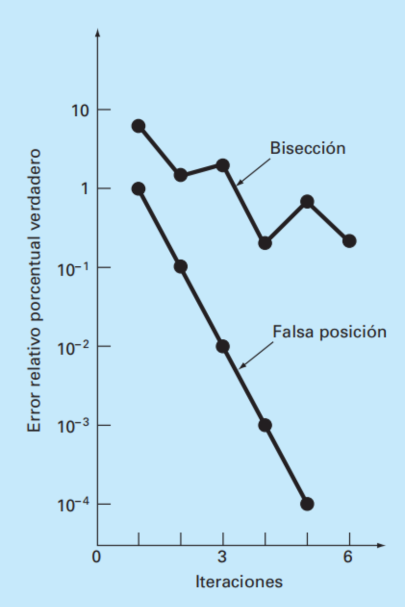
$$x_u = 14,9113 \qquad f(x_u) = -0,2543$$

$$x_r = 14,9113 - \frac{-0,2543(12 - 14,9113)}{6,0669 - (-0,2543)} = 14,7942$$

$\varepsilon_t = 0,09\,\%$ y $\varepsilon_a = 0{,}79\,\%$

Podemos seguir iterando hasta lograr un error tan chico como deseemos.

Bisección vs Falsa Posición (ejemplo)



Bisección vs Falsa Posición

Observaciones

- A diferencia del Método de Bisección, en el de Falsa Posición la longitud del intervalo considerado en cada iteración puede no tender a 0. Un extremo puede quedar fijo mientras el otro tiende a la raíz.

- Es decir, la cota que teníamos para el error absoluto en el de Bisección, $\frac{\Delta_x^0}{2^n}$, en el paso n-ésimo, no es válida para el método de Falsa Posición

- Existen casos en dónde el Método de la Falsa Posición converge muy lentamente, y en donde el error $\varepsilon_a(\%)$ no es un buen criterio de parada.

EJEMPLO

Consideremos la función $f(x) = x^{10} - 1$, en el intervalo $[0, 1,3]$.

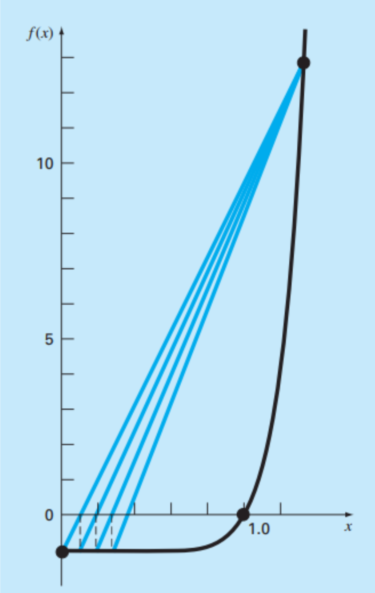
Con el Método de Bisección tendremos:

Iteración	x_l	x_u	x_r	ε_a (%)	ε_t (%)
1	0	1.3	0.65	100.0	35
2	0.65	1.3	0.975	33.3	2.5
3	0.975	1.3	1.1375	14.3	13.8
4	0.975	1.1375	1.05625	7.7	5.6
5	0.975	1.05625	1.015625	4.0	1.6

Con el Método de la Falsa Posición tendremos:

Iteración	x_l	x_u	x_r	ε_a (%)	ε_t (%)
1	0	1.3	0.09430		90.6
2	0.09430	1.3	0.18176	48.1	81.8
3	0.18176	1.3	0.26287	30.9	73.7
4	0.26287	1.3	0.33811	22.3	66.2
5	0.33811	1.3	0.40788	17.1	59.2

EJEMPLO



EJEMPLO

OBSERVACIONES

- Con el método de la falsa posición, después de cinco iteraciones, el error verdadero sólo se ha reducido al $59\,\%$.
- $\varepsilon_a < \varepsilon_t$
- Este ejemplo ilustra que, por lo común, no es posible realizar generalizaciones con los métodos de obtención de raíces. Aunque un método como el de la falsa posición casi siempre es superior al de bisección, hay algunos casos que violan esta conclusión general.
- Se aconseja verificar los resultados sustituyendo la raíz aproximada en la ecuación original y determinar si el resultado se acerca a cero. Esta prueba se puede incorporar en los programas que localizan raíces.

Cap. 6: Métodos abiertos

Métodos abiertos vs Métodos cerrados

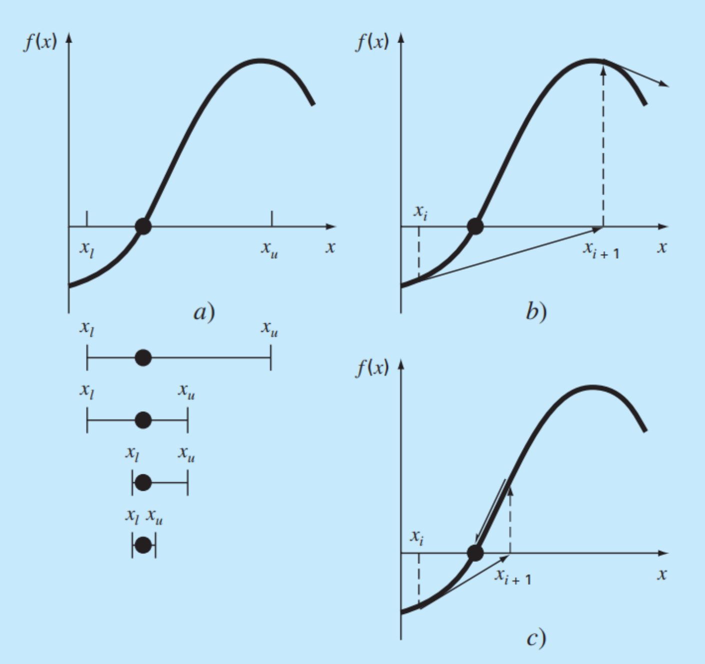
Métodos cerrados

- La raíz se encuentra dentro de un intervalo predeterminado por un límite inferior y otro superior.
- La aplicación repetida de estos métodos siempre genera aproximaciones cada vez más cercanas a la raíz. Se dice que tales métodos son convergentes porque se acercan progresivamente a la raíz a medida que se avanza en el cálculo.

Métodos abiertos

- Se basan en fórmulas que requieren únicamente de un solo valor de inicio o que empiecen con un par de ellos, pero que no necesariamente encierran la raíz.
- Algunas veces divergen o se alejan de la raíz verdadera a medida que se avanza en el cálculo.

Sin embargo, cuando los métodos abiertos convergen, en general lo hacen mucho más rápido que los métodos cerrados.



f(x)
x_l
x_u
x
a)
x_l
x_u
x_l
x_u
x_l
x_u
x_l x_u
f(x)
x_i
x_{i + 1}
x
b)
f(x)
x_i
x_{i + 1}
x
c)

ITERACIÓN SIMPLE DE PUNTO FIJO

Como se dijo antes, los métodos abiertos emplean una fórmula para predecir la raíz. Esta fórmula puede desarrollarse como una iteración simple de punto fijo (también llamada iteración de un punto o sustitución sucesiva o método de punto fijo)

Primero, debemos transformar la ecuación de esta forma:

$$f(x) = 0 \quad \longmapsto \quad x = g(x)$$

Esto puede hacerse "despejando" la x, o sumando x a cada lado.

Ejemplos

$$x^2 - 2x + 3 = 0 \quad \longmapsto \quad x = \frac{x^2 + 3}{2}$$

Iteración Simple de Punto Fijo

Como se dijo antes, los métodos abiertos emplean una fórmula para predecir la raíz. Esta fórmula puede desarrollarse como una iteración simple de punto fijo (también llamada iteración de un punto o sustitución sucesiva o método de punto fijo)

Primero, debemos transformar la ecuación de esta forma:

$$f(x) = 0 \longmapsto x = g(x)$$

Esto puede hacerse "despejando" la x, o sumando x a cada lado.

Ejemplos

$$x^2 - 2x + 3 = 0 \longmapsto x = \frac{x^2+3}{2}$$

$$\downarrow$$

$$x = x^2 - x + 3$$

ITERACIÓN SIMPLE DE PUNTO FIJO

Como se dijo antes, los métodos abiertos emplean una fórmula para predecir la raíz. Esta fórmula puede desarrollarse como una iteración simple de punto fijo (también llamada iteración de un punto o sustitución sucesiva o método de punto fijo)

Primero, debemos transformar la ecuación de esta forma:

$$f(x) = 0 \quad \longmapsto \quad x = g(x)$$

Esto puede hacerse "despejando" la x, o sumando x a cada lado.

Ejemplos

$$x^2 - 2x + 3 = 0 \quad \longmapsto \quad x = \frac{x^2+3}{2}$$

$$\downarrow$$

$$x = x^2 - x + 3$$

$$sen\ x = 0 \quad \longmapsto \quad x = sen\ x + x$$

Iteración Simple de Punto Fijo

Luego, dado un valor inicial x_i, obtendremos una nueva aproximación x_{i+1}, por la fórmula iterativa:

$$\boxed{x_{i+1} = g(x_i)}$$

Y se tiene que

$$\varepsilon_a = \left| \frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1}} \right| 100\,\%$$

EJEMPLO

Use una iteración simple de punto fijo para localizar la raíz de $f(x) = e^{-x} - x$.

$$f(x) = 0 \iff e^{-x} - x = 0 \iff e^{-x} = x$$

Es decir, se tiene $g(x) = e^{-x}$ y, entonces:

$$x_{i+1} = e^{-x_i}$$

Empezando con $x_0 = 0$, y considerando que el valor verdadero es $0{,}56714329$

i	x_i	ε_a (%)	ε_t (%)
0	0		100.0
1	1.000000	100.0	76.3
2	0.367879	171.8	35.1
3	0.692201	46.9	22.1
4	0.500473	38.3	11.8
5	0.606244	17.4	6.89
6	0.545396	11.2	3.83
7	0.579612	5.90	2.20
8	0.560115	3.48	1.24
9	0.571143	1.93	0.705
10	0.564879	1.11	0.399

EJEMPLO

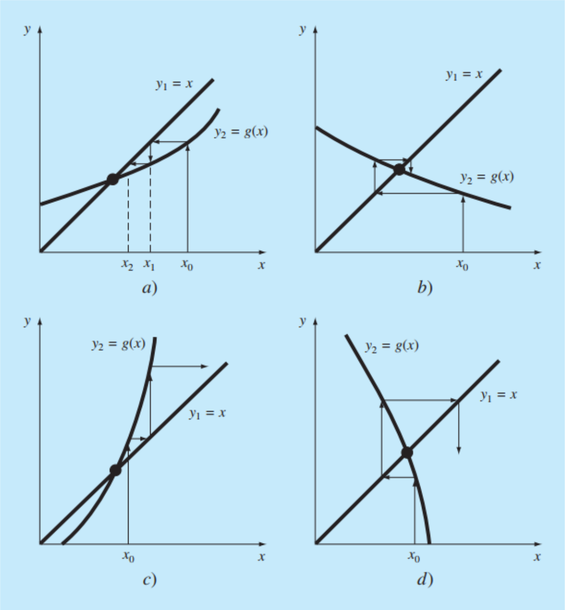
En el ejemplo, el error relativo porcentual verdadero en cada iteración es proporcional (por un factor de $0{,}5$ a $0{,}6$) al error de la iteración anterior. Esta propiedad, conocida como convergencia lineal, es característica de la iteración simple de punto fijo.

Pero... este método siempre converge??

Veremos un análisis gráfico para responder esta pregunta.

INTERPRETACIÓN GRÁFICA

FIGURA 6.3
Representación gráfica en *a*) y *b*) de la convergencia. En *c*) y *d*) de la divergencia del método de punto fijo. Las gráficas *a*) y *c*) tienen un comportamiento monótono; mientras que *b*) y *d*) tienen un comportamiento oscilatorio o en espiral. Deberá notar que la convergencia se obtiene cuando $|g'(x)| < 1$.



Convergencia del Método de Punto Fijo

Comprobemos que la iteración de punto fijo converge si, en la región de interés, $|g'(x)| < 1$

Se tiene que

$$x_{i+1} = g(x_i) \quad \text{y} \quad x_r = g(x_r)$$

Restando miembro a miembro

$$x_r - x_{i+1} = g(x_r) - g(x_i)$$

Por el *teorema del valor medio de la derivada* se sabe que

$$\frac{g(x_r) - g(x_i)}{x_r - x_i} = g'(\xi), \text{ para algún } \xi \in (x_i, x_r)$$

Luego

$$g(x_r) - g(x_i) = g'(\xi)\,(x_r - x_i)$$

Convergencia del Método de Punto Fijo

Luego

$$x_r - x_{i+1} = g'(\xi)\,(x_r - x_i)$$

El error verdadero en la iteración i se define como

$$E_{t,i} = x_r - x_i$$

por lo que

$$E_{t,i+1} = g'(\xi)E_{t,i}$$

Entonces, si $|g'(\xi)| < 1$ los errores decrecen, y por lo tanto el método converge, y si $|g'(\xi)| > 1$ los errores crecen y el método diverge.

Pseudocódigo para el Método de Punto Fijo

```
FUNCTION Fixpt(x0, es, imax iter, ea)
  xr = x0
  iter = 0
  DO
    xrold = xr
    xr = g(xrold)
    iter = iter + 1
    IF xr ≠ 0 THEN
```

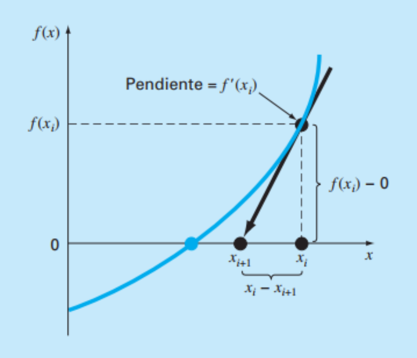
$$ea = \left|\frac{xr - xrold}{xr}\right| \cdot 100$$

```
    END IF
    IF ea < es OR iter ≥ imax EXIT
  END DO
  Fixpt = xr
END Fixpt
```

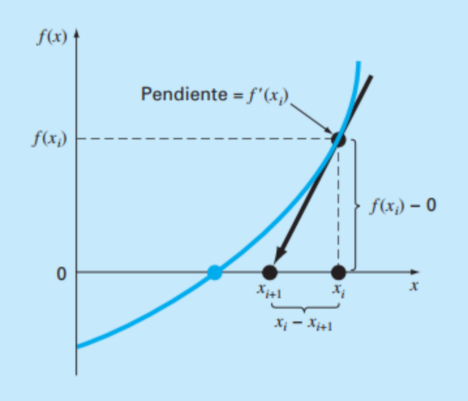
Método de Newton-Raphson

Tal vez, de las fórmulas para localizar raíces, la fórmula de Newton-Raphson sea la más ampliamente utilizada. Si el valor inicial para la raíz es x_i, entonces se puede trazar una tangente desde el punto $(x_i, f(x_i))$ de la curva. Por lo común, el punto donde esta tangente cruza al eje x representa una aproximación mejorada de la raíz.

El método de Newton-Raphson se deduce a partir de esta interpretación geométrica.



Desarrollo del Método



$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - 0}{x_i - x_{i+1}}$$

$$x_i - x_{i+1} = \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Fórmula del método:

$$\boxed{x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}}$$

EJEMPLO

Use el Método de Newton-Raphson para calcular la raíz de $f(x) = e^{-x} - x$, empleando como valor inicial $x_0 = 0$

$$f'(x) = -e^{-x} - 1$$

Luego $x_{i+1} = x_i - \frac{e^{-x_i} - x_i}{-e^{-x_i} - 1}$

i	x_i	$\varepsilon_t(\%)$
0	0	100
1	0.500000000	11.8
2	0.566311003	0.147
3	0.567143165	0.0000220
4	0.567143290	$< 10^{-8}$

Observaciones

Puede probarse (aunque no lo haremos) que

$$E_{t,i+1} = \frac{-f''(x_r)}{2f'(x_r)} E_{t,i}^2$$

De acuerdo con esta ecuación, el error en cada paso es proporcional al cuadrado del error anterior. Esto significa que el número de cifras decimales correctas aproximadamente se duplica en cada iteración. A este comportamiento se le llama convergencia cuadrática.

Aunque en general el método de Newton-Raphson es muy eficiente, hay situaciones donde se comporta de manera deficiente.

EJEMPLO

Determine la raíz positiva de $f(x) = x^{10} - 1$ *usando el método de Newton-Raphson y valor inicial* $x_0 = 0{,}5$

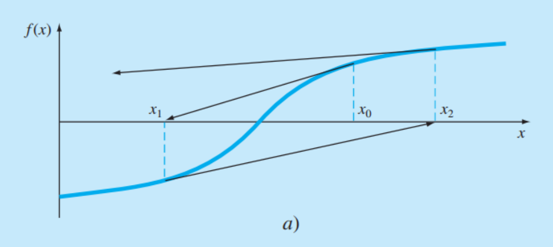
$f'(x) = 10x^9$

Luego $x_{i+1} = x_i - \dfrac{x_i^{10} - 1}{10x_i^9}$

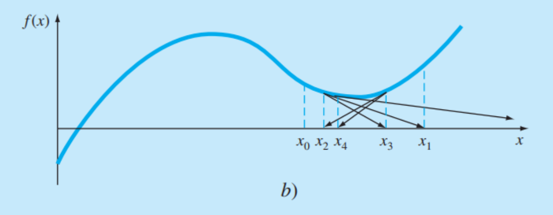
Iteración	x
0	0.5
1	51.65
2	46.485
3	41.8365
4	37.65285
5	33.887565
.	
.	
.	
∞	1.0000000

Desventajas del Método de Newton-Raphson

Punto de inflexión cercano a la raíz

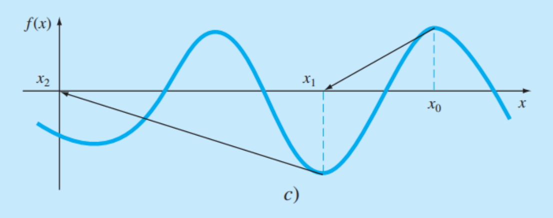


Punto inicial cercano a un extremo local

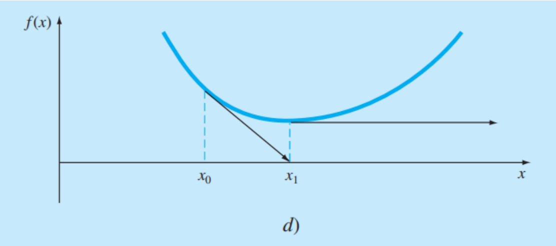


Desventajas del Método de Newton-Raphson

Raíces múltiples



Posibilidad de encontrar puntos con $f'(x) \cong 0$



Consideraciones ante desventajas

- Se debe incluir una rutina de graficación en el programa.

- Al final de los cálculos, se necesitará sustituir siempre la raíz final calculada en la función original, para determinar si el resultado se acerca a cero. Esta prueba protege el desarrollo del programa contra aquellos casos en los que se presenta convergencia lenta u oscilatoria, la cual puede llevar a valores pequeños de ε_a, mientras que la solución aún está muy lejos de una raíz.

- El programa deberá incluir siempre un límite máximo permitido del número de iteraciones para estar prevenidos contra soluciones oscilantes, de lenta convergencia o divergentes que podrían persistir en forma interminable.

- El programa deberá alertar al usuario para que tome en cuenta la posibilidad de que $f'(x)$ sea igual a cero en cualquier momento durante el cálculo.

Método de la Secante

Un problema potencial en la implementación del método de Newton-Raphson es la evaluación de la derivada. En dichos casos, la derivada se puede aproximar mediante

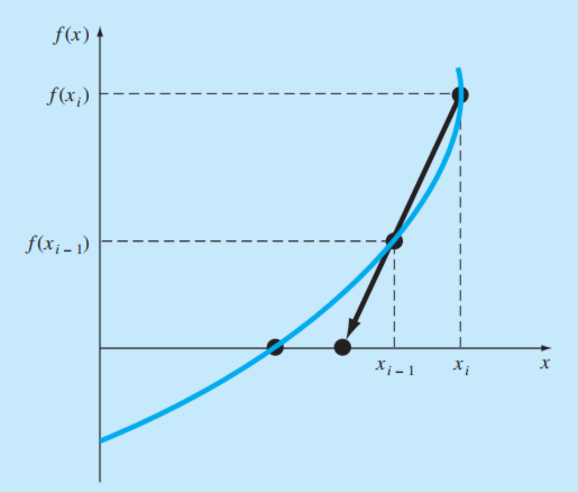
$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_{i-1}) - f(x_i)}{x_{i-1} - x_i}$$

Y reemplazando esta expresión en la fórmula de Newton-Raphson, se obtiene:

Fórmula para el Método de la Secante

$$\boxed{x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)\,(x_{i-1} - x_i)}{f(x_{i-1}) - f(x_i)}}$$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA



¿Cuál es la diferencia con el Método de la Falsa Posición?

EJEMPLO

Con el método de la secante calcule la raíz de $f(x) = e^{-x} - x$. Comience con los valores iniciales $x_{-1} = 0$ y $x_0 = 1$.

Primera iteración:

$x_{-1} = 0 \qquad f(x_{-1}) = 1$

$x_0 = 1 \qquad f(x_0) = -0{,}63212$

$$x_1 = 1 - \frac{-0{,}63212(0-1)}{1-(-0{,}63212)} = 0{,}61270 \qquad \varepsilon_t = 8\,\%$$

Segunda iteración:

$x_0 = 1 \qquad f(x_0) = -0{,}63212$

$x_1 = 0{,}61270 \qquad f(x_1) = -0{,}07081$

$$x_2 = 0{,}61270 - \frac{-0{,}07081(1-0{,}61270)}{-0{,}63212-(-0{,}07081)} = 0{,}56384 \qquad \varepsilon_t = 0{,}58\,\%$$

EJEMPLO

Tercera iteración:

$$x_1 = 0{,}61270 \qquad f(x_1) = -0{,}07081$$

$$x_2 = 0{,}56384 \qquad f(x_2) = 0{,}00518$$

$$x_3 = 0{,}56384 - \frac{0{,}00518(0{,}61270 - 0{,}56384)}{-0{,}07081 - (-0{,}00518)} = 0{,}56717 \qquad \varepsilon_t = 0{,}0048\,\%$$

Ejemplo Secante vs Falsa Posición

Utilice los métodos de la secante y de la falsa posición para calcular la raíz de $f(x) = \ln x$. Empiece los cálculos con los valores iniciales $x_l = x_{-1} = 0{,}5$ y $x_u = x_0 = 5$.

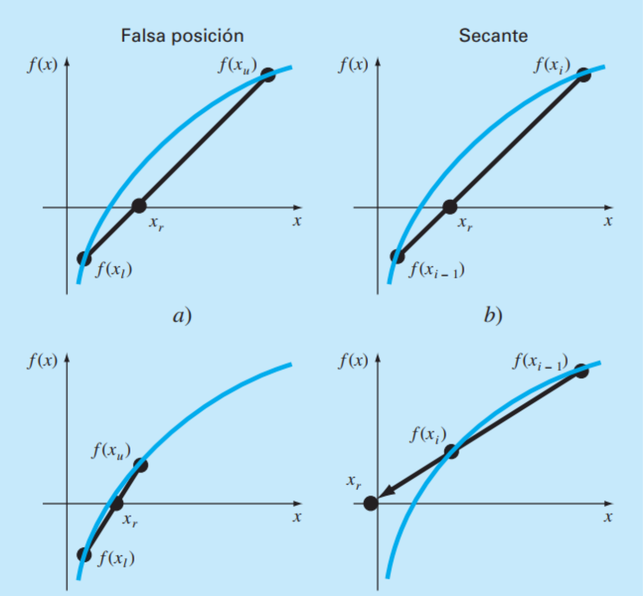
Método de la Falsa Posición

Iteración	x_l	x_u	x_r
1	0.5	5.0	1.8546
2	0.5	1.8546	1.2163
3	0.5	1.2163	1.0585

Método de la Secante

Iteración	x_{i-1}	x_i	x_{i+1}
1	0.5	5.0	1.8546
2	5.0	1.8546	−0.10438

Ejemplo Secante vs Falsa Posición



COMPARATIVA EN EJEMPLO $f(x) = e^{-x} - x$