Aproximación de Fourier

Prof. Lic. Mariel Ugarte

Análisis Numérico

FRRO - UTN - 2023

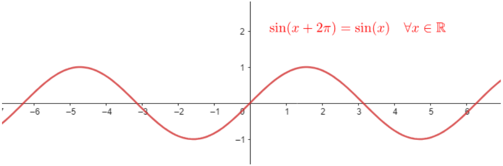
Ajuste de curvas con funciones sinusoidales

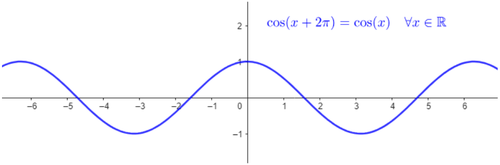
INTRODUCCIÓN

DEFINICIÓN

Diremos que f es períodica de período T, si T es el mínimo número para el cual se cumple:

$$f(x+T) = f(x) \quad \forall x \in Dom(f)$$





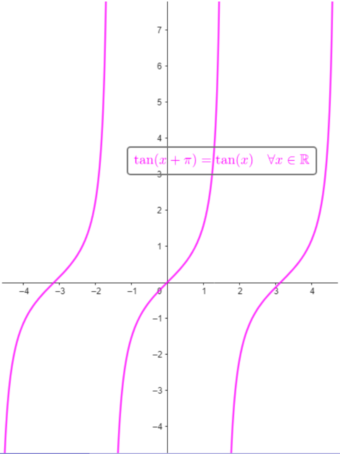
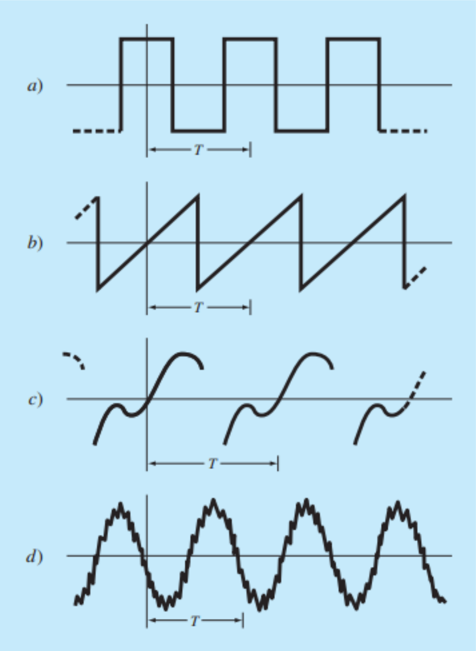


FIGURA 19.2
Además de las funciones trigonométricas seno y coseno, las funciones periódicas comprenden formas de onda como *a)* la onda cuadrada y *b)* la onda dientes de sierra. Más allá de estas formas idealizadas, las señales periódicas en la naturaleza pueden ser *c)* no ideales y *d)* contaminadas por ruido. Las funciones trigonométricas sirven para representar y analizar todos estos casos.

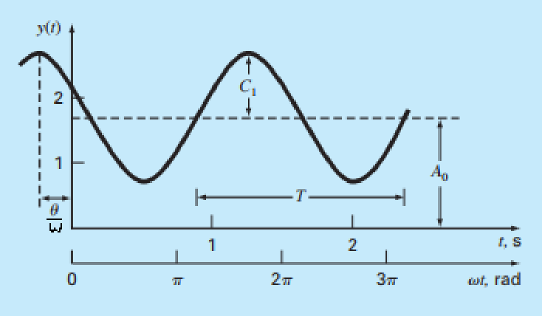


Sinusoide: Cualquier forma de onda que se pueda escribir como un seno o un coseno. Si trabajamos con cosenos, su expresión general viene dada por:

$$f(t) = A_0 + C_1 \cos(\omega t + \theta)$$

donde:

- A_0: *valor medio* (altura promedio sobre las abscisas)
- C_1: *amplitud* (altura de la oscilación)
- ω: *frecuencia angular* (con qué frecuencia se presentan los ciclos) $\omega = \frac{2\pi}{T}$
- θ: *corrimiento de fase* (relacionado con el corrimiento horizontal)



SINUSOIDES

Aunque la expresión $f(t) = A_0 + C_1 \cos(\omega t + \theta)$ representa una caracterización matemática adecuada de una sinusoide, es difícil trabajar desde el punto de vista del ajuste de curvas, pues el corrimiento de fase está incluido en el argumento de la función coseno. Esta deficiencia se resuelve trabajando la expresión algebraicamente

$$\begin{aligned} f(t) &= A_0 + C_1 \cos(\omega t + \theta) \\ &= A_0 + C_1 \left[\cos(\omega t)\cos(\theta) - \sin(\omega t)\sin(\theta)\right] \\ &= A_0 + A_1 \cos(\omega t) + B_1 \sin(\omega t) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{cases} A_1 = C_1 \cos(\theta) \\ B_1 = -C_1 \sin(\theta) \end{cases}$$

Si $A_1 \neq 0$, podemos dividir miembro a miembro, con lo que se obtiene

$$\tan(\theta) = -\frac{B_1}{A_1}$$

SINUSOIDES

Luego,

- Si $A_1 = 0,\ \ \theta = \frac{\pi}{2}$
- Si $A_1 > 0,\ \ \theta = \arctan\left(-\frac{B_1}{A_1}\right)$
- Si $A_1 < 0,\ \ \theta = \arctan\left(-\frac{B_1}{A_1}\right) + \pi$

Por otro lado, elevando al cuadrado y sumando miembro a miembro, se obtiene

$$A_1^2 + B_1^2 = C_1^2 \cos^2(\theta) + C_1^2 \sin^2(\theta) = C_1^2$$

Es decir,

$$C_1 = \sqrt{A_1^2 + B_1^2}$$

Si quisiéramos expresar la sinusoide con un seno en vez de un coseno, sólo debemos recordar que:

$$\cos(\omega t + \theta) = \sin(\omega t + \theta + \frac{\pi}{2})$$

Ajuste por mínimos cuadrados de una sinusoide

Sean los puntos del plano

$$(t_1, y_1), (t_2, y_2), \ldots, (t_N, y_N)$$

Como vimos en el capítulo de Regresión lineal, nos puede interesar encontrar una función continua *dentro de una familia*, que mejor se aproxime a los datos (es decir, que mejor se ajuste a la forma o a la tendencia general de los datos, sin coincidir necesariamente en todos los puntos), de acuerdo con algún criterio.

Esta vez, el objetivo es encontrar la función sinusoide, de la forma

$$f(t) = A_0 + A_1 \cos(\omega t) + B_1 \sin(\omega t)$$

que mejor *ajuste* a los puntos, bajo el criterio de mínimos cuadrados. Es decir, que minimice

$$\sum_{i=1}^{N} \left[y_i - (A_0 + A_1 \cos(\omega t_i) + B_1 \sin(\omega t_i))\right]^2$$

Ajuste por mínimos cuadrados de una sinusoide

Sea

$$S(A_0, A_1, B_1) = \sum_{i=1}^{N} [y_i - A_0 - A_1 \cos(\omega t_i) - B_1 \sin(\omega t_i)]^2$$

Para hallar A_0, A_1 y B_1 que minimicen $S(A_0, A_1, B_1)$, igualamos a 0 sus derivadas parciales:

$$\frac{\partial S}{\partial A_0} = -2 \sum_{i=1}^{N} [y_i - A_0 - A_1 \cos(\omega t_i) - B_1 \sin(\omega t_i)] = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial A_1} = -2 \sum_{i=1}^{N} [y_i - A_0 - A_1 \cos(\omega t_i) - B_1 \sin(\omega t_i)] \cos(\omega t_i) = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial A_1} = -2 \sum_{i=1}^{N} [y_i - A_0 - A_1 \cos(\omega t_i) - B_1 \sin(\omega t_i)] \sin(\omega t_i) = 0$$

Es decir

$$NA_0 + \left(\sum_{i=1}^{N} \cos(\omega t_i)\right) A_1 + \left(\sum_{i=1}^{N} \sin(\omega t_i)\right) B_1 = \sum_{i=1}^{N} y_i$$

$$\left(\sum_{i=1}^{N} \cos(\omega t_i)\right) A_0 + \left(\sum_{i=1}^{N} \cos^2(\omega t_i)\right) A_1 + \left(\sum_{i=1}^{N} \cos(\omega t_i)\sin(\omega t_i)\right) B_1 = \sum_{i=1}^{N} y_i \cos(\omega t_i)$$

$$\left(\sum_{i=1}^{N} \sin(\omega t_i)\right) A_0 + \left(\sum_{i=1}^{N} \cos(\omega t_i)\sin(\omega t_i)\right) A_1 + \left(\sum_{i=1}^{N} \sin^2(\omega t_i)\right) B_1 = \sum_{i=1}^{N} y_i \sin(\omega t_i)$$

O, matricialmente:

$$\begin{bmatrix} N & \sum_{i=1}^{N} \cos(\omega t_i) & \sum_{i=1}^{N} \sin(\omega t_i) \\ \sum_{i=1}^{N} \cos(\omega t_i) & \sum_{i=1}^{N} \cos^2(\omega t_i) & \sum_{i=1}^{N} \cos(\omega t_i)\sin(\omega t_i) \\ \sum_{i=1}^{N} \sin(\omega t_i) & \sum_{i=1}^{N} \cos(\omega t_i)\sin(\omega t_i) & \sum_{i=1}^{N} \sin^2(\omega t_i) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ B_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N} y_i \\ \sum_{i=1}^{N} y_i \cos(\omega t_i) \\ \sum_{i=1}^{N} y_i \sin(\omega t_i) \end{bmatrix}$$

Ajuste por mínimos cuadrados de una sinusoide

Observación

¿Qué valor de ω consideraremos?

Sea

$$\Delta t = \frac{t_N - t_1}{N-1}$$

Entonces

$$T = N\Delta t \qquad \text{y} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Ajuste por mínimos cuadrados de una sinusoide

Observación

¿Qué valor de ω consideraremos?

Sea

$$\Delta t = \frac{t_N - t_1}{N-1}$$

Entonces

$$T = N\Delta t \qquad \text{y} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Caso especial

Analicemos ahora el caso especial donde hay N observaciones espaciadas de manera uniforme (equiespaciadas) a intervalos Δt. En dicho caso, como antes $T = N\Delta t$. En esta situación, se determinan los siguientes valores promedio (no lo probaremos).

Ajuste por mínimos cuadrados de una sinusoide

Caso especial equiespaciado

$$\sum_{i=1}^{N} \cos(\omega t_i) = 0 \qquad \sum_{i=1}^{N} \sin(\omega t_i) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{N} \cos^2(\omega t_i) = \frac{N}{2} \qquad \sum_{i=1}^{N} \sin^2(\omega t_i) = \frac{N}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \cos(\omega t_i) \sin(\omega t_i) = 0$$

Ajuste por mínimos cuadrados de una sinusoide

Caso especial equiespaciado

$$\sum_{i=1}^{N} \cos(\omega t_i) = 0 \qquad \sum_{i=1}^{N} \sin(\omega t_i) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{N} \cos^2(\omega t_i) = \frac{N}{2} \qquad \sum_{i=1}^{N} \sin^2(\omega t_i) = \frac{N}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \cos(\omega t_i) \sin(\omega t_i) = 0$$

Y entonces el sistema se reduce a

$$\begin{bmatrix} N & 0 & 0 \\ 0 & N/2 & 0 \\ 0 & 0 & N/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ B_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N} y_i \\ \sum_{i=1}^{N} y_i \cos(\omega t_i) \\ \sum_{i=1}^{N} y_i \sin(\omega t_i) \end{bmatrix}$$

Ajuste por mínimos cuadrados de una sinusoide

Caso especial equiespaciado

Luego

$$
\begin{aligned}
A_0 &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i \\
A_1 &= \frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i \cos(\omega t_i) \\
B_1 &= \frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i \sin(\omega t_i)
\end{aligned}
$$

EJEMPLO

Planteamiento del problema. La curva de la figura 19.3 se describe por $y = 1.7 + \cos(4.189t + 1.0472)$. Genere 10 valores discretos para esta curva a intervalos $\Delta t = 0.15$ en el intervalo de $t = 0$ a $t = 1.35$. Utilice esta información para evaluar los coeficientes de la ecuación (19.11) mediante un ajuste por mínimos cuadrados.

Solución. Los datos requeridos para evaluar los coeficientes con $\omega = 4.189$ son

t	y	$y \cos(\omega_0 t)$	$y \operatorname{sen}(\omega_0 t)$
0	2.200	2.200	0.000
0.15	1.595	1.291	0.938
0.30	1.031	0.319	0.980
0.45	0.722	−0.223	0.687
0.60	0.786	−0.636	0.462
0.75	1.200	−1.200	0.000
0.90	1.805	−1.460	−1.061
1.05	2.369	−0.732	−2.253
1.20	2.678	0.829	−2.547
1.35	2.614	2.114	−1.536
$\Sigma=$	17.000	2.502	−4.330

EJEMPLO

$$A_0 = \frac{17.000}{10} = 1.7 \qquad A_1 = \frac{2}{10} 2.502 = 0.500 \qquad B_1 = \frac{2}{10}(-4.330) = -0.866$$

De esta manera, el ajuste por mínimos cuadrados es

$$y = 1.7 + 0.500 \cos(\omega_0 t) - 0.866 \operatorname{sen}(\omega_0 t)$$

O bien, si buscamos su expresión como sinusoide

$$\theta = \arctan\left(-\frac{-0.866}{0.500}\right) = 1.0472$$

$$C_1 = \sqrt{(0.5)^2 + (-0.866)^2} = 1.00$$

$$y = 1.7 + \cos(\omega_0 t + 1.0472)$$

Serie de Fourier continua

REPASO

Las siguientes propiedades serán de mucha utilidad a lo largo de esta sección:

Sean f y g dos funciones.

- Diremos que f es períodica de período T, si T es el mínimo número para el cual se cumple:

$$f(x+T)=f(x) \quad \forall x \in Dom(f)$$

- Si f y g son dos funciones periódicas de período T, la combinación lineal $(af+bg)$ también será una función periódica de período T para cualquier par de constantes reales a y b.
- Si f y g son, ambas, funciones pares ó impares, $f.g$ será una función par. Si f es par y g es impar, el producto será una función impar.
- Si f es una función par e integrable en $[-a,a] \Rightarrow \displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx.$
- Si f es una función impar e integrable en $[-a,a] \Rightarrow \displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$

Proposición

Si f es una función periódica de período T

$$\int_0^T f(x)\,dx = \int_a^{a+T} f(x)\,dx$$

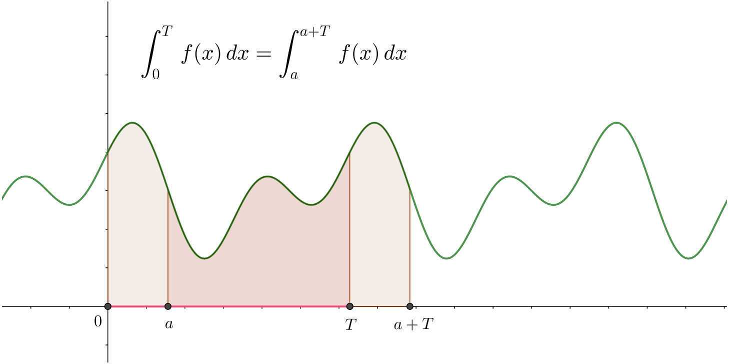
para todo $a \in \mathbb{R}$

Proposición

Si f es una función periódica de período T

$$\int_0^T f(x)\,dx = \int_a^{a+T} f(x)\,dx$$

para todo $a \in \mathbb{R}$



Más propiedades…

Si $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$

$$\int_0^T sen(k\omega x)\,dx = \int_0^T cos(k\omega x)\,dx = 0 \qquad \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$\int_0^T cos(m\omega x)sen(n\omega x)\,dx = 0 \qquad \forall m,n \in \mathbb{Z}$$

$$\int_0^T sen(m\omega x)sen(n\omega x)\,dx = 0 \qquad \forall m,n \in \mathbb{Z},\;\; m \neq n$$

$$\int_0^T cos(m\omega x)cos(n\omega x)\,dx = 0 \qquad \forall m,n \in \mathbb{Z},\;\; m \neq n$$

$$\int_0^T cos^2(k\omega x)\,dx = \int_0^T sen^2(k\omega x)\,dx = \frac{T}{2} \qquad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Serie de Fourier

Sea f una función periódica de período T e integrable en $[0,T]$, y sea $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$.

Serie de Fourier

Sea f una función periódica de período T e integrable en $[0,T]$, y sea $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$.

Supongamos que f tiene un desarrollo en serie de la forma

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\,\omega\,x) + b_n \operatorname{sen}(n\,\omega\,x)$$

Serie de Fourier

Sea f una función periódica de período T e integrable en $[0,T]$, y sea $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$.

Supongamos que f tiene un desarrollo en serie de la forma

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\,\omega\,x) + b_n \operatorname{sen}(n\,\omega\,x)$$

$$¿¿a_0, a_n, b_n??$$

Serie de Fourier

Sea f una función periódica de período T e integrable en $[0,T]$, y sea $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$.

Supongamos que f tiene un desarrollo en serie de la forma

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\,\omega\,x) + b_n \operatorname{sen}(n\,\omega\,x)$$

Se puede probar (hecho en clases) que:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,dx & & \\
a_n &= \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos(n\,\omega\,x)\,dx & & n = 1,2,3\cdots \\
b_n &= \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\operatorname{sen}(n\,\omega\,x)\,dx & & n = 1,2,3,\cdots
\end{aligned}$$

Serie de Fourier

Sea f una función periódica de período T e integrable en $[0,T]$, y sea $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$.

Supongamos que f tiene un desarrollo en serie de la forma

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\,\omega\,x) + b_n \operatorname{sen}(n\,\omega\,x)$$

O bien, utilizando la propiedad vista al comienzo,

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\,\cos(n\,\omega\,x)\,dx \qquad n = 1,2,3\cdots$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\,\operatorname{sen}(n\,\omega\,x)\,dx \qquad n = 1,2,3,\cdots$$

Ejercicio

- Si una función es impar, la serie generada constará sólo de senos.
- Si, en cambio, la función es par, la serie generada será sólo de cosenos.

Ejercicio

- Si una función es impar, la serie generada constará sólo de senos.
- Si, en cambio, la función es par, la serie generada será sólo de cosenos.

Ejemplo

Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\pi, 0) \\ x, & x \in (0, \pi) \end{cases}$$

y f periódica de período 2π

Resolución

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\left(\underbrace{\int_{-\pi}^{0} 0\,dx}_{0} + \underbrace{\int_{0}^{\pi} x\,dx}_{\frac{\pi^2}{2}}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(\underbrace{n\,\omega\,x}_{\frac{n\pi x}{\pi}})\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos(nx)\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{x\,\mathrm{sen}(nx)}{n} + \frac{\cos(nx)}{n^2}\right)\Bigg|_{0}^{\pi}
\end{aligned}$$

Resolución

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi\overbrace{\operatorname{sen}(n\pi)}^{0}}{n}+\frac{\overbrace{\cos(n\pi)}^{(-1)^n}}{n^2}-\frac{\overbrace{0\operatorname{sen}(n0)}^{0}}{n}-\frac{\overbrace{\cos(n0)}^{1}}{n^2}\right)\\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{(-1)^n-1}{n^2}\right)
\end{aligned}
$$

$$
a_n = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n = 2k\,(k=1,\ldots) \\ \dfrac{-2}{\pi(2k-1)^2} & \text{si} \quad n = 2k-1\,(k=1,\ldots) \end{cases}
$$

RESOLUCIÓN

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}(nx)\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\,\mathrm{sen}(nx)\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{-x\cos(nx)}{n}+\frac{\mathrm{sen}(nx)}{n^2}\right)\Bigg|_0^{\pi} \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{-\pi\overbrace{\cos(n\pi)}^{(-1)^n}}{n}+\frac{\overbrace{\mathrm{sen}(n\pi)}^{0}}{n^2}+\frac{\overbrace{0\cos(n0)}^{0}}{n}-\frac{\overbrace{\mathrm{sen}(n0)}^{0}}{n^2}\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi(-1)^{n+1}}{n}\right)=\frac{(-1)^{n+1}}{n}
\end{aligned}
$$

RESOLUCIÓN

Luego, la serie de Fourier de f es:

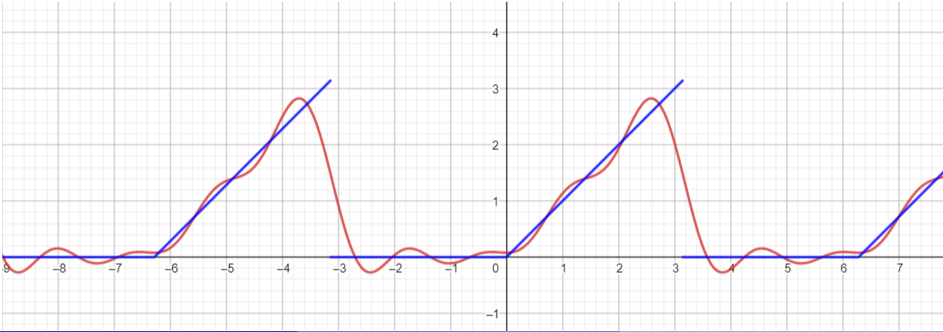
$$\frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{-2}{\pi(2k-1)^2} \cos((2k-1)x) + \frac{(-1)^{k+1}}{k} \operatorname{sen}(kx) \right)$$

Resolución

Luego, la serie de Fourier de f es:

$$\frac{\pi}{4}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{-2}{\pi(2k-1)^2}\cos((2k-1)x)+\frac{(-1)^{k+1}}{k}\operatorname{sen}(kx)\right)$$

Para visualizar la convergencia de esta serie, te proponemos graficar algunas sumas parciales con GeoGebra. Aquí te presentamos la gráfica de S_5, junto con la de f.



Forma Compleja de la Serie de Fourier

Recordemos la expresión para la Serie de Fourier de una función f, periódica de período T

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\,\omega\,t) + b_k \operatorname{sen}(k\,\omega\,t)$$

con:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,dt$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(k\,\omega\,t)\,dt \qquad\qquad k = 1,2,3\cdots$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\operatorname{sen}(k\,\omega\,t)\,dt \qquad\qquad k = 1,2,3,\cdots$$

donde $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$

Forma Compleja de la Serie de Fourier

Utilizando la fórmula de Euler

$$e^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t$$

se tiene que

$$\operatorname{sen} t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$$

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}$$

Reemplazando en la expresión de la Serie de Fourier conocida, se obtiene

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k - ib_k}{2} e^{ik\omega t} + \frac{a_k + ib_k}{2} e^{-ik\omega t} \right)$$

Forma Compleja de la Serie de Fourier

Renombrando

$$\tilde{c}_0 = a_0$$

$$\tilde{c}_k = \frac{a_k - ib_k}{2}$$

$$\tilde{c}_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2} = \frac{a_{-k} - ib_{-k}}{2}$$

la expresión anterior puede reexpresarse como

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{c}_k \; e^{ik\omega t} + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{c}_{-k} \; e^{-ik\omega t}$$

o bien

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{c}_k \; e^{ik\omega t} + \sum_{k=-\infty}^{-1} \tilde{c}_k \; e^{ik\omega t}$$

Forma Compleja de la Serie de Fourier

O, finalmente

$$\boxed{f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{c}_k \, e^{ik\omega t}}$$

donde la expresión que calcula $\tilde{c}_k$ es

$$\tilde{c}_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(k\,\omega\,t)\,dt - i\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,\mathrm{sen}(k\,\omega\,t)\,dt$$

o bien, usando nuevamente la fórmula de Euler,

$$\boxed{\tilde{c}_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,e^{-ik\omega t}\,dt}$$

Tranformadas de Fourier

Integral y Transformada de Fourier

La Serie de Fourier, tanto en su versión real como compleja, permite hallar una desarrollo en serie de una función periódica, sin embargo hay muchos más fenómenos que se describen con funciones no periódicas.
La transición de una función periódica a una no periódica se efectúa al permitir que el período tienda a infinito. En otras palabras, conforme T se vuelve infinito, la función nunca se repite y, de esta forma, se vuelve no periódica. Si se permite que ocurra esto, se puede demostrar que la serie de Fourier se reduce a

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(i\omega)\, e^{i\omega t}} \qquad (1)$$

y los coeficientes se convierten en una función continua de la variable frecuencia ω, teniéndose que

$$\boxed{F(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt} \qquad (2)$$

Integral y Transformada de Fourier

- La función $F(i\omega)$, definida por la ecuación por la ecuación (2), se llama integral de Fourier de $f(t)$.
- Las ecuaciones (1) y (2) se conocen como el par de transformadas de Fourier.
- Así, además de llamarse integral de Fourier, $F(i\omega)$ también se denomina transformada de Fourier de $f(t)$.
- De igual manera, $f(t)$, como se define en la (1), se conoce como transformada inversa de Fourier de $F(i\omega)$.

(el par nos permite transformar entre uno y otro de los dominios del tiempo y de la frecuencia para una señal no periódica)

Otra notación:

$$\mathscr{F}\left[x(t)\right] = X(i\omega)$$

$$\mathscr{F}^{-1}\left[X(i\omega)\right] = x(t)$$

Algunas Propiedades de la Transformada de Fourier

- *Linealidad*

$$\mathscr{F}\left[ax(t)+by(t)\right]=a\mathscr{F}\left[x(t)\right]+b\mathscr{F}\left[y(t)\right]=aX(i\omega)+bY(i\omega)$$

- *Desplazamiento de tiempo*

$$\mathscr{F}\left[x(t-a)\right]=e^{-i\omega a}X(i\omega)$$

- *Diferenciación*

$$\mathscr{F}\left[x'(t)\right]=i\omega\mathscr{F}\left[x(t)\right]=i\omega X(i\omega)$$

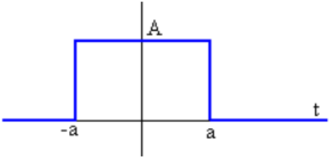
- *Escalamiento de tiempo y de frecuencia*

$$\mathscr{F}\left[x(at)\right]=\frac{1}{|a|}X\left(\frac{i\omega}{a}\right)$$

Ejemplo

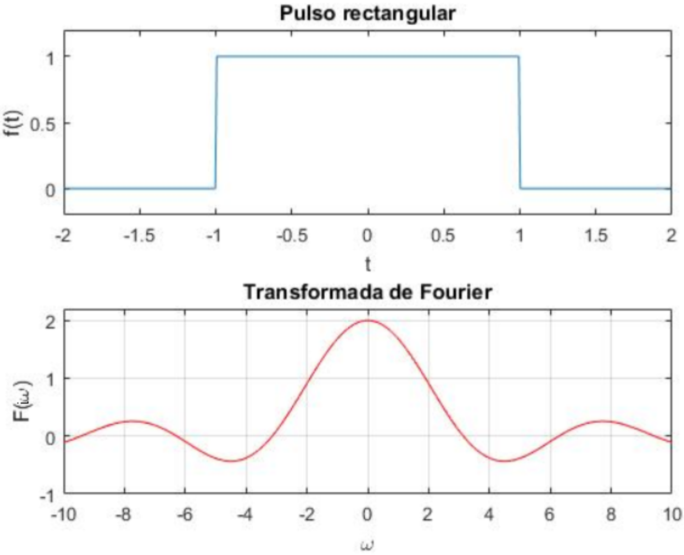
Pulso rectangular

Sea un pulso rectangular tal que $f(t)$ es cero excepto en el intervalo $[-a, a]$ que vale A, tal como se muestra en la figura



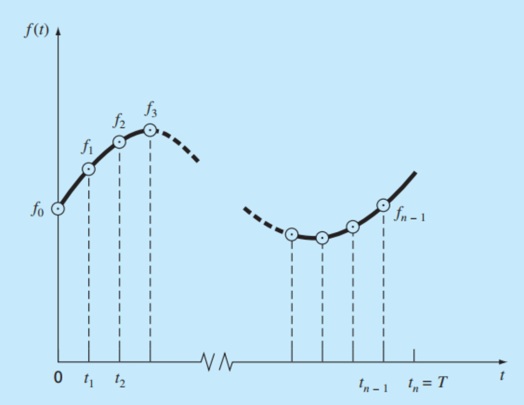
$$
\begin{aligned}
F(i\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt = \int_{-a}^{a} A\, e^{-i\omega t}\, dt \\
&= -\frac{A}{i\omega} e^{-i\omega t}\Big|_{-a}^{a} = -\frac{A}{i\omega}\left(e^{-i\omega a} - e^{i\omega a}\right) \\
&= \frac{2A}{\omega}\frac{e^{i\omega a} - e^{-i\omega a}}{2i} = \frac{2A}{\omega}\operatorname{sen}(\omega a)
\end{aligned}
$$

EJEMPLO


Pulso rectangular
f(t)
1
0.5
0
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
t
Transformada de Fourier
F(iω)
2
1
0
-1
-10
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
10
ω

Transformada Discreta de Fourier

En ingeniería, las funciones en general se representan por conjuntos finitos de valores discretos. Es decir, los datos con frecuencia se obtienen de, o convierten a, una forma discreta. Como vemos en la figura, se puede dividir un intervalo de 0 a t en N subintervalos de igual tamaño $\Delta t = T/N$. El subíndice n se emplea para designar los tiempos discretos a los cuales se toman las muestras. Así, f_n designa a $f(t_n)$.



Transformada Discreta de Fourier

Para el sistema de la figura, se escribe la Transformada Discreta de Fourier (TDF) como

$$\boxed{F_k = \sum_{n=0}^{N-1} f_n \, e^{-i\omega nk}, \qquad k = 0, \ldots N-1}$$

y la Transformada Inversa de Fourier como:

$$\boxed{f_n = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F_k \, e^{i\omega nk}, \qquad n = 0, \ldots N-1}$$

donde $\omega = \dfrac{2\pi}{N}$

Transformada Discreta de Fourier

Aunque es posible realizar tales cálculos a mano, son bastante laboriosos. Como vemos en las ecuaciones anteriores, la TDF requiere N^2 operaciones complejas. Así, es necesario desarrollar un algoritmo computacional para implementar la TDF.

Para ello, usaremos (nuevamente) la fórmula de Euler para reescibir las ecuaciones dadas por

$$F_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} [f_n \cos(k\omega n) - i f_n \operatorname{sen}(k\omega n)]$$

y

$$f_n = \sum_{n=0}^{N-1} [F_k \cos(k\omega n) + i F_k \operatorname{sen}(k\omega n)]$$

Observación: Hemos cambiado, para el algoritmo, el factor $1/N$ de ecuación. El mismo es sólo un factor de escala y puede estar en una u otra ecuación, pero no en ambas.

PSEUDOCÓDIGO PARA LA TDF

```
DOFOR k = 0, N - 1
  DOFOR n = 0, N - 1
    angle = kω₀n
    real_k = real_k + f_n cos(angle)/N
    imaginary_k = imaginary_k - f_n sin(angle)/N
  END DO
END DO
```

Transformada Rápida de Fourier

Aunque el algoritmo descripto calcula de manera adecuada la TDF, es computacionalmente laborioso debido a que se requieren N^2 operaciones. En consecuencia, aún en muestras de un tamaño moderado, la determinación directa de la TDF llega a consumir mucho tiempo. La transformada rápida de Fourier, o TRF, es un algoritmo que se desarrolló para calcular la TDF en una forma extremadamente económica. Su velocidad proviene del hecho de que utiliza los resultados de cálculos previos para reducir el número de operaciones. En particular, aprovecha la periodicidad y simetría de las funciones trigonométricas para calcular la transformada con aproximadamente $N \log_2 N$ operaciones.

El primer algoritmo para la TRF fue desarrollado por Gauss a principios del siglo XIX. En 1965, J. W. Cooley y J. W. Tukey publicaron un artículo clave, en el cual se propuso un algoritmo para el cálculo de la TRF. Dicho esquema, similar a aquel de Gauss y de otros investigadores anteriores, se conoce como algoritmo de Cooley-Tukey.