Методы оптимизации
Лекция 2: Сопряжённые конусы. Отделимость. Выпуклые функции

Александр Катруца

Физтех-школа прикладной математики и информатики
Московский физико-технический институт

14 сентября 2020 г.

На прошлой лекции

- О чём этот курс и почему он нужен
- Примеры постановок задач оптимизации
- Выпуклые множества и их свойства

Напоминание: конусы

Определение

Множество K называется конусом, если для любого $\mathbf{x} \in K$ и произвольного числа $\theta \geq 0$ выполнено $\theta \mathbf{x} \in K$.

Напоминание: конусы

Определение

Множество K называется конусом, если для любого $\mathbf{x} \in K$ и произвольного числа $\theta \geq 0$ выполнено $\theta \mathbf{x} \in K$.

Определение

*Множество K называется **выпуклым** конусом, если для любых точек $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in K$ и любых чисел $\theta_1 \geq 0,\ \theta_2 \geq 0$ выполнено $\theta_1 \mathbf{x}_1 + \theta_2 \mathbf{x}_2 \in K$.*

Напоминание: конусы

Определение

Множество K называется конусом, если для любого $\mathbf{x} \in K$ и произвольного числа $\theta \geq 0$ выполнено $\theta \mathbf{x} \in K$.

Определение

*Множество K называется **выпуклым** конусом, если для любых точек $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in K$ и любых чисел $\theta_1 \geq 0,\ \theta_2 \geq 0$ выполнено $\theta_1 \mathbf{x}_1 + \theta_2 \mathbf{x}_2 \in K$.*

Важные конусы

- Неотрицательный октант $\mathbb{R}^n_+ = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, n\} \to$ LP
- Конус второго порядка $\{(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|\mathbf{x}\|_2 \leq t\} \to$ SOCP
- Конус симметричных положительно полуопределённых матриц $\mathbf{S}^n_+ \to$ SDP

Сопряжённый конус (dual cone)

Определение

Пусть K — конус. Тогда множество

$$K^* = \{\mathbf{y} \mid \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle \geq 0, \ \mathbf{x} \in K\}$$

называется сопряжённым конусом.

Сопряжённый конус (dual cone)

Определение

Пусть K — конус. Тогда множество

$$K^* = \{\mathbf{y} \mid \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle \geq 0, \ \mathbf{x} \in K\}$$

называется сопряжённым конусом.

Свойства

- K^* — конус
- K^* — выпуклый конус для *любого* конуса K
- Если $K_1 \subseteq K_2$, то $K_2^* \subseteq K_1^*$

Сопряжённый конус (dual cone)

Определение

Пусть K — конус. Тогда множество

$$K^* = \{\mathbf{y} \mid \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle \geq 0, \ \mathbf{x} \in K\}$$

называется сопряжённым конусом.

Свойства

- K^* — конус
- K^* — выпуклый конус для *любого* конуса K
- Если $K_1 \subseteq K_2$, то $K_2^* \subseteq K_1^*$

Определение

Если $K = K^*$, то конус называется самосопряжённым (self-dual)

Самосопряжённые конусы

Самосопряжённые конусы

Определение

Сопряжённой нормой относительно $\|\cdot\|$ *называется*

$$\|\mathbf{z}\|_* = \sup_{\|\mathbf{x}\|\leq 1} \mathbf{z}^\top \mathbf{x}.$$

Самосопряжённые конусы

Определение

Сопряжённой нормой относительно $\|\cdot\|$ *называется*

$$\|\mathbf{z}\|_* = \sup_{\|\mathbf{x}\| \le 1} \mathbf{z}^\top \mathbf{x}.$$

Примеры

- $\|\cdot\|_1 \to \|\cdot\|_* = \|\cdot\|_\infty$
- $\|\cdot\|_2 \to \|\cdot\|_* = \|\cdot\|_2$
- $\|\cdot\|_\infty \to \|\cdot\|_* = \|\cdot\|_1$

Самосопряжённые конусы

Определение

Сопряжённой нормой относительно $\|\cdot\|$ *называется*

$$\|\mathbf{z}\|_* = \sup_{\|\mathbf{x}\|\leq 1} \mathbf{z}^\top \mathbf{x}.$$

Примеры

- $\|\cdot\|_1 \to \|\cdot\|_* = \|\cdot\|_\infty$
- $\|\cdot\|_2 \to \|\cdot\|_* = \|\cdot\|_2$
- $\|\cdot\|_\infty \to \|\cdot\|_* = \|\cdot\|_1$

Самосопряжённые конусы

- $\mathbb{R}^n_+$

Самосопряжённые конусы

Определение

Сопряжённой нормой относительно $\|\cdot\|$ *называется*

$$\|\mathbf{z}\|_* = \sup_{\|\mathbf{x}\| \leq 1} \mathbf{z}^\top \mathbf{x}.$$

Примеры

- $\|\cdot\|_1 \to \|\cdot\|_* = \|\cdot\|_\infty$
- $\|\cdot\|_2 \to \|\cdot\|_* = \|\cdot\|_2$
- $\|\cdot\|_\infty \to \|\cdot\|_* = \|\cdot\|_1$

Самосопряжённые конусы

- $\mathbb{R}^n_+$
- Конус второго порядка $\{(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|\mathbf{x}\|_2 \leq t\}$

Самосопряжённые конусы

Определение

Сопряжённой нормой относительно $\|\cdot\|$ *называется*

$$\|\mathbf{z}\|_* = \sup_{\|\mathbf{x}\|\leq 1} \mathbf{z}^\top \mathbf{x}.$$

Примеры

- $\|\cdot\|_1 \to \|\cdot\|_* = \|\cdot\|_\infty$
- $\|\cdot\|_2 \to \|\cdot\|_* = \|\cdot\|_2$
- $\|\cdot\|_\infty \to \|\cdot\|_* = \|\cdot\|_1$

Самосопряжённые конусы

- $\mathbb{R}^n_+$
- Конус второго порядка $\{(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|\mathbf{x}\|_2 \leq t\}$
- $\mathbf{S}^n_+$

Зачем нужны конусы?

Зачем нужны конусы?

Обобщённое отношение частичного порядка

Пусть K — конус. Тогда $\mathbf{x} \leq_K \mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{y} - \mathbf{x} \in K$.

Зачем нужны конусы?

Обобщённое отношение частичного порядка

Пусть K — конус. Тогда $\mathbf{x} \leq_K \mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{y} - \mathbf{x} \in K$.

Пример: конус $\mathbf{S}_+^n$

Пусть $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbf{S}^n$. Тогда $\mathbf{X} \leq_K \mathbf{Y}$ означает, что $\mathbf{Y} - \mathbf{X} \in \mathbf{S}_+^n$

Зачем нужны конусы?

Обобщённое отношение частичного порядка

Пусть K — конус. Тогда $\mathbf{x} \leq_K \mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{y} - \mathbf{x} \in K$.

Пример: конус $\mathbf{S}^n_+$

Пусть $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbf{S}^n$. Тогда $\mathbf{X} \leq_K \mathbf{Y}$ означает, что $\mathbf{Y} - \mathbf{X} \in \mathbf{S}^n_+$

Задача линейного программирования

$$
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\
\text{s.t. } & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\
& x_i \geq 0
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\
\text{s.t. } & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\
& \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+
\end{aligned}
$$

Зачем нужны конусы?

Обобщённое отношение частичного порядка

Пусть K — конус. Тогда $\mathbf{x} \leq_K \mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{y} - \mathbf{x} \in K$.

Пример: конус $\mathbf{S}^n_+$

Пусть $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbf{S}^n$. Тогда $\mathbf{X} \leq_K \mathbf{Y}$ означает, что $\mathbf{Y} - \mathbf{X} \in \mathbf{S}^n_+$

Задача линейного программирования

$$\begin{aligned} &\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{s.t. } &\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ &x_i \geq 0 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} &\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{s.t. } &\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ &\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+ \end{aligned}$$

Введение нелинейности

Использование декартового произведение трёх самосопряжённых конусов позволяет записать многие практически важные выпуклые задачи

Отделимость выпуклых множеств

Определение

Множества A, B *называются отделимыми, если существует вектор* $\mathbf{a} \neq 0$ *и число* b *такие что*

- $\mathbf{a}^\top \mathbf{x} + b \geq 0$ *для всех* $\mathbf{x} \in A$
- $\mathbf{a}^\top \mathbf{y} + b \leq 0$ *для всех* $\mathbf{y} \in B$.

Отделимость выпуклых множеств

Определение

Множества A, B называются отделимыми, если существует вектор $\mathbf{a} \neq 0$ и число b такие что

- $\mathbf{a}^\top \mathbf{x} + b \geq 0$ *для всех* $\mathbf{x} \in A$
- $\mathbf{a}^\top \mathbf{y} + b \leq 0$ *для всех* $\mathbf{y} \in B$.

Теорема

Пусть A и B — выпуклые и непересекающиеся множества. Тогда существует разделяющая их гиперплоскость.

Отделимость выпуклых множеств

Определение

Множества A, B называются отделимыми, если существует вектор $\mathbf{a} \neq 0$ и число b такие что

- $\mathbf{a}^\top \mathbf{x} + b \geq 0$ *для всех* $\mathbf{x} \in A$
- $\mathbf{a}^\top \mathbf{y} + b \leq 0$ *для всех* $\mathbf{y} \in B$.

Теорема

Пусть A и B — выпуклые и непересекающиеся множества. Тогда существует разделяющая их гиперплоскость.

Доказательство

- Предположим, что расстояние между A и B положительно: $\inf\limits_{\mathbf{x} \in A,\, \mathbf{y} \in B} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2 > 0$

Отделимость выпуклых множеств

Определение

Множества A, B называются отделимыми, если существует вектор $\mathbf{a} \neq 0$ и число b такие что

- $\mathbf{a}^\top \mathbf{x} + b \geq 0$ *для всех* $\mathbf{x} \in A$
- $\mathbf{a}^\top \mathbf{y} + b \leq 0$ *для всех* $\mathbf{y} \in B$.

Теорема

Пусть A и B — выпуклые и непересекающиеся множества. Тогда существует разделяющая их гиперплоскость.

Доказательство

- Предположим, что расстояние между A и B положительно: $\inf\limits_{\mathbf{x} \in A,\, \mathbf{y} \in B} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2 > 0$
- Пусть $\mathbf{c} \in A$ и $\mathbf{d} \in B$ — точки, в которых этот минимум достигается

Отделимость выпуклых множеств

Определение

Множества A, B *называются отделимыми, если существует вектор* $\mathbf{a} \neq 0$ *и число* b *такие что*

- $\mathbf{a}^\top \mathbf{x} + b \geq 0$ *для всех* $\mathbf{x} \in A$
- $\mathbf{a}^\top \mathbf{y} + b \leq 0$ *для всех* $\mathbf{y} \in B$.

Теорема

Пусть A *и* B *— выпуклые и непересекающиеся множества. Тогда существует разделяющая их гиперплоскость.*

Доказательство

- Предположим, что расстояние между A и B положительно: $\inf\limits_{\mathbf{x} \in A,\, \mathbf{y} \in B} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2 > 0$
- Пусть $\mathbf{c} \in A$ и $\mathbf{d} \in B$ — точки, в которых этот минимум достигается
- Рассмотрим $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^\top \mathbf{x} + b$, где $\mathbf{a} = \mathbf{d} - \mathbf{c}$ и $b = \frac{\|\mathbf{d}\|_2^2 - \|\mathbf{c}\|_2^2}{2}$

- Покажем, что $f(\mathbf{y}) \geq 0$ для всех $\mathbf{y} \in B$
- Пусть найдётся $\mathbf{u} \in B$ такая что $f(\mathbf{u}) < 0$
- $f(\mathbf{u}) = (\mathbf{d}-\mathbf{c})^\top(\mathbf{u}-\frac{1}{2}(\mathbf{d}+\mathbf{c})) = (\mathbf{d}-\mathbf{c})^\top(\mathbf{u}-\mathbf{d})+\frac{1}{2}\|\mathbf{d}-\mathbf{c}\|_2^2$
- $(\mathbf{d}-\mathbf{c})^\top(\mathbf{u}-\mathbf{d}) < 0$
- Заметим, что

$$\frac{d}{dt}\|\mathbf{d}-\mathbf{c}+t(\mathbf{u}-\mathbf{d})\|_2^2\Big|_{t=0} = 2(\mathbf{d}-\mathbf{c})^\top(\mathbf{u}-\mathbf{d}) < 0$$

  а значит для $t \in (0,1]$

$$\|\mathbf{d}-\mathbf{c}+t(\mathbf{u}-\mathbf{d})\|_2 \leq \|\mathbf{d}-\mathbf{c}\|_2.$$

- Точка $\mathbf{d}+t(\mathbf{u}-\mathbf{d}) \in B$ ближе к $\mathbf{c}$, чем $\mathbf{d}$, противоречие.

Q: верно ли обратное утверждение?

Лемма Фаркаша (Farkas' lemma)

Теорема

Два выпуклых множества, одно из которых открыто, не пересекаются тогда и только когда, когда они отделимы.

Лемма Фаркаша (Farkas' lemma)

Теорема

Два выпуклых множества, одно из которых открыто, не пересекаются тогда и только когда, когда они отделимы.

Доказательство

- Пусть два выпуклых множества A, B отделимы и B является открытым

Лемма Фаркаша (Farkas' lemma)

Теорема

Два выпуклых множества, одно из которых открыто, не пересекаются тогда и только когда, когда они отделимы.

Доказательство

- Пусть два выпуклых множества A, B отделимы и B является открытым
- Тогда $\mathbf{a}^\top \mathbf{y} + b < 0$ на всех $\mathbf{y} \in B$

Лемма Фаркаша (Farkas' lemma)

Теорема

Два выпуклых множества, одно из которых открыто, не пересекаются тогда и только когда, когда они отделимы.

Доказательство

- Пусть два выпуклых множества A, B отделимы и B является открытым
- Тогда $\mathbf{a}^\top \mathbf{y} + b < 0$ на всех $\mathbf{y} \in B$
- Если $\mathbf{u} \in B$ и $\mathbf{a}^\top \mathbf{u} + b = 0$, то в окрестности $\mathbf{u}$ нашлась бы точка $\mathbf{u}_+$, в которой $\mathbf{a}^\top \mathbf{u}_+ + b > 0$

Лемма Фаркаша (Farkas' lemma)

Теорема

Два выпуклых множества, одно из которых открыто, не пересекаются тогда и только когда, когда они отделимы.

Доказательство

- Пусть два выпуклых множества A, B отделимы и B является открытым
- Тогда $\mathbf{a}^\top \mathbf{y} + b < 0$ на всех $\mathbf{y} \in B$
- Если $\mathbf{u} \in B$ и $\mathbf{a}^\top \mathbf{u} + b = 0$, то в окрестности $\mathbf{u}$ нашлась бы точка $\mathbf{u}_+$, в которой $\mathbf{a}^\top \mathbf{u}_+ + b > 0$
- Тогда A и B не пересекаются, так как на элементах A выполнено $\geq$, а на элементах B выполнено $<$.

Лемма Фаркаша (Farkas' lemma)

Теорема

Два выпуклых множества, одно из которых открыто, не пересекаются тогда и только когда, когда они отделимы.

Доказательство

- Пусть два выпуклых множества A, B отделимы и B является открытым
- Тогда $\mathbf{a}^\top \mathbf{y} + b < 0$ на всех $\mathbf{y} \in B$
- Если $\mathbf{u} \in B$ и $\mathbf{a}^\top \mathbf{u} + b = 0$, то в окрестности $\mathbf{u}$ нашлась бы точка $\mathbf{u}_+$, в которой $\mathbf{a}^\top \mathbf{u}_+ + b > 0$
- Тогда A и B не пересекаются, так как на элементах A выполнено $\geq$, а на элементах B выполнено $<$.

Лемма Фаркаша (Farkas' lemma)

Теорема

Два выпуклых множества, одно из которых открыто, не пересекаются тогда и только когда, когда они отделимы.

Доказательство

- Пусть два выпуклых множества A, B отделимы и B является открытым
- Тогда $\mathbf{a}^\top \mathbf{y} + b < 0$ на всех $\mathbf{y} \in B$
- Если $\mathbf{u} \in B$ и $\mathbf{a}^\top \mathbf{u} + b = 0$, то в окрестности $\mathbf{u}$ нашлась бы точка $\mathbf{u}_+$, в которой $\mathbf{a}^\top \mathbf{u}_+ + b > 0$
- Тогда A и B не пересекаются, так как на элементах A выполнено $\geq$, а на элементах B выполнено $<$.

Лемма Фаркаша

Выполнено одно и только одно из следующих условий

- множество $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq 0\}$ непусто
- существует вектор $\mathbf{p}$ такой что $\mathbf{p}^\top \mathbf{A} \geq 0$ и $\mathbf{p}^\top \mathbf{b} < 0$

Выпуклая функция (convex function)

Определение

Функция $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *называется выпуклой (строго выпуклой), если* X *— выпуклое множество и для* $\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X$ *и* $\alpha \in [0,1]$ $(\alpha \in (0,1))$ *выполнено:*

$$f(\alpha \mathbf{x}_1 + (1-\alpha)\mathbf{x}_2) \leq \ (<) \ \alpha f(\mathbf{x}_1) + (1-\alpha) f(\mathbf{x}_2)$$

Выпуклая функция (convex function)

Определение

Функция $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *называется выпуклой (строго выпуклой), если* X *— выпуклое множество и для* $\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X$ *и* $\alpha \in [0, 1]$ $(\alpha \in (0, 1))$ *выполнено:*

$$f(\alpha \mathbf{x}_1 + (1 - \alpha)\mathbf{x}_2) \leq \ (<) \ \alpha f(\mathbf{x}_1) + (1 - \alpha) f(\mathbf{x}_2)$$

Определение

Функция f *вогнута (concave), если функция* $-f$ *выпукла.*

Выпуклая функция (convex function)

Определение

Функция $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется выпуклой (строго выпуклой), если X — выпуклое множество и для $\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X$ и $\alpha \in [0, 1]$ ($\alpha \in (0, 1)$) выполнено:

$$f(\alpha \mathbf{x}_1 + (1-\alpha)\mathbf{x}_2) \leq \ (<) \ \alpha f(\mathbf{x}_1) + (1-\alpha) f(\mathbf{x}_2)$$

Определение

Функция f вогнута (concave), если функция $-f$ выпукла.

Примеры выпуклых функций

- x^p для $x \geq 0$ и $p \geq 1$
- $x \log x$, где $x > 0$
- $\max\{x_1, \ldots, x_n\}$
- $\|\mathbf{x}\|$
- $\log \left(\sum_{i=1}^{n} e^{x_i} \right)$
- $-\log \det \mathbf{X}$ для $\mathbf{X} \in \mathbf{S}^n_{++}$

Надграфик и выпуклость

Определение

Множество $\operatorname{epi} f = \{(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t \geq f(\mathbf{x})\}$ *называется надграфиком (эпиграфом) функции* f.

Надграфик и выпуклость

Определение

Множество $\mathrm{epi}\, f = \{(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t \geq f(\mathbf{x})\}$ *называется надграфиком (эпиграфом) функции* f*.*

Теорема

Функция f *выпукла* $\Leftrightarrow$ $\mathrm{epi}\, f$ *выпуклое множество.*

Надграфик и выпуклость

Определение

Множество $\operatorname{epi} f = \{(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t \geq f(\mathbf{x})\}$ *называется надграфиком (эпиграфом) функции* f.

Теорема

Функция f *выпукла* $\Leftrightarrow$ $\operatorname{epi} f$ *выпуклое множество.*

Доказательство

1. Пусть f выпуклая функция

Надграфик и выпуклость

Определение

Множество $\operatorname{epi} f = \{(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t \geq f(\mathbf{x})\}$ *называется надграфиком (эпиграфом) функции* f*.*

Теорема

Функция f *выпукла* $\Leftrightarrow$ $\operatorname{epi} f$ *выпуклое множество.*

Доказательство

1. Пусть f выпуклая функция
   - Рассмотрим две точки из эпиграфа $(\mathbf{x}_1, t_1)$ и $(\mathbf{x}_2, t_2)$, где $t_1 \geq f(\mathbf{x}_1)$ и $t_2 \geq f(\mathbf{x}_2)$

Надграфик и выпуклость

Определение

Множество $\mathrm{epi}\, f = \{(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t \geq f(\mathbf{x})\}$ *называется надграфиком (эпиграфом) функции* f*.*

Теорема

Функция f *выпукла* $\Leftrightarrow$ $\mathrm{epi}\, f$ *выпуклое множество.*

Доказательство

1. Пусть f выпуклая функция
   - Рассмотрим две точки из эпиграфа $(\mathbf{x}_1, t_1)$ и $(\mathbf{x}_2, t_2)$, где $t_1 \geq f(\mathbf{x}_1)$ и $t_2 \geq f(\mathbf{x}_2)$
   - Проверим принадлежность эпиграфу точки $(\alpha \mathbf{x}_1 + (1-\alpha)\mathbf{x}_2, \alpha t_1 + (1-\alpha) t_2)$

Надграфик и выпуклость

Определение

Множество $\mathrm{epi}\, f = \{(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t \geq f(\mathbf{x})\}$ *называется надграфиком (эпиграфом) функции* f*.*

Теорема

Функция f *выпукла* $\Leftrightarrow$ $\mathrm{epi}\, f$ *выпуклое множество.*

Доказательство

1. Пусть f выпуклая функция
   - Рассмотрим две точки из эпиграфа $(\mathbf{x}_1, t_1)$ и $(\mathbf{x}_2, t_2)$, где $t_1 \geq f(\mathbf{x}_1)$ и $t_2 \geq f(\mathbf{x}_2)$
   - Проверим принадлежность эпиграфу точки $(\alpha \mathbf{x}_1 + (1-\alpha)\mathbf{x}_2, \alpha t_1 + (1-\alpha) t_2)$
   - В силу выпуклости функции $\alpha t_1 + (1-\alpha) t_2 \geq \alpha f(\mathbf{x}_1) + (1-\alpha) f(\mathbf{x}_2) \geq f(\alpha \mathbf{x}_1 + (1-\alpha)\mathbf{x}_2)$.

Надграфик и выпуклость

Определение

Множество $\mathrm{epi}\, f = \{(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t \geq f(\mathbf{x})\}$ *называется надграфиком (эпиграфом) функции* f*.*

Теорема

Функция f *выпукла* $\Leftrightarrow$ $\mathrm{epi}\, f$ *выпуклое множество.*

Доказательство

1. Пусть f выпуклая функция
   - Рассмотрим две точки из эпиграфа $(\mathbf{x}_1, t_1)$ и $(\mathbf{x}_2, t_2)$, где $t_1 \geq f(\mathbf{x}_1)$ и $t_2 \geq f(\mathbf{x}_2)$
   - Проверим принадлежность эпиграфу точки $(\alpha\mathbf{x}_1 + (1-\alpha)\mathbf{x}_2, \alpha t_1 + (1-\alpha)t_2)$
   - В силу выпуклости функции $\alpha t_1 + (1-\alpha)t_2 \geq \alpha f(\mathbf{x}_1) + (1-\alpha) f(\mathbf{x}_2) \geq f(\alpha\mathbf{x}_1 + (1-\alpha)\mathbf{x}_2)$.
2. Пусть надграфик выпуклое множество

Надграфик и выпуклость

Определение

Множество $\operatorname{epi} f = \{(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t \geq f(\mathbf{x})\}$ *называется надграфиком (эпиграфом) функции* f*.*

Теорема

Функция f *выпукла* $\Leftrightarrow$ $\operatorname{epi} f$ *выпуклое множество.*

Доказательство

1. Пусть f выпуклая функция
   - Рассмотрим две точки из эпиграфа $(\mathbf{x}_1, t_1)$ и $(\mathbf{x}_2, t_2)$, где $t_1 \geq f(\mathbf{x}_1)$ и $t_2 \geq f(\mathbf{x}_2)$
   - Проверим принадлежность эпиграфу точки $(\alpha\mathbf{x}_1 + (1-\alpha)\mathbf{x}_2, \alpha t_1 + (1-\alpha)t_2)$
   - В силу выпуклости функции $\alpha t_1 + (1-\alpha)t_2 \geq \alpha f(\mathbf{x}_1) + (1-\alpha)f(\mathbf{x}_2) \geq f(\alpha\mathbf{x}_1 + (1-\alpha)\mathbf{x}_2)$.
2. Пусть надграфик выпуклое множество
   - $(\mathbf{x}_1, f(\mathbf{x}_1))$ и $(\mathbf{x}_2, f(x_2)) \in \operatorname{epi} f$, то $(\alpha\mathbf{x}_1 + (1-\alpha)\mathbf{x}_2, \alpha f(\mathbf{x}_1) + (1-\alpha)f(\mathbf{x}_2)) \in \operatorname{epi} f$

Надграфик и выпуклость

Определение

Множество $\mathrm{epi}\, f = \{(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t \geq f(\mathbf{x})\}$ *называется надграфиком (эпиграфом) функции* f*.*

Теорема

Функция f *выпукла* $\Leftrightarrow$ $\mathrm{epi}\, f$ *выпуклое множество.*

Доказательство

1. Пусть f выпуклая функция
   - Рассмотрим две точки из эпиграфа $(\mathbf{x}_1, t_1)$ и $(\mathbf{x}_2, t_2)$, где $t_1 \geq f(\mathbf{x}_1)$ и $t_2 \geq f(\mathbf{x}_2)$
   - Проверим принадлежность эпиграфу точки $(\alpha\mathbf{x}_1 + (1-\alpha)\mathbf{x}_2, \alpha t_1 + (1-\alpha)t_2)$
   - В силу выпуклости функции $\alpha t_1 + (1-\alpha)t_2 \geq \alpha f(\mathbf{x}_1) + (1-\alpha)f(\mathbf{x}_2) \geq f(\alpha\mathbf{x}_1 + (1-\alpha)\mathbf{x}_2)$.
2. Пусть надграфик выпуклое множество
   - $(\mathbf{x}_1, f(\mathbf{x}_1))$ и $(\mathbf{x}_2, f(x_2)) \in \mathrm{epi}\, f$, то $(\alpha\mathbf{x}_1 + (1-\alpha)\mathbf{x}_2, \alpha f(\mathbf{x}_1) + (1-\alpha)f(\mathbf{x}_2)) \in \mathrm{epi}\, f$
   - Из определения надграфика следует выпуклость f

Сильно выпуклая функция (strongly convex function)

Определение

Функция $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *называется сильно выпуклой с константой* $m > 0$, *если* X *— выпуклое множество и для* $\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X$ *и* $\alpha \in [0, 1]$ *выполнено:*

$$f(\alpha \mathbf{x}_1 + (1-\alpha)\mathbf{x}_2) \leq \alpha f(\mathbf{x}_1) + (1-\alpha) f(\mathbf{x}_2) - \frac{m}{2}\alpha(1-\alpha)\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|_2^2$$

Сильно выпуклая функция (strongly convex function)

Определение

Функция $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *называется сильно выпуклой с константой* $m > 0$, *если* X *— выпуклое множество и для* $\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X$ *и* $\alpha \in [0, 1]$ *выполнено:*
$$f(\alpha \mathbf{x}_1 + (1-\alpha)\mathbf{x}_2) \le \alpha f(\mathbf{x}_1) + (1-\alpha) f(\mathbf{x}_2) - \frac{m}{2}\alpha(1-\alpha)\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|_2^2$$

- Выпуклость $\supset$ строгая выпуклость $\supset$ сильная выпуклость

Сильно выпуклая функция (strongly convex function)

Определение

Функция $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *называется сильно выпуклой с константой* $m > 0$, *если* X *— выпуклое множество и для* $\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X$ *и* $\alpha \in [0, 1]$ *выполнено:*

$$f(\alpha \mathbf{x}_1 + (1-\alpha)\mathbf{x}_2) \leq \alpha f(\mathbf{x}_1) + (1-\alpha) f(\mathbf{x}_2) - \frac{m}{2}\alpha(1-\alpha)\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|_2^2$$

- Выпуклость $\supset$ строгая выпуклость $\supset$ сильная выпуклость
- Для сильно выпуклых функций многие утверждения о методах оказываются более сильными, чем просто для выпуклых функций: пример о сходимости градиентного спуска.

Дифференциальные критерии

Будем считать выпуклую функцию сильно выпуклой с $m = 0$.

Дифференциальные критерии

Будем считать выпуклую функцию сильно выпуклой с $m = 0$.

Теорема

Пусть функция $f(\mathbf{x})$ дифференцируема и определена на выпуклом множестве $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Тогда $f(\mathbf{x})$ сильно выпукла с константой $m \geq 0$ в том и только том случае, если

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^*) \geq \left\langle f'(\mathbf{x}^*), \mathbf{x} - \mathbf{x}^* \right\rangle + \frac{m}{2} \left\| \mathbf{x} - \mathbf{x}^* \right\|_2^2, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{x}^* \in X.$$

Дифференциальные критерии

Будем считать выпуклую функцию сильно выпуклой с $m = 0$.

Теорема

Пусть функция $f(\mathbf{x})$ дифференцируема и определена на выпуклом множестве $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Тогда $f(\mathbf{x})$ сильно выпукла с константой $m \geq 0$ в том и только том случае, если

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^*) \geq \left\langle f'(\mathbf{x}^*), \mathbf{x} - \mathbf{x}^* \right\rangle + \frac{m}{2} \left\| \mathbf{x} - \mathbf{x}^* \right\|_2^2, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{x}^* \in X.$$

Доказательство: пусть f выпукла

- По определению: $f(\alpha \mathbf{x}_1 + (1 - \alpha)\mathbf{x}_2) \leq \alpha f(\mathbf{x}_1) + (1 - \alpha) f(\mathbf{x}_2)$

Дифференциальные критерии

Будем считать выпуклую функцию сильно выпуклой с $m = 0$.

Теорема

Пусть функция $f(\mathbf{x})$ дифференцируема и определена на выпуклом множестве $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Тогда $f(\mathbf{x})$ сильно выпукла с константой $m \geq 0$ в том и только том случае, если

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^*) \geq \langle f'(\mathbf{x}^*), \mathbf{x} - \mathbf{x}^* \rangle + \frac{m}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|_2^2, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{x}^* \in X.$$

Доказательство: пусть f выпукла

- По определению:
  $f(\alpha\mathbf{x}_1 + (1-\alpha)\mathbf{x}_2) \leq \alpha f(\mathbf{x}_1) + (1-\alpha) f(\mathbf{x}_2)$
- Перепишем в виде
  $f(\mathbf{x}_2 + \alpha(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)) \leq f(\mathbf{x}_2) + \alpha(f(\mathbf{x}_1) - f(\mathbf{x}_2))$ или

$$\frac{f(\mathbf{x}_2 + \alpha(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)) - f(\mathbf{x}_2)}{\alpha} \leq f(\mathbf{x}_1) - f(\mathbf{x}_2)$$

Дифференциальные критерии

Будем считать выпуклую функцию сильно выпуклой с $m = 0$.

Теорема

Пусть функция $f(\mathbf{x})$ дифференцируема и определена на выпуклом множестве $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Тогда $f(\mathbf{x})$ сильно выпукла с константой $m \geq 0$ в том и только том случае, если

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^*) \geq \left\langle f'(\mathbf{x}^*), \mathbf{x} - \mathbf{x}^* \right\rangle + \frac{m}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|_2^2, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{x}^* \in X.$$

Доказательство: пусть f выпукла

- По определению: $f(\alpha \mathbf{x}_1 + (1-\alpha)\mathbf{x}_2) \leq \alpha f(\mathbf{x}_1) + (1-\alpha) f(\mathbf{x}_2)$
- Перепишем в виде $f(\mathbf{x}_2 + \alpha(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)) \leq f(\mathbf{x}_2) + \alpha(f(\mathbf{x}_1) - f(\mathbf{x}_2))$ или
$$\frac{f(\mathbf{x}_2 + \alpha(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)) - f(\mathbf{x}_2)}{\alpha} \leq f(\mathbf{x}_1) - f(\mathbf{x}_2)$$
- При $\alpha \to 0$ получим
$$\langle f'(\mathbf{x}_2), \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \rangle \leq f(\mathbf{x}_1) - f(\mathbf{x}_2)$$

Доказательство: пусть выполнено неравенство

- Рассмотрим $\mathbf{z} = \alpha \mathbf{x}_1 + (1 - \alpha)\mathbf{x}_2$

Доказательство: пусть выполнено неравенство

- Рассмотрим $\mathbf{z} = \alpha \mathbf{x}_1 + (1-\alpha)\mathbf{x}_2$
- Запишем два неравенства для $\mathbf{z}, \mathbf{x}_1$ и $\mathbf{z}, \mathbf{x}_2$

$$
\begin{aligned}
f(\mathbf{x}_1) &\geq f(\mathbf{z}) + \langle f'(\mathbf{z}), \mathbf{z} - \mathbf{x}_1 \rangle \mid \cdot\, \alpha \\
f(\mathbf{x}_2) &\geq f(\mathbf{z}) + \langle f'(\mathbf{z}), \mathbf{z} - \mathbf{x}_2 \rangle \mid \cdot\, (1-\alpha)
\end{aligned}
$$

Доказательство: пусть выполнено неравенство

- Рассмотрим $\mathbf{z} = \alpha \mathbf{x}_1 + (1-\alpha)\mathbf{x}_2$
- Запишем два неравенства для $\mathbf{z}, \mathbf{x}_1$ и $\mathbf{z}, \mathbf{x}_2$

$$f(\mathbf{x}_1) \geq f(\mathbf{z}) + \langle f'(\mathbf{z}), \mathbf{z} - \mathbf{x}_1 \rangle \mid \cdot\, \alpha$$
$$f(\mathbf{x}_2) \geq f(\mathbf{z}) + \langle f'(\mathbf{z}), \mathbf{z} - \mathbf{x}_2 \rangle \mid \cdot\, (1-\alpha)$$

- Сложим эти равенства

$$f(\mathbf{z}) = f(\alpha \mathbf{x}_1 + (1-\alpha)\mathbf{x}_2) \leq \alpha f(\mathbf{x}_1) + (1-\alpha) f(\mathbf{x}_2)$$

Доказательство: пусть выполнено неравенство

- Рассмотрим $\mathbf{z} = \alpha \mathbf{x}_1 + (1-\alpha)\mathbf{x}_2$
- Запишем два неравенства для $\mathbf{z}, \mathbf{x}_1$ и $\mathbf{z}, \mathbf{x}_2$

$$
\begin{aligned}
f(\mathbf{x}_1) &\geq f(\mathbf{z}) + \langle f'(\mathbf{z}), \mathbf{z} - \mathbf{x}_1 \rangle \mid \cdot\, \alpha \\
f(\mathbf{x}_2) &\geq f(\mathbf{z}) + \langle f'(\mathbf{z}), \mathbf{z} - \mathbf{x}_2 \rangle \mid \cdot\, (1-\alpha)
\end{aligned}
$$

- Сложим эти равенства

$$
f(\mathbf{z}) = f(\alpha \mathbf{x}_1 + (1-\alpha)\mathbf{x}_2) \leq \alpha f(\mathbf{x}_1) + (1-\alpha) f(\mathbf{x}_2)
$$

Доказательство: пусть выполнено неравенство

- Рассмотрим $\mathbf{z} = \alpha \mathbf{x}_1 + (1-\alpha)\mathbf{x}_2$
- Запишем два неравенства для $\mathbf{z}, \mathbf{x}_1$ и $\mathbf{z}, \mathbf{x}_2$

$$
\begin{aligned}
f(\mathbf{x}_1) \geq f(\mathbf{z}) + \langle f'(\mathbf{z}), \mathbf{z} - \mathbf{x}_1 \rangle \mid \cdot\, \alpha \\
f(\mathbf{x}_2) \geq f(\mathbf{z}) + \langle f'(\mathbf{z}), \mathbf{z} - \mathbf{x}_2 \rangle \mid \cdot\, (1-\alpha)
\end{aligned}
$$

- Сложим эти равенства

$$
f(\mathbf{z}) = f(\alpha \mathbf{x}_1 + (1-\alpha)\mathbf{x}_2) \leq \alpha f(\mathbf{x}_1) + (1-\alpha) f(\mathbf{x}_2)
$$

Сильно выпуклый случай

Для случая сильной выпуклости необходимо применить аналогичные выкладки к функции $f(\mathbf{x}) - \frac{m}{2}\|\mathbf{x}\|_2^2$.

Доказательство: пусть выполнено неравенство

- Рассмотрим $\mathbf{z} = \alpha \mathbf{x}_1 + (1-\alpha)\mathbf{x}_2$
- Запишем два неравенства для $\mathbf{z}, \mathbf{x}_1$ и $\mathbf{z}, \mathbf{x}_2$

$$
\begin{aligned}
f(\mathbf{x}_1) &\geq f(\mathbf{z}) + \langle f'(\mathbf{z}), \mathbf{z} - \mathbf{x}_1 \rangle \mid \cdot \alpha \\
f(\mathbf{x}_2) &\geq f(\mathbf{z}) + \langle f'(\mathbf{z}), \mathbf{z} - \mathbf{x}_2 \rangle \mid \cdot (1-\alpha)
\end{aligned}
$$

- Сложим эти равенства

$$
f(\mathbf{z}) = f(\alpha \mathbf{x}_1 + (1-\alpha)\mathbf{x}_2) \leq \alpha f(\mathbf{x}_1) + (1-\alpha) f(\mathbf{x}_2)
$$

Сильно выпуклый случай

Для случая сильной выпуклости необходимо применить аналогичные выкладки к функции $f(\mathbf{x}) - \frac{m}{2}\|\mathbf{x}\|_2^2$.

Упражнение

Покажите, что f сильно выпукла $\Leftrightarrow f(\mathbf{x}) - \frac{m}{2}\|\mathbf{x}\|_2^2$ выпукла.

Теорема

Дважды непрерывно дифференцируемая функция f выпукла
$\Leftrightarrow f''(\mathbf{x}) \succeq m\mathbf{I}$

Теорема

Дважды непрерывно дифференцируемая функция f выпукла $\Leftrightarrow f''(\mathbf{x}) \succeq m\mathbf{I}$

Доказательство

- Разложение в ряд Тейлора до второго порядка
$$f(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + \langle f'(\mathbf{x}), \mathbf{y} - \mathbf{x}\rangle + \frac{1}{2}\langle \mathbf{y} - \mathbf{x}, f''(\mathbf{x}_\alpha)(\mathbf{y} - \mathbf{x})\rangle$$

Теорема

Дважды непрерывно дифференцируемая функция f выпукла $\Leftrightarrow f''(\mathbf{x}) \succeq m\mathbf{I}$

Доказательство

- Разложение в ряд Тейлора до второго порядка
$$f(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + \langle f'(\mathbf{x}), \mathbf{y} - \mathbf{x}\rangle + \frac{1}{2}\langle \mathbf{y} - \mathbf{x}, f''(\mathbf{x}_\alpha)(\mathbf{y} - \mathbf{x})\rangle$$
- Если $f''(\mathbf{x}) \succeq m\mathbf{I}$, то $\frac{1}{2}\langle \mathbf{y} - \mathbf{x}, f''(\mathbf{x}_\alpha)(\mathbf{y} - \mathbf{x})\rangle \geq \frac{m}{2}\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|_2^2$, и по критерию первого порядка f выпукла

Теорема

Дважды непрерывно дифференцируемая функция f выпукла $\Leftrightarrow f''(\mathbf{x}) \succeq m\mathbf{I}$

Доказательство

- Разложение в ряд Тейлора до второго порядка
$$f(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + \langle f'(\mathbf{x}), \mathbf{y} - \mathbf{x}\rangle + \frac{1}{2}\langle \mathbf{y} - \mathbf{x}, f''(\mathbf{x}_\alpha)(\mathbf{y} - \mathbf{x})\rangle$$
- Если $f''(\mathbf{x}) \succeq m\mathbf{I}$, то $\frac{1}{2}\langle \mathbf{y} - \mathbf{x}, f''(\mathbf{x}_\alpha)(\mathbf{y} - \mathbf{x})\rangle \geq \frac{m}{2}\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|_2^2$, и по критерию первого порядка f выпукла
- Если найдётся точка $\mathbf{z}$ такая, что $f''(\mathbf{z}) \not\succeq m\mathbf{I}$, тогда найдётся направление $\mathbf{d}$ такое, что $\mathbf{d}^\top f''(\mathbf{z})\mathbf{d} \leq m$

Теорема

Дважды непрерывно дифференцируемая функция f выпукла $\Leftrightarrow f''(\mathbf{x}) \succeq m\mathbf{I}$

Доказательство

- Разложение в ряд Тейлора до второго порядка
$$f(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + \langle f'(\mathbf{x}), \mathbf{y} - \mathbf{x} \rangle + \frac{1}{2}\langle \mathbf{y} - \mathbf{x}, f''(\mathbf{x}_\alpha)(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \rangle$$
- Если $f''(\mathbf{x}) \succeq m\mathbf{I}$, то $\frac{1}{2}\langle \mathbf{y} - \mathbf{x}, f''(\mathbf{x}_\alpha)(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \rangle \geq \frac{m}{2}\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|_2^2$, и по критерию первого порядка f выпукла
- Если найдётся точка $\mathbf{z}$ такая, что $f''(\mathbf{z}) \not\succeq m\mathbf{I}$, тогда найдётся направление $\mathbf{d}$ такое, что $\mathbf{d}^\top f''(\mathbf{z})\mathbf{d} \leq m$
- В таком случае в силу критерия первого порядка f невыпукла — противоречие

Теорема

Дважды непрерывно дифференцируемая функция f выпукла $\Leftrightarrow f''(\mathbf{x}) \succeq m\mathbf{I}$

Доказательство

- Разложение в ряд Тейлора до второго порядка
$$f(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + \langle f'(\mathbf{x}), \mathbf{y} - \mathbf{x}\rangle + \frac{1}{2}\langle \mathbf{y} - \mathbf{x}, f''(\mathbf{x}_\alpha)(\mathbf{y} - \mathbf{x})\rangle$$
- Если $f''(\mathbf{x}) \succeq m\mathbf{I}$, то $\frac{1}{2}\langle \mathbf{y} - \mathbf{x}, f''(\mathbf{x}_\alpha)(\mathbf{y} - \mathbf{x})\rangle \geq \frac{m}{2}\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|_2^2$, и по критерию первого порядка f выпукла
- Если найдётся точка $\mathbf{z}$ такая, что $f''(\mathbf{z}) \not\succeq m\mathbf{I}$, тогда найдётся направление $\mathbf{d}$ такое, что $\mathbf{d}^\top f''(\mathbf{z})\mathbf{d} \leq m$
- В таком случае в силу критерия первого порядка f невыпукла — противоречие

Теорема

Дважды непрерывно дифференцируемая функция f выпукла $\Leftrightarrow f''(\mathbf{x}) \succeq m\mathbf{I}$

Доказательство

- Разложение в ряд Тейлора до второго порядка
$$f(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + \langle f'(\mathbf{x}), \mathbf{y} - \mathbf{x} \rangle + \frac{1}{2}\langle \mathbf{y} - \mathbf{x}, f''(\mathbf{x}_\alpha)(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \rangle$$
- Если $f''(\mathbf{x}) \succeq m\mathbf{I}$, то $\frac{1}{2}\langle \mathbf{y} - \mathbf{x}, f''(\mathbf{x}_\alpha)(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \rangle \geq \frac{m}{2}\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|_2^2$, и по критерию первого порядка f выпукла
- Если найдётся точка $\mathbf{z}$ такая, что $f''(\mathbf{z}) \not\succeq m\mathbf{I}$, тогда найдётся направление $\mathbf{d}$ такое, что $\mathbf{d}^\top f''(\mathbf{z})\mathbf{d} \leq m$
- В таком случае в силу критерия первого порядка f невыпукла — противоречие

Напоминание

Для проверки определённости матрицы нужно использовать определение или критерий Сильвестра

Выпуклые композиции функций

- Если $f(\mathbf{x})$ — выпукла, то $g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b})$ также выпукла

Выпуклые композиции функций

- Если $f(\mathbf{x})$ — выпукла, то $g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b})$ также выпукла
- Если $f(\mathbf{x})$ — выпукла, то $g(t) = f(\mathbf{x} + t\mathbf{y})$ также выпукла

Выпуклые композиции функций

- Если $f(\mathbf{x})$ — выпукла, то $g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b})$ также выпукла
- Если $f(\mathbf{x})$ — выпукла, то $g(t) = f(\mathbf{x} + t\mathbf{y})$ также выпукла
- Если f_i — выпуклы, то $\max\limits_{i=1,\dots,m} f_i$ также выпукла

Выпуклые композиции функций

- Если $f(\mathbf{x})$ — выпукла, то $g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b})$ также выпукла
- Если $f(\mathbf{x})$ — выпукла, то $g(t) = f(\mathbf{x} + t\mathbf{y})$ также выпукла
- Если f_i — выпуклы, то $\max\limits_{i=1,\ldots,m} f_i$ также выпукла
- Сумма выпуклых функций с неотрицательными коэффициентами — выпуклая функция

Выпуклые композиции функций

- Если $f(\mathbf{x})$ — выпукла, то $g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b})$ также выпукла
- Если $f(\mathbf{x})$ — выпукла, то $g(t) = f(\mathbf{x} + t\mathbf{y})$ также выпукла
- Если f_i — выпуклы, то $\max\limits_{i=1,\ldots,m} f_i$ также выпукла
- Сумма выпуклых функций с неотрицательными коэффициентами — выпуклая функция
- Скалярная композиция $h(f(\mathbf{x}))$

Локальный минимум является глобальным минимумом

Теорема

Если f выпуклая функция и $\mathbf{x}^*$ локальный минимум, то $\mathbf{x}^*$ — глобальный минимум.

Локальный минимум является глобальным минимумом

Теорема

Если f выпуклая функция и $\mathbf{x}^*$ локальный минимум, то $\mathbf{x}^*$ — глобальный минимум.

Доказательство от противного

- Пусть $\mathbf{y}^* \neq \mathbf{x}^*$ — глобальный минимум: $f(\mathbf{y}^*) < f(\mathbf{x}^*)$

Локальный минимум является глобальным минимумом

Теорема

Если f выпуклая функция и $\mathbf{x}^*$ локальный минимум, то $\mathbf{x}^*$ — глобальный минимум.

Доказательство от противного

- Пусть $\mathbf{y}^* \neq \mathbf{x}^*$ — глобальный минимум: $f(\mathbf{y}^*) < f(\mathbf{x}^*)$
- По определению локального минимума: $f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{x})$, где $\|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}\|_2 \leq \delta$

Локальный минимум является глобальным минимумом

Теорема

Если f выпуклая функция и $\mathbf{x}^*$ локальный минимум, то $\mathbf{x}^*$ — глобальный минимум.

Доказательство от противного

- Пусть $\mathbf{y}^* \neq \mathbf{x}^*$ — глобальный минимум: $f(\mathbf{y}^*) < f(\mathbf{x}^*)$
- По определению локального минимума: $f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{x})$, где $\|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}\|_2 \leq \delta$
- Выберем достаточно малое $\alpha \in (0, 1)$ и рассмотрим точку $\mathbf{z} = (1-\alpha)\mathbf{x}^* + \alpha\mathbf{y}^*$ такую что $\|\mathbf{z} - \mathbf{x}^*\|_2 \leq \delta$

Локальный минимум является глобальным минимумом

Теорема

Если f выпуклая функция и $\mathbf{x}^*$ локальный минимум, то $\mathbf{x}^*$ — глобальный минимум.

Доказательство от противного

- Пусть $\mathbf{y}^* \neq \mathbf{x}^*$ — глобальный минимум: $f(\mathbf{y}^*) < f(\mathbf{x}^*)$
- По определению локального минимума: $f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{x})$, где $\|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}\|_2 \leq \delta$
- Выберем достаточно малое $\alpha \in (0, 1)$ и рассмотрим точку $\mathbf{z} = (1-\alpha)\mathbf{x}^* + \alpha\mathbf{y}^*$ такую что $\|\mathbf{z} - \mathbf{x}^*\|_2 \leq \delta$
- $f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{z}) \leq \alpha f(\mathbf{y}^*) + (1-\alpha) f(\mathbf{x}^*) < f(\mathbf{x}^*)$

Пример сложной выпуклой задачи

Определение

Множество $\mathcal{C}^n = \{\mathbf{A} \in \mathbf{S}^n \mid \mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} \geq 0,\ \mathbf{x} \geq 0\}$ *называется copositive cone.*

Пример сложной выпуклой задачи

Определение

Множество $\mathcal{C}^n = \{\mathbf{A} \in \mathbf{S}^n \mid \mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} \geq 0,\ \mathbf{x} \geq 0\}$ *называется copositive cone.*

- $\mathcal{C}^n$ выпукло

Пример сложной выпуклой задачи

Определение

Множество $\mathcal{C}^n = \{\mathbf{A} \in \mathbf{S}^n \mid \mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} \geq 0,\ \mathbf{x} \geq 0\}$ *называется copositive cone.*

- $\mathcal{C}^n$ выпукло
- $\mathbf{S}^n_+ \subset \mathcal{C}^n$

Пример сложной выпуклой задачи

Определение

Множество $\mathcal{C}^n = \{\mathbf{A} \in \mathbf{S}^n \mid \mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} \geq 0, \; \mathbf{x} \geq 0\}$ *называется copositive cone.*

- $\mathcal{C}^n$ выпукло
- $\mathbf{S}^n_+ \subset \mathcal{C}^n$
- Задача проверки $\mathbf{X} \notin \mathcal{C}^n$ является co-NP полной!

Пример сложной выпуклой задачи

Определение

Множество $\mathcal{C}^n = \{\mathbf{A} \in \mathbf{S}^n \mid \mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} \geq 0, \; \mathbf{x} \geq 0\}$ *называется copositive cone.*

- $\mathcal{C}^n$ выпукло
- $\mathbf{S}^n_+ \subset \mathcal{C}^n$
- Задача проверки $\mathbf{X} \notin \mathcal{C}^n$ является co-NP полной!
- Задача конической оптимизации с конусом $\mathcal{C}^n$ является NP-трудной

Пример сложной выпуклой задачи

Определение

Множество $\mathcal{C}^n = \{\mathbf{A} \in \mathbf{S}^n \mid \mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} \geq 0,\ \mathbf{x} \geq 0\}$ *называется copositive cone.*

- $\mathcal{C}^n$ выпукло
- $\mathbf{S}^n_+ \subset \mathcal{C}^n$
- Задача проверки $\mathbf{X} \notin \mathcal{C}^n$ является co-NP полной!
- Задача конической оптимизации с конусом $\mathcal{C}^n$ является NP-трудной

Пример сложной выпуклой задачи

Определение

Множество $\mathcal{C}^n = \{\mathbf{A} \in \mathbf{S}^n \mid \mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} \geq 0, \ \mathbf{x} \geq 0\}$ *называется copositive cone.*

- $\mathcal{C}^n$ выпукло
- $\mathbf{S}^n_+ \subset \mathcal{C}^n$
- Задача проверки $\mathbf{X} \notin \mathcal{C}^n$ является co-NP полной!
- Задача конической оптимизации с конусом $\mathcal{C}^n$ является NP-трудной

Пример

Задача определения максимального независимого множества вершин графа сводится к задаче оптимизации на множестве $\mathcal{C}^n$. Подробности тут

Пример простой невыпуклой задачи

Дана матрица $\mathbf{Q} \in \mathbf{S}^n_{++}$.

$$
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \mathbf{x}^\top \mathbf{Q} \mathbf{x} \\
\text{s.t. } &\|\mathbf{x}\|_2 = 1
\end{aligned}
$$

Пример простой невыпуклой задачи

Дана матрица $\mathbf{Q} \in \mathbf{S}^n_{++}$.

$$
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \mathbf{x}^\top \mathbf{Q} \mathbf{x} \\
\text{s.t. } &\|\mathbf{x}\|_2 = 1
\end{aligned}
$$

- Допустимое множество невыпукло

Пример простой невыпуклой задачи

Дана матрица $\mathbf{Q} \in \mathbf{S}^n_{++}$.

$$
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \mathbf{x}^\top \mathbf{Q} \mathbf{x} \\
&\text{s.t. } \|\mathbf{x}\|_2 = 1
\end{aligned}
$$

- Допустимое множество невыпукло
- Целевая функция выпукла

Пример простой невыпуклой задачи

Дана матрица $\mathbf{Q} \in \mathbf{S}^n_{++}$.

$$
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \mathbf{x}^\top \mathbf{Q} \mathbf{x} \\
&\text{s.t. } \|\mathbf{x}\|_2 = 1
\end{aligned}
$$

- Допустимое множество невыпукло
- Целевая функция выпукла

Пример простой невыпуклой задачи

Дана матрица $\mathbf{Q} \in \mathbf{S}^n_{++}$.

$$
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \mathbf{x}^\top \mathbf{Q} \mathbf{x} \\
&\text{s.t. } \|\mathbf{x}\|_2 = 1
\end{aligned}
$$

- Допустимое множество невыпукло
- Целевая функция выпукла

Q: какая интерпретация у $\mathbf{x}^*$ и $f(\mathbf{x}^*)$?

Неравенство Йенсена

Теорема

Если функция f *выпукла, то* $f\left(\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha \mathbf{x}_i\right) \leq \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i f(\mathbf{x}_i)$*, где*

$\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i = 1,\ \alpha_i \geq 0.$

Неравенство Йенсена

Теорема

Если функция f выпукла, то $f\left(\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha \mathbf{x}_i\right) \le \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i f(\mathbf{x}_i)$, *где* $\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i = 1,\ \alpha_i \ge 0.$

Доказательство по индукции

- База $k = 2$ выполнена в силу определения

Неравенство Йенсена

Теорема

Если функция f выпукла, то $f\left(\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha \mathbf{x}_i\right) \leq \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i f(\mathbf{x}_i)$, *где* $\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i = 1,\ \alpha_i \geq 0.$

Доказательство по индукции

- База $k = 2$ выполнена в силу определения
- Пусть неравенство выполнено для $k = m - 1$: $f\left(\sum\limits_{i=1}^{m-1} \alpha \mathbf{x}_i\right) \leq \sum\limits_{i=1}^{m-1} \alpha_i f(\mathbf{x}_i)$ и $\sum\limits_{i=1}^{m-1} \alpha_i = 1$, $\alpha_i \geq 0$

Неравенство Йенсена

Теорема

Если функция f выпукла, то $f\left(\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha \mathbf{x}_i\right) \leq \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i f(\mathbf{x}_i)$, *где* $\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i = 1,\ \alpha_i \geq 0.$

Доказательство по индукции

- База $k = 2$ выполнена в силу определения
- Пусть неравенство выполнено для $k = m - 1$:
  $f\left(\sum\limits_{i=1}^{m-1} \alpha \mathbf{x}_i\right) \leq \sum\limits_{i=1}^{m-1} \alpha_i f(\mathbf{x}_i)$ и $\sum\limits_{i=1}^{m-1} \alpha_i = 1$, $\alpha_i \geq 0$
- Рассмотрим $k = m$: $f\left(\sum\limits_{i=1}^{m} \hat{\alpha}_i \mathbf{x}_i\right) = f\left(\sum\limits_{i=1}^{m-1} \hat{\alpha} \mathbf{x}_i + \hat{\alpha}_m \mathbf{x}_m\right) =$
  $f\left((1 - \hat{\alpha}_m)\sum\limits_{i=1}^{m-1} \frac{\hat{\alpha}_i}{1-\hat{\alpha}_m}\mathbf{x}_i + \hat{\alpha}_m \mathbf{x}_m\right) \leq$
  $(1 - \hat{\alpha}_m) f\left(\sum\limits_{i=1}^{m-1} \frac{\hat{\alpha}_i}{1-\hat{\alpha}_m}\mathbf{x}_i\right) + \hat{\alpha}_m f(\mathbf{x}_m) \leq \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i f(\mathbf{x}_i)$

Следствия и обобщения

- Запись неравенства Йенсена для функции $-\log x$

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_i \geq \sqrt[m]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_m}$$

Следствия и обобщения

- Запись неравенства Йенсена для функции $-\log x$

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_i \geq \sqrt[m]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_m}$$

- Неравенство Гёльдера

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{1/q}$$

Следствия и обобщения

- Запись неравенства Йенсена для функции $-\log x$

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_i \geq \sqrt[m]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_m}$$

- Неравенство Гёльдера

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{1/q}$$

- Обобщение на непрерывный случай даёт неравенство для выпуклой функции от матожидания

$$f(\mathbb{E}(\mathbf{x})) \leq \mathbb{E}(f(\mathbf{x}))$$

Главное

- Сопряжённые конусы и геометрическая интерпретация

Главное

- Сопряжённые конусы и геометрическая интерпретация
- Самосопряжённые конусы

Главное

- Сопряжённые конусы и геометрическая интерпретация
- Самосопряжённые конусы
- Отделимость выпуклых множеств

Главное

- Сопряжённые конусы и геометрическая интерпретация
- Самосопряжённые конусы
- Отделимость выпуклых множеств
- Выпуклые функции и их свойства

Главное

- Сопряжённые конусы и геометрическая интерпретация
- Самосопряжённые конусы
- Отделимость выпуклых множеств
- Выпуклые функции и их свойства
- Неравенство Йенсена