Методы оптимизации
Лекция 4: Условия оптимальности. Введение в теорию двойственности

Александр Катруца

Физтех-школа прикладной математики и информатики
Московский физико-технический институт

28 сентября 2020 г.

На прошлой лекции

- Постановки задач выпуклой оптимизации
- LP, SOCP, SDP
- Примеры приложений

Равносильные преобразования задач

Равносильные преобразования задач

Запись через надграфик

$$
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{x}} f_0(\mathbf{x}) \\
\text{s.t. } &\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\
&f_i(\mathbf{x}) \leq 0, \; i = 1, \dots, m
\end{aligned}
\quad \Longrightarrow \quad
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{x},\, t} t \\
\text{s.t. } &\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\
&f_i(\mathbf{x}) \leq 0, \; i = 1, \dots, m \\
&f_0(\mathbf{x}) \leq t
\end{aligned}
$$

Равносильные преобразования задач

Запись через надграфик

$$
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{x}} f_0(\mathbf{x}) \\
\text{s.t. } & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\
& f_i(\mathbf{x}) \leq 0, \; i = 1, \ldots, m
\end{aligned}
\quad \Longrightarrow \quad
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{x},\, t} t \\
\text{s.t. } & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\
& f_i(\mathbf{x}) \leq 0, \; i = 1, \ldots, m \\
& f_0(\mathbf{x}) \leq t
\end{aligned}
$$

Преобразования ограничений

- $\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \to \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{b}, \; \mathbf{y} \geq 0$
- $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \; \mathbf{x}_1 \geq 0, \; ; \mathbf{x}_2 \geq 0$
- Формирование блочных матриц

Равносильные преобразования задач

Запись через надграфик

$$\begin{aligned} &\min_{\mathbf{x}} f_0(\mathbf{x}) \\ \text{s.t. } &\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ &f_i(\mathbf{x}) \leq 0, \; i = 1, \ldots, m \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} &\min_{\mathbf{x},\, t} t \\ \text{s.t. } &\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ &f_i(\mathbf{x}) \leq 0, \; i = 1, \ldots, m \\ &f_0(\mathbf{x}) \leq t \end{aligned}$$

Преобразования ограничений

- $\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \to \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{b}, \; \mathbf{y} \geq 0$
- $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \; \mathbf{x}_1 \geq 0, \; ; \mathbf{x}_2 \geq 0$
- Формирование блочных матриц

Перенос ограничений в целевую функцию

$$\min_{\mathbf{x} \in X} f(\mathbf{x}) \Rightarrow \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f_0(\mathbf{x}) + \mathbb{I}_X(\mathbf{x}), \quad \mathbb{I}_X(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0, & \mathbf{x} \in X, \\ +\infty, & \mathbf{x} \notin X. \end{cases}$$

Условие оптимальности для задачи без ограничений

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \tag{1}$$

Теорема

Если $\mathbf{x}^*$ *решение задачи* (1), *то* $f'(\mathbf{x}^*) = 0$.

Условие оптимальности для задачи без ограничений

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \tag{1}$$

Теорема

Если $\mathbf{x}^*$ *решение задачи* (1)*, то* $f'(\mathbf{x}^*) = 0$.

Доказательство

Условие оптимальности для задачи без ограничений

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \tag{1}$$

Теорема

Если $\mathbf{x}^*$ *решение задачи* (1), *то* $f'(\mathbf{x}^*) = 0$.

Доказательство

- $f(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}^*) + \langle f'(\mathbf{x}^*), \mathbf{y} - \mathbf{x}^* \rangle + r(\mathbf{x}^*, \mathbf{y})$ и $\lim\limits_{\mathbf{y} \to \mathbf{x}^*} \frac{r(\mathbf{x}^*, \mathbf{y})}{\|\mathbf{x}^* - \mathbf{y}\|_2} = 0 \ (*)$

Условие оптимальности для задачи без ограничений

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \tag{1}$$

Теорема

Если $\mathbf{x}^*$ *решение задачи* (1)*, то* $f'(\mathbf{x}^*) = 0$*.*

Доказательство

- $f(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}^*) + \langle f'(\mathbf{x}^*), \mathbf{y} - \mathbf{x}^* \rangle + r(\mathbf{x}^*, \mathbf{y})$ и $\lim\limits_{\mathbf{y} \to \mathbf{x}^*} \frac{r(\mathbf{x}^*, \mathbf{y})}{\|\mathbf{x}^* - \mathbf{y}\|_2} = 0 \ (*)$
- Если $f'(\mathbf{x}^*) \neq 0$, тогда рассмотрим $\mathbf{y}(\tau) = \mathbf{x}^* - \tau f'(\mathbf{x}^*)$, $\tau > 0$

Условие оптимальности для задачи без ограничений

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \qquad (1)$$

Теорема

Если $\mathbf{x}^*$ *решение задачи* (1), *то* $f'(\mathbf{x}^*) = 0$.

Доказательство

- $f(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}^*) + \langle f'(\mathbf{x}^*), \mathbf{y} - \mathbf{x}^*\rangle + r(\mathbf{x}^*, \mathbf{y})$ и $\lim\limits_{\mathbf{y}\to\mathbf{x}^*} \frac{r(\mathbf{x}^*,\mathbf{y})}{\|\mathbf{x}^*-\mathbf{y}\|_2} = 0 \ (*)$
- Если $f'(\mathbf{x}^*) \neq 0$, тогда рассмотрим $\mathbf{y}(\tau) = \mathbf{x}^* - \tau f'(\mathbf{x}^*)$, $\tau > 0$
- $f(\mathbf{y}(\tau)) = f(\mathbf{x}^*) + \langle f'(\mathbf{x}^*), \mathbf{y}(\tau) - \mathbf{x}^*\rangle + r(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}(\tau)) = f(\mathbf{x}^*) - \tau\|f'(\mathbf{x}^*)\|_2^2 + r(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}(\tau))$

Условие оптимальности для задачи без ограничений

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \tag{1}$$

Теорема

Если $\mathbf{x}^*$ *решение задачи* (1), *то* $f'(\mathbf{x}^*) = 0$.

Доказательство

- $f(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}^*) + \langle f'(\mathbf{x}^*), \mathbf{y} - \mathbf{x}^* \rangle + r(\mathbf{x}^*, \mathbf{y})$ и $\lim\limits_{\mathbf{y} \to \mathbf{x}^*} \frac{r(\mathbf{x}^*, \mathbf{y})}{\|\mathbf{x}^* - \mathbf{y}\|_2} = 0 \ (*)$
- Если $f'(\mathbf{x}^*) \neq 0$, тогда рассмотрим $\mathbf{y}(\tau) = \mathbf{x}^* - \tau f'(\mathbf{x}^*)$, $\tau > 0$
- $f(\mathbf{y}(\tau)) = f(\mathbf{x}^*) + \langle f'(\mathbf{x}^*), \mathbf{y}(\tau) - \mathbf{x}^* \rangle + r(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}(\tau)) = f(\mathbf{x}^*) - \tau \|f'(\mathbf{x}^*)\|_2^2 + r(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}(\tau))$
- В силу $(*)$ найдётся $\bar{\tau}$ такое что для всех $\tau \in (0, \bar{\tau})$ выполнено
$$f(\mathbf{y}(\tau)) - f(\mathbf{x}^*) \leq -\frac{\tau}{2}\|f'(\mathbf{x}^*)\|_2^2 < 0$$
Значит $\mathbf{x}^*$ не минимум, противоречие.

Критерий для выпуклой задачи без ограничений

Теорема

Если в задаче (1) *функция* f *выпукла, то* $\mathbf{x}^*$ *глобальный минимум тогда и только тогда* $f'(\mathbf{x}^*) = 0$

Критерий для выпуклой задачи без ограничений

Теорема

Если в задаче (1) *функция* f *выпукла, то* $\mathbf{x}^*$ *глобальный минимум тогда и только тогда* $f'(\mathbf{x}^*) = 0$

Доказательство

Критерий для выпуклой задачи без ограничений

Теорема

Если в задаче (1) *функция* f *выпукла, то* $\mathbf{x}^*$ *глобальный минимум тогда и только тогда* $f'(\mathbf{x}^*) = 0$

Доказательство

- Если $\mathbf{x}^*$ глобальный минимум, то $\mathbf{x}^*$ локальный минимум

Критерий для выпуклой задачи без ограничений

Теорема

Если в задаче (1) *функция* f *выпукла, то* $\mathbf{x}^*$ *глобальный минимум тогда и только тогда* $f'(\mathbf{x}^*) = 0$

Доказательство

- Если $\mathbf{x}^*$ глобальный минимум, то $\mathbf{x}^*$ локальный минимум
- Значит $f'(\mathbf{x}^*) = 0$ по предыдущей теореме

Критерий для выпуклой задачи без ограничений

Теорема

Если в задаче (1) *функция* f *выпукла, то* $\mathbf{x}^*$ *глобальный минимум тогда и только тогда* $f'(\mathbf{x}^*) = 0$

Доказательство

- Если $\mathbf{x}^*$ глобальный минимум, то $\mathbf{x}^*$ локальный минимум
- Значит $f'(\mathbf{x}^*) = 0$ по предыдущей теореме
- Пусть $\mathbf{x}^*$ такая точка, что $f'(\mathbf{x}^*) = 0$ и функция выпукла

Критерий для выпуклой задачи без ограничений

Теорема

Если в задаче (1) *функция* f *выпукла, то* $\mathbf{x}^*$ *глобальный минимум тогда и только тогда* $f'(\mathbf{x}^*) = 0$

Доказательство

- Если $\mathbf{x}^*$ глобальный минимум, то $\mathbf{x}^*$ локальный минимум
- Значит $f'(\mathbf{x}^*) = 0$ по предыдущей теореме
- Пусть $\mathbf{x}^*$ такая точка, что $f'(\mathbf{x}^*) = 0$ и функция выпукла
- Тогда по критерию выпуклости

$$f(\mathbf{y}) \geq f(\mathbf{x}^*) + \langle f'(\mathbf{x}^*), \mathbf{y} - \mathbf{x}^* \rangle = f(\mathbf{x}^*)$$

Критерий для выпуклой задачи без ограничений

Теорема

Если в задаче (1) *функция* f *выпукла, то* $\mathbf{x}^*$ *глобальный минимум тогда и только тогда* $f'(\mathbf{x}^*) = 0$

Доказательство

- Если $\mathbf{x}^*$ глобальный минимум, то $\mathbf{x}^*$ локальный минимум
- Значит $f'(\mathbf{x}^*) = 0$ по предыдущей теореме
- Пусть $\mathbf{x}^*$ такая точка, что $f'(\mathbf{x}^*) = 0$ и функция выпукла
- Тогда по критерию выпуклости

$$f(\mathbf{y}) \geq f(\mathbf{x}^*) + \langle f'(\mathbf{x}^*), \mathbf{y} - \mathbf{x}^* \rangle = f(\mathbf{x}^*)$$

- Значит $\mathbf{x}^*$ – глобальный минимум.

Дифференциальное условие оптимальности для задачи с ограничениями

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} f(\mathbf{x}) \tag{2}$$

Теорема

Точка $\mathbf{x}^*$ – решение задачи (2), где f – выпуклая функция, тогда и только тогда, когда $\mathbf{x}^* \in \mathcal{X}$ и $\langle f'(\mathbf{x}^*), \mathbf{y} - \mathbf{x}^* \rangle \geq 0$ для всех $\mathbf{y} \in \mathcal{X}$.

Дифференциальное условие оптимальности для задачи с ограничениями

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} f(\mathbf{x}) \tag{2}$$

Теорема

Точка $\mathbf{x}^*$ *– решение задачи* (2), *где* f *– выпуклая функция, тогда и только тогда, когда* $\mathbf{x}^* \in \mathcal{X}$ *и* $\langle f'(\mathbf{x}^*), \mathbf{y} - \mathbf{x}^* \rangle \geq 0$ *для всех* $\mathbf{y} \in \mathcal{X}$.

Доказательство

Дифференциальное условие оптимальности для задачи с ограничениями

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} f(\mathbf{x}) \tag{2}$$

Теорема

Точка $\mathbf{x}^*$ *– решение задачи* (2)*, где* f *– выпуклая функция, тогда и только тогда, когда* $\mathbf{x}^* \in \mathcal{X}$ *и* $\langle f'(\mathbf{x}^*), \mathbf{y} - \mathbf{x}^* \rangle \geq 0$ *для всех* $\mathbf{y} \in \mathcal{X}$*.*

Доказательство

- Пусть $\mathbf{x}^* \in \mathcal{X}$ и выполнено неравенство. Тогда по критерию первого порядка для выпуклой функции $f(\mathbf{y}) \geq f(\mathbf{x}^*)$

Дифференциальное условие оптимальности для задачи с ограничениями

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} f(\mathbf{x}) \tag{2}$$

Теорема

Точка $\mathbf{x}^*$ *– решение задачи* (2), *где* f *– выпуклая функция, тогда и только тогда, когда* $\mathbf{x}^* \in \mathcal{X}$ *и* $\langle f'(\mathbf{x}^*), \mathbf{y} - \mathbf{x}^* \rangle \geq 0$ *для всех* $\mathbf{y} \in \mathcal{X}$*.*

Доказательство

- Пусть $\mathbf{x}^* \in \mathcal{X}$ и выполнено неравенство. Тогда по критерию первого порядка для выпуклой функции $f(\mathbf{y}) \geq f(\mathbf{x}^*)$
- Пусть $\mathbf{x}^*$ решение задачи (2), но найдётся $\tilde{\mathbf{y}}$ такой что $\langle f'(\mathbf{x}^*), \tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{x}^* \rangle < 0$

Дифференциальное условие оптимальности для задачи с ограничениями

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} f(\mathbf{x}) \qquad (2)$$

Теорема

Точка $\mathbf{x}^*$ – решение задачи (2), где f – выпуклая функция, тогда и только тогда, когда $\mathbf{x}^* \in \mathcal{X}$ и $\langle f'(\mathbf{x}^*), \mathbf{y} - \mathbf{x}^* \rangle \geq 0$ для всех $\mathbf{y} \in \mathcal{X}$.

Доказательство

- Пусть $\mathbf{x}^* \in \mathcal{X}$ и выполнено неравенство. Тогда по критерию первого порядка для выпуклой функции $f(\mathbf{y}) \geq f(\mathbf{x}^*)$
- Пусть $\mathbf{x}^*$ решение задачи (2), но найдётся $\tilde{\mathbf{y}}$ такой что $\langle f'(\mathbf{x}^*), \tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{x}^* \rangle < 0$
- Рассмотрим точку $\mathbf{z}(t) = t\tilde{\mathbf{y}} + (1 - t)\mathbf{x}^*$, $t \in [0, 1]$

Дифференциальное условие оптимальности для задачи с ограничениями

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} f(\mathbf{x}) \tag{2}$$

Теорема

Точка $\mathbf{x}^*$ *– решение задачи* (2)*, где* f *– выпуклая функция, тогда и только тогда, когда* $\mathbf{x}^* \in \mathcal{X}$ *и* $\langle f'(\mathbf{x}^*), \mathbf{y} - \mathbf{x}^* \rangle \geq 0$ *для всех* $\mathbf{y} \in \mathcal{X}$*.*

Доказательство

- Пусть $\mathbf{x}^* \in \mathcal{X}$ и выполнено неравенство. Тогда по критерию первого порядка для выпуклой функции $f(\mathbf{y}) \geq f(\mathbf{x}^*)$
- Пусть $\mathbf{x}^*$ решение задачи (2), но найдётся $\tilde{\mathbf{y}}$ такой что $\langle f'(\mathbf{x}^*), \tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{x}^* \rangle < 0$
- Рассмотрим точку $\mathbf{z}(t) = t\tilde{\mathbf{y}} + (1-t)\mathbf{x}^*$, $t \in [0, 1]$
- Тогда в силу $\frac{d}{dt} f(\mathbf{z}(t))\Big|_{t=0} = \langle f'(\mathbf{x}^*), \tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{x}^* \rangle < 0$

Дифференциальное условие оптимальности для задачи с ограничениями

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} f(\mathbf{x}) \tag{2}$$

Теорема

Точка $\mathbf{x}^*$ – решение задачи (2), где f – выпуклая функция, тогда и только тогда, когда $\mathbf{x}^* \in \mathcal{X}$ и $\langle f'(\mathbf{x}^*), \mathbf{y} - \mathbf{x}^* \rangle \geq 0$ для всех $\mathbf{y} \in \mathcal{X}$.

Доказательство

- Пусть $\mathbf{x}^* \in \mathcal{X}$ и выполнено неравенство. Тогда по критерию первого порядка для выпуклой функции $f(\mathbf{y}) \geq f(\mathbf{x}^*)$
- Пусть $\mathbf{x}^*$ решение задачи (2), но найдётся $\tilde{\mathbf{y}}$ такой что $\langle f'(\mathbf{x}^*), \tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{x}^* \rangle < 0$
- Рассмотрим точку $\mathbf{z}(t) = t\tilde{\mathbf{y}} + (1-t)\mathbf{x}^*$, $t \in [0, 1]$
- Тогда в силу $\frac{d}{dt} f(\mathbf{z}(t)) \Big|_{t=0} = \langle f'(\mathbf{x}^*), \tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{x}^* \rangle < 0$
- Значит для малого t выполнено $f(\mathbf{z}(t)) < f(\mathbf{x}^*)$. Противоречие.

Задача оптимизации с функциональными ограничениями

$$
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{x} \in \mathcal{D}} f_0(\mathbf{x})\\
\text{s.t. } & g_i(\mathbf{x}) = 0, \; i = 1, \dots, m\\
& h_j(\mathbf{x}) \leq 0, \; j = 1, \dots, p
\end{aligned}
$$

dom $f_0 = \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$, $f_0(\mathbf{x}^*) = p^*$

Q: как сформулировать условия оптимальности для задачи в таком виде?

Задача оптимизации с функциональными ограничениями

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathcal{D}} f_0(\mathbf{x})$$
$$\text{s.t. } g_i(\mathbf{x}) = 0, \; i = 1, \dots, m$$
$$h_j(\mathbf{x}) \leq 0, \; j = 1, \dots, p$$

dom $f_0 = \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$, $f_0(\mathbf{x}^*) = p^*$

Q: как сформулировать условия оптимальности для задачи в таком виде?

Лагранжиан $L : \mathcal{D} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = f_0(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j h_j(\mathbf{x})$$

- λ_i – множители Лагранжа для ограничений $g_i(\mathbf{x}) = 0, \; i = 1, \dots, m$
- μ_j – множители Лагранжа для ограничений $h_j(\mathbf{x}) \leq 0, \; j = 1, \dots, p$

Двойственная функция

Определение

Функция $g : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ такая что

$$g(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = \inf_{\mathbf{x} \in \mathcal{D}} \left(f_0(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j h_j(\mathbf{x}) \right)$$

называется *двойственной функцией*

Двойственная функция

Определение

Функция $g : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ такая что

$$g(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = \inf_{\mathbf{x} \in \mathcal{D}} \left(f_0(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j h_j(\mathbf{x}) \right)$$

называется *двойственной функцией*

Свойства

- Всегда вогнута
- Может равняться $-\infty$ для некоторых $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$

Нижняя оценка оптимального значения функции

Утверждение

Если $\boldsymbol{\mu} \geq 0$, тогда $p^* \geq g(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$

Нижняя оценка оптимального значения функции

Утверждение

Если $\boldsymbol{\mu} \geq 0$, тогда $p^* \geq g(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$

Доказательство

Нижняя оценка оптимального значения функции

Утверждение

Если $\boldsymbol{\mu} \geq 0$, тогда $p^* \geq g(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$

Доказательство

- Если $\hat{\mathbf{x}} \in \mathcal{D}$ и лежит в допустимом множестве, а также $\boldsymbol{\mu} \geq 0$, тогда

$$f_0(\hat{\mathbf{x}}) \geq L(\hat{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) \geq \inf_{\mathbf{x} \in \mathcal{D}} L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = g(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$$

Нижняя оценка оптимального значения функции

Утверждение

Если $\boldsymbol{\mu} \geq 0$, тогда $p^* \geq g(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$

Доказательство

- Если $\hat{\mathbf{x}} \in \mathcal{D}$ и лежит в допустимом множестве, а также $\boldsymbol{\mu} \geq 0$, тогда

$$f_0(\hat{\mathbf{x}}) \geq L(\hat{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) \geq \inf_{\mathbf{x} \in \mathcal{D}} L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = g(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$$

- Минимизируя обе части по всем допустимым $\hat{\mathbf{x}}$, получим

$$p^* \geq g(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$$

Нижняя оценка оптимального значения функции

Утверждение

Если $\boldsymbol{\mu} \geq 0$, тогда $p^* \geq g(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$

Доказательство

- Если $\hat{\mathbf{x}} \in \mathcal{D}$ и лежит в допустимом множестве, а также $\boldsymbol{\mu} \geq 0$, тогда

$$f_0(\hat{\mathbf{x}}) \geq L(\hat{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) \geq \inf_{\mathbf{x} \in \mathcal{D}} L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = g(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$$

- Минимизируя обе части по всем допустимым $\hat{\mathbf{x}}$, получим

$$p^* \geq g(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$$

Q: что теперь надо сделать с двойственной функцией, чтобы получить наилучшее приближение к p^*?

Двойственная задача

Определение

Двойственной задачей называется следующая задача

$$
\begin{aligned}
&\max g(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})\\
\text{s.t. } &\boldsymbol{\mu} \geq 0
\end{aligned}
$$

Двойственная задача

Определение

Двойственной задачей называется следующая задача

$$\max g(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$$
$$\text{s.t. } \boldsymbol{\mu} \geq 0$$

- Всегда выпуклая задача

Двойственная задача

Определение

Двойственной задачей называется следующая задача

$$\begin{aligned} \max g(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) \\ \text{s.t. } \boldsymbol{\mu} \geq 0 \end{aligned}$$

- Всегда выпуклая задача
- Обозначим $d^* = g(\boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*)$

Двойственная задача

Определение

Двойственной задачей называется следующая задача

$$
\begin{aligned}
&\max g(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) \\
\text{s.t. } &\boldsymbol{\mu} \geq 0
\end{aligned}
$$

- Всегда выпуклая задача
- Обозначим $d^* = g(\boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*)$
- Лучшая нижняя оценка для p^*, которую может дать двойственная функция

Двойственная задача

Определение

Двойственной задачей называется следующая задача

$$
\begin{aligned}
&\max g(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) \\
\text{s.t. } &\boldsymbol{\mu} \geq 0
\end{aligned}
$$

- Всегда выпуклая задача
- Обозначим $d^* = g(\boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*)$
- Лучшая нижняя оценка для p^*, которую может дать двойственная функция
- Вектора $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$ называются допустимыми для двойственной задачи, если $\boldsymbol{\mu} \geq 0$ и $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) \in \mathrm{dom}\ g$

Слабая и сильная двойственность

Слабая двойственность: $d^* \leq p^*$

Слабая и сильная двойственность

Слабая двойственность: $d^* \leq p^*$

- Всегда выполняется по построению двойственной задачи

Слабая и сильная двойственность

Слабая двойственность: $d^* \leq p^*$

- Всегда выполняется по построению двойственной задачи
- Нетривиальные нижние границы для (NP-)сложных задач

Слабая и сильная двойственность

Слабая двойственность: $d^* \le p^*$

- Всегда выполняется по построению двойственной задачи
- Нетривиальные нижние границы для (NP-)сложных задач

Сильная двойственность: $d^* = p^*$

Слабая и сильная двойственность

Слабая двойственность: $d^* \leq p^*$

- Всегда выполняется по построению двойственной задачи
- Нетривиальные нижние границы для (NP-)сложных задач

Сильная двойственность: $d^* = p^*$

- В общем случае НЕ выполняется

Слабая и сильная двойственность

Слабая двойственность: $d^* \leq p^*$

- Всегда выполняется по построению двойственной задачи
- Нетривиальные нижние границы для (NP-)сложных задач

Сильная двойственность: $d^* = p^*$

- В общем случае НЕ выполняется
- *Обычно* выполнена для выпуклых задач

Слабая и сильная двойственность

Слабая двойственность: $d^* \leq p^*$

- Всегда выполняется по построению двойственной задачи
- Нетривиальные нижние границы для (NP-)сложных задач

Сильная двойственность: $d^* = p^*$

- В общем случае НЕ выполняется
- *Обычно* выполнена для выпуклых задач
- Условия регулярности ограничений, подробнее через несколько слайдов

Слабая и сильная двойственность

Слабая двойственность: $d^* \leq p^*$

- Всегда выполняется по построению двойственной задачи
- Нетривиальные нижние границы для (NP-)сложных задач

Сильная двойственность: $d^* = p^*$

- В общем случае НЕ выполняется
- *Обычно* выполнена для выпуклых задач
- Условия регулярности ограничений, подробнее через несколько слайдов
- Может выполняться и для **невыпуклых** задач

Слабая и сильная двойственность

Слабая двойственность: $d^* \leq p^*$

- Всегда выполняется по построению двойственной задачи
- Нетривиальные нижние границы для (NP-)сложных задач

Сильная двойственность: $d^* = p^*$

- В общем случае НЕ выполняется
- *Обычно* выполнена для выпуклых задач
- Условия регулярности ограничений, подробнее через несколько слайдов
- Может выполняться и для **невыпуклых** задач
- Решение двойственной задачи даёт решение прямой задачи

Слабая и сильная двойственность

Слабая двойственность: $d^* \leq p^*$

- Всегда выполняется по построению двойственной задачи
- Нетривиальные нижние границы для (NP-)сложных задач

Сильная двойственность: $d^* = p^*$

- В общем случае НЕ выполняется
- *Обычно* выполнена для выпуклых задач
- Условия регулярности ограничений, подробнее через несколько слайдов
- Может выполняться и для **невыпуклых** задач
- Решение двойственной задачи даёт решение прямой задачи

Зазор двойственности: $f_0(\mathbf{x}) - g(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$

Слабая и сильная двойственность

Слабая двойственность: $d^* \leq p^*$

- Всегда выполняется по построению двойственной задачи
- Нетривиальные нижние границы для (NP-)сложных задач

Сильная двойственность: $d^* = p^*$

- В общем случае НЕ выполняется
- *Обычно* выполнена для выпуклых задач
- Условия регулярности ограничений, подробнее через несколько слайдов
- Может выполняться и для **невыпуклых** задач
- Решение двойственной задачи даёт решение прямой задачи

Зазор двойственности: $f_0(\mathbf{x}) - g(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$

- Оценка точности решения

Слабая и сильная двойственность

Слабая двойственность: $d^* \leq p^*$

- Всегда выполняется по построению двойственной задачи
- Нетривиальные нижние границы для (NP-)сложных задач

Сильная двойственность: $d^* = p^*$

- В общем случае НЕ выполняется
- *Обычно* выполнена для выпуклых задач
- Условия регулярности ограничений, подробнее через несколько слайдов
- Может выполняться и для **невыпуклых** задач
- Решение двойственной задачи даёт решение прямой задачи

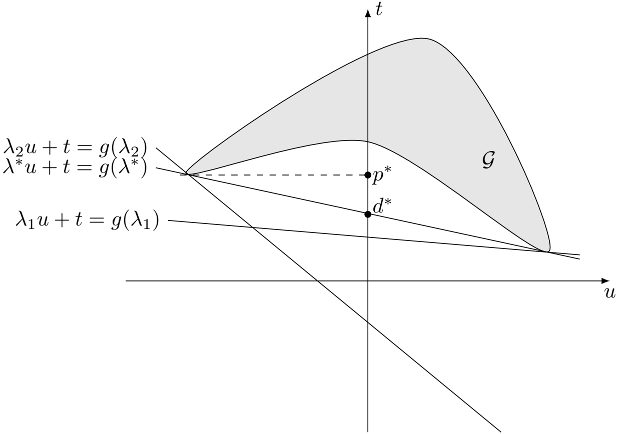
Зазор двойственности: $f_0(\mathbf{x}) - g(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$

- Оценка точности решения
- Доказательство корректности и сходимости алгоритма

Геометрическая интерпретация

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathcal{D}} f_0(\mathbf{x}) \qquad g(\lambda) = \inf_{(u,t)\in\mathcal{G}} (t + \lambda u)$$

$$\text{s.t. } f_1(\mathbf{x}) \le 0 \qquad \mathcal{G} = \{(f_1(\mathbf{x}), f_0(\mathbf{x})) \mid \mathbf{x} \in \mathcal{D}\}$$



Условие Слейтера и сильная двойственность

Условие Слейтера

Говорят, что выполнено условие Слейтера, если
$\exists \bar{\mathbf{x}} \in \text{int } \mathcal{D}: \; f_i(\bar{\mathbf{x}}) < 0, \; \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{b}$

Теорема

Сильная двойственность выполняется для выпуклой задачи

$$
\begin{aligned}
&\min f_0(\mathbf{x}) \\
\textit{s.t. } & f_i(\mathbf{x}) \leq 0, \; i = 1, \ldots, m \\
&\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \; \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{p \times n}
\end{aligned}
$$

если выполнено условие Слейтера.

Доказательство

Предположения

- $\operatorname{int} \mathcal{D} \neq \varnothing$
- $\operatorname{rank} \mathbf{A} = p$

Этапы доказательства

1. Введём два множества
   $\mathcal{A} = \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}, t) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R} \mid \exists \mathbf{x} \in \mathcal{D} : f_i(\mathbf{x}) \leq u_i,\ \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b} = \mathbf{v},\ f_0(\mathbf{x}) \leq t\}$ и
   $\mathcal{B} = \{(0, 0, s) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R} \mid s < p^*\}$

Доказательство

Предположения

- $\operatorname{int} \mathcal{D} \neq \varnothing$
- $\operatorname{rank} \mathbf{A} = p$

Этапы доказательства

1. Введём два множества
   $\mathcal{A} = \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}, t) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R} \mid \exists \mathbf{x} \in \mathcal{D} : f_i(\mathbf{x}) \leq u_i,\ \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b} = \mathbf{v},\ f_0(\mathbf{x}) \leq t\}$ и
   $\mathcal{B} = \{(0, 0, s) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R} \mid s < p^*\}$
2. Наблюдение: $p^* = \inf\{t \mid (0, 0, t) \in \mathcal{A}\}$

Доказательство

Предположения

- $\operatorname{int} \mathcal{D} \neq \varnothing$
- $\operatorname{rank} \mathbf{A} = p$

Этапы доказательства

1. Введём два множества
   $\mathcal{A} = \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}, t) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R} \mid \exists \mathbf{x} \in \mathcal{D} : f_i(\mathbf{x}) \leq u_i,\ \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b} = \mathbf{v},\ f_0(\mathbf{x}) \leq t\}$ и
   $\mathcal{B} = \{(0, 0, s) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R} \mid s < p^*\}$
2. Наблюдение: $p^* = \inf\{t \mid (0, 0, t) \in \mathcal{A}\}$
3. Множества $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ выпуклы, как декартово произведение выпуклых множеств

Доказательство

Предположения

- $\operatorname{int} \mathcal{D} \neq \varnothing$
- $\operatorname{rank} \mathbf{A} = p$

Этапы доказательства

1. Введём два множества $\mathcal{A} = \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}, t) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R} \mid \exists \mathbf{x} \in \mathcal{D} : f_i(\mathbf{x}) \leq u_i,\ \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b} = \mathbf{v},\ f_0(\mathbf{x}) \leq t\}$ и $\mathcal{B} = \{(0, 0, s) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R} \mid s < p^*\}$
2. Наблюдение: $p^* = \inf\{t \mid (0, 0, t) \in \mathcal{A}\}$
3. Множества $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ выпуклы, как декартово произведение выпуклых множеств
4. $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \varnothing$ иначе противоречие с тем, что p^* – минимальное значение f_0

Доказательство

Предположения

- $\text{int } \mathcal{D} \neq \varnothing$
- $\text{rank } \mathbf{A} = p$

Этапы доказательства

1. Введём два множества $\mathcal{A} = \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}, t) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R} \mid \exists \mathbf{x} \in \mathcal{D} : f_i(\mathbf{x}) \leq u_i,\ \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b} = \mathbf{v},\ f_0(\mathbf{x}) \leq t\}$ и $\mathcal{B} = \{(0, 0, s) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R} \mid s < p^*\}$
2. Наблюдение: $p^* = \inf\{t \mid (0, 0, t) \in \mathcal{A}\}$
3. Множества $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ выпуклы, как декартово произведение выпуклых множеств
4. $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \varnothing$ иначе противоречие с тем, что p^* – минимальное значение f_0
5. По теореме об отделимости существует разделяющая гиперплоскость

6. $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, t) \in \mathcal{A} \to \tilde{\boldsymbol{\lambda}}^\top \mathbf{u} + \tilde{\boldsymbol{\nu}}^\top \mathbf{v} + \mu t \geq \alpha$ (i)
   $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, t) \in \mathcal{B} \to \mu t \leq \alpha$ (ii)

6. $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, t) \in \mathcal{A} \to \tilde{\boldsymbol{\lambda}}^\top \mathbf{u} + \tilde{\boldsymbol{\nu}}^\top \mathbf{v} + \mu t \geq \alpha \ (i)$
   $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, t) \in \mathcal{B} \to \mu t \leq \alpha \ (ii)$
7. Так как (ii) выполнено для $t < p^*$, то $\mu p^* \leq \alpha$

6. $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, t) \in \mathcal{A} \rightarrow \tilde{\boldsymbol{\lambda}}^\top \mathbf{u} + \tilde{\boldsymbol{\nu}}^\top \mathbf{v} + \mu t \geq \alpha \ (i)$
   $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, t) \in \mathcal{B} \rightarrow \mu t \leq \alpha \ (ii)$
7. Так как (ii) выполнено для $t < p^*$, то $\mu p^* \leq \alpha$
8. Из (i) следует, что $\tilde{\boldsymbol{\lambda}} \geq 0$ и $\mu \geq 0$, иначе выражение слева будет неограничено снизу

6. $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, t) \in \mathcal{A} \to \tilde{\boldsymbol{\lambda}}^\top \mathbf{u} + \tilde{\boldsymbol{\nu}}^\top \mathbf{v} + \mu t \geq \alpha \ (i)$
   $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, t) \in \mathcal{B} \to \mu t \leq \alpha \ (ii)$
7. Так как (ii) выполнено для $t < p^*$, то $\mu p^* \leq \alpha$
8. Из (i) следует, что $\tilde{\boldsymbol{\lambda}} \geq 0$ и $\mu \geq 0$, иначе выражение слева будет неограничено снизу
9. Перейдём в (i) от записи через $\mathcal{A}$ к записи через $\mathbf{x}$ и ограничения

$$\sum_{i=1}^{m} \tilde{\lambda}_i f_i(\mathbf{x}) + \tilde{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}) + \mu f_0(\mathbf{x}) \geq \alpha \geq \mu p^*$$

6. $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, t) \in \mathcal{A} \to \tilde{\boldsymbol{\lambda}}^\top \mathbf{u} + \tilde{\boldsymbol{\nu}}^\top \mathbf{v} + \mu t \geq \alpha \ (i)$
   $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, t) \in \mathcal{B} \to \mu t \leq \alpha \ (ii)$
7. Так как (ii) выполнено для $t < p^*$, то $\mu p^* \leq \alpha$
8. Из (i) следует, что $\tilde{\boldsymbol{\lambda}} \geq 0$ и $\mu \geq 0$, иначе выражение слева будет неограничено снизу
9. Перейдём в (i) от записи через $\mathcal{A}$ к записи через $\mathbf{x}$ и ограничения

$$\sum_{i=1}^{m} \tilde{\lambda}_i f_i(\mathbf{x}) + \tilde{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}) + \mu f_0(\mathbf{x}) \geq \alpha \geq \mu p^*$$

10. Пусть $\mu > 0$ тогда

$$L(\mathbf{x}, \tilde{\boldsymbol{\lambda}}/\mu, \tilde{\boldsymbol{\nu}}/\mu) \geq p^*, \ \mathbf{x} \in \mathcal{D} \to \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{D}} L = g(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) \geq p^*$$

6. $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, t) \in \mathcal{A} \rightarrow \tilde{\boldsymbol{\lambda}}^\top \mathbf{u} + \tilde{\boldsymbol{\nu}}^\top \mathbf{v} + \mu t \geq \alpha \ (i)$
   $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, t) \in \mathcal{B} \rightarrow \mu t \leq \alpha \ (ii)$
7. Так как (ii) выполнено для $t < p^*$, то $\mu p^* \leq \alpha$
8. Из (i) следует, что $\tilde{\boldsymbol{\lambda}} \geq 0$ и $\mu \geq 0$, иначе выражение слева будет неограничено снизу
9. Перейдём в (i) от записи через $\mathcal{A}$ к записи через $\mathbf{x}$ и ограничения

$$\sum_{i=1}^m \tilde{\lambda}_i f_i(\mathbf{x}) + \tilde{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}) + \mu f_0(\mathbf{x}) \geq \alpha \geq \mu p^*$$

10. Пусть $\mu > 0$ тогда

$$L(\mathbf{x}, \tilde{\boldsymbol{\lambda}}/\mu, \tilde{\boldsymbol{\nu}}/\mu) \geq p^*, \ \mathbf{x} \in \mathcal{D} \rightarrow \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{D}} L = g(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) \geq p^*$$

11. Но в силу слабой двойственности $g(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) \leq p^*$, значит $g(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = p^*$ и выполнена сильная двойственность.

12. Пусть $\mu = 0$ тогда

$$\sum_{i=1}^{m} \tilde{\lambda}_i f_i(\mathbf{x}) + \tilde{\boldsymbol{\nu}}^\top (\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}) \geq 0 \tag{3}$$

для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$

12. Пусть $\mu = 0$ тогда

$$\sum_{i=1}^{m} \tilde{\lambda}_i f_i(\mathbf{x}) + \tilde{\boldsymbol{\nu}}^\top (\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}) \geq 0 \qquad (3)$$

для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$

13. Возьмём $\tilde{\mathbf{x}} \in \text{int } \mathcal{D}$, для которого выполнено условие Слейтера, тогда $\sum\limits_{i=1}^{m} \tilde{\lambda}_i f_i(\tilde{\mathbf{x}}) \geq 0$, но $f_i(\tilde{\mathbf{x}}) < 0$ и $\tilde{\lambda}_i \geq 0 \to \tilde{\boldsymbol{\lambda}} = 0$

12. Пусть $\mu = 0$ тогда

$$\sum_{i=1}^{m} \tilde{\lambda}_i f_i(\mathbf{x}) + \tilde{\boldsymbol{\nu}}^\top (\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}) \geq 0 \tag{3}$$

для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$

13. Возьмём $\tilde{\mathbf{x}} \in \operatorname{int} \mathcal{D}$, для которого выполнено условие Слейтера, тогда $\sum\limits_{i=1}^{m} \tilde{\lambda}_i f_i(\tilde{\mathbf{x}}) \geq 0$, но $f_i(\tilde{\mathbf{x}}) < 0$ и $\tilde{\lambda}_i \geq 0 \to \tilde{\boldsymbol{\lambda}} = 0$
14. Из (3) следует, что $\tilde{\boldsymbol{\nu}}^\top (\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}) \geq 0$ для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$, но $\tilde{\boldsymbol{\nu}}^\top (\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{b}) = (\mathbf{A}^\top \tilde{\boldsymbol{\nu}})^\top \tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\boldsymbol{\nu}}^\top \mathbf{b} = 0$

12. Пусть $\mu = 0$ тогда

$$\sum_{i=1}^{m} \tilde{\lambda}_i f_i(\mathbf{x}) + \tilde{\boldsymbol{\nu}}^\top (\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}) \geq 0 \tag{3}$$

для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$

13. Возьмём $\tilde{\mathbf{x}} \in \operatorname{int} \mathcal{D}$, для которого выполнено условие Слейтера, тогда $\sum\limits_{i=1}^{m} \tilde{\lambda}_i f_i(\tilde{\mathbf{x}}) \geq 0$, но $f_i(\tilde{\mathbf{x}}) < 0$ и $\tilde{\lambda}_i \geq 0 \to \tilde{\boldsymbol{\lambda}} = 0$
14. Из (3) следует, что $\tilde{\boldsymbol{\nu}}^\top (\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}) \geq 0$ для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$, но $\tilde{\boldsymbol{\nu}}^\top (\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{b}) = (\mathbf{A}^\top \tilde{\boldsymbol{\nu}})^\top \tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\boldsymbol{\nu}}^\top \mathbf{b} = 0$
15. Значит если $\mathbf{A}^\top \tilde{\boldsymbol{\nu}} \neq 0$, то найдётся точка $\bar{\mathbf{x}}$, в которой $\tilde{\boldsymbol{\nu}}^\top (\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{b}) < 0$, противоречие

12. Пусть $\mu = 0$ тогда

$$\sum_{i=1}^{m} \tilde{\lambda}_i f_i(\mathbf{x}) + \tilde{\boldsymbol{\nu}}^\top (\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}) \geq 0 \tag{3}$$

для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$

13. Возьмём $\tilde{\mathbf{x}} \in \operatorname{int} \mathcal{D}$, для которого выполнено условие Слейтера, тогда $\sum\limits_{i=1}^{m} \tilde{\lambda}_i f_i(\tilde{\mathbf{x}}) \geq 0$, но $f_i(\tilde{\mathbf{x}}) < 0$ и $\tilde{\lambda}_i \geq 0 \to \tilde{\boldsymbol{\lambda}} = 0$
14. Из (3) следует, что $\tilde{\boldsymbol{\nu}}^\top (\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}) \geq 0$ для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$, но $\tilde{\boldsymbol{\nu}}^\top (\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{b}) = (\mathbf{A}^\top \tilde{\boldsymbol{\nu}})^\top \tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\boldsymbol{\nu}}^\top \mathbf{b} = 0$
15. Значит если $\mathbf{A}^\top \tilde{\boldsymbol{\nu}} \neq 0$, то найдётся точка $\bar{\mathbf{x}}$, в которой $\tilde{\boldsymbol{\nu}}^\top (\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{b}) < 0$, противоречие
16. Если $\mathbf{A}^\top \tilde{\boldsymbol{\nu}} = 0$ и $\tilde{\boldsymbol{\nu}} \neq 0$, то $\operatorname{rank} \mathbf{A} < p$, противоречие. Значит $\mu \neq 0$.

Дополняющая нежёсткость

Пусть выполнена сильная двойственность,
$\mathbf{x}^*$ – решение прямой задачи,
$(\boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*)$ – решение двойственной задачи, тогда

Дополняющая нежёсткость

Пусть выполнена сильная двойственность,
$\mathbf{x}^*$ – решение прямой задачи,
$(\boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*)$ – решение двойственной задачи, тогда

$$
\begin{aligned}
f_0(\mathbf{x}^*) = & g(\boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*) = \inf_{\mathbf{x} \in \mathcal{D}} \left(f_0(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j^* h_j(\mathbf{x}) \right) \\
& \leq f_0(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j^* h_j(\mathbf{x}^*) \\
& \leq f_0(\mathbf{x}^*)
\end{aligned}
$$

Дополняющая нежёсткость

Пусть выполнена сильная двойственность,
$\mathbf{x}^*$ – решение прямой задачи,
$(\boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*)$ – решение двойственной задачи, тогда

$$\begin{aligned} f_0(\mathbf{x}^*) =& g(\boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*) = \inf_{\mathbf{x}\in\mathcal{D}} \left(f_0(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j^* h_j(\mathbf{x}) \right) \\ &\leq f_0(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j^* h_j(\mathbf{x}^*) \\ &\leq f_0(\mathbf{x}^*) \end{aligned}$$

- $\mathbf{x}^*$ минимизирует $L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*)$

Дополняющая нежёсткость

Пусть выполнена сильная двойственность,
$\mathbf{x}^*$ – решение прямой задачи,
$(\boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*)$ – решение двойственной задачи, тогда

$$\begin{aligned} f_0(\mathbf{x}^*) =& g(\boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*) = \inf_{\mathbf{x}\in\mathcal{D}} \left(f_0(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j^* h_j(\mathbf{x}) \right) \\ &\le f_0(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j^* h_j(\mathbf{x}^*) \\ &\le f_0(\mathbf{x}^*) \end{aligned}$$

- $\mathbf{x}^*$ минимизирует $L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*)$
- Условие дополняющей нежёсткости
  $\mu_j^* h_j(\mathbf{x}^*) = 0,\ j = 1, \dots, p$

$$\mu_j^* > 0 \Rightarrow h_j(\mathbf{x}^*) = 0, \quad h_j(\mathbf{x}^*) < 0 \Rightarrow \mu_j^* = 0$$

Условия Каруша-Куна-Таккера (ККТ): невыпуклые задачи

Пусть $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*)$ решения прямой и двойственной задачи и выполнена сильная двойственность, тогда

Условия Каруша-Куна-Таккера (ККТ): невыпуклые задачи

Пусть $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*)$ решения прямой и двойственной задачи и выполнена сильная двойственность, тогда

1. $h_j(\mathbf{x}^*) \leq 0$

Условия Каруша-Куна-Таккера (ККТ): невыпуклые задачи

Пусть $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*)$ решения прямой и двойственной задачи и выполнена сильная двойственность, тогда

1. $h_j(\mathbf{x}^*) \leq 0$
2. $g_i(\mathbf{x}^*) = 0$

Условия Каруша-Куна-Таккера (ККТ): невыпуклые задачи

Пусть $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*)$ решения прямой и двойственной задачи и выполнена сильная двойственность, тогда

1. $h_j(\mathbf{x}^*) \leq 0$
2. $g_i(\mathbf{x}^*) = 0$
3. $\boldsymbol{\mu}^* \geq 0$

Условия Каруша-Куна-Таккера (ККТ): невыпуклые задачи

Пусть $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*)$ решения прямой и двойственной задачи и выполнена сильная двойственность, тогда

1. $h_j(\mathbf{x}^*) \leq 0$
2. $g_i(\mathbf{x}^*) = 0$
3. $\boldsymbol{\mu}^* \geq 0$
4. $\mu_j^* h_j(\mathbf{x}^*) = 0$

Условия Каруша-Куна-Таккера (ККТ): невыпуклые задачи

Пусть $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*)$ решения прямой и двойственной задачи и выполнена сильная двойственность, тогда

1. $h_j(\mathbf{x}^*) \leq 0$
2. $g_i(\mathbf{x}^*) = 0$
3. $\boldsymbol{\mu}^* \geq 0$
4. $\mu_j^* h_j(\mathbf{x}^*) = 0$
5. $f_0'(\mathbf{x}^*) + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i'(\mathbf{x}^*) + \sum\limits_{j=1}^{p} \mu_j^* h_j'(\mathbf{x}^*) = 0$

Условия Каруша-Куна-Таккера (ККТ): невыпуклые задачи

Пусть $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*)$ решения прямой и двойственной задачи и выполнена сильная двойственность, тогда

1. $h_j(\mathbf{x}^*) \leq 0$
2. $g_i(\mathbf{x}^*) = 0$
3. $\boldsymbol{\mu}^* \geq 0$
4. $\mu_j^* h_j(\mathbf{x}^*) = 0$
5. $f_0'(\mathbf{x}^*) + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i'(\mathbf{x}^*) + \sum\limits_{j=1}^{p} \mu_j^* h_j'(\mathbf{x}^*) = 0$

Последнее равенство выполнено в силу

$$\min_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*) = L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*)$$

и необходимого условия минимума.

Условия Каруша-Куна-Таккера (ККТ): невыпуклые задачи

Пусть $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*)$ решения прямой и двойственной задачи и выполнена сильная двойственность, тогда

1. $h_j(\mathbf{x}^*) \leq 0$
2. $g_i(\mathbf{x}^*) = 0$
3. $\boldsymbol{\mu}^* \geq 0$
4. $\mu_j^* h_j(\mathbf{x}^*) = 0$
5. $f_0'(\mathbf{x}^*) + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i'(\mathbf{x}^*) + \sum\limits_{j=1}^{p} \mu_j^* h_j'(\mathbf{x}^*) = 0$

Последнее равенство выполнено в силу

$$\min_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*) = L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*)$$

и необходимого условия минимума.

Замечание

Сначала эти условия были известны как условия Куна-Таккера (работа 1951 г.). Потом обнаружили, что Вильям Каруш вывел их в своей дипломной работе 1939 г.

ККТ для выпуклых задач

Утверждение 1

Пусть прямая задача выпукла (f_0, h_j – выпуклы, g_i – аффинны) и для $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}, \hat{\boldsymbol{\mu}})$ выполнены условия ККТ, тогда

- выполнена сильная двойственность
- $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}, \hat{\boldsymbol{\mu}})$ – решения прямой и двойственной задач

ККТ для выпуклых задач

Утверждение 1

Пусть прямая задача выпукла (f_0, h_j – выпуклы, g_i – аффинны) и для $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}, \hat{\boldsymbol{\mu}})$ выполнены условия ККТ, тогда

- выполнена сильная двойственность
- $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}, \hat{\boldsymbol{\mu}})$ – решения прямой и двойственной задач

Доказательство

ККТ для выпуклых задач

Утверждение 1

Пусть прямая задача выпукла (f_0, h_j – выпуклы, g_i – аффинны) и для $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}, \hat{\boldsymbol{\mu}})$ выполнены условия ККТ, тогда

- выполнена сильная двойственность
- $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}, \hat{\boldsymbol{\mu}})$ – решения прямой и двойственной задач

Доказательство

- Первые два условия из ККТ $\rightarrow$ $\hat{\mathbf{x}}$ лежит в допустимом множестве, то есть $g_i(\hat{\mathbf{x}}) = 0$ и $h_j(\hat{\mathbf{x}}) \leq 0$

ККТ для выпуклых задач

Утверждение 1

Пусть прямая задача выпукла (f_0, h_j – выпуклы, g_i – аффинны) и для $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}, \hat{\boldsymbol{\mu}})$ выполнены условия ККТ, тогда

- выполнена сильная двойственность
- $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}, \hat{\boldsymbol{\mu}})$ – решения прямой и двойственной задач

Доказательство

- Первые два условия из ККТ $\rightarrow$ $\hat{\mathbf{x}}$ лежит в допустимом множестве, то есть $g_i(\hat{\mathbf{x}}) = 0$ и $h_j(\hat{\mathbf{x}}) \leq 0$
- $\hat{\boldsymbol{\mu}} \geq 0 \rightarrow L(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}, \hat{\boldsymbol{\mu}})$ выпуклый по $\mathbf{x}$

ККТ для выпуклых задач

Утверждение 1

Пусть прямая задача выпукла (f_0, h_j – выпуклы, g_i – аффинны) и для $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}, \hat{\boldsymbol{\mu}})$ выполнены условия ККТ, тогда

- выполнена сильная двойственность
- $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}, \hat{\boldsymbol{\mu}})$ – решения прямой и двойственной задач

Доказательство

- Первые два условия из ККТ $\rightarrow \hat{\mathbf{x}}$ лежит в допустимом множестве, то есть $g_i(\hat{\mathbf{x}}) = 0$ и $h_j(\hat{\mathbf{x}}) \leq 0$
- $\hat{\boldsymbol{\mu}} \geq 0 \rightarrow L(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}, \hat{\boldsymbol{\mu}})$ выпуклый по $\mathbf{x}$
- Последнее условие $\rightarrow \hat{\mathbf{x}}$ минимизирует L: $g(\hat{\boldsymbol{\lambda}}, \hat{\boldsymbol{\mu}}) = L(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}, \hat{\boldsymbol{\mu}}) = f_0(\hat{\mathbf{x}}) + \sum_{i=1}^m \hat{\boldsymbol{\lambda}}_i g_i(\hat{\mathbf{x}}) + \sum_{j=1}^p \hat{\boldsymbol{\mu}}_j h_j(\hat{\mathbf{x}})$

ККТ для выпуклых задач

Утверждение 1

Пусть прямая задача выпукла (f_0, h_j – выпуклы, g_i – аффинны) и для $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}, \hat{\boldsymbol{\mu}})$ выполнены условия ККТ, тогда

- выполнена сильная двойственность
- $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}, \hat{\boldsymbol{\mu}})$ – решения прямой и двойственной задач

Доказательство

- Первые два условия из ККТ $\to$ $\hat{\mathbf{x}}$ лежит в допустимом множестве, то есть $g_i(\hat{\mathbf{x}}) = 0$ и $h_j(\hat{\mathbf{x}}) \leq 0$
- $\hat{\boldsymbol{\mu}} \geq 0 \to L(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}, \hat{\boldsymbol{\mu}})$ выпуклый по $\mathbf{x}$
- Последнее условие $\to$ $\hat{\mathbf{x}}$ минимизирует L: $g(\hat{\boldsymbol{\lambda}}, \hat{\boldsymbol{\mu}}) = L(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}, \hat{\boldsymbol{\mu}}) = f_0(\hat{\mathbf{x}}) + \sum_{i=1}^m \hat{\boldsymbol{\lambda}}_i g_i(\hat{\mathbf{x}}) + \sum_{j=1}^p \hat{\boldsymbol{\mu}}_j h_j(\hat{\mathbf{x}})$
- Из условий дополняющей нежёсткости $\hat{\mu}_j h_j(\hat{\mathbf{x}}) = 0$ следует, что $g(\hat{\boldsymbol{\lambda}}, \hat{\boldsymbol{\mu}}) = f_0(\hat{\mathbf{x}})$

ККТ для выпуклых задач

Утверждение 1

Пусть прямая задача выпукла (f_0, h_j – выпуклы, g_i – аффинны) и для $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}, \hat{\boldsymbol{\mu}})$ выполнены условия ККТ, тогда

- выполнена сильная двойственность
- $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}, \hat{\boldsymbol{\mu}})$ – решения прямой и двойственной задач

Доказательство

- Первые два условия из ККТ $\rightarrow \hat{\mathbf{x}}$ лежит в допустимом множестве, то есть $g_i(\hat{\mathbf{x}}) = 0$ и $h_j(\hat{\mathbf{x}}) \leq 0$
- $\hat{\boldsymbol{\mu}} \geq 0 \rightarrow L(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}, \hat{\boldsymbol{\mu}})$ выпуклый по $\mathbf{x}$
- Последнее условие $\rightarrow \hat{\mathbf{x}}$ минимизирует L: $g(\hat{\boldsymbol{\lambda}}, \hat{\boldsymbol{\mu}}) = L(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}, \hat{\boldsymbol{\mu}}) = f_0(\hat{\mathbf{x}}) + \sum_{i=1}^{m} \hat{\boldsymbol{\lambda}}_i g_i(\hat{\mathbf{x}}) + \sum_{j=1}^{p} \hat{\boldsymbol{\mu}}_j h_j(\hat{\mathbf{x}})$
- Из условий дополняющей нежёсткости $\hat{\mu}_j h_j(\hat{\mathbf{x}}) = 0$ следует, что $g(\hat{\boldsymbol{\lambda}}, \hat{\boldsymbol{\mu}}) = f_0(\hat{\mathbf{x}})$
- Выполнена сильная двойственность

ККТ для выпуклых задач

Утверждение 1

Пусть прямая задача выпукла (f_0, h_j – выпуклы, g_i – аффинны) и для $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}, \hat{\boldsymbol{\mu}})$ выполнены условия ККТ, тогда

- выполнена сильная двойственность
- $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}, \hat{\boldsymbol{\mu}})$ – решения прямой и двойственной задач

Доказательство

- Первые два условия из ККТ $\rightarrow \hat{\mathbf{x}}$ лежит в допустимом множестве, то есть $g_i(\hat{\mathbf{x}}) = 0$ и $h_j(\hat{\mathbf{x}}) \leq 0$
- $\hat{\boldsymbol{\mu}} \geq 0 \rightarrow L(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}, \hat{\boldsymbol{\mu}})$ выпуклый по $\mathbf{x}$
- Последнее условие $\rightarrow \hat{\mathbf{x}}$ минимизирует L: $g(\hat{\boldsymbol{\lambda}}, \hat{\boldsymbol{\mu}}) = L(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}, \hat{\boldsymbol{\mu}}) = f_0(\hat{\mathbf{x}}) + \sum_{i=1}^m \hat{\boldsymbol{\lambda}}_i g_i(\hat{\mathbf{x}}) + \sum_{j=1}^p \hat{\boldsymbol{\mu}}_j h_j(\hat{\mathbf{x}})$
- Из условий дополняющей нежёсткости $\hat{\mu}_j h_j(\hat{\mathbf{x}}) = 0$ следует, что $g(\hat{\boldsymbol{\lambda}}, \hat{\boldsymbol{\mu}}) = f_0(\hat{\mathbf{x}})$
- Выполнена сильная двойственность
- $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}, \hat{\boldsymbol{\mu}})$ – решения прямой и двойственной задач

KKT для выпуклых задач

Утверждение 2

Пусть для выпуклой задачи выполнено условие Слейтера.
Тогда $\mathbf{x}$ решение прямой задачи тогда и только тогда, когда существуют $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$ такие, что для них выполнены условия KKT

KKT для выпуклых задач

Утверждение 2

Пусть для выпуклой задачи выполнено условие Слейтера. Тогда $\mathbf{x}$ решение прямой задачи тогда и только тогда, когда существуют $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$ такие, что для них выполнены условия KKT

Доказательство

ККТ для выпуклых задач

Утверждение 2

Пусть для выпуклой задачи выполнено условие Слейтера. Тогда $\mathbf{x}$ решение прямой задачи тогда и только тогда, когда существуют $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$ такие, что для них выполнены условия ККТ

Доказательство

- Из выпуклости и условий Слейтера следует выполнение сильной двойственности и достижимость минимума p^*

ККТ для выпуклых задач

Утверждение 2

Пусть для выпуклой задачи выполнено условие Слейтера.
Тогда $\mathbf{x}$ решение прямой задачи тогда и только тогда, когда существуют $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$ такие, что для них выполнены условия ККТ

Доказательство

- Из выпуклости и условий Слейтера следует выполнение сильной двойственности и достижимость минимума p^*
- Необходимость выполнения ККТ следует из утверждения для общего случая

ККТ для выпуклых задач

Утверждение 2

Пусть для выпуклой задачи выполнено условие Слейтера.
Тогда $\mathbf{x}$ решение прямой задачи тогда и только тогда, когда существуют $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$ такие, что для них выполнены условия ККТ

Доказательство

- Из выпуклости и условий Слейтера следует выполнение сильной двойственности и достижимость минимума p^*
- Необходимость выполнения ККТ следует из утверждения для общего случая
- Достаточность следует из утверждения 1

Главное

- Условие оптимальности для задачи безусловной оптимизации

Главное

- Условие оптимальности для задачи безусловной оптимизации
- Дифференциальный условий оптимальности для задачи условной оптимизации

Главное

- Условие оптимальности для задачи безусловной оптимизации
- Дифференциальный условий оптимальности для задачи условной оптимизации
- Двойственная функция и двойственная задача

Главное

- Условие оптимальности для задачи безусловной оптимизации
- Дифференциальный условий оптимальности для задачи условной оптимизации
- Двойственная функция и двойственная задача
- Сильная двойственность и условие Слейтера

Главное

- Условие оптимальности для задачи безусловной оптимизации
- Дифференциальный условий оптимальности для задачи условной оптимизации
- Двойственная функция и двойственная задача
- Сильная двойственность и условие Слейтера
- Условия Каруша-Куна-Таккера