Методы оптимизации
Лекция 1: Введение. Выпуклые множества

Александр Катруца

Физтех-школа прикладной математики и информатики
Московский физико-технический институт

7 сентября 2020 г.

О чём этот курс?

Теория: сентябрь — середина октября

- Выпуклые множества и функции
- Условия оптимальности
- Основы теории двойственности

Практика: середина октября — середина декабря

- Постановки задач оптимизации
- Методы решения задач без ограничений
- Методы решения задач с простыми ограничениями
- Линейное программирование
- Задачи конической оптимизации и SDP

Организационные вопросы

- Лекция и семинар каждую неделю

Организационные вопросы

- Лекция и семинар каждую неделю
- Отчётность

Организационные вопросы

- Лекция и семинар каждую неделю
- Отчётность
- Репозиторий со слайдами лекций:
  https://github.com/amkatrutsa/optimization-fivt

Организационные вопросы

- Лекция и семинар каждую неделю
- Отчётность
- Репозиторий со слайдами лекций: https://github.com/amkatrutsa/optimization-fivt
- Репозиторий со старыми семинарами: https://github.com/amkatrutsa/seminars-fivt

Литература

Основная книга

S. Boyd and L. Vandenberghe *Convex Optimization*

https://web.stanford.edu/~boyd/cvxbook/

Теория

- Ю.Е. Нестеров *Введение в выпуклую оптимизацию*
- A. Nemirovski *Lecture notes on Modern Convex Optimization*
- S. Bubeck *Convex Optimization: Algorithms and Complexity*
- R. T. Rockafellar *Convex analysis*

Практика

- J. Nocedal, S. J. Wright *Numerical Optimization*
- P. E. Gill, W. Murray, M. H. Wright *Practical optimization*
- Б.Т. Поляк *Введение в оптимизацию*

Зачем этот курс?

- Формализация задачи выбора элемента из множества

Зачем этот курс?

- Формализация задачи выбора элемента из множества
- Обоснование правильности принятия решения

Зачем этот курс?

- Формализация задачи выбора элемента из множества
- Обоснование правильности принятия решения
- Разнообразные приложения:

Зачем этот курс?

- Формализация задачи выбора элемента из множества
- Обоснование правильности принятия решения
- Разнообразные приложения:
  - машинное обучение: классификация, кластеризация, регрессия

Зачем этот курс?

- Формализация задачи выбора элемента из множества
- Обоснование правильности принятия решения
- Разнообразные приложения:
  - машинное обучение: классификация, кластеризация, регрессия
  - молекулярное моделирование

Зачем этот курс?

- Формализация задачи выбора элемента из множества
- Обоснование правильности принятия решения
- Разнообразные приложения:
  - машинное обучение: классификация, кластеризация, регрессия
  - молекулярное моделирование
  - анализ рисков

Зачем этот курс?

- Формализация задачи выбора элемента из множества
- Обоснование правильности принятия решения
- Разнообразные приложения:
  - машинное обучение: классификация, кластеризация, регрессия
  - молекулярное моделирование
  - анализ рисков
  - выбор активов (portfolio optimization)

Зачем этот курс?

- Формализация задачи выбора элемента из множества
- Обоснование правильности принятия решения
- Разнообразные приложения:
  - машинное обучение: классификация, кластеризация, регрессия
  - молекулярное моделирование
  - анализ рисков
  - выбор активов (portfolio optimization)
  - оптимальное управление

Зачем этот курс?

- Формализация задачи выбора элемента из множества
- Обоснование правильности принятия решения
- Разнообразные приложения:
  - машинное обучение: классификация, кластеризация, регрессия
  - молекулярное моделирование
  - анализ рисков
  - выбор активов (portfolio optimization)
  - оптимальное управление
  - обработка сигналов

Зачем этот курс?

- Формализация задачи выбора элемента из множества
- Обоснование правильности принятия решения
- Разнообразные приложения:
  - машинное обучение: классификация, кластеризация, регрессия
  - молекулярное моделирование
  - анализ рисков
  - выбор активов (portfolio optimization)
  - оптимальное управление
  - обработка сигналов
  - оценка параметров в статистике

Зачем этот курс?

- Формализация задачи выбора элемента из множества
- Обоснование правильности принятия решения
- Разнообразные приложения:
  - машинное обучение: классификация, кластеризация, регрессия
  - молекулярное моделирование
  - анализ рисков
  - выбор активов (portfolio optimization)
  - оптимальное управление
  - обработка сигналов
  - оценка параметров в статистике
  - и другие

Методология

Основные этапы использования методов оптимизации при решении реальных задач:

1. Определение целевой функции

Методология

Основные этапы использования методов оптимизации при решении реальных задач:

1. Определение целевой функции
2. Определение допустимого множества решений

Методология

Основные этапы использования методов оптимизации при решении реальных задач:

1. Определение целевой функции
2. Определение допустимого множества решений
3. Постановка и анализ оптимизационной задачи

Методология

Основные этапы использования методов оптимизации при решении реальных задач:

1. Определение целевой функции
2. Определение допустимого множества решений
3. Постановка и анализ оптимизационной задачи
4. Выбор наилучшего алгоритма для решения поставленной задачи

Методология

Основные этапы использования методов оптимизации при решении реальных задач:

1. Определение целевой функции
2. Определение допустимого множества решений
3. Постановка и анализ оптимизационной задачи
4. Выбор наилучшего алгоритма для решения поставленной задачи
5. Реализация алгоритма и проверка его корректности

Постановка задачи

$$
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{x} \in X} f_0(\mathbf{x}) \\
\text{s.t. } & f_i(\mathbf{x}) = 0, \; i = 1, \ldots, p \\
& f_j(\mathbf{x}) \leq 0, \; j = p+1, \ldots, m,
\end{aligned}
$$

Постановка задачи

$$\begin{aligned} &\min_{\mathbf{x} \in X} f_0(\mathbf{x}) \\ \text{s.t. } & f_i(\mathbf{x}) = 0, \; i = 1, \ldots, p \\ & f_j(\mathbf{x}) \leq 0, \; j = p+1, \ldots, m, \end{aligned}$$

- $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ — искомый вектор

Постановка задачи

$$
\begin{aligned}
& \min_{\mathbf{x} \in X} f_0(\mathbf{x}) \\
\text{s.t. } & f_i(\mathbf{x}) = 0, \; i = 1, \dots, p \\
& f_j(\mathbf{x}) \leq 0, \; j = p+1, \dots, m,
\end{aligned}
$$

- $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ — искомый вектор
- $f_0(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — целевая функция

Постановка задачи

$$
\begin{aligned}
& \min_{\mathbf{x} \in X} f_0(\mathbf{x}) \\
\text{s.t. } & f_i(\mathbf{x}) = 0, \; i = 1, \ldots, p \\
& f_j(\mathbf{x}) \leq 0, \; j = p+1, \ldots, m,
\end{aligned}
$$

- $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ — искомый вектор
- $f_0(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — целевая функция
- $f_k(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — функции ограничений

Постановка задачи

$$
\begin{aligned}
& \min_{\mathbf{x} \in X} f_0(\mathbf{x}) \\
\text{s.t. } & f_i(\mathbf{x}) = 0, \ i = 1, \ldots, p \\
& f_j(\mathbf{x}) \leq 0, \ j = p+1, \ldots, m,
\end{aligned}
$$

- $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ — искомый вектор
- $f_0(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — целевая функция
- $f_k(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — функции ограничений

Пример: выбор объектов для вложения денег и определение в какой объект сколько вкладывать

- $\mathbf{x}$ — размер инвестиций в каждый актив
- f_0 — суммарный риск или вариация прибыли
- f_k — бюджетные ограничения, min/max вложения в актив, минимально допустимая прибыль

Определения решений

Определения решений

Определение

Точка $\mathbf{x}^*$ *называется точкой* ***глобального*** *минимума, если* $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}^*)$ *для всех* $\mathbf{x}$ *из допустимого множества.*

Определения решений

Определение

Точка $\mathbf{x}^*$ *называется точкой **глобального** минимума, если* $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}^*)$ *для всех* $\mathbf{x}$ *из допустимого множества.*

Определение

Точка $\mathbf{x}^*$ *называется точкой **локального** минимума, если* $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}^*)$ *для всех* $\mathbf{x}$ *из окрестности точки* $\mathbf{x}^*$ *и допустимого множества.*

Определения решений

Определение

Точка $\mathbf{x}^*$ *называется точкой* ***глобального*** *минимума, если* $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}^*)$ *для всех* $\mathbf{x}$ *из допустимого множества.*

Определение

Точка $\mathbf{x}^*$ *называется точкой* ***локального*** *минимума, если* $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}^*)$ *для всех* $\mathbf{x}$ *из окрестности точки* $\mathbf{x}^*$ *и допустимого множества.*

Альтернативная запись задачи

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^* = & \arg\min_{\mathbf{x} \in X} f_0(\mathbf{x}) \\ \text{s.t. } & f_i(\mathbf{x}) = 0, \; i = 1, \ldots, p \\ & f_j(\mathbf{x}) \leq 0, \; j = p+1, \ldots, m, \end{aligned}$$

Как решать?

В общем случае:

- NP-полные
- рандомизированные алгоритмы: время vs. стабильность

Как решать?

В общем случае:

- NP-полные
- рандомизированные алгоритмы: время vs. стабильность

НО определённые классы задач могут быть решены быстро!

Как решать?

В общем случае:

- NP-полные
- рандомизированные алгоритмы: время vs. стабильность

НО определённые классы задач могут быть решены быстро!

- Линейное программирование
- Задача наименьших квадратов
- Задача о малоранговом приближении матрицы
- Выпуклая оптимизация

История развития

- 1940-ые — линейное программирование
- 1950-ые — квадратичное программирование
- 1960-ые — геометрическое программирование
- 1990-ые — полиномиальные методы внутренней точки для задач конической оптимизации

Современные направления

- Решение задач огромной размерности $(\sim 10^8 - 10^{12})$

Современные направления

- Решение задач огромной размерности $(\sim 10^8 - 10^{12})$
- Распределённая оптимизация

Современные направления

- Решение задач огромной размерности $(\sim 10^8 - 10^{12})$
- Распределённая оптимизация
- Быстрые методы первого порядка

Современные направления

- Решение задач огромной размерности $(\sim 10^8 - 10^{12})$
- Распределённая оптимизация
- Быстрые методы первого порядка
- Стохастические алгоритмы: масштабируемость vs. точности

Современные направления

- Решение задач огромной размерности $(\sim 10^8 - 10^{12})$
- Распределённая оптимизация
- Быстрые методы первого порядка
- Стохастические алгоритмы: масштабируемость vs. точности
- Невыпуклые задачи определённой структуры

Современные направления

- Решение задач огромной размерности ($\sim 10^8 - 10^{12}$)
- Распределённая оптимизация
- Быстрые методы первого порядка
- Стохастические алгоритмы: масштабируемость vs. точности
- Невыпуклые задачи определённой структуры
- Приложения выпуклой оптимизации

Линейное программирование (linear programming)

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \mathbf{c}^\top \mathbf{x}$$
$$\text{s.t. } \mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} \le b_i,\ i = 1, \dots, m$$

Линейное программирование (linear programming)

$$
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\
&\text{s.t. } \mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} \le b_i,\ i = 1, \dots, m
\end{aligned}
$$

- нет аналитического решения

Линейное программирование (linear programming)

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \mathbf{c}^\top \mathbf{x}$$
$$\text{s.t. } \mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} \le b_i,\ i = 1, \ldots, m$$

- нет аналитического решения
- существуют эффективные алгоритмы

Линейное программирование (linear programming)

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \mathbf{c}^\top \mathbf{x}$$
$$\text{s.t. } \mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} \le b_i,\ i = 1,\dots,m$$

- нет аналитического решения
- существуют эффективные алгоритмы
- разработанная технология

Линейное программирование (linear programming)

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \mathbf{c}^\top \mathbf{x}$$
$$\text{s.t. } \mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} \le b_i,\ i = 1, \dots, m$$

- нет аналитического решения
- существуют эффективные алгоритмы
- разработанная технология
- симплекс-метод входит в Top-10 алгоритмов XX века

Задача наименьших квадратов (linear least squares problem)

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2,$$

где $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ и $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$.

- имеет аналитическое решение: $\mathbf{x}^* = (\mathbf{A}^\top \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^\top \mathbf{b}$
- существуют эффективные алгоритмы
- разработанная технология
- имеет статистическую интерпретацию

Малоранговое приближение (low-rank approximation)

$$\min_{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{m \times n}} \|\mathbf{A} - \mathbf{X}\|_F$$

$$\text{s.t. } \operatorname{rank}(\mathbf{X}) \le k$$

Малоранговое приближение (low-rank approximation)

$$\min_{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{m \times n}} \|\mathbf{A} - \mathbf{X}\|_F$$
$$\text{s.t. } \operatorname{rank}(\mathbf{X}) \leq k$$

Теорема (Eckart–Young, 1993)

Пусть $\mathbf{A} = \mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^\top$ — сингулярное разложение (SVD) матрицы $\mathbf{A}$, где $\mathbf{U} = [\mathbf{U}_k, \mathbf{U}_{r-k}] \in \mathbb{R}^{m \times r}$, $\boldsymbol{\Sigma} = \mathrm{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_k, \dots, \sigma_r)$, $\mathbf{V} = [\mathbf{V}_k, \mathbf{V}_{r-k}] \in \mathbb{R}^{n \times r}$ и $r = \operatorname{rank}(\mathbf{A})$. Тогда решение задачи можно записать в виде:

$$\mathbf{X} = \mathbf{U}_k \hat{\boldsymbol{\Sigma}} \mathbf{V}_k^\top,$$

где $\hat{\boldsymbol{\Sigma}} = \mathrm{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$.

Сжатие

- Изображение $493 \times 700 \times 3$
- Каков эффективный ранг матрицы для каждого цвета?

Сжатие: $k = 10$

- Коэффициент сжатия $\frac{3\times(493\times10+10+10\times700)}{493\times700\times3} = 0.035$

Сжатие: $k = 50$

- Коэффициент сжатия $\frac{3\times(493\times50+50+50\times700)}{493\times700\times3} = 0.173$

Сжатие: $k = 100$

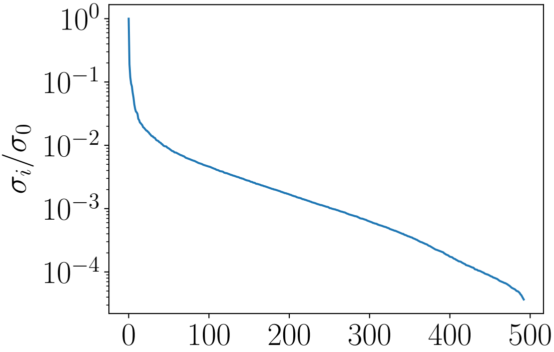
- Коэффициент сжатия $\frac{3\times(493\times100+100+100\times700)}{493\times700\times3} = 0.346$

Сжатие: $k = 150$

- Коэффициент сжатия $\frac{3\times(493\times150+150+150\times700)}{493\times700\times3} = 0.519$

Определение ранга

- Убывание сингулярных чисел связано с ошибкой аппроксимации
- Выбор ранга по величине сингулярного числа σ_k



Код доступен тут

Выпуклая оптимизация (convex optimization)

$$
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} f_0(\mathbf{x}) \\
\text{s.t. } & f_i(\mathbf{x}) \le 0,\ i = 1,\dots,m \\
& \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}
\end{aligned}
$$

Выпуклая оптимизация (convex optimization)

$$
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} f_0(\mathbf{x}) \\
\text{s.t. } & f_i(\mathbf{x}) \le 0, \ i = 1, \dots, m \\
& \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}
\end{aligned}
$$

- f_0, f_i — выпуклые функции:

$$f(\alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2) \le \alpha f(\mathbf{x}_1) + \beta f(\mathbf{x}_2),$$

где $\alpha, \beta \ge 0$ и $\alpha + \beta = 1$.

Выпуклая оптимизация (convex optimization)

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} f_0(\mathbf{x})$$
$$\text{s.t. } f_i(\mathbf{x}) \le 0,\ i = 1, \dots, m$$
$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

- f_0, f_i — выпуклые функции:

  $$f(\alpha \mathbf{x}_1 + \beta \mathbf{x}_2) \le \alpha f(\mathbf{x}_1) + \beta f(\mathbf{x}_2),$$

  где $\alpha, \beta \ge 0$ и $\alpha + \beta = 1$.
- нет аналитического решения

Выпуклая оптимизация (convex optimization)

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} f_0(\mathbf{x})$$
$$\text{s.t. } f_i(\mathbf{x}) \le 0,\ i = 1,\dots,m$$
$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

- f_0, f_i — выпуклые функции:

$$f(\alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2) \le \alpha f(\mathbf{x}_1) + \beta f(\mathbf{x}_2),$$

  где $\alpha, \beta \ge 0$ и $\alpha + \beta = 1$.
- нет аналитического решения
- существуют эффективные алгоритмы

Выпуклая оптимизация (convex optimization)

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f_0(\mathbf{x})$$
$$\text{s.t. } f_i(\mathbf{x}) \leq 0, \ i = 1, \ldots, m$$
$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

- f_0, f_i — выпуклые функции:

  $$f(\alpha \mathbf{x}_1 + \beta \mathbf{x}_2) \leq \alpha f(\mathbf{x}_1) + \beta f(\mathbf{x}_2),$$

  где $\alpha, \beta \geq 0$ и $\alpha + \beta = 1$.
- нет аналитического решения
- существуют эффективные алгоритмы
- часто сложно «увидеть» задачу выпуклой оптимизации

Выпуклая оптимизация (convex optimization)

$$\begin{aligned} &\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} f_0(\mathbf{x}) \\ \text{s.t. } &f_i(\mathbf{x}) \le 0,\ i = 1, \ldots, m \\ &\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \end{aligned}$$

- f_0, f_i — выпуклые функции:

  $$f(\alpha \mathbf{x}_1 + \beta \mathbf{x}_2) \le \alpha f(\mathbf{x}_1) + \beta f(\mathbf{x}_2),$$

  где $\alpha, \beta \ge 0$ и $\alpha + \beta = 1$.
- нет аналитического решения
- существуют эффективные алгоритмы
- часто сложно «увидеть» задачу выпуклой оптимизации
- существуют приёмы для преобразования задачи к стандартному виду

Почему выпуклость так важна?

Ralph Tyrrell Rockafellar (born 1935)

The great watershed in optimization is not between linearity and non-linearity, but convexity and non-convexity.

Почему выпуклость так важна?

Ralph Tyrrell Rockafellar (born 1935)

The great watershed in optimization is not between linearity and non-linearity, but convexity and non-convexity.

- Локальный оптимум является глобальным

Почему выпуклость так важна?

Ralph Tyrrell Rockafellar (born 1935)

The great watershed in optimization is not between linearity and non-linearity, but convexity and non-convexity.

- Локальный оптимум является глобальным
- Необходимое условие оптимальности является достаточным

Почему выпуклость так важна?

Ralph Tyrrell Rockafellar (born 1935)

The great watershed in optimization is not between linearity and non-linearity, but convexity and non-convexity.

- Локальный оптимум является глобальным
- Необходимое условие оптимальности является достаточным

Вопросы:

Почему выпуклость так важна?

Ralph Tyrrell Rockafellar (born 1935)

The great watershed in optimization is not between linearity and non-linearity, but convexity and non-convexity.

- Локальный оптимум является глобальным
- Необходимое условие оптимальности является достаточным

Вопросы:

- Любую ли задачу выпуклой оптимизации можно эффективно решить?

Почему выпуклость так важна?

Ralph Tyrrell Rockafellar (born 1935)

The great watershed in optimization is not between linearity and non-linearity, but convexity and non-convexity.

- Локальный оптимум является глобальным
- Необходимое условие оптимальности является достаточным

Вопросы:

- Любую ли задачу выпуклой оптимизации можно эффективно решить?
- Можно ли эффективно решить невыпуклые задачи оптимизации?

Выпуклые множества (convex sets)

Определение

Множество $C \subseteq \mathbb{R}^n$ *называется выпуклым, если для всех* $\alpha \in [0, 1]$ *и любых* $x, y \in C$ *выполнено*

$$\alpha x + (1 - \alpha) y \in C.$$

Выпуклые множества (convex sets)

Определение

Множество $C \subseteq \mathbb{R}^n$ *называется выпуклым, если для всех* $\alpha \in [0, 1]$ *и любых* $x, y \in C$ *выполнено*

$$\alpha x + (1 - \alpha) y \in C.$$

Примеры

- Многоугольники

Выпуклые множества (convex sets)

Определение

Множество $C \subseteq \mathbb{R}^n$ *называется выпуклым, если для всех* $\alpha \in [0, 1]$ *и любых* $x, y \in C$ *выполнено*

$$\alpha x + (1 - \alpha) y \in C.$$

Примеры

- Многоугольники
- Гиперплоскости

Выпуклые множества (convex sets)

Определение

Множество $C \subseteq \mathbb{R}^n$ *называется выпуклым, если для всех* $\alpha \in [0, 1]$ *и любых* $x, y \in C$ *выполнено*

$$\alpha x + (1 - \alpha) y \in C.$$

Примеры

- Многоугольники
- Гиперплоскости
- Шары в *любой* норме и эллипсоиды

Выпуклые множества (convex sets)

Определение

Множество $C \subseteq \mathbb{R}^n$ *называется выпуклым, если для всех* $\alpha \in [0, 1]$ *и любых* $x, y \in C$ *выполнено*

$$\alpha x + (1 - \alpha) y \in C.$$

Примеры

- Многоугольники
- Гиперплоскости
- Шары в *любой* норме и эллипсоиды
- Симметричные положительно определённые матрицы

Пересечение выпуклых множеств

Теорема

Пересечение конечного или бесконечного числа выпуклых множеств C_i является выпуклым множеством:

$$C = \bigcap_{i \in \mathcal{I}} C_i.$$

Пересечение выпуклых множеств

Теорема

Пересечение конечного или бесконечного числа выпуклых множеств C_i является выпуклым множеством:

$$C = \bigcap_{i \in \mathcal{I}} C_i.$$

Доказательство

- Рассмотрим $x, y \in C \to x, y \in C_i, \forall i \in \mathcal{I}$

Пересечение выпуклых множеств

Теорема

Пересечение конечного или бесконечного числа выпуклых множеств C_i является выпуклым множеством:

$$C = \bigcap_{i \in \mathcal{I}} C_i.$$

Доказательство

- Рассмотрим $x, y \in C \to x, y \in C_i, \forall i \in \mathcal{I}$
- Построим точку $z = \alpha x + (1 - \alpha) y$, $\alpha \in [0, 1]$

Пересечение выпуклых множеств

Теорема

Пересечение конечного или бесконечного числа выпуклых множеств C_i является выпуклым множеством:

$$C = \bigcap_{i \in \mathcal{I}} C_i.$$

Доказательство

- Рассмотрим $x, y \in C \to x, y \in C_i, \forall i \in \mathcal{I}$
- Построим точку $z = \alpha x + (1 - \alpha) y$, $\alpha \in [0, 1]$
- Так как все C_i выпуклы, то $z \in C_i$, $\forall i \in \mathcal{I}$

Пересечение выпуклых множеств

Теорема

Пересечение конечного или бесконечного числа выпуклых множеств C_i является выпуклым множеством:

$$C = \bigcap_{i \in \mathcal{I}} C_i.$$

Доказательство

- Рассмотрим $x, y \in C \to x, y \in C_i, \forall i \in \mathcal{I}$
- Построим точку $z = \alpha x + (1 - \alpha) y$, $\alpha \in [0, 1]$
- Так как все C_i выпуклы, то $z \in C_i$, $\forall i \in \mathcal{I}$
- Следовательно, $z \in C$ и C — выпукло

Линейное отображение выпуклых множеств

Теорема

Образ выпуклого множества при линейном отображении является выпуклым множеством.

Доказательство

- Пусть C — выпуклое множество и $x, y \in C$

Линейное отображение выпуклых множеств

Теорема

Образ выпуклого множества при линейном отображении является выпуклым множеством.

Доказательство

- Пусть C — выпуклое множество и $x, y \in C$
- Пусть f — линейное отображение вида $f(x) = Ax + b$

Линейное отображение выпуклых множеств

Теорема

Образ выпуклого множества при линейном отображении является выпуклым множеством.

Доказательство

- Пусть C — выпуклое множество и $x, y \in C$
- Пусть f — линейное отображение вида $f(x) = Ax + b$
- Покажем, что $\alpha f(x) + (1 - \alpha) f(y) \in f(C)$, где $\alpha \in [0, 1]$

Линейное отображение выпуклых множеств

Теорема

Образ выпуклого множества при линейном отображении является выпуклым множеством.

Доказательство

- Пусть C — выпуклое множество и $x, y \in C$
- Пусть f — линейное отображение вида $f(x) = Ax + b$
- Покажем, что $\alpha f(x) + (1 - \alpha) f(y) \in f(C)$, где $\alpha \in [0, 1]$
- Действительно,

$$\alpha f(x) + (1-\alpha)f(y) = \alpha(Ax + b) + (1-\alpha)(Ay + b) =$$
$$A(\alpha x + (1-\alpha)y) + b = Az + b = f(z),$$

где $z = \alpha x + (1-\alpha)y \in C$

Арифметические операции над выпуклыми множествами

Теорема

Сумма Минковского выпуклых множеств является выпуклым множеством.

Арифметические операции над выпуклыми множествами

Теорема

Сумма Минковского выпуклых множеств является выпуклым множеством.

Доказательство

- Пусть C_1, C_2 — выпуклые множества. Рассмотрим $C = C_1 + C_2 = \{x_1 + x_2 \mid x_1 \in C_1,\ x_2 \in C_2\}$

Арифметические операции над выпуклыми множествами

Теорема

Сумма Минковского выпуклых множеств является выпуклым множеством.

Доказательство

- Пусть C_1, C_2 — выпуклые множества. Рассмотрим $C = C_1 + C_2 = \{x_1 + x_2 \mid x_1 \in C_1,\ x_2 \in C_2\}$
- Пусть $\hat{x} = \hat{x}_1 + \hat{x}_2$ и $\tilde{x} = \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2$ лежат в C. Покажем, что в C лежит точка $\alpha\hat{x} + (1-\alpha)\tilde{x}$

Арифметические операции над выпуклыми множествами

Теорема

Сумма Минковского выпуклых множеств является выпуклым множеством.

Доказательство

- Пусть C_1, C_2 — выпуклые множества. Рассмотрим $C = C_1 + C_2 = \{x_1 + x_2 \mid x_1 \in C_1,\ x_2 \in C_2\}$
- Пусть $\hat{x} = \hat{x}_1 + \hat{x}_2$ и $\tilde{x} = \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2$ лежат в C. Покажем, что в C лежит точка $\alpha\hat{x} + (1-\alpha)\tilde{x}$
- Действительно,

  $\alpha\hat{x}+(1-\alpha)\tilde{x} = [\alpha\hat{x}_1+(1-\alpha)\tilde{x}_1]+[\alpha\hat{x}_2+(1-\alpha)\tilde{x}_2] = y_1+y_2,$

  где $y_1 \in C_1$ и $y_2 \in C_2$ в силу выпуклости множеств C_1, C_2.

Арифметические операции над выпуклыми множествами

Теорема

Сумма Минковского выпуклых множеств является выпуклым множеством.

Доказательство

- Пусть C_1, C_2 — выпуклые множества. Рассмотрим $C = C_1 + C_2 = \{x_1 + x_2 \mid x_1 \in C_1,\ x_2 \in C_2\}$
- Пусть $\hat{x} = \hat{x}_1 + \hat{x}_2$ и $\tilde{x} = \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2$ лежат в C. Покажем, что в C лежит точка $\alpha\hat{x} + (1-\alpha)\tilde{x}$
- Действительно,

  $\alpha\hat{x}+(1-\alpha)\tilde{x} = [\alpha\hat{x}_1+(1-\alpha)\tilde{x}_1]+[\alpha\hat{x}_2+(1-\alpha)\tilde{x}_2] = y_1+y_2,$

  где $y_1 \in C_1$ и $y_2 \in C_2$ в силу выпуклости множеств C_1, C_2.

Следствие

Линейная комбинация выпуклых множеств — выпуклое множество

Конусы (cones)

Определение

Множество K называется конусом, если для любого $x \in K$ и произвольного числа $\theta \geq 0$ выполнено $\theta x \in K$.

Определение

Множество K называется **выпуклым** *конусом, если для любых точек $x_1, x_2 \in K$ и любых чисел $\theta_1 \geq 0$, $\theta_2 \geq 0$ выполнено $\theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 \in K$.*

Конусы (cones)

Определение

Множество K называется конусом, если для любого $x \in K$ и произвольного числа $\theta \geq 0$ выполнено $\theta x \in K$.

Определение

Множество K называется ***выпуклым*** *конусом, если для любых точек $x_1, x_2 \in K$ и любых чисел $\theta_1 \geq 0,\ \theta_2 \geq 0$ выполнено $\theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 \in K$.*

Важные конусы

Конусы (cones)

Определение

Множество K называется конусом, если для любого $x \in K$ и произвольного числа $\theta \geq 0$ выполнено $\theta x \in K$.

Определение

*Множество K называется **выпуклым** конусом, если для любых точек $x_1, x_2 \in K$ и любых чисел $\theta_1 \geq 0,\ \theta_2 \geq 0$ выполнено $\theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 \in K$.*

Важные конусы

- Неотрицательный октант
  $\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, n\} \to$ LP

Конусы (cones)

Определение

Множество K называется конусом, если для любого $x \in K$ и произвольного числа $\theta \geq 0$ выполнено $\theta x \in K$.

Определение

*Множество K называется **выпуклым** конусом, если для любых точек $x_1, x_2 \in K$ и любых чисел $\theta_1 \geq 0,\ \theta_2 \geq 0$ выполнено $\theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 \in K$.*

Важные конусы

- Неотрицательный октант
  $\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0,\ i = 1, \dots, n\} \to$ LP
- Конус второго порядка $\{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\|_2 \leq t\} \to$ SOCP

Конусы (cones)

Определение

Множество K называется конусом, если для любого $x \in K$ и произвольного числа $\theta \geq 0$ выполнено $\theta x \in K$.

Определение

Множество K называется ***выпуклым*** *конусом, если для любых точек $x_1, x_2 \in K$ и любых чисел $\theta_1 \geq 0,\ \theta_2 \geq 0$ выполнено $\theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 \in K$.*

Важные конусы

- Неотрицательный октант $\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, n\} \to$ LP
- Конус второго порядка $\{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\|_2 \leq t\} \to$ SOCP
- Конус симметричных положительно полуопределённых матриц $\mathbf{S}^n_+ \to$ SDP

Выпуклая оболочка (convex hull)

Определение

Выпуклой оболочкой множества X *называется такое множество* $\mathrm{conv}(X)$, *что*

- *оно является пересечением всех выпуклых множеств, содержащих* X
- *оно содержит все выпуклые комбинации точек из* X

$$\mathrm{conv}(X) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \theta_i x_i \mid x_i \in X, \sum_{i=1}^{k} \theta_i = 1, \theta_i \geq 0 \right\}$$

- *оно является минимальным по включению выпуклым множеством, содержащим* X

Использование выпуклых оболочек

- При постановке задачи допустимое множество получилось **невыпуклым**

Использование выпуклых оболочек

- При постановке задачи допустимое множество получилось **невыпуклым**
- Можно заменить само множество его выпуклой оболочкой

Использование выпуклых оболочек

- При постановке задачи допустимое множество получилось **невыпуклым**
- Можно заменить само множество его выпуклой оболочкой
- Решить задачу на этом множестве

Использование выпуклых оболочек

- При постановке задачи допустимое множество получилось **невыпуклым**
- Можно заменить само множество его выпуклой оболочкой
- Решить задачу на этом множестве
- Восстановить некоторым образом приближённое решение из исходной области

Главное

- Постановки задач оптимизации: целевая функция, допустимое множество, ограничения

Главное

- Постановки задач оптимизации: целевая функция, допустимое множество, ограничения
- Примеры задач оптимизации и приложения

Главное

- Постановки задач оптимизации: целевая функция, допустимое множество, ограничения
- Примеры задач оптимизации и приложения
- Выпуклые множества

Главное

- Постановки задач оптимизации: целевая функция, допустимое множество, ограничения
- Примеры задач оптимизации и приложения
- Выпуклые множества
- Способы определения является ли множество выпуклым