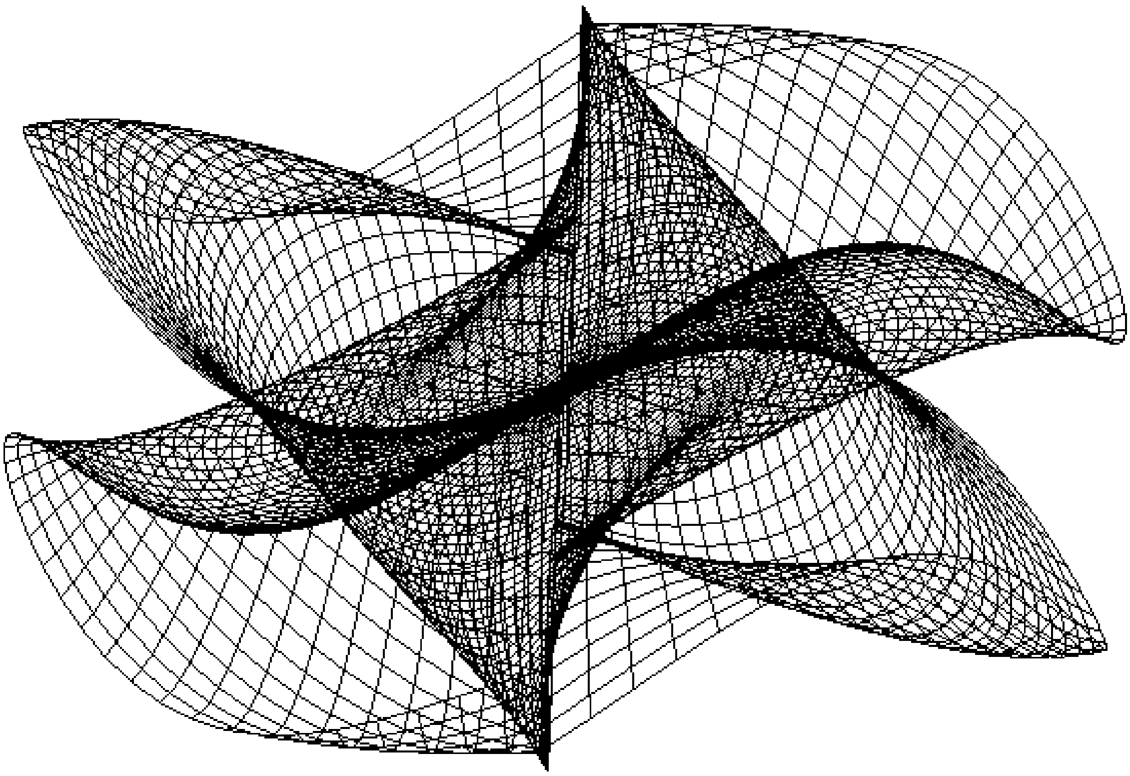
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БИРСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ СОЦИАЛЬНО-
ПЕДАГОГИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ»

Латыпов И.И.

Численные методы

Лабораторный практикум



Учебное пособие

Книга 1

Бирск 2010

УДК 519.65(07)
ББК 22.192Я73
Л-27

Печатается по решению
редакционно-издательского совета
Бирской государственной
социально-педагогической
академии

Рецензенты:
Доктор физико-математических наук, доцент **Асадуллин Р.М.** (БГПУ),
кандидат физико-математических наук, доцент **Чудинов В.В.** (БирГСПА)

Допущено Учебно-методическим объединением по направлениям педагогического образования Министерства образования и науки РФ в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению 050200 Физико-математическое образование.

Латыпов И.И. Численные методы. Лабораторный практикум: Книга 1.– М.: Изд. Дом «Лидер-М», 2010. – 105 с.
ISBN 978-5-91823-014-5

В данном пособии даны темы лекционного курса «Численные методы», необходимый теоретический материал для выполнения лабораторных и контрольных работ; задания к лабораторным и контрольным работам с образцами выполнения данных заданий, требования, предъявляемые к студентам при оформлении лабораторных и контрольных работ; предложен примерный перечень тем для проведения вычислительного практикума.

Учебное пособие адресовано студентам очного и заочного отделений физико-математического факультета, обучающимся по специальностям «информатика», «математика с дополнительной специальностью информатика» «физика с дополнительной специальностью информатика», а также может быть полезно аспирантам, занимающимся проблемами математического моделирования и численного решения практических задач.

ISBN 978-5-91823-014-5

Содержание

Численные методы
Лабораторный практикум
Учебное пособие. Книга 1

Раздел 1. Введение.

Учебное пособие по курсу «Численные методы» включает тематику курса лекций, практических и лабораторных занятий, контрольных работ; содержит список вопросов выносимых на самостоятельное изучение, а так же темы, которые могут быть изучены в рамках вычислительного практикума и выполнены как курсовые работы. Предлагаются возможные формы отчета по выполняемым лабораторным и домашним контрольным работам, вычислительного практикума.

Дается перечень основной литературы.

Цель курса: ознакомление с различными методами численного решения классических модельных задач прикладной математики и математической физики, с оценками погрешностей вычисления результатов. Построение математической модели, сведение поставленной задачи к модельной задаче с известными методами решения, реализация алгоритма решения на языке программирования, проведение численного эксперимента является необходимым для широкого круга специалистов, в том числе и учителям математики, физики, информатики.

Задачи курса.

Студент должен изучить:

- основные проблемы и задачи прикладной математики, математического моделирования и численных методов;
- этапы математического моделирования и численного решения задачи на ЭВМ;
- вопросы применимости численных методов к поставленным задачам (теорема существования и единственности решения, устойчивость решения к малым возмущениям, корректность и некорректность постановки задачи);
- методы численного решения основных модельных задач прикладной математики и математической физики;
- способы оценки погрешности метода и численного решения в соответствии с правилами теории погрешностей;
- вопросы построения численного алгоритма и его программная реализация на ЭВМ;

- правила проведения численного эксперимента и проверки адекватности полученного численного результата с изучаемым явлением;

Темы лекционного курса

Введение. Математические модели и численные методы. Решение задач с использованием ЭВМ. Приближенное решение, причины возникновения погрешностей и их классификация. Проблема нахождения приближенного решения, устойчивость и корректность.

Глава 1. Элементы теории погрешностей.

Тема 1.1. Абсолютная и относительная погрешности. Значащая цифра, число верные знаков.

Тема 1.2. Округление чисел. Правило округления по дополнению. Связь относительной погрешности и числа верных знаков.

Тема 1.3. Погрешность суммы, разности, произведения и частного. Общая формула для погрешности.

Тема 1.4. Определение относительных погрешностей степени, корня, предельных абсолютных погрешностей элементарных функций.

Глава 2. Приближенное решение нелинейных уравнений.

Тема 2.1. Методы приближенного решения нелинейных уравнений. Методы отделения изолированных корней уравнения, оценка погрешности.

Тема 2.2. Метод половинного деления, хорд, метод касательных, комбинированный метод. Оценка погрешности приближения.

Тема 2.3. Метод итерации. Графическая интерпретация метода итерации. Теорема о сходимости итерационного процесса. Оценка погрешности решения. Алгоритм численного решения нелинейных уравнений.

Глава 3. Решение систем линейных уравнений.

Тема 3.1. Точные и приближенные методы решения систем линейных уравнений. Метод квадратного корня, метод Халецкого.

Тема 3.2. Метод итерации. Теорема о сходимости итерационного процесса. Метод Зейделя. Оценка погрешности приближения.

Тема 3.3. Метод итерации.

Глава 4. Приближение функций.

Тема 4.1. Приближение функции. Метод наименьших квадратов.

Тема 4.2. Приближение функции. Сплайны. Кубические сплайны.

Глава 5. Интерполирование функций.

Тема 5.1. Интерполирование функций. Постановка задачи. Конечные разности. Центральные разности.

Тема 5.2. Интерполяционные формулы Ньютона. Оценка погрешности.

Тема 5.3. Интерполяционная формула Лагранжа. Оценка погрешности интерполяционной формулы Лагранжа.

Тема 5.4. Обратное интерполирование.

Глава 6. Приближенное дифференцирование.

Тема 6.1. Приближенное дифференцирование. Постановка задачи. Методы приближенного дифференцирования.

Глава 7. Приближенное интегрирование.

Тема 7.1. Приближенное интегрирование. Квадратурные формулы Ньютона-Котеса.

Тема 7.2 Приближенное интегрирование. Формулы прямоугольников (правых, левых и средних). Оценки погрешностей.

Тема 7.3. Формулы трапеции и Симпсона. Остаточный член.

Тема 7.4. Метод Монте-Карло. Оценка погрешности.

Глава 8. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений.

Тема 8.1. Постановка задачи. Задача Коши. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Метод Пикара.

Тема 8.2. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений методом Эйлера, модификации этого метода. Оценка погрешности приближенного решения.

Тема 8.3. Семейство методов Рунге-Кутта. Оценка погрешности метода на шаге. Порядок метода. Классические варианты метода Рунге-Кутта.

Тема 8.4. Решение систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Постановка задачи. Задача Коши. Приближенное решение систем обыкновенных дифференциальных уравнений методом Рунге-Кутта.

Глава 9. Решение граничных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Тема 9.1. Постановка задачи. Сведение граничных задач к задачам Коши.

Тема 9.2. Метод Галеркина и метод моментов.

Тема 9.3. Сетки и сеточные функции. Разностные уравнения.

Тема 9.4. Метод сеток решения граничных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Метод прогонки.

Глава 10. Решение дифференциальных уравнений в частных производных.

Тема 10.1. Основные понятия разностных схем. Построение разностной схемы. Погрешность аппроксимации дифференциального уравнения разностным уравнением. Сходимость и устойчивость разностных схем.

Тема 10.2. Консервативные разностные схемы. Методы построения разностных схем.

Тема 10.3. Численное решение дифференциальных уравнений эллиптического типа. Метод сеток решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона.

Тема 10.4. Численное решение дифференциальных уравнений параболического типа. Метод сеток решения смешанной задачи для уравнения теплопроводности.

Тема 10.5. Численное решение дифференциальных уравнений гиперболического типа. Метод сеток решения смешанной задачи для уравнения гиперболического типа.

Темы спецкурсов.

Тема 1. Приближение функций.

Часть 1. Равномерное приближение.

§ 1.Постановка задачи. Теоремы Вейерштрасса об аппроксимации.

§ 2. Наилучшее приближение функции многочленами.

§ 3. Многочлены Чебышева и Бернштейна.

Часть 2. Интерполирование функций.

§ 1. Интерполирование функции. Постановка задачи.

§ 2. Интерполяционные формулы Гаусса, Стирлинга, Бесселя, Эверетта.

§ 3. Интерполирование периодических функций тригонометрическими полиномами.

§ 4. Интерполирование с кратными узлами.

Часть 3. Приближение функций сплайнами.

§ 1. Постановка задачи. Интерполяционные кубические сплайны.

§ 2. Сглаживающие кубические сплайны.

§ 3. Сплайновые кривые. Кривые Безье.

§ 4. В - сплайновые и Бета - сплайновые кривые.

§ 5. Сплайновые поверхности.

Часть 4. Квадратичное приближение

§ 1. Приближение функций по методу наименьших квадратов.

§ 2. Квадратичное приближение периодических функций тригонометрическими многочленами.

§ 3. Квадратичное приближение методом Чебышева.

Тема 2. Методы минимизации функций.

Часть 1. Методы минимизации функций (МФ) одной переменной.

§ 1. Постановка задачи. Глобальные и локальные минимумы (максимумы). Унимодальные функции.
§ 2. Классический метод МФ. Метод деления отрезка пополам.
§ 3. Симметричные методы. Метод золотого сечения.
§ 4. Оптимальные методы. Метод Фибоначчи.
§ 5. Метод ломаных. Метод покрытий.
§ 6. Методы минимизации выпуклых функций. Метод касательных.
§ 7. Методы поиска глобального минимума. Метод парабол.
§ 8. Стохастический метод минимизации.

Часть 2. Методы минимизации функций многих переменных.
§ 1. Постановка задачи минимизации. Теорема Вейерштрасса.
§ 2. Классический метод.
§ 3. Градиентный метод. Методы проекции градиента и субградиента, условного градиента.
§ 4. Метод возможных направлений, сопряженных направлений.
§ 5. Методы Ньютона и Стеффенсена.
§ 6. Метод покоординатного спуска.
§ 7. Метод поиска глобального минимума.
§ 8. Метод модифицированных функций Лагранжа.
§ 9. Метод штрафных функций.
§ 10. Метод барьерных функций, нагруженных функций.
§ 11. Метод случайного поиска.

Тема 3. Численные методы решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений специального вида.

§ 1. Введение в дискретные методы решения задачи Коши. Вопросы реализации алгоритмов.
§ 2. Одношаговые методы типа Рунге-Кутты. Условия порядка. Способы оценки погрешностей одношаговых методов. Распространение одношаговых методов на системы ОДУ.
§ 3. Многошаговые методы и их реализация. Переменный порядок и шаг. Распространение многошаговых методов на системы ОДУ.
§ 4. Экстраполяционные методы.
§ 5. Явление жесткости и его влияние на выбор методов решения задачи Коши.
§ 6. Неявные одношаговые (типа Рунге-Кутты) и многошаговые методы. Вопросы их реализации.
§ 7. Структурный метод интегрирования систем ОДУ. Алгоритмы конструирования и реализации его расчетных схем.

§ 8. Современные численные методы интегрирования, наиболее распространенных в задачах моделирования, систем ОДУ специального вида

Список необходимой литературы дан в конце пособия.

Раздел 2. Тематика лабораторных работ

<u>Форма отчёта</u>:

1) Постановка задач. Краткая теория (метод решения). Геометрическая интерпретация.
2) Алгоритм решения поставленной задачи. (Блок-схема).
3) Текст программы.
4) Тестовый пример.
5) Численный расчёт по данным исходной задачи с оценкой погрешности результата. Протокол работы программы.
6) Анализ полученного результата.

Пояснения к отдельным пунктам отчета.

Постановка задачи включает краткую математическую формулировку задачи с пояснением отдельных моментов, а также необходимые графики и/или рисунки. Должны быть приведены основные моменты применяемых методов.

Алгоритм решения задачи может быть оформлен или в виде блок-схемы, или в словесной форме. Допускается описание алгоритма осмысленными частями (блоками).

Текст программы численного решения задачи должен быть написан на предлагаемом языке программирования, который может быть изменен по согласованию с преподавателем данного курса.

Под тестовым примером или тестом понимается задача (аналогичная по постановке искомой задаче) у которой известно точное решение, что позволяет сравнить численные результаты (приближенное и точное решения) и оценить допускаемую погрешность. По результатам тестирования должен быть сделан вывод.

Протокол работы программы должен включать результаты как по тестовому примеру, так и численного расчета искомой задачи. Результаты численных расчетов должны быть оформлены по всем правилам записи приближенных чисел, т.е. запись приближенного решения только с верными значащими цифрами и допускаемой погрешностью.

Анализ численных результатов должен дать ответ на вопрос, соответствуют ли полученные результаты искомому решению поставленной задачи и почему.

Краткая теория к лабораторным и контрольным работам

Приближенное решение нелинейного уравнения

1. Метод половинного деления.

Постановка задачи. Дано нелинейное уравнение $F(x)=0$, где функция $y=F(x)$ определена и непрерывна для всех $x\in[a,b]$, причем функция меняет знак на концах этого отрезка, т.е. $F(a)\cdot F(b)<0$.

Найти приближенное решение данного уравнения $F(x)=0$ с точностью $\varepsilon=10^{-3}$, а так же необходимое для этого число разбиений отрезка $[a,b]$.

Приближенное решение $\tilde{\xi}$ и погрешность приближения $\Delta_{\tilde{\xi}}$ находятся по следующей схеме:

$$\tilde{\xi}=\frac{a_n+b_n}{2},\ \Delta\tilde{\xi}=\frac{b_n-a_n}{2},\ n=0,1,2,\ldots;\ a_0=a,\ b_0=b;$$

где $b_n-a_n=\frac{b_{n-1}-a_{n-1}}{2}=\frac{b-a}{2^n}$, удовлетворяет условиям $F(a_n)\cdot F(b_n)<0$, $(b_n-a_n)\le\varepsilon$; из последнего определяется число разбиений отрезка $n\ge\log_2\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)$.

2. Метод хорд.

Постановка задачи. Дано нелинейное уравнение $F(x)=0$, где функция $y=F(x)$ определена и непрерывно-дифференцируема для всех $x\in[a,b]$, причем функция меняет знак на концах этого отрезка, т.е. $F(a)\cdot F(b)<0$.

Найти приближенное решение данного уравнения $F(x)=0$ с точностью $\varepsilon=10^{-3}$.

Приближенное решение $\tilde{\xi}$ и погрешность приближения $\Delta_{\tilde{\xi}}$ находятся по следующей схеме:

если $F(b)\cdot F''(x)>0$ на $[a,b]$, то $x_{n+1}=b-\frac{F(b)}{F(b)-F(x_n)}\left(b-x_n\right)$, $x_0=a$, $n=0,1,2,\ldots$;

если $F(a)\cdot F''(x)>0$ на $[a,b]$, то $x_{n+1}=a-\frac{F(a)}{F(x_n)-F(a)}\left(x_n-a\right)$, $x_0=b$, $n=0,1,2,\ldots$

.

Приближенное решение $\tilde{\xi}$ и погрешность приближения $\Delta_{\tilde{\xi}}$:

$$\tilde{\xi}=x_{n+1},\ \Delta\tilde{\xi}=\left|x_{n+1}-\xi\right|\le\varepsilon.$$

3. Метод Ньютона (метод касательных).

Постановка задачи. Дано нелинейное уравнение $F(x)=0$, где функция $y=F(x)$ определена и непрерывно-дифференцируема для всех $x\in[a,b]$, причем функция меняет знак на концах этого отрезка, т.е. $F(a)\cdot F(b)<0$.

Найти приближенное решение данного уравнения $F(x)=0$ с точностью $\varepsilon=10^{-3}$.

Приближенное решение $\tilde{\xi}$ и погрешность приближения $\Delta_{\tilde{\xi}}$ находятся по следующей схеме:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)}, \quad n = 0,1,2,\dots;$$

если $F(b) \cdot F''(x) > 0$ на $[a,b]$, то $x_0 = b$;

если $F(a) \cdot F''(x) > 0$ на $[a,b]$, то $x_0 = a$.

Приближенное решение $\tilde{\xi}$ и погрешность приближения $\Delta_{\tilde{\xi}}$:

$$\tilde{\xi} = x_{n+1}, \quad \Delta\tilde{\xi} = |x_{n+1} - \xi| \le \varepsilon.$$

4. Метод итерации.

Постановка задачи. Дано нелинейное уравнение, где функция $y = F(x)$ определена и непрерывно-дифференцируема для всех $x \in [a,b]$, причем функция меняет знак на концах этого отрезка, т.е. $F(a) \cdot F(b) < 0$.

Найти приближенное решение данного уравнения $F(x) = 0$ с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$.

Приближенное решение $\tilde{\xi}$ и погрешность приближения $\Delta_{\tilde{\xi}}$ находятся по следующей схеме:

- уравнение $F(x) = 0$ приводится к виду $x = \varphi(x)$, где функция $y = \varphi(x)$ удовлетворяет условиям: $\varphi(x) \in [a,b]$, дифференцируема на данном отрезке и $0 < |\varphi'(x)| \le q < 1$;
- строится итерационная последовательность вида $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, $n = 0,1,2,\dots$, где x_0 выбирается произвольно из данного отрезка, например, $x_0 = \frac{b+a}{2}$;
- полагая $\tilde{\xi} = x_n$ приближенное значение корня ξ, для погрешности получим $\Delta_{\tilde{\xi}} = |\xi - \tilde{\xi}| \le \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}|$, а так как по условию $\Delta_{\tilde{\xi}} \le \varepsilon$, то итерационный процесс продолжим до выполнения условия $|x_n - x_{n-1}| \le \frac{1-q}{q} \cdot \varepsilon$, при этом приближенное значение корня определяется как $\tilde{\xi} = x_n$.

Приближенное решение $\tilde{\xi}$ и погрешность приближения $\Delta_{\tilde{\xi}}$:

$$\tilde{\xi} = x_n, \quad \Delta\tilde{\xi} = |x_n - x_{n-1}| \frac{q}{1-q} \le \varepsilon.$$

5. Метод хорд и касательных.

Постановка задачи. Дано нелинейное уравнение, где функция $y = F(x)$ определена и непрерывно-дифференцируема для всех $x \in [a,b]$, причем функция меняет знак на концах этого отрезка, т.е. $F(a) \cdot F(b) < 0$.

Найти приближенное решение данного уравнения $F(x)=0$ с точностью $\varepsilon=10^{-3}$.

Приближенное решение $\tilde{\xi}$ и погрешность приближения $\Delta_{\tilde{\xi}}$ находятся по следующей схеме:

если $F(b)\cdot F''(x)>0$ на $[a,b]$, то

$$x_0=a\,,\ x_{n+1}=\overline{x}_n-\frac{F(\overline{x}_n)}{F(\overline{x}_n)-F(x_n)}(\overline{x}_n-x_n)\,,$$

$$\overline{x}_0=b\,,\ \overline{x}_{n+1}=\overline{x}_n-\frac{F(\overline{x}_n)}{F'(\overline{x}_n)}\,,\qquad n=0,1,2,\ldots\,;$$

если $F(a)\cdot F''(x)>0$ на $[a,b]$, то

$$x_0=b\,,\ x_{n+1}=\overline{x}_n-\frac{F(\overline{x}_n)}{F(x_n)-F(\overline{x}_n)}(x_n-\overline{x}_n)\,,$$

$$\overline{x}_0=a\,,\ \overline{x}_{n+1}=\overline{x}_n-\frac{F(\overline{x}_n)}{F'(\overline{x}_n)}\,,\qquad n=0,1,2,\ldots\,.$$

Приближенное решение $\tilde{\xi}$ и погрешность приближения $\Delta_{\tilde{\xi}}$:

$$\xi=\frac{x_{n+1}+\overline{x}_{n+1}}{2}\,,\ \Delta\tilde{\xi}=\frac{1}{2}\left|x_{n+1}-\overline{x}_{n+1}\right|\le\varepsilon\,.$$

Приближенное решение системы линейных алгебраических уравнений

<u>*Постановка задачи*</u>**.** Найти приближенное решение системы линейных алгебраических уравнений $Ax=b$, где $A=\{a_{i,j}\}$, $i,j=\overline{1,n}$, $x=(x_i)^T$, $b=(b_i)^T$, $i=\overline{1,n}$.

Если $|A|\ne 0$, то система имеет единственное решение.

Явный метод итерации. Представим данную систему в виде приведенной системы

$$x=\beta+\alpha\cdot x\,,$$

где $\alpha=\{\alpha_{i,j}\}$, $\alpha_{i,i}=-\dfrac{\tilde{a}_{i,i}}{\overline{a}_{i,i}}$, $\alpha_{i,j}=-\dfrac{a_{i,j}}{\overline{a}_{i,i}},\ i\ne j$, $a_{i,i}=\tilde{a}_{i,i}+\overline{a}_{i,i}$, $\overline{a}_{i,i}\ne 0$, $i,j=\overline{1,n}$;

$$\beta_i=\frac{b_i}{\overline{a}_{i,i}}\,.$$

Приближенное решение ищем по следующей итерационной схеме

$$x^{(s+1)}=\beta+\alpha\cdot x^{(s)}\ \ (*)\,,\ x^{(0)}=\beta\ \text{ или }\ x_i^{(0)}=\beta_i\,,\ i=\overline{1,n}\,,\ s=0,1,2,\ldots\,.$$

Для сходимости итерационной последовательности $(*)$ необходимо выполнение следующего условия: $\|\alpha\|_p<1$. Где $p=\{m,\,l,\,k\}$ канонические нормы:

$$\|\alpha\|_m = \max_i \left\{ \sum_{j=1}^{n} \left|\alpha_{i,j}\right| \right\},\ i=\overline{1,n};\ \|\alpha\|_l = \max_j \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left|\alpha_{i,j}\right| \right\},\ j=\overline{1,n};\ \|\alpha\|_k = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|\alpha_{i,j}\right|^2}\ .$$

Итерационная последовательность продолжается до выполнения условия

$$\left\| x^{(s)} - x^{(s-1)} \right\|_p \le \frac{1-\|\alpha\|_p}{\|\alpha\|_p}\varepsilon,\ x^{(0)} = \beta,\ s = 1, 2, \dots .$$

Тогда за приближенное решение можно взять

$$\xi = x^{(s)},\ \Delta_\xi = \left\| x^{(s)} - x^{(s-1)} \right\|_p \cdot \frac{\|\alpha\|_p}{1-\|\alpha\|_p}\ .$$

Явный метод Зейделя. По данному методу приближенное решение ищется по следующей схеме

$$x_i^{(k+1)} = \beta_i + \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i}^{n} a_{i,j} x_j^{(k)},\ i = \overline{1,n}\ .$$

Определение сходимости и оценка погрешности производится так же, как и для метода итерации.

Интерполирование функций полиномом.

Постановка задачи. Функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a;b]$, задана своими значениями y_i в равноотстоящих узлах $x_i \in [a;b]$, т.е. $y_i = f(x_i)$. Определить значение функции $y_\xi = y(\xi)$ в точке $\xi \in [a;b]$.

1. **Полином Ньютона**. Если функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a;b]$ и задана своими значениями y_i в равноотстоящих узлах $x_i \in [a;b]$, $x_{i+1} = x_i + h$, $h = const > 0$, то задача интерполяции решается в двух случаях.
   a) Когда точка $\xi \in [a;b]$ находится в начале таблицы значений $x_i \in [a;b]$ используется первая интерполяционная формула Ньютона

$$P_n(\xi) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \dots + \frac{q(q-1)\dots(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0,$$

$$q = \frac{\xi - x_0}{h},\ \Delta y_i = y_{i+1} - y_i,\ \Delta^{k+1} y_i = \Delta^k y_{i+1} - \Delta^k y_i,\ \Delta^0 y_i = y_i\ .$$

Тогда $y_\xi = f(\xi) \approx P_n(\xi)$, $\Delta_{y(\xi)} = \dfrac{h^{n+1}}{(n+1)!}\left| f^{(n+1)}(\bar{\xi}) \right| \cdot \prod_{k=0}^{n}(q-k)$, $\bar{\xi} \in [a;b]$.

   b) Когда точка $\xi \in [a;b]$ находится в конце таблицы значений $x_i \in [a;b]$ используется вторая интерполяционная формула Ньютона

$$P_n(\xi) = y_n + q\Delta y_n + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-1} + \frac{q(q+1)(q+2)}{3!}\Delta^3 y_{n-2} + \dots + \frac{q(q+1)\dots(q+n-1)}{n!}\Delta^n y_0$$

,

$$q=\frac{x_n-\xi}{h}.$$

Тогда $y_\xi = f(\xi) \approx P_n(\xi)$, $\Delta_{y(\xi)} = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\left|f^{(n+1)}(\bar{\xi})\right| \cdot \prod_{k=0}^{n}(q+k)$, $\bar{\xi} \in [a;b]$.

2. **Интерполяционная формула Лагранжа.** Если функция $y=f(x)$ определена на отрезке $[a;b]$ и дана своими значениями y_i в не равноотстоящих узлах $x_i \in [a;b]$, $x_{i+1} \neq x_i + h$, $h = const > 0$, то задача интерполяции решается с помощью полинома Лагранжа

$$L_n(\xi) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{k\neq i,0}^{n}\left(\frac{\xi - x_k}{x_i - x_k}\right),\ y_\xi = f(\xi) \approx L_n(\xi),\ \Delta_{y(\xi)} = \frac{\prod_{k=0}^{n}(\xi - x_k)}{(n+1)!}\left|f^{(n+1)}(\bar{\xi})\right|,\ \bar{\xi} \in [a;b]$$

.

Приближенное решение обратной задачи интерполирования

<u>*Постановка задачи*</u>. Пусть функция $y=f(x)$ определена на отрезке $[a;b]$ и задана своими значениями y_i в точках $x_i \in [a;b]$. Необходимо найти значение аргумента $\xi \in [a;b]$ по известному значению функции в этой точке $y_\xi = f(\xi)$.

Предположим, что $y=f(x)$ монотонна на отрезке $[a;b]$ и $y_\xi \in [y_0;y_1]$, где $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$.

Задача обратного интерполирования решается для двух случаев: для равноотстоящих и не равноотстоящих узлов.

а) Случай равноотстоящих узлов, т.е. $x_i \in [a;b]$, $x_{i+1} = x_i + h$, $h = const > 0$; предположим так же, что $f(x) \in C^{(n+1)}[a;b]$ и h достаточно мал.

Тогда задача решается использованием первого интерполяционного полинома Ньютона

$$y_\xi \approx y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \cdots + \frac{q(q-1)\ldots(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0,$$

где необходимо определить $q = \frac{\xi - x_0}{h}$, чтобы найти $\xi = x_0 + h \cdot q$. Выделив из полинома q получим уравнение $q = \varphi(q)$, где

$$\varphi(q) = \frac{1}{\Delta y_0}\left(\frac{y_\xi - y_0}{1!} - \frac{\Delta^2 y_0}{2!}q(q-1) - \frac{\Delta^3 y_0}{3!}q(q-1)(q-2) - \frac{\Delta^n y_0}{n!}q(q-1)\cdots(q-n+1)\right).$$

Решение данного уравнения можно искать например методом половинного деления или методом итерации по схеме $q_m = \varphi(q_{m-1})$, полагая $q_0 = 0$, $q_1 = \frac{y_\xi - y_0}{\Delta y_0}$, и так далее. То предел $\lim_{m\to\infty} q_m = q_\xi$ будет решением уравнения.

Тогда $\xi = x_0 + h \cdot q_\xi$ будет решением обратной задачи интерполирования. Погрешность полученного решения будет состоять из погрешностей интерполяционной формулы и метода итерации.

b) Случай не равноотстоящих узлов, т.е. $x_i \in [a;b]$, $x_{i+1} \neq x_i + h$, $h = const > 0$.

В этом случае используется формула Лагранжа, считая y независимой переменной, выражая x через y:

$$\xi \approx L_n(y_\xi) = \sum_{i=0}^{n} x_i \prod_{k\neq i,0}^{n} \left(\frac{y - y_k}{y_i - y_k} \right), \quad \Delta_\xi = \frac{\prod\limits_{k=0}^{n} (y_\xi - y_k)}{(n+1)!} \left| f^{-(n+1)}(\bar{y}) \right|,$$

$$\bar{y} \in \left[\min(y_k); \max(y_k) \right], \ k = \overline{0,n}.$$

Приближенное дифференцирование

<u>*Постановка задачи*</u>. Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a;b]$ и задана своими значениями y_i в точках $x_i \in [a;b]$. Для приближенного дифференцирования функцию $y = f(x)$ заменяют интерполирующей функцией $F(x)$ и полагают

$$f(x) \approx F(x), \ f^{(k)}(x) \approx F^{(k)}(x), \ k = 1, 2, 3, \dots, n;$$

с погрешностью $R(x) = f(x) - F(x)$, $R^{(k)}(x) = f^{(k)}(x) - F^{(k)}(x) = r_k(x)$, $k = 1, 2, 3, \dots, n$.

Тогда при $k = 1$ получим

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} \approx \frac{1}{h} \left[\Delta y_0 + \frac{2q-1}{2} \Delta^2 y_0 + \frac{3q^2 - 6q + 2}{6} \Delta^3 y_0 + \frac{2q^3 - 9q^2 + 11q - 3}{12} \Delta^4 y_0 + \dots \right],$$

при $k = 2$

$$f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \approx \frac{1}{h^2} \left[\Delta^2 y_0 + \frac{q-1}{1} \Delta^3 y_0 + \frac{6q^2 - 18q + 11}{12} \Delta^4 y_0 + \dots \right].$$

Если $x = x_0$, то $q = \dfrac{x - x_0}{h} = |x = x_0| = 0$

$$f'(x_0) \approx \frac{1}{h} \left[\Delta y_0 - \frac{1}{2} \Delta^2 y_0 + \frac{1}{3} \Delta^3 y_0 - \frac{1}{4} \Delta^4 y_0 + \dots \right],$$

$$f''(x_0) \approx \frac{1}{h^2} \left[\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11}{12} \Delta^4 y_0 + \dots \right],$$

$$R'(x_0) = (-1)^n \frac{h^n}{n+1} f^{(n+1)}(\bar{x}), \ \bar{x} \in [a;b].$$

Численное интегрирование

<u>*Постановка задачи*</u>. Пусть функция $y = f(x)$ определена и интегрируема на отрезке $[a;b]$. Необходимо найти значение определенного интеграла $I = \int_a^b f(x)\,dx$, когда первообразная $F(x)$, $F'(x) = f(x)$ неизвестна или ее трудно найти, или $y = f(x)$ задана своими значениями $y_i = f(x_i)$, $i = \overline{0,n}$, $x_i \in [a;b]$.

Общий подход в численном интегрировании заключается в следующем:

a) Для функции $y = f(x)$ строится аппроксимирующая функция $F(x)$, так чтобы $f(x) \approx F(x)$ на отрезке $[a;b]$, при этом класс аппроксимирующей функции $F(x)$ может зависеть от свойств функции $y = f(x)$, от необходимой точности вычисления интеграла, от числа арифметических действий, от времени работы алгоритма и т.д.;

b) Функция $F(x)$ выбирается так, чтобы интеграл $\int_a^b F(x)\,dx$ легко считался;

c) Функция $F(x)$ выбирается так, чтобы $I = \int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b F(x)\,dx$ или $\left| I - \int_a^b F(x)\,dx \right| \le \varepsilon$, где ε - задаваемая точность вычисления интеграла.

Для применения методов численного интегрирования делят отрезок $[a;b]$ системой равноотстоящих точек $x_i = x_0 + i \cdot h$, $h = \frac{b-a}{n}$, $i = \overline{0,n}$, $x_0 = a$, $x_n = b$ на отрезки $[x_k, x_{k+1}]$, $k = \overline{0, n-1}$ и рассматривают сумму интегралов $I = \sum_{k=0}^{n-1} I_k = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx$.

Исходя из этих соображений и допущений обычно используют следующие формулы численного интегрирования.

1. **Формула левых прямоугольников**. В этом случае $f(x)$ на отрезке $[x_k, x_{k+1}]$ заменяется функцией $F(x) = f(x_k)$, тогда

$$I_k \approx \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k)\,dx = f(x_k)\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} dx = f(x_k)[x_{k+1}-x_k] = h\cdot f(x_k),$$

$$I = \sum_{k=0}^{n-1} h\cdot f(x_k) = h\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k),\ \Delta_I \le \frac{n\cdot h^2}{2}\max_{x\in[a,b]}\left|f'(x)\right|.$$

2. **Формула правых прямоугольников**. В этом случае $f(x)$ на отрезке $[x_k, x_{k+1}]$ заменяется функцией $F(x) = f(x_{k+1})$, тогда

$$I_k \approx \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_{k+1})\,dx = f(x_{k+1})\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} dx = f(x_k)[x_{k+1}-x_k] = h\cdot f(x_{k+1}),$$

$$I = \sum_{k=0}^{n-1} h\cdot f(x_{k+1}) = h\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1}),\ \Delta_I \le \frac{n\cdot h^2}{2}\max_{x\in[a,b]}\left|f'(x)\right|.$$

3. **Формула средних прямоугольников**. В этом случае $f(x)$ на отрезке $[x_k, x_{k+1}]$ заменяется функцией $F(x) = f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right)$, тогда

$$I_k \approx \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right)dx = f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right)\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} dx = f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right)[x_{k+1}-x_k] = h\cdot f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right)$$

,

$$I = \sum_{k=0}^{n-1} h\cdot f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) = h\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right),\ \Delta_I \le \frac{n\cdot h^3}{24}\max_{x\in[a,b]}\left|f''(x)\right|.$$

4. **Формула трапеций**. В этом случае $f(x)$ на отрезке $[x_k, x_{k+1}]$ заменяется функцией $F(x) = \frac{1}{2}\left[f(x_k) + f(x_{k+1})\right]$, тогда

$$I_k \approx \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{1}{2}\left[f(x_k) + f(x_{k+1})\right]dx = \frac{1}{2}\left[f(x_k) + f(x_{k+1})\right]\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} dx = \frac{h}{2}\left[f(x_k) + f(x_{k+1})\right],$$

$$I = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{h}{2}\left[f(x_k) + f(x_{k+1})\right] = \frac{h}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\left[f(x_k) + f(x_{k+1})\right],\ \Delta_I \le \frac{n\cdot h^3}{12}\max_{x\in[a,b]}\left|f''(x)\right|.$$

5. **Формулы Ньютона-Котеса.** Если $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ заменить интерполирующим полиномом Лагранжа $F(x) = L_n(x)$, то получим формулы Ньютона-Котеса

$$I = (b-a)\sum_{k=0}^{n} y_k H_k,\ H_k = \frac{(-1)^k}{(n-k)!\,n}\cdot\int\limits_0^n \frac{q^{[n+1]}}{(q-k)}dq,\ q^{[n+1]} = q(q-1)(q-2)\cdots(q-n).$$

При $n = 1$ получим из этих соотношений формулу трапеции.

6. **Формула Симпсона.** Получается из формул Ньютона-Котеса при четном числе разбиений $n=2m$ отрезка $[a;b]$ и рассмотрении интерполяции функции $f(x)$ на трех точках, т.е. $f(x)$ приближается квадратичным трехчленом вида $F(x)=cx^2+dx+e$:

$$I=\frac{h}{3}\sum_{k=0}^{m-1}\left[f(x_{2k})+4f(x_{2k+1})+f(x_{2k+2})\right],\ \Delta_I\le\frac{n\cdot h^5}{180}\max_{x\in[a,b]}\left|f^{(4)}(x)\right|.$$

Приближенное решение задачи Коши обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

<u>*Постановка задачи.*</u> Найти приближенные значения решения $y=y(x)$ обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) $y'(x)=f(x,y)$ на отрезке $x\in[a,b]$ с шагом h при начальном условии $y(x_0)=y_0$

1. **Метод Эйлера**:

$$\begin{cases} y_{i+1}=y_i+h\cdot f(x_i,y_i), \\ \Delta y_{i+1}=\Delta y_i+O\left(h^2\right),\ i=0,1,2,\dots. \end{cases}$$

2. **Усовершенствованный метод ломаных**:

$$\begin{cases} x_{i+1/2}=x_i+\frac{h}{2},\quad y_{i+1/2}=y_i+\frac{h}{2}\cdot f(x_i,y_i), \\ y_{i+1}=y_i+\frac{h}{2}f\left(x_{i+1/2},y_{i+1/2}\right),\ i=0,1,2,\dots, \\ \Delta y_{i+1}=\Delta y_i+O\left(h^2\right). \end{cases}$$

3. **Метод Эйлера-Коши**:

$$\begin{cases} \overline{y}_{i+1}=y_i+h\cdot f(x_i,y_i), \\ y_{i+1}=y_i+\frac{h}{2}\left[f(x_i,y_i)+f(x_{i+1},\overline{y}_{i+1})\right], \\ \Delta y_{i+1}=\Delta y_i+O\left(h^3\right),\ i=0,1,2,\dots. \end{cases}$$

4. **Метод Эйлера с уточнением**:

$$\begin{cases} y_{i+1}^{(0)}=y_i+h\cdot f(x_i,y_i), \\ y_{i+1}^{(k)}=y_i+\frac{h}{2}\left[f(x_i,y_i)+f\left(x_{i+1},y_{i+1}^{(k)}\right)\right], \qquad i=0,1,2,\dots. \\ k=\overline{1,n},\quad \left|y_{i+1}^{(n)}-y_{i+1}^{(n-1)}\right|<\varepsilon,\ \Delta y_{i+1}=\Delta y_i+O\left(h^3\right), \end{cases}$$

5. **Метод Рунге-Кутта четвертого порядка**

$$
\begin{cases}
k_{1,i} = h \cdot f\left(x_i, y_i\right), \\
k_{2,i} = h \cdot f\left(x_i + \dfrac{h}{2}, y_i + \dfrac{1}{2} k_{1,i}\right), \\
k_{3,i} = h \cdot f\left(x_i + \dfrac{h}{2}, y_i + \dfrac{1}{2} k_{2,i}\right), \\
k_{4,i} = h \cdot f\left(x_i + h, y_i + k_{3,i}\right),
\end{cases}
$$

$$
y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}\left(k_{1,i} + 2k_{2,i} + 2k_{3,i} + k_{4,i}\right),
$$

$$
\Delta y_{i+1} = \Delta y_i + O\left(h^5\right), \; i = 0,1,2,\dots .
$$

Лабораторная работа № 1

Тема: Решение нелинейных уравнений. Метод половинного деления.

Задание: 1) Отделить корни уравнения графически и программно .

2) Уточнить корни (все!) уравнения методом половинного деления с точностью $\varepsilon = 0,0001$, указать число разбиений отрезка.

Вопросы самоконтроля.

1) Как отделяются корни уравнения?
2) Какой должна быть величина шага при отделении корней?
3) Какие условия должны быть выполнены для применения метода половинного деления отрезка?
4) Какова идея метода половинного деления отрезка? Геометрическая иллюстрация.
5) Как вычисляется приближенный корень уравнения и какова его погрешность?
6) Как зависит погрешность результата от выбора приближенного решения?

Вариант	Уравнение
1	$x^4 - 18x^2 + 6 = 0$
2	$2e^x + 3x + 1 = 0$
3	$x^2 - 3 + 0,5^x = 0$
4	$5\sin(x) = x - 1$
5	$\cos(x + 0,3) = x^2$
6	$x^4 - x - 1 = 0$
7	$x^2 - 20\sin(x) = 0$
8	$2 \cdot \lg(x) - \frac{x}{2} + 1 = 0$
9	$2x^2 - 0,5^x - 3 = 0$
10	$2^x - 3x - 2 = 0$
11	$ctg(x) - \frac{x}{3} = 0$

Вариант	Уравнение
31	$2x - \lg(x) - 3 = 0$
32	$\lg(x) - \frac{4}{2x+1} = 0$
33	$5x + \lg(x) = 3$
34	$x^3 - 3x^2 + x - 2 = 0$
35	$x^3 - 2x^2 + 2x - 3 = 0$
36	$2e^x + 5x + 1 = 0$
37	$3\sin(x) = x - 2$
38	$\cos(x - 0,5) = x^2$
39	$x^4 + 2x^2 - x - 1 = 0$
40	$3x^2 - 2\sin(x) = 0$
41	$2 \cdot \lg(x) - \frac{x}{3} + 1,5 = 0$

12	$x^3 - 2x + 4 = 0$	42	$3x^2 - 0,5^x - 1 = 0$
13	$x^2 + 4\sin(x) = 0$	43	$2^x - x - 4 = 0$
14	$x^3 - 6x - 7 = 0$	44	$ctg(x + 0,5) - \frac{x}{3} = 0$
15	$4x - \cos(x) - 1 = 0$	45	$x^3 + x^2 - 2x + 3 = 0$
16	$x + \lg(x) = 0,45$	46	$x^2 - 1 + 2\sin(x) = 0$
17	$tg(0,3x + 0,5) = x^2$	47	$x^3 - 2x - 7 = 0$
18	$x^3 - 3x^2 + 2x - 1,5 = 0$	48	$4x - 2\cos(x) - 1 = 0$
19	$2x - \lg(x) - 5 = 0$	49	$x + 2 \cdot \lg(x) = 0,5$
20	$\lg(x) - \frac{5}{2x + 3} = 0$	50	$tg(0,2x + 0,3) = x^2 - 1$
21	$0,5x + \lg(x) = 1$	51	$x^3 - 1,3x^2 + x - 1 = 0$
22	$x^3 + x - 4 = 0$	52	$2x - 3 \cdot \lg(x) - 3 = 0$
23	$x^3 - 0,5x^2 + x + 3 = 0$	53	$2 \cdot \lg(x) - \frac{5}{4x + 3} = 0$
24	$x^3 - x^2 + 2x + 3 = 0$	54	$1,5x + \lg(x) = 2$
25	$x^2 - 4\cos(x) = 0$	55	$x^3 + x^2 - 3 = 0$
26	$x^3 - 3x - 4 = 0$	56	$x^3 - 2x^2 + 3x - 4 = 0$
27	$4x - \cos(x) - 2 = 0$	57	$x^3 - 3x^2 + 2x + 3 = 0$
28	$x + 2 \cdot \lg(x) = 1,45$	58	$3x^2 - 2\cos(x) = 0$
29	$tg(0,5x - 0,3) = x^2 - 1$	59	$x^3 + 2x^2 - 3x - 1 = 0$
30	$x^3 - 3x^2 + 4x - 5 = 0$	60	$4x - 2\cos(x) - 1 = 0$

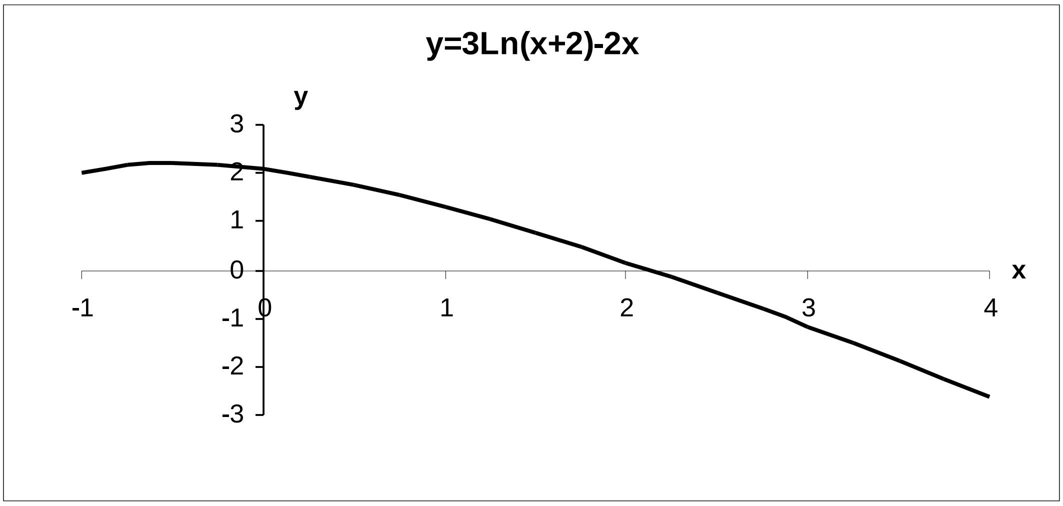
Образец выполнения лабораторной работы № 1

(Решение нелинейных уравнений. Метод половинного деления.)

Постановка задачи. Найти корень нелинейного уравнения $F(x) \equiv 3 \cdot \ln(x+2) - 2 \cdot x = 0$ методом итерации с точностью $\varepsilon = 0,0001$.

Решение задачи. Отделим корень уравнения на отрезке $[-1;\,4]$ графическим методом. Для этого табулируем функцию $y(x) = 3\cdot\ln(x+2) - 2x$ на данном отрезке.

Имеем $\varepsilon = 0{,}0001$, $a = -1$, $b = 4$, $n = 20$, $h = 0{,}25$



Выделим отрезок $[1;3]$, содержащий изолированный корень, для уточнения которого применим метод половинного деления по схеме $\tilde{\xi} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$, $\Delta_{\tilde{\xi}} = \dfrac{b_n - a_n}{2}$, $n = 0,1,2,\ldots$, где $b_n - a_n = \dfrac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2} = \dfrac{b-a}{2^n}$, $F(a_n)\cdot F(b_n) < 0$. Полагая $a_0 = 1$, $b_0 = 3$, а так же условие остановки деления отрезка пополам $\Delta_{\tilde{\xi}} = \dfrac{b_n - a_n}{2} \le \varepsilon$, составим таблицу

a_i	b_i	$\dfrac{b_i + a_i}{2}$	$F(a_i)$	$F(b_i)$	$F\left(\dfrac{b_i + a_i}{2}\right)$	корень	погрешность	Усл.ост.
1,00000000	3,00000000	2,00000000	1,29583687	-1,17168626	0,15888308		1,00000000	нет
2,00000000	3,00000000	2,50000000	0,15888308	-1,17168626	-0,48776781		0,50000000	нет
2,00000000	2,50000000	2,25000000	0,15888308	-0,48776781	-0,15924305		0,25000000	нет
2,00000000	2,25000000	2,12500000	0,15888308	-0,15924305	0,00119806		0,12500000	нет
2,12500000	2,25000000	2,18750000	0,00119806	-0,15924305	-0,07868831		0,06250000	нет
2,12500000	2,18750000	2,15625000	0,00119806	-0,07868831	-0,03866032		0,03125000	нет
2,12500000	2,15625000	2,14062500	0,00119806	-0,03866032	-0,01870977		0,01562500	нет
2,12500000	2,14062500	2,13281250	0,00119806	-0,01870977	-0,00875050		0,00781250	нет
2,12500000	2,13281250	2,12890625	0,00119806	-0,00875050	-0,00377488		0,00390625	нет
2,12500000	2,12890625	2,12695313	0,00119806	-0,00377488	-0,00128807		0,00195313	нет
2,12500000	2,12695313	2,12597656	0,00119806	-0,00128807	-0,00004492		0,00097656	нет
2,12500000	2,12597656	2,12548828	0,00119806	-0,00004492	0,00057659		0,00048828	нет
2,12548828	2,12597656	2,12573242	0,00057659	-0,00004492	0,00026584		0,00024414	нет
2,12573242	2,12597656	2,12585449	0,00026584	-0,00004492	0,00011046		0,00012207	нет
2,12585449	2,12597656	2,12591553	0,00011046	-0,00004492	0,00003277	2,12591553	0,00006104	да

2,12591553	2,12597656	2,12594604	0,00003277	-0,00004492	-0,00000608	2,12594604	0,00003052	да
2,12591553	2,12594604	2,12593079	0,00003277	-0,00000608	0,00001335	2,12593079	0,00001526	да

Приближенное решение $\tilde{\xi} = x_{14} = 2{,}12591553$, погрешность $\Delta_{\tilde{\xi}} = 0{,}00006104$, число итераций $k = 14$.

Следовательно, приближенное значение корня равно $\tilde{\xi} = 2{,}12591553 \pm 0{,}00006104$.

Запишем приближенное значение корня только верными значащими цифрами в узком смысле.

Имеем $\Delta_{\tilde{\xi}} = 0{,}00006104 \le \frac{1}{2}10^{-3} = \frac{1}{2}10^{m-n+1}$, $m = 0$, $n = 4$. Округлим $\tilde{\xi} = 2{,}12591553$ до $n = 4$. Получим $\tilde{\xi}_1 = 2{,}126$, $\Delta_{окр} = \left|\tilde{\xi} - \tilde{\xi}_1\right| \le 0{,}000085$, $\Delta_{\tilde{\xi}_1} = \Delta_{окр} + \Delta_{\tilde{\xi}_1} \le 0{,}000147$.

Найдем число верных знаков для $\tilde{\xi}_1 = 2{,}126$. Имеем $\Delta_{\tilde{\xi}_1} = 0{,}000147 \le \frac{1}{2}10^{-3} = \frac{1}{2}10^{m-n_1+1}$, $m = 0$, $n_1 = 4$. Так как $n_1 = n$, то получим приближенное значение корня с числом верных знаков $n_1 = 4$.

Ответ: $\tilde{\xi} = 2{,}126 \pm 0{,}000147;\ k = 14.$

Лабораторная работа № 2

Тема: Решение нелинейных уравнений. Метод итерации.

Задание: 1) Отделить корни уравнения графически и программно.

2) Уточнить один из корней уравнения методом итерации с точностью $\varepsilon = 0{,}001$, указать число итераций.
3) Нарисовать схему применения метода итерации к данному корню уравнения.

Вопросы самоконтроля.

1) Как отделяются корни уравнения?
2) Какой должна быть величина шага при отделении корней?
3) Какие условия должны быть выполнены для применения метода итерации?
4) Какова идея метода итерации? Геометрическая иллюстрация.
5) Какое условие должно выполняться для сходимости итерационной последовательности?
6) Как находится равносильное уравнение, применяемое для итерационного процесса? Критерий выбора равносильного уравнения.
7) Как определяется погрешность метода итерации при заданной точности?

8) Какие положительные и отрицательные стороны метода итерации (сравнить с методом деления отрезка пополам)?

Вариант	Уравнение	Вариант	Уравнение
1	$\lg(x)-\frac{5}{3x+2}=0$	31	$3x-\cos(x)-1=0$
2	$2e^{x}+3x+1=0$	32	$x+2\cdot\lg(x)=1{,}45$
3	$x^{3}+x-3=0$	33	$x+\lg(x)=0{,}35$
4	$x^{3}-1{,}2x^{2}+x+3=0$	34	$tg(3x+0{,}5)=x^{2}$
5	$x^{3}-x^{2}+2x+1=0$	35	$x^{3}-3x^{2}+2x-5=0$
6	$x^{2}-2\cos(x)=0$	36	$3x-2\cos(x)-1=0$
7	$x^{3}-3x-3=0$	37	$\cos(2x+0{,}3)=x^{2}-2x$
8	$3x-\cos(x)-2=0$	38	$2x-\lg(x)-3=0$
9	$x+3\cdot\lg(x)=1{,}25$	39	$x^{4}+2x^{2}+2x-1=0$
10	$tg(0{,}5x-1{,}2)=x^{2}-1$	40	$x^{2}-2\sin(x)=0$
11	$x^{3}-2x^{2}+3x-4=0$	41	$4\cdot\lg(x)-\frac{x}{3}+1=0$
12	$2x-\lg(x)-2=0$	42	$3x^{2}-0{,}5^{x}-2=0$
13	$\lg(x)-\frac{5}{2x+1}=0$	43	$2^{x}-3x+2=0$
14	$5x+\lg(x)=2$	44	$ctg(x-1{,}5)-\frac{x}{3}=0$
15	$x^{3}-3x^{2}+4x-2=0$	45	$x^{3}+x^{2}+3=0$
16	$x^{3}-4x^{2}+2x-3=0$	46	$x^{2}-2+2\sin(x)=0$
17	$3e^{x}+5x+1=0$	47	$x^{3}-2x^{2}-7=0$
18	$3\sin(x)=x-1{,}2$	48	$4x-3\cos(x)-1=0$
19	$\cos(2x-0{,}5)=x^{2}$	49	$x+2\cdot\lg(x)=2{,}5$
20	$x^{4}-5x^{2}+6=0$	50	$tg(0{,}2x+0{,}3)=x^{2}-$

21	$0,5x + \lg(x) = 1,5$		51	$x^3 - 3x^2 + x - 1 = 0$
22	$\cos(2x + 0,3) = x^2$		52	$3x - 3 \cdot \lg(x) - 2 = 0$
23	$x^4 - x^2 - 1 = 0$		53	$3 \cdot \lg(x) - \frac{4}{2x+3} = 0$
24	$3 \cdot \lg(x) - \frac{x}{4} + 1 = 0$		54	$1,5x + \lg(x) = 3$
25	$2x^2 - 0,5^x - 1 = 0$		55	$x^3 + 4x^2 - 3 = 0$
26	$2^x - 3x - 1 = 0$		56	$x^3 - 2x^2 - 4 = 0$
27	$ctg(x) - \frac{3x}{4} = 0$		57	$x^3 - 5x^2 + 2x + 3 = 0$
28	$x^3 - 3x + 2 = 0$		58	$3x^2 - 2\cos(x) = 0$
29	$x^2 + 5\sin(x+1) = 0$		59	$x^3 + 2x^2 - 3x - 1 = 0$
30	$x^3 - 6x^2 - 7 = 0$		60	$x^2 + 4\sin(x) = 0$

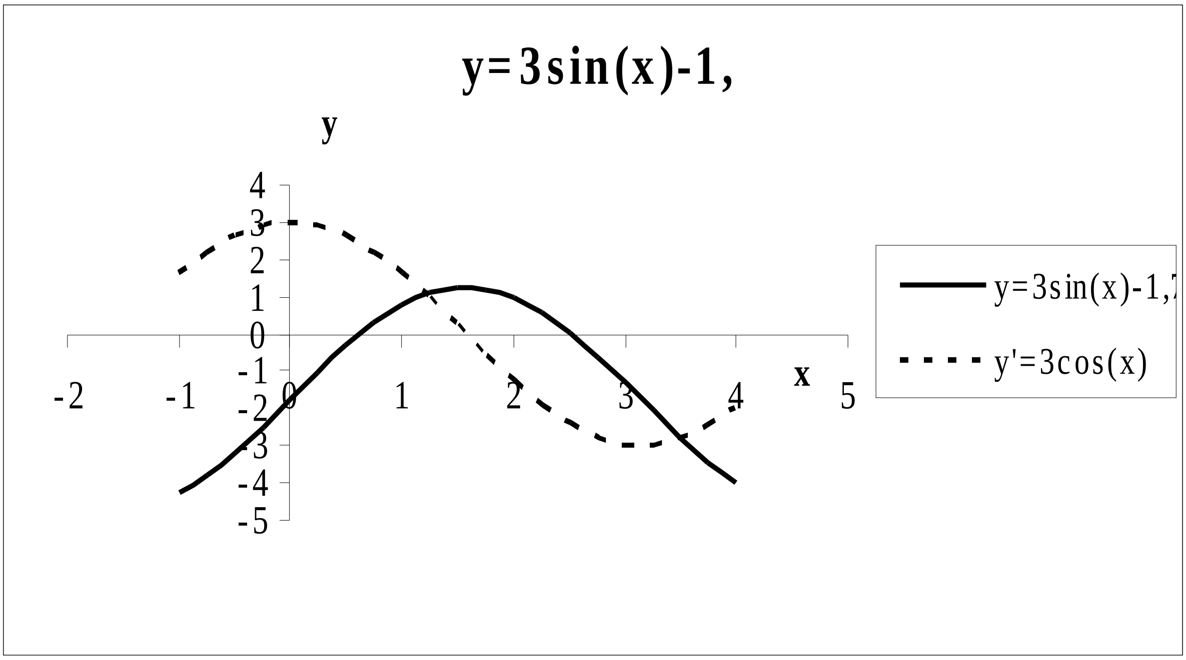
Образец выполнения лабораторной работы № 2

(Решение нелинейных уравнений. Метод итерации.)

Постановка задачи. Найти корень нелинейного уравнения $3 \cdot \sin(x) - 1,75 = 0$ методом итерации с точностью $\varepsilon = 0,001$.

Решение задачи. Отделим корень уравнения на отрезке $[-1; 4]$ графическим методом. Для этого табулируем функцию $y(x) = 3 \cdot \sin(x) - 1,75$ на данном отрезке.

$\varepsilon =$	0,0001,		
$a =$	-1,	$n =$	20,
$b =$	4,	$h =$	0,25.



$x =$	$y(x) = 3 \cdot \sin(x) - 1,75$	$y'(x) = 3 \cdot cos(x)$
-1	-4,274412954	1,620906918
-0,75	-3,79491628	2,195066607
-0,5	-3,188276616	2,632747686
-0,25	-2,492211878	2,906737265
0	-1,75	3
0,25	-1,007788122	2,906737265
0,5	-0,311723384	2,632747686
0,75	0,29491628	2,195066607
1	0,774412954	1,620906918
1,25	1,096953858	0,945967087
1,5	1,24248496	0,212211605
1,75	1,201957841	-0,534738167
2	0,97789228	-1,24844051
2,25	0,584219591	-1,884520868
2,5	0,045416432	-2,403430847
2,75	-0,605017024	-2,772907136
3	-1,326639976	-2,96997749
3,25	-2,074585404	-2,982389028
3,5	-2,802349683	-2,809370062
3,75	-3,464683956	-2,461678072
4	-4,020407486	-1,960930863

Выделим отрезок $[0;1]$, где находится корень, и уточним его методом итерации.

Получим равносильное уравнению $F(x) \equiv 3 \cdot \sin(x) - 1,75 = 0$ уравнение $x = \varphi(x)$. Функцию $\varphi(x)$ будем искать в виде $\varphi(x) = x - \dfrac{F(x)}{M}$, где $0 < m < F'(x) \le M$.

$$a_1 = 0, \qquad 0 < 1,620906918 < F'(x) \le 3,$$
$$b_1 = 1, \qquad 0 < m < F'(x) \le M,$$

$$m = 1,620906918, \qquad M = 3.$$

При таком выборе функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условию сходимости итерационной последовательности $x_i = \varphi(x_{i-1}),\ i = 1,2,3,\ldots$, $|\varphi'(x)| \le q < 1$, где $q = 1 - \dfrac{m}{M}$.

Тогда получим следующее значение $q = 0,459697694$, условие остановки итерационной последовательности $|x_i - x_{i-1}| < \varepsilon \dfrac{1-q}{q} = 0,000118$, при выборе приближенного решения $\tilde{\xi} = x_i$ с погрешностью приближенного решения $\Delta\tilde{\xi} = |\xi - x_i| \le |x_i - x_{i-1}| \dfrac{q}{1-q} = \Delta_{\tilde{\xi}}$.

Если свести результаты в таблицу получим

	x_i	$\varphi(x_{i-1})$	$\lvert x_i - x_{i-1}\rvert$	$\Delta_{\tilde{\xi}}$	Условие остановки итерации
x_0	0,5				
x_1	0,603908	0,603908	0,10390779	0,08840638	нет
x_2	0,619378	0,619378	0,01546994	0,01316207	нет
x_3	0,622182	0,622182	0,00280474	0,00238631	нет
x_4	0,622706	0,622706	0,00052329	0,00044523	нет
x_5	0,622804	0,622804	0,00009814	0,00008350	да
x_6	0,622822	0,622822	0,00001842	0,00001568	да
x_7	0,622826	0,622826	0,00000346	0,00000294	да
		0,622826	0,00000065	0,00000055	да

Приближенное решение $\tilde{\xi} = x_5 = 0,622804$, погрешность $\Delta_{\tilde{\xi}} = 0,0000835$, число итераций $k = 5$.

Следовательно, приближенное значение корня равно $\tilde{\xi} = 0,622804 \pm 0,00008350$.

Запишем приближенное значение корня только верными значащими цифрами в узком смысле.

Имеем $\Delta_{\tilde{\xi}} = 0,00008350 \le \frac{1}{2}10^{-3} = \frac{1}{2}10^{m-n+1}$, $m = 0$, $n = 4$. Округлим $\tilde{\xi} = 0,622804$ до $n = 4$. Получим $\tilde{\xi}_1 = 0,623$, $\Delta_{окр} = \left|\tilde{\xi} - \tilde{\xi}_1\right| \le 0,000196$, $\Delta_{\tilde{\xi}_1} = \Delta_{окр} + \Delta_{\tilde{\xi}_1} = 0,0002795$.

Найдем число верных знаков для $\tilde{\xi}_1 = 0{,}623$. Имеем $\Delta_{\tilde{\xi}_1} = 0{,}0002795 \le \frac{1}{2}10^{-3} = \frac{1}{2}10^{m-n_1+1}$, $m = 0$, $n_1 = 4$. Так как $n_1 = n$, то получим приближенное значение корня с числом верных знаков $n_1 = 4$.

Ответ: $\tilde{\xi} = 0{,}623 \pm 0{,}0002795$; $k = 5$.

Лабораторная работа № 3

Тема: Решение нелинейных уравнений. Метод хорд.

Задание: 1) Отделить корни уравнения графически и программно.

2) Уточнить корни уравнения методом хорд с точностью $\varepsilon = 0{,}0001$.

3) Нарисовать схему применения метода к каждому корню уравнения.

Вариант	Уравнение
1	$2e^x - 5x^2 - 1{,}1 = 0$
2	$e^{x^2} + 2x - 7 = 0$
3	$x^3 - x - 0.2 = 0$
4	$x^3 - 4x^2 + x + 2.5 = 0$
5	$x^3 - 3x^2 + x + 3 = 0$
6	$x^2 - 2\sin(x-1) - 2 = 0$
7	$x^3 - 1.2x + 1 = 0$
8	$x^2 - 2\sin(2x) - 0.5 = 0$
9	$x^2 + \lg(x) = 1{,}25$
10	$ctg(0{,}5x - 0{,}2) = x^2 - 5$
11	$x^3 - 5x^2 + 5x - 1 = 0$
12	$2(x-1) - \exp(x^2 - 2) = 1$
13	$\lg(x-2) + \frac{3}{2x+7} = 0$

Вариант	Уравнение
31	$x^2 + 5\sin(3x+1) = 0$
32	$(x-1)^{3/2} - (x-1)^2 = 0.03$
33	$3x^2 + \cos(x - \pi/5) - 1 = 0$
34	$(x-1)^3 + 2\ln\lvert x-2\rvert = 0{,}2$
35	$tg(0{,}2x + 0{,}5) + 0.51 = x^3$
36	$x^3 - 4x^2 + 2\lvert x\rvert - 1 = 0$
37	$(x-3)^2 - 2\lg(x^2 - 3) = 1$
38	$x^4 + 2x^2 - e^{2x-1} = 0$
39	$e^{x^2} - 5\sin(x) = 0$
40	$4 \cdot \ln(x) - \frac{x^2}{3} + 1 = 0$
41	$2x^2 - 2^x - 3\sin(x) = 0$
42	$2^x - 3x^2 + 2 = 0$
43	$\cos(x-1) - \frac{x^2}{3} = 0$

14	$5x^2 - 2 \cdot \lg(\lvert x \rvert + 0.5) = 2$		44	$5x^2 + 2x - \frac{x}{e^x + 1} = 0$
15	$x^3 - 3x^2 + 4 \cdot \sin(x) = -1$		45	$x^3 + 0{,}1 - tg(x) = 0$
16	$x^3 - 5x^2 + 3x + 1 = 0$		46	$x^3 - 2x^2 - 3x + 1 = 0$
17	$\ln(x) - \frac{1}{5x+2} = 0$		47	$(x-1)^3 \cos(x) + 1 = 14x^2$
18	$2\sin(x-1) = x - 1{,}2$		48	$x^2 - 2 \cdot \ln(x) = 2{,}5$
19	$\cos(3x - 0{,}25) = \frac{x^2}{2} - 1$		49	$\cos(2x-1) = x^3 - 2x - 1$
20	$x^4 - 2x^2 + 0{,}07 = 0$		50	$x^3 - 5x^2 + 2x + 1 = 0$
21	$0{,}5x + \sin(x) = 1{,}5$		51	$3\lvert x \rvert - 3 \cdot \ln(x+2) - 4 = 0$
22	$5\cos(x) = 3 - x^2$		52	$3 \cdot \lg(x+2) - \frac{4x}{2x^2+3} = 1$
23	$2\cos(2x + 0{,}5) = \exp(x^2)$		53	$1{,}5e^x - 3 = \lg(x)$
24	$x^4 - 8x^2 + 2 = 0$		54	$x^3 - 4x^2 = \sin(0.9x + 0.1)$
25	$x^2 - 3\sin(x^2 - 1) = 0$		55	$x^3 - 2x^2 + 1 = 0$
26	$2 \cdot \ln(x+1) - \frac{x^2}{2} + 1 = 0$		56	$2x^3 - 5x^2 + 2x + 1 = 0$
27	$2x^4 - 0{,}5^x - 1 = 0$		57	$x^3 - \cos(2x-1) = 0$
28	$2^x + x^2 - 2 = 0$		58	$3x^2 - 2e^{\cos(x-0.2)} = 0$
29	$3\cos(x^{0,5} - 0{,}3) - \frac{3}{2x} = 0$		59	$x^3 + 2x^2 - e^{2x-1} = 0$
30	$x^3 - 2\cos(3x+1) + 2 = 0$		60	$x^3 + 2x^2 - \sin(3x+1) = 0$

Лабораторная работа № 4

Тема: Решение нелинейных уравнений. Метод касательных (Ньютона).

Задание: 1) Отделить корни уравнения графически и программно.

2) Уточнить корни уравнения методом касательных с точностью $\varepsilon = 0{,}0001$.

3) Нарисовать схему применения метода к каждому корню уравнения.

Вариант	Уравнение
1	$1{,}5e^{x}-3=\lg(x)$
2	$x^3-4x^2=\sin(0.9x+0.1)$
3	$x^3-2x^2+1=0$
4	$2x^3-5x^2+2x+1=0$
5	$x^3-\cos(2x-1)=0$
6	$3x^2-2e^{\cos(x-0.2)}=0$
7	$x^3+2x^2-e^{2x-1}=0$
8	$x^3+2x^2-\sin(3x+1)=0$
9	$\ln(x)-\frac{1}{5x+2}=0$
10	$e^{x^2}+2x-7=0$
11	$x^3-x-0.2=0$
12	$x^3-4x^2+x+2.5=0$
13	$x^3-3x^2+x+3=0$
14	$x^3+0{,}1-tg(x)=0$
15	$x^3-2x^2-3x+1=0$
16	$(x-1)^3\cos(x)+1=14x^2$
17	$x^2-2\cdot\ln(x)=2{,}5$
18	$\cos(2x-1)=x^3-2x-1$
19	$x^3-5x^2+2x+1=0$

Вариант	Уравнение
31	$tg(0{,}2x+0{,}5)+0.51=x^3$
32	$x^3-4x^2+2\lvert x\rvert-1=0$
33	$(x-3)^2-2\lg(x^2-3)=1$
34	$x^2-2\sin(x-1)-2=0$
35	$x^3-1.2x+1=0$
36	$x^2-2\sin(2x)-0.5=0$
37	$x^2+\lg(x)=1{,}25$
38	$ctg(0{,}5x-0{,}2)=x^2-5$
39	$x^3-5x^2+5x-1=0$
40	$2x-\exp\left(x^2-2\right)=-1$
41	$\lg(x-2)+\frac{3}{2x+7}=0$
42	$x^4+2x^2-e^{2x-1}=0$
43	$e^{x^2}-5\sin(x)=0$
44	$4\cdot\ln(x)-\frac{x^2}{3}+1=0$
45	$2x^2-2^x-3\sin(x)=0$
46	$2^x-3x^2+2=0$
47	$\cos(x-1)-\frac{x^2}{3}=0$
48	$5x^2+2x-\frac{x}{e^x+1}=0$
49	$5x^2-2\cdot\lg(\lvert x\rvert+0.5)=2$

20	$3\lvert x\rvert - 3\cdot\ln(x+2) - 4 = 0$
21	$3\cdot\lg(x+2) - \dfrac{4x}{2x^2+3} = 1$
22	$2\cdot\ln(x+1) - \dfrac{x^2}{2} + 1 = 0$
23	$2x^4 - 0{,}5^x - 1 = 0$
24	$2^x + x^2 - 2 = 0$
25	$3\cos(x^{0,5} - 0{,}3) = \dfrac{3}{2x}$
26	$x^3 - 2\cos(3x+1) + 2 = 0$
27	$x^2 + 5\sin(3x+1) = 0$
28	$(x-1)^{3/2} - (x-1)^2 = 0.03$
29	$3x^2 + \cos(x - \pi/5) - 1 = 0$
30	$(x-1)^3 + 2\ln\lvert x-2\rvert = 0{,}2$

50	$x^3 - 3x^2 + 4\cdot\sin(x) = -1$
51	$x^3 - 5x^2 + 3x + 1 = 0$
52	$2e^x - 5x^2 - 1{,}1 = 0$
53	$2\sin(x-1) = x - 1{,}2$
54	$\cos(3x - 0{,}25) = \dfrac{x^2}{2} - 1$
55	$x^4 - 2x^2 + 0{,}07 = 0$
56	$0{,}5x + \sin(x) = 1{,}5$
57	$5\cos(x) = 3 - x^2$
58	$2\cos(2x + 0{,}5) = \exp(x^2)$
59	$x^4 - 8x^2 + 2 = 0$
60	$x^2 - 3\sin(x^2 - 1) = 0$

Лабораторная работа № 5

Тема: Решение нелинейных уравнений.

Комбинированный метод хорд и касательных.

Задание: 1) Отделить корни уравнения графически и программно.

2) Уточнить корни уравнения данным методом с точностью $\varepsilon = 0{,}0001$.

3) Нарисовать схему применения метода к каждому корню уравнения.

Вариант	Уравнение
1	$x^3 + 4x^2 - 1{,}5 = 0$
2	$x^2 - 2 + 2\sin(x) = 0$
3	$x^3 - 2x^2 - 7 = 0$

Вариант	Уравнение
31	$x^3 - 3x^2 + x + 3 = 0$
32	$x^3 + 0{,}1 - tg(x) = 0$
33	$x^3 - 2x^2 - 3x + 1 = 0$

4	$x^3-6\cos(x)+5=0$
5	$\sin(x)+1,2\cdot\lg(x)=0$
6	$tg(0,2x+0,3)=x^2-2$
7	$x^3-5x^2+x=3,2$
8	$3(x-2)^2-3\cdot\lg(x)-2=0$
9	$x^4+2x^2-e^{2x-1}=0$
10	$e^{x^2}-5\sin(x)=0$
11	$4\cdot\ln(x)-\dfrac{x^2}{3}+1=0$
12	$2x^2-2^x-3\sin(x)=0$
13	$2^x-3x^2+2=0$
14	$\cos(x-1)-\dfrac{x^2}{3}=0$
15	$0,19*x+\sin(x)=\lg(x)$
16	$x^3-3x^2-4x+1=0$
17	$x^3-4x^2+3x=0,2$
18	$e^x+5x^2-7=0$
19	$3\sin(x)=x-1$
20	$3\cos(2x-0,5)=2x^2$
21	$x^4-5x(x+0,1)+6=0$
22	$(x-1)^3+2\ln\lvert x-2\rvert=0$
23	$tg(0,2x+\dfrac{1}{2})+0.55=2x^3$

34	$(x-1)^3\cos(x)+1=14x^2$
35	$x^2-2\cdot\ln(x)=2,5$
36	$\cos(2x-1)=x^3-2x-1$
37	$x^3-5x^2+2x+1=0$
38	$3\lvert x\rvert-3\cdot\ln(x+2)-4=0$
39	$3\cdot\lg(x+2)-\dfrac{4x}{2x^2+3}=1$
40	$2\cdot\ln(x+1)-\dfrac{x^2}{2}+1=0$
41	$2x^4-0,5^x-1=0$
42	$2^x+x^2-2=0$
43	$3\cos(x^{0,5}-0,3)=\dfrac{3}{2x}$
44	$x^3-2\cos(3x+1)+2=0$
45	$x^2+5\sin(3x+1)=0$
46	$x^3-3x^2+2x-5=0$
47	$\dfrac{2}{\lvert x\rvert}-\lg(\lvert x\rvert)-3=0$
48	$x^4+2x^2+2x-1=0$
49	$x^2-2\sin(x)=0$
50	$4\cdot\lg(x)-\dfrac{x^2}{3}+1=0$
51	$3x^2-0,5^x-2=0$
52	$(x-1)^{3/2}-(x-1)^2=0.03$
53	$3x^2+\cos(x-\pi/5)-1=0$

24	$x^3-4x^2+2\lvert x\rvert-1=0$		54	$(x-1)^3+2\ln\lvert x-2\rvert=0,2$
25	$(x-3)^2-2\lg(x^2-3)=1$		55	$tg(0,2x+0,5)+0.51=x^3$
26	$x^2-2\sin(x-1)-2=0$		56	$x^3-4x^2+2\lvert x\rvert-1=0$
27	$x^3-1.2x+1=0$		57	$(x-3)^2-2\lg(x^2-3)=1$
28	$x^2-2\sin(2x)-0.5=0$		58	$x^2-2\sin(x-1)-2=0$
29	$x^3-x-0.2=0$		59	$x^3-1.2x+1=0$
30	$x^3-4x^2+x+2.5=0$		60	$x^2-2\sin(2x)-0.5=0$

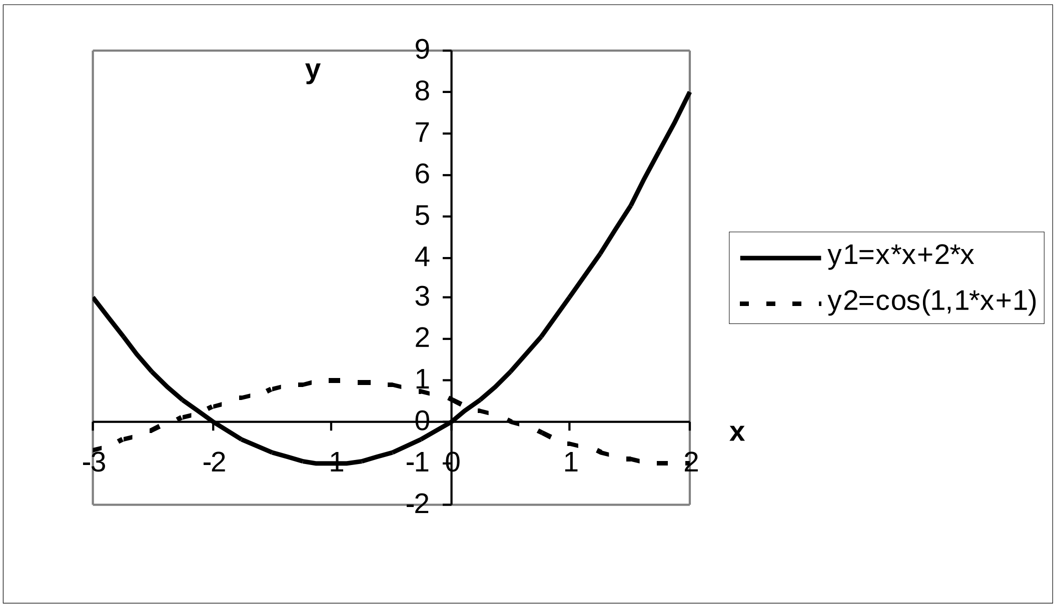
Образцы выполнения заданий лабораторных работ №3-5

(Приближенное решение нелинейных уравнений.

Метод хорд, касательных (Ньютона), комбинированный метод).

I). Найти приближенные решения уравнения $x^2+2x-\cos(1{,}1x+1)=0$ методом хорд с точностью $\varepsilon=10^{-4}$.

Отделим корни этого уравнения графически (можно и программно). Для этого построим графики функций $y_1(x)=x^2+2x$, $y_2(x)=\cos(1{,}1x+1)$ и найдем абсциссы точек пересечения графиков этих функций: $\xi_1\in[-2,5;-2]$, $\xi_2\in[0;\ 0,5]$.



Рассмотрим в качестве примера первый корень. Уточним его методом хорд. Для этого определим знаки функции $y = F(x)$ и второй ее производной $y'' = F''(x)$ на этом отрезке $[-2,5;-2]$.

$$F(x) = x^2 + 2x - \cos(1,1x+1),$$

$$F''(x) = 2 + 1,21\cos(1,1x+1);$$

$F(-2,5) = 1{,}42825>0$, $F(-2) = -0{,}36236<0$; так как $|\cos(1,1*x+1)| \le 1$, то $F''(x)>0$,

$$\forall x \in [-2,5;\ -2].$$

Поскольку $F(-2,5)\cdot F''(x)>0$, то применяем формулу

$$x_{n+1} = (-2,5) - \frac{F(-2,5)}{F(x_n) - F(-2,5)}\left(x_n - (-2,5)\right),$$

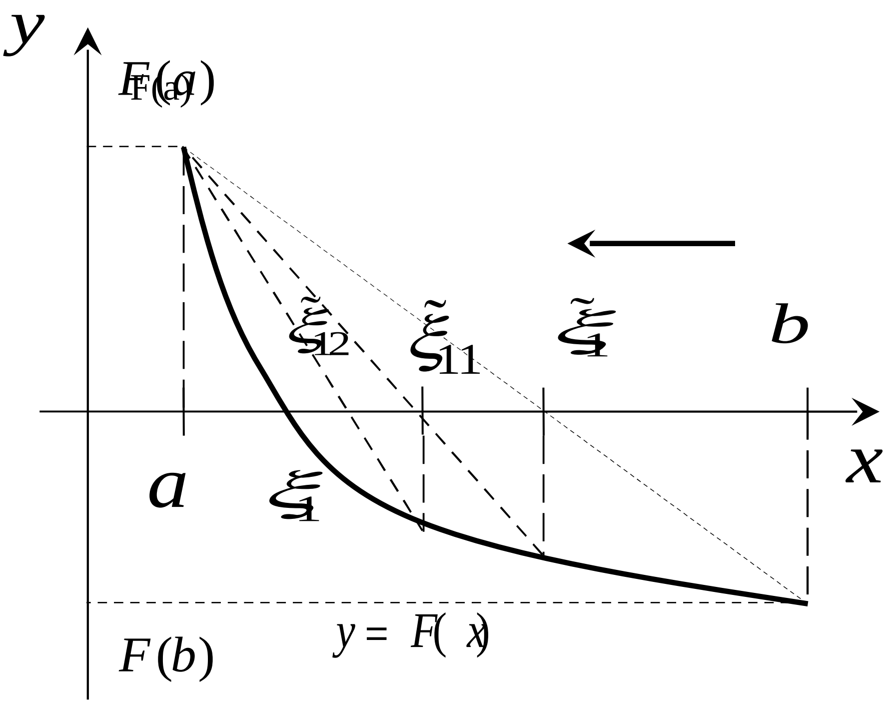
где неподвижная точка $x = a = -2,5$, а начальная точка $x_0 = b = -2$.Получим следующую таблицу

x	y	$\Delta x = x_n - a$	h_n	Δh	Δx
-2	-0,362357754	0,5	-0,398816882		
-2,101183118	-0,043988132	0,398816882	-0,386900836	0,011916	0,101183
-2,113099164	-0,004912162	0,386900836	-0,38557473	0,001326	0,011916
-2,11442527	-0,000543307	0,38557473	-0,385428113	0,000147	0,001326
-2,114571887	-0,000060028	0,385428113	-0,385411914	1,62E-05	0,000147
-2,114588086	-0,000006632	0,385411914	-0,385410125	1,79E-06	1,62E-05

a	b	$F(a)$
-2,5	-2	1,428246056

Где $h_n = \dfrac{F(a)}{F(x_n) - F(a)}\left(x_n - a\right)$, $\Delta h = h_{n+1} - h_n$, $\Delta x = x_{n+1} - x_n$.

Схема применения метода хорд.



Оценим погрешность приближения. Так как $F''(x)$ не меняет свой знак на данном отрезке, то $F'(x)$ достигает своего наибольшего и наименьшего значения на концах отрезка $[-2,5;\,-2]$, поэтому $\left|F'(x)\right| = \left|2x + 2 + 1{,}1\cdot\sin(1{,}1\cdot x + 1)\right| \ge 3 = m > 0$ для $\forall x \in [-2,5;\,-2]$.

А) Тогда используя оценку погрешности

$$|x_n - \xi_1| \le \frac{|F(x_n)|}{m} \le \varepsilon,\ |F'(x)| \ge m > 0,\ \forall x \in [a,b]$$

получим $\tilde{\xi}_1 = x_4 =$ -2,114571887, $\Delta\tilde{\xi} = \left|\tilde{\xi}_1 - \xi_1\right| \le \dfrac{0{,}00006003}{3} \le 0{,}0000201 = \Delta_{\tilde{\xi}} \le \varepsilon$.

Следовательно, приближенное значение корня равно

$$\tilde{\xi}_1 = -2{,}114571887 \pm 0{,}0000201.$$

Запишем приближенное значение корня только верными значащими цифрами в узком смысле.

Имеем $\Delta_{\tilde{\xi}_1} = 0{,}0000201 \le \frac{1}{2}10^{-4} = \frac{1}{2}10^{m-n+1}$, $m = 0$, $n = 5$. Округлим $\tilde{\xi}_1 =$ -2,114571887 до $n = 5$. Получим $\tilde{\xi}_{11} =$ -2,1146, $\Delta_{окр} = \left|\tilde{\xi}_1 - \tilde{\xi}_{11}\right| \le 0{,}000029$, $\Delta_{\tilde{\xi}_{11}} = \Delta_{окр} + \Delta_{\tilde{\xi}_1} = 0{,}0000491$.

Найдем число верных знаков для $\tilde{\xi}_{11} =$ -2,1146. Имеем $\Delta_{\tilde{\xi}_{11}} = 0{,}0000491 \le \frac{1}{2}10^{-4} = \frac{1}{2}10^{m-n_1+1}$, $m = 0$, $n_1 = 5$. Так как $n_1 = n$, то получим приближенное значение корня с числом верных знаков $n_1 = 5$.

Ответ: $\tilde{\xi}_1 = -2{,}1146 \pm 0{,}0000491$.

Б) Верна так же следующая формула оценки погрешности приближенного значения корня:

$$|x_n-\xi_1|\le\frac{M-m}{m}|x_n-x_{n-1}|\le\varepsilon,\quad 0<m\le|F'(x)|\le M<+\infty,\ \forall x\in[a,b].$$

Для нашего уравнения имеем $m=3$, $M=4{,}1$.

Тогда полагая $\tilde{\xi}_1=x_4=$ -2,114571887, получим

$$\Delta\tilde{\xi}=\left|\tilde{\xi}_1-\xi_1\right|\le\frac{4{,}1-3}{3}\cdot 0{,}000147=0{,}00005137\le 0{,}0000514=\Delta_{\tilde{\xi}}\le\varepsilon.$$

Следовательно, приближенное значение корня равно $\tilde{\xi}_1=-2{,}114571887\pm 0{,}0000514$.

Запишем приближенное значение корня только верными значащими цифрами в узком смысле.

Имеем $\Delta_{\tilde{\xi}_1}=0{,}0000514\le\frac{1}{2}10^{-3}=\frac{1}{2}10^{m-n+1}$, $m=0$, $n=4$. Округлим $\tilde{\xi}_1=$ -2,114571887 до $n=4$. Получим $\tilde{\xi}_{11}=-2{,}115$, $\Delta_{окр}=\left|\tilde{\xi}_1-\tilde{\xi}_{11}\right|\le 0{,}000429$, $\Delta_{\tilde{\xi}_{11}}=\Delta_{окр}+\Delta_{\tilde{\xi}_1}=0{,}0004804$.

Найдем число верных знаков для $\tilde{\xi}_{11}=-2{,}115$. Имеем $\Delta_{\tilde{\xi}_{11}}=0{,}0004804\le\frac{1}{2}10^{-3}=\frac{1}{2}10^{m-n_1+1}$, $m=0$, $n_1=4$.

Так как $n=n_1$, то получим приближенное значение корня $\tilde{\xi}_{11}=-2{,}115$ с числом верных знаков $n_1=4$.

Ответ: $\tilde{\xi}_1=-2{,}115\pm 0{,}0004804$.

II) Найти приближенные решения уравнения $x^2+2x-\cos(1{,}1x+1)=0$ методом касательных (методом Ньютона) с точностью $\varepsilon=10^{-4}$.

Отделим корни этого уравнения графически (можно и программно). Для этого построим графики функций $y_1(x)=x^2+2x$, $y_2(x)=\cos(1{,}1x+1)$ и найдем абсциссы точек пересечения графиков этих функций: $\xi_1\in[-2{,}5;-2]$, $\xi_2\in[0;\ 0{,}5]$.

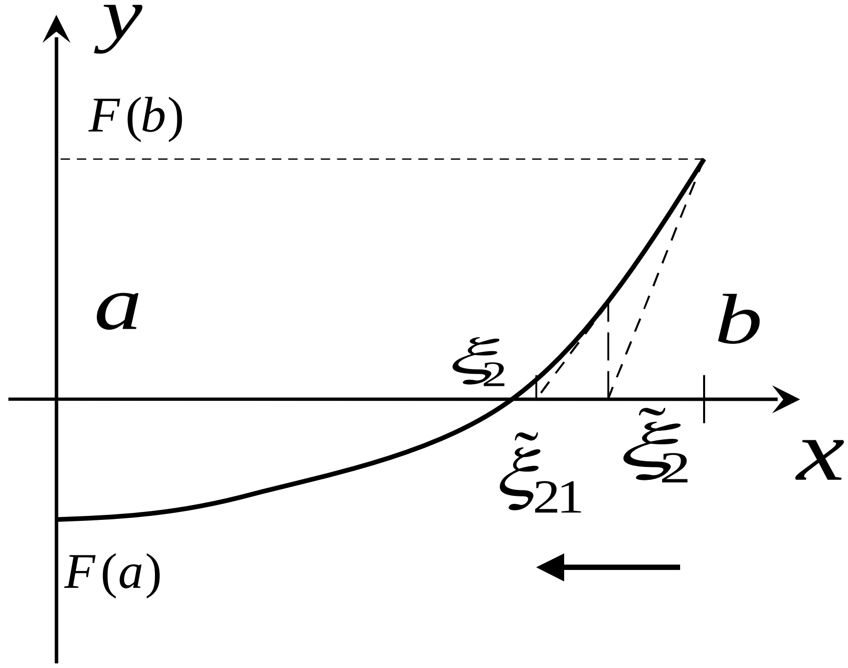
<u>*В качестве примера рассмотрим второй корень*</u>. Уточним его методом касательных. Для этого определим знаки функции $y=F(x)$ и второй ее производной $y''=F''(x)$ на этом отрезке $[0;\ 0{,}5]$: $F(x)=x^2+2x-\cos(1{,}1x+1)$, $F''(x)=2+1{,}21\cos(1{,}1x+1)$; $F(0)=$ -0,54031<0, $F(0{,}5)=$ 1,22921>0; так как $|\cos(1{,}1*x+1)|\le 1$, то $F''(x)>0$, $\forall x\in[0;\ 0{,}5]$.

Поскольку $F(0{,}5)\cdot F''(x)>0$, то применяем формулу $x_{n+1}=x_n-\dfrac{F(x_n)}{F'(x_n)}$, $n=0,1,2,\ldots$, $x_0=0{,}5$.

x	y	$F'(x_0)$	$h=\dfrac{F(x_n)}{F'(x_n)}$	$\Delta x = x_{n+1}-x_n$
0,5	1,229205172	4,099762141	0,29982354	
0,200176466	0,096960102	3,433435582	0,028239965	0,299823534
0,171936501	0,000967890	3,364722863	0,000287658	0,028239965
0,171648863	0,000000101	3,364017852	0,000000030	0,000287658
0,171648813	0,000000000	3,364017778	0,000000000	0,000000030

a	b	$F(a)$	$F(b)$	$F''(a)$	$F''(b)$
0	0,5	-0,54030231	1,229205172	2,65376579	2,02516174

Схема применения метода касательных.



Оценим погрешность приближения. Так как $F''(x)$ не меняет свой знак на данном отрезке, то $F'(x)$ достигает своего наибольшего и наименьшего значения на концах отрезка $[0;0,5]$, поэтому $|F'(x)|=|2x+2+1{,}1\sin(1{,}1x+1)|\ge 2=m>0$ для $\forall x\in[0;0,5]$.

А) Тогда используя оценку погрешности

$$|x_n-\xi_2|\le\frac{|F(x_n)|}{m}\le\varepsilon,\ |F'(x)|\ge m>0,\ \forall x\in[a,b]$$

получим $\tilde{\xi}_2=x_4=0{,}171648813$,

$$\Delta\tilde{\xi}_2=\left|\tilde{\xi}_2-\xi_2\right|\le\frac{0{,}000000030}{2}=\Delta_{\tilde{\xi}_2}=0{,}00000015\le\varepsilon.$$

Следовательно, приближенное значение корня равно

$$\tilde{\xi}_2 = 0{,}171648813 \pm 0{,}000000030.$$

Запишем приближенное значение корня только верными значащими цифрами в узком смысле.

Имеем $\Delta_{\tilde{\xi}_2} = 0{,}00000003 \le \frac{1}{2}10^{-7} = \frac{1}{2}10^{m-n+1}$, $m = 0$, $n = 8$. Округлим $\tilde{\xi}_2 = 0{,}171648813$ до $n = 8$. Получим $\tilde{\xi}_{21} = 0{,}1716488$, с погрешностью округления $\Delta_{окр} = \left|\tilde{\xi}_2 - \tilde{\xi}_{21}\right| \le 0{,}000000014$, $\Delta_{\tilde{\xi}_{21}} = \Delta_{окр} + \Delta_{\tilde{\xi}_2} = 0{,}000000044$.

Найдем число верных знаков для $\tilde{\xi}_{21} = 0{,}1716488$.

Имеем $\Delta_{\tilde{\xi}_{21}} = 0{,}000000044 \le \frac{1}{2}10^{-7} = \frac{1}{2}10^{m-n_1+1}$, $m = 0$, $n_1 = 8$. Так как $n_1 = n$, то получим приближенное значение корня с числом верных знаков $n_1 = 8$.

Ответ: $\tilde{\xi}_2 = 0{,}1716488 \pm 0{,}000000044$.

Б) Верна так же следующая формула оценки погрешности приближенного значения корня:

$$|x_n - \xi_2| \le \frac{M}{2m}|x_n - x_{n-1}|^2 \le \varepsilon,\ 0 < m \le |F'(x)| \le M < +\infty,\ \forall x \in [a,b].$$

Для нашего уравнения имеем $m = 2$, $M = 2{,}7$. Тогда полагая $\tilde{\xi}_2 = x_3$=0,171648843, получим

$$\Delta\tilde{\xi}_2 = \left|\tilde{\xi}_2 - \xi_2\right| \le \frac{2{,}7}{2\cdot 2}\cdot 0{,}000287658^2 = \Delta_{\tilde{\xi}_2} = 0{,}000000056 \le \varepsilon.$$

Следовательно, приближенное значение корня равно $\tilde{\xi}_2 = 0{,}171648843 \pm 0{,}000000056$.

Запишем приближенное значение корня только верными значащими цифрами в узком смысле.

Имеем $\Delta_{\tilde{\xi}_2} = 0{,}000000056 \le \frac{1}{2}10^{-6} = \frac{1}{2}10^{m-n+1}$, $m = 0$, $n = 7$.

Округлим $\tilde{\xi}_2 = 0{,}171648843$ до $n = 7$. Получим $\tilde{\xi}_{21} = 0{,}171649$, $\Delta_{окр} = \left|\tilde{\xi}_2 - \tilde{\xi}_{21}\right| \le 0{,}00000016$, $\Delta_{\tilde{\xi}_{21}} = \Delta_{окр} + \Delta_{\tilde{\xi}_2} = 0{,}000011+0{,}0000171=0{,}0000281$
$\Delta_{\tilde{\xi}_{21}} = \Delta_{окр} + \Delta_{\tilde{\xi}_2} = 0{,}000000216$

Найдем число верных знаков для $\tilde{\xi}_{21} = 0{,}171649$. Имеем $\Delta_{\tilde{\xi}_{21}} = 0{,}000000216 \le \frac{1}{2}10^{-6} = \frac{1}{2}10^{m-n_1+1}$, $m = 0$, $n_1 = 7$. Так как $n_1 = n$, то получим приближенное значение корня с числом верных знаков $n_1 = 7$.

Ответ: $\tilde{\xi}_{21} = 0{,}171649 \pm 0{,}000000216$.

Замечание. Из сравнения результатов пунктов **А**) и **Б**) метода касательных видно, что оценка во втором пункте позволяет получить приближенный результат за меньшее число приближений и может быть получен округлением из результата пункта **А**).

III) Найти приближенные решения уравнения $x^2+2x-\cos(1{,}1x+1)=0$ комбинированным методом с точностью $\varepsilon=10^{-4}$.

Отделим корни этого уравнения графически (можно и программно). Для этого построим графики функций $y_1(x)=x^2+2x$, $y_2(x)=\cos(1{,}1x+1)$ и найдем абсциссы точек пересечения графиков этих функций: $\xi_1\in[-2{,}5;-2]$, $\xi_2\in[0;\ 0{,}5]$.

Рассмотрим второй корень в качестве примера. Уточним его комбинированным методом. Для этого определим знаки функции $y=F(x)$ и второй ее производной $y''=F''(x)$ на этом отрезке $[0;\ 0{,}5]$: $F(x)=x^2+2x-\cos(1{,}1x+1)$, $F''(x)=2+1{,}21\cos(1{,}1x+1)$; $F(0)=\text{-}0{,}54031<0$, $F(0{,}5)=1{,}22921>0$; $F'(x)>0$, так как $|\cos(1{,}1*x+1)|\le 1$, то $F''(x)>0$, $\forall x\in[0;\ 0{,}5]$.

Тогда применяем формулы

$$x_{n+1}=x_n-h_1,\quad h_1=\frac{F(x_n)}{F(\bar{x}_n)-F(x_n)}(\bar{x}_n-x_n),\ \bar{x}_{n+1}=\bar{x}_n-h_2,\quad h_2=\frac{F(\bar{x}_n)}{F'(\bar{x}_n)},$$

$$x_0=a,\ \bar{x}_0=b,m\ =0,1,2,\dots.$$

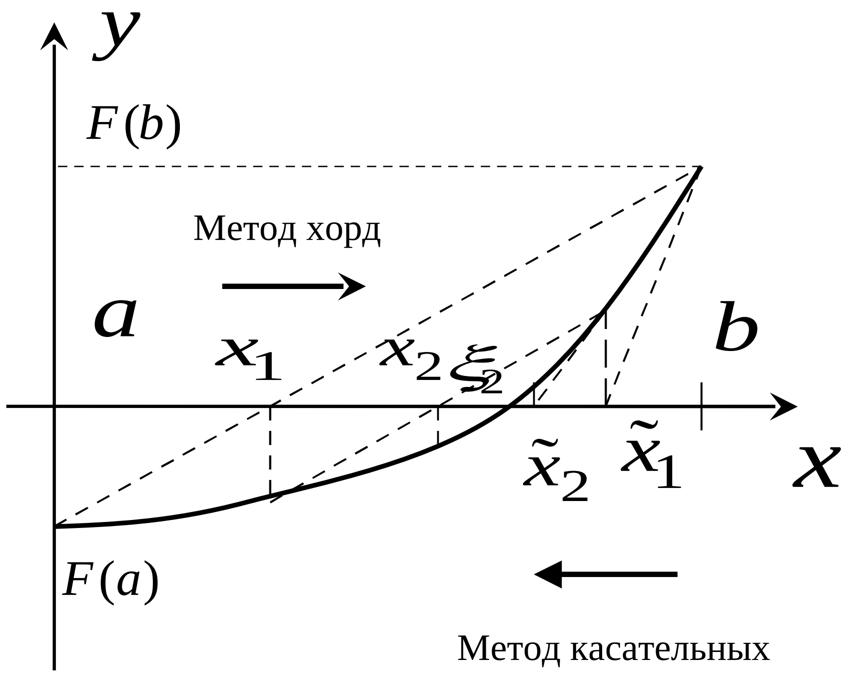
Процесс продолжаем до выполнения условия $|\bar{x}_n-x_n|<\varepsilon$, тогда за приближенное значение корня можно взять значение

$$\tilde{\xi}=\frac{x_n+\bar{x}_n}{2},\ \Delta_{\tilde{\xi}}=\frac{|x_n-\bar{x}_n|}{2}.$$

x_n	$\bar{x}_n$	$F(x_n)$	h_1	$F(\bar{x}_n)$	h_2
0,00000000	0,50000000	-0,54030231	-0,15267025	1,22920517	0,29982353
0,15267025	0,20017647	-0,06340140	-0,01878232	0,09696010	0,02823997
0,17145257	0,17193650	-0,00066012	-0,00019622	0,00096789	0,00028766
0,17164879	0,17164884	-0,00000007	-0,00000002	0,00000010	0,00000003

$F'(\bar{x}_n)$	$\bar{x}_n-x_n$	$\tilde{\xi}$	$\Delta_{\tilde{\xi}}$
4,09976214	0,50000000	0,25000000	0,25000000
3,43343558	0,04750621	0,17642336	0,02375311
3,36472286	0,00048393	0,17169453	0,00024197
3,36401785	0,00000005	0,17164882	0,00000003

Схема применения комбинированного метода.



Найдем число верных знаков у приближенного корня $\tilde{\xi}_2 = 0{,}17164882$. Так как $\Delta_{\tilde{\xi}_2} = 0{,}00000003 < \frac{1}{2}10^{-7} = \frac{1}{2}10^{m-n+1}$, $m=0$, то получим $n=8$. Округлим до верных знаков $\tilde{\xi}_{21} = 0{,}1716488$, при этом погрешность округления будет $\Delta_{окр} = 0{,}00000003$, а погрешность приближенного решения $\Delta_{\tilde{\xi}_{21}} = 0{,}00000006$. Найдем число верных знаков $\Delta_{\tilde{\xi}_{21}} = 0{,}00000006 < \frac{1}{2}10^{-6} = \frac{1}{2}10^{m-n_1+1}$, $m=0$, $n_1 = 7$.

Округлим до верных знаков $\tilde{\xi}_{22} = 0{,}171649$, при этом погрешность округления будет $\Delta_{окр_1} = 0{,}0000003$, а погрешность приближенного решения $\Delta_{\tilde{\xi}_{22}} = 0{,}00000036$.

Найдем число верных знаков $\Delta_{\tilde{\xi}_{22}} = 0{,}00000036 < \frac{1}{2}10^{-6} = \frac{1}{2}10^{m-n_2+1}$, $m=0$, $n_2 = 7$. Так как $n_2 = n_1$, то прекращаем округление.

Ответ: $\tilde{\xi}_2 = 0{,}171649 \pm 0{,}00000036$.

Лабораторная работа № 6

Тема: Решение системы линейных уравнений методом итерации и методом Зейделя.

<u>Задание</u>:

1) Решить систему линейных уравнений методом итерации и методом Зейделя с точностью $\varepsilon = 0{,}5 \cdot 10^{-3}$;
2) Найти погрешности полученных приближенных решений;

3) Сравнить полученные приближенные решения и их погрешности.

Вопросы самоконтроля.

1) Постановка задачи.
2) Основная идея метода итерации.
3) Какое условие должно выполняться для сходимости итерационной процесса?
4) Сформулировать канонические нормы, используемые в методе итерации.
5) Как находится равносильная система уравнений, применяемая для итерационного процесса? Критерий выбора равносильной системы уравнений.
6) Как определяется погрешность метода итерации при заданной точности?
7) В чем отличие метода Зейделя от метода итерации?

Вариант	Система уравнений
1	$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 3; \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = -2; \\ -2x_1 + 4x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$
2	$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 4; \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = -1; \\ -2x_1 + 4x_2 - x_3 = 5. \end{cases}$
3	$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 2; \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = -6; \\ -2x_1 + 4x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$
4	$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 5; \\ x_1 + x_2 - 3{,}5x_3 = -0{,}5; \\ -3{,}2x_1 + 2x_2 - x_3 = -5{,}4. \end{cases}$
5	$\begin{cases} -x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 5; \\ x_1 + x_2 - 2{,}5x_3 = -1{,}5; \\ 4x_1 - 2x_2 - x_3 = 9. \end{cases}$
6	$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 = -1; \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = -10; \\ -2x_1 + 6x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$
7	$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 2x_3 = -2; \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 0; \\ -7x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -3. \end{cases}$

Вариант	Система уравнений
31	$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -4; \\ -x_1 - x_2 - 2{,}3x_3 = 0{,}3; \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 2. \end{cases}$
32	$\begin{cases} -x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 1; \\ x_1 + x_2 + 2{,}5x_3 = -0{,}5; \\ 4x_1 - 2x_2 - x_3 = 3. \end{cases}$
33	$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 = 2; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 3; \\ x_1 + 6x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$
34	$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 2x_3 = -3; \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 2; \\ -7x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -4. \end{cases}$
35	$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 - 2x_3 = 2; \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = -2; \\ -0{,}5x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$
36	$\begin{cases} 1{,}5x_1 - 5x_2 + 2x_3 = -2; \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 3; \\ 5x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 7. \end{cases}$
37	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -1 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$

8	$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 2x_3 = -2; \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = -4; \\ -7x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -4. \end{cases}$
9	$\begin{cases} 1{,}5x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 2; \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = -5; \\ 5x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 3. \end{cases}$
10	$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 1{,}4x_3 = 0{,}7; \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 1{,}5; \\ 3{,}5x_1 - x_2 - 2x_3 = 5. \end{cases}$
11	$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + x_3 = -3; \\ 2x_1 + 1{,}2x_2 - 4{,}3x_3 = -2{,}1; \\ -6x_1 + 3{,}3x_2 + 2x_3 = 2{,}3. \end{cases}$
12	$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0; \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 1; \\ 3{,}1x_1 - x_2 - 2x_3 = 6{,}3. \end{cases}$
13	$\begin{cases} 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1; \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 0; \\ -7x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0{,}5. \end{cases}$
14	$\begin{cases} 5x_1 - x_2 - 3x_3 = 1; \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 2; \\ 2x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$
15	$\begin{cases} x_1 - 7x_2 + 4x_3 = -5; \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0; \\ -7x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 4. \end{cases}$
16	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1; \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 3; \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$
17	$\begin{cases} x_1 - 5x_2 - 2x_3 = 0; \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = -2; \\ -4x_1 + x_2 - 2x_3 = 0{,}5. \end{cases}$
18	$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 2x_3 = -3; \\ -x_1 - x_2 + 2{,}3x_3 = 3{,}9; \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4. \end{cases}$
19	$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + x_3 = 2; \\ 1{,}1x_1 + 0{,}3x_2 - 2x_3 = -3{,}5; \\ -1{,}75x_1 + 0{,}5x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

38	$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 1; \\ x_1 + x_2 + 1{,}5x_3 = 0{,}5; \\ 3{,}2x_1 - 2x_2 - x_3 = -3{,}4. \end{cases}$
39	$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 6; \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = -1; \\ -2x_1 + 4x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$
40	$\begin{cases} -3x_1 + x_2 - x_3 = 3; \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 1; \\ -2x_1 + 4x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$
41	$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 3; \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 4; \\ -2x_1 - 4x_2 - x_3 = 3. \end{cases}$
42	$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 5; \\ x_1 - x_2 - x_3 = -1; \\ 1{,}5x_1 - x_2 + 0{,}5x_3 = 0. \end{cases}$
43	$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0; \\ -1{,}4x_1 + 0{,}1x_2 + 2x_3 = 3{,}5; \\ 1{,}25x_1 + 0{,}3x_2 - 0{,}55x_3 = -1{,}5. \end{cases}$
44	$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 = -2; \\ 1{,}1x_1 + 0{,}3x_2 - 2x_3 = -1{,}2; \\ -1{,}75x_1 + 0{,}25x_2 + x_3 = -1. \end{cases}$
45	$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 4; \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 2; \\ -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$
46	$\begin{cases} 2x_1 - 7x_2 + 4x_3 = -5; \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 3; \\ 7x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 4. \end{cases}$
47	$\begin{cases} x_1 - 5x_2 - 2x_3 = 0; \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 = 1; \\ 0{,}5x_1 + x_2 - 2x_3 = -1. \end{cases}$
48	$\begin{cases} 5x_1 - x_2 - 3x_3 = 2; \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 4; \\ 2x_1 - 5x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$
49	$\begin{cases} 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1; \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 2; \\ -7x_1 + 3x_2 + x_3 = -4. \end{cases}$

20	$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 - x_3 = 1; \\ -1{,}5x_1 + 0{,}1x_2 + 2x_3 = 3; \\ 1{,}25x_1 + 0{,}3x_2 - 0{,}5x_3 = 1. \end{cases}$
21	$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 2x_3 = -1; \\ x_1 - x_2 - 4x_3 = 1; \\ 1{,}5x_1 - x_2 + 0{,}2x_3 = 2. \end{cases}$
22	$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0; \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 1; \\ 3{,}1x_1 - x_2 - 2x_3 = 6{,}3. \end{cases}$
23	$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + x_3 = -3; \\ 2x_1 + 1{,}2x_2 - 4{,}3x_3 = -2{,}1; \\ -6x_1 + 3{,}3x_2 + 2x_3 = 2{,}3. \end{cases}$
24	$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 - x_3 = 1; \\ -1{,}5x_1 + 0{,}1x_2 + 2x_3 = 3; \\ 1{,}25x_1 + 0{,}3x_2 - 0{,}5x_3 = 1. \end{cases}$
25	$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + x_3 = 2; \\ 1{,}1x_1 + 0{,}3x_2 - 2x_3 = -3{,}5; \\ -1{,}75x_1 + 0{,}5x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$
26	$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 2x_3 = -3; \\ -x_1 - x_2 + 2{,}3x_3 = 3{,}9; \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4. \end{cases}$
27	$\begin{cases} x_1 - 5x_2 - 2x_3 = 0; \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = -2; \\ -4x_1 + x_2 - 2x_3 = 0{,}5. \end{cases}$
28	$\begin{cases} x_1 - 7x_2 + 4x_3 = -5; \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0; \\ -7x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 4. \end{cases}$
29	$\begin{cases} 5x_1 - x_2 - 3x_3 = 1; \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 2; \\ 2x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$
30	$\begin{cases} 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1; \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 0; \\ -7x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0{,}5. \end{cases}$

50	$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 1; \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 2; \\ 1{,}1x_1 - x_2 - 0{,}5x_3 = 0{,}2. \end{cases}$
51	$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + x_3 = -2; \\ 2x_1 + 1{,}2x_2 - 4{,}3x_3 = -1{,}1; \\ -6x_1 + 3{,}3x_2 + 2x_3 = -0{,}7. \end{cases}$
52	$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 1{,}4x_3 = -0{,}6; \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 2; \\ 2{,}1x_1 - x_2 - 2x_3 = 2{,}3. \end{cases}$
53	$\begin{cases} 1{,}5x_1 - 5x_2 - 2x_3 = 0; \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = -1; \\ 5x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 3. \end{cases}$
54	$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 3; \\ x_1 + x_2 - x_3 = -1; \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -1. \end{cases}$
55	$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 = 3; \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 0; \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$
56	$\begin{cases} -x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 2; \\ x_1 + x_2 - 2{,}5x_3 = 1{,}5; \\ 4x_1 - x_2 - x_3 = 4. \end{cases}$
57	$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 6; \\ x_1 + x_2 - 3{,}5x_3 = 0{,}5; \\ -1{,}2x_1 + 2x_2 - x_3 = -2{,}6. \end{cases}$
58	$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 3; \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 0; \\ -2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0{,}5. \end{cases}$
59	$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 2; \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0; \\ -2x_1 + 4x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$
60	$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 1; \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = 2; \\ -2x_1 + 4x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$

Образец выполнения лабораторной работы № 6

(Приближенное решение систем уравнений)

Дана система линейных уравнений $Ax=b$, где $b=(b_1,b_2,\ldots,b_n)^T$, $A=\{a_{i,j}\}$, $i,j=\overline{1,n}$. Найти приближенное решение данной системы $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^T$ с точностью $\varepsilon=10^{-3}$.

Рассмотрим пример решения следующей системы уравнений методами итераций и Зейделя

$$\begin{cases} 3x_1+x_2-x_3=2 \\ -x_1+4x_2-2x_3=1 \\ x_1-x_2+3x_3=8 \end{cases}$$, точное решение которой $x=(1,2,3)^T$.

Так как определитель системы $\Delta=|A|=46\neq 0$, то система имеет единственное решение.

Приведем данную систему к виду $x=\beta+\alpha\cdot x$, где $\beta=\begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/4 \\ 8/3 \end{pmatrix}$, $\alpha=\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$

;

решение будем искать в виде итерационной последовательности $x^{(k+1)}=\beta+\alpha\cdot x^{(k)}$, $k=0,1,2,\ldots$, $x^{(0)}=\beta$. Найдем канонические нормы матрицы α.

$$\|\alpha\|_L=0,75,\ \|\alpha\|_m=0,8333,\ \|\alpha\|_k=0,87.$$

Минимальной нормой является норма $\|\alpha\|_L=0,75<1$. Поэтому все действия будем производить по этой норме. Итерационный процесс будем продолжать до тех пор, пока не будет выполняться условие $\left\|x^{(k+1)}-x^{(k)}\right\|_L\le\frac{1-\|\alpha\|_L}{\|\alpha\|_L}\cdot\varepsilon$, $k=0,1,2,\ldots$.

А) По методу итерации получим $\tilde{\xi}=x^{(k)}=\begin{pmatrix} 0,9999783 \\ 2,0000017 \\ 2,9998545 \end{pmatrix}$, $\Delta_{\tilde{\xi}}=0,000333$, $k=23$.

Определим число верных знаков в приближенном значении решения. Так как $\Delta_{\tilde{\xi}}=0,000333<\frac{1}{2}10^{-3}=\frac{1}{2}10^{m-n+1}$, $m=0,\ n=4$, то получим $\tilde{\xi}_1=\begin{pmatrix} 1,000 \\ 2,000 \\ 3,000 \end{pmatrix}$ с погрешностью округления $\Delta_{окр}=\left\|\tilde{\xi}-\tilde{\xi}_1\right\|_L=0,0001455$. Тогда $\Delta_{\tilde{\xi}_1}=0,0004788$.

Определим число верных знаков в приближенном решении $\tilde{\xi}_1$. Так как $\Delta_{\tilde{\xi}_1} = 0,0004788 < \frac{1}{2}10^{-3} = \frac{1}{2}10^{m-n_1+1}$, $m = 0,\ n_1 = n = 4$, то получим приближенное решение $\tilde{\xi}_1 = \begin{pmatrix} 1,000 \\ 2,000 \\ 3,000 \end{pmatrix}$, с погрешностью $\Delta_{\tilde{\xi}_1} = 0,0004788$.

Ответ: $\tilde{\xi} = \begin{pmatrix} 1,000 \\ 2,000 \\ 3,000 \end{pmatrix}$, $\Delta_{\tilde{\xi}} = 0,0004788$.

Б) По методу Зейделя получим $\tilde{\xi} = x^{(k)} = \begin{pmatrix} 1,0000704 \\ 1,9999846 \\ 2,9999614 \end{pmatrix}$, $\Delta_{\tilde{\xi}} = 0,000333$, $k = 21$.

Определим число верных знаков в приближенном значении решения. Так как $\Delta_{\tilde{\xi}} = 0,000333 < \frac{1}{2}10^{-3} = \frac{1}{2}10^{m-n+1}$, $m = 0,\ n = 4$, то получим $\tilde{\xi}_1 = \begin{pmatrix} 1,000 \\ 2,000 \\ 3,000 \end{pmatrix}$ с погрешностью округления $\Delta_{окр} = \left\| \tilde{\xi} - \tilde{\xi}_1 \right\|_L = 0,0000704$. Тогда $\Delta_{\tilde{\xi}_1} = 0,0004034$.

Определим число верных знаков в приближенном решении $\tilde{\xi}_1$. Так как $\Delta_{\tilde{\xi}_1} = 0,0004034 < \frac{1}{2}10^{-3} = \frac{1}{2}10^{m-n_1+1}$, $m = 0,\ n_1 = n = 4$, то получим приближенное решение $\tilde{\xi}_1 = \begin{pmatrix} 1,000 \\ 2,000 \\ 3,000 \end{pmatrix}$, с погрешностью $\Delta_{\tilde{\xi}_1} = 0,0004034$.

Ответ: $\tilde{\xi} = \begin{pmatrix} 1,000 \\ 2,000 \\ 3,000 \end{pmatrix}$, $\Delta_{\tilde{\xi}} = 0,0004034$.

Лабораторная работа № 7

Тема: Интерполирование функции. Полином Лагранжа.

Задание:

1) Найти приближенное значение функции при заданном значении аргумента ξ с помощью интерполяционного полинома Лагранжа, если функция задана в не равноотстоящих узлах; $y_i = f(x_i)$, $i = \overline{0,6}$; $y_\xi = f(\xi)$; $y_\xi - ?$
2) Оценить погрешность полученного значения.

Вопросы самоконтроля.

1) Постановка задачи интерполирования. Геометрическая иллюстрация.

2) В чем различие между задачами интерполяции и задачами экстраполяции?
3) Привести формулу Лагранжа. Дать оценку погрешности.
4) Как выглядит формула Лагранжа для равностоящих узлов?
5) От чего зависит точность получаемого формулой Лагранжа результата?
6) Когда полином m порядка будет аппроксимирован формулой Лагранжа с наименьшей погрешностью?

	Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	1,0000	6,0100	0,2955	0,8253	0,9553	0,1011	3,6788	0,9689	0,9044	0,1011	3,6788
	1,1000	6,9066	0,4259	0,8162	0,9460	0,1076	3,6616	1,0587	0,9513	0,1183	4,0277
	1,2320	8,3884	0,6095	0,8110	0,9325	0,1154	3,5938	1,1740	0,9900	0,1421	4,4276
x_i	1,4796	12,1761	0,9142	0,8231	0,9031	0,1279	3,3694	1,3796	0,9813	0,1893	4,9855
	1,9383	23,2239	0,6753	0,9067	0,8356	0,1453	2,7901	1,7152	0,6555	0,2816	5,4082
	1,9577	23,8200	0,6283	0,9112	0,8324	0,1459	2,7639	1,7279	0,6332	0,2856	5,4110
	2,0380	26,4092	0,4031	0,9299	0,8189	0,1483	2,6553	1,7791	0,5343	0,3021	5,4115
ξ	1,3										

	Вариант	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	1,8545	20,7751	0,7277	0,8875	0,8492	0,1426	2,9028	1,6588	0,9243	0,2644	3,2300
	1,5022	12,5914	0,9769	0,8256	0,9002	0,1289	3,3445	1,3975	0,7538	0,1937	3,0144
	1,1732	7,6850	0,6229	0,8123	0,9387	0,1120	3,6296	1,1231	0,7000	0,1314	2,5550
x_i	0,8330	4,9104	0,1928	0,8497	0,9689	0,0891	3,6214	0,8150	0,7411	0,0742	1,8099
	0,5589	4,0517	-0,0230	0,9073	0,9860	0,0656	3,1961	0,5535	0,8178	0,0367	1,0718
	0,3354	4,0715	-0,0886	0,9581	0,9949	0,0426	2,3981	0,3342	0,8918	0,0143	0,4825
	0,1948	4,3493	-0,0789	0,9839	0,9983	0,0260	1,6035	0,1946	0,9386	0,0051	0,1875
ξ	0,3										

	Вариант	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
	0,2143	4,3002	-0,0826	0,9809	0,9979	0,0284	1,7298	0,2140	0,9548	0,0061	1,8888
	0,2572	4,2037	-0,0881	0,9735	0,9970	0,0335	1,9887	0,2567	0,9453	0,0086	1,8466
	0,3269	4,0830	-0,0892	0,9599	0,9952	0,0416	2,3574	0,3258	0,9297	0,0136	1,7688
x_i	0,4282	3,9946	-0,0735	0,9377	0,9918	0,0526	2,7906	0,4258	0,9071	0,0225	1,6415
	0,5657	4,0603	-0,0194	0,9057	0,9856	0,0663	3,2129	0,5600	0,8771	0,0375	1,4547
	0,7756	4,6388	0,1357	0,8603	0,9731	0,0845	3,5710	0,7610	0,8366	0,0656	1,1691
	1,0935	6,8430	0,5139	0,8167	0,9467	0,1072	3,6637	1,0529	0,8014	0,1172	0,7981
ξ	0,25										

	Вариант	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
	1,0000	3,1000	1,9320	2,1700	0,9553	0,1011	3,6788	0,9689	0,9636	0,1011	3,6788
	1,1000	3,0131	2,0891	1,9868	0,9460	0,1076	3,6616	1,0587	0,9942	0,1183	4,0277
	1,2320	2,8473	2,2090	1,7349	0,9325	0,1154	3,5938	1,1740	0,9932	0,1421	4,4276

x_i	1,3922	2,5701	2,1119	1,4382	0,9140	0,1238	3,4600	1,3087	0,9200	0,1723	4,8169
	1,5871	2,1234	1,4772	1,1459	0,8888	0,1326	3,2459	1,4638	0,7166	0,2104	5,1515
	1,8251	1,4212	0,0390	1,0001	0,8538	0,1416	2,9421	1,6384	0,3119	0,2584	5,3696
	2,1171	0,3358	-1,0777	1,2810	0,8050	0,1504	2,5485	1,8274	-0,3148	0,3185	5,3956
ξ	1,7										

	Вариант	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
	2,3289	7,4025	4,1063	0,7875	0,7657	0,1556	2,2685	1,9452	1,2182	0,3624	3,1698
	2,2147	7,9204	3,2178	0,4896	0,7873	0,1529	2,4181	1,8838	1,1554	0,3387	3,2133
	2,0597	8,5681	2,9438	0,1833	0,8151	0,1489	2,6259	1,7926	1,0569	0,3066	3,2452
x_i	1,8537	9,3255	3,8554	0,0038	0,8493	0,1426	2,9039	1,6582	0,9238	0,2643	3,2298
	1,6128	10,0558	5,3489	0,1169	0,8852	0,1337	3,2148	1,4834	0,7958	0,2156	3,1108
	1,3708	10,6117	6,1447	0,4758	0,9166	0,1227	3,4805	1,2911	0,7196	0,1682	2,8627
	1,1104	11,0022	6,1029	0,9672	0,9450	0,1082	3,6580	1,0679	0,7012	0,1202	2,4370
ξ	2,1										

	Вариант	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
	1,2214	16,7391	8,1582	0,7551	0,9336	0,1148	3,6009	1,1649	0,8010	0,1402	0,6805
	1,3802	18,0820	8,3779	0,4592	0,9155	0,1232	3,4716	1,2989	0,8143	0,1700	0,5626
	1,5872	20,0003	8,2815	0,1457	0,8888	0,1326	3,2457	1,4639	0,8567	0,2105	0,4545
x_i	1,8571	22,7888	7,1194	0,0045	0,8488	0,1427	2,8994	1,6605	0,9505	0,2650	0,3847
	2,2099	26,9367	4,8706	0,4782	0,7882	0,1528	2,4245	1,8811	1,1017	0,3377	0,3926
	2,6740	33,2783	7,8721	1,7323	0,6951	0,1623	1,8444	2,0984	1,1989	0,4341	0,5204
	3,2890	43,2810	4,7946	1,2357	0,5514	0,1711	1,2265	2,2384	0,9503	0,5629	0,7898
ξ	3										

Образец выполнения лабораторной работы № 7

(Интерполирование функций. Полином Лагранжа)

Постановка задачи. Дана функция $y = f(x)$ своими значениями $y_i = f(x_i)$, где $x_i \in [a,b]$, $i = \overline{0,n}$. Найти интерполирующую функцию определенного класса $F(x)$, такую что $F(x_i) = y_i$, для $\forall x_i \in [a,b],\ i = \overline{0,n}$.

Задача интерполяции заключается в нахождении значения функции $y = f(x)$ при $x = \xi$, для чего полагают, что $f(\xi) \approx F(\xi)$.

А) Рассмотрим решение задачи интерполяции для функции заданной таблично, используя метод Лагранжа для не равноотстоящих узлов.

x_i	0,200000	0,306000	0,468180	0,716315	1,095963	1,676823	2,565539
y_i	1,020067	1,047184	1,111613	1,267713	1,663140	2,767751	6,542271

Найти $y_\xi = f(\xi)$, при $\xi = 2,1$.

x_i	0,200000	0,306000	0,468180	0,716315	1,095963	1,676823	2,565539
y_i	1,020067	1,047184	1,111613	1,267713	1,663140	2,767751	6,542271

ξ	2,10

Замечание. В дальнейшем промежуточные значения будут представлены в тексте с четырьмя знаками после запятой, хотя все вычисления будут проводиться с шестью знаками после запятой.

$\xi - x_i =$							
	1,9000	1,7940	1,6318	1,3837	1,0040	0,4232	-0,4655

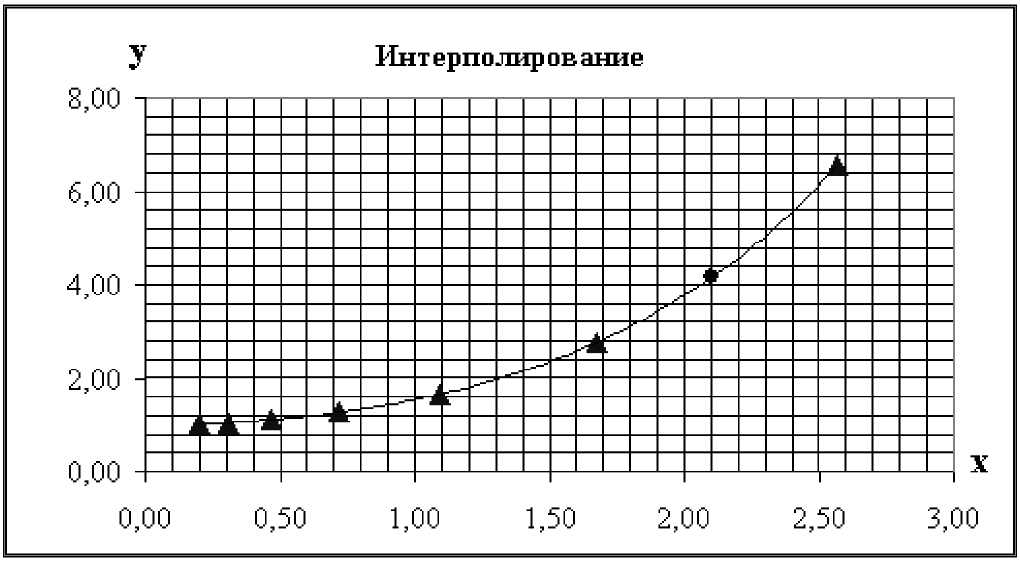
Таблица разностей $\left(x_k - \xi\right)$

	0,2000	0,3060	0,4682	0,7163	1,0960	1,6768	2,5655
0,2000	1	0,1060	0,2682	0,5163	0,8960	1,4768	2,3655
0,3060	-0,1060	1	0,1622	0,4103	0,7900	1,3708	2,2595
0,4682	-0,2682	-0,1622	1	0,2481	0,6278	1,2086	2,0974
0,7163	-0,5163	-0,4103	-0,2481	1	0,3796	0,9605	1,8492
1,0960	-0,8960	-0,7900	-0,6278	-0,3796	1	0,5809	1,4696
1,6768	-1,4768	-1,3708	-1,2086	-0,9605	-0,5809	1	0,8887
2,5655	-2,3655	-2,2595	-2,0974	-1,8492	-1,4696	-0,8887	1

Таблица значений

$P_{i,k}\left(\xi\right) = \left(\xi - x_k\right) / \left(x_i - x_k\right)$							$\prod_{k \neq i} P_{i,k}\left(\xi\right)$	$y_i \prod_{k \neq i} P_{i,k}\left(\xi\right)$
1	-16,9245	-6,0848	-2,6799	-1,1206	-0,2865	0,1968	-17,4407090	-17,7906917
-17,9245	1	-10,0618	-3,3723	-1,2710	-0,3087	0,2060	49,1657194	51,4855547
-7,0848	11,0618	1	-5,5763	-1,5993	-0,3501	0,2220	-54,3186589	-60,3813274
-3,6799	4,3723	6,5763	1	-2,6447	-0,4406	0,2517	31,0373295	39,3464261
-2,1206	2,2710	2,5993	3,6447	1	-0,7285	0,3168	-10,5296185	-17,5122296
-1,2865	1,3087	1,3501	1,4406	1,7285	1	0,5238	2,9651590	8,2068217
-0,8032	0,7940	0,7780	0,7483	0,6832	0,4762	1	0,1207786	0,7901663
							$\sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{k \neq i} P_{i,k}\left(\xi\right) = F(\xi) =$	4,1447200

Графическая интерпретация исходных значений и результата дают следующую картину, где точкой показан получаемый результат $F\left(2{,}1\right) = 4{,}14472$. Из данного рисунка можно сказать, что полученное приближенное решение задачи интерполяции вполне отвечает исходным данным.



Оценка погрешности приближения $F(\xi)$.

Оценим погрешность приближения с помощью выражения $R_n(x) \le \frac{\left|F^{(n+1)}(\eta)\right|}{(n+1)!}\prod_{I=0}^{n}(x-x_i)$, $\eta \in [x_0, x_n]$. Одним из возможных способов оценки погрешности является способ сведения задачи интерполяции в не равноотстоящих точках к задаче на равноотстоящих точках, что позволит оценить $F^{(n+1)}(\eta)$ с помощью выражения $F^{(n+1)}(\eta) \approx \frac{\Delta^{n+1} y_0}{(\Delta x)^{n+1}}$. Для этого необходимо найти конечные разности в равноотстоящих узлах $\bar{x}_i$, $i=\overline{0,6}$, $\bar{x}_i = \bar{x}_0 + i \cdot \Delta x$, $\bar{x}_0 = x_0$, $\bar{x}_6 = x_6$ $\Delta x = (\bar{x}_6 - \bar{x}_0)/6$. С помощью интерполирующего многочлена Лагранжа найдем $\bar{y}_i = F(\bar{x}_i)$, $i=\overline{0,6}$, затем составим конечные разности: $\Delta x = 0{,}3943$

x_i	0,2000	0,5943	0,9885	1,3828	1,7770	2,1713	2,5655
y_i	1,0201	1,1819	1,5297	2,1184	3,0407	4,4423	6,5423

$\bar{y}_i$	$\Delta^1\bar{y}_0$	$\Delta^2\bar{y}_0$	$\Delta^3\bar{y}_0$	$\Delta^4\bar{y}_0$	$\Delta^5\bar{y}_0$	$\Delta^6\bar{y}_0$
1,0201	0,1618	0,1860	0,0549	0,0378	0,0152	0,0052
1,1819	0,3478	0,2409	0,0927	0,0530	0,0204	
1,5297	0,5887	0,3336	0,1457	0,0734		
2,1184	0,9223	0,4793	0,2191			
3,0407	1,4016	0,6984				
4,4423	2,1000					
6,5423						

Если обозначить через $t = \frac{\xi - x_n}{\Delta x}$, где $x_{i+1} = x_i + \Delta x$, то $R_n(\xi) \le \left| \frac{\Delta^{n+1} y_0}{(n+1)!} \cdot \prod_{k=0}^{n} (t+k) \right|$.

t	$t+1$	$t+2$	$t+3$	$t+4$	$t+5$	
-1,1808	-0,1808	0,8192	1,8192	2,8192	3,8192	
					$R_n(\xi) =$	0,00002474

Получим решение: $y(\xi) \approx F(\xi) = 4{,}144720$, $R_n(\xi) =$ 0,00002474.

Определим число верных знаков. Так как $R_n(\xi) \le$ 0,00005, то при $m = 0$ имеем $n = 5$. После округления получим $y_1 = 4{,}1447$, $\Delta_{окр} = 0{,}00002$, $\Delta_{y_1} = 0{,}00004474$. Так как $\Delta_{y_1} = 0{,}00004474 < 0{,}00005$, то $n_1 = 5$. Следовательно, в полученном результате все знаки верные.

Ответ: $y(\xi) = 4{,}1447 \pm 0{,}000045$.

Лабораторная работа № 8

Тема: Интерполирование функции. Полиномы Ньютона.

Задание:

1) Найти приближенное значение функции при заданном значении аргумента ξ с помощью соответствующего интерполяционного полинома Ньютона, если функция задана в равноотстоящих узлах;

$$y_i = f(x_i);\ x_i = x_0 + i \cdot h;\ h = const;\ i = \overline{0,6};$$
$$y_\xi = f(\xi);\ y_\xi - ?;$$

2) Оценить погрешность полученного значения.

	Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	1	0,9950	0,9988	0,9512	0,3679	0,3679	0,4311	0,6664	1,7151	1,0806	6,8621
	1,15	1,1424	1,1481	1,0857	0,3064	0,2317	0,3044	0,4329	1,7834	1,0805	7,4816
	1,3	1,2890	1,2973	1,2182	0,2399	0,1419	0,2198	0,2406	1,8803	0,9042	8,0055
	1,45	1,4348	1,4462	1,3486	0,1771	0,0842	0,1635	0,0903	1,9696	0,5067	8,4128
x_i	1,6	1,5796	1,5949	1,4770	0,1237	0,0483	0,1263	-0,0178	1,9978	-0,1495	8,6805
	1,75	1,7233	1,7433	1,6034	0,0819	0,0267	0,1021	-0,0861	1,9035	-1,0918	8,7858
	1,9	1,8658	1,8914	1,7278	0,0514	0,0142	0,0872	-0,1185	1,6344	-2,3342	8,7075
ξ	=	1,23	1,47	1,52	1,16	1,23	1,47	1,52	1,48	1,18	1,25

	Вариант	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	1	0,2955	0,8408	0,6694	0,7358	1,0000	1,1651	0,6670	1,7552	1,6829	2,9736
	1,13	0,3758	0,9499	0,5508	0,4936	1,0250	1,0929	0,4623	1,9088	2,3097	3,2084

	1,26	0,4650	1,0589	0,4532	0,3245	1,1013	1,0797	0,2885	2,0362	3,0231	3,4131
x_i	1,39	0,5630	1,1678	0,3729	0,2084	1,2371	1,1206	0,1459	2,1352	3,8012	3,5816
	1,52	0,6694	1,2767	0,3069	0,1306	1,4502	1,2181	0,0352	2,2035	4,6148	3,7078
	1,65	0,7838	1,3854	0,2525	0,0797	1,7713	1,3812	-0,0443	2,2392	5,4279	3,7850
	1,78	0,9060	1,4940	0,2078	0,0473	2,2520	1,6261	-0,0948	2,2407	6,1986	3,8070
ξ	=	1,23	1,47	1,35	1,16	1,20	1,47	1,60	1,48	1,18	1,25

	Вариант	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
	1	0,8896	0,5414	0,7955	1,5576	1,1884	1,2693	0,1034	0,9483	1,6829	1,9093
	1,08	1,0936	0,5849	0,6732	1,3835	1,2362	1,2220	0,6080	0,8732	2,2220	1,6681
	1,16	1,3230	0,6284	0,5743	1,2316	1,3132	1,1956	1,0359	0,7750	2,8621	1,4193
x_i	1,24	1,5786	0,6720	0,4938	1,0982	1,4238	1,1863	1,3901	0,6556	3,6065	1,1620
	1,32	1,8609	0,7156	0,4276	0,9801	1,5749	1,1914	1,6745	0,5176	4,4560	0,8956
	1,4	2,1705	0,7593	0,3728	0,8752	1,7765	1,2083	1,8936	0,3640	5,4082	0,6197
	1,48	2,5077	0,8031	0,3272	0,7815	2,0432	1,2347	2,0529	0,1982	6,4569	0,3345
ξ	=	1,23	1,47	1,15	1,16	1,25	1,47	1,10	1,14	1,05	1,25

	Вариант	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
	1,5	1,4832	1,4958	1,3916	0,1581	0,0703	0,1493	0,0497	1,9888	0,3183	8,5186
	1,61	1,5892	1,6048	1,4855	0,1205	0,0465	0,1243	-0,0236	1,9960	-0,2032	8,6928
	1,72	1,6946	1,7136	1,5783	0,0893	0,0302	0,1061	-0,0754	1,9350	-0,8795	8,7788
x_i	1,83	1,7994	1,8223	1,6700	0,0643	0,0192	0,0932	-0,1075	1,7840	-1,7167	8,7681
	1,94	1,9036	1,9309	1,7607	0,0450	0,0120	0,0844	-0,1218	1,5296	-2,7164	8,6532
	2,05	2,0071	2,0392	1,8503	0,0307	0,0073	0,0791	-0,1199	1,1712	-3,8753	8,4272
	2,16	2,1098	2,1474	1,9389	0,0203	0,0044	0,0769	-0,1033	0,7241	-5,1853	8,0850
ξ	=	1,55	1,65	1,85	1,65	1,90	2,10	1,80	1,55	1,88	2,10

	Вариант	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
	2	1,1293	1,6775	0,1494	9,1578	3,6945	2,29858	-0,1223	2,1612	7,2744	3,7024
	2,14	1,2814	1,7941	0,1211	4,7939	5,3591	2,96157	-0,1070	2,0549	7,7151	3,5343
	2,28	1,4407	1,9105	0,0981	2,4234	8,1191	3,87202	-0,0693	1,9042	7,8899	3,2825
x_i	2,42	1,6066	2,0268	0,0796	1,1825	12,8401	5,08455	-0,0112	1,7086	7,7373	2,9456
	2,56	1,7784	2,1428	0,0645	0,5566	21,1913	6,63426	0,0643	1,4680	7,2005	2,5245
	2,7	1,9556	2,2586	0,0523	0,2527	36,4794	8,50701	0,1502	1,1826	6,2312	2,0228
	2,84	2,1374	2,3742	0,0424	0,1106	65,4834	10,6032	0,2343	0,8533	4,7916	1,4468
ξ	=	2,10	2,20	2,75	2,50	2,20	2,47	2,30	2,60	2,25	2,80

	Вариант	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
	0,5	0,4994	0,4998	0,4877	0,3894	1,5576	1,5737	1,9428	1,8105	0,4388	4,2860

	1,01	1,0049	1,0087	0,9603	0,3642	0,3570	0,4210	0,6495	1,7183	1,0851	6,9060
	1,52	1,5025	1,5156	1,4088	0,1508	0,0653	0,1442	0,0347	1,9941	0,2346	8,5564
x_i	2,03	1,9883	2,0196	1,8341	0,0330	0,0080	0,0798	-0,1214	1,2436	-3,6531	8,4768
	2,54	2,4585	2,5195	2,2371	0,0040	0,0006	0,0935	0,0523	-0,9994	-10,6379	5,9763
	3,05	2,9092	3,0146	2,6186	0,0003	0,0000	0,2481	0,3152	-1,9891	-18,5270	1,0712
	3,56	3,3368	3,5038	2,9795	0,0000	0,0000	1,1933	0,0348	-1,9876	-23,1607	-5,1966
ξ	=	0,72	1,40	1,70	1,30	0,70	2,00	2,50	2,48	1,20	3,1

Образец выполнения лабораторной работы №8
(Интерполирование функции. Полиномы Ньютона.)

Постановка задачи. Дана функция $y = f(x)$ своими значениями $y_i = f(x_i)$, где $x_i \in [a,b]$, $x_i = x_0 + i \cdot h$, $h = const = \dfrac{b-a}{n}$, $x_0 = a$, $i = \overline{0,n}$. Найти интерполирующую функцию определенного класса $F(x)$, такую что $F(x_i) = y_i$, для $\forall x_i \in [a,b],\ i = \overline{0,n}$.

Задача интерполяции заключается в нахождении значения функции $y = f(x)$ при $x = \xi$, для чего полагают, что $f(\xi) \approx F(\xi)$.
Рассмотрим решение задачи интерполяции для функции заданной таблично, используя метод Ньютона для равноотстоящих узлов.

x_i	2,00000000	2,14000000	2,28000000	2,42000000	2,56000000	2,70000000	2,84000000
y_i	7,274400	7,715100	7,889900	7,737300	7,200500	6,231200	4,791600

Найти $y_\xi = f(\xi)$, при $\xi = 2{,}6$.

Так как $\xi = 2{,}6$ находится в конце таблицы, то применяем для решения задачи приближения вторую интерполяционную формулу Ньютона

$$P_n(\xi) = y_n + q\Delta y_n + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-1} + \frac{q(q+1)(q+2)}{3!}\Delta^3 y_{n-2} + \cdots + \frac{q(q+1)\ldots(q+n-1)}{n!}\Delta^n y_0$$

,

$$q = \frac{x_n - \xi}{h}.$$

Тогда $y_\xi = f(\xi) \approx P_n(\xi)$, $R_n(\xi) = \Delta_{y(\xi)} = \dfrac{h^{n+1}}{(n+1)!}\left|f^{(n+1)}(\bar{\xi})\right| \cdot \prod_{k=0}^{n}(q+k)$, $\bar{\xi} \in [a;b]$

Составим конечные разности

y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$	$\Delta^5 y_i$	$\Delta^6 y_i$
7,7373000	-0,2355480	-0,0657040	-0,0610118	0,0743632	-0,0920959	0,1105114
7,5017520	-0,3012520	-0,1267158	0,0133514	-0,0177327	0,0184155	

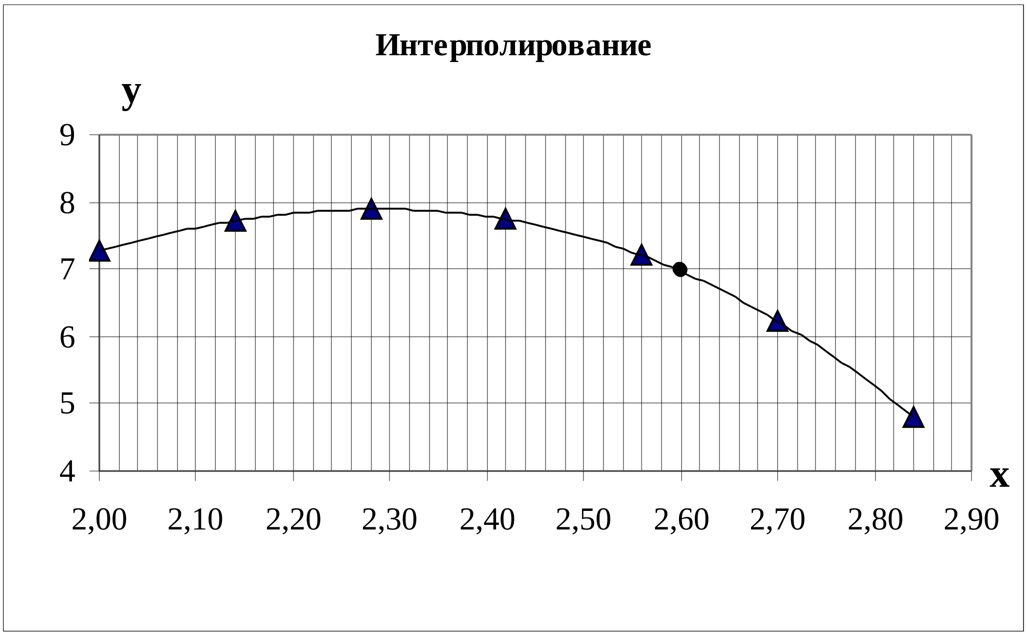
7,2005000	-0,4279678	-0,1133644	-0,0043813	0,0006828
6,7725322	-0,5413322	-0,1177457	-0,0036985	
6,2312000	-0,6590779	-0,1214442		
5,5721221	-0,7805221			
4,7916000				

q	$q+1$	$q+2$	$q+3$	$q+4$	$q+5$
-1,7143	-0,7143	0,2857	1,2857	2,2857	3,2857

Составим таблицу для вычисления слагаемых во второй интерполяционной формуле Ньютона:

k	$S_k=\prod_{i=1}^{k}(q+i-1)$	$k!$	$S_k/k!$	$\Delta^k y_{n-k}$	$\frac{S_k}{k!}\cdot\Delta^k y_{n-k}$
6	3,3782	720,0000	0,004691923	-0,0018000	-8,44546E-06
5	1,028143036	120,0000	0,008567859	0,0020000	1,71357E-05
4	0,449812578	24,0000	0,018742191	0,0105000	0,000196793
3	0,349854227	6,0000	0,058309038	-0,0378000	-0,002204082
2	1,224489796	2,0000	0,612244898	-0,4703000	-0,287938776
1	-1,7143	1,0000	-1,714285714	-1,4396000	2,467885714
0		1	1	4,7916000	4,7916
				$P_n(2,6)=$	6,96954834

Графическая интерпретация исходных значений и результата дают следующую картину, где точкой показан полученный результат: $f(2,6)\approx P_n(2,6)=6{,}96954834$. Из данного рисунка можно сказать, что <u>найденное приближенное решение задачи интерполяции вполне отвечает исходным данным</u>.



Оценка погрешности приближения $F(\xi)$.

Оценим погрешность приближения с помощью выражения $R_n(\xi) = \Delta_{y(\xi)} = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\left| f^{(n+1)}(\bar{\xi}) \right| \cdot \prod_{k=0}^{n}(q+k)$, $\bar{\xi} \in [x_0, x_n]$. Для этого оценим $f^{(n+1)}(\bar{\xi})$ с помощью выражения $f^{(n+1)}(\bar{\xi}) \approx \frac{\Delta^{n+1} y_0}{(\Delta x)^{n+1}}$, $\Delta x = h$. Тогда получим следующую погрешность $R_n(\xi = 2,6) = 0,00000845$.

Получим решение: $y(\xi) \approx F(\xi) = 6{,}96954834$, $R_n(\xi) = 0,00000845$.

Определим число верных знаков. Так как $R_n(\xi) \le$ 0,00005, то при $m = 0$ имеем $n = 5$.

После округления получим $y_1 = 6{,}9695$, $\Delta_{окр} = 0,00004834$, $\Delta_{y_1} = 0,00000845 + 0,00004834 = 0,00005679$. Так как $\Delta_{y_1} = 0{,}00005679 \le \frac{1}{2}10^{-3}$, то $n_1 = 4$.

Округлим $y_1 = 6{,}9695$ до верных знаков. Получим (используя правило четной цифры) $y_2 = 6{,}970$, где $\Delta_{окр1} = 0,0005$, $\Delta_{y_2} = 0,0005 + 0{,}00005679 = 0{,}00055679$. Так как $\Delta_{y_2} = 0{,}00055679 \le \frac{1}{2}10^{-2}$, то $n_2 = 3$.

Округлим $y_2 = 6{,}970$ до верных знаков. Получим $y_3 = 6{,}97$, где $\Delta_{окр2} = 0$, $\Delta_{y_3} = 0{,}00055679$. Так как $\Delta_{y_3} = 0{,}00055679 \le \frac{1}{2}10^{-2}$, то $n_3 = 3$. При этом $n_3 = n_2$.

Следовательно, в полученном результате все знаки верные.

Ответ: $y(2,6) = 6,97 \pm 0,00055679$.

Лабораторная работа № 9

Тема: Обратное интерполирование.

Задание:

1) Найти приближенное значение аргумента ξ функции при заданном значении функции с помощью соответствующих интерполяционных полиномов Ньютона и Лагранжа, если функция задана в равноотстоящих узлах (значения y_i, x_i даны в таблицах лабораторной работы № 8);

$$y_i = f(x_i);\ x_i = x_0 + i \cdot h;\ h = const;\ i = \overline{0,6};$$
$$y_\xi = f(\xi);\quad \xi - ?;$$

2) Оценить погрешности полученных значений и сравнить между собой.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_ξ	1,675	1,198	1,392	0,328	0,022	0,180	0,364	1,952	-1,472	7,668

№	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
y_ξ	0,356	1,344	0,316	0,542	1,136	1,126	0,050	2,229	3,257	3,593

№	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
y_ξ	1,448	0,759	0,586	1,067	1,215	1,189	0,986	0,262	3,707	0,793

№	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
y_ξ	0,397	1,793	1,434	0,026	0,058	0,087	-0,114	1,983	-1,092	8,781

№	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
y_ξ	2,085	1,927	0,071	0,336	7,401	9,992	-0,093	1,290	7,481	3,519

№	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
y_ξ	1,960	1,891	2,938	0,284	0,033	0,180	0,014	-1,752	0,985	4,212

Образец выполнения лабораторной работы №9

(Обратное интерполирование)

Постановка задачи. Дана функция $y = f(x)$, определенная на отрезке $[a, b]$, своими значениями y_i, в узлах x_i, где $x_i \in [a, b]$, $i = \overline{0,n}$. Найти значение аргумента $\bar{x}$, соответствующего известному значению $\bar{y}$, т.е. найти $\bar{x}$ такое, что $f(\bar{x}) = \bar{y}$.

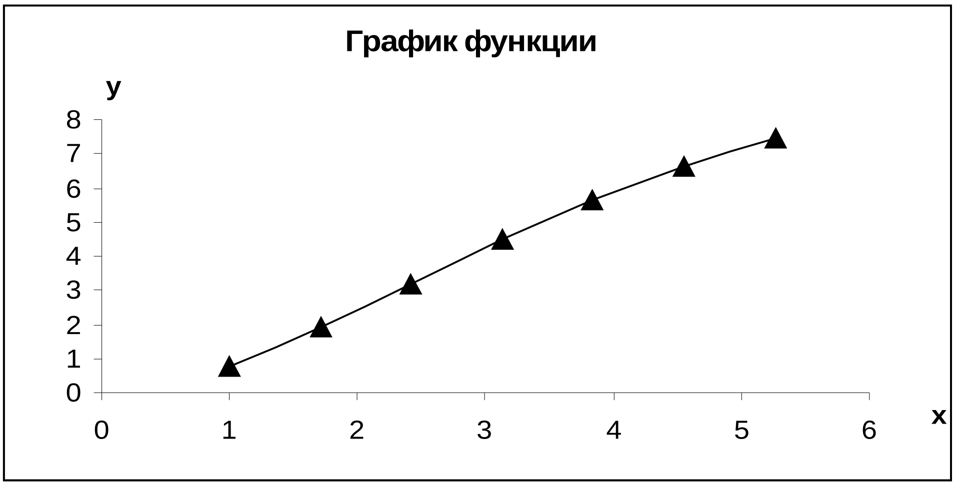
Исходные данные.

x_i	1	1,71	2,42	3,13	3,84	4,55	5,26
y_i	0,778801	1,906914977	3,198030272	4,479744	5,645985339	6,63762664	7,42804

$h =$	0,71
$\bar{y} =$	2,517282

Для этого тестового примера известно, что $\bar{y} = f\left(\bar{x}\right) = 2,517282$ при $\bar{x} = x_{точн} = 2,05$.

Из расположения заданных точек на графике можно заключить, что искомая функция скорее всего монотонна на рассматриваемом отрезке, поэтому обратная задача имеет единственное решение.



Решим данную задачу, используя первую интерполяционную формулу Ньютона:

$$\bar{y} = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!} q + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} q(q-1) + \ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} (q-k), \text{ где } q = \frac{\bar{x} - x_0}{h}.$$

Для решения задачи необходимо найти $q = q(\bar{x})$, для этого получим уравнение относительно q:

$$q = \varphi(q), \text{ где } \varphi(q) = \frac{1}{\Delta y_0} \left[\bar{y} - y_0 - \frac{\Delta^2 y_0}{2!} q(q-1) - \ldots - \frac{\Delta^n y_0}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} (q-k) \right].$$

Решим полученное уравнение методом итерации по следующей схеме:

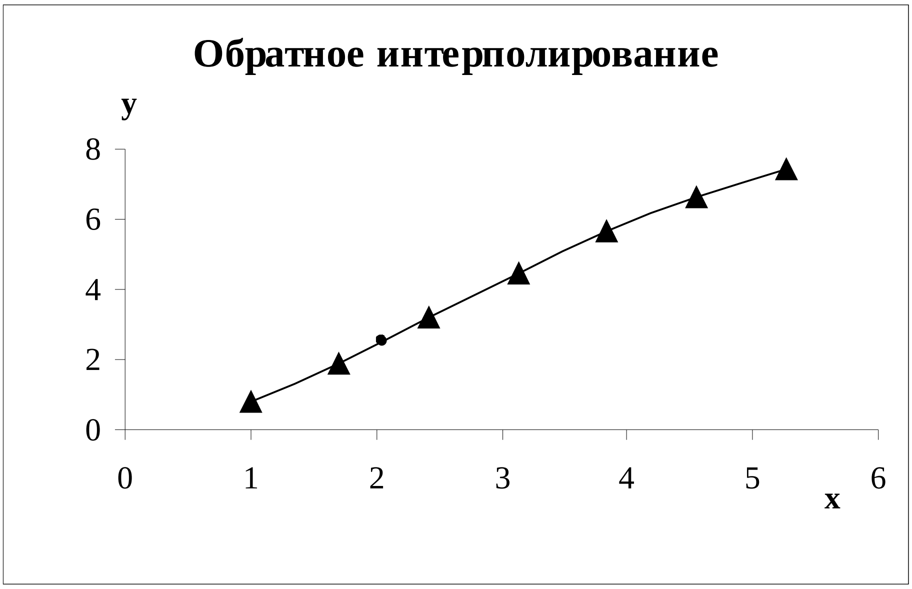
$$q_{k+1} = \varphi(q_k), \; k = 0,1,2,\ldots; \text{ где } q_0 = 0, \; q_1 = \frac{\bar{y} - y_0}{\Delta y_0}.$$

y	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	$\Delta^4 y_0$	$\Delta^5 y_0$	$\Delta^6 y_0$
0,778801	1,128114194	0,163001101	-0,172402	0,066329927	-0,01938387	0,004936
1,906915	1,291115295	-0,009401087	-0,106072	0,046946052	-0,01444804	
3,19803	1,281714208	-0,115473349	-0,059126	0,032498012		
4,479744	1,166240859	-0,174599558	-0,026628			
5,645985	0,991641301	-0,201227756				
6,637627	0,790413545					
7,42804						

q_k	$\varphi(q_k)$	$\lvert q_k - \varphi(q_k) \rvert$	$\varphi'(q_k)$	$R_k(q_k)$	$\bar{x} = x_0 + q_k \cdot h$
0	1,541050382	1,54105038	0,141322	0,2780904843	1,00000000
1,54105	1,469473685	0,07157670	0,152869	0,0129163839	2,09414577
1,469474	1,480282154	0,01080847	0,149057	0,0019504441	2,04332632
1,480282	1,478667833	0,00161432	0,149682	0,0002913127	2,05100033
1,478668	1,478909369	0,00024154	0,14959	0,0000435865	2,04985416
1,478909	1,478873239	0,00003613	0,149604	0,0000065197	2,05002565
1,478873	1,478878644	0,00000540	0,149602	0,0000009753	2,05000000
1,478879	1,478877835	0,00000081	0,149602	0,0000001459	2,05000384
1,478878	1,478877956	0,00000012	0,149602	0,0000000218	2,05000326

Где $R_k(q_k)=\dfrac{|q_k-\varphi(q_k)|}{\left|1-\max\left(\varphi'(q)\right)\right|}\left|\max\left(\varphi'(q)\right)\right|\le\varepsilon$, при $\varepsilon=0{,}0001$. На рассматриваемом отрезке имеем оценку $\left|\max\limits_{q}\left(\varphi'(q)\right)\right|=0{,}1528691$.

Тогда получим $\bar{x}=2{,}049854\pm0{,}0000436$. Полученное значение может быть изображено на графике. Откуда следует, что полученное решение обратной задачи вполне отвечает (соответствует) исходным данным.



Тогда в результате округлений получим следующий результат $\bar{x}=2{,}050\pm0{,}0001896$, который соответствует точному решению $x_{точн}=2{,}05$ в пределах найденной погрешности.

Ответ: $\bar{x}=2{,}050\pm0{,}0001896$.

Лабораторная работа № 10

Тема: Численное дифференцирование.

Задание:

Найти приближенное значение первой и второй производных функции при заданном значении аргумента ξ с помощью соответствующего интерполяционного полинома Ньютона, если функция задана в равноотстоящих узлах (*значения* y_i, x_i *даны в таблицах лабораторной работы №* ***8***);

$$y_i=f(x_i);\ x_i=x_0+i\cdot h;\ h=const;\ i=\overline{0,6};$$
$$y'_\xi=f'(\xi);\ y'_\xi-?;\quad y''_\xi=f''(\xi);\ y''_\xi-?;$$

Оценить погрешность полученного значения.

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

ξ	$1,1$	$1,2$	$1,3$	$1,4$	$1,15$	$1,1$	$1,2$	$1,3$	$1,4$	$1,25$

Вариант	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
ξ	$1,2$	$1,3$	$1,14$	$1,25$	$1,16$	$1,24$	$1,12$	$1,2$	$1,3$	$1,26$

Вариант	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
ξ	$1,2$	$1,23$	$1,25$	$1,24$	$1,15$	$1,16$	$1,2$	$1,1$	$1,17$	$1,3$

Вариант	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
ξ	$1,5$	$1,55$	$1,6$	$1,65$	$1,7$	$1,75$	$1,8$	$1,5$	$1,6$	$1,75$

Вариант	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
ξ	2	$2,1$	$2,15$	$2,2$	$2,25$	$2,3$	$2,35$	$2,4$	$2,45$	$2,5$

Вариант	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
ξ	$0,6$	1	$1,1$	$1,2$	$2,25$	$1,27$	$2,3$	$1,36$	$1,37$	$1,4$

Образец выполнения лабораторной работы №10

(Численное дифференцирование)

Постановка задачи. Функция задана в равноотстоящих узлах своими значениями y_i в узлах x_i. Найти приближенное значение первой и второй производных функции при заданном значении аргумента $\xi = 1,6$, где $h = 0,71$

x_i	1	1,71	2,42	3,13	3,84	4,55	5,26
y_i	0,778801	1,906915	3,19803	4,479744	5,645985	6,637627	7,42804

Так как функция дана в равноотстоящих узлах и $\xi = 1,6$ находится в начале таблицы, то используем первую интерполирующую формулу Ньютона. Для этого найдем конечные разности $\Delta^k y_i$, $k = \overline{1, n-1}$.

y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$	$\Delta^5 y_i$	$\Delta^5 y_i$
0,778801	1,128114	0,163001	-0,1724	0,06633	-0,01938	0,004936
1,906915	1,291115	-0,0094	-0,10607	0,046946	-0,01445	
3,19803	1,281714	-0,11547	-0,05913	0,032498		
4,479744	1,166241	-0,1746	-0,02663			
5,64598	0,99164	-0,20123				

5	1	
6,637627	0,790414	
7,42804		

Используя полученные конечные разности выпишем интерполирующий полином Ньютона $P_n(x)$. Полагая $y \approx P_n(x)$, $y' \approx P_n'(x)$, $y'' \approx P_n''(x)$, вводя обозначение $q = \frac{x - x_0}{h}$ получим $q = 0{,}8451$,

$y' \approx P_n'(\xi) = \tilde{y}'$	1,714043
$y'' \approx P_n''(\xi) = \tilde{y}''$	0,377144

$R'(h)$	0,005325
$R''(h)$	0,007478

Определим число верных знаков в широком смысле, тогда получим

$\tilde{y}' = 1{,}71 \pm 0{,}009368$, $\tilde{y}' = 0{,}4 \pm 0{,}030335$,

тогда точные значения должны принадлежать отрезкам

$y'(\xi) \in [1{,}700632;\ 1{,}719368]$, $y''(\xi) \in [0{,}369665;\ 0{,}430335]$.

Действительно, так как точные и соответствующие погрешности принимают значения

$y'_{точн}(\xi) =$	1,716019	$\Delta\tilde{y}' =$	0,001977
$y'_{точн}(\xi) =$	0,375379	$\Delta\tilde{y}'' =$	0,001764

при этом выполняются неравенства $\Delta\tilde{y}' \le R'(h)$, $\Delta\tilde{y}'' \le R''(h)$.

Таким образом найденные значения производных отвечают точным значениям в пределах найденных погрешностей приближенных значений.

Замечание. Очевидно, что в случае когда значение ξ находится ближе к концу таблицы значений функции необходимо применить вторую интерполирующую формулу Ньютона, в противном случае погрешность полученного приближенного значения производной будет большой

Лабораторная работа № 11

Тема: Численное интегрирование.

Задание: Состоит из двух пунктов (a и b).

1) Найти приближенное значение интеграла по формулам левых и правых прямоугольников с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$.
2) Найти приближенное значение интеграла по формуле средних прямоугольников с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$.
3) Найти приближенное значение интеграла по формуле трапеции с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$.

4) Найти приближенное значение интеграла по формуле Симпсона с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$.
5) Сравнить полученные результаты.

Вопросы самоконтроля.
1) Постановка задачи. Геометрическая иллюстрация.
2) Основная идея приближенного численного интегрирования.
3) Формулы Ньютона - Котеса.
4) Численное интегрирование методами прямоугольников (левого, правого, среднего), погрешность метода.
5) Численное интегрирование методом трапеции, погрешность метода.
6) Численное интегрирование методом Симпсона, погрешность метода.
7) Сравнение методов.

Интегралы для вычисления определяются исходя их номера варианта (N - номер варианта или последние (одна или две) цифры зачетки студента).

Варианты	a)	b)
№1 - №10	$I = \int_{0,4}^{1,2} \frac{\cos(0,07 \cdot N + 0,5 \cdot x)}{0,4 + \sqrt{x^2 + N}} dx$	$I = \int_{1,2}^{2,1} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + N}}$
№11 - №20	$I = \int_{0,1}^{1,7} \frac{\sin(0,02 \cdot N + 1,5 \cdot x)}{1,4 + \cos(1,2 \cdot N - 0,3 \cdot x)} dx$	$I = \int_{0,1}^{1,8} \frac{dx}{\sqrt{2 \cdot x^2 + 0,4 \cdot N}}$
№21 - №30	$I = \int_{0,15}^{1,3} \frac{(0,06 \cdot N + 2,5 \cdot x)^2}{1,1 + \sin(1,2 \cdot N - 0,3 \cdot x)} dx$	$I = \int_{1}^{3,5} \frac{\ln(0,6 \cdot N)}{\sqrt{x^2 + 0,3 \cdot N}} dx$
№31 - №40	$I = \int_{0,2}^{1,6} \frac{\cos^2(0,07 \cdot N - 2,5 \cdot x)}{2,5 + \sqrt{x^2 + N}} dx$	$I = \int_{0,15}^{2,1} \frac{x^2 \cdot \log(N/3)}{\sqrt{2 \cdot x^2 + 0,4 \cdot N}} dx$
№41 - №50	$I = \int_{0,1}^{1,7} \frac{\sin^2(0,02 \cdot N + 0,7 \cdot x)}{1,1 - \cos(1,3 \cdot N - 0,4 \cdot x)} dx$	$I = \int_{1}^{1,7} \frac{x \cdot \exp(-0,02 \cdot N)}{\sqrt{0,4 \cdot N - 2 \cdot x}} dx$
№51 - №60	$I = \int_{0,1}^{1,7} \frac{2,3 - \sin(0,3 \cdot N + 0,25 \cdot x)}{0,4 + \cos^2(1,6 \cdot N - 0,1 \cdot x)} dx$	$I = \int_{1,2}^{2,8} \frac{\ln(N)}{\sqrt{4 \cdot x^2 + 3 \cdot x + 0,4 \cdot N}} dx$

Образец выполнения лабораторной работы №11

(Численное интегрирование)

Задание: Дан интеграл $I = \int_{0,1}^{0,485} f(x) dx$, где $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$.

1) Найти приближенное значение интеграла I по формулам левых и правых прямоугольников с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$.
2) Найти приближенное значение интеграла I по формуле средних прямоугольников с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$.
3) Найти приближенное значение интеграла I по формуле трапеции с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$.
4) Найти приближенное значение интеграла I по формуле Симпсона с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$.
5) Сравнить полученные результаты.

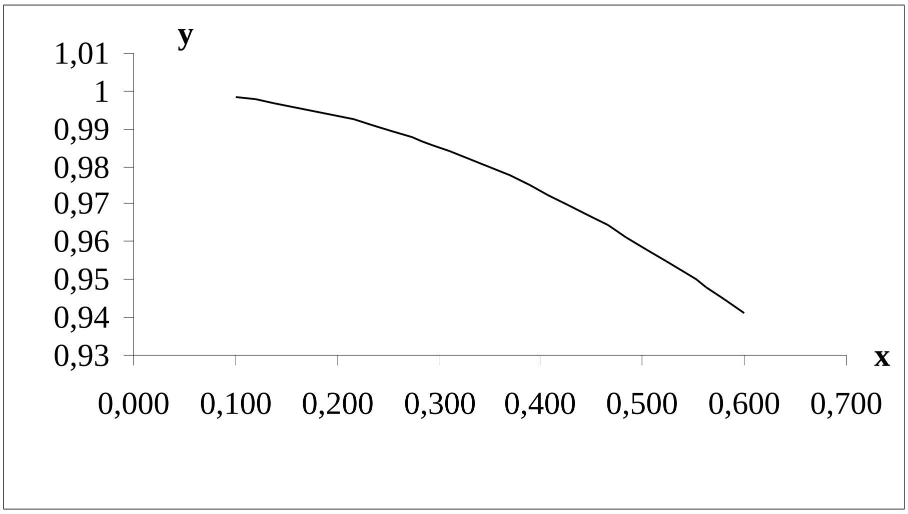
Отрезок $[a, b]$ разобьем на n частей и найдем значения $y_i = f(x_i)$,

$$y_i' = f'(x_i),\ y_i'' = f''(x_i),\ y_i^{(4)} = f^{(4)}(x_i),\ x_i = a + i \cdot h,\ h = \frac{(a-b)}{n}.$$

$a =$	0,1
$b =$	0,6

$n =$	26
$h =$	0,019231

x_i	y_i	$f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$	y_i'	y_i''	$y_i^{(4)}$
0,100	0,998334166	0,997998614	0,033300012	0,332333928	0,199286177
0,119	0,997632354	0,997235407	0,039687119	0,331912938	0,198985508
0,138	0,996807795	0,996349542	0,046065422	0,33141836	0,198632301
0,158	0,995860673	0,995341215	0,052433508	0,330850325	0,198226656
0,177	0,994791196	0,994210649	0,058789965	0,330208983	0,197768691
0,196	0,993599604	0,992958095	0,065133385	0,329494503	0,197258537
0,215	0,992286159	0,991583832	0,071462363	0,328707075	0,196696341
0,235	0,990851153	0,990088163	0,077775498	0,327846905	0,196082265
0,254	0,989294904	0,98847142	0,084071394	0,326914221	0,195416485
0,273	0,987617757	0,986733962	0,090348659	0,325909269	0,194699192
0,292	0,985820084	0,984876173	0,096605905	0,324832315	0,193930593
0,312	0,983902283	0,982898466	0,10284175	0,323683642	0,193110909
0,331	0,981864778	0,980801277	0,109054818	0,322463554	0,192240375
0,350	0,979708021	0,978585072	0,115243738	0,321172373	0,191319242
0,369	0,97743249	0,97625034	0,121407148	0,319810439	0,190347774
0,388	0,975038688	0,9737976	0,127543689	0,318378112	0,18932625
0,408	0,972527144	0,971227392	0,133652011	0,31687577	0,188254965
0,427	0,969898415	0,968540287	0,139730772	0,315303808	0,187134225
0,446	0,967153082	0,965736877	0,145778637	0,313662641	0,185964354
0,465	0,964291751	0,962817784	0,151794279	0,311952701	0,184745686
0,485	0,961315056	0,95978365	0,15777638	0,310174441	0,183478572
0,504	0,958223652	0,956635148	0,16372363	0,308328327	0,182163376
0,523	0,955018225	0,953372972	0,16963473	0,306414846	0,180800475
0,542	0,95169948	0,949997841	0,175508388	0,304434503	0,179390261
0,562	0,94826815	0,946510502	0,181343324	0,302387819	0,177933139
0,581	0,944724993	0,942911722	0,187138267	0,300275332	0,176429526
0,600	0,941070789	0,939202295	0,192891957	0,2980976	0,174879855



$\max\_лев(y') = 0{,}187138267$, $\max\_прав(y') = 0{,}192891957$, $\max(y'') = 0{,}332333928$,

$\max(y^{(4)}) = 0{,}199286177$.

1) Вычислим значение интеграла и его погрешность **методом левых прямоугольников** используя выражения

$$S_{лев\_прям} = h \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i),\ x_i = a + i \cdot h,\ R_{лев\_прям} \le \frac{n \cdot h^2}{2} \max_{x \in [a,b]} |y'(x)|.$$

Тогда получим $S_{лев\_прям} = 0{,}488730039$; $R_{лев\_прям} = 0{,}000899703$.

Так как $R_{лев\_прям} = 0{,}000899703 < \frac{1}{2}10^{-2}$, то число верных знаков равно 3.

Следовательно $S_1 = 0{,}49$, $\Delta_{окр} = |0{,}49 - 0{,}488730039| \le 0{,}00127$,

$$\Delta_1 = 0{,}0009 + 0{,}00127 = 0{,}00217 < \frac{1}{2}10^{-2}.$$

Таким образом оставшиеся цифры в записи числа верные.

Ответ: $S_{лев\_прям} = 0{,}49 \pm 0{,}00217$.

Вычислим значение интеграла и его погрешность **методом правых прямоугольников**

$$S_{прав\_прям} = h \cdot \sum_{i=1}^{n} f(x_i),\ x_i = a + i \cdot h,\ R_{прав\_прям} \le \frac{n \cdot h^2}{2} \max_{x \in [a,b]} |y'(x)|.$$

Тогда получим $S_{прав\_прям} = 0{,}487628821$; $R_{прав\_прям} = 0{,}00092737$.

Так как $R_{прав\_прям} = 0{,}00092737 < \frac{1}{2}10^{-2}$, то число верных знаков равно 3.

Следовательно $S_1 = 0{,}49$, $\Delta_{окр} = |0{,}49 - 0{,}487628821| \le 0{,}00238$,

$$\Delta_1 = 0{,}0009274 + 0{,}00238 \le 0{,}00321 < \frac{1}{2}10^{-2}.$$

Таким образом оставшиеся цифры в записи числа верные.

Ответ: $S_{прав\_прям} = 0{,}49 \pm 0{,}00321$.

2) **Методом средних прямоугольников** вычислим значение интеграла и его погрешность

$$S_{сред\_прям} = h\cdot\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i),\ \xi_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2},\ x_i = a + i\cdot h,\ R_{сред\_прям} \le \frac{n\cdot h^3}{24}\max_{x\in[a,b]}\left|f''(x)\right|.$$

Тогда имеем $S_{сред\_прям} = 0{,}488186808$; $R_{сред\_прям} = 0{,}00000256$. Так как $R_{сред\_прям} = 0{,}00000256 \le \frac{1}{2}10^{-5}$, то число верных знаков равно 6. Следовательно $S_1 = 0{,}48819$, $\Delta_{окр} = |0{,}48819 - 0{,}488186808| \le 0{,}0000032$, $\Delta_1 = 0{,}00000256 + 0{,}0000032 \le 0{,}00000576$. Так как $\Delta_1 = 0{,}00000576 \le \frac{1}{2}10^{-4}$, то число верных знаков равно $n_1 = 5$, тогда $S_2 = 0{,}4882$, $\Delta_{окр1} = 0{,}00001$, $\Delta_1 = 0{,}00000576 + 0{,}00001 \le 0{,}00001576$. Очевидно, что $n_2 = n_1 = 5$.

Таким образом оставшиеся цифры в записи числа верные.

Ответ: $S_{сред\_прям} = 0{,}4882 \pm 0{,}00001576$.

3) Используя **формулу трапеции** и соответствующую ей оценку погрешности

$$S_{трап} = h\cdot\left[\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right],\ x_i = a + i\cdot h,\ R_{трап} \le \frac{n\cdot h^3}{12}\max_{x\in[a,b]}|y''(x)|$$

получим $S_{трап} = 0{,}48817943$; $R_{трап} = 0{,}00000512$.

Так как $R_{трап} = 0{,}00000512 < \frac{1}{2}10^{-4}$, то число верных знаков равно 5. Следовательно $S_1 = 0{,}4882$, $\Delta_{окр} = |0{,}4882 - 0{,}48817943| \le 0{,}00000206$,

$$\Delta_1 = 0{,}00000512 + 0{,}00000206 \le 0{,}00000718 < \frac{1}{2}10^{-4}.$$

Таким образом оставшиеся цифры в записи числа верные.

Ответ: $S_{трап} = 0{,}4882 \pm 0{,}0000072$.

4) Используя **формулу Симпсона** и соответствующую ей оценку погрешности

$$S_{симп} = \frac{h}{3}\cdot\sum_{i=0}^{m-1}[f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2})],\ n = 2m,\ R_{симп} \le \frac{n\cdot h^5}{180}\max_{x\in[a,b]}\left|f^{(4)}(x)\right|$$

получим $S_{симп} = 0{,}4881843486$; $R_{симп} = 0{,}000000000076$.

Так как $R_{симп} = 0{,}000000000076 < \frac{1}{2}10^{-9}$, то число верных знаков равно 10. Следовательно $S_1 = 0{,}488184349$, $\Delta_{окр} = |0{,}4881843486 - 0{,}488184349| \le 0{,}0000000004$, $\Delta_1 = 0{,}000000000476 < \frac{1}{2}10^{-9}$. Таким образом оставшиеся цифры в записи числа верные.

Ответ: $S_{симп} = 0{,}488184349 \pm 0{,}00000000048$.

5) Сравнение результатов.

Лабораторная работа № 12

Тема: Приближенное решение обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Задача Коши.

Задание: Найти приближенные значения решения $y = y(x)$ обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) $y'(x) = f(x)$ на отрезке $x \in [a,b]$ с шагом h при начальном условии $y(x_0) = y_0$ используя

1) метод Эйлера;
2) усовершенствованный метод ломаных;
3) метод Эйлера-Коши;
4) метод Эйлера с уточнением;
5) метод Рунге-Кутта четвертого порядка.

Для тестовых примеров найти относительные погрешности и сравнить полученные результаты. Построить графики точного и численного решений.

Оценить погрешность приближенного решения заданного уравнения в выбранной точке, построить график численного решения.

Вопросы самоконтроля.

1) Постановка задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Геометрическая иллюстрация.
2) Основные положения метода Эйлера. Геометрическая интерпретация.
3) Основные положения метода Эйлера-Коши. Геометрическая интерпретация.
4) Основные положения метода Эйлера с уточнением. Геометрическая интерпретация.
5) Метод Рунге-Кутта. Оценка погрешности метода на шаге.
6) Какой метод является более точным, какой менее точным?

Вариант	$y'(x) = f(x)$	$[a,b]$	h	$y(x_0) = y_0$
1	$y' = \frac{x+y}{x}$	$[1;2]$	$0,05$	$y(1) = 0$
2	$y' = \frac{1+x\cdot y}{x^2}$	$[1;2]$	$0,05$	$y(1) = 0$
3	$x\cdot y' - y = x^2 \cdot \sin(x)$	$\left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}+1\right]$	$0,05$	$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$
4	$x\cdot y' - y = \frac{x}{\ln(x)}$	$[e; e+1,5]$	$0,075$	$y(e) = 0$
5	$x\cdot y' = y\cdot \ln(y)$	$[1;3]$	$0,1$	$y(1) = e$
6	$x\cdot y' - y = x\cdot \sin\left(\frac{y}{x}\right)$	$[1;2]$	$0,1$	$y(1) = \pi/2$

7	$x^2 \cdot y' = (x-1)y$	$[1;2]$	$0,05$	$y(1)=e$
8	$y' = \frac{1+\ln(x)}{x} - \frac{y}{x}$	$[1;2]$	$0,05$	$y(1)=0$
9	$y' = \frac{x+y}{x}$	$[e;2e]$	$e/20$	$y(e)=e$
10	$y' + 2xy = xe^{-x^2}$	$[0;1]$	$0,05$	$y(0)=0$
11	$y' + y \cdot tg(x) = \sin(2x)$	$[0;1]$	$0,05$	$y(0)=-1$
12	$x \cdot y' - y^2 \ln(x) + y = 0$	$[1;2]$	$0,05$	$y(1)=1$
13	$y' \sin(x) = y \ln(y)$	$\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$	$\frac{\pi}{30}$	$y\left(\frac{\pi}{2}\right)=e$
14	$y' = \frac{1+y^2}{1+x^2}$	$[0;2]$	$0,1$	$y(0)=1$
15	$y' - y \cdot tg(x) = \sec(x)$	$[0;1,5]$	$0,1$	$y(0)=0$
16	$x \cdot y' - \frac{y}{x+1} = x$	$[1;2]$	$0,05$	$y(1)=0$
17	$y' - \frac{y}{1-x^2} = x+1$	$[0;1,5]$	$0,1$	$y(0)=1$
18	$y' = x + \cos\frac{y}{\sqrt{10}}$	$[0,6;2]$	$0,07$	$y(0,6)=0,8$
19	$y' = x + \cos\frac{y}{\sqrt{7}}$	$[0,5;2]$	$0,1$	$y(0,5)=0,6$
20	$y' = x + \cos\frac{y}{\pi}$	$[1,7;2,7]$	$0,05$	$y(1,7)=5,3$
21	$y' = x + \cos\frac{y}{2,25}$	$[1,4;3]$	$0,1$	$y(1,4)=2,2$
22	$y' = x + \cos\frac{y}{e}$	$[1,4;3]$	$0,1$	$y(1,4)=2,5$
23	$y' = x + \cos\frac{y}{\sqrt{2}}$	$[0,8;1,6]$	$0,05$	$y(0,8)=1,4$
24	$y' = x + \cos\frac{y}{\sqrt{3}}$	$[1,2;2,2]$	$0,05$	$y(0,6)=0,8$
25	$y' = x + \cos\frac{y}{\sqrt{11}}$	$[2,1;3,5]$	$0,075$	$y(2,1)=2,5$
26	$y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{5}}$	$[1,8;2,8]$	$0,05$	$y(1,8)=2,6$
27	$y' = x + \sin\frac{y}{3}$	$[1,6;3]$	$0,07$	$y(1,6)=4,6$
28	$y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{10}}$	$[0,6;1,7]$	$0,05$	$y(0,6)=0,8$

29	$y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{7}}$	$[0,5;1,2]$	$0,05$	$y(0,5) = 0,6$
30	$y' = x + \sin\frac{y}{\pi}$	$[1,7;3,2]$	$0,1$	$y(1,7) = 5,3$
31	$y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{2,8}}$	$[1,4;\ 2,2]$	$0,075$	$y(1,4) = 2,2$
32	$y' = x + \sin\frac{y}{e}$	$[1,4;3]$	$0,1$	$y(1,4) = 2,5$
33	$y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{2}}$	$[0,8;2,2]$	$0,075$	$y(0,8) = 1,3$
34	$y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{3}}$	$[1,1;3]$	$0,1$	$y(1,1) = 1,5$
35	$y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{11}}$	$[0,6;2,2]$	$0,1$	$y(0,6) = 1,2$
36	$y' = x + \sin\frac{y}{1,25}$	$[0,5;2]$	$0,1$	$y(0,5) = 1,8$
37	$y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{15}}$	$[0,2;1,8]$	$0,1$	$y(0,2) = 1,1$
38	$y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{1,3}}$	$[0,1;1,5]$	$0,1$	$y(0,1) = 0,8$
39	$y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{0,3}}$	$[0,5;2]$	$0,1$	$y(0,5) = 0,6$
40	$y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{0,7}}$	$[1,2;3]$	$0,1$	$y(1,2) = 1,4$
41	$y' = \frac{x+y}{x}$	$[1;2,5]$	$0,075$	$y(1) = 0$
42	$y' = \frac{1+x\cdot y}{x^2}$	$[1;2,5]$	$0,075$	$y(1) = 0$
43	$x\cdot y' - y = x^2\cdot\sin(x)$	$\left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}+1\right]$	$0,04$	$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$
44	$x\cdot y' - y = \frac{x}{\ln(x)}$	$[e;e+1,5]$	$0,1$	$y(e) = 0$
45	$x\cdot y' = y\cdot\ln(y)$	$[1;2,5]$	$0,075$	$y(1) = e$
46	$x\cdot y' - y = x\cdot\sin\left(\frac{y}{x}\right)$	$[1;2,7]$	$0,1$	$y(1) = \pi/2$
47	$x^2\cdot y' = (x-1)y$	$[1;1,8]$	$0,05$	$y(1) = e$
48	$y' = x + \cos\frac{y}{\sqrt{1,3}}$	$[1,2;2,2]$	$0,05$	$y(1,2) = 2,2$

49	$y' = \dfrac{x+y}{x}$	$[e; 2e]$	$e/20$	$y(e) = e$
50	$y' + 2xy = xe^{-x^2}$	$[0;1]$	$0,05$	$y(0) = 0$
51	$y' + y \cdot tg(x) = \sin(2x)$	$[0;1]$	$0,05$	$y(0) = -1$
52	$x \cdot y' - y^2 \ln(x) + y = 0$	$[1;2]$	$0,05$	$y(1) = 1$
53	$y' \sin(x) = y \ln(y)$	$\left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$	$\dfrac{\pi}{30}$	$y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = e$
54	$y' = \dfrac{1+y^2}{1+x^2}$	$[0;2]$	$0,1$	$y(0) = 1$
55	$y' = x + \cos\dfrac{y}{\sqrt{0,3}}$	$[0,7; 2,1]$	$0,1$	$y(0,7) = 2,1$
56	$y' - y \cdot tg(x) = \sec(x)$	$[0;1,5]$	$0,1$	$y(0) = 0$
57	$y' = x + \cos\dfrac{y}{\sqrt{0,7}}$	$[0,9; 2,9]$	$0,1$	$y(0,9) = 1,7$
58	$x \cdot y' - \dfrac{y}{x+1} = x$	$[1;2]$	$0,05$	$y(1) = 0$
59	$y' = x + \cos\dfrac{y}{\sqrt{1,5}}$	$[0,3; 1,9]$	$0,1$	$y(0,3) = 0,9$
60	$y' - \dfrac{y}{1-x^2} = x+1$	$[0;1,5]$	$0,1$	$y(0) = 1$

Образец выполнения лабораторной работы №12

(Приближенное решение ОДУ. Задача Коши.)

Пример. Найти приближенное решение задачи Коши для обыкновенного уравнения первого порядка методом Эйлера и методом Эйлера с уточнением с шагом $h = 0,05$:

$$y' = \frac{y}{x} + x \cdot \cos(x) \equiv f(x, y), \quad x \in [0,5;\ 2,5], \quad y(0,5) = 0,239713.$$

1) По методу **Эйлера** приближенное решение ищется по схеме

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i) + O(h^2), \quad y_0 = y(x_0). \quad (\Sigma_1)$$

По данной схеме составим таблицу значений

i	x_i	$f(x_i, y_i)$	y_i	$y_{точн}$	y''
0	0,5	0,918217	0,239713	0,239713	1,515452
1	0,55	0,988204	0,285624	0,287478	1,417571
2	0,6	1,053591	0,335034	0,338785	1,311886
3	0,65	1,113937	0,387713	0,393371	1,198796
4	0,7	1,168833	0,44341	0,450952	1,078732

5	0,75	1,217902	0,501852	0,511229	0,952149
6	0,8	1,260799	0,562747	0,573885	0,819529
7	0,85	1,297206	0,625787	0,638588	0,681378
8	0,9	1,326835	0,690647	0,704994	0,538226
9	0,95	1,349429	0,756989	0,772745	0,390621
10	1	1,364763	0,82446	0,841471	0,239134
11	1,05	1,372639	0,892699	0,910794	0,084348
12	1,1	1,372893	0,96133	0,980328	0,073136
13	1,15	1,365391	1,029975	1,049679	0,232704
14	1,2	1,350033	1,098245	1,118447	0,393731
15	1,25	1,32675	1,165746	1,186231	0,555586
16	1,3	1,295505	1,232084	1,252626	0,717628
17	1,35	1,256295	1,296859	1,317227	0,879213
18	1,4	1,20915	1,359674	1,37963	1,039695
19	1,45	1,15413	1,420131	1,439434	1,198428
20	1,5	1,091331	1,477838	1,496242	1,354768
21	1,55	1,02088	1,532404	1,549665	1,508075
22	1,6	0,942936	1,583448	1,599318	1,657717
23	1,65	0,85769	1,630595	1,644827	1,803069
24	1,7	0,765364	1,67348	1,68583	1,943519
25	1,75	0,666211	1,711748	1,721975	2,078468
26	1,8	0,560513	1,745058	1,752926	2,207330
27	1,85	0,448582	1,773084	1,778359	2,329540
28	1,9	0,330757	1,795513	1,79797	2,444549
29	1,95	0,207404	1,812051	1,811471	2,551833
30	2	0,078917	1,822421	1,818595	2,650889
31	2,05	-0,05429	1,826367	1,819093	2,741238
32	2,1	-0,19177	1,823653	1,81274	2,822432
33	2,15	-0,33307	1,814064	1,799332	2,894048
34	2,2	-0,4777	1,797411	1,778692	2,955694
35	2,25	-0,62516	1,773526	1,750665	3,007012
36	2,3	-0,77493	1,742268	1,715122	3,047674
37	2,35	-0,92647	1,703522	1,671962	3,077389
38	2,4	-1,07925	1,657198	1,621112	3,095899
39	2,45	-1,23268	1,603236	1,562524	3,102986
40	2,5	-1,38622	1,541601	1,49618	3,098468

i	x_i	Δy_i	δy_i	$\Delta y_{i\text{точн}}$	$\delta y_{\text{точн}}$
0	0,5				
1	0,55	0,001894	0,66%	0,00185	0,65%
2	0,6	0,003666	1,08%	0,00375	1,11%
3	0,65	0,005306	1,35%	0,00566	1,44%
4	0,7	0,006805	1,51%	0,00754	1,67%
5	0,75	0,008153	1,59%	0,00938	1,83%
6	0,8	0,009343	1,63%	0,01114	1,94%
7	0,85	0,010368	1,62%	0,01280	2,00%

8	0,9	0,011219	1,59%	0,01435	2,04%
9	0,95	0,011892	1,54%	0,01576	2,04%
10	1	0,012380	1,47%	0,01701	2,02%
11	1,05	0,012679	1,39%	0,01810	1,99%
12	1,1	0,012785	1,30%	0,01900	1,94%
13	1,15	0,013076	1,25%	0,01970	1,88%
14	1,2	0,013568	1,21%	0,02020	1,81%
15	1,25	0,014262	1,20%	0,02048	1,73%
16	1,3	0,015159	1,21%	0,02054	1,64%
17	1,35	0,016258	1,23%	0,02037	1,55%
18	1,4	0,017558	1,27%	0,01996	1,45%
19	1,45	0,019056	1,32%	0,01930	1,34%
20	1,5	0,020749	1,39%	0,01840	1,23%
21	1,55	0,022635	1,46%	0,01726	1,11%
22	1,6	0,024707	1,54%	0,01587	0,99%
23	1,65	0,026961	1,64%	0,01423	0,87%
24	1,7	0,029390	1,74%	0,01235	0,73%
25	1,75	0,031988	1,86%	0,01023	0,59%
26	1,8	0,034747	1,98%	0,00787	0,45%
27	1,85	0,037659	2,12%	0,00528	0,30%
28	1,9	0,040715	2,26%	0,00246	0,14%
29	1,95	0,043905	2,42%	0,00058	0,03%
30	2	0,047218	2,60%	0,00383	0,21%
31	2,05	0,050645	2,78%	0,00727	0,40%
32	2,1	0,054173	2,99%	0,01091	0,60%
33	2,15	0,057790	3,21%	0,01473	0,82%
34	2,2	0,061485	3,46%	0,01872	1,05%
35	2,25	0,065244	3,73%	0,02286	1,31%
36	2,3	0,069053	4,03%	0,02715	1,58%
37	2,35	0,072900	4,36%	0,03156	1,89%
38	2,4	0,076770	4,74%	0,03609	2,23%
39	2,45	0,080649	5,16%	0,04071	2,61%
40	2,5	0,084527	5,65%	0,04542	3,04%

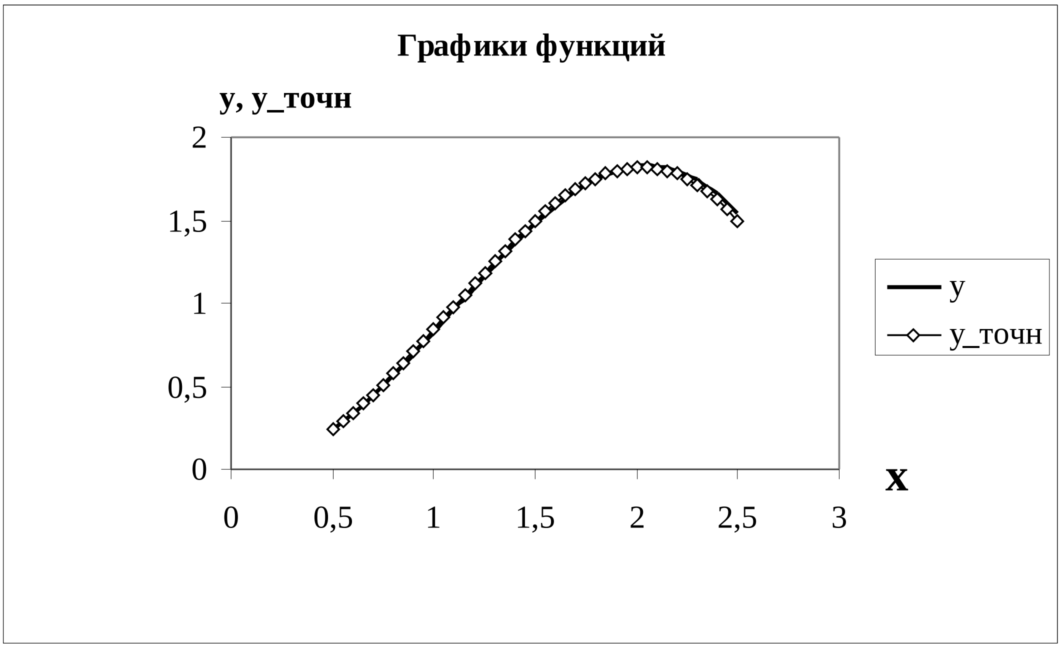
Где Δy_i -абсолютная погрешность нахождения y_i определяемая следующим образом: $\Delta y = \frac{h^2}{2}\left|y''(\xi)\right| \le \frac{h^2}{2}\max\left|y''(x)\right|$, $x \in [x_{i-1};\, x_i]$. Используя исходное уравнение,

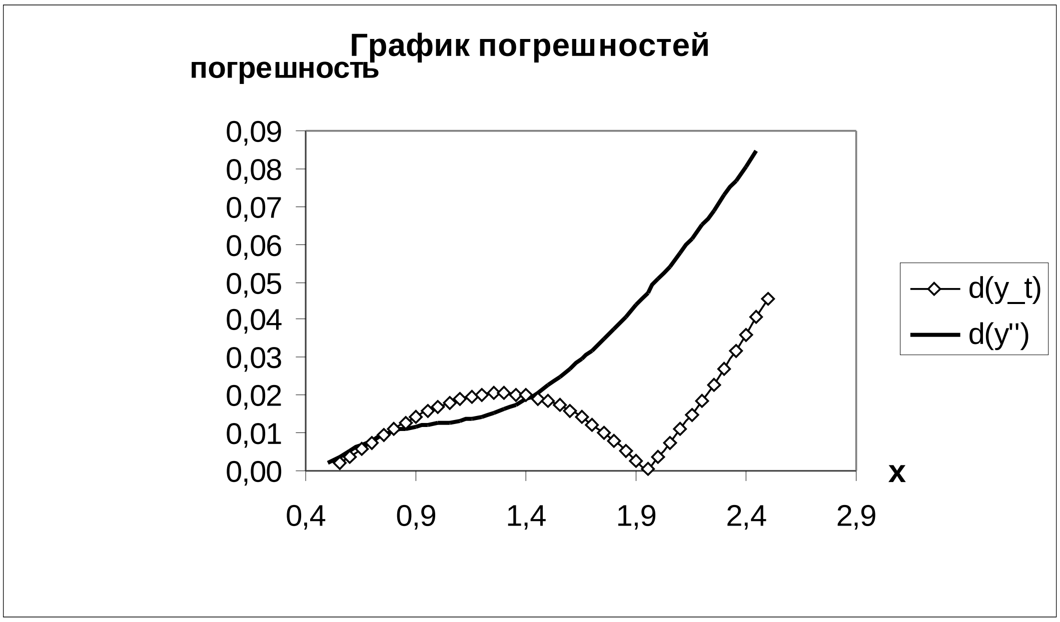
получим $y''(x) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + f(x,y)\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$.

В таблице $\Delta y_i = \Delta y_{i-1} + \frac{h^2}{2}\max\left|y''(x)\right|$, $\delta y_i \approx \frac{\Delta y_i}{y_i}$ $x \in [x_{i-1};\, x_i]$ абсолютная и относительная погрешности приближенного значения $y = y(x)$.

Для сравнения погрешностей найдем погрешность по отношению к точному значению искомой функции: $\Delta y_{i,точн} = abs\left(y_i - y_{i\,точн}\right)$, $\delta y_{i,точн} \approx \dfrac{\Delta y_{i,точн}}{y_{i,точн}}$,

И построим графики точных и приближенных значений функции $y = y\left(x\right)$, а так же графики абсолютных погрешностей (где $d(y\_t)$ соответствует погрешности $\Delta y_{i,точн}$, а $d(y'')$ - погрешности Δy_i).





Вывод. Из полученных приближенных значений и графиков следует, что метод Эйлера позволяет хорошо описать искомую функцию на качественном уровне, но дает достаточно большую погрешность численных значений. Поэтому метод Эйлера может быть использован при качественной оценке решения искомой функции, а для нахождения численных значений можно использовать более точные методы.

P.S. Характерный изгиб графика $d(y'')$ можно объяснить изменением вклада $|y''|$ в величину погрешности.

2) Исходную задачу рассмотрим в следующей постановке

$$y' = \frac{y}{x} + x \cdot \cos(x) \equiv f(x, y), \quad x \in [1; 1,25], \quad y(1) = 0,841471, \quad \varepsilon = 0,0001.$$

По методу **Эйлера с уточнением** приближенное решение ищется по схеме

$$\begin{cases} y_{i+1}^{(0)} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i), \\ y_{i+1}^{(k)} = y_i + \frac{h}{2}\left[f(x_i, y_i) + f\left(x_{i+1}, y_{i+1}^{(k-1)}\right)\right], \qquad i = 0,1,2,\ldots \quad (\Sigma_2) \\ k = \overline{1, n}, \quad \left| y_{i+1}^{(n)} - y_{i+1}^{(n-1)} \right| < \varepsilon, \quad \Delta y_{i+1} = \Delta y_i + O\left(h^3\right), \end{cases}$$

По данной схеме составим таблицу значений

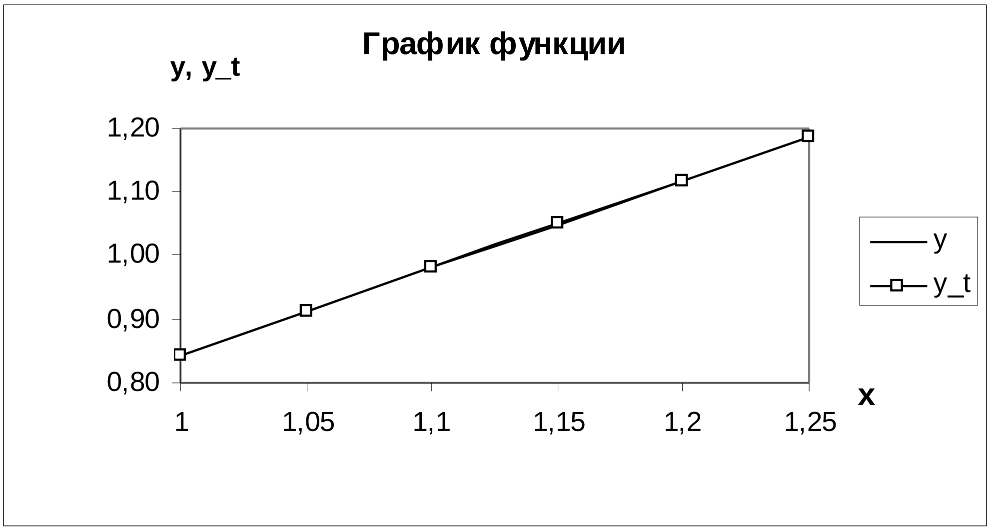
x	$f(x)$	$y_{i+1}^{(k-1)}$	$f\left(x_{i+1}, y_{i+1}^{(k-1)}\right)$	$\frac{[f_i + f_{i+1}]}{2}$	$y_{i+1}^{(k)}$	(Σ_3)
1	1,38177	0,84147			**0,84147**	
1,05	1,38177	0,91056	1,38965	1,38571	0,91076	Еще
			1,38984	1,38581	**0,91076**	Все
1,1	1,38984	0,98025	0,49896	0,94440	0,95798	Еще
			1,36985	1,37984	0,97975	Еще
			1,38964	1,38974	0,98025	Еще
			1,39009	1,38997	**0,98026**	Все
1,15	1,39010	1,04976	1,38260	1,38635	1,04958	Еще
			1,38244	1,38627	**1,04957**	Все
1,2	1,38243	1,11869	1,36707	1,37475	1,11831	Еще
			1,30947	1,34595	1,11687	Еще
			1,36555	1,37399	1,11827	Еще
			1,36672	1,37458	**1,11830**	Все
1,25	1,36675	1,18661	1,34344	1,35509	1,18603	Еще
			1,34297	1,35486	**1,18602**	Все

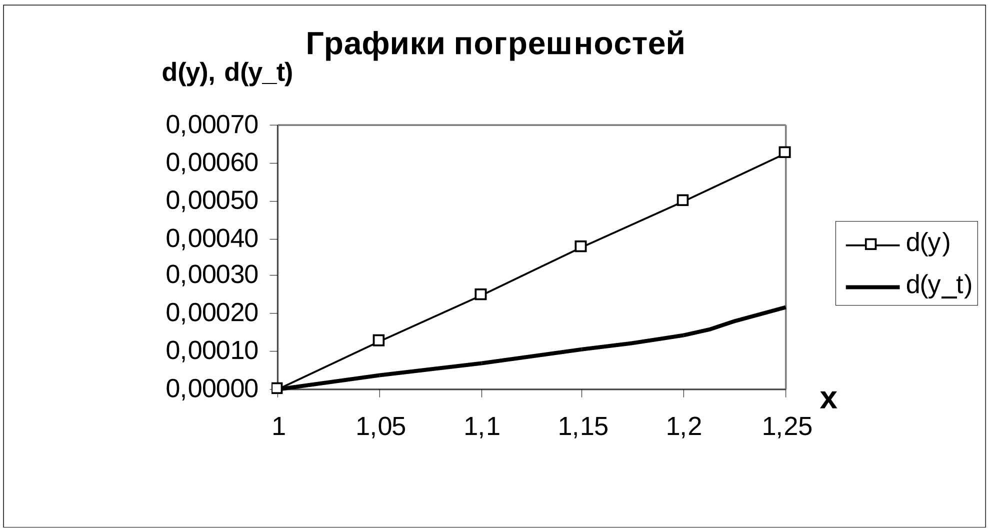
x	$y_{i+1}^{(k)}$	(Σ_3)	$y_{i,точн}$	Δy_i	$\Delta y_{i,точн}$
1	**0,84147**		0,84147	0,00000	0,00000
1,05	0,91076	Еще			
	0,91076	Все	0,91079	0,00013	0,00004
1,1	0,95798	Еще			
	0,97975	Еще			
	0,98025	Еще			
	0,98026	Все	0,98033	0,00025	0,00007

1,15	1,04958	Еще			
	1,04957	Все	1,04968	0,00038	0,00011
1,2	1,11831	Еще			
	1,11687	Еще			
	1,11827	Еще			
	1,11830	Все	1,11845	0,00050	0,00015
1,25	1,18603	Еще			
	1,18602	Все	1,18623	0,00063	0,00022

Где признак окончания итерации $\left|y_{i+1}^{(n)} - y_{i+1}^{(n-1)}\right| < \varepsilon$ обозначен символом (Σ_3).

Построим графики точных и приближенных значений функции $y = y(x)$, а так же графики абсолютных погрешностей (где $d(y\_t)$ соответствует погрешности $\Delta y_{i,точн}$, а $d(y)$ - погрешности Δy_i).





Вывод. Из полученных приближенных значений и графиков следует, что метод Эйлера с уточнением позволяет хорошо описать искомую функцию как на качественном, так и количественном уровне, хотя и дает завышенную погрешность по сравнению с точным решением (графики $d(y\_t)$ и $d(y)$). Поэтому метод Эйлера с уточнением может быть использован для практического применения нахождения приближенного решения искомой функции.

Замечание. Остальные методы рассматриваются аналогичным образом.

Темы домашних контрольных работ

1) *Контрольная работа №1*

Тема: Элементы теории погрешностей.

2) *Контрольная работа №2*

Тема: Приближенное решение нелинейных уравнений.

Задание. Лабораторные работы № 3-5.

3) *Контрольная работа №3*

Тема: Интерполирование. Обратное интерполирование. Численное дифференцирование.

Задание. Лабораторные работы № 8-10.

Задание к домашней контрольной работе №1

А.1. Элементы теории погрешностей.

Задание из Таблицы №1:

а) Определить какое равенство точнее.

б) Округлить сомнительные цифры числа, оставив верные знаки: 1) в узком смысле; 2) в широком смысле. Определить предельные абсолютную и относительную погрешности результата.

в) Найти предельные абсолютную и относительную погрешности чисел, если они имеют только верные цифры: 1) в узком смысле; 2) в широком смысле.

Таблица № 1

№	а)	б)	
		1	**2**
1	$7/3 = 2,33$; $\sqrt{42} = 6,48$	$3,4852 \pm 0,0047$	$12,8969$; $\delta = 0,39\%$
2	$21/29 = 0,724$; $\sqrt{83} = 9,11$	$2,5439$; $\delta = 0,69\%$	$0,48652 \pm 0,0089$
3	$4/7 = 0,235$; $\sqrt{10} = 3,16$	$513,4852 \pm 0,087$	$120,839$; $\delta = 0,054\%$
4	$12/7 = 1,71$; $\sqrt{63} = 7,94$	$102,86$; $\delta = 0,59\%$	$0,38554 \pm 0,0087$
5	$14/17 = 0,823$; $\sqrt{58} = 7,61$	$30,852 \pm 0,077$	$142,789$; $\delta = 0,73\%$
6	$5/3 = 1,667$; $\sqrt{7} = 2,64$	$0,89569$; $\delta = 0,05\%$	$3,141592 \pm 0,00987$
7	$16/7 = 2,28$; $\sqrt{14} = 3,74$	$0,058948 \pm 0,00447$	$1282,789$; $\delta = 0,83\%$
8	$20/13 = 1,54$; $\sqrt{6,8} = 2,61$	$37,7682 \pm 0,0049$	$182,778$; $\delta = 0,69\%$
9	$18/7 = 2,57$; $\sqrt{18} = 4,24$	$8,5447$; $\delta = 0,29\%$	$0,98752 \pm 0,0069$
10	$19/9 = 2,11$; $\sqrt{7} = 2,64$	$531,4875 \pm 0,078$	$12,389$; $\delta = 0,015\%$
11	$23/15 = 1,53$; $\sqrt{27} = 5,19$	$1,8467$; $\delta = 0,027\%$	$17,854 \pm 0,00687$

12	$18/17=1,06$; $\sqrt{15}=3,87$	$0,4856\pm 0,0047$	$124,879$; $\delta=0,53\%$
13	$5/13=0,385$; $\sqrt{3/20}=0,387$	$8,5969$; $\delta=0,9\%$	$\sqrt{\pi}\pm 0,00867$
14	$11/7=1,57$; $\sqrt{3}=1,73$	$0,04568\pm 0,00487$	$1078,987$; $\delta=0,183\%$
15	$10/7=1,43$; $\sqrt{14}=3,74$	$8,7858\pm 0,0046$	$1,8969$; $\delta=0,079\%$
16	$29/21=1,38$; $\sqrt{18}=4,243$	$5,4394$; $\delta=0,03\%$	$4,5675\pm 0,0078$
17	$7/3=2,33$; $\sqrt{8}=2,83$	$113,8352\pm 0,068$	$122,239$; $\delta=0,54\%$
18	$7/12=0,583$; $\sqrt{23}=4,796$	$132,86$; $\delta=0,09\%$	$0,38775\pm 0,0097$
19	$17/14=1,21$; $\sqrt{8}=2,83$	$52,875\pm 0,0047$	$742,123$; $\delta=0,023\%$
20	$11/3=3,667$; $\sqrt{12}=3,464$	$20,959$; $\delta=0,019\%$	$3,141592\pm 0,00877$
21	$22/7=3,143$; $\sqrt{14}=3,742$	$0,05695\pm 0,00347$	$2242,789$; $\delta=0,23\%$
22	$19/13=1,46$; $\sqrt{6}=2,45$	$373,786\pm 0,00039$	$471,123$; $\delta=0,33\%$
23	$8/7=1,143$; $\sqrt{3}=1,732$	$8,5677$; $\delta=2,9\%$	$0,48857\pm 0,0082$
24	$20/9=2,22$; $\sqrt{7}=2,65$	$347,4875\pm 0,0042$	$12,389$; $\delta=1,15\%$
25	$13/15=0,87$; $\sqrt{5}=2,24$	$11,867$; $\delta=0,47\%$	$37,884\pm 0,0086$
26	$8/13=0,62$; $\sqrt{13}=3,61$	$1,8856\pm 0,0047$	$194,279$; $\delta=0,13\%$
27	$6/13=0,462$; $\sqrt{1/2}=0,707$	$859,69$; $\delta=0,1\%$	$\sqrt{\pi}\pm 0,00167$
28	$9/7=1,29$; $\sqrt{3}=1,73$	$\sqrt{3}\pm 0,00257$	$1238,471$; $\delta=3,03\%$
29	$8/13=0,615$; $\sqrt{7}=2,646$	$8,5969$; $\delta=5,1\%$	$\sqrt{5}\pm 0,0025$
30	$11/7=1,57$; $\sqrt{3}=1,73$	$e\pm 0,00048$	$1078,987$; $\delta=10,0\%$
31	$11/3=3,667$; $\sqrt{11}=3,317$	π; $\delta=0,9\%$	$33,99592\pm 0,0088$
32	$20/7=2,857$; $\sqrt{8}=2,828$	$0,05785\pm 0,00247$	$\sqrt{3}$; $\delta=2,3\%$
33	$29/13=2,23$; $\sqrt{6}=2,45$	$e\pm 0,00029$	$4781,23$; $\delta=0,3\%$
34	$13/7=1,857$; $\sqrt{3}=1,732$	$\sqrt{2}$; $\delta=2,9\%$	$0,99867\pm 0,0076$
35	$20/9=2,22$; $\sqrt{6}=2,45$	$9,74575\pm 0,0048$	$1/\pi$; $\delta=1,5\%$
36	$13/15=0,87$; $\sqrt{2/3}=0,82$	$\sqrt{\pi}$; $\delta=0,5\%$	$87,885\pm 0,0086$
37	$18/13=1,38$; $\sqrt{8}=2,83$	$9,8888\pm 0,0027$	$\sin(\pi/5)$; $\delta=2,3\%$
38	$13/6=2,167$; $\sqrt{5}=2,236$	$\sqrt{e}$; $\delta=1,0\%$	$\sqrt{\pi}\pm 0,0077$
39	$24/7=3,43$; $\sqrt{3}=1,73$	$\sqrt{3}\pm 0,0059$	π; $\delta=0,03\%$
40	$8/13=0,615$; $\sqrt{7}=2,646$	$tg(1,2)$; $\delta=5,0\%$	$\sqrt{7}\pm 0,0033$

41	$11/7=1{,}57;\ \sqrt{5}=2{,}24$	$e\pm 0{,}00056$	$\pi^2;\ \delta=1{,}5\%$
42	$8/3=2{,}67;\ \sqrt{42}=6{,}48$	$\sqrt{7}\pm 0{,}0037$	$1/\pi;\ \delta=0{,}3\%$
43	$20/29=0{,}69;\ \sqrt{83}=9{,}11$	$\sqrt{10};\ \delta=1{,}59\%$	$\sin(1/\pi)\pm 0{,}0089$
44	$24/7=3{,}43;\ \sqrt{10}=3{,}16$	$\sqrt{e}\pm 0{,}0025$	$\sqrt{333};\ \delta=0{,}05\%$
45	$15/7=2{,}14;\ \sqrt{63}=7{,}94$	$428{,}94;\ \delta=0{,}59\%$	$0{,}78958\pm 0{,}007$
46	$19/3=6{,}33;\ \sqrt{58}=7{,}62$	$97{,}852\pm 0{,}07$	$1/3;\ \delta=7{,}3\%$
47	$7/3=2{,}33;\ \sqrt{7}=2{,}65$	$\sqrt{15};\ \delta=1{,}39\%$	$\pi\pm 0{,}00888$
48	$16/7=2{,}28;\ \sqrt{10}=3{,}16$	$\pi^3\pm 0{,}00447$	$\sqrt{13};\ \delta=0{,}85\%$
49	$20/13=1{,}54;\ \sqrt{3{,}8}=1{,}95$	$99{,}7682\pm 0{,}0079$	$100\cdot\pi;\ \delta=3{,}69\%$
50	$18/7=2{,}57;\ \sqrt{8}=2{,}83$	$tg(1{,}5);\ \delta=2{,}9\%$	$0{,}98951\pm 0{,}0088$
51	$15/7=2{,}43;\ \sqrt{65}=8{,}06$	$218{,}59;\ \delta=0{,}51\%$	$0{,}78555\pm 0{,}007$
52	$19/3=6{,}33;\ \sqrt{51}=7{,}14$	$78{,}555\pm 0{,}07$	$2/3;\ \delta=7{,}3\%$
53	$8/3=2{,}66;\ \sqrt{8}=2{,}83$	$\sqrt{17};\ \delta=0{,}49\%$	$\pi\pm 0{,}00355$
54	$16/7=2{,}28;\ \sqrt{\pi}=1{,}77$	$e^2\pm 0{,}00447$	$\sqrt{13};\ \delta=0{,}35\%$
55	$17/13=1{,}31;\ \sqrt{3{,}7}=1{,}92$	$99{,}7552\pm 0{,}0052$	$15\cdot\pi;\ \delta=3{,}39\%$
56	$18/7=2{,}57;\ \sqrt{e}=1{,}65$	$ctg(1{,}25);\ \delta=3{,}5\%$	$0{,}68781\pm 0{,}0078$
57	$13/7=1{,}86;\ \sqrt{63}=7{,}94$	$\sqrt{\pi};\ \delta=0{,}79\%$	$0{,}78554\pm 0{,}004$
58	$19/3=6{,}33;\ \sqrt{e}=1{,}65$	$98{,}555\pm 0{,}07$	$\pi/3;\ \delta=5{,}25\%$
59	$7/9=0{,}78;\ \sqrt{7}=2{,}65$	$\sqrt{0{,}15};\ \delta=1{,}23\%$	$3\pi\pm 0{,}00856$
60	$16/7=2{,}28;\ \sqrt{13}=3{,}61$	$\pi^2\pm 0{,}00347$	$\sqrt{11};\ \delta=0{,}75\%$

№	**в)**	
	1	**2**
1	245,67	8,4296
2	2,6087	78,296
3	12,356	0,04296
4	45,067	2,894
5	98,123	128,96
6	445,94	0,4796
7	67,607	6,453
8	745,607	2,4896
9	7,687	87,586
10	0,02356	308,096

№	**в)**	
	1	**2**
31	4159,01	0,20703
32	27,006	0,00453
33	14,5309	0,084
34	0,0612	5807,05
35	0,0654	123,06
36	4,067	0,0367
37	9,01	0,0036
38	3,141592	187,04
39	0,062	105,65
40	45,05	3,141

11	145,467	0,0397		41	170,9	0,061
12	98,1203	12,896		42	205,17	0,429
13	748,259	3,345		43	0,607	218,26
14	6,7692	0,6453		44	0,3056	10042,9
15	0,2467	18,416		45	450,27	0,804
16	2,087	0,786		46	0,123	128,906
17	52,305	0,0049		47	4405,9	0,0134
18	0,067	20,974		48	1,607	600,45
19	9,1230	0,1289		49	7,407	248,96
20	45,904	0,20796		50	768,7	0,8586
21	676,007	0,6453		51	450,257	0,844
22	1456,07	0,1894		52	0,0123	128,556
23	0,0687	587,056		53	445,9	0,0854
24	0,09326	100,026		54	1,657	409,45
25	14,047	0,1367		55	2,457	288,56
26	98,13	0,0856		56	488,7	0,05860
27	3,1415	117,45		57	150,57	0,8805
28	0,7062	10,653		58	0,1623	128,786
29	141,26	3,1415		59	1475,9	0,0434
30	17,29	0,0064		60	1,657	409,55

Образец выполнения задания А1.

А1. а) Какое равенство точнее $12/7 = 1,71;\quad \sqrt{11} = 3,32$.

Обозначим $a = \frac{12}{7} = 1,7143$, $\tilde{a} = 1,71$; $b = \sqrt{11} = 3,3166$, $\tilde{b} = 3,32$.

Тогда $\Delta\tilde{a} = |a - \tilde{a}| \le 0,0044 = \Delta_{\tilde{a}}$, $\Delta\tilde{b} = |b - \tilde{b}| \le 0,0035 = \Delta_{\tilde{b}}$,

$$\delta_{\tilde{a}} = \frac{\Delta_{\tilde{a}}}{\tilde{a}} \le 0,0026 = 0,26\%,\quad \delta_{\tilde{b}} = \frac{\Delta_{\tilde{b}}}{\tilde{b}} \le 0,0011 = 0,11\%.$$

Так как $\delta_{\tilde{a}} = 0,26\% > \delta_{\tilde{b}} = 0,11\%$, то равенство $\sqrt{11} = 3,32$ определено точнее.

Ответ: Равенство $\sqrt{11} = 3,32$ определено точнее.

б) Округлить сомнительные цифры числа, оставив верные знаки: 1) в узком смысле; 2) в широком смысле. Определить предельные абсолютную и относительную погрешности результата.

1) Дано приближенное число $\tilde{a} = 3,567 \pm 0,0027$, где $\Delta\tilde{a} = |a - \tilde{a}| \le \Delta_{\tilde{a}} = 0,0027$.

Определим <u>число верных знаков в узком смысле,</u> используя следующее выражение

$$\Delta\tilde{a} = |a - \tilde{a}| \le \frac{1}{2}10^{m-n+1}.$$

Так как $m=0$, и верно неравенство $0,0027 \le \frac{1}{2}10^{-2} = \frac{1}{2}10^{m-n+1}$, то получим $m-n+1=-2$, $n=3$. Округлим $\tilde{a}=3,567$ до трех верных знаков и получим $\tilde{a}_1=3,57$ с погрешностью округления $\Delta_{окр}=0,003$. При этом погрешность полученного приближенного числа равен $\Delta\tilde{a}_1 = \Delta\tilde{a} + \Delta_{окр} = 0,0057$.

Определим число верных знаков приближенного числа $\tilde{a}_1 = 3,57$.
$0,0057 \le \frac{1}{2}10^{-1} = \frac{1}{2}10^{m-n_1+1}$, $m-n_1+1=-1$, $n_1=2$. Округлим $\tilde{a}_1=3,57$ до двух верных знаков и получим $\tilde{a}_2=3,6$ с погрешностью округления $\Delta'_{окр}=0,03$. При этом погрешность полученного приближенного числа $\tilde{a}_2=3,6$ равна $\Delta\tilde{a}_2 = \Delta\tilde{a}_1 + \Delta'_{окр} = 0,0357$.

Определим число верных знаков приближенного числа $\tilde{a}_2=3,6$.
$0,0357 \le \frac{1}{2}10^{-1} = \frac{1}{2}10^{m-n_2+1}$, $m-n_2+1=-1$, $n_2=2$. Так как $n_2=n_1$, то приближенное число $\tilde{a}_2=3,6$ имеет только верные знаки.

Определим предельную относительную погрешность приближенного числа $\tilde{a}_2=3,6\pm0,0357$. Для этого используем определение предельной погрешности: $\delta a = \frac{\Delta a}{|a|} \le \delta_{\tilde{a}}$, $\delta_{\tilde{a}} \approx \frac{\Delta_{\tilde{a}}}{|\tilde{a}|}$.

Тогда получим $\delta_{\tilde{a}_2} \approx \frac{0,0357}{3,6} = 0,00992 \approx 1\%$.

Ответ: $\tilde{a}_2 = 3,6 \pm 0,0357$, $\delta_{\tilde{a}_2} = 1\%$.

2) Дано приближенное число $\tilde{a}=18,965;$ $\delta=0,35\%$, где $\Delta\tilde{a} \approx \tilde{a}\cdot\delta \le \Delta_{\tilde{a}} = 0,067$. Определим <u>число верных знаков в широком смысле,</u> используя следующее выражение $\Delta\tilde{a} = |a-\tilde{a}| \le 10^{m-n+1}$.

Так как $m=1$, и верно неравенство $0,067 \le 10^{-1} = 10^{m-n+1}$, то получим $m-n+1=-1$, $n=3$. Округлим $\tilde{a}=18,965$ до трех верных знаков и получим $\tilde{a}_1=19,0$ с погрешностью округления $\Delta_{окр}=0,035$. При этом погрешность полученного приближенного числа равна $\Delta\tilde{a}_1 = \Delta\tilde{a} + \Delta_{окр} = 0,102$.

Определим число верных знаков приближенного числа $\tilde{a}_1=19,0$. $0,102 \le 10^0 = 10^{m-n_1+1}$, $m-n_1+1=0$, $n_1=2$. Округлим $\tilde{a}_1=19,0$ до двух верных знаков и получим $\tilde{a}_2=19$ с погрешностью округления $\Delta'_{окр}=0,0$. При этом погрешность полученного приближенного числа $\tilde{a}_2=19$ равна $\Delta\tilde{a}_2 = \Delta\tilde{a}_1 + \Delta'_{окр} = 0,102$.

Определим число верных знаков приближенного числа $\tilde{a}_2=19$.
Из условия $0,102 \le 10^0 = 10^{m-n_2+1}$, получим $m-n_2+1=0$, $n_2=2$. Так как $n_2=n_1$, то приближенное число $\tilde{a}_2=19$ имеет только верные знаки.

Определим предельную относительную погрешность приближенного числа $\tilde{a}_2 = 19 \pm 0{,}102$. Для этого используем определение предельной погрешности: $\delta a = \dfrac{\Delta a}{|a|} \le \delta_{\tilde{a}}$, $\delta_{\tilde{a}} \approx \dfrac{\Delta_{\tilde{a}}}{|\tilde{a}|}$.

Тогда получим $\delta_{\tilde{a}_2} \approx \dfrac{0{,}102}{19} = 0{,}0054 \approx 0{,}54\%$.

Ответ: $\tilde{a}_2 = 19 \pm 0{,}102$, $\delta_{\tilde{a}_2} = 0{,}54\%$.

в) Найти предельные абсолютную и относительную погрешности чисел, если они имеют только верные цифры: 1) в узком смысле; 2) в широком смысле.

1) Дано приближенное число $\tilde{a} = 23{,}56$.

Так как это число имеет только верные цифры в узком смысле, то $m = 1,\ \ n = 4$. Определим предельную абсолютную погрешность числа из выражения $\Delta\tilde{a} = |a - \tilde{a}| \le \dfrac{1}{2}10^{m-n+1}$. Тогда $\Delta\tilde{a} \le \dfrac{1}{2}10^{m-n+1} = \dfrac{1}{2}10^{1-4+1} = \dfrac{1}{2}10^{-2}$.

Следовательно, для предельной абсолютной погрешности имеем $\Delta_{\tilde{a}} = \dfrac{1}{2}10^{-2} = 0{,}005$. Для определения предельной относительной погрешности числа можно использовать выражение $\delta a = \dfrac{\Delta a}{|a|} \le \dfrac{1}{\tilde{a}_m}\left(\dfrac{1}{10}\right)^{n-1}$, $\tilde{a}_m \ne 0$.

Так как $\tilde{a}_1 = 2 \ne 0$, то $\delta_{\tilde{a}} = \dfrac{1}{\tilde{a}_m}\left(\dfrac{1}{10}\right)^{n-1} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{10}\right)^{4-1} = 0{,}0005 = 0{,}05\%$.

Ответ: $\tilde{a} = 23{,}56 \pm 0{,}005;\ \delta_{\tilde{a}} = 0{,}05\%$.

2) Дано приближенное число $\tilde{a} = 0{,}73$.

Так как это число имеет только верные цифры в широком смысле, то $m = 0,\ n = 3$. Определим предельную абсолютную погрешность числа из выражения $\Delta\tilde{a} = |a - \tilde{a}| \le 10^{m-n+1}$. Тогда $\Delta\tilde{a} \le 10^{m-n+1} = 10^{0-3+1} = 10^{-2}$.

Следовательно, для предельной абсолютной погрешности имеем $\Delta_{\tilde{a}} = 10^{-2} = 0{,}01$. Для определения предельной относительной погрешности числа можно использовать выражение $\delta_{\tilde{a}} \approx \dfrac{\Delta_{\tilde{a}}}{|\tilde{a}|}$.

Тогда получим $\delta_{\tilde{a}} \approx \dfrac{\Delta_{\tilde{a}}}{|\tilde{a}|} = \dfrac{0{,}01}{0{,}73} \approx 0{,}014 = 1{,}4\%$.

Ответ: $\tilde{a} = 0{,}73 \pm 0{,}01;\ \delta_{\tilde{a}} = 1{,}4\%$.

А.2. Элементы теории погрешностей.

a) Вычислить и определить предельные абсолютную и относительную погрешности результата.

b) Вычислить и определить предельные абсолютную и относительную погрешности результата.

c) Вычислить и определить предельные абсолютную и относительную погрешности результата пользуясь общей формулой погрешности: 1) в узком смысле; 2) в широком смысле.

Задание из Таблицы 2 определяется по следующей схеме:

Если $1 \le N \le 15$, то номер задания равен номеру варианта (N), а исходные данные из Кол.1;

Если $16 \le N \le 30$, то номер задания равен ($N-15$), а исходные данные из Кол.2;

Если $31 \le N \le 45$, то номер задания равен ($N-30$), а исходные данные из Кол.3;

Если $46 \le N \le 60$, то номер задания равен ($N-45$), а исходные данные из Кол.4.

Таблица 2

№	Формулы		Кол. **1**	Кол. **2**
1	**a)** $X=\dfrac{(c-a)\cdot b^2}{\sqrt[3]{(c+b)}}$ **b)** $X=\dfrac{(c+b-a)^2\cdot b^2}{\sqrt[3]{c^2+b^2}}$ **c)** $X=\dfrac{\sqrt{(c+b-a)^3}}{b\cdot\sqrt[3]{c^3+b}}$	a b c	$3{,}85\pm0{,}01$ $2{,}048\pm0{,}0007$ $207{,}4\pm0{,}04$	$2{,}35\pm0{,}003$ $3{,}272\pm0{,}001$ $27{,}03\pm0{,}009$
2	**a)** $X=\dfrac{m\cdot[a-b]^2}{c^3}$ **b)** $X=\dfrac{\sqrt[3]{m\cdot[a+b]^2}}{c^2}$ **c)** $X=\dfrac{\lg m\cdot\sqrt{a+\sqrt{b}}}{(c-a)^2}$	a b c m	$5{,}14\pm0{,}005$ $2{,}44\pm0{,}006$ $7{,}2\pm0{,}07$ $7{,}8\pm0{,}05$	$18{,}5\pm0{,}07$ $6{,}08\pm0{,}047$ $20{,}4\pm0{,}034$ $6{,}2\pm0{,}02$
3	**a)** $X=\dfrac{m\cdot[a+b]^2}{\sqrt[3]{c^2}}$ **b)** $X=\dfrac{[m^{0,3}-a+b]^2}{\sqrt{(b^2+c)^3}}$ **c)** $X=\dfrac{\sin\dfrac{2\pi}{m}\cdot[\sqrt[3]{a}]^2}{\sqrt[3]{(c-a-b)^2}}$	a b c m	$3{,}85\pm0{,}01$ $20{,}18\pm0{,}002$ $2{,}04\pm0{,}01$ $7{,}2\pm0{,}07$	$3{,}25\pm0{,}01$ $2{,}011\pm0{,}001$ $20{,}4\pm0{,}04$ $4{,}18\pm0{,}002$

4	**a)** $X=\frac{(a-m)\cdot b^2}{b+c}$ **b)** $X=\frac{(b+a)^3\cdot c^2}{\sqrt{b}+c}$ **c)** $X=\frac{\cos(m^2-a)}{(\sqrt{b}+c)^3}$	a b c m	$18,5\pm0,07$ $7,03\pm0,007$ $2,45\pm0,003$ $7,08\pm0,037$	$2,04\pm0,01$ $7,2\pm0,06$ $0,74\pm0,002$ $7,2\pm0,09$
5	**a)** $X=\frac{(a-c)\cdot b^2}{\sqrt{m+b}}$ **b)** $X=\frac{\sqrt[2]{m\cdot[b-a]^3}}{c^3}$ **c)** $X=\frac{\ln\sqrt{m}\cdot\sqrt{a^3+b}}{(c^2-a)^2}$	a b c m	$7,15\pm0,004$ $8,12\pm0,009$ $5,9\pm0,04$ $2,07\pm0,002$	$2,6\pm0,07$ $2,8\pm0,07$ $0,37\pm0,0031$ $7,8\pm0,05$
6	**a)** $X=\frac{m\cdot[a-b]^2}{\sqrt{\lvert c-a\rvert}}$ **b)** $X=\frac{m^3\cdot[a+b]^2}{\sqrt[3]{\lvert c-a^2\rvert}}$ **c)** $X=\frac{\sqrt[3]{a}\cdot\sin\frac{2\pi}{3a}}{\sqrt[2]{(c+m+b)^3}}$	a b c m	$3,85\pm0,01$ $2,48\pm0,0047$ $207,4\pm0,04$ $3,258\pm0,007$	$2,58\pm0,06$ $3,258\pm0,007$ $20,74\pm0,004$ $2,048\pm0,0007$
7	**a)** $X=\frac{\sqrt{a}\cdot[m+b]^3}{c^2}$ **b)** $X=\frac{\sqrt{a^3}\cdot[m-b]^2}{(a+c)^2}$ **c)** $X=\frac{\cos(m^2-\sqrt{a})}{(\sqrt[3]{b}+c^2)^2}$	a b c m	$4,15\pm0,01$ $2,04\pm0,006$ $2,4\pm0,08$ $7,2\pm0,04$	$3,85\pm0,01$ $7,7\pm0,04$ $5,74\pm0,04$ $32,5\pm0,03$
8	**a)** $X=\frac{b\cdot[m-a]^2}{\sqrt{c^3}}$ **b)** $X=\frac{b\cdot[m^3+a]^2}{\sqrt[4]{(b+c)^3}}$ **c)** $X=\frac{\sin(m+\sqrt[3]{a})}{(\sqrt{\lvert b-a\rvert}+c)^2}$	a b c m	$3,58\pm0,01$ $2,048\pm0,001$ $207,4\pm0,04$ $6,2\pm0,02$	$3,85\pm0,01$ $4,3\pm0,07$ $4,07\pm0,002$ $20,18\pm0,002$
9	**a)** $X=\frac{(m+a)\cdot b^2}{(b+c)^3}$ **b)** $X=\frac{(m-a)\cdot b^2}{(b^2+c)^{0,3}}$ **c)** $X=\frac{\sin\frac{2\pi}{5b}\cdot\sqrt{a}}{\sqrt[3]{(c-a+b)^2}}$	a b c m	$3,85\pm0,01$ $2,048\pm0,0007$ $7,04\pm0,014$ $2,48\pm0,0047$	$27,03\pm0,009$ $2,04\pm0,01$ $6,1\pm0,04$ $4,18\pm0,006$

10	**a)** $X=\dfrac{(a-b)^3\cdot b^2}{\sqrt{m+c}}$ **b)** $X=\dfrac{(a+c)^2\cdot c^{0,5}}{\sqrt[3]{m-c}}$ **c)** $X=\dfrac{\lg\sqrt[3]{b}\cdot\sqrt{m^2-b}}{(c-a)^3}$	a b c m	$7{,}15\pm0{,}004$ $8{,}12\pm0{,}009$ $5{,}9\pm0{,}04$ $2{,}07\pm0{,}002$	$3{,}58\pm0{,}01$ $2{,}048\pm0{,}001$ $207{,}4\pm0{,}04$ $6{,}2\pm0{,}02$
11	**a)** $X=\dfrac{a^3\cdot[m+b]^2}{\sqrt[3]{c^2}}$ **b)** $X=\dfrac{c^2\cdot[c-b]^3}{\sqrt[2]{a^3}}$ **c)** $X=\dfrac{\sin\sqrt{m^2-b}}{\lg\|c^2-a\|^3}$	a b c m	$5{,}14\pm0{,}005$ $2{,}44\pm0{,}006$ $7{,}2\pm0{,}07$ $7{,}8\pm0{,}05$	$7{,}15\pm0{,}004$ $8{,}12\pm0{,}009$ $5{,}9\pm0{,}04$ $2{,}07\pm0{,}002$
12	**a)** $X=\dfrac{(b-a)^2\cdot m}{(m+c)^3}$ **b)** $X=\dfrac{(c+a)^{0,3}\cdot m^2}{(b-c)^3}$ **c)** $X=\dfrac{\ln\sqrt{m^2+b}}{\cos(c^2-a)}$	a b c m	$8{,}25\pm0{,}01$ $7{,}03\pm0{,}007$ $2{,}07\pm0{,}004$ $2{,}07\pm0{,}002$	$7{,}15\pm0{,}014$ $5{,}62\pm0{,}008$ $5{,}9\pm0{,}034$ $2{,}07\pm0{,}0042$
13	**a)** $X=\dfrac{\sqrt{\|m-c\|}\cdot b}{\sqrt[3]{a+b}}$ **b)** $X=\dfrac{\sqrt{\|m-c^3\|}\cdot a}{\sqrt[3]{\|c-b\|}}$ **c)** $X=\dfrac{\sin\sqrt{m^2+a}}{\cos\|c^2-b\|}$	a b c m	$5{,}14\pm0{,}005$ $2{,}44\pm0{,}006$ $7{,}2\pm0{,}07$ $7{,}8\pm0{,}05$	$3{,}25\pm0{,}01$ $2{,}011\pm0{,}001$ $20{,}4\pm0{,}04$ $4{,}18\pm0{,}002$
14	**a)** $X=\dfrac{m^2\cdot(b+a)^3}{(m+\sqrt{c})^2}$ **b)** $X=\dfrac{(b+a)^{0,7}\cdot m^3}{(a+c)^2}$ **c)** $X=\dfrac{\lg\sqrt{m^3+b}}{\sin(c-a^{0,5})}$	a b c m	$7{,}65\pm0{,}07$ $2{,}068\pm0{,}0008$ $207{,}7\pm0{,}024$ $2{,}58\pm0{,}06$	$3{,}85\pm0{,}01$ $4{,}3\pm0{,}07$ $4{,}07\pm0{,}002$ $20{,}18\pm0{,}002$
15	**a)** $X=\dfrac{\sqrt{\|a-c^2\|}\cdot b}{\sqrt[3]{a^2+m}}$ **b)** $X=\dfrac{\sqrt{\|m-a^3\|}\cdot b}{\sqrt[3]{\|c-b^2\|}}$ **c)** $X=\dfrac{\cos\sqrt{\|m^2-a\|}}{\sin\|c^2+m\|}$	a b c m	$3{,}85\pm0{,}01$ $20{,}18\pm0{,}002$ $2{,}04\pm0{,}01$ $7{,}2\pm0{,}07$	$18{,}5\pm0{,}07$ $6{,}08\pm0{,}047$ $20{,}4\pm0{,}034$ $6{,}2\pm0{,}02$

№	Формулы		Кол. **3**	Кол. **4**
1	**a)** $X=\dfrac{(c-a)\cdot b^2}{\sqrt[3]{(c+b)}}$ **b)** $X=\dfrac{(c+b-a)^2\cdot b^2}{\sqrt[3]{c^2+b^2}}$ **c)** $X=\dfrac{\sqrt{(c+b-a)^3}}{b\cdot\sqrt[3]{c^3+b}}$	a b c	$12,71\pm0,003$ $6,084\pm0,0006$ $10,4\pm0,034$	$7,12\pm0,008$ $5,43\pm0,007$ $7,8\pm0,024$
2	**a)** $X=\dfrac{m\cdot[a-b]^2}{c^3}$ **b)** $X=\dfrac{\sqrt[3]{m\cdot[a+b]^2}}{c^2}$ **c)** $X=\dfrac{\lg m\cdot\sqrt{a+\sqrt{b}}}{(c-a)^2}$	a b c m	$8,25\pm0,01$ $7,03\pm0,007$ $2,07\pm0,004$ $2,07\pm0,002$	$3,85\pm0,01$ $2,08\pm0,005$ $2,73\pm0,002$ $5,07\pm0,003$
3	**a)** $X=\dfrac{m\cdot[a+b]^2}{\sqrt[3]{c^2}}$ **b)** $X=\dfrac{[m^{0,3}-a+b]^2}{\sqrt{(b^2+c)^3}}$ **c)** $X=\dfrac{\sin\dfrac{2\pi}{m}\cdot[\sqrt[3]{a}]^2}{\sqrt[3]{(c-a-b)^2}}$	a b c m	$10,13\pm0,01$ $5,02\pm0,012$ $20,52\pm0,01$ $7,08\pm0,047$	$3,85\pm0,004$ $2,07\pm0,009$ $5,04\pm0,004$ $7,2\pm0,07$
4	**a)** $X=\dfrac{(a-m)\cdot b^2}{b+c}$ **b)** $X=\dfrac{(b+a)^3\cdot c^2}{\sqrt{b}+c}$ **c)** $X=\dfrac{\cos(m^2-a)}{(\sqrt{b}+c)^3}$	a b c m	$27,03\pm0,009$ $2,04\pm0,01$ $6,1\pm0,04$ $4,18\pm0,006$	$3,58\pm0,01$ $2,048\pm0,001$ $207,4\pm0,04$ $6,2\pm0,02$
5	**a)** $X=\dfrac{(a-c)\cdot b^2}{\sqrt{m+b}}$ **b)** $X=\dfrac{\sqrt[2]{m\cdot[b-a]^3}}{c^3}$ **c)** $X=\dfrac{\ln\sqrt{m}\cdot\sqrt{a^3+b}}{(c^2-a)^2}$	a b c m	$3,85\pm0,01$ $4,3\pm0,07$ $4,07\pm0,002$ $20,18\pm0,002$	$8,13\pm0,01$ $9,37\pm0,004$ $0,24\pm0,005$ $2,011\pm0,001$
6	**a)** $X=\dfrac{m\cdot[a-b]^2}{\sqrt{\lvert c-a\rvert}}$ **b)** $X=\dfrac{m^3\cdot[a+b]^2}{\sqrt[3]{\lvert c-a^2\rvert}}$ **c)** $X=\dfrac{\sqrt[3]{a}\cdot\sin\dfrac{2\pi}{3a}}{\sqrt[2]{(c+m+b)^3}}$	a b c m	$32,5\pm0,03$ $2,048\pm0,0007$ $2,053\pm0,003$ $2,48\pm0,0047$	$7,65\pm0,07$ $2,068\pm0,0008$ $207,7\pm0,024$ $2,58\pm0,06$

7	**a)** $X=\dfrac{\sqrt{a}\cdot[m+b]^3}{c^2}$ **b)** $X=\dfrac{\sqrt{a^3}\cdot[m-b]^2}{(a+c)^2}$ **c)** $X=\dfrac{\cos(m^2-\sqrt{a})}{(\sqrt[3]{b}+c^2)^2}$	a b c m	$3,85\pm0,01$ $2,048\pm0,0007$ $7,04\pm0,014$ $2,48\pm0,0047$	$3,85\pm0,01$ $23,38\pm0,0027$ $27,34\pm0,036$ $207,4\pm0,04$
8	**a)** $X=\dfrac{b\cdot[m-a]^2}{\sqrt{c^3}}$ **b)** $X=\dfrac{b\cdot[m^3+a]^2}{\sqrt[4]{(b+c)^3}}$ **c)** $X=\dfrac{\sin(m+\sqrt[3]{a})}{(\sqrt{\lvert b-a\rvert}+c)^2}$	a b c m	$2,04\pm0,01$ $7,2\pm0,06$ $0,74\pm0,002$ $7,2\pm0,09$	$7,15\pm0,004$ $8,12\pm0,009$ $5,9\pm0,04$ $2,07\pm0,002$
9	**a)** $X=\dfrac{(m+a)\cdot b^2}{(b+c)^3}$ **b)** $X=\dfrac{(m-a)\cdot b^2}{(b^2+c)^{0,3}}$ **c)** $X=\dfrac{\sin\dfrac{2\pi}{5b}\cdot\sqrt{a}}{\sqrt[3]{(c-a+b)^2}}$	a b c m	$4,15\pm0,01$ $2,04\pm0,006$ $2,4\pm0,08$ $7,2\pm0,04$	$3,85\pm0,01$ $2,48\pm0,0047$ $207,4\pm0,04$ $3,258\pm0,007$
10	**a)** $X=\dfrac{(a-b)^3\cdot b^2}{\sqrt{m+c}}$ **b)** $X=\dfrac{(a+c)^2\cdot c^{0,5}}{\sqrt[3]{m-c}}$ **c)** $X=\dfrac{\lg\sqrt[3]{b}\cdot\sqrt{m^2-b}}{(c-a)^3}$	a b c m	$3,85\pm0,01$ $7,7\pm0,04$ $5,74\pm0,04$ $32,5\pm0,03$	$3,85\pm0,01$ $20,18\pm0,002$ $2,04\pm0,01$ $7,2\pm0,07$
11	**a)** $X=\dfrac{a^3\cdot[m+b]^2}{\sqrt[3]{c^2}}$ **b)** $X=\dfrac{c^2\cdot[c-b]^3}{\sqrt[2]{a^3}}$ **c)** $X=\dfrac{\sin\sqrt{m^2-b}}{\lg\lvert c^2-a\rvert^3}$	a b c m	$18,5\pm0,07$ $6,08\pm0,047$ $20,4\pm0,034$ $6,2\pm0,02$	$3,85\pm0,01$ $2,08\pm0,005$ $2,73\pm0,002$ $5,07\pm0,003$
12	**a)** $X=\dfrac{(b-a)^2\cdot m}{(m+c)^3}$ **b)** $X=\dfrac{(c+a)^{0,3}\cdot m^2}{(b-c)^3}$ **c)** $X=\dfrac{\ln\sqrt{m^2+b}}{\cos(c^2-a)}$	a b c m	$18,5\pm0,07$ $6,08\pm0,047$ $20,4\pm0,034$ $6,2\pm0,02$	$3,85\pm0,01$ $20,18\pm0,002$ $2,04\pm0,01$ $7,2\pm0,07$

13	**a)** $X=\dfrac{\sqrt{\lvert m-c\rvert}\cdot b}{\sqrt[3]{a+b}}$ **b)** $X=\dfrac{\sqrt{\lvert m-c^3\rvert}\cdot a}{\sqrt[3]{\lvert c-b\rvert}}$ **c)** $X=\dfrac{\sin\sqrt{m^2+a}}{\cos\lvert c^2-b\rvert}$	a b c m	$27,03\pm0,009$ $2,04\pm0,01$ $6,1\pm0,04$ $4,18\pm0,006$	$8,13\pm0,01$ $9,37\pm0,004$ $0,24\pm0,005$ $2,011\pm0,001$
14	**a)** $X=\dfrac{m^2\cdot(b+a)^3}{(m+\sqrt{c})^2}$ **b)** $X=\dfrac{(b+a)^{0,7}\cdot m^3}{(a+c)^2}$ **c)** $X=\dfrac{\lg\sqrt{m^3+b}}{\sin(c-a^{0,5})}$	a b c m	$2,04\pm0,01$ $7,2\pm0,06$ $0,74\pm0,002$ $7,2\pm0,09$	$3,85\pm0,01$ $20,18\pm0,002$ $2,04\pm0,01$ $7,2\pm0,07$
15	**a)** $X=\dfrac{\sqrt{\lvert a-c^2\rvert}\cdot b}{\sqrt[3]{a^2+m}}$ **b)** $X=\dfrac{\sqrt{\lvert m-a^3\rvert}\cdot b}{\sqrt[3]{\lvert c-b^2\rvert}}$ **c)** $X=\dfrac{\cos\sqrt{\lvert m^2-a\rvert}}{\sin\lvert c^2+m\rvert}$	a b c m	$3,58\pm0,01$ $2,048\pm0,001$ $207,4\pm0,04$ $6,2\pm0,02$	$3,85\pm0,01$ $2,048\pm0,0007$ $7,04\pm0,014$ $2,48\pm0,0047$

Образец выполнения задания А2.

а) Вычислить и определить предельные абсолютную и относительную погрешности результата. Исходное выражение $X=\dfrac{a^2\cdot(b+c)^3}{\sqrt{\lvert m-c\rvert}}$, где $a=4,15\pm0,01$, $b=2,04\pm0,006$, $c=2,4\pm0,08$, $m=7,2\pm0,04$.

По правилам вычисления погрешностей арифметических выражений и функций имеем

$$\delta_X=\delta_{a^2}+\delta_{(b+c)^3}+\delta_{\sqrt{\lvert m-c\rvert}}=2\cdot\delta_a+3\cdot\delta_{(b+c)}+\frac{1}{2}\cdot\delta_{\lvert m-c\rvert}$$

$$\Delta_a=0,01;\quad \Delta_{(b+c)}=\Delta_b+\Delta_c=0,086;\quad \Delta_{(m-c)}=\Delta_m+\Delta_c=0,12,$$

$$\delta_{a^2}=2\frac{\Delta_a}{a}=2\frac{0,01}{4,15}=0,00482;\quad \delta_{(b+c)^3}=3\frac{\Delta_{(b+c)}}{(b+c)}=3\frac{0,086}{4,44}=0,0581;$$

$$\delta_{\sqrt{\lvert m-c\rvert}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\Delta_{\lvert m-c\rvert}}{\lvert m-c\rvert}=\frac{1}{2}\cdot\frac{0,12}{4,8}=0,0125;\quad \delta_X=0,07542.$$

Для определения предельной абсолютной погрешности выражения используем формулу $\Delta_X=X\cdot\delta_X$. Тогда получим

$$X=688,05707,\quad \Delta_X=688,05707\cdot0,07542=51,8933.$$

Определим число верных знаков в вычисленном выражении в широком смысле, используя предельную абсолютную погрешность $\Delta_X=51,8933$.

Тогда имеем $m=2$, $\Delta_X = 51{,}8933 \le 10^2 = 10^{m-n+1}$, $n=1$. Округлим результат до верного знака $X_1 = 700$, при этом погрешность округления равен $X_{окр} = 12$. Тогда $\Delta_{X_1} = \Delta_{X_{окр}} + \Delta \approx 64$. Определим число верных знаков в X_1: $\Delta_{X_1} = 64 \le 10^2 = 10^{2-n_1+1}$, $n_1 = 1$. Следовательно, в X_1 остались только верные знаки. Определим предельную относительную погрешность числа X_1: $\delta_{X_1} \approx \dfrac{\Delta_{X_1}}{X_1} = 0{,}092 = 9{,}2\%$.

Ответ: $X_1 = 700 \pm 64;\ \delta_{X_1} = 9{,}2\%$.

b) Выполняется аналогично пункту а).

c) Вычислить и определить предельные абсолютную и относительную погрешности результата пользуясь общей формулой погрешности: 1) в узком смысле; 2) в широком смысле.

Исходное выражение $X = a^3 + (b-c)^2 + \ln(a+c)$, где $a = 2{,}15 \pm 0{,}008$, $b = 3{,}01 \pm 0{,}003$, $c = 5{,}3 \pm 0{,}08$.

Тогда по общей формуле погрешностей имеем

$$\Delta_X = \left|\frac{\partial X}{\partial a}\right|\Delta_a + \left|\frac{\partial X}{\partial b}\right|\Delta_b + \left|\frac{\partial X}{\partial c}\right|\Delta_c;\quad \frac{\partial X}{\partial a} = 3\cdot a^2 + \frac{1}{a+c},\quad \frac{\partial X}{\partial b} = 2\cdot(b-c),\quad \frac{\partial X}{\partial c} = -2\cdot(b-c) + \frac{1}{a+c}.$$

$$\Delta_X = |3\cdot 4{,}6225 + 0{,}13423|\cdot 0{,}008 + 2\cdot 2{,}29\cdot 0{,}003 + |-2\cdot 2{,}29 + 0{,}13423|\cdot 0{,}08 =$$

$$= 0{,}1120138 + 0{,}01374 + 0{,}3556616 = 0{,}4814154.$$

$$X = 9{,}938375 + 5{,}2441 + 2{,}008214 = 17{,}190689.$$

Определим число верных знаков в значении $X = 17{,}190689$.

$$\Delta_X = 0{,}4814154 < \frac{1}{2}10^0 = \frac{1}{2}10^{m-n+1},\quad m=1,\quad m-n+1=0,\quad n=2.$$

Следовательно, необходимо округлить до верных знаков

$$X_1 = 17,\ \Delta_{окр} = |X - X_1| \le 0{,}1907,\ \Delta_{X_1} = \Delta_X + \Delta_{окр} = 0{,}6721154 \le \frac{1}{2}10^1 = \frac{1}{2}10^{m-n_1+1} \Rightarrow n_1 = 1.$$

$$X_2 = 20,\ \Delta_{окр_1} = |X_2 - X_1| \le 3,\ \Delta_{X_2} = \Delta_{X_1} + \Delta_{окр_1} = 3{,}6721154 \le \frac{1}{2}10^1 = \frac{1}{2}10^{m-n_2+1} \Rightarrow n_2 = n_1 = 1.$$

Вычислим предельную относительную погрешность результата

$$\delta_{X_2} \approx \frac{\Delta_{X_2}}{X_2} = \frac{3{,}6721154}{20} \le 0{,}184 = 18{,}4\%.$$

Ответ: $X = 20 \pm 3{,}67212,\ \delta_X = 18{,}4\%$.

Раздел 3. Темы для вычислительного практикума

Для самостоятельного изучения во время вычислительного практикума предлагается следующий перечень численных методов. При этом рекомендуется выполнять работу по следующему плану:

- Изучить имеющуюся литературу по выбранной теме, разобраться с основными идеями этого метода и выяснить области применения, найти задачи которые решаются этим методом;
- Решить проблему численной реализации данного метода на компьютере или путем составления программы на каком-либо языке программирования или используя известные математические пакеты прикладных программ;
- Численно решить выбранную задачу, используя изученный метод, и если есть возможность сравнить полученный результат с результатами полученными другими методами.

Форма отчета по вычислительному практикуму может быть такой же, как и форма отчета для лабораторных работ.

1. **Методы решения нелинейных уравнений.**
   1.1. Метод деления отрезка пополам. Метод итерации.
   1.2. Метод Ньютона. Метод хорд.
   1.3. Комбинированный метод.
   1.4. Метод парабол.
2. **Методы решения систем линейных уравнений.**
   2.1. Метод исключения неизвестных.
   2.2. Метод Гаусса с LU-разложением.
   2.3. Метод квадратного корня, метод Халецкого.
   2.4. Метод прогонки.
   2.5. QR-разложение матрицы. Метод вращений и отражений.
   2.6. Итерационные методы (итерации и Зейделя).
   2.7. Релаксационный метод.
   2.8. Попеременно-треугольный метод.
   2.9. Метод минимальных невязок, поправок и погрешностей.
   2.10. Метод наискорейшего спуска.
   2.11. Неявные методы итерации и Зейделя.
3. **Методы решения систем нелинейных уравнений.**
   3.1. Метод итерации.
   3.2. Метод Ньютона.
   3.3. Метод наискорейшего спуска.
4. **Методы решения проблемы собственных значений**.
   4.1. Метод непосредственного развертывания.
   4.2. Метод Крылова.

4.3. Метод Данилевского.
4.4. Метод Лаверье-Фаддеева.
4.5. Степенной метод.
4.6. Метод обратных итераций.
4.7. QR-алгоритм.

5. Интерполирование функций.
5.1. Интерполяционные формулы Ньютона, Лагранжа.
5.2. Интерполяционные формулы Гаусса, Стирлинга.
5.3. Интерполяционные формулы Бесселя, Эверетта.
5.4. Интерполирование тригонометрическими полиномами.

6. Интерполирование функций многих переменных.
6.1. Интерполирование функции двух переменных с равностоящими значениями аргументов.
6.2. Интерполяционная формула Лагранжа с двумя переменными.

7. Обратное интерполирование.
7.1. Обратная интерполяция. Формула Лагранжа.
7.2. Обратная интерполяция последовательными приближениями.

8. Численное дифференцирование функций.
8.1. Формулы численного дифференцирования с конечными разностями.
8.2. Формула Маркова.

9. Численное интегрирование.
9.1. Формулы прямоугольников (левые, правые и средние).
9.2. Формулы трапеции, Симпсона.
9.3. Квадратурные формулы Ньютона - Котеса.
9.4. Квадратурные формулы Гаусса.
9.5. Квадратурные формулы Чебышева.
9.6. Квадратурные формулы Маркова.
9.7. Метод Монте-Карло.
9.8. Приближенное вычисление несобственных интегралов.
9.9. Вычисление кратных интегралов.
9.10. Кубатурные формулы. Повторное применение квадратурных формул.
9.11. Кубатурные формулы. Метод поперечных сечений.
9.12. Кубатурные формулы, получаемые интегрированием интерполяционных формул.
9.13. Кубатурные формулы с разностями.
9.14. Кубатурные формулы вычисления двойного интеграла в прямоугольнике.
9.15. Кубатурные формулы вычисления двойного интеграла в круге.
9.16. вычисление кратных интегралов методом Монте-Карло.

10. Методы равномерного (наилучшего) приближения.
10.1. Наилучшее приближение функции многочленами.

10.2. Многочлены Чебышева.
10.3. Многочлены Бернштейна.

11. Приближение функций сплайнами.

11.1. Интерполяционные кубические сплайны.
11.2. Сглаживающие кубические сплайны.
11.3. Сплайновые кривые. Кривые Безье.
11.4. В - сплайновые и Бета - сплайновые кривые.

12. Квадратичное приближение.

12.1. Приближение функций по методу наименьших квадратов.
12.2. Квадратичное приближение периодических функций тригонометрическими многочленами.
12.3. Квадратичное приближение методом Чебышева.

13. Методы минимизации функций одной переменной (МФ).

13.1. Классический метод МФ. Метод деления отрезка пополам.
13.2. Симметричные методы. Метод золотого сечения.
13.3. Оптимальные методы. Метод Фибоначчи.
13.4. Метод ломаных. Метод покрытий.
13.5. Методы минимизации выпуклых функций. Метод касательных.
13.6. Методы поиска глобального минимума. Метод парабол.
13.7. Стохастический метод минимизации.

14. Методы минимизации функций многих переменной.

14.1. Градиентный метод. Методы проекции градиента и субградиента, условного градиента.
14.2. Методы возможных направлений, сопряженных направлений.
14.3. Методы Ньютона и Стеффенсена.
14.4. Метод покоординатного спуска.
14.5. Метод поиска глобального минимума.
14.6. Метод модифицированных функций Лагранжа.
14.7. Метод штрафных функций.
14.8. Метод барьерных функций, нагруженных функций.
14.9. Метод случайного поиска.

15. Методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (ОДУ).

15.1. Метод Эйлера и его модификации.
15.2. Семейство методов Рунге-Кутта (второго, третьего и четвертого порядков).
15.3. Метод Адамса.
15.4. Неявные методы второго и третьего порядка точности.
15.5. Двух- и трехстадийные методы первого и второго порядка точности.
15.6. Двухэтапные неявные методы Рунге-Кутты и Розенброка.
15.7. Трехэтапные неявные методы Рунге-Кутты и Нумерова.

15.8. Методы Рунге-Кутта для системы ОДУ.

16. Методы решения краевых задач для ОДУ.

16.1. Метод сеток.

16.2. Метод прогонки.

16.3. Метод Галеркина и метод моментов.

17. Метод сеток для дифференциальных уравнений в частных производных.

17.1. Метод сеток решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона.

17.2. Метод сеток решения смешанной задачи для уравнения теплопроводности.

17.3. Метод сеток решения смешанной задачи для уравнения гиперболического типа.

Список литературы

1. Демидович Б.Н., Марон И.А. Основы вычислительной математики. -М.: Наука, 1966.- 664 с.
2. Бахвалов Н.С. Численные методы -М.: Наука, 1975. – 632 с.
3. Березин Н.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. – Т.1. - М.: Наука, 1966. – 464 с.
4. Березин Н.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. – Т.2. - М.: Физматгиз, 1962.- 640 с.
5. Самарский А.А. Теория разностных схем. - М.: Наука, 1983.
6. Иванов В.В. Методы вычислений на ЭВМ. Киев: Наукова думка, 1986.
7. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. -М.: Наука, 1986, - 288 с.
8. Сборник Задач по методам вычислений: Учебное пособие: Для вузов. / Под ред. П.И. Монастырского. - 2-е изд. перераб. и доп. -М.: Физматлит, 1994. -320 с.
9. Воробьева Г.Н., Данилова А.Н. Практикум по вычислительной математике. -М.: Высшая школа, 1990.
10. Лапчик М.П. Рагулина М.И., Хеннер Е.К. Численные методы: Уч. Пособие для ст. вузов. –М.: Изд. Центр «Академия», 2004. – 384 с.
11. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач: Учебное пособие для вузов - 2-е изд., перераб. и доп. -М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит, 1988. -550 с.
12. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач -М.: Наука, 1981. -400 с.
13. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. – М.: Наука, 1980. -536 с.
14. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1976. - 544 с.
15. Самарский А.А. Введение в численные методы. – 3-е изд., перераб. – М.: Наука, 1997. - 239 с.
16. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972.
17. Шикин Е.В., Плис А.И. Кривые и поверхности на экране компьютера. Руководство по сплайнам для пользователей. – М.: Диалог-МИФИ, 1996 – 240 с.
18. Альберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и их приложения. М.: Наука, 1972.
19. Де Бор К. Практическое руководство по сплайнам. - М.: Наука, 1983.
20. Foley J.D., van Dam A., Feiner S.K., Hugues J.F. Computer graphics. Principles and practice. Addison-Wesley Pub. Com. 991.
21. Боглаев Ю.П. Вычислительная математика и программирование. М.: Высшая школа, 1990.
22. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. -М.: Физ.-мат. лит. 1967.

23. Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи: Пер. с англ. - М.: Мир, 1990. 512 с.
24. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений / Под ред. Дж. Холла, Дж. Уатта. М.: Мир, 1979. 312 с.
25. Деккер К., Вервер Я. Устойчивость методов Рунге-Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений.- М.: Мир, 1988. 332 с.
26. Олемской И. В. О численном методе интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Оптимальное управление в механических системах. Л., 1983. С.178-185.
27. Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В. Вычислительные методы для инженеров: Учеб. пособие. – М.: Высш. Шк., 1994. – 544 с.

Учебное издание

Латыпов Ильмир Ибрагимович

Численные методы

Лабораторный практикум
Книга 1

Учебное пособие для студентов физико-математического факультета

Технический редактор *Э.Д.Шакирьянов*
Компьютерный набор *И.И. Латыпов*
Корректор Л.М. Гончарова

Формат 60х84 1/16.
Бумага офсетная. Гарнитура «Times».
Усл.-печ.л. 6,625.

ООО «Издательский Дом «Лидер-М»
115054, Москва, ул. Щипок, д. 22, стр. 4, офис 6.
Тел.факс (495) 959-66-62
www.lider-m.com

ООО «МИРОС» (Рекламно-производственная компания)
115054, Москва, ул. Щипок, д. 22