

Латыпов И.И.

Компьютерное моделирование
Учебное пособие

Бирск 2020

Глава 1. Модель. Математическое и компьютерное моделирование. Численный эксперимент	4
Введение.....	4
Математическое моделирование.....	5
Этапы математического моделирования.....	5
Применимость математической модели и погрешность.....	7
Компьютерное моделирование. Численный эксперимент.....	10
Глава 2. Тематика лабораторных работ по курсу «компьютерное моделирование»	16
Форма отчёта:	16
Лабораторные работы.....	17
Домашние самостоятельные работы.....	18
Лабораторная работа № 1	20
Образец выполнения лабораторной работы	23
Лабораторная работа № 2.....	29
Образец выполнения лабораторной работы	31
Лабораторная работа № 3.....	37
Лабораторная работа № 4.....	37
Лабораторная работа № 5.....	37
Лабораторная работа № 6.....	38
Лабораторная работа № 7.....	38
Лабораторная работа № 8.....	38
Образец выполнения лабораторной работы	39
Лабораторная работа № 9.....	45
Лабораторная работа № 10.....	47
Образец выполнения лабораторной работы	47
Лабораторная работа № 11	55
Образец выполнения лабораторной работы	55
Лабораторная работа № 12.....	60
Лабораторная работа № 13.....	61
Образец выполнения лабораторной работы	61
Расчетная работа №1.....	67
Краткая теория	67
Контрольные вопросы.....	72
Рекомендации.....	73
Задания к расчетной работе №1	74
Варианты заданий к расчетной работе №1	74
Дополнительная литература	78
Расчетная работа №2.....	79

Краткая теория.....	79
Контрольные вопросы.....	82
Темы для рефератов.....	82
Рекомендации.....	82
Задания к расчетной работе №2.....	83
Варианты к расчетной работе №2.....	84
Дополнительная литература.....	87
Расчетная работа №3.....	88
Краткая теория.....	88
Контрольные вопросы.....	90
Рекомендации.....	91
Задания к расчетной работе №3.....	92
Варианты к расчетной работе №3.....	92
Дополнительная литература.....	96
Расчетная работа №4.....	97
Краткая теории.....	97
Контрольные вопросы.....	99
Рекомендации.....	100
Задание к расчетной работе №4.....	100
Варианты к расчетной работе №4.....	101
Дополнительная литература.....	105
Рекомендуемая литература.....	106

Глава 1. Модель. Математическое и компьютерное моделирование. Численный эксперимент

Введение

Моделирование в научных исследованиях стало применяться еще в глубокой древности и постепенно захватывало все новые области научных знаний: техническое конструирование, строительство и архитектуру, астрономию, физику, химию, биологию и, наконец, общественные науки. Большие успехи и признание практически во всех отраслях современной науки принес методу моделирования XX в.. Однако методология моделирования долгое время развивалась независимо отдельными науками. Отсутствовала единая система понятий, единая терминология. Лишь постепенно стала осознаваться роль моделирования как универсального метода научного познания. Термин "модель" широко используется в различных сферах человеческой деятельности и имеет множество смысловых значений.

Модель - объект или описание объекта, системы для замещения (при определенных условиях предложениях, гипотезах) одной системы (т.е. оригинала) другой системы для изучения оригинала или воспроизведения его каких - либо свойств. Модель - результат отображения одной структуры на другую.

Под моделированием понимается процесс построения, изучения и применения моделей. Оно тесно связано с такими категориями, как абстракция, аналогия, гипотеза и др. Процесс моделирования обязательно включает и построение абстракций, и умозаключения по аналогии, и конструирование научных гипотез. Главная особенность моделирования в том, что это метод опосредованного познания с помощью объектов-заместителей. Модель выступает как своеобразный инструмент познания, который исследователь ставит между собой и объектом и с помощью которого изучает интересующий его объект. Именно эта особенность метода моделирования определяет специфические формы использования абстракций, аналогий, гипотез, других категорий и методов познания.

Возможности моделирования, то есть перенос результатов, полученных в ходе построения и исследования модели, на оригинал основаны на том, что модель в определенном смысле отображает (воспроизводит, моделирует, описывает, имитирует) некоторые интересующие исследователя черты объекта. Моделирование как форма от-

ражения действительности широко распространено, и достаточно полная классификация возможных видов моделирования крайне затруднительна, хотя бы в силу многозначности понятия "модель", широко используемого не только в науке и технике, но и в искусстве, и в повседневной жизни.

Математическое моделирование.

Дадим краткое описание математической модели (ММ).

Математическая модель – это приближенное описание какого-либо класса явлений внешнего мира, выраженное с помощью математической символики (Математический энциклопедический словарь. М.:). Анализ математической модели позволяет проникнуть в сущность изучаемых явлений, и поэтому ММ является мощным средством познания окружающего мира, а также прогнозирования и управления.

Этапы математического моделирования.

В процессе математического моделирования можно выделить четыре этапа:

- 1) Первый этап – формулирование законов, связывающих основные объекты модели. Этот этап требует широкого и глубокого знания фактов, относящихся к изучаемым явлениям, и взаимосвязей в исследуемой области.
- 2) Второй этап – исследование математических задач, к которым приводят ММ. Основным вопросом здесь является решение прямой задачи т.е. получение в результате анализа ММ выходных данных для дальнейшего их сопоставления с результатами наблюдений изучаемых явлений. На этом этапе важную роль приобретает математический аппарат, необходимый для анализа ММ, и вычислительная техника – мощное средство для получения количественной выходной информации.
- 3) Третий этап – выяснение того, удовлетворяет ли принятая гипотетическая (абстрактная) модель критерию практики т.е. согласуются ли результаты наблюдений с теоретическими следствиями модели в пределах точности наблюдений.

Если ММ была вполне определена (все параметры ее были заданы), то определение уклонений (погрешности) теоретических следствий от наблюдений дает решение прямой задачи с после-

дующей оценкой уклонения. Если погрешности выходят за пределы точности наблюдений, то модель не может быть принята.

Часто при построении ММ некоторой ее характеристики остаются не определенными. Задачи, в которых характеристики модели определяются таким образом, чтобы выходная информация была сопоставима в пределах точности наблюдений с результатами наблюдений изучаемых явлений, называются обратными задачами. Если ММ такова, что ни при каком выборе характеристик этим условиям нельзя удовлетворить, то модель не пригодна для исследования рассматриваемых явлений.

Применение критерия практики к оценке ММ позволяет делать вывод о правильности положений, лежащих в основе гипотетической (абстрактной) модели.

- 4) Четвертый этап – последующий анализ модели в связи с накоплением данных об изучаемых явлениях и модернизация модели.

Проблема построения и уточнения математической модели явления является сложной задачей и поэтому необходимо подчеркнуть ряд положений:

- Математическая модель не определяется однозначно исследуемым объектом т.е. одно и то же явление может быть описана различными моделями, и с другой стороны, одной и той же математической моделью могут быть описаны различные объекты и явления.
- Выбор той или иной модели определяется требованием точности. С повышением точности модель приходится усложнять, учитывая все новые и новые особенности изучаемого объекта.
- Вопрос применимости некоторой ММ к изучению рассматриваемого объекта не является чисто математическим и не может быть решен математическими методами т.е. в рамках математики. Основным критерием истинности модели является эксперимент, практика в широком смысле слова. Критерий практики позволяет сравнить различные гипотетические модели и выбрать из них такую, которая является наиболее простой и в то же время в рамках требуемой точности правильно передает свойства изучаемого явления.
- В прикладных задачах построение математической модели – это один из наиболее сложных и ответственных этапов работы. За-

мечено, что во многих случаях правильно построить модель – значит решить проблему более чем на половину. Трудность этого этапа состоит в том, что он требует соединения математических и специальных знаний.

- Применение вычислительной техники существенно повышает эффективность построения и уточнения математической модели, облегчает процесс сопоставления результатов ММ с результатами наблюдений, существенно сокращает время анализа модели (проведение расчетов, численного эксперимента), обработать различные гипотетические модели и выбрать наиболее приемлемый.

Применимость математической модели и погрешность.

Рассмотрим вопрос применимости математической модели и о влиянии погрешности (возмущений) на возможность решить исходную задачу.

В качестве примера рассмотрим практическую задачу, которая сводится к решению системы линейных уравнений.

Пусть дана система линейных уравнений

$$Ax = y, \quad A = \{a_{ij}\}, \quad i, j = \overline{1, n}, \quad x = \{x_i\}^T, \quad y = \{y_i\}^T, \quad i = \overline{1, n}. \quad (0.1)$$

Требуется найти решение этой системы т.е. координаты x_i , $i = \overline{1, n}$ вектора x .

Пусть вектор x принадлежит единичной сфере

$$\Omega = \{x : \|x\| = 1\}, \quad \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}, \quad (0.2)$$

$$\|y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right)^2} = g(x) \quad (0.3)$$

Функция $g(x)$ непрерывна на ограниченном замкнутом множестве Ω , следовательно она достигает на нем своего наибольшего и наименьшего значения.

$$M = \sup \|Ax\| = \sup g(x), \quad \|x\| = 1 \quad (0.4)$$

$$m = \inf \|Ax\| = \inf g(x), \quad \|x\| = 1 \quad (0.5)$$

Очевидно, что $m \geq 0$; и $m = 0$, когда A вырождена и уравнение $Ax \equiv 0$ имеет не тривиальное решение.

Определение. Отношение $\mu = \frac{M}{m} \geq 1$ называется обусловленностью

матрицы A

Из (1.4), (1.5) следует $m \leq \|Ax\| \leq M, \|x\| = 1$, а в силу линейности отображения

$$m \cdot \|x\| \leq \|Ax\| \leq M \cdot \|x\| \quad (0.6)$$

Проведем исследование устойчивости системы (1.1). Для этого предположим, что матрица A задана точно, а правая часть приближенно, тогда обозначив через \tilde{x} решение возмущенной системы можно записать

$$A\tilde{x} = \tilde{y}, \quad \tilde{x} = x + \Delta\tilde{x}, \quad \tilde{y} = y + \Delta\tilde{y} \quad (0.7)$$

Вычитая из (1.7) выражение (1.1) получим $A\Delta\tilde{x} = \Delta\tilde{y}$, тогда из (1.6), (1.1) следует

$$\|y\| \leq M \cdot \|x\|, \quad m \cdot \|\Delta\tilde{x}\| \leq \|\Delta\tilde{y}\|, \quad \frac{m \cdot \|\Delta\tilde{x}\|}{M \cdot \|x\|} \leq \frac{\|\Delta\tilde{y}\|}{M \cdot \|x\|} \leq \frac{\|\Delta\tilde{y}\|}{\|y\|},$$

$$\frac{\|\Delta\tilde{x}\|}{\|x\|} \leq \mu \frac{\|\Delta\tilde{y}\|}{\|y\|} \quad (0.8)$$

где $\frac{\|\Delta\tilde{y}\|}{\|y\|}$ - характеризует относительное возмущение правой части,

$\frac{\|\Delta\tilde{x}\|}{\|x\|}$ - характеризует относительную ошибку в решении, вызванную возмущением правой части.

Так как обусловленность матрицы μ играет роль множителя, то

- при μ близких к единице относительные ошибки правой части и самого решения сравнимы между собой, в этом случае говорят, что система хорошо обусловлена;
- при увеличении μ чувствительность решения к погрешности правой части возрастает – система становится плохо обусловленной.

Рассмотрим пример: дана система из двух уравнений с двумя неизвестными, выявить влияние малого возмущения правой части на решение возмущенной системы.

$$\begin{cases} x_1 + 0 \cdot x_2 = 1 \\ x_1 + 0,01 \cdot x_2 = 1 \end{cases} \quad (0.9)$$

Система невырожденная $\det A = |A| = 0,01 \neq 0$, и система имеет решение $x_1 = 1, x_2 = 0$. Внесем возмущение в правую часть, тогда получим новую возмущенную систему, которая имеет решение $\tilde{x}_1 = 1, \tilde{x}_2 = 5$

$$\begin{cases} x_1 + 0 \cdot x_2 = 1, \\ x_1 + 0,01 \cdot x_2 = 1,05. \end{cases} \quad (0.10)$$

Оценим возмущения правой части и величину изменения решения системы, для чего найдем абсолютные и относительные погрешности

$$\begin{aligned} y &= (1; 1), \tilde{y} = (1; 1,05), x = (1; 0), \tilde{x} = (1; 5), \\ \|y\| &= \sqrt{2}, \|\Delta \tilde{y}\| = 0,05, \quad \delta \tilde{y} = \frac{\|\Delta \tilde{y}\|}{\|y\|} \cdot 100\% \leq 3,54\%, \\ \|x\| &= 1, \|\Delta \tilde{x}\| = 5, \quad \delta \tilde{x} = \frac{\|\Delta \tilde{x}\|}{\|x\|} \cdot 100\% = 500\%. \end{aligned}$$

Таким образом, привнесение малого возмущения привело к существенному изменению решения. И это говорит о плохой обусловленности матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0,01 \end{pmatrix}.$$

Вычислим параметр μ . Тогда из (1.3) имеем

$$g(x_1, x_2) = \left(x_1^2 + (x_1 + 0,01 \cdot x_2)^2 \right)^{1/2}.$$

Найдем наибольшее и наименьшее значения M, m на единичной окружности $\|x\| = 1$. Сделаем замену переменных $x_1 = \cos(\varphi), x_2 = \sin(\varphi)$, тогда задача на условный экстремум сводится к задаче на безусловный экстремум для функции одной переменной

$$h(\varphi) = g(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) = \left(1,00005 + a \cdot \cos 2(\varphi - \varphi_0) \right)^{1/2}$$

где $a = \sqrt{1 + (0,00005)^2} \approx 1, \varphi_0 = 0,5 \cdot \arccos\left(\frac{0,99995}{a}\right)$. Очевидно что

$$M = h(\varphi_0) = \sqrt{1,00005 + a} \approx \sqrt{2}, \quad m = h\left(\varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{1,00005 - a} \approx \frac{0,01}{\sqrt{2}}.$$

Отсюда получим $\mu = \frac{M}{m} \approx 200$.

Проверим выполнимость соотношения (1.8), действительно

$$\|y\| = \sqrt{2}, \quad y = (1; 1); \quad \Delta \tilde{y} = \{0; 0,05\}; \quad \|\Delta \tilde{y}\| = 0,05;$$

$$\|x\| = 1, \quad x = (1; 0); \quad \Delta\tilde{x} = (0; 5); \quad \|\Delta\tilde{x}\| = 5;$$

$$\frac{\|\Delta\tilde{x}\|}{\|x\|} = 5 \leq \mu \cdot \frac{\|\Delta\tilde{y}\|}{\|y\|} = \mu \cdot \frac{0,05}{\sqrt{2}}; \quad \frac{\|\Delta\tilde{x}\|}{\|x\|} = 5 \leq \mu \cdot \frac{0,05}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}.$$

Вывод. Таким образом из рассмотренного примера следует, что при разработке математической модели необходимо обратить особое внимание вопросам применимости модели к данному объекту, определению области возможных значений и погрешностям приносимым как во время численных расчетов, так и в ходе уточнения модели.

Компьютерное моделирование. Численный эксперимент.

Традиционно под моделированием на ЭВМ понималось лишь имитационное моделирование. Можно, однако, увидеть, что и при других видах моделирования компьютер может быть весьма полезен, за исключением разве физического моделирования, где компьютер вообще-то тоже может использоваться, но, скорее, для целей управления процессом моделирования. Например, при математическом моделировании выполнение одного из основных этапов - построение математических моделей по экспериментальным данным - в настоящее время просто немыслимо без компьютера. В последние годы, благодаря развитию графического интерфейса и графических пакетов, широкое развитие получило компьютерное, структурно-функциональное моделирование, о котором подробно поговорим ниже. Положено начало использованию компьютера даже при концептуальном моделировании, где он используется, например, при построении систем искусственного интеллекта.

Таким образом, мы видим, что понятие "компьютерное моделирование" значительно шире традиционного понятия "моделирование на ЭВМ" и нуждается в уточнении, учитывающем сегодняшние реалии. Начнем с термина "компьютерная модель".

В настоящее время под компьютерной моделью чаще всего понимают:

- условный образ объекта или некоторой системы объектов (или процессов), описанный с помощью взаимосвязанных компьютерных таблиц, блок-схем, диаграмм, графиков, рисунков, анимационных фрагментов, гипертекстов и т. д. и отображающий

структуру и взаимосвязи между элементами объекта. Компьютерные модели такого вида мы будем называть структурно-функциональными;

- отдельную программу, совокупность программ, программный комплекс, позволяющий с помощью последовательности вычислений и графического отображения их результатов, воспроизводить (имитировать) процессы функционирования объекта, системы объектов при условии воздействия на объект различных, как правило случайных, факторов. Такие модели мы будем далее называть имитационными моделями.

Компьютерное моделирование - метод решения задачи анализа или синтеза сложной системы на основе использования ее компьютерной модели.

Суть компьютерного моделирования заключена в получении количественных и качественных результатов по имеющейся модели. Качественные выводы, получаемые по результатам анализа, позволяют обнаружить неизвестные ранее свойства сложной системы: ее структуру, динамику развития, устойчивость, целостность и др. Количественные выводы в основном носят характер прогноза некоторых будущих или объяснения прошлых значений переменных, характеризующих систему. Компьютерное моделирование для рождения новой информации использует любую информацию, которую можно актуализировать с помощью ЭВМ.

Основные функции компьютера при моделировании:

- выполнять роль вспомогательного средства для решения задач, решаемых обычными вычислительными средствами, алгоритмами, технологиями;
- выполнять роль средства постановки и решения новых задач, не решаемых традиционными средствами, алгоритмами, технологиями;
- выполнять роль средства конструирования компьютерных обучающе - моделирующих сред;
- выполнять роль средства моделирования для получения новых знаний;
- выполнять роль "обучения" новых моделей (самообучающиеся модели).

Разновидностью компьютерного моделирования является вычислительный эксперимент. Компьютерное моделирование, вычислительный эксперимент становится новым инструментом, методом научного познания, новой технологией также из-за возрастающей необходимости перехода от исследования линейных математических моделей систем .

Предметом компьютерного моделирования могут быть: экономическая деятельность фирмы или банка, промышленное предприятие, информационно-вычислительная сеть, технологический процесс, любой реальный объект или процесс, например процесс инфляции, и вообще - любая Сложная Система. Цели компьютерного моделирования могут быть различными, однако наиболее часто моделирование является, как уже отмечалось ранее, центральной процедурой системного анализа, причем под системным анализом мы далее понимаем совокупность методологических средств, используемых для подготовки и принятия решений экономического, организационного, социального или технического характера.

Компьютерная модель сложной системы должна по возможности отображать все основные факторы и взаимосвязи, характеризующие реальные ситуации, критерии и ограничения. Модель должна быть достаточно универсальной, чтобы по возможности описывать близкие по назначению объекты, и в то же время достаточно простой, чтобы позволить выполнить необходимые исследования с разумными затратами.

Все это говорит о том, что *моделирование, рассматриваемое в целом, представляет собой скорее искусство, чем сформировавшуюся науку с самостоятельным набором средств отображения явлений и процессов реального мира.*

В вычислительном эксперименте можно выделить ряд этапов:

1. Выбор математической модели. Исследуется вопрос существования и единственности решения, определяются области значений для входных и выходных параметров, оценивается необходимая точность определения результата.
2. Построение приближенного (численного) метода решения задачи, написание вычислительного алгоритма. Оценка качества алгоритма по достигаемой погрешности и времени исполнения.
3. Программирование для ЭВМ вычислительного алгоритма.

4. Проведение расчетов на ЭВМ.
5. Анализ полученных численных результатов и уточнение математической модели.

Первый этап рассмотрен выше, поэтому более подробно остановимся на втором этапе.

При выборе вычислительного алгоритма руководствуются следующими требованиями:

- Алгоритм должен давать решение задачи с любой степенью точности $\varepsilon > 0$ за конечное число действий $Q(\varepsilon)$.
- Алгоритм должен быть оптимальным по времени исполнения, сложности, и по числу арифметических операций $Q(\varepsilon)$.
- Алгоритм должен быть оптимальным по реальным вычислениям (т.е. учитывать округление исходных данных, промежуточных результатов; погрешности методов, искомого результата).
- Алгоритм должен быть оптимальным по характеру исполнения (в одновариантном или многовариантном режиме).

Вопрос построения приближенного (численного) метода решения задачи рассмотрим на примере решения задач математической физики.

Для численного решения задач математической физики обычно применяется метод конечных разностей (метод сеток)(МКР) или метод конечных элементов (МКЭ). Метод сеток позволяет свести решение дифференциальных уравнений в частных производных к решению системы алгебраических уравнений.

В теории разностных методов (разностных схем) рассматриваются два вопроса:

- 1) Построение дискретных (разностных) аппроксимаций для уравнения математической физики и исследование априорных характеристик качества этих аппроксимаций, что сводится прежде всего к изучению погрешности аппроксимации, устойчивости и связанной с ней точности полученной разностной схемы.
- 2) Решение разностных уравнений прямыми (точными) или итерационными методами, выбираемыми из соображений экономичности вычислительного алгоритма.

Характерными чертами этих численных методов являются:

- множественность т.е. каждому уравнению можно сопоставить бесчисленное множество разностных аппроксимаций, имеющих одни и те же характеристики (например: одинаковый порядок шага, одинаковый порядок погрешности, объем вычислений и другие);
- необходимость нахождения оптимального, наилучшего метода, который позволял бы получить искомое решение с заданной точностью за минимальное машинное время. Для поиска оптимального метода (выбор которого зависит от класса решаемых задач) применяется алгоритм постепенного сужения множества допустимых методов путем постепенного включения требований аппроксимаций, устойчивости, экономичности и др.;
- требование чтобы разностная схема (дискретная модель) как можно лучше моделировала (приближала) свойства исходного дифференциального уравнения.

При построении разностных схем заданного качества и свойства необходимо придерживаться общих принципов, таких как: принцип однородности (единообразия), принцип консервативности разностной схемы. Консервативность означает, что разностная схема выражает некоторый закон сохранения (уравнение баланса) на сетке. Например, консервативность однородных схем является необходимым условием сходимости в классе функций с разрывными коэффициентами для стационарных и нестационарных задач математической физики.

P.S. Становление математики как науки связано с необходимостью решения практических задач: измерений на местности, определения площадей и объемов, навигации, астрономии и т.д. Поэтому математика была численной математикой т.е. ее целью являлось получение решения в виде чисел.

Численным решением прикладных задач занимались многие великие математики и физики, такие как Ферма, Ньютон И., Эйлер, Лобачевский, Гаусс, Чебышев, Бессель, Лагранж, Крылов А.Н., Люстери́к Л.А., Тихонов А.Н. и многие другие.

Еще большее развитие прикладная математика получила с возможностью применения ЭВМ в вычислительном процессе: решение множества практических задач связанных с большим объемом вычислений; использование математических методов и в другие разде-

лы науки (химии, биологии, геологии, географии, психологии, медицины, языкознания), в различных отраслях техники и технологии.

Глава 2. Тематика лабораторных работ по курсу «компьютерное моделирование»

Форма отчёта:

- 1) Постановка задач. Краткая теория (метод решения). Геометрическая интерпретация.
- 2) Алгоритм решения поставленной задачи. (Блок-схема).
- 3) Текст программы.
- 4) Тестирование алгоритма и/или программы. Вывод по тестовым примерам.
- 5) Численный расчёт по данным исходной задачи с оценкой погрешности результата. Протокол работы программы.
- 6) Анализ полученного результата.

Пояснения к отдельным пунктам отчета.

Постановка задачи включает краткую математическую формулировку задачи с пояснением отдельных моментов, а также необходимые графики и/или рисунки. Должны быть приведены основные моменты применяемых методов.

Алгоритм решения задачи может быть оформлен или в виде блок-схемы, или в словесной форме. Допускается описание алгоритма осмысленными частями (блоками).

Текст программы численного решения задачи должен быть написан на предлагаемом языке программирования, который может быть изменен по согласованию с преподавателем данного курса.

Численное решение поставленной задачи возможно так же с использованием математических пакетов.

Под тестовым примером или тестом понимается задача (аналогичная по постановке искомой задаче) у которой известно точное решение, что позволяет сравнить численные результаты (приближенное и точное решения) и оценить допускаемую погрешность. По результатам тестирования должен быть сделан вывод.

Протокол работы программы должен включать результаты как по тестовому примеру, так и численного расчета искомой задачи. Результаты численных расчетов должны быть оформлены по всем правилам записи приближенных чисел т.е. запись приближенного решения только с верными значащими цифрами и допускаемой погрешностью.

Анализ численных результатов должен дать ответ на вопрос, соответствуют ли полученные результаты искомому решению поставленной задачи.

Лабораторные работы

1. Лабораторная работа № 1.
Тема: Приближенное решение задачи Коши для системы ОДУ первого порядка.
2. Лабораторная работа № 2.
Тема: Решение краевой задачи для ОДУ второго порядка методом конечных разностей.
3. Лабораторная работа № 3.
Тема: Решение краевой задачи для ОДУ второго порядка методом прогонки.
4. Лабораторная работа № 4.
Тема: Решение краевой задачи для ОДУ второго порядка методом рунгута к задаче Коши.
5. Лабораторная работа № 5.
Тема: Решение краевой задачи для ОДУ второго порядка методом коллокации.
6. Лабораторная работа № 6.
Тема: Решение краевой задачи для ОДУ второго порядка методом наименьших квадратов.
7. Лабораторная работа № 7.
Тема: Решение краевой задачи для ОДУ второго порядка методом Галеркина.
8. Лабораторная работа № 8.
Тема: Приближенное решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в прямоугольной области. Метод сеток.
9. Лабораторная работа № 9.
Тема: Приближенное решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в прямоугольной области. Метод Монте-Карло.
10. Лабораторная работа № 10.
Тема: Приближенное решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в произвольной области. Метод Либмана.
11. Лабораторная работа № 11.

Тема: Приближенное решение краевой задачи для дифференциального уравнения параболического типа. Явный метод сеток.

12. Лабораторная работа № 12.

Тема: Приближенное решение краевой задачи для дифференциального уравнения параболического типа. Неявный метод сеток.

13. Лабораторная работа № 13.

Тема: Приближенное решение краевой задачи для дифференциального уравнения гиперболического типа. Явный метод сеток.

Домашние самостоятельные работы

1) Контрольная работа №1

Тема: Приближенное решение краевой задачи для ОДУ второго порядка.

Задания к самостоятельной работе берутся из соответствующих заданий лабораторных работ.

Вариант	Л.р. №2	Л.р. №4	Л.р. №5	Л.р. №6	Л.р. №7
1	+	+		+	
2	+		+		+
3	+	+		+	
4	+		+		+
5	+	+		+	
6	+		+		+
7	+	+		+	
8	+		+		+
9	+	+		+	
10	+		+		+
11	+	+		+	
12	+		+		+
13	+	+		+	

14	+		+		+
15	+	+		+	
16	+		+		+
17	+	+		+	
18	+		+		+
19	+	+		+	
20	+		+		+
21	+	+		+	
22	+		+		+
23	+	+		+	
24	+		+		+
25	+	+		+	
26	+		+		+
27	+	+		+	
28	+		+		+
29	+	+		+	
30	+		+		+

2) Контрольная работа №2

Тема: Приближенное решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в прямоугольной области.

3) Контрольная работа №3

Тема: Приближенное решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в произвольной области.

Лабораторная работа № 1

Тема: Численное решение системы ОДУ. Задача Коши.

Задание: 1) Привести ОДУ второго порядка к системе ОДУ первого порядка.

2) Полученную систему численно решить методами Эйлера и Рунге-Кутты с точностью до 10^{-3} .

3) Построить график полученного решения и оценить погрешность.

Пример. Дано ОДУ второго порядка

$$x \cdot y'' - 2y' + y = x^3 + x - 2, \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = 4, \quad x \in [1, 3].$$

Приведем данное ДУ второго порядка к системе ОДУ первого порядка. Для этого введем обозначения: $y_1 = y$, $y_2 = y'$, тогда получим

$$\begin{cases} y'_1 = y_2 \equiv f(x, y_1, y_2), \\ y'_2 = \frac{1}{x}(2y_2 - y_1 + x^3 + x - 2) \equiv g(x, y_1, y_2), \end{cases} \quad y_1(1) = 2, \quad y_2(1) = 4, \quad x \in [1, 3].$$

Полученная система численно решается методами Эйлера и Рунге-Кутты, строится график функции $y = y(x)$, оценивается погрешность результата.

Метод Эйлера:

$$y_{1,i+1} = y_{1,i} + h \cdot f(x_i, y_{1,i}, y_{2,i}), \quad y_{2,i+1} = y_{2,i} + h \cdot g(x_i, y_{1,i}, y_{2,i}),$$

$$\Delta y_{1,i+1} = \Delta y_{1,i} + O(h^2), \quad \Delta y_{2,i+1} = \Delta y_{2,i} + O(h^2), \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Метод Рунге-Кутты:

$$\begin{cases} k_{1,i} = h \cdot f(x_i, y_{1,i}, y_{2,i}), \\ k_{2,i} = h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_{1,i} + \frac{1}{2}k_{1,i}, y_{2,i} + \frac{1}{2}p_{1,i}\right), \\ k_{3,i} = h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_{1,i} + \frac{1}{2}k_{2,i}, y_{2,i} + \frac{1}{2}p_{2,i}\right), \\ k_{4,i} = h \cdot f(x_i + h, y_{1,i} + k_{3,i}, y_{2,i} + p_{3,i}), \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_{1,i} = h \cdot g(x_i, y_{1,i}, y_{2,i}), \\ p_{2,i} = h \cdot g\left(x_i + \frac{h}{2}, y_{1,i} + \frac{1}{2}k_{1,i}, y_{2,i} + \frac{1}{2}p_{1,i}\right), \\ p_{3,i} = h \cdot g\left(x_i + \frac{h}{2}, y_{1,i} + \frac{1}{2}k_{2,i}, y_{2,i} + \frac{1}{2}p_{2,i}\right), \\ p_{4,i} = h \cdot g(x_i + h, y_{1,i} + k_{3,i}, y_{2,i} + p_{3,i}), \end{cases}$$

$$y_{1,i+1} = y_{1,i} + \frac{1}{6}(k_{1,i} + 2k_{2,i} + 2k_{3,i} + k_{4,i}), \quad \Delta y_{1,i+1} = \Delta y_{1,i} + O(h^5),$$

$$y_{2,i+1} = y_{2,i} + \frac{1}{6}(p_{1,i} + 2p_{2,i} + 2p_{3,i} + p_{4,i}), \quad \Delta y_{2,i+1} = \Delta y_{2,i} + O(h^5), \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Варианты лабораторных заданий

- 1) $x \cdot y'' - (x+1)y' - 2(x-1)y = 0$, $y(1) = e^2$, $y'(1) = 2e^2$, $x \in [1, 2]$;
- 2) $x^2 \cdot y'' + xy' - y = 3x^2$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 1$, $x \in [1, 2]$;
- 3) $x^2 \cdot y'' - 6y = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 3$, $x \in [1, 2]$;
- 4) $x^2 \cdot y'' - 12y = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 4$, $x \in [1, 2]$;
- 5) $x \cdot y'' + 0,5y' = 0$, $y(1) = 2$, $y'(1) = 1$, $x \in [1, 2]$;
- 6) $x^2 y'' + \frac{y}{\ln(x)} = xe^x(2 + x \ln(x))$, $y(2) = e^2 \ln(2)$, $y'(2) = e^2(\ln(2) + 0,5)$, $x \in [2, 3]$;
- 7) $x^2 \cdot y'' + xy' = 0$, $y(1) = 0$, $y'(1) = 1$, $x \in [1, 2]$;
- 8) $x^2 \cdot y'' - xy' + y = 3x^3$, $y(1) = 0,75$, $y'(1) = 0,5$, $x \in [1, 2]$;
- 9) $x^2 \cdot y'' - 4xy' + 6y = x^4 - x^2$, $y(1) = 0,5$, $y'(1) = 3$, $x \in [1, 2]$;
- 10) $x^2 \cdot y'' + (x^2 - 1)y' - y = 0$, $y(1) = e^{-1}$, $y'(1) = -e^{-1}$, $x \in [1, 2]$;
- 11) $x^2 \cdot y'' - (x^2 - 2x)y' - (3x + 2)y = 0$, $y(1) = e$, $y'(1) = 2e$, $x \in [1, 2]$;
- 12) $x^2 \cdot y'' + x^3 y' + (x^2 - 2)y = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = -1$, $x \in [1, 2]$;
- 13) $(x^2 - 1)y'' - 2xy' + 2y = 0$, $y(2) = 5$, $y'(2) = 4$, $x \in [2, 3]$;
- 14) $x(x+1)y'' + (3x+2)y' + y = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = -1$, $x \in [1, 2]$;
- 15) $y'' - 2(2x^2 + 1)y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $x \in [0, 1]$;
- 16) $y'' + y' \cdot \operatorname{tg}(x) - y \cdot \cos^2(x) = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$, $x \in [0, 1]$;
- 17) $y'' + 4xy' + (4x^2 + 2)y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $x \in [0, 1]$;
- 18) $y'' + 2y' \cdot \operatorname{tg}(x) + 3y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $x \in [0, 1]$;
- 19) $x(x+1)y'' - (x-1)y' + y = 0$, $y(1) = y'(1) = -4$, $x \in [1, 2]$;
- 20) $xy'' - 2y' + xy = -2\sin(x)$, $y(\pi/2) = \pi/2$, $y'(\pi/2) = 1$, $x \in [\pi/2, \pi]$;

- 21) $xy'' - 2y' + y = x^3$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $x \in [0, 2]$;
- 22) $x^2 \cdot y'' + 2y' - 2y = 2$, $y(1) = 4$, $y'(1) = 4$, $x \in [1, 2]$;
- 23) $xy'' - xy' - y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $x \in [0, 2]$;
- 24) $y'' + y' + \frac{y}{x} = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $x \in [0, 2]$;
- 25) $y'' + 2y' + y = 2e^{-x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $x \in [0, 2]$;
- 26) $y'' + 2(x-1)y' + 2y = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$, $x \in [1, 3]$;
- 27) $y'' - 4xy' + (4x-1)y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$;
- 28) $x \cdot y'' - (3+x)y' + 4y = 4(-x^2 + 2x + 1)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $x \in [0; 1,5]$;
- 29) $y'' + \frac{2}{x}y' + y = \frac{1}{x}$, $y(0,1) = 10$, $y'(0,1) = -100$, $x \in [0,1; 1]$;
- 30) $y'' - 2y' - 3y = 2x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$, $x \in [0; 1]$;
- 31) $y'' + 3y = \sin(2x)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$, $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$;
- 32) $2y'' + 5y' = 29 \cdot \cos(x)$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$, $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$;
- 33) $y'' + y' + y = x^2 + x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -3$, $x \in [0; 1,25]$;
- 34) $y'' + 4y = 8 \cdot \sin(2x)$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -1$, $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$;
- 35) $y'' - 2y' - 3y = 2x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$, $x \in [0; 1,5]$;
- 36) $y'' + y' + y = e^{-x}$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$, $x \in [0; 1,2]$;
- 37) $y'' + y = 2 \cdot \cos(x)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$;
- 38) $y'' + y' - 2y = -2(x+1)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$, $x \in [0; 1,5]$;
- 39) $y'' + 2y' = 2 + e^x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$, $x \in [0; 1]$;
- 40) $y'' + 4y' + 29y = e^{-2x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $x \in [0; 1,2]$;
- 41) $y'' - y' - 6y = 2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $x \in [0; 1,4]$;
- 42) $y'' - y' = x^2$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $x \in [0; 2]$;
- 43) $y'' - y = \cos(3x)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$, $x \in [0; 1,5]$;
- 44) $y'' + y' + y = 7e^{2x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 4$, $x \in [0; 1]$;
- 45) $y'' - 9y = \sin(x) - \cos(x)$, $y(0) = -3$, $y'(0) = 2$, $x \in [0; \pi]$;
- 46) $2y'' - y' = \sin(3x)$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$, $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$;
- 47) $y'' - 3y' + 2y = e^x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $x \in [0; 1,15]$;

- 48) $y'' - 3y' + 2y = 12e^{3x}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 6$, $x \in [0; 0,75]$;
- 49) $y'' + 2y' + 10y = 2e^{-x} \cdot \cos(3x)$, $y(0) = 5$, $y'(0) = 1$, $x \in [0; \pi/3]$;
- 50) $y'' + y' - 2y = e^{-x}$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$, $x \in [0; 2]$;
- 51) $y'' - 3y' + 2y = 2e^x \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $x \in [0; \pi]$;
- 52) $y'' - y = 4\sin(x) + 5\cos(2x)$, $y(0) = -1$, $y'(0) = -2$, $x \in [0; \pi/2]$;
- 53) $y'' - 2y' = e^x(x^2 + x - 3)$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 2$, $x \in [0; 1]$;
- 54) $y'' + 3y' - 10y = 47 \cdot \cos(3x) - \sin(3x)$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -1$, $x \in [0; \pi/6]$;
- 55) $y'' + 4y' + 4y = x^3 e^{2x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$, $x \in [0; 0,5]$;
- 56) $y'' + y' + y = x^2 + x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -3$, $x \in [0; 1,4]$;
- 57) $y'' + y = \operatorname{sh}(x)$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$, $x \in [0; 1]$;
- 58) $y'' + 2y' = \sin\left(x/2\right)$, $y(0) = -2$, $y'(0) = 4$, $x \in [0; \pi]$;
- 59) $y'' - y' = x^2$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $x \in [0; 1,5]$;
- 60) $y'' + y' - 2y = -2(x+1)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$, $x \in [0; 1,75]$.

Образец выполнения лабораторной работы (Численное решение системы ОДУ)

Пример: Найти приближенное решение обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка при заданных начальных условиях

$$y''(x) + x \cdot y'(x) = (2 + x^2) \cos(x), \quad x \in [0,5; 1]$$

$$y(0,5) = 0,239713, \quad y'(0,5) = 0,918217.$$

Приведем данное ДУ второго порядка к системе ОДУ первого порядка. Для этого введем обозначения: $y_1 = y(x)$, $y_2 = y'(x)$, тогда получим

$$\begin{cases} y_1' = y_2(x), \\ y_2' + x \cdot y_2 + y_1 = (2 + x^2) \cos(x), \end{cases}$$

$$y_1(0,5) = 0,239713, \quad y_2(0,5) = 0,918217, \quad x \in [0,5; 1].$$

Найдем приближенное решение данной системы методом Рунге-Кутты. При этом

$$f(x, y_1, y_2) \equiv y_2(x),$$

$$g(x, y_1, y_2) \equiv (-x \cdot y_2 - y_1 + (2 + x^2) \cos(x)).$$

Оценку погрешности результата будем производить в соответствии с оценкой погрешности для метода Рунге-Кутты.

Положим, что число разбиений отрезка $[0,5; 2,5]$ равно $n = 20$, тогда $h = 0,1$. Проведя соответствующие вычисления получим следующие таблицы расчетов

i	x_i	$k_{1,i}$	$k_{2,i}$	$k_{3,i}$	$k_{4,i}$	$y_{1,i}$
0	0,5					0,239713
1	0,6	0,091822	0,099399	0,098903	0,106011	0,338786
2	0,7	0,105984	0,112544	0,111969	0,117991	0,450953
3	0,8	0,117961	0,123354	0,122710	0,127507	0,573885
4	0,9	0,127472	0,131570	0,130864	0,134317	0,704995
5	1	0,134277	0,136969	0,136213	0,138221	0,841472
6	1,1	0,138177	0,139373	0,138579	0,139064	0,980329
7	1,2	0,139016	0,138650	0,137830	0,136738	1,118448
8	1,3	0,136687	0,134718	0,133883	0,131184	1,252627
9	1,4	0,131130	0,127542	0,126707	0,122396	1,379631
10	1,5	0,122340	0,117141	0,116319	0,110417	1,496244
11	1,6	0,110360	0,103586	0,102789	0,095343	1,599319
12	1,7	0,095285	0,086996	0,086239	0,077319	1,685832
13	1,8	0,077262	0,067545	0,066840	0,056542	1,752928
14	1,9	0,056488	0,045451	0,044812	0,033254	1,797972
15	2	0,033204	0,020982	0,020419	0,007743	1,818597
16	2,1	0,007700	-0,005555	-0,006030	-0,019662	1,812741
17	2,2	-0,019697	-0,033810	-0,034187	-0,048596	1,778693
18	2,3	-0,048621	-0,063400	-0,063671	-0,078660	1,715123
19	2,4	-0,078674	-0,093912	-0,094070	-0,109429	1,621112
20	2,5	-0,109429	-0,124908	-0,124946	-0,140455	1,496180

i	$p_{1,i}$	$p_{2,i}$	$p_{3,i}$	$p_{4,i}$	$y_{2,i}$
0					0,918217
1	0,151545	0,14162435	0,141897176	0,131172	1,059844
2	0,131189	0,11969784	0,120071287	0,107852	1,179607
3	0,107873	0,09497953	0,09546304	0,081925	1,274721
4	0,081953	0,06784616	0,068445701	0,053787	1,342775
5	0,053823	0,03871335	0,039431047	0,02387	1,381772
6	0,023914	0,00802995	0,008863835	-0,00737	1,390161
7	-0,00731	-0,02372802	-0,02278418	-0,03943	1,366865
8	-0,03937	-0,05606379	-0,05502061	-0,07183	1,311303
9	-0,07176	-0,08846665	-0,08733911	-0,10405	1,223399

10	-0,10397	-0,12041891	-0,11922629	-0,13556	1,103596
11	-0,13548	-0,15140303	-0,15016869	-0,16586	0,952849
12	-0,16577	-0,18090878	-0,17965989	-0,19445	0,772623
13	-0,19435	-0,20844036	-0,20720752	-0,22083	0,564877
14	-0,22073	-0,23352335	-0,23234013	-0,24455	0,332043
15	-0,24445	-0,25571151	-0,25461385	-0,26517	0,076996
16	-0,26509	-0,27459311	-0,27361877	-0,28232	-0,19697
17	-0,28224	-0,28979703	-0,28898483	-0,29562	-0,48621
18	-0,29557	-0,30099829	-0,30038737	-0,3048	-0,78674
19	-0,30477	-0,307923	-0,30755205	-0,30959	-1,09429
20	-0,30959	-0,31035273	-0,31025915	-0,30981	-1,40439

$\Delta_{1,i}$	$\Delta_{2,i}$	$\Delta_{3,i}$	$\Delta_{4,i}$
0,099073	0,013094	-0,002329	-0,000260154
0,112167	0,010766	-0,002589	-0,000220695
0,122933	0,008177	-0,002809	-0,000177643
0,131109	0,005367	-0,002987	-0,000131577
0,136477	0,002380	-0,003119	-0,000083118
0,138857	-0,000738	-0,003202	-0,000032925
0,138119	-0,003940	-0,003235	0,000018319
0,134179	-0,007175	-0,003216	0,000069914
0,127004	-0,010391	-0,003146	0,000121149
0,116613	-0,013538	-0,003025	0,000171315
0,103075	-0,016563	-0,002854	0,000219711
0,086513	-0,019417	-0,002634	0,000265654
0,067096	-0,022051	-0,002369	0,000308491
0,045044	-0,024420	-0,002060	0,000347601
0,020625	-0,026480	-0,001713	0,000382408
-0,005855	-0,028193	-0,001330	0,000412388
-0,034048	-0,029523	-0,000918	0,000437075
-0,063571	-0,030440	-0,000481	0,000461761
-0,094011	-0,030921	-0,000019	0,000486447
-0,124932	-0,030940	0,000468	0,000511134
-0,155872	-0,030472	0,000979	0,000535820

$\Delta_{5,i}$	$R_4(h)$	$dy_{1,i}$
0,000039458	0,0000003288	0,0000000000
0,000043052	0,0000003588	0,0000003288
0,000046066	0,0000003839	0,0000006876
0,000048458	0,0000004038	0,0000010715
0,000050193	0,0000004183	0,0000014753
0,000051244	0,0000004270	0,0000018936

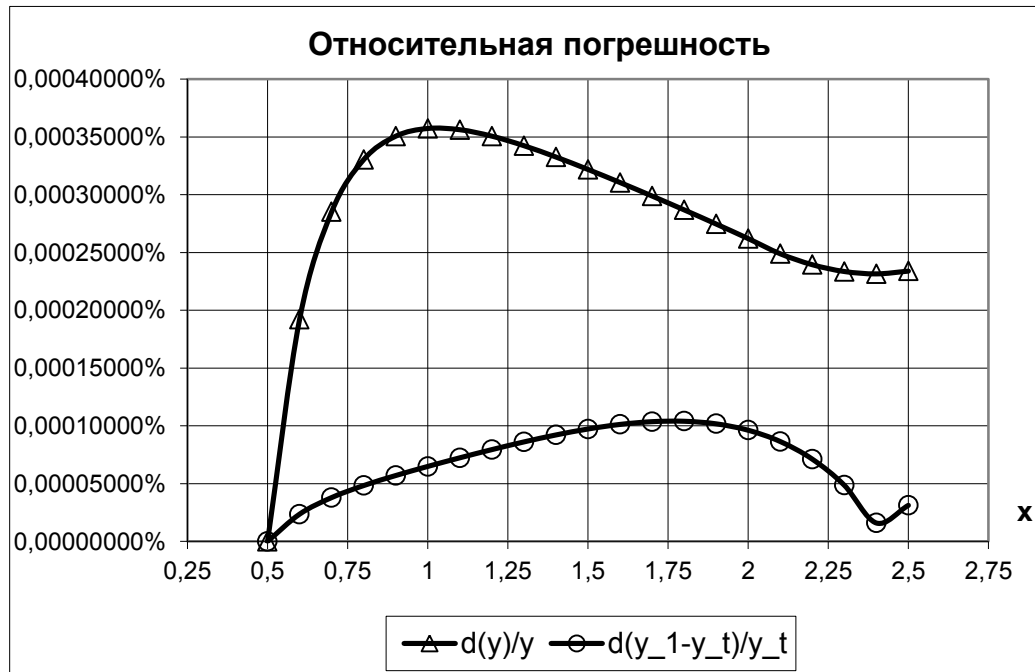
0,000051595	0,0000004300	0,0000023206
0,000051235	0,0000004270	0,0000027506
0,000050166	0,0000004180	0,0000031775
0,000048396	0,0000004033	0,0000035956
0,000045944	0,0000003829	0,0000039989
0,000042837	0,0000003570	0,0000043817
0,000039110	0,0000003259	0,0000047387
0,000034807	0,0000002901	0,0000050646
0,000029980	0,0000002498	0,0000053547
0,000024686	0,0000002057	0,0000056045
0,000024686	0,0000002057	0,0000058102
0,000024686	0,0000002057	0,0000060160
0,000024686	0,0000002057	0,0000062217
0,000024686	0,0000002057	0,0000064274
0,000024686	0,0000002057	0,0000066331

$\bar{\Delta}_{1,i}$	$\bar{\Delta}_{2,i}$	$\bar{\Delta}_{3,i}$	$\bar{\Delta}_{4,i}$	$\bar{\Delta}_{5,i}$
0,141627	-0,021864	-0,002785	0,000374809	0,000038679
0,119763	-0,024649	-0,002411	0,000413488	0,000033118
0,095114	-0,027060	-0,001997	0,000446605	0,000027094
0,068054	-0,029057	-0,001551	0,000473699	0,000020684
0,038997	-0,030608	-0,001077	0,000494383	0,000013967
0,008389	-0,031685	-0,000583	0,000508351	0,000007030
-0,023295	-0,032267	-0,000074	0,000515381	-0,000000040
-0,055562	-0,032341	0,000441	0,000515340	-0,000007154
-0,087904	-0,031900	0,000957	0,000508186	-0,000014220
-0,119804	-0,030943	0,001465	0,000493966	-0,000021149
-0,150747	-0,029479	0,001959	0,000472817	-0,000027850
-0,180226	-0,027520	0,002432	0,000444967	-0,000034238
-0,207746	-0,025088	0,002876	0,000410729	-0,000040228
-0,232834	-0,022212	0,003287	0,000370501	-0,000045743
-0,255046	-0,018925	0,003658	0,000324758	-0,000050709
-0,273971	-0,015267	0,003982	0,000274049	-0,000055059
-0,289238	-0,011285	0,004257	0,000218990	-0,000055059
-0,300523	-0,007028	0,004476	0,000163931	-0,000055059
-0,307551	-0,002553	0,004639	0,000108872	-0,000055059
-0,310103	0,002087	0,004748	0,000053814	-0,000055059
-0,308016	0,006835	0,004802	-0,000001245	-0,000055059

$\bar{R}_4(h)$	$dy_{2,i}$	dy	δy
0,0000003223	0,0000000000	0,0000000000	0,000000000%
0,0000002760	0,0000003223	0,0000006511	0,00019220%

0,0000002258	0,0000005983	0,0000012859	0,00028515%
0,0000001724	0,0000008241	0,0000018956	0,00033030%
0,0000001164	0,0000009965	0,0000024717	0,00035061%
0,0000000586	0,0000011128	0,0000030064	0,00035728%
-0,0000000003	0,0000011714	0,0000034920	0,00035621%
-0,0000000596	0,0000011711	0,0000039217	0,00035063%
-0,0000001185	0,0000011115	0,0000042890	0,00034240%
-0,0000001762	0,0000009930	0,0000045885	0,00033259%
-0,0000002321	0,0000008167	0,0000048156	0,00032185%
-0,0000002853	0,0000005847	0,0000049664	0,00031053%
-0,0000003352	0,0000002993	0,0000050380	0,00029885%
-0,0000003812	-0,0000000359	0,0000050287	0,00028688%
-0,0000004226	-0,0000004171	0,0000049376	0,00027462%
-0,0000004588	-0,0000008397	0,0000047649	0,00026201%
-0,0000004588	-0,0000012985	0,0000045117	0,00024889%
-0,0000004588	-0,0000017573	0,0000042586	0,00023943%
-0,0000004588	-0,0000022161	0,0000040055	0,00023354%
-0,0000004588	-0,0000026750	0,0000037524	0,00023147%
-0,0000004588	-0,0000031338	0,0000034993	0,00023388%

$y_{\text{точн}}$	$\Delta(y_{\text{точн},i}, y_{1,i})$	$\delta(y, y_{\text{точн}})$
0,2397127693	0,0000000000	0,00000000%
0,3387854840	0,0000000800	0,00002360%
0,4509523811	0,0000001711	0,00003794%
0,5738848727	0,0000002774	0,00004833%
0,7049942187	0,0000004019	0,00005700%
0,8414709848	0,0000005460	0,00006488%
0,9803280961	0,0000007091	0,00007233%
1,1184469032	0,0000008884	0,00007943%
1,2526256410	0,0000010783	0,00008609%
1,3796296220	0,0000012708	0,00009211%
1,4962424799	0,0000014553	0,00009726%
1,5993177649	0,0000016188	0,00010122%
1,6858301778	0,0000017466	0,00010360%
1,7529257356	0,0000018223	0,00010396%
1,7979701666	0,0000018290	0,00010173%
1,8185948537	0,0000017495	0,00009620%
1,8127396700	0,0000015670	0,00008644%
1,7786920884	0,0000012662	0,00007119%
1,7151219880	0,0000008336	0,00004860%
1,6211116333	0,0000002584	0,00001594%
1,4961803603	0,0000004671	0,00003122%



(На рисунке $d(y)/y = \delta y$, $d(y_1-y_t)/y_t = \delta(y, y_{точн})$).

Анализ полученного результата.

Из оценки погрешности решения следует

$$\Delta_1 = \max_i \{dy_i\} \leq 0,000006 \leq \frac{1}{2} 10^{-4} = \frac{1}{2} 10^{m-n+1}, \quad m=0; \quad -4 = -n+1 \Rightarrow n=5,$$

Число верных знаков в приближенном решении равно $n=5$. Тогда, округлив значения до верных цифр, получим приближенное решение с 5 верными знаками $\{y_{окр_i}\}$. Причем, погрешность округления оценивается величиной $\Delta_{округ} = \max_i \{|y_i - y_{окр_i}|\} \leq 0,000048$. Определим погрешность приближенного решения после округления

$$\Delta_2 = \Delta_1 + \Delta_{округ} = 0,000006 + 0,000048 = 0,000054 \leq \frac{1}{2} 10^{-3} = \frac{1}{2} 10^{m-n_1+1},$$

$$m=0; \quad -3 = -n_1+1 \Rightarrow n_1=4.$$

.

Лабораторная работа № 2.

Тема: Решение краевой задачи для ОДУ второго порядка методом конечных разностей.

Задание: 1) Решить исходную краевую задачу для ОДУ второго порядка методом конечных разностей с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$.
2) Построить график полученного решения и оценить погрешность.

Варианты лабораторных заданий

- 1) $y'' + 1,5y' - xy = 0,5, \begin{cases} 2y(1,3) - y'(1,3) = 1; \\ y(1,6) = 3 \end{cases};$
- 2) $y'' + 1,5y' - xy = 0,5, \begin{cases} 2y(1,3) - y'(1,3) = 1; \\ y(1,6) = 3 \end{cases};$
- 3) $y'' + 1,5y' - xy = 0,5, \begin{cases} 2y(1,3) - y'(1,3) = 1; \\ y(1,6) = 3 \end{cases};$
- 4) $y'' + 1,5y' - xy = 0,5, \begin{cases} 2y(1,3) - y'(1,3) = 1; \\ y(1,6) = 3 \end{cases};$
- 5) $y'' + (x + y)y' - 2y = 2(2x - 1), \begin{cases} 4y(0,5) - y'(0,5) = 2; \\ y(1) + 2y'(1) = 0 \end{cases};$
- 6) $y'' + (x - 1)y' - 2y = -4x, \begin{cases} 4y(0,5) - y'(0,5) = 2; \\ y(1) = 3 \end{cases};$
- 7) $y'' + xy' - 3y = 2 + 6x - x^2, \begin{cases} y'(0,5) = 1,75; \\ y(1) + y'(1) = 7 \end{cases};$
- 8) $y'' + 2y' - y = 2x \cdot e^{-x}, \begin{cases} y(0,5) - y'(0,5) = 0; \\ y'(1) = 0 \end{cases};$
- 9) $y'' + \frac{2}{x+1}y' - (x+1)y = -1, \begin{cases} y(0,5) = \frac{2}{3}; \\ 2y(1) + y'(1) = 0,75 \end{cases};$
- 10) $y'' - (x+1)y' - y = \frac{2}{(x+1)^2}, \begin{cases} y(0,5) = \frac{2}{3}; \\ y(1) = 0,5 \end{cases};$

$$11) \quad y'' + \frac{1}{x}y' = 0, \quad \begin{cases} y'(0,5) = 2 \\ y(1) + y'(1) = 1 \end{cases};$$

$$12) \quad y'' - y' - 2y = -3e^{-x}, \quad \begin{cases} y'(0) = 0 \\ y(1) + 2y'(1) = 0 \end{cases};$$

$$13) \quad y'' + \frac{2}{x^2-1}y' + \frac{6}{\sqrt{1-x^2}}y = 0, \quad \begin{cases} y(0) = -0,5 \\ y(0,8) = 0,5 \end{cases};$$

$$14) \quad y'' + \frac{2}{x^2-1}y' + \frac{12}{\sqrt{1-x^2}}y = 0, \quad \begin{cases} y(0) = 0 \\ y(0,8) = 0,1 \end{cases};$$

$$15) \quad y'' + \frac{2}{x^2-1}y' + \frac{20}{\sqrt{1-x^2}}y = 0, \quad \begin{cases} y(0) = -0,37 \\ y(0,8) = -0,2 \end{cases};$$

$$16) \quad y'' + \frac{2}{x^2-1}y' + \frac{30}{\sqrt{1-x^2}}y = 0, \quad \begin{cases} y(0) = 0 \\ y(0,8) = -0,4 \end{cases};$$

$$17) \quad y'' + \frac{2}{x^2-1}y' + \frac{27}{\sqrt{1-x^2}}y = 0, \quad \begin{cases} y(0) = 0 \\ y(0,8) = -0,1 \end{cases};$$

$$18) \quad y'' + \frac{1,5+2,5x}{x^2-1}y' + \frac{33}{\sqrt{1-x^2}}y = 0, \quad \begin{cases} y(0) = 0,2 \\ y(0,6) = 0,8 \end{cases};$$

$$19) \quad y'' + \frac{1,7+2,7x}{x^2-1}y' + \frac{33,5}{\sqrt{1-x^2}}y = 0, \quad \begin{cases} y(0) = 0,15 \\ y(0,6) = 0,2 \end{cases};$$

$$20) \quad y'' + \frac{3x}{x^2-1}y' + \frac{15}{\sqrt{1-x^2}}y = 0, \quad \begin{cases} y(0) = 0,2 \\ y(0,8) = 0,8 \end{cases};$$

Варианты с $N = 21 - 30$

$$y'' + \frac{2}{x^2-1}y' - \frac{\beta}{\sqrt{1-x^2}}y = 0, \quad \begin{cases} y(0) = 1 & \text{для } \alpha \leq 1, \\ y(0) = 1/\alpha & \text{для } \alpha > 1, \\ y(1) = \frac{2^\alpha}{\alpha}; & \alpha = \frac{N-30}{2}. \end{cases};$$

Варианты с $N = 31 - 40$

$$y'' + xy' - 2y = 2(\alpha^2 - 1), \begin{cases} y(0) = 1 & \text{для } \alpha \leq 1, \\ y(0) = 1/\alpha & \text{для } \alpha > 1, \\ y(1) = \frac{2^\alpha}{\alpha}; \quad \alpha = \frac{N-30}{2}. \end{cases};$$

Варианты с $N = 41 - 50$

$$y'' + \frac{0,5\alpha}{\alpha x + 1} y' - \sqrt{\alpha x + 1} \cdot y = 2(\alpha x + 1), \begin{cases} y'(0) = -\alpha, \quad y(1) = 2\sqrt{\alpha + 1}, \\ \alpha = 0,3 \cdot (N - 40). \end{cases}$$

Варианты с $N = 51 - 60$

$$y'' + (x+1)y' - \alpha y = (\alpha - 1)(x+1)^{\alpha-2}, \begin{cases} y(0) = 1/\alpha, \quad y(1) = \frac{2^\alpha}{\alpha}, \\ \alpha = 0,5 \cdot (N - 50). \end{cases}$$

Образец выполнения лабораторной работы
(Решение краевой задачи для ОДУ второго порядка
методом конечных разностей)

Пример: Найти приближенное решение обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка при заданных начальных условиях методом конечных разностей с точность $\varepsilon = 10^{-4}$.

$$y''(x) - \frac{3}{x} y'(x) + \frac{3}{x^2} y(x) = 3 \cdot x^2, \quad x \in (0,1; 1),$$

$$\begin{cases} y(0,1) - y'(0,1) = 0,957; \\ y(1) + y(1) = 3. \end{cases}$$

Решение.

Запишем задачу в общем виде

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x), \quad x \in (a; b),$$

$$\begin{cases} \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A, \\ \beta_0 y(b) + \beta_1 y(b) = B. \end{cases}$$

1. Аппроксимация области, дифференциального уравнения и граничных условий.

На отрезке $[a; b]$ получим систему равноотстоящих точек $x_i = x_0 + i \cdot h$, где $x_0 = a$; $x_n = b$; $h = \frac{(b-a)}{n}$, $i = \overline{0, n}$. Запишем исходную задачу в конечно-разностном виде:

$$\frac{(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}))}{h^2} + p_i \frac{(y_{i+1} - y_{i-1}))}{2h} + q_i y_i = f_i, \quad i = \overline{1, n-1},$$

$$\begin{cases} \alpha_0 y_0 + \alpha_1 \frac{(-y_2 + 4y_1 - 3y_0)}{2h} = A, \\ \beta_0 y_n + \beta_1 \frac{(3y_n - 4y_{n-1} + y_{n-2}))}{2h} = B, \end{cases}$$

где $y_i = y(x_i)$; $p_i = p(x_i)$; $q_i = q(x_i)$; $f_i = f(x_i)$.

После элементарных преобразований получим

$$\left[1 - \frac{1}{2} p_i h\right] \cdot y_{i-1} - \left[2 - q_i h^2\right] \cdot y_i + \left[1 + \frac{1}{2} p_i h\right] \cdot y_{i+1} = f_i h^2, \quad i = \overline{1, n-1},$$

$$\begin{cases} \left[\alpha_0 h - \frac{3\alpha_1}{2}\right] y_0 + [2\alpha_1] y_1 + \left[-\frac{\alpha_1}{2}\right] y_2 = A \cdot h, \\ \left[\frac{\beta_1}{2}\right] y_{n-2} + [-2\beta_1] y_{n-1} + \left[\beta_0 h + \frac{3\beta_1}{2}\right] y_n = B \cdot h. \end{cases}$$

2. Запись исходной задачи в виде системы алгебраических уравнений.

Подставив исходные данные

$$\begin{array}{ll} a = 0,1 & \alpha_0 = 1 \\ b = 1 & \alpha_1 = -1 \\ n = 5 & \beta_0 = 1 \\ h = 0,18 & \beta_1 = 1 \end{array}$$

и вычислив p_i, q_i, f_i

	x_i	p_i	q_i	f_i
$i=0$	0,1			
$i=1$	0,28	-10,7143	38,26531	0,2352
$i=2$	0,46	-6,52174	14,17769	0,6348
$i=3$	0,64	-4,6875	7,324219	1,2288
$i=4$	0,82	-3,65854	4,46163	2,0172
$i=5$	1			

получим систему линейных алгебраических уравнений $AY = F$, где матрица A трехдиагональная, Y, F - вектора-столбцы.

y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	F
-------	-------	-------	-------	-------	-------	----------

$$A = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 1,68 & -2 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0,1723 \\ \hline 1,9643 & -0,7602 & 0,0357 & 0 & 0 & 0 & 0,0076 \\ \hline 0 & 1,5870 & -1,5406 & 0,4130 & 0 & 0 & 0,0206 \\ \hline 0 & 0 & 1,4219 & -1,7627 & 0,5781 & 0 & 0,0398 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1,3293 & -1,8554 & 0,6707 & 0,0654 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0,5 & -2 & 1,68 & 0,5400 \\ \hline \end{array}$$

3. Решение системы алгебраических уравнений.

Решив данную систему любым из известных методов получим решение поставленной задачи, например: $Y = A^{-1}F$

$$A^{-1} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline -0,574470 & 1,000412 & -0,244755 & -0,088297 & -0,048294 & 0,019280 & \\ \hline -1,600458 & 1,368818 & -0,731153 & -0,263769 & -0,144269 & 0,057596 & \\ \hline -2,471612 & 2,113887 & -2,102235 & -0,758396 & -0,414806 & 0,165602 & \\ \hline -3,069828 & 2,625521 & -2,611049 & -1,815458 & -0,992969 & 0,396419 & \\ \hline -3,281094 & 2,806210 & -2,790742 & -1,940398 & -2,007426 & 0,801417 & \\ \hline -2,992425 & 2,559321 & -2,545214 & -1,769682 & -2,094266 & 1,431324 & \\ \hline \end{array}$$

X	$Y_{\text{прибл}}$
0,1	-0,092654
0,28	-0,269174
0,46	-0,420871
0,64	-0,485750
0,82	-0,377089
1	0,017082

4. Проверка выполнения граничных условий.

Подставив найденные значения $Y_{\text{прибл}}$ в аппроксимацию граничных условий

$$\begin{cases} \alpha_0 y_0 + \alpha_1 \frac{(-y_2 + 4y_1 - 3y_0)}{2h} = A, \\ \beta_0 y_n + \beta_1 \frac{(3y_n - 4y_{n-1} + y_{n-2})}{2h} = B, \end{cases}$$

получим

$$\alpha_0 y_0 + \alpha_1 \frac{(-y_2 + 4y_1 - 3y_0)}{2h} = 0,6569611 \approx 0,657;$$

$$\beta_0 y_n + \beta_1 \frac{(3y_n - 4y_{n-1} + y_{n-2})}{2h} = 3,0000 = 3;$$

т.е. граничные условия выполняются.

5. Оценим погрешность полученного приближенного решения.

Для оценки погрешности найденного решения можно использовать известное соотношение $\max_i |\Delta y_i| \leq \varepsilon_0 \cdot k^2$, где ε_0 - погрешность округления, k - число уравнений в системе $AY = F$. При заданной точности ε можно положить

$$\max_i |\Delta y_i| \leq \varepsilon_0 \cdot k^2 = \varepsilon, \Rightarrow \varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{k^2}.$$

Из последнего соотношения можно найти число верных знаков n в приближенном решении искомой задачи $\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{k^2} \leq \frac{1}{2} 10^{m-n+1}$, где m положительная степень десяти.

Для нашего примера имеем $k = 6$, $m = 0$, поэтому

$$\frac{10^{-4}}{36} \leq \frac{1}{2} 10^{0-n+1} \Rightarrow 2,7778 \cdot 10^{-6} \leq \frac{1}{2} 10^{1-n},$$

$$0,5556 \cdot 10^{-5} < 10^{-5} = 10^{1-n} \Rightarrow n = 6.$$

Округлим полученное решение до верных знаков

X	$Y_{\text{прибл}}$	Y_1	$\Delta_{1,\text{округл}}$	ΔY_1
0,1	-0,092654	-0,09265	0,000004	0,000104
0,28	-0,269174	-0,26917	0,000004	0,000104
0,46	-0,420871	-0,42087	0,000001	0,000101
0,64	-0,485750	-0,48575	0,000000	0,000100
0,82	-0,377089	-0,37709	0,000001	0,000101
1	0,017082	0,01708	0,000002	0,000102

Число верных знаков для приближенного решения $(Y_1 \pm \Delta Y_1)$ из аналогичных выкладок составит $n_1 = 4$. Округлив Y_1 до верных знаков получим

X	Y_1	Y_2	$\Delta_{2,\text{округл}}$	ΔY_2
0,1	-0,09265	-0,093	0,00035	0,00045
0,28	-0,26917	-0,269	0,00017	0,00027
0,46	-0,42087	-0,421	0,00013	0,00023
0,64	-0,48575	-0,486	0,00025	0,00035
0,82	-0,37709	-0,377	0,00009	0,00019
1	0,01708	0,017	0,00008	0,00018

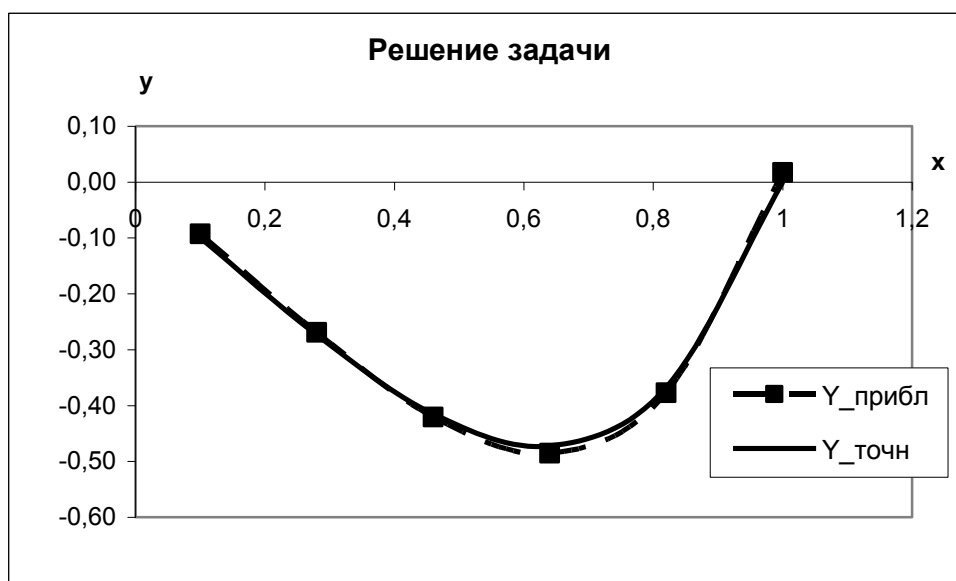
Число верных знаков для приближенного решения $(Y_2 \pm \Delta Y_2)$ из аналогичных выкладок составит $n_2 = 4$. Из равенства $n_1 = n_2$ следует, что приближенное решение $(Y_2 \pm \Delta Y_2)$ записано только верными цифрами.

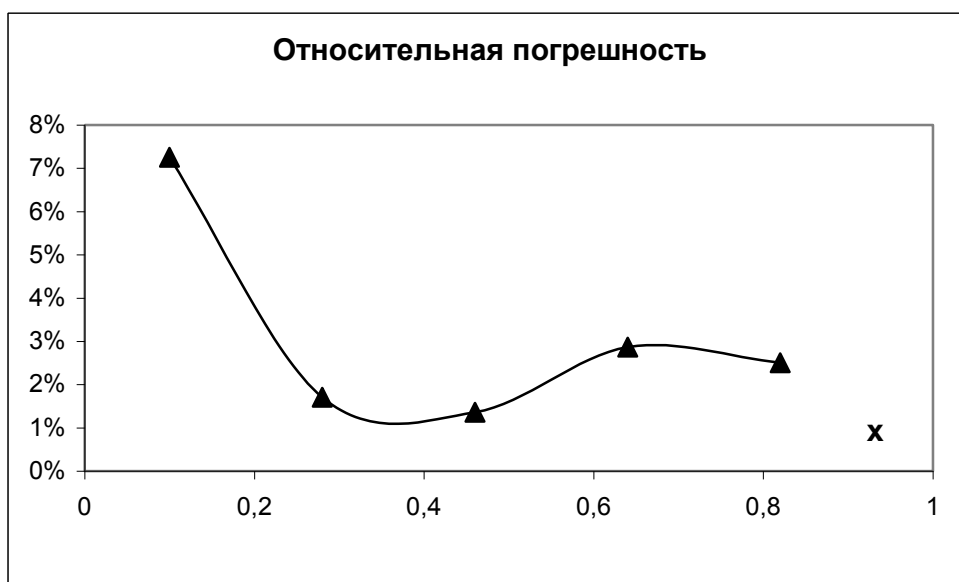
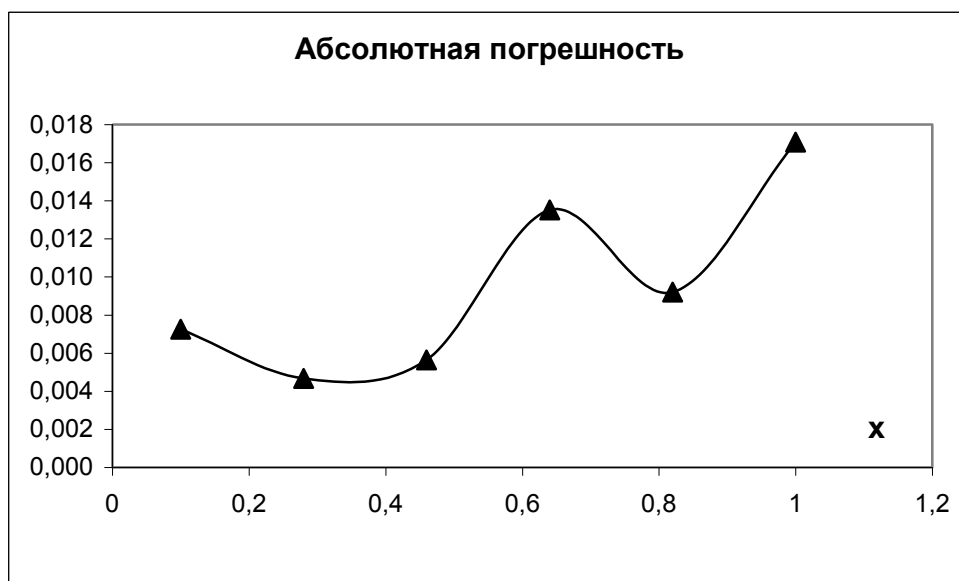
Таким образом, имеем следующее приближенное решение исходной задачи

X	Y_2	ΔY_2
0,1	-0,093	0,00045
0,28	-0,269	0,00027
0,46	-0,421	0,00023
0,64	-0,486	0,00035
0,82	-0,377	0,00019
1	0,017	0,00018

Для данного примера известно точное решение, поэтому можно оценить погрешность решения задачи

X	$Y_{\text{точн}}$	Абс. погрешность	Отн. погрешность
0,1	-0,0999	0,007246	7,3%
0,28	-0,27385	0,004676	1,7%
0,46	-0,41523	0,005641	1,4%
0,64	-0,47223	0,01352	2,9%
0,82	-0,36788	0,009209	2,5%
1	0	0,017082	





Лабораторная работа № 3.

Тема: Решение краевой задачи для ОДУ второго порядка методом прогонки.

Задание: 1) Решить краевую задачу для ОДУ второго порядка из задания лабораторной работы №2 методом прогонки.
2) Построить график полученного решения и оценить погрешность.
3) Сравнить полученное решение с решением из лабораторной работы №2 и сделать вывод.

Лабораторная работа № 4.

Тема: Решение краевой задачи для ОДУ второго порядка методом редукции к задаче Коши.

Задание: 1) Решить краевую задачу для ОДУ второго порядка из задания лабораторной работы №2 методом редукции к задаче Коши.
2) Построить график полученного решения и оценить погрешность.
3) Сравнить полученное решение с решением из лабораторной работы №2 и сделать вывод.

Лабораторная работа № 5.

Тема: Решение краевой задачи для ОДУ второго порядка методом коллокации.

Задание: 1) Решить краевую задачу для ОДУ второго порядка из задания лабораторной работы №2 методом коллокации.
2) Построить график полученного решения и оценить погрешность.
3) Сравнить полученное решение с решением из лабораторной работы №2 и сделать вывод.

Лабораторная работа № 6.

Тема: Решение краевой задачи для ОДУ второго порядка методом наименьших квадратов.

Задание: 1) Решить краевую задачу для ОДУ второго порядка из задания лабораторной работы №2 методом наименьших квадратов.
2) Построить график полученного решения и оценить погрешность.
3) Сравнить полученное решение с решением из лабораторной работы №2 и сделать вывод.

Лабораторная работа № 7.

Тема: Решение краевой задачи для ОДУ второго порядка методом Галеркина.

Задание: 1) Решить краевую задачу для ОДУ второго порядка из задания лабораторной работы №2 методом Галеркина.
2) Построить график полученного решения и оценить погрешность.
3) Сравнить полученное решение с решением из лабораторной работы №2 и сделать вывод.

Лабораторная работа № 8

Тема: Приближенное решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в прямоугольной области. Метод усреднения Либмана.

Задание: 1) Найти приближенное решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в прямоугольной области методом усреднения Либмана.
2) Задания для своего варианта взять из пособия: Воробьева Г.Н., Данилова А.Н. Практикум по вычислительной математике. -М.: Высшая школа, 1990. (стр. 161-163, Глава X, Работа №1)
3) Построить график (сечения) полученного решения, оценить погрешность решения и сделать вывод.

Образец выполнения лабораторной работы

Пример. Найти приближенное решение (с точностью до $\varepsilon = 10^{-2}$) задачи Дирихле для уравнения Лапласа $u(x, y)$ в прямоугольной области $ABCD$ методом сеток, используя метод усреднения Либмана,

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0, (x, y) \in \Omega = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}.$$

Где $A(0;0), B(0;1), C(1;1), D(1;0)$ вершины прямоугольной области $ABCD$ и граничные условия:

$$u(x, y)|_{AB} = 45y(1-y), u(x, y)|_{BC} = 25x, u(x, y)|_{CD} = 25 \cdot (1-y \cdot (1-y)),$$

$$u(x, y)|_{AD} = 25x \cdot \sin\left(\frac{\pi y}{2}\right).$$

Получим сеточную область Ω_h , для этого, полагая, $n_x = 10$, $n_y = 10$ имеем $h_x = \frac{1}{n_x} = 0,1$, $h_y = \frac{1}{n_y} = 0,1$.

Для определения значений функции $u(x, y)$ во внутренних точках области Ω_h применим метод сеток по схеме

$$u_{i,j} = \frac{1}{4}(u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1}),$$

и получим таблицу значений граничных и внутренних точек, и систему уравнений

y	B											C
$1,00$	$0,00$	$2,50$	$5,00$	$7,50$	$10,00$	$12,50$	$15,00$	$17,50$	$20,00$	$22,50$	$25,00$	
$0,90$	$4,05$	u_{73}	u_{74}	u_{75}	u_{76}	u_{77}	u_{78}	u_{79}	u_{80}	u_{81}	$22,75$	
$0,80$	$7,20$	u_{64}	u_{65}	u_{66}	u_{67}	u_{68}	u_{69}	u_{70}	u_{71}	u_{72}	$21,00$	
$0,70$	$9,45$	u_{55}	u_{56}	u_{57}	u_{58}	u_{59}	u_{60}	u_{61}	u_{62}	u_{63}	$19,75$	
$0,60$	$10,80$	u_{46}	u_{47}	u_{48}	u_{49}	u_{50}	u_{51}	u_{52}	u_{53}	u_{54}	$19,00$	
$0,50$	$11,25$	u_{37}	u_{38}	u_{39}	u_{40}	u_{41}	u_{42}	u_{43}	u_{44}	u_{45}	$18,75$	
$0,40$	$10,80$	u_{28}	u_{29}	u_{30}	u_{31}	u_{32}	u_{33}	u_{34}	u_{35}	u_{36}	$19,00$	
$0,30$	$9,45$	u_{19}	u_{20}	u_{21}	u_{22}	u_{23}	u_{24}	u_{25}	u_{26}	u_{27}	$19,75$	
$0,20$	$7,20$	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	u_{16}	u_{17}	u_{18}	$21,00$	
$0,10$	$4,05$	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	$22,75$	
$0,00$	$0,00$	$0,39$	$1,55$	$3,40$	$5,88$	$8,84$	$12,14$	$15,59$	$19,02$	$22,22$	$25,00$	D

A	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	x
---	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	---

$$u_1 = \frac{1}{4}(4,05 + 0,39 + u_2 + u_{10}), u_2 = \frac{1}{4}(1,55 + u_{11} + u_1 + u_3),$$

$$u_3 = \frac{1}{4}(3,4 + u_{12} + u_2 + u_4), \dots,$$

$$u_7 = \frac{1}{4}(15,59 + u_{16} + u_6 + u_8), u_8 = \frac{1}{4}(19,02 + u_{17} + u_7 + u_9),$$

$$u_9 = \frac{1}{4}(22,22 + 22,75 + u_{18} + u_8), \dots,$$

$$\dots\dots\dots, \\ u_{79} = \frac{1}{4}(17,5 + u_{70} + u_{78} + u_{80}), u_{80} = \frac{1}{4}(20,0 + u_{71} + u_{79} + u_{81}),$$

$$u_{81} = \frac{1}{4}(22,5 + 22,75 + u_{72} + u_{80}).$$

Решение данной системы линейных уравнений ищется итерационным способом

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1^{(k)} = \frac{1}{4}(4,05 + 0,39 + u_2^{(k-1)} + u_{10}^{(k-1)}), u_2^{(k)} = \frac{1}{4}(1,55 + u_{11}^{(k-1)} + u_1^{(k-1)} + u_3^{(k-1)}), \\ \dots\dots\dots, \\ u_{80}^{(k)} = \frac{1}{4}(20,0 + u_{71}^{(k-1)} + u_{79}^{(k-1)} + u_{81}^{(k-1)}), u_{81}^{(k)} = \frac{1}{4}(22,5 + 22,75 + u_{72}^{(k-1)} + u_{80}^{(k-1)}). \end{array} \right. (\Sigma)$$

В матричной форме имеем

$$U^{(k)} = B + A \cdot U^{(k-1)}, k=1,2,\dots; U^{(k)} = \left(u_1^{(k)}, u_2^{(k)}, \dots, u_{80}^{(k)}, u_{81}^{(k)} \right)^T,$$

где A матрица коэффициентов в (Σ) при $u_i^{(k-1)}, i=\overline{1,81}$; B вектор столбец свободных членов.

Причем остановка итерационного процесса производится по условию

$$\Delta = \max |u_i^{(k)} - u_i^{(k-1)}| < \varepsilon, \text{ для всех } i=\overline{1,81}.$$

В соответствии с принципом максимума начальные значения $u_m^{(0)}$ определяются из предположения, что функция $u(x, y)$ распределена по горизонтали равномерно, например,

$$u_1^{(0)} = u(0;0,1) + h_{x,y1} = 4,05 + 1,870 = 5,920;$$

$$u_2^{(0)} = u_1^{(0)} + h_{x,y1} = 5,920 + 1,870 = 7,790; \text{ и т.д..}$$

Тогда получим следующую таблицу начального распределения значения функции.

Нулевое приближение:

у	В	С										$h_{x,yj}$
1,0	0,00	2,500	5,000	7,500	10,000	12,500	15,000	17,500	20,000	22,500	25,00	
0,9	4,05	5,920	7,790	9,660	11,530	13,400	15,270	17,140	19,010	20,880	22,75	1,870
0,8	7,20	8,580	9,960	11,340	12,720	14,100	15,480	16,860	18,240	19,620	21,00	1,380
0,7	9,45	10,480	11,510	12,540	13,570	14,600	15,630	16,660	17,690	18,720	19,75	1,030
0,6	10,80	11,620	12,440	13,260	14,080	14,900	15,720	16,540	17,360	18,180	19,00	0,820
0,5	11,25	12,000	12,750	13,500	14,250	15,000	15,750	16,500	17,250	18,000	18,75	0,750
0,4	10,80	11,620	12,440	13,260	14,080	14,900	15,720	16,540	17,360	18,180	19,00	0,820
0,3	9,45	10,480	11,510	12,540	13,570	14,600	15,630	16,660	17,690	18,720	19,75	1,030
0,2	7,20	8,580	9,960	11,340	12,720	14,100	15,480	16,860	18,240	19,620	21,00	1,380
0,1	4,05	5,920	7,790	9,660	11,530	13,400	15,270	17,140	19,010	20,880	22,75	1,870
0,0	0,00	0,391	1,545	3,405	5,878	8,839	12,135	15,593	19,021	22,223	25,00	D
A	0,00	0,100	0,200	0,300	0,400	0,500	0,600	0,700	0,800	0,900	1,00	$u_i, i = \overline{1,11}$

Подставив нулевое приближение в правую часть системы (Σ) получим первое приближение решения (для удобства выпишем только значения во внутренних точках области).

Первое приближение:

5,7300	7,6350	9,5400	11,4450	13,3500	15,2550	17,1600	19,0650	20,9700
8,3900	9,8050	11,2200	12,6350	14,0500	15,4650	16,8800	18,2950	19,7100
10,2900	11,3550	12,4200	13,4850	14,5500	15,6150	16,6800	17,7450	18,8100
11,4300	12,2850	13,1400	13,9950	14,8500	15,7050	16,5600	17,4150	18,2700
11,8100	12,5950	13,3800	14,1650	14,9500	15,7350	16,5200	17,3050	18,0900
11,4300	12,2850	13,1400	13,9950	14,8500	15,7050	16,5600	17,4150	18,2700
10,2900	11,3550	12,4200	13,4850	14,5500	15,6150	16,6800	17,7450	18,8100
8,3900	9,8050	11,2200	12,6350	14,0500	15,4650	16,8800	18,2950	19,7100
5,2028	6,7713	8,5162	10,4145	12,4347	14,5388	16,6832	18,8203	20,9007

Продолжая процесс итерации получим:

Второе приближение:

5,6438	7,5188	9,4500	11,3813	13,3125	15,2438	17,1750	19,1063	21,0063
8,2563	9,6500	11,1000	12,5500	14,0000	15,4500	16,9000	18,3500	19,7688
10,1563	11,2000	12,3000	13,4000	14,5000	15,6000	16,7000	17,8000	18,8688
11,2963	12,1300	13,0200	13,9100	14,8000	15,6900	16,5800	17,4700	18,3288
11,6763	12,4400	13,2600	14,0800	14,9000	15,7200	16,5400	17,3600	18,1488
11,2963	12,1300	13,0200	13,9100	14,8000	15,6900	16,5800	17,4700	18,3288
10,1563	11,2000	12,3000	13,4000	14,5000	15,6000	16,7000	17,8000	18,8688
8,1244	9,4341	10,8441	12,2924	13,7712	15,2710	16,7808	18,2888	19,7514
4,9006	6,2673	7,9527	9,8659	11,9605	14,1795	16,4579	18,7250	20,8758

3 приближение:

5,5813	7,4359	9,3750	11,3281	13,2813	15,2344	17,1875	19,1328	21,0313
8,1625	9,5188	10,9875	12,4703	13,9531	15,4359	16,9188	18,3938	19,8063
10,0506	11,0591	12,1800	13,3150	14,4500	15,5850	16,7200	17,8472	18,9119
11,1906	11,9891	12,9000	13,8250	14,7500	15,6750	16,6000	17,5172	18,3719
11,5706	12,2991	13,1400	13,9950	14,8500	15,7050	16,5600	17,4072	18,1919
11,1906	11,9891	12,9000	13,8250	14,7500	15,6750	16,6000	17,5172	18,3719
10,0177	11,0051	12,1160	13,2506	14,3928	15,5402	16,6902	17,8319	18,9075
7,9227	9,1089	10,4948	11,9703	13,5060	15,0829	16,6794	18,2643	19,7583
4,7082	5,9581	7,5956	9,5209	11,6639	13,9562	16,3195	18,6609	20,8624

53 приближение:

5,2241	6,8347	8,6903	10,6924	12,7792	14,9035	17,0223	19,0882	21,0360
7,5079	8,4175	9,7244	11,2891	13,0094	14,8016	16,5882	18,2879	19,8025
9,1828	9,5899	10,4823	11,7089	13,1456	14,6844	16,2238	17,6601	18,8795
10,1738	10,2583	10,8808	11,8893	13,1493	14,5381	15,9381	17,2319	18,2964
10,4424	10,3668	10,8634	11,7834	12,9881	14,3463	15,7302	17,0124	18,0633
9,9666	9,8800	10,3910	11,3558	12,6352	14,0929	15,5936	17,0023	18,1832
8,7323	8,7734	9,4345	10,5784	12,0673	13,7617	15,5200	17,1991	18,6560
6,7293	7,0277	7,9691	9,4256	11,2623	13,3371	15,5008	17,6002	19,4823
3,9498	4,6249	5,9698	7,8703	10,1964	12,8019	15,5276	18,2055	20,6661

$$\Delta = 0,0101 > \varepsilon;$$

54 приближение:

5,2231	6,8330	8,6879	10,6896	12,7763	14,9008	17,0200	19,0866	21,0352
--------	--------	--------	---------	---------	---------	---------	---------	---------

7,5061	8,4142	9,7198	11,2838	13,0039	14,7964	16,5839	18,2848	19,8009
9,1804	9,5852	10,4760	11,7016	13,1380	14,6773	16,2177	17,6558	18,8773
10,1709	10,2528	10,8733	11,8806	13,1403	14,5296	15,9310	17,2268	18,2937
10,4393	10,3610	10,8555	11,7742	12,9786	14,3373	15,7226	17,0069	18,0605
9,9637	9,8745	10,3835	11,3470	12,6260	14,0842	15,5864	16,9971	18,1804
8,7298	8,7686	9,4280	10,5708	12,0594	13,7543	15,5138	17,1946	18,6536
6,7275	7,0242	7,9644	9,4200	11,2566	13,3317	15,4962	17,5969	19,4806
3,9488	4,6231	5,9673	7,8674	10,1934	12,7991	15,5252	18,2038	20,6652

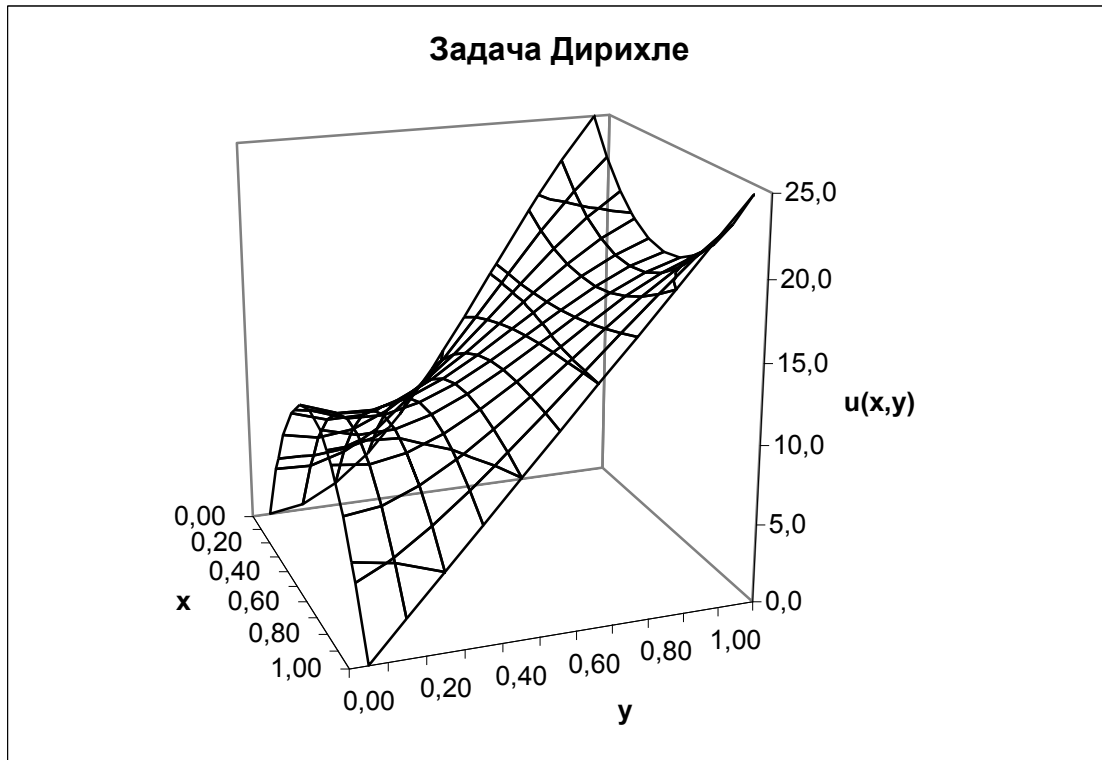
$$\Delta = 0,0096 < \varepsilon.$$

Таким образом 54 приближение удовлетворяет заданной точности. Тогда приближенное решение искомой задачи будет иметь вид:

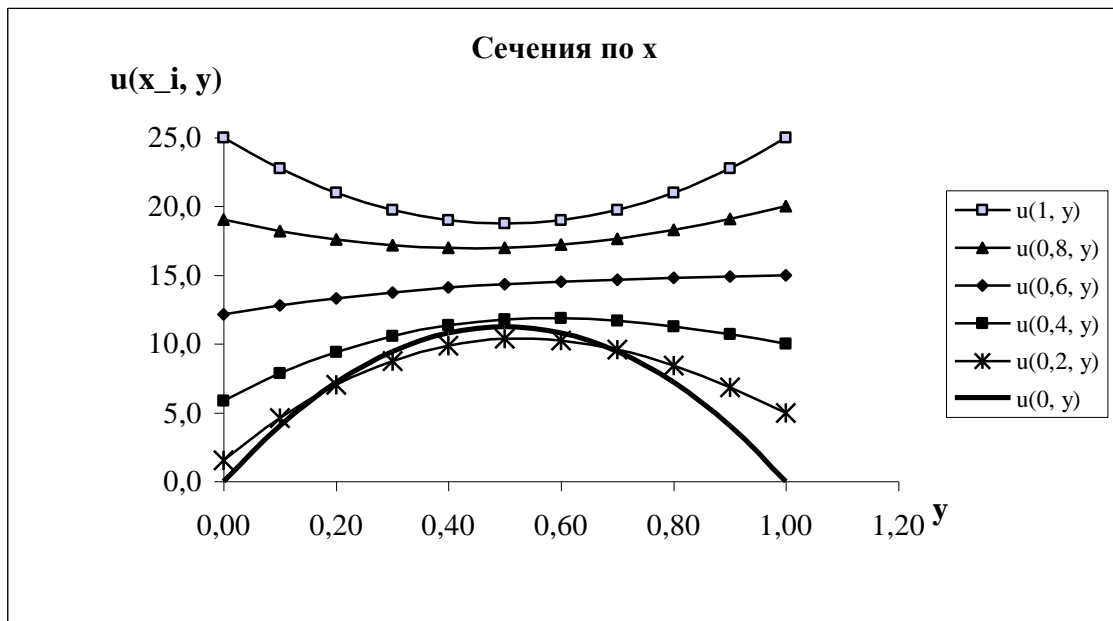
1,00	0,00	2,50	5,00	7,50	10,00	12,50	15,00	17,50	20,00	22,50	25,00
0,90	4,050	5,223	6,833	8,688	10,690	12,776	14,901	17,020	19,087	21,035	22,75
0,80	7,200	7,506	8,414	9,720	11,284	13,004	14,796	16,584	18,285	19,801	21,00
0,70	9,450	9,180	9,585	10,476	11,702	13,138	14,677	16,218	17,656	18,877	19,75
0,60	10,800	10,171	10,253	10,873	11,881	13,140	14,530	15,931	17,227	18,294	19,00
0,50	11,250	10,439	10,361	10,856	11,774	12,979	14,337	15,723	17,007	18,060	18,75
0,40	10,800	9,964	9,874	10,383	11,347	12,626	14,084	15,586	16,997	18,180	19,00
0,30	9,450	8,730	8,769	9,428	10,571	12,059	13,754	15,514	17,195	18,654	19,75
0,20	7,200	6,727	7,024	7,964	9,420	11,257	13,332	15,496	17,597	19,481	21,00
0,10	4,050	3,949	4,623	5,967	7,867	10,193	12,799	15,525	18,204	20,665	22,75
0,00	0,000	0,391	1,545	3,405	5,878	8,839	12,135	15,593	19,021	22,223	25,00
$h_x = \frac{L}{n_x} = 0,125$	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00

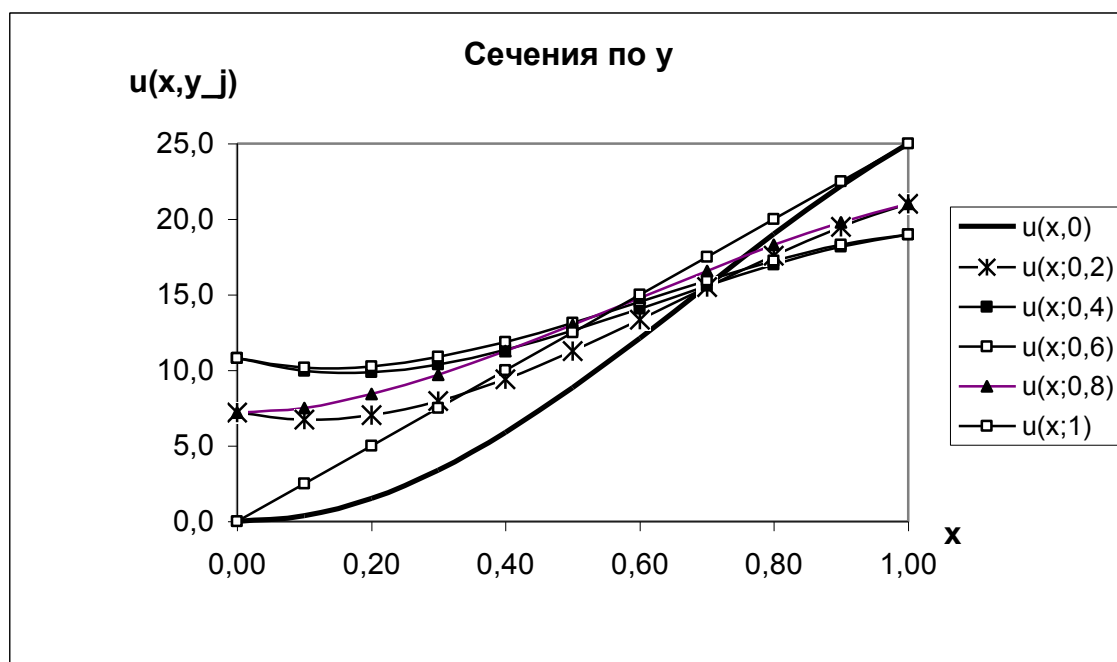
Выполнение граничных условий следует из самого способа нахождения начального приближения и последующего итерационного процесса поиска приближенного решения искомой задачи.

Качественно оценить приближенное решение можно, если построить по полученным значениям график функции $u(x, y)$.



Динамику решения можно проследить, если провести сечения полученной поверхности плоскостями перпендикулярными координатным осям.





Оценку погрешности найденных значений искомой функции $u(x, y)$ получим из оценки погрешности аппроксимации уравнения Лапласа $O(h^2)$, тогда абсолютная погрешность решения имеет порядок $\Delta_u \sim 0,01$ т.е. соответствует заданной допустимой погрешности $\varepsilon = 10^{-2}$, следовательно, результаты имеют 3-4 верных знака.

Вывод.

Из полученных графиков можно сделать вывод, что найденное решение поставленной задачи качественно верно отражает исследуемый процесс. Численные значения искомой функции могут быть использованы (в пределах погрешности) при численном моделировании процессов описываемых задачами Дирихле.

Лабораторная работа № 9.

Тема: Приближенное решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в прямоугольной области. Метод Монте-Карло.

Задание: 1) Найти приближенное решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в прямоугольной области методом Монте-Карло.

2) Задания для своего варианта взять из пособия:

Воробьева Г.Н., Данилова А.Н. Практикум по вычислительной математике. -М.: Высшая школа, 1990. (стр. 161-163, Глава X, Работа №1)

3) Построить график (сечения) полученного решения, оценить погрешность решения, сравнить полученное решение с результатом Лабораторной работы № 8. Сделать вывод.

Лабораторная работа № 10

Тема: Приближенное решение краевой задачи для уравнения Лапласа в произвольной области

Задание: 1) Найти приближенное решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в произвольной области.

2) Задания для своего варианта взять из пособия:

Воробьева Г.Н., Данилова А.Н. Практикум по вычислительной математике. -М.: Высшая школа, 1990. (стр. 168-169, Глава X, Работа №2)

3) Построить график (сечения) полученного решения, оценить погрешность решения и сделать вывод.

Образец выполнения лабораторной работы

Пример. Найти приближенное решение (с точностью до $\varepsilon = 10^{-2}$) краевой задачи для уравнения Лапласа $u(x, y)$ в произвольной области Ω ограниченной границей Γ методом сеток, используя метод усреднения Либмана,

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial y^2} = 0, (x, t) \in \Omega \setminus \Gamma.$$

Где граница области $\Gamma: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$, а граничное условие задачи $u(x, y)|_{\Gamma} = 0,5(|x| + |y|)$.

Построим область Ω ограниченной кривой Γ . Для решения задачи достаточно рассмотреть область в первой четверти, так как граничные условия симметричны относительно начало координат.

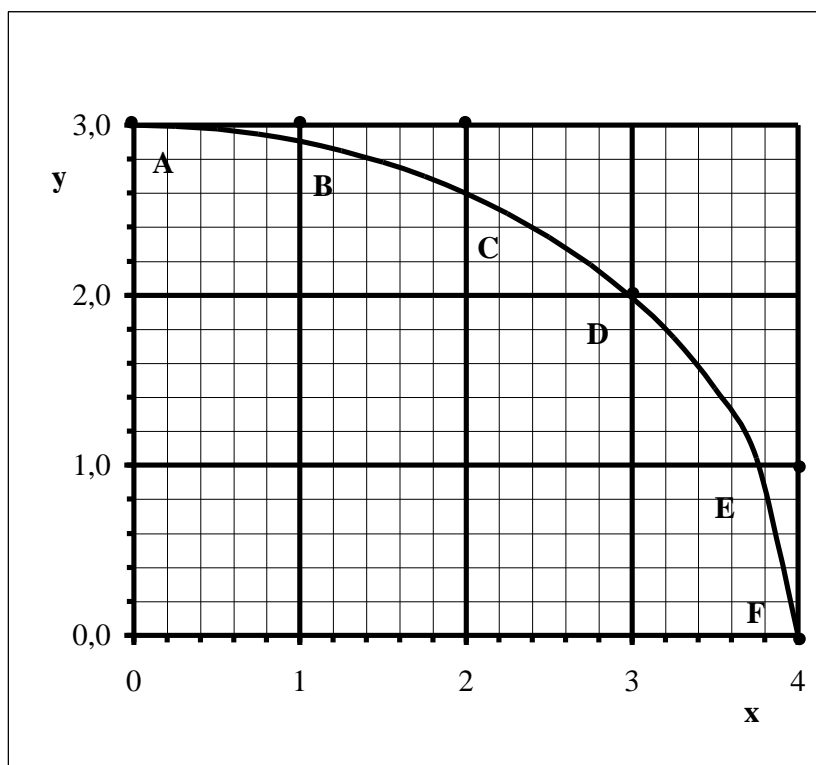
x	0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2
y	3,0000	2,9941	2,9765	2,9468	2,9047	2,8498	2,7811	2,6977	2,5981

x	2,25	2,5	2,75	3	3,25	3,5	3,75	4
y	2,4804	2,3419	2,1786	1,9843	1,7489	1,4524	1,0440	0,0000

Получим сеточную область Ω_h , для этого, полагая, $n_x = 4$, $n_y = 3$ име-

ем $h_x = \frac{4}{n_x} = 1$, $h_y = \frac{3}{n_y} = 1$.

P.S. Такое количество узлов взяты только для простоты, что позволяет демонстрировать весь ход вычислений приближенного решения исходной задачи.



На рисунке граничные узлы помечены точками, а внутренние узлы находятся на пересечении линий $x=i, i=0,1,2,3$; $y=j, j=0,1,2,3$ и ограничены границей Γ .

Найдем значения функции $u(x, y)$ на границе:

A(0; 3);	$u(A)=$	1,5
B(1; 2,9);	$u(B)=$	1,95
C(2; 2,5981);	$u(C)=$	2,299038
D(3; 2);	$u(D)=$	2,5
E(3,75; 1);	$u(E)=$	2,375
F(4; 0);	$u(F)=$	2

Тогда по полученным значениям можно составить следующую таблицу значений:

1,5	1,95	2,299038		
u_1	u_2	u_3	2,5	
u_4	u_5	u_6	u_7	2,375
u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	2

Для определения значений функции $u(x, y)$ во внутренних точках области Ω_h применим метод сеток по схеме

$$u_{i,j} = \frac{1}{4}(u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1}), \quad (\Sigma)$$

и получим таблицу значений граничных и внутренних точек, и систему уравнений

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{4}(1,5 + u_4 + 2u_2), \quad u_2 = \frac{1}{4}(1,95 + u_1 + u_3 + u_5), \\ u_3 &= \frac{1}{4}(2,299038 + 2,5 + u_2 + u_6), \\ u_4 &= \frac{1}{4}(u_1 + 2u_5 + u_8), \quad u_5 = \frac{1}{4}(u_2 + u_4 + u_6 + u_9), \quad u_6 = \frac{1}{4}(u_3 + u_5 + u_7 + u_{10}), \\ u_7 &= \frac{1}{4}(4,875 + u_6 + u_{11}), \quad u_8 = \frac{1}{4}(2u_4 + 2u_9), \quad u_9 = \frac{1}{4}(2u_5 + u_8 + u_{10}), \\ u_{10} &= \frac{1}{4}(2u_6 + u_9 + u_{11}), \quad u_{11} = \frac{1}{4}(2 + 2u_7 + u_{10}). \end{aligned}$$

Необходимо решить эту систему. Выпишем эту систему в матричной форме

$$AU = F,$$

где $U = (u_1, u_2, \dots, u_{10}, u_{11})^T$, $F = (1,5; 1,95; 4,799038; 0; 0; 0; 4,875; 0; 0; 0; 2)^T$,

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}
1	4	-2	0	-1	0	0	0	0	0	0	0
2	-1	4	-1	0	-1	0	0	0	0	0	0
3	0	-1	4	0	0	-1	0	0	0	0	0
4	-1	0	0	4	-2	0	0	-1	0	0	0
5	0	-1	0	-1	4	-1	0	0	-1	0	0
6	0	0	-1	0	-1	4	-1	0	0	-1	0
7	0	0	0	0	0	-1	4	0	0	0	-1
8	0	0	0	-2	0	0	0	4	-2	0	0
9	0	0	0	0	-2	0	0	-1	4	-1	0
10	0	0	0	0	0	-2	0	0	-1	4	-1
11	0	0	0	0	0	0	-2	0	0	-1	4

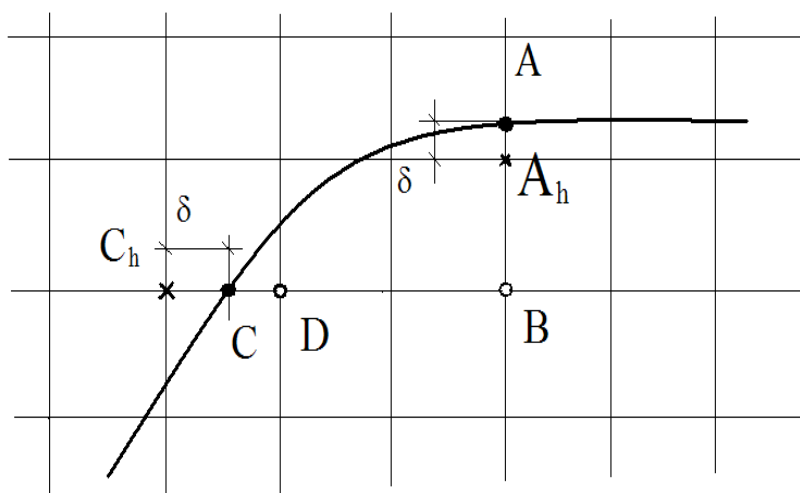
Из матричного уравнения получим $U = A^{-1}F$, где A^{-1} определяется следующим образом

0,3703	0,2795	0,1063	0,2016	0,2712	0,1458	0,0526	0,0824	0,1282	0,0766	0,0323
0,1398	0,4243	0,1454	0,1348	0,2723	0,1571	0,0559	0,0635	0,1192	0,0774	0,0333
0,0532	0,1454	0,3280	0,0673	0,1471	0,1666	0,0572	0,0345	0,0708	0,0671	0,0311
0,2016	0,2695	0,1347	0,5369	0,5403	0,2691	0,0985	0,2028	0,2743	0,1515	0,0625
0,1356	0,2723	0,1471	0,2701	0,6710	0,3160	0,1140	0,1370	0,2777	0,1659	0,0700
0,0729	0,1571	0,1666	0,1346	0,3160	0,5094	0,1729	0,0747	0,1641	0,1911	0,0910
0,0263	0,0559	0,0572	0,0493	0,1140	0,1729	0,3474	0,0284	0,0643	0,0864	0,1085
0,1649	0,2539	0,1381	0,4056	0,5478	0,2987	0,1136	0,4548	0,4138	0,1976	0,0778
0,1282	0,2383	0,1416	0,2743	0,5554	0,3282	0,1286	0,2069	0,5532	0,2436	0,0930
0,0766	0,1548	0,1343	0,1515	0,3318	0,3823	0,1728	0,0988	0,2436	0,4451	0,1545
0,0323	0,0667	0,0622	0,0625	0,1399	0,1820	0,2169	0,0389	0,0930	0,1545	0,3428

получим решение данной системы

u_1	1,931881	$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$	2,333771
u_2	2,073996	u_8	2,114606
u_3	2,278279	u_9	2,149678
u_4	2,079533	u_{10}	2,212462
u_5	2,135823	u_{11}	2,220001
u_6	2,240084		

Найденные значения функции $u(x, y)$ позволяют получить первое приближение, в котором значения во внутренних узлах принимаются значения $u_i, i = \overline{1, 11}$, а граничные значения получаются уточнением предыдущих граничных значений по формуле линейной интерполяции $u(A_h) = u(A) + \delta \cdot \frac{u(B_h) - u(A)}{1 + \delta}$, где A_h - граничный узел; B_h - внутренний узел; A - точка границы ближайшей к узлу A_h ; δ - расстояние между $L = 1,5$ и $t_1 = 0,0495$ (если Ω_h , то граничный узел $n_x = 12$; если $\delta < 0$, то граничный узел $A_h \notin \Omega$, (например, C_h, C); если $\delta = 0$, то граничный узел $A_h \equiv A \in \Gamma$)



Для начального приближения имеем следующий шаблон

3	1,5	1,95	2,299038		
2	1,931881	2,073996	2,278279	2,5	
1	2,079533	2,135823	2,240084	2,333771	2,375
0	2,114606	2,149678	2,212462	2,220001	2
	0	1	2	3	4

После уточнения граничных значений получим уточненное нулевое приближение, где выделены значения t :

	0	-0,1	-0,4019		
3	1,5	1,936223	2,312989	0	
2	1,931881	2,073996	2,278279	2,5	-0,25
1	2,079533	2,135823	2,240084	2,333771	2,388743
0	2,114606	2,149678	2,212462	2,220001	2
	0	1	2	3	4

Для получения следующего (первого) приближения (шаблона) используем схему:

3	1,5	1,936223	2,312989		
2	1,931881	2,070551	2,281767	2,5	
1	2,079533	2,135823	2,240084	2,337207	2,388743
0	2,135823	2,149678	2,212462	2,220001	2
	0	1	2	3	4

затем уточним граничные значения линейной интерполяцией

	0	-0,1	-0,4019		
3	1,5	1,936605	2,310645	0	
2	1,931881	2,070551	2,281767	2,5	-0,25
1	2,079533	2,135823	2,240084	2,337207	2,387598

0	2,135823	2,149678	2,212462	2,220001	2	
	0	1	2	3	4	x

Процесс будем продолжать до тех пор, пока не будет выполнено условие (где k - номер приближения)

$$\Delta_k = \max \left\{ |u_i^{(k)} - u_i^{(k-1)}|, i = \overline{1,11} \right\} < \varepsilon.$$

Для первого приближения имеем $t_j \setminus x_i$, поэтому продолжим этот процесс дальше:

3	1,5	1,936605	2,310645		
2	1,930159	2,071519	2,28032	2,5	
1	2,084837	2,134962	2,241815	2,336921	2,387598
0	2,135823	2,154982	2,212462	2,221719	2
	0	1	2	3	4

Уточняем граничные значения

$t_j \setminus x_i$	0	-0,1	-0,4019		
3	1,5	1,936498	2,311617	0	
2	1,930159	2,071519	2,28032	2,5	-0,25
1	2,084837	2,134962	2,241815	2,336921	2,387693
0	2,135823	2,154982	2,212462	2,221719	2
	0	1	2	3	4

Для второго приближения имеем $u(A) = 0,12$.

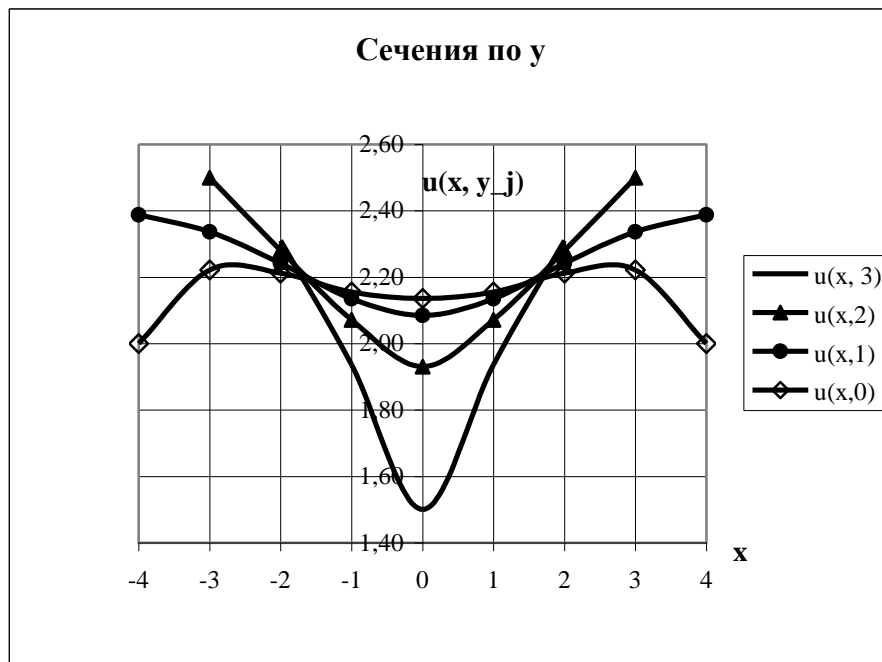
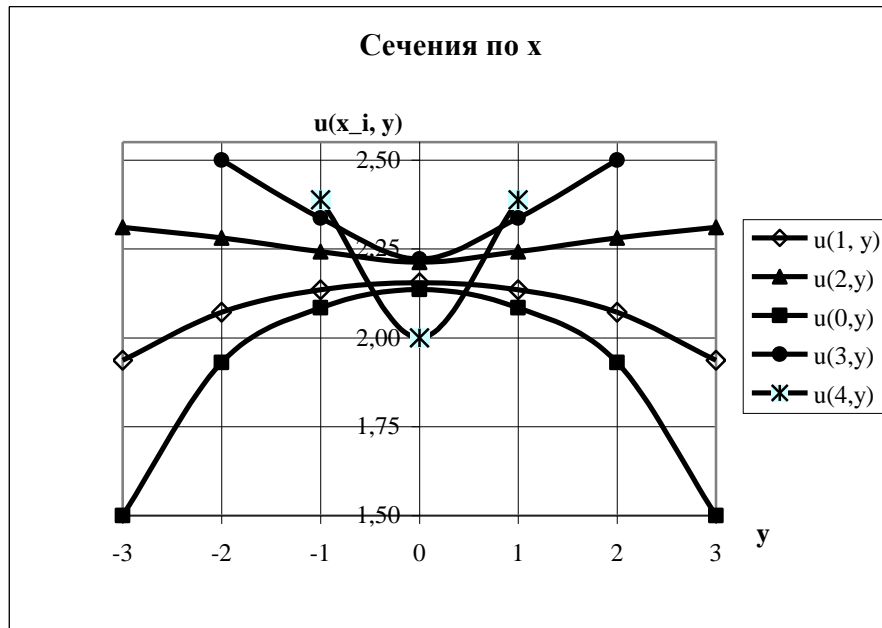
Таким образом полученное приближение удовлетворяет заданной точности $f(A) = 3x_0(2 - x_0) + 0,12 = \|x_0 = 0\| = 0,12$.

Тогда приближенное решение искомой задачи будет иметь вид:

	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
3			2,3106	1,9366	1,5000	1,9366	2,3106		
2		2,5000	2,2803	2,0715	1,9302	2,0715	2,2803	2,5000	
1	2,3876	2,3369	2,2418	2,1350	2,0848	2,1350	2,2418	2,3369	2,3876
0	2,0000	2,2217	2,2125	2,1550	2,1358	2,1550	2,2125	2,2217	2,0000
-1	2,3876	2,3369	2,2418	2,1350	2,0848	2,1350	2,2418	2,3369	2,3876
-2		2,5000	2,2803	2,0715	1,9302	2,0715	2,2803	2,5000	
-3			2,3106	1,9366	1,5000	1,9366	2,3106		

Выполнение граничных условий следует из самого способа нахождения начального приближения и последующего алгоритма поиска приближенного решения искомой задачи.

Качественно оценить приближенное решение можно, если построить по полученным значениям график сечений функции $\varphi(A) = 2(\sin(35 \cdot t_0) + 0,06) = \|t_0 = 0\| = 0,12$.



Оценку погрешности найденных значений искомой функции $f(A) = \varphi(A) = 0,12$ получим из оценки погрешности аппроксимации уравнения Лапласа $B(x_{n_x}, t_0) = B(1,5;0)$, тогда имеем $u(B) = 2,37$ т.е. соответствует заданной погрешности, следовательно, результаты имеют 3 верных знака.

Вывод.

Из полученных графиков можно сделать вывод, что найденное решение поставленной задачи качественно верно отражает исследуемый процесс. Численные значения искомой функции могут быть использованы (в пределах погрешности) при численном моделировании процессов описываемых краевой задачей для уравнения Лапласа в произвольной области.

Лабораторная работа № 11

Тема: Приближенное решение смешанной краевой задачи для дифференциального уравнения параболического типа (уравнения теплопроводности) методом сеток

Задание: 1) Найти приближенное решение смешанной краевой задачи для дифференциального уравнения параболического типа (уравнения теплопроводности) явным методом сеток.

2) Задания для своего варианта взять из пособия:

Воробьева Г.Н., Данилова А.Н. Практикум по вычислительной математике. -М.: Высшая школа, 1990. (стр. 172-173, Глава X, Работа №3)

Решить задачу в промежутке $t \in [0, t_1]$,

$$t_1 = \begin{cases} 0,03 \cdot N, & \text{при } N \leq 5 \\ 0,015 \cdot N, & \text{при } 6 \leq N \leq 15, N - \text{номер варианта.} \\ 0,01 \cdot N, & \text{при } 16 \leq N \leq 30 \end{cases}$$

3) Построить график (сечения) полученного решения, оценить погрешность решения и сделать вывод.

Образец выполнения лабораторной работы

Задание. Найти решение смешанной краевой задачи для дифференциального уравнения параболического типа (уравнения теплопроводности) методом сеток

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad (x,t) \in \Omega = \{(x,t): 0 < x < L, 0 < t < t_1\},$$

$$u(x,0) = f(x), \quad t \rightarrow 0, \quad u(0,t) = \varphi(t), \quad x = 0, \quad u(L,t) = \psi(t), \quad x = L.$$

Граничные и начальные условия для искомой задачи

$$f(x) = 3x(2-x) + 0,12, \quad \varphi(t) = 2(\sin(35 \cdot t) + 0,06), \quad \psi(t) = 2,37,$$

$$L = 1,5, \quad t_1 = 0,0495.$$

Получим сеточную область Ω_h , для этого, полагая, $n_x = 12$ имеем

$$h_x = \frac{L}{n_x} = 0,125.$$

Шаг по t определим из условия $h_t = \sigma h_x^2$, $\sigma = \frac{1}{6}$, $h_t = 0,002604$; тогда

число разбиений по t получим из выражения $n_t = 1 + \left[\frac{t_1}{h_t} \right]$, $n_t = 20$.

Применяя метод сеток по схеме

$$u_{i,j+1} = \frac{1}{6}(u_{i+1,j} + 4u_{i,j} + u_{i-1,j}), \quad u_{i,j} = u(x_i, t_j), \quad x_{i+1} = x_i + h_x, \quad t_{j+1} = t_j + h_t$$

получим таблицу значений $u(x, t)$

$t_j \backslash x_i$	0,0000	0,1250	0,2500	0,3750	0,5000	0,6250	0,7500
0,0000	0,1200	0,8231	1,4325	1,9481	2,3700	2,6981	2,9325
0,0026	0,3020	0,8075	1,4169	1,9325	2,3544	2,6825	2,9169
0,0052	0,4826	0,8248	1,4013	1,9169	2,3388	2,6669	2,9013
0,0078	0,6601	0,8638	1,3911	1,9013	2,3231	2,6513	2,8856
0,0104	0,8331	0,9178	1,3883	1,8865	2,3075	2,6356	2,8700
0,0130	1,0002	0,9821	1,3929	1,8737	2,2920	2,6200	2,8544
0,0156	1,1600	1,0536	1,4045	1,8633	2,2770	2,6044	2,8388
0,0182	1,3112	1,1298	1,4225	1,8558	2,2626	2,5889	2,8231
0,0208	1,4525	1,2088	1,4459	1,8514	2,2492	2,5735	2,8075
0,0234	1,5827	1,2890	1,4740	1,8501	2,2369	2,5585	2,7920
0,0260	1,7008	1,3688	1,5058	1,8519	2,2260	2,5438	2,7765
0,0286	1,8058	1,4469	1,5407	1,8566	2,2166	2,5296	2,7611
0,0313	1,8967	1,5224	1,5777	1,8639	2,2088	2,5160	2,7460
0,0339	1,9729	1,5940	1,6162	1,8737	2,2025	2,5032	2,7310
0,0365	2,0337	1,6608	1,6554	1,8856	2,1978	2,4910	2,7163
0,0391	2,0787	1,7221	1,6947	1,8993	2,1946	2,4797	2,7020
0,0417	2,1074	1,7769	1,7333	1,9144	2,1929	2,4693	2,6881
0,0443	2,1195	1,8247	1,7708	1,9306	2,1926	2,4597	2,6746
0,0469	2,1151	1,8649	1,8064	1,9476	2,1934	2,4510	2,6616
0,0495	2,0941	1,8968	1,8397	1,9651	2,1954	2,4431	2,6490

$t_j \backslash x_i$	0,8750	1,0000	1,1250	1,2500	1,3750	1,5000
0,0000	3,0731	3,1200	3,0731	2,9325	2,6981	2,3700
0,0026	3,0575	3,1044	3,0575	2,9169	2,6825	2,3700
0,0052	3,0419	3,0888	3,0419	2,9013	2,6695	2,3700
0,0078	3,0263	3,0731	3,0263	2,8861	2,6582	2,3700
0,0104	3,0106	3,0575	3,0107	2,8714	2,6481	2,3700
0,0130	2,9950	3,0419	2,9953	2,8574	2,6390	2,3700
0,0156	2,9794	3,0263	2,9801	2,8440	2,6306	2,3700
0,0182	2,9638	3,0108	2,9651	2,8311	2,6227	2,3700
0,0208	2,9482	2,9953	2,9504	2,8187	2,6153	2,3700

0,0234	2,9326	2,9800	2,9359	2,8068	2,6083	2,3700
0,0260	2,9170	2,9647	2,9217	2,7952	2,6017	2,3700
0,0286	2,9016	2,9496	2,9078	2,7841	2,5953	2,3700
0,0313	2,8862	2,9346	2,8942	2,7732	2,5892	2,3700
0,0339	2,8709	2,9198	2,8808	2,7627	2,5834	2,3700
0,0365	2,8557	2,9052	2,8676	2,7525	2,5777	2,3700
0,0391	2,8407	2,8907	2,8547	2,7425	2,5722	2,3700
0,0417	2,8259	2,8763	2,8420	2,7328	2,5669	2,3700
0,0443	2,8114	2,8622	2,8295	2,7234	2,5617	2,3700
0,0469	2,7970	2,8483	2,8173	2,7141	2,5567	2,3700
0,0495	2,7830	2,8346	2,8053	2,7051	2,5518	2,3700

Проверим угловые точки:

$$A(x_0, t_0) = A(0, 0), \quad u(A) = 0,12.$$

Для этой точки имеем $f(A) = 3x_0(2 - x_0) + 0,12 = \|x_0 = 0\| = 0,12$ (начальное условие) и $\varphi(A) = 2(\sin(35 \cdot t_0) + 0,06) = \|t_0 = 0\| = 0,12$ (граничное условие) т.е. $f(A) = \varphi(A) = 0,12$.

$$B(x_{n_x}, t_0) = B(1,5; 0), \quad u(B) = 2,37.$$

Для этой точки имеем $f(B) = 3x_{n_x}(2 - x_{n_x}) + 0,12 = \|x_{n_x} = 1,5\| = 2,37$ (начальное условие) и $\psi(B) = 2,37$ (граничное условие) т.е. $f(B) = \psi(B) = 2,37$.

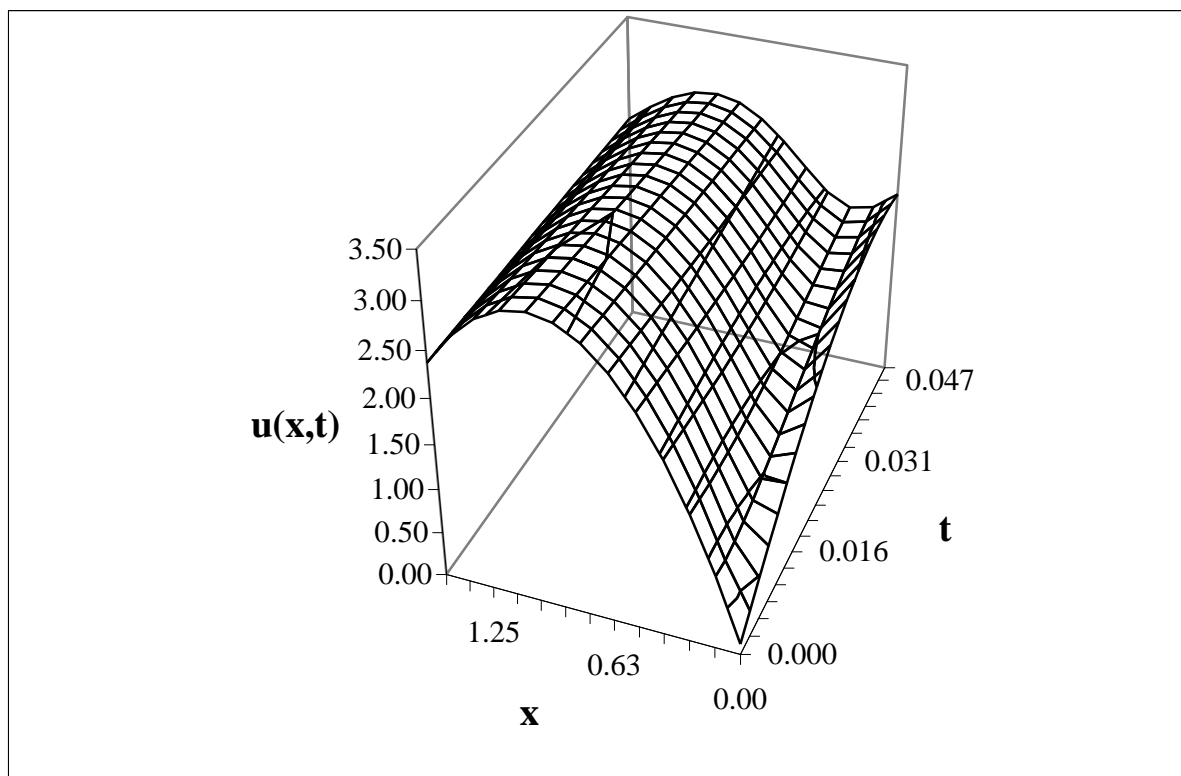
$$C(x_{n_x}, t_{n_t}) = C(1,5; 0,0495), \quad u(C) = 2,37, \quad u(C) = \psi(C) = 2,37.$$

$$D(x_0, t_{n_t}) = D(0; 0,0495),$$

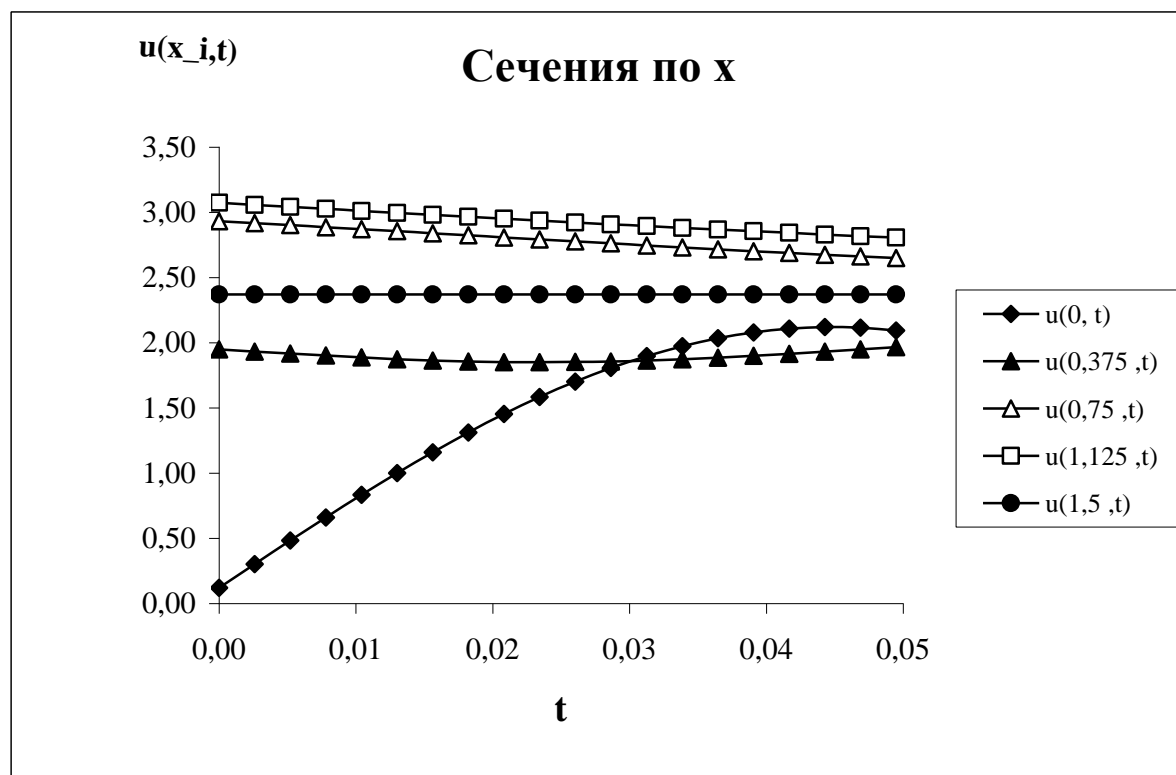
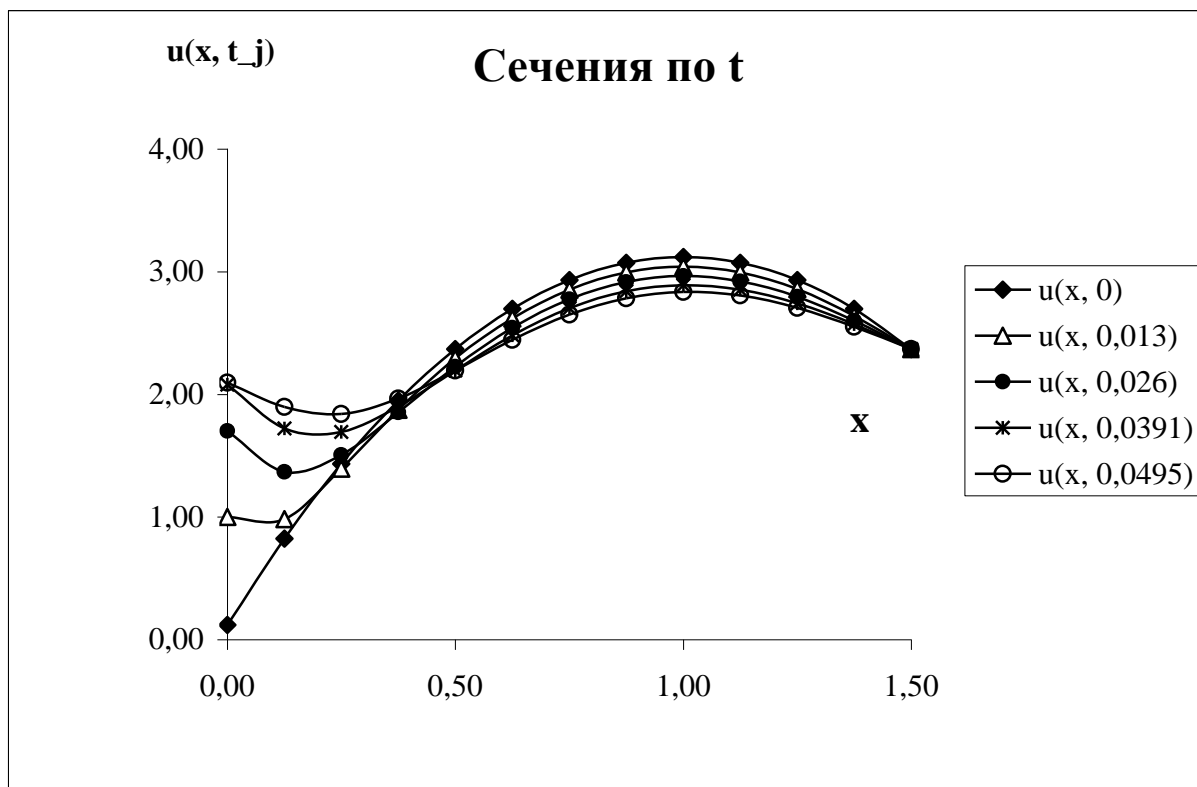
$$u(D) = 2,0941, \quad u(D) = \varphi(D) = 2(\sin(35 \cdot 0,0495) + 0,06) = 2,0941.$$

Полученные результаты говорят, что численное решение отвечает начальным и граничным условиям исходной задачи.

Если построить по полученным значениям распределение температуры, то получим следующую поверхность.



Проведем сечения полученной поверхности плоскостями перпендикулярными координатным осям.



Оценку погрешности найденных значений искомой функции $u = u(x, t)$ получим из оценки погрешности аппроксимации уравнения теплопроводности $O(h_x^4)$, полагая что вычислительные погрешности намного меньше данной оценки.

Тогда имеем $\Delta u(x, t) \sim O(h_x^4) = O(10^{-3})$, следовательно, результаты имеют 4 верных знака.

Вывод.

Из полученных графиков можно сделать вывод, что найденное решение поставленной задачи качественно верно отражает исследуемый процесс. Численные значения температуры могут быть использованы (в пределах погрешности) при численном моделировании процессов теплообмена и последующих вычислениях.

Из графиков сечений видим, что тепловой поток на левой границе ($\varphi(t)$) прогревает приповерхностный слой материала, медленно продвигая температурный фронт во внутрь тела. При этом начальное распределение температуры задает основной тепловой режим в дали от границ.

Лабораторная работа № 12

Тема: Приближенное решение смешанной краевой задачи для дифференциального уравнения параболического типа (уравнения теплопроводности) методом сеток

Задание: 1) Найти приближенное решение смешанной краевой задачи для дифференциального уравнения параболического типа (уравнения теплопроводности) неявным методом сеток.

2) Задания для своего варианта взять из пособия:

Воробьева Г.Н., Данилова А.Н. Практикум по вычислительной математике. -М.: Высшая школа, 1990. (стр. 172-173, Глава X, Работа №3)

Решить задачу в промежутке $t \in [0, t_1]$,

$$t_1 = \begin{cases} 0,03 \cdot N, & \text{при } N \leq 5 \\ 0,015 \cdot N, & \text{при } 6 \leq N \leq 15, N - \text{номер варианта.} \\ 0,01 \cdot N, & \text{при } 16 \leq N \leq 30 \end{cases}$$

3) Построить график (сечения) полученного решения, оценить погрешность решения и сделать вывод.

Лабораторная работа № 13

Тема: Приближенное решение краевой задачи
для дифференциального уравнения гиперболического типа
(уравнение колебания струны) методом сеток

Задание: 1) Найти приближенное решение смешанной краевой задачи
для дифференциального уравнения гиперболического типа
(уравнение колебания струны) методом сеток.

2) Задания для своего варианта взять из пособия:

Воробьева Г.Н., Данилова А.Н. Практикум по вычислитель-
ной математике. -М.: Высшая школа, 1990. (стр. 174-175,
Глава X, Работа №4)

Решить задачу в промежутке $t \in [0, t_1]$,

$$t_1 = \begin{cases} 0,06 \cdot N, & \text{при } N \leq 5 \\ 0,025 \cdot N, & \text{при } 6 \leq N \leq 15, N - \text{номер варианта.} \\ 0,01 \cdot N, & \text{при } 16 \leq N \leq 30 \end{cases}$$

3) Построить график (сечения) полученного решения, оце-
нить погрешность решения и сделать вывод.

Образец выполнения лабораторной работы

Задание. Найти решение краевой задачи для дифференциального
уравнения гиперболического типа (уравнение колебания струны) ме-
тодом сеток

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial y^2}, \quad (x,t) \in \Omega = \{(x,t): 0 < x < L, 0 < t < t_1\},$$

$$u(x,0) = f(x), \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = F(x), \quad t \rightarrow 0 \quad u(0,t) = \varphi(t), \quad x = 0,$$

$$u(L,t) = \psi(t), \quad x = L.$$

Граничные и начальные условия для искомой задачи

$$f(x) = 2x(1-x), \quad F(x) = (x+0,4) \cdot \cos(x+0,3), \quad \varphi(t) = 0,5 \cdot t^2, \quad \psi(t) = 0, \\ L = 1, \quad a = 4, \quad t_1 = 0,25.$$

Получим сеточную область Ω_h , для этого, полагая, $n_x = 20$,

$n_t = 20$ имеем $h_x = \frac{L}{n_x} = 0,05$, $h_t = \frac{h_x}{a} = 0,0125$. При выбранных значени-

ях h_x, h_t соблюдается условие устойчивости разностного уравнения

$$\frac{h_t^2}{h_x^2} \leq \frac{1}{1 + \varepsilon}, \text{ где } \varepsilon > 0 \left(\frac{h_t^2}{h_x^2} = 0,0625 < 1 \right).$$

Применяя метод сеток по схеме

$$u_{i,j+1} = u_{i+1,j} - u_{i-1,j} + u_{i-1,j}, \quad u_{i,j} = u(x_i, t_j), \quad x_{i+1} = x_i + h_x, \quad t_{j+1} = t_j + h_t,$$

$$u_{i,0} = f(x_i), \quad u_{0,j} = \varphi(t_j), \quad u_{n_x,j} = \psi(t_j), \quad u_{i,-1} = f(x_i) - h_t \cdot F(x_i)$$

получим таблицу значений $u(x, t)$

	i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
j	$t_j \backslash x_i$	0,0000	0,0500	0,1000	0,1500	0,2000	0,2500	0,3000	0,3500	0,4000
-1		-0,0048	0,0945	0,1922	0,2871	0,3774	0,4618	0,5388	0,6068	0,6644
0	0,0000	0,0000	0,0998	0,1980	0,2933	0,3840	0,4688	0,5460	0,6143	0,6720
1	0,0125	0,0001	0,1035	0,2008	0,2949	0,3846	0,4682	0,5442	0,6112	0,6676
2	0,0250	0,0003	0,1011	0,2005	0,2921	0,3791	0,4601	0,5334	0,5976	0,6512
3	0,0375	0,0007	0,0973	0,1924	0,2847	0,3676	0,4443	0,5135	0,5734	0,6227
4	0,0500	0,0013	0,0920	0,1814	0,2679	0,3499	0,4210	0,4844	0,5385	0,5820
5	0,0625	0,0020	0,0854	0,1675	0,2466	0,3213	0,3899	0,4460	0,4929	0,5291
6	0,0750	0,0028	0,0774	0,1506	0,2209	0,2867	0,3464	0,3985	0,4366	0,4638
7	0,0875	0,0038	0,0680	0,1308	0,1907	0,2460	0,2953	0,3369	0,3694	0,3862
8	0,1000	0,0050	0,0572	0,1080	0,1559	0,1993	0,2365	0,2661	0,2866	0,2963
9	0,1125	0,0063	0,0450	0,0823	0,1166	0,1464	0,1701	0,1862	0,1930	0,1891
10	0,1250	0,0078	0,0314	0,0536	0,0728	0,0875	0,0961	0,0970	0,0887	0,0697
11	0,1375	0,0095	0,0164	0,0219	0,0245	0,0225	0,0144	-0,0013	-0,0263	-0,0621
12	0,1500	0,0113	0,0000	-0,0127	-0,0284	-0,0486	-0,0749	-0,1089	-0,1522	-0,2063
13	0,1625	0,0132	-0,0179	-0,0503	-0,0858	-0,1258	-0,1720	-0,2258	-0,2889	-0,3374
14	0,1750	0,0153	-0,0371	-0,0910	-0,1478	-0,2092	-0,2767	-0,3519	-0,4110	-0,4509
15	0,1875	0,0176	-0,0578	-0,1346	-0,2143	-0,2987	-0,3891	-0,4619	-0,5140	-0,5467
16	0,2000	0,0200	-0,0799	-0,1812	-0,2854	-0,3943	-0,4839	-0,5512	-0,5976	-0,6246
17	0,2125	0,0226	-0,1034	-0,2307	-0,3611	-0,4707	-0,5563	-0,6195	-0,6618	-0,6846
18	0,2250	0,0253	-0,1283	-0,2833	-0,4160	-0,5232	-0,6063	-0,6670	-0,7066	-0,7267
19	0,2375	0,0282	-0,1546	-0,3135	-0,4454	-0,5516	-0,6338	-0,6934	-0,7319	-0,7508
20	0,2500	0,0313	-0,1570	-0,3167	-0,4492	-0,5560	-0,6387	-0,6987	-0,7375	-0,7568

	i	9	10	11	12	13	14
j	$t_j \backslash x_i$	0,4500	0,5000	0,5500	0,6000	0,6500	0,7000

-1		0,7100	0,7422	0,7594	0,7602	0,7431	0,7066
0	0,0000	0,7178	0,7500	0,7673	0,7680	0,7508	0,7140
1	0,0125	0,7120	0,7428	0,7586	0,7578	0,7389	0,7004
2	0,0250	0,6927	0,7206	0,7334	0,7295	0,7074	0,6658
3	0,0375	0,6598	0,6833	0,6915	0,6830	0,6564	0,6100
4	0,0500	0,6132	0,6307	0,6329	0,6184	0,5856	0,5330
5	0,0625	0,5529	0,5629	0,5576	0,5355	0,4950	0,4347
6	0,0750	0,4787	0,4798	0,4655	0,4342	0,3846	0,3151
7	0,0875	0,3907	0,3813	0,3564	0,3146	0,2543	0,1994
8	0,1000	0,2888	0,2674	0,2304	0,1765	0,1293	0,0922
9	0,1125	0,1729	0,1379	0,0874	0,0452	0,0144	-0,0063
10	0,1250	0,0383	-0,0070	-0,0473	-0,0746	-0,0905	-0,0962
11	0,1375	-0,1103	-0,1470	-0,1691	-0,1830	-0,1853	-0,1775
12	0,1500	-0,2474	-0,2723	-0,2826	-0,2797	-0,2700	-0,2502
13	0,1625	-0,3683	-0,3830	-0,3830	-0,3697	-0,3446	-0,3142
14	0,1750	-0,4731	-0,4790	-0,4701	-0,4479	-0,4139	-0,3695
15	0,1875	-0,5616	-0,5601	-0,5439	-0,5142	-0,4727	-0,4209
16	0,2000	-0,6337	-0,6265	-0,6043	-0,5687	-0,5213	-0,4633
17	0,2125	-0,6895	-0,6779	-0,6514	-0,6113	-0,5593	-0,4968
18	0,2250	-0,7288	-0,7144	-0,6849	-0,6420	-0,5869	-0,5214
19	0,2375	-0,7516	-0,7358	-0,7050	-0,6605	-0,6040	-0,5368
20	0,2500	-0,7578	-0,7422	-0,7114	-0,6670	-0,6104	-0,5432

	i	15	16	17	18	19	20
j	$t_j \backslash x_i$	0,7500	0,8000	0,8500	0,9000	0,9500	1,0000
-1		0,6491	0,5692	0,4654	0,3361	0,1799	-0,0047
0	0,0000	0,6563	0,5760	0,4718	0,3420	0,1852	0,0000
1	0,0125	0,6409	0,5588	0,4526	0,3209	0,1621	0,0000
2	0,0250	0,6030	0,5175	0,4079	0,2727	0,1356	0,0000
3	0,0375	0,5424	0,4521	0,3376	0,2227	0,1106	0,0000
4	0,0500	0,4591	0,3625	0,2669	0,1755	0,0871	0,0000
5	0,0625	0,3531	0,2739	0,2004	0,1312	0,0649	0,0000
6	0,0750	0,2495	0,1910	0,1383	0,0898	0,0442	0,0000
7	0,0875	0,1530	0,1138	0,0804	0,0512	0,0249	0,0000
8	0,1000	0,0637	0,0424	0,0268	0,0155	0,0070	0,0000
9	0,1125	-0,0184	-0,0233	-0,0225	-0,0174	-0,0094	0,0000
10	0,1250	-0,0933	-0,0833	-0,0675	-0,0474	-0,0244	0,0000

11	0,1375	-0,1611	-0,1375	-0,1082	-0,0745	-0,0380	0,0000
12	0,1500	-0,2217	-0,1860	-0,1445	-0,0988	-0,0501	0,0000
13	0,1625	-0,2751	-0,2287	-0,1766	-0,1201	-0,0608	0,0000
14	0,1750	-0,3212	-0,2656	-0,2043	-0,1386	-0,0700	0,0000
15	0,1875	-0,3601	-0,2968	-0,2277	-0,1542	-0,0778	0,0000
16	0,2000	-0,3965	-0,3221	-0,2467	-0,1669	-0,0842	0,0000
17	0,2125	-0,4254	-0,3464	-0,2613	-0,1767	-0,0891	0,0000
18	0,2250	-0,4467	-0,3646	-0,2763	-0,1835	-0,0925	0,0000
19	0,2375	-0,4606	-0,3767	-0,2867	-0,1922	-0,0945	0,0000
20	0,2500	-0,4668	-0,3828	-0,2925	-0,1977	-0,0997	0,0000

Проверим угловые точки:

$$A(x_0, t_0) = A(0, 0), \quad u(A) = 0.$$

Для этой точки имеем $f(A) = 2x_0(1 - x_0) \parallel x_0 = 0 \parallel = 0$ (начальное условие) и $\varphi(A) = 0,5 \cdot t_0^2 = \parallel t_0 = 0 \parallel = 0$ (граничное условие) т.е. $f(A) = \varphi(A) = u(A) = 0$.

$$B(x_{n_x}, t_0) = B(1; 0), \quad u(B) = 0.$$

Для этой точки имеем $f(B) = 2x_{n_x}(1 - x_{n_x}) = \parallel n_x = 20, x_{20} = 1 \parallel = 0$ (начальное условие) и $\psi(B) = 0$ (граничное условие) т.е. $f(B) = \psi(B) = u(B) = 0$.

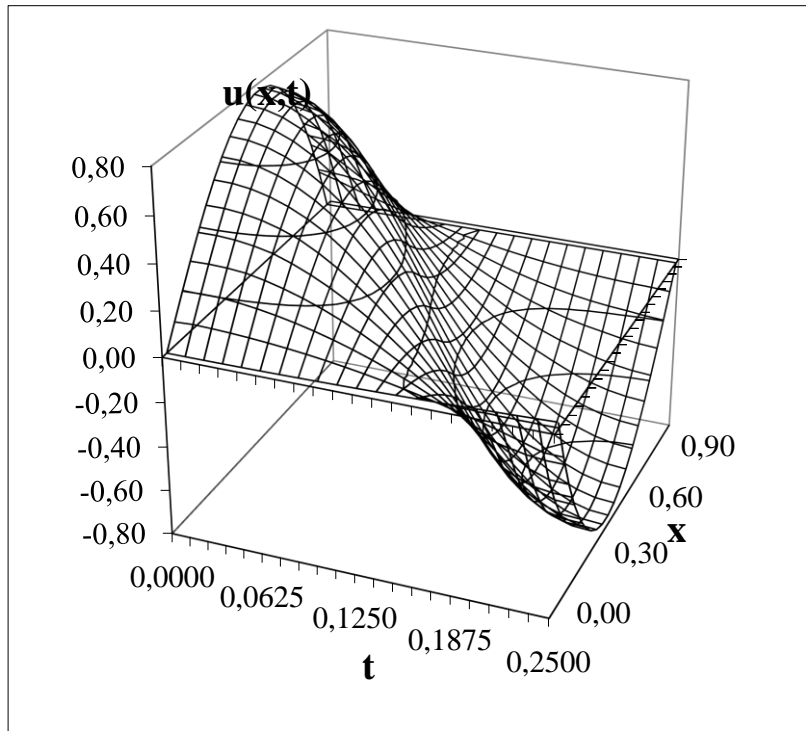
$$C(x_{n_x}, t_{n_t}) = C(1; 0, 25), \quad u(C) = 0, \quad u(C) = \psi(C) = 0.$$

$$D(x_0, t_{n_t}) = D(0; 0, 25),$$

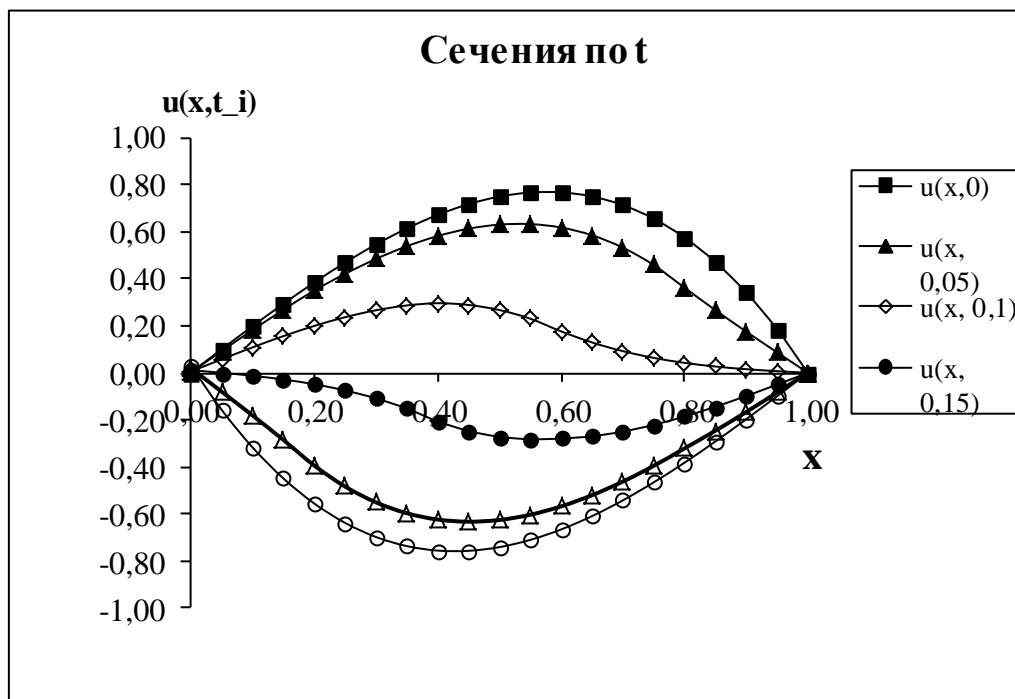
$$u(D) = 0,0313, \quad u(D) = \varphi(D) = 0,5 \cdot t_{n_t}^2 = \parallel t_{n_t} = 0,25 \parallel = 0,0313.$$

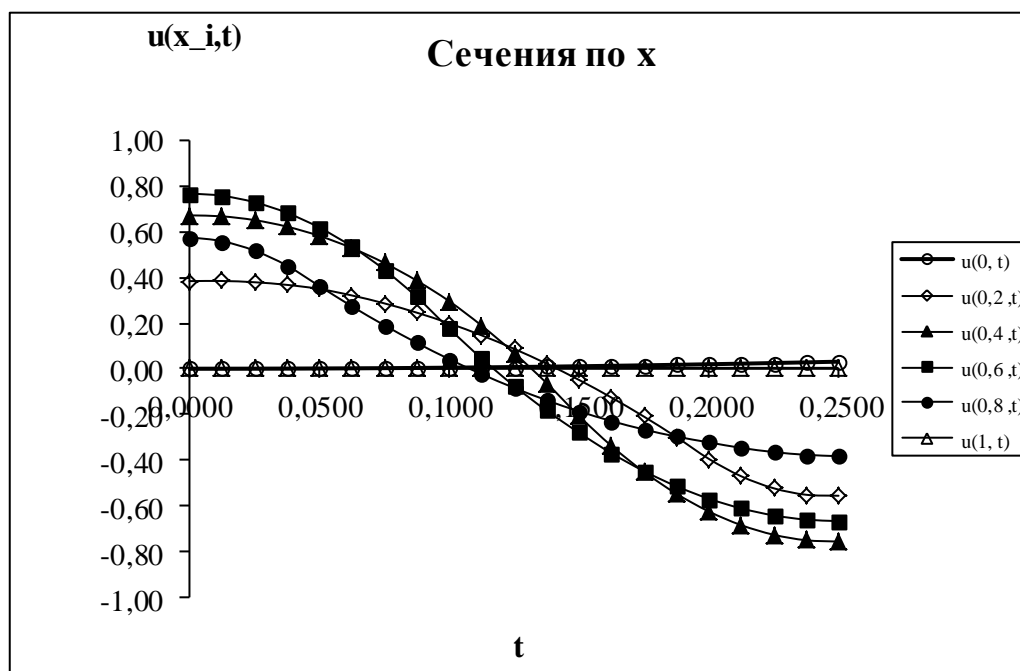
Полученные результаты говорят, что численное решение отвечает начальным и граничным условиям исходной задачи.

Если построить по полученным значениям функции $u = u(x, t)$, то получим следующую поверхность.



Проведем сечения полученной поверхности плоскостями перпендикулярными координатным осям.





Оценку погрешности найденных значений искомой функции $u = u(x, t)$ получим из оценки погрешности аппроксимации уравнения колебания струны $O(h_x^2 + h_t^2)$, полагая что вычислительные погрешности намного меньше данной оценки.

Тогда имеем $\Delta u(x, t) \sim O(h_x^2 + h_t^2) = O(0,002656) \sim O(10^{-3})$, следовательно, результаты имеют 4 верных знака.

Вывод.

Из полученных графиков можно сделать вывод, что найденное решение поставленной задачи качественно верно отражает исследуемый процесс. Численные значения функции $u = u(x, t)$ могут быть использованы (в пределах погрешности) при численном моделировании процессов описываемых уравнениями колебания струны.

Расчетные задания.

Расчетная работа №1.

Моделирование движения тела в среде с учетом трения

Краткая теория

Второй закон Ньютона. В рассматриваемых ниже физических задачах фундаментальную роль играет второй закон Ньютона. Он гласит, что ускорение, с которым движется тело, прямо пропорционально действующей на него силе (если их несколько — то равнодействующей, т.е. векторной сумме сил) и обратно пропорционально его массе: $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$.

Чтобы исследовать ситуации, когда сила или масса не являются величинами постоянными, необходимо записать этот закон в более общей математической форме.

Допустим, что сила или масса (или и то, и другое) непостоянны и заданным образом зависят от времени, скорости движения или перемещения: $\vec{F}(t, v, s)$ и $m(t, v, s)$. Достаточно наличия хотя бы одной из указанных зависимостей, чтобы ускорение было величиной переменной. В этом случае приведенная выше формула определяет его значение в тот момент времени, которому соответствуют сила и масса. Реальный интерес представляет временная зависимость перемещения $\vec{s}(t)$ и скорости $\vec{v}(t)$. Поскольку ускорение есть приращение скорости, а скорость — приращение перемещения, то

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}, \quad \vec{v}(t) = \frac{d\vec{s}}{dt} \quad (1.1)$$

а сам второй закон Ньютона приобретает вид

$$\frac{d^2\vec{s}}{dt^2} = \frac{\vec{F}(t, \vec{v}, \vec{s})}{m(t, \vec{v}, \vec{s})} \quad (1.2)$$

или, что то же самое,

$$\frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{v}(t), \quad \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\vec{F}(t, \vec{v}, \vec{s})}{m(t, \vec{v}, \vec{s})}. \quad (1.3)$$

Еще раз подчеркнем, что совсем необязательно чтобы сила и/или масса зависели каждая от трех указанных переменных. Чаше всего в конкретных задачах присутствует в явном виде одна из указанных зависимостей.

Произведем дискретизацию по времени простейшим возможным способом. Если в некоторый момент времени t_0 величина s имеет значение s_0 , а величина v — значение v_0 , то в некоторый последующий момент времени $t_1 = t_0 + \Delta t$ будем иметь:

$$\vec{v}(t_1) \approx \vec{v}(t_0) + \vec{a}(t_0) \cdot \Delta t = \vec{v}(t_0) + \frac{\vec{F}_0}{m_0} \cdot \Delta t, \quad \vec{s}(t_1) \approx \vec{s}(t_0) + \vec{v}(t_0) \cdot \Delta t. \quad (1.4)$$

Здесь индекс «0» означает величины в начальный момент времени.

При вычислениях значений \vec{v} и \vec{s} в последующие моменты времени можно поступать аналогично (7.4). Так, если известны значения \vec{v}_i и \vec{s}_i в момент t_i , то

$$\vec{v}_{i+1} \approx \vec{v}_i + \frac{\vec{F}_i}{m_i} \cdot \Delta t, \quad \vec{s}_{i+1} \approx \vec{s}_i + \vec{v}_i \cdot \Delta t. \quad (1.5)$$

Вопрос о выборе конкретного значения Δt весьма непросто и определяется следующими соображениями. При компьютерном моделировании можно получить решение задачи о движении тела на некотором конечном отрезке времени $[t_0, T]$. Чем больше величина Δt , тем:

а) меньше вычислений требуется для того, чтобы пройти весь заданный временной интервал;

б) меньшая точность в передаче значений непрерывных функций $\vec{s}(t)$ и $\vec{v}(t)$ их дискретными представлениями — наборами чисел \vec{s}_i и \vec{v}_i .

Вопрос о точности результатов является в описываемом моделировании одним из центральных. Он распадается на два: как оценить эту точность и можно ли, уменьшая Δt , достигать все большей точности?

Остановимся вначале на первом. Формулы (1.4), (1.5) представляют собой применение метода Эйлера для приближенного решения системы дифференциальных уравнений (1.3). Наиболее приемлемой при использовании этого и родственного ему методов (например, Рунге-Кутты) является эмпирическая оценка точности. Для этого отрезок $[t_0, T]$ проходится с некоторым шагом Δt , а затем с существенно меньшим (например, в два раза) шагом. Сравнение результатов в точках t_1, t_2, \dots, T позволяет составить представление о реальной точно-

сти результатов. Если она недостаточна, то следует повторить процесс с еще меньшим шагом.

Однако, уменьшение шага Δt не всегда ведет к улучшению результатов моделирования. Одна из причин заключается в том, что чем меньше шаг, тем больше арифметических действий, ведущих к увеличению глобальной погрешности округления. Другая причина глубже и связана со способом дискретизации — перехода от описания реально непрерывного процесса движения тел к описанию по простейшим формулам (1.4), (1.5). Обе причины могут привести к неустойчивости решения, т.е. получению результатов, не имеющих реально ничего общего с истинными. Обычно неустойчивость становится заметной при повторениях процесса с уменьшением шага Δt .

Более эффективными при моделировании процессов, описываемых дифференциальными уравнениями, являются методы Рунге-Кутты более высокого порядка аппроксимации, чем метод Эйлера, неявные методы, методы типа «предиктор-корректор», отличающиеся повышенной устойчивостью, и другие, описанные в специальной литературе.

Сила сопротивления. В ряде представленных ниже задач необходимо знать, от чего зависит сила сопротивления при движении в среде. При реальных физических движениях тел в газовой или жидкостной среде трение сильно влияет на характер движения.

Соответствующие закономерности носят эмпирический характер и отнюдь не имеют столь строгой и четкой формулировки, как второй закон Ньютона. При относительно малых скоростях величина силы сопротивления пропорциональна скорости и имеет место соотношение

$$F_{\text{сопр}} = k_1 v, \quad (1.6)$$

где k_1 определяется свойствами среды и формой тела. Например, для шарика $k_1 = 6\pi\mu r$ — так называемая формула Стокса, где μ — динамическая вязкость среды, r — радиус шарика. Так, для воздуха при $t = 20^\circ$, и давлении 1 атм $\mu = 0,0182 \frac{\text{Н} \cdot \text{с}}{\text{см}^2}$, для воды $\mu = 1,002 \frac{\text{Н} \cdot \text{с}}{\text{см}^2}$, глицерина $\mu = 1480 \frac{\text{Н} \cdot \text{с}}{\text{см}^2}$.

При более высоких скоростях сила сопротивления становится пропорциональной квадрату скорости:

$$F_{\text{ср}} = k_2 v^2. \quad (1.7)$$

Разумеется, линейная по скорости часть силы сопротивления формально также сохранится, но если $k_2 v^2 \gg k_1 v$, то вкладом $k_1 v$ можно пренебречь. О величине k_2 известно следующее: она пропорциональна площади сечения тела S , поперечного по отношению к потоку, плотности среды $\rho_{\text{ср}}^{\text{Ньютоновская}}$ и зависит от формы тела. Обычно представляют

$$k_2 = \frac{1}{2} c S \rho_{\text{ср}}^{\text{Ньютоновская}}, \quad (1.8)$$

где c — безразмерный коэффициент лобового сопротивления (см. рис. 7.1).


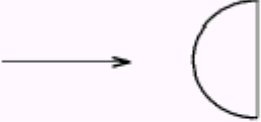
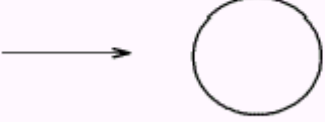
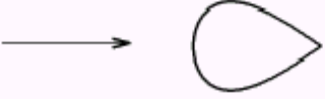
	Диск	$c=1,11$
	Полусфера	$c=0,55$
	Шар	$c=0,4$
	«Каплевидное» тело	$c=0,045$

Рис. 7.1. Значения коэффициента лобового сопротивления для некоторых тел, поперечное сечение которых имеет указанную на рисунке форму

При достижении достаточно большой скорости, когда образующиеся за обтекаемым телом вихри газа или жидкости начинают интенсивно отрываться от тела, значение c в несколько раз уменьшается; для шара оно становится приблизительно равным 0,1.

Свободное падение тела. Математическая модель свободного падения тела — уравнение второго закона Ньютона с учетом двух сил, действующих на тело — силы тяжести и силы сопротивления

среды. Движение является одномерным; проецируя силу, скорость и перемещение на ось, направленную вертикально вниз, получаем из (1.3):

$$\begin{cases} \frac{dh}{dt} = v, \\ \frac{dv}{dt} = \frac{mg - k_1 v - k_2 v^2}{m} \end{cases} \quad (1.9)$$

В конкретных задачах можно одной из составляющих силы сопротивления пренебречь (если она заведомо много меньше другой).

Частичное тестирование моделирующей программы можно провести для движения без трения. Аналитическое решение в этом случае общеизвестно.

Входные параметры модели:

- начальная высота тела;
- начальная скорость тела;
- величины, определяющие коэффициенты сопротивления среды k_1 и k_2 .

Взлет ракеты. Построим простейшую модель вертикального взлета ракеты, приняв гипотезу, что ее масса уменьшается во время взлета по линейному закону:

$$m(t) = \begin{cases} m_0 - \alpha t, & \text{если } m(t) \leq m_{\text{огм}} \\ m_0, & \text{если } m(t) = m_{\text{огм}} \end{cases} \quad (1.10)$$

Силу тяги двигателя будем считать постоянной на всем участке взлета.

Однако при самом простом моделировании данного процесса необходимо принять во внимание, что плотность воздуха ρ , входящая в коэффициент k_2 , убывает по мере подъема ракеты по закону $\rho = \rho_0 \cdot 10^{-\beta h}$, где h — высота, $\beta \approx 5,6 \cdot 10^{-5} \text{ м}^{-1}$ — иначе модель будет совершенно неадекватна реальности. Таким образом, модель будет описываться системой двух дифференциальных уравнений для функций $v(t)$ и $h(t)$:

$$\begin{cases} \frac{dh}{dt} = v, \\ \frac{dv}{dt} = \frac{F_{\text{тяги}} - m(t) c \rho_0 10^{-\beta h} s v^2(t)}{m(t)}, \end{cases} \quad (1.11)$$

Входные параметры модели:

- m_0 — начальная масса ракеты, заправленной топливом;
- $m_{\text{кон}}$ — остаточная масса после полного выгорания топлива;
- α — расход топлива;
- величины, определяющие k_2 — коэффициент сопротивления воздуха (линейной составляющей силы сопротивления можно заведомо пренебречь);
- $F_{\text{тяги}}$ — сила тяги двигателя (принять постоянной).

Движение тела, брошенного под углом к горизонту. Дифференциальные уравнения модели получаются из второго закона Ньютона проецированием скорости и перемещения на горизонтальную и вертикальную оси координат:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dv_x}{dt} = -\frac{k_1 + k_2 \sqrt{v_x^2 + v_y^2}}{m} v_x \\ \frac{dv_y}{dt} = -\frac{k_1 + k_2 \sqrt{v_x^2 + v_y^2}}{m} v_y \\ \frac{dx}{dt} = v_x \\ \frac{dy}{dt} = v_y \end{array} \right. , \quad (1.12)$$

Входные параметры модели:

- m — масса тела;
- v — величина начальной скорости;
- α — угол начального наклона вектора скорости к горизонту;
- * величины, определяющие коэффициенты сопротивления среды k_1 и k_2 .

Контрольные вопросы

(движение тел в среде с учетом трения)

1. Каковы альтернативные формы записи второго закона Ньютона?
2. Как связаны сила трения при движении тела в среде со скоростью движения при относительно небольших (дозвуковых) скоростях?
3. Как (качественно) меняется сила трения со скоростью при околозвуковых скоростях движения?

4. При каких значениях скорости становятся равными линейная и квадратичная составляющие силы сопротивления при падении шарика диаметром 5 см
- а) в воде?
 - б) керосине?
 - в) в глицерине?

Рекомендации.

1. Целесообразно до начала компьютерной реализации модели провести обезразмеривание переменных, входящих в уравнения, выявить безразмерные комбинации параметров модели и дальнейшие действия производить в безразмерных величинах.

2. Необходим контроль точности результатов и устойчивости применяемого численного метода. Для этого достаточно ограничиться эмпирическими приемами (например, сопоставлением решений, полученных с несколькими разными шагами по времени).

3. Целесообразно применять для моделирования стандартные методы интегрирования систем дифференциальных уравнений, описанные в математической литературе. Простейшие методы (метод Эйлера) часто бывают неустойчивы и их применение ведет к лишнему расходу времени.

4. Результаты моделирования следует выводить на экран компьютера в следующих видах: таблицы зависимостей перемещения и скорости от времени, графики этих зависимостей, траектории. Желательны динамические иллюстрации движения тел (скажем, изображение движений по траекториям в некотором условном масштабе времени через равные промежутки). Уместны звуковые сигналы (одни — в критические моменты для моделируемого движения, другие — через некоторый фиксированный отрезок пройденного пути и т.д.).

5. При выводе результатов в табличном виде следует учитывать, что соответствующий шаг по времени не имеет практически ничего общего с шагом интегрирования и определяется удобством и достаточной полнотой для восприятия результатов на экране. Экран, сплошь забитый числами, не поддается восприятию. Выводимые числа следует разумным образом форматировать, чтобы незначащие цифры практически отсутствовали.

6. При выводе результатов в графической форме графики должны быть построены так, как это принято в математической литературе (с указанием того, какие величины отложены по осям, масштабами и т.д.).

7. Поскольку таблицы, графики и траектории на одном экране обычно не помещаются, удобно сделать меню, в котором пользователь выбирает желаемый в настоящий момент вид представления результатов.

Задания к расчетной работе №1

1. Выписать математическую модель, определить состав набора входных параметров и их конкретные числовые значения.

2. Если моделирование будет производиться в безразмерных переменных (решение — на усмотрение студента и преподавателя), то произвести обезразмеривание и найти набор значений безразмерных параметров.

3. Спроектировать пользовательский интерфейс программы моделирования, обращая особое внимание на формы представления результатов.

4. Выбрать метод интегрирования системы дифференциальных уравнений модели, найти в библиотеке стандартных программ или разработать самостоятельно программу интегрирования с заданной точностью.

5. Произвести отладку и тестирование полной программы.

6. Выполнить конкретное задание из своего варианта работы.

7. Качественно проанализировать результаты моделирования.

8. Создать текстовый отчет по лабораторной работе, включающий:

- титульный лист (название работы, исполнитель, группа и т.д.);
- постановку задачи и описание модели;
- результаты тестирования программы;
- результаты, полученные в ходе выполнения задания (в различных формах);
- качественный анализ результатов.

Варианты заданий к расчетной работе №1

Вариант 1.

Парашютист прыгает с некоторой высоты и летит, не открывая парашюта; на какой высоте (или через какое время) ему следует открыть парашют, чтобы иметь к моменту приземления безопасную скорость (не большую 10 м/с)?

Вариант 2.

Изучить, как связана высота прыжка с площадью поперечного сечения парашюта, чтобы скорость приземления была безопасной?

Вариант 3.

Промоделировать падения тела с заданными характеристиками (масса, форма) в различных вязких средах. Изучить влияние вязкости среды на характер движения. Скорость движения должна быть столь невелика, чтобы квадратичной составляющей силы сопротивления можно было пренебрегать.

Вариант 4.

Промоделировать падения тела с заданными характеристиками (масса, форма) в различных плотных средах. Изучить влияние плотности среды на характер движения. Скорость движения должна быть достаточно велика, чтобы линейной составляющей силы сопротивления можно было пренебрегать (на большей части пути).

Вариант 5.

Промоделировать движение исследовательского зонда, «выстреленного» вертикально вверх с уровня земли. В верхней точке траектории над зондом раскрывается парашют и он плавно спускается в точку старта.

Вариант 6.

Промоделировать движение исследовательского зонда, «выстреленного» вертикально вверх с летящего над землей самолета. В верхней точке траектории над зондом раскрывается парашют и он плавно спускается на землю.

Вариант 7.

Глубинная бомба, установленная на взрыв через заданное время, сбрасывается со стоящего неподвижно противолодочного корабля. Исследовать связь между глубиной, на которой произойдет взрыв, и формой корпуса (сферической, полусферической, каплевидной и т.д.).

Вариант 8.

Глубинная бомба, установленная на взрыв на заданной глубине, сбрасывается со стоящего неподвижно противолодочного корабля. Исследовать связь между временем достижения заданной глубины и формой корпуса (сферической, полусферической, каплевидной и т.д.).

Вариант 9.

Провести моделирование взлета ракеты при значениях параметров $m_0 = 2 \cdot 10^7$ кг, $m_{\text{кон}} = 2 \cdot 10^5$ кг, $\alpha = 2 \cdot 10^5$ кг/с, $F_{\text{тяги}} = 4 \cdot 10^8$ н. Ответить на вопрос: достигнет ли ракета при этих значениях параметров первой космической скорости 7,8 км/с?

Вариант 10.

Провести исследование соотношения входных параметров m_0 и $F_{\text{тяги}}$, при которых ракета достигнет первой космической скорости (и в соответствующий момент исчерпает горючее). Остальные входные параметры фиксировать произвольно. Построить соответствующую фазовую диаграмму в переменных $(m_0, F_{\text{тяги}})$.

Вариант 11.

Разработать и исследовать усовершенствованную модель взлета ракеты, приняв во внимание, что реальные космические ракеты обычно двух- трехступенчатые, и двигатели разных ступеней имеют разную силу тяги.

Вариант 12.

Промоделировать движение исследовательского зонда, снабженного разгонным двигателем небольшой мощности, «выстреленного» вертикально вверх с уровня земли. В верхней точке траектории двигатель выключается, над зондом раскрывается парашют и он плавно спускается в точку старта.

Вариант 13.

Промоделировать движение исследовательского зонда, снабженного разгонным двигателем небольшой мощности, «выстреленного» вертикально вверх с летящего над землей самолета. В верхней точке траектории над зондом раскрывается парашют и он плавно спускается на землю.

Вариант 14.

Глубинная бомба-торпеда, снабженная разгонным двигателем, установленная на взрыв через заданное время, сбрасывается со стоящего неподвижно противолодочного корабля. Исследовать связь между

глубиной, на которой произойдет взрыв, и формой корпуса (сферической, полусферической, каплевидной и т.д.).

Вариант 15.

Глубинная бомба-торпеда, снабженная разгонным двигателем, установленная на взрыв на заданной глубине, сбрасывается со стоящего неподвижно противолодочного корабля. Исследовать связь между временем достижения заданной глубины и формой корпуса (сферической, полусферической, каплевидной и т.д.).

Вариант 16.

Торпеда, снабженная разгонным двигателем, нацеливается с подводной лодки на стоящий вертикально над ней надводный корабль. Исследовать связь между временем поражения цели формой корпуса (сферической, полусферической, каплевидной и т.д.).

Вариант 17.

Построить траектории и найти временные зависимости горизонтальной и вертикальной составляющих скорости и перемещения для тела массой 1 кг, брошенного под углом 45° к горизонту с начальной скоростью 10 м/с

1) в воздухе;

2) в воде.

Сравнить результаты с теми, которые получились бы без учета сопротивления среды (последние можно получить либо численно из той же модели, либо аналитически).

Вариант 18.

Найти вид зависимости горизонтальной длины полета тела и максимальной высоты траектории от одного из коэффициентов сопротивления среды, фиксируя все остальные параметры. Представить эту зависимость графически и подобрать подходящую аналитическую формулу, определив ее параметры методом наименьших квадратов.

Вариант 19.

Разработать модель подводной охоты. На расстоянии r под углом α подводный охотник видит неподвижную акулу. На сколько метров выше ее надо целиться, чтобы гарпун попал в цель?

Вариант 20.

Поставить и решить задачу о подводной охоте при дополнительном условии: акула движется.

Вариант 21.

Промоделировать движение исследовательского зонда, «выстреленного» под углом к горизонту. В верхней точке траектории над зондом раскрывается тормозной парашют и он плавно движется до земли.

Вариант 22.

Глубинная бомба, установленная на взрыв через заданное время, сбрасывается со движущегося противолодочного корабля. Исследовать связь между глубиной, на которой произойдет взрыв, пройденным расстоянием по горизонтали и формой корпуса (сферической, полусферической, каплевидной и т.д.).

Вариант 23.

Глубинная бомба-торпеда, снабженная разгонным двигателем, установленная на взрыв на заданной глубине, сбрасывается с движущегося противолодочного корабля. Исследовать связь между временем достижения заданной глубины, пройденным расстоянием по горизонтали и формой корпуса (сферической, полусферической, каплевидной и т.д.).

Вариант 24.

Торпеда, снабженная разгонным двигателем, нацеливается с лежащей на дне подводной лодки на поражение движущегося надводного корабля. Пуск торпеды производится в момент прохождения корабля над лодкой. Исследовать связь между глубиной залегания лодки, временем поражения цели и расстоянием, который корабль успеет пройти по горизонтали.

Дополнительная литература

(движение тел в среде с учетом трения)

1. *Архангельский М.М.* Курс физики. Механика. — М.: Просвещение, 1975.
2. *Гулд Х., Тобочник Я.* Компьютерное моделирование в физике: Пер. с англ. Т.1,2. — М.: Мир, 1990.
3. *Савельев И.В.* Курс общей физики. В 3 томах. Т.1. — М., Наука, 1977.
4. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. В 5 томах. Т.1. — М.: Наука, 1974.
5. *Стрелков С.П.* Механика. — М.: Наука, 1975.
6. *Хайкин С.Э.* Физические основы механики. — М.: Наука, 1976.

Расчетная работа №2. Моделирование колебательных процессов

Краткая теория.

Рассмотрим модель движения математического маятника при произвольном (не малом) начальном угле отклонения.

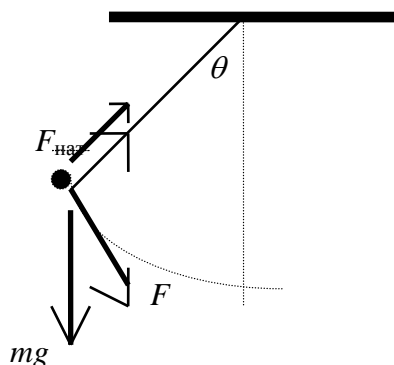


Рис. Математический маятник

Поскольку нить подвеса считается нерастяжимой, то у маятника одна степень свободы. Удобно принять за нее угол между нитью подвеса и вертикалью.

Уравнения движения имеют вид:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin(\theta) . \quad (2.1)$$

В случае **малых колебаний** (колебаний с малой амплитудой) оно превращается в так называемое уравнение малых колебаний, отличающееся от полного заменой в правой части $\sin(\theta)$ на θ . Задача о малых колебаниях имеет простое аналитическое решение

$$\theta = A \cos(\omega t + \varphi), \quad (2.2)$$

где A — амплитуда колебаний, ω — частота, φ — начальная фаза. A и φ можно выразить через начальные условия — угол θ_0 и скорость v_0 :

$$A = \sqrt{\theta_0^2 + \frac{v_0^2}{(l\omega)^2}}, \quad \operatorname{tg}(\varphi) = -\frac{v_0}{l\omega\theta_0} . \quad (2.3)$$

Частота колебаний $\omega = \sqrt{\frac{l}{g}}$; отметим, что она, равно как и период колебаний $T = \frac{2\pi}{\omega}$, в приближении малых колебаний не зависит от начальной амплитуды.

Малые колебания маятника — пример так называемого гармонического движения, описываемого простой тригонометрической функцией (см. (2.1)).

Для численного эксперимента удобно представить уравнение колебаний в форме системы двух уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{dt} = x, \\ \frac{dx}{dt} = -\frac{g}{l} \sin(\theta). \end{cases} \quad (2.4)$$

Входные параметры модели:

l — длина нити подвеса;

θ_0 — начальное отклонение маятника;

x_0 — начальная угловая скорость.

Колебания маятника с трением в точке подвеса описывается следующим уравнением:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -2\eta \frac{d\theta}{dt} - \omega^2 \sin(\theta) \quad (2.5)$$

где, как и выше, $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$, η — коэффициент трения.

Уравнение (2.5) равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{dt} = x, \\ \frac{dx}{dt} = -2\eta x - \omega^2 \sin(\theta). \end{cases} \quad (2.6)$$

Трение приводит, в частности, к тому, что в зависимости от соотношения η и ω появляются разные режимы движения: затухающие колебания и затухание без колебаний. Одна из задач исследования — найти на фазовой плоскости (η, ω) зависимость линии, разделяющей два режима, от начального отклонения маятника.

Входные параметры модели:

ω — частота собственных малых колебаний маятника;

θ_0 — начальное отклонение маятника;

x_0 — начальная угловая скорость;

η — коэффициент трения.

Вынужденные колебания маятника описываются уравнением

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -2\eta \frac{d\theta}{dt} - \omega^2 \sin(\theta) + f \cos(\lambda t), \quad (2.7)$$

где f — амплитуда, λ — частота вынуждающей силы.

Уравнение (2.7) равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{dt} = x, \\ \frac{dx}{dt} = -2\eta x - \omega^2 \sin(\theta) + f \cos(\lambda t). \end{cases} \quad (2.8)$$

При $\lambda \approx \omega$ наступает резкое возрастание амплитуды вынужденных колебаний. При $\lambda = \omega$ эта амплитуда в приближении малых колебаний формально бесконечна, однако само приближение при этом не работает. Исследовать резонанс в отсутствии трения, пользуясь базовым уравнением колебаний.

Вынужденные колебания проходят через два этапа — переходный процесс и стационарные колебания с частотой вынуждающей силы. При $\lambda \approx \omega$ переходный процесс сопровождается биениями — особым видом пульсирующих колебаний. Исследовать зависимость амплитуды биений от различных параметров системы.

Входные параметры модели:

ω — частота собственных малых колебаний маятника;

θ_0 — начальное отклонение маятника;

x_0 — начальная угловая скорость;

η — коэффициент трения.

f — амплитуда вынуждающей силы;

λ — частота вынуждающей силы.

При **периодическом изменении длины нити подвеса** уравнений колебаний принимает вид

$$\boxed{\phantom{\frac{d^2\theta}{dt^2} = -2\eta \frac{d\theta}{dt} - \omega_0^2 (1 + \alpha \cos(\lambda t)) \sin(\theta)}} \quad (2.9)$$

где λ — частота колебаний длины нити подвеса.

Уравнение (2.9) равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{dt} = x, \\ \frac{dx}{dt} = -2\eta x - \omega_0^2 (1 + \alpha \cos(\lambda t)) \sin(\theta) \end{cases} \quad (2.10)$$

Одно из принципиальных явлений, связанных с этими колебаниями — появление так называемого параметрического резонанса при некоторых соотношениях частот λ и ω_0 :

$$\lambda \approx \omega_0 / 2, \lambda \approx \omega_0, \lambda \approx 3\omega_0 / 2, \dots$$

Входные параметры модели:

ω_0 — частота собственных малых колебаний маятника;

θ_0 — начальное отклонение маятника;

x_0 — начальная угловая скорость;

η — коэффициент трения.

α — амплитуда модуляции;

λ — частота модуляции.

Контрольные вопросы

1. Как выглядят математические модели следующих движений:
 - колебаний математического маятника без трения?
 - малых колебаний математического маятника без трения?
 - колебаний математического маятника с трением?
 - вынужденных колебаний математического маятника?
 - параметрически возбуждаемых колебаний математического маятника?
2. Как качественно влияет наличие трения на вид колебаний? Являются ли соответствующие колебания гармоническими?
3. В чем заключается процедура Фурье-анализа периодических процессов?

Темы для рефератов

1. Маятники различных видов. Свободные, вынужденные и параметрические колебания.
2. Спектральный анализ периодических процессов.
3. Колебания пружинного маятника.
4. Колебания крутильного маятника.
5. Гармонические колебания. Спектральный анализ периодических процессов.

Рекомендации.

1. Целесообразно до начала компьютерной реализации модели провести обезразмеривание переменных, входящих в уравнения,

выявить безразмерные комбинации параметров модели и дальнейшие действия производить в безразмерных величинах.

2. Необходим контроль точности результатов и устойчивости применяемого численного метода. Для этого достаточно ограничиться эмпирическими приемами (например, сопоставлением решений, полученных с несколькими разными шагами по времени).

3. Целесообразно применять для моделирования стандартные методы интегрирования систем дифференциальных уравнений, описанные в математической литературе. Простейшие методы (метод Эйлера) часто бывают неустойчивы и их применение ведет к лишнему расходу времени.

4. Результаты моделирования следует выводить на экран компьютера в следующих видах: таблицы зависимостей перемещения и скорости от времени, графики этих зависимостей, траектории. Желательны динамические иллюстрации движения тел (скажем, изображение движений по траекториям в некотором условном масштабе времени через равные промежутки). Уместны звуковые сигналы (одни — в критические моменты для моделируемого движения, другие — через некоторый фиксированный отрезок пройденного пути и т.д.).

5. При выводе результатов в табличном виде следует учитывать, что соответствующий шаг по времени не имеет практически ничего общего с шагом интегрирования и определяется удобством и достаточной полнотой для восприятия результатов на экране. Экран, сплошь забитый числами, не поддается восприятию. Выводимые числа следует разумным образом форматировать, чтобы незначащие цифры практически отсутствовали.

6. При выводе результатов в графической форме графики должны быть построены так, как это принято в математической литературе (с указанием того, какие величины отложены по осям, масштабами и т.д.).

7. Поскольку таблицы, графики и траектории на одном экране обычно не помещаются, удобно сделать меню, в котором пользователь выбирает желаемый в настоящий момент вид представления результатов.

Задания к расчетной работе №2.

1. Выписать математическую модель, определить состав набора входных параметров и их конкретные числовые значения.

2. Если моделирование будет производиться в безразмерных переменных (решение — на усмотрение студента и преподавателя), то произвести обезразмеривание и найти набор значений безразмерных параметров.

3. Спроектировать пользовательский интерфейс программы моделирования, обращая особое внимание на формы представления результатов.

4. Выбрать метод интегрирования системы дифференциальных уравнений модели, найти в библиотеке стандартных программ или разработать самостоятельно программу интегрирования с заданной точностью.

5. Произвести отладку и тестирование полной программы.

6. Выполнить конкретное задание из своего варианта работы.

7. Качественно проанализировать результаты моделирования.

8. Создать текстовый отчет по лабораторной работе, включающий:

- * титульный лист (название работы, исполнитель, группа и т.д.);
- * постановку задачи и описание модели;
- * результаты тестирования программы;
- * результаты, полученные в ходе выполнения задания (в различных формах);
- * качественный анализ результатов.

Варианты к расчетной работе №2.

Вариант 1.

Установить зависимость периода колебаний маятника T от начальной амплитуды в диапазоне амплитуд $\theta_0 \in [0, \pi]$. и его отклонение от периода малых колебаний T_0 .

Вариант 2.

Установить зависимость периода колебаний маятника T от длины нити подвеса при амплитуде колебаний равной $\pi/2$.

Вариант 3.

Ограничиваясь тремя членами ряда Фурье, исследовать зависимость амплитуд гармоник a_1 , a_2 и a_3 от начальной амплитуды колебаний.

Вариант 4.

Ограничиваясь тремя членами ряда Фурье, исследовать зависимость амплитуд гармоник a_1 , a_2 и a_3 от длины нити подвеса при амплитуде колебаний равной $\pi/2$.

Вариант 5.

Заменить в (7.19) $\sin(\theta)$ на θ и изучить, как трение влияет на малые колебания математического маятника. Фиксировать параметр l и найти то критическое значение коэффициента трения η^* , при котором движение перестает быть колебательным и становится монотонно затухающим (апериодический режим).

Вариант 6.

В условиях предыдущей задачи построить зависимость η^* от l при фиксированном значении η .

Вариант 7.

Изучить, как значение начальной амплитуды не малых колебаний математического маятника с трением сказывается на переходе режима затухающих колебаний в режим затухания без колебаний.

Вариант 8.

Построить зависимость амплитуды малых колебаний без трения от частоты вынуждающей силы λ при приближении ее к частоте собственных колебаний ω_0 .

Вариант 9.

Построить зависимость амплитуды не малых колебаний маятника без трения от частоты вынуждающей силы λ при приближении ее к частоте собственных колебаний ω_0 .

Вариант 10.

Построить зависимость амплитуды не малых колебаний маятника без трения от амплитуды вынуждающей силы при ее частоте приблизительно равной половине частоты собственных колебаний маятника.

Вариант 11.

Получить картину процесса биений в системе с близкими значениями частот λ и ω_0 (в приближении малых колебаний и без наличия трения).

Вариант 12.

Получить картину процесса биений в системе с близкими значениями частот λ и ω_0 (для амплитуды колебаний равной $\pi/2$ и без наличия трения).

Вариант 13.

Исследовать, как возрастание коэффициента трения влияет на процесс биений в системе с близкими значениями частот λ и ω_0 (для произвольной амплитуды колебаний).

Вариант 14.

Исследовать колебания маятника с периодически меняющейся длиной нити подвеса. Построить на фазовой плоскости (λ/ω_0 , α) границы нескольких зон параметрического резонанса (без учета трения).

Вариант 15.

В условиях задания из предыдущего варианта исследовать влияние трения на границы нескольких зон параметрического резонанса.

Вариант 16.

Построить модель колебаний шарика массы m , висющего на пружинке (пружинного маятника), движущегося под влиянием силы тяжести и упругой силы, без учета трения. Исследовать зависимость периода колебаний маятника от параметра b при фиксированном значении параметров m и a .

Вариант 17.

Для маятника, описанного в предыдущей задаче, исследовать зависимость периода колебаний от массы при фиксированных значениях параметров a и b .

Вариант 18.

Для маятника, описанного в варианте 16, добавить учет сопротивления окружающей среды (при конечном размере шарика) и исследовать зависимость периода колебаний от вязкости среды при движении его в воде (значения остальных параметров фиксировать). Найти границу перехода периодического движения в апериодическое.

Вариант 19.

Для маятника, описанного в варианте 16, добавить учет воздействия периодической вынуждающей силы и исследовать зависимость амплитуды колебаний от частоты вынуждающей силы при прохождении через резонанс (без учета трения).

Вариант 20.

Построить модель колебаний шарика массы m , лежащего на горизонтальной поверхности, под действием пружины, создающей упругую силу $F_{\text{упр}} = -ax - bx^3$, где x — смещение из положения

равновесия. Трения не учитывать. Исследовать зависимость периода колебаний такого маятника от параметра b (при фиксированном значении других параметров).

Вариант 21.

Для маятника, описанного в предыдущем варианте, добавить учет трения шарика о поверхность (сила трения пропорциональна весу шарика) и исследовать зависимость периода колебаний от коэффициента трения. Найти границу перехода периодического движения в апериодическое.

Вариант 22.

Для маятника, описанного в варианте 20, добавить учет наличия вынуждающей периодической силы и исследовать зависимость периода колебаний от амплитуды вынуждающей силы при ее частоте, равной приблизительно половине частоты собственных колебаний (без учета трения).

Вариант 23.

Для маятника, описанного в варианте 20, добавить учет наличия вынуждающей периодической силы и исследовать зависимость периода колебаний от частоты вынуждающей силы при прохождении через резонанс (без учета трения).

Вариант 24.

Исследовать процесс биений для маятника, описанного в варианте 20, в отсутствии трения.

Дополнительная литература

Мигулин В.В. и др. Основы теории колебаний. — М.: Наука, 1988.

Савельев И.В. Курс общей физики. В 3 томах. Т.1,2. — М., Наука, 1977.

Сивухин Д.В. Общий курс физики. В 5 томах. Т.1. — М.: Наука, 1974.

Стрелков С.П. Механика. — М.: Наука, 1975.

Стрелков С.П. Введение в теорию колебаний. — М.: Наука, 1964.

Хайкин С.Э. Физические основы механики. — М.: Наука, 1976.

Расчетная работа №3. Компьютерное моделирование в экологии

Краткая теория

В данном практикуме, равно как и в базовом пособии, рассматриваются лишь модели классической экологии (взаимодействие популяций).

Популяция — совокупность особей одного вида, существующих в одно и то же время и занимающих определенную территорию.

Взаимодействие особей внутри популяции определяется внутривидовой конкуренцией, взаимодействие между популяциями — межвидовой конкуренцией.

Внутривидовая конкуренция в популяции с дискретным размножением. Для популяций с дискретным размножением (некоторые виды растений, насекомых и т.д.) поколения четко разделены во времени и особи разных поколений не сосуществуют. Численность такой популяции можно характеризовать числом N_t и считать t величиной дискретной — номером популяции.

Одна из моделей межвидовой конкуренции в этом случае выражается уравнением

$$N_{t+1} = \frac{N_t \cdot R}{1 + (a \cdot N_t)^b} \quad (3.1)$$

Здесь R — скорость воспроизводства популяции в отсутствии внутривидовой конкуренции (математически это соответствует случаю $a = 0$). Тогда уравнение определяет просто изменение численности популяции по закону геометрической прогрессии: $N_t = N_0 \cdot R^t$, где N_0 — начальная численность популяции.

Знаменатель в уравнении отражает наличие конкуренции, делающей скорость роста тем меньше, чем больше численность популяции; a и b — параметры модели.

Исходные параметры модели:

- R — скорость воспроизводства;
- N_0 — начальная численность популяции;
- a — параметр, характеризующий интенсивность внутривидовой конкуренции.

Характерная черта эволюции при $b=1$ — выход численности популяции на стационарное значение при любых значениях других

параметров. Однако, в природе так бывает не всегда, и более общая модель при $b \neq 1$ отражает другие, более сложные, но реально существующие, виды эволюции. Этим видом модель описывает четыре:

- 1) монотонное установление стационарной численности популяции;
- 2) колебательное установление стационарной численности популяции;
- 3) устойчивые предельные циклы изменения численности популяции;
- 4) случайные изменения численности популяции без наличия явных закономерностей (динамический хаос).

Внутривидовая конкуренция в популяции с непрерывным размножением. Математическая модель в данном случае строится на основе дифференциальных уравнений. Наиболее известна так называемая логистическая модель:

$$\frac{dN}{dt} = r \cdot N \cdot \left(\frac{K - N}{K} \right) \quad (3.2)$$

Исходные параметры модели:

- r — скорость роста численности популяции в отсутствие конкуренции;
- K — предельное значение численности популяции, при котором скорость роста становится равной нулю;
- N_0 — начальная численность популяции.

Межвидовая конкуренция. В этом случае исследуется конкуренция популяций, потребляющих общий ресурс. Пусть N_1 и N_2 — численности конкурирующих популяций. Модель (называемая также моделью Лотки-Вольтерры) выражается уравнениями

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = r_1 \cdot N_1 \cdot \frac{K_1 - N_1 - \alpha_{12} \cdot N_2}{K_1}, \\ \frac{dN_2}{dt} = r_2 \cdot N_2 \cdot \frac{K_2 - N_2 - \alpha_{21} \cdot N_1}{K_2} \end{cases} \quad (3.3)$$

Содержательный смысл параметров можно понять из сравнения с предыдущей моделью. Дополнительные параметры α_{12} и α_{21} отражают интенсивность межвидовой конкуренции.

Главный вопрос, который интересует исследователя межвидовой конкуренции — при каких условиях увеличивается или уменьшается численность каждого вида? Данная модель предска-

зывает следующие режимы эволюции взаимодействующих популяций: устойчивое сосуществование или полное вытеснение одной из них.

Система «хищник-жертва». В этой системе ситуация значительно отличается от предыдущей. В частности, если в случае конкурирующих популяций исчезновение одной означает выигрыш для другой (дополнительные ресурсы), то исчезновение «жертвы» влечет за собой и исчезновение «хищника», для которого в простейшей модели «жертва» является единственным кормом.

Обозначим через C численность популяции хищника и через N — популяции жертвы. Одна из известных моделей выражается следующими уравнениями:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = r \cdot N - a \cdot C \cdot N, \\ \frac{dC}{dt} = f \cdot a \cdot C \cdot N - q \cdot C \end{cases} \quad (3.4)$$

В первое уравнение заложен следующий смысл. В отсутствии хищников (т.е. при $C=0$) численность жертв растет экспоненциально со скоростью r , т.к. модель не учитывает внутривидовой конкуренции. Скорость роста числа жертв (т.е. $\frac{dN}{dt}$) уменьшается тем больше, чем чаще происходят встречи представителей видов; a — коэффициент эффективности поиска.

Второе уравнение говорит о следующем. В отсутствии жертв численность хищников экспоненциально убывает со скоростью q ; положительное слагаемое в правой части уравнения компенсирует эту убыль; f — коэффициент эффективности перехода пищи в потомство хищников.

Контрольные вопросы

1. В чем состоит предмет исследований классической экологии?
2. В чем сущность процессов:
 - внутривидовой конкуренции?
 - межвидовой конкуренции?
 - отношений «хищник-жертва»?
3. Каковы цели математического моделирования в экологии?
4. В чем отличие приемов моделирования популяций с непрерывным и дискретным размножением?

5. Задачи классической экологии и математическое моделирование.
6. Математическое моделирование процессов распространения загрязнений окружающей среды.
7. Динамика развития популяций. Математические модели внутривидовой и межвидовой конкуренции и системы «хищник-жертва».

Рекомендации.

1. При проведении расчетов необходим контроль точности результатов и устойчивости применяемого численного метода. Для этого достаточно ограничиться эмпирическими приемами (например, сопоставлением решений, полученных с несколькими разными шагами по времени).

2. Целесообразно применять для моделирования стандартные методы интегрирования систем дифференциальных уравнений, описанные в математической литературе. Простейшие методы (метод Эйлера) часто бывают неустойчивы и их применение ведет к лишнему расходу времени.

3. Результаты моделирования следует выводить на экран компьютера в следующих видах: таблицы зависимостей численности популяций от времени, графики этих зависимостей. Уместны звуковые сигналы (одни — в критические моменты для моделируемого процесса, другие — через некоторый фиксированный отрезок пройденного пути и т.д.).

4. При выводе результатов в табличном виде следует учитывать, что соответствующий шаг по времени не имеет практически ничего общего с шагом интегрирования и определяется удобством и достаточной полнотой для восприятия результатов на экране. Экран, сплошь забитый числами, не поддается восприятию. Выводимые числа следует разумным образом форматировать, чтобы незначащие цифры практически отсутствовали.

5. При выводе результатов в графической форме графики должны быть построены так, как это принято в математической литературе (с указанием того, какие величины отложены по осям, масштабами и т.д.).

6. Поскольку таблицы и графики на одном экране обычно не помещаются, удобно сделать меню, в котором пользователь выби-

рает желаемый в настоящий момент вид представления результатов.

Задания к расчетной работе №3.

1. Выписать математическую модель, определить состав набора входных параметров и их конкретные числовые значения.

2. Спроектировать пользовательский интерфейс программы моделирования, обращая особое внимание на формы представления результатов.

3. Выбрать метод интегрирования дифференциальных уравнений модели, найти в библиотеке стандартных программ или разработать самостоятельно программу интегрирования с заданной точностью.

4. Произвести отладку и тестирование полной программы.

5. Выполнить конкретное задание из своего варианта работы.

6. Качественно проанализировать результаты моделирования.

7. Создать текстовый отчет по лабораторной работе, включающий:

- * титульный лист (название работы, исполнитель, группа и т.д.);
- * постановку задачи и описание модели;
- * результаты тестирования программы;
- * результаты, полученные в ходе выполнения задания (в различных формах);
- * качественный анализ результатов.

Варианты к расчетной работе №3

Вариант 1.

Изучить характер эволюции популяции, описываемый моделью (7.31), при значениях параметров $b = 1$, $R = 1$, $N_0 = 100$ в зависимости от значения параметра a в диапазоне $0,1 \leq a \leq 10$.

Есть ли качественные различия в характере эволюции в зависимости от значения a ?

Вариант 2.

Изучить характер эволюции популяции, описываемый моделью (7.31), при значениях параметров $b = 1$, $R = 4$, $N_0 = 100$ в зависимости от значения параметра a в диапазоне $0,1 \leq a \leq 10$.

Есть ли качественные различия в характере эволюции в зависимости от значения a ?

Вариант 3.

Изучить характер эволюции популяции, описываемый моделью (7.31), при значениях параметров $b = 4$, $R = 1$, $N_0 = 100$ в зависимости от значения параметра a в диапазоне $0,1 \leq a \leq 10$.

Есть ли качественные различия в характере эволюции в зависимости от значения a ?

Вариант 4.

Изучить характер эволюции популяции, описываемый моделью (7.31), при значениях параметров $a = 1$, $R = 1$, $N_0 = 100$ в зависимости от значения параметра b в диапазоне $0,1 \leq b \leq 10$.

Есть ли качественные различия в характере эволюции в зависимости от значения b ?

Вариант 5.

Изучить характер эволюции популяции, описываемый моделью (7.31), при значениях параметров $a = 1$, $R = 4$, $N_0 = 100$ в зависимости от значения параметра b в диапазоне $0,1 \leq b \leq 10$.

Есть ли качественные различия в характере эволюции в зависимости от значения b ?

Вариант 6.

Изучить характер эволюции популяции, описываемый моделью (7.31), при значениях параметров $a = 3$, $R = 1$, $N_0 = 100$ в зависимости от значения параметра b в диапазоне $0,1 \leq b \leq 10$.

Есть ли качественные различия в характере эволюции в зависимости от значения b ?

Вариант 7.

Изучить характер эволюции популяции, описываемый моделью (7.31), при значениях параметров $a = 3$, $b = 1$, $N_0 = 100$ в зависимости от значения параметра R в диапазоне $1 \leq R \leq 4$.

Есть ли качественные различия в характере эволюции в зависимости от значения R ?

Вариант 8.

Изучить характер эволюции популяции, описываемый моделью (7.31), при значениях параметров $a = 3$, $b = 4$, $N_0 = 100$ в зависимости от значения параметра R в диапазоне $1 \leq R \leq 4$.

Есть ли качественные различия в характере эволюции в зависимости от значения R ?

Вариант 9.

Реализовать модель (7.31) при следующих наборах значений параметров:

- 1) $N_0 = 100, a = 1, R = 2, b = 1$;
- 2) $N_0 = 100, a = 1, R = 2, b = 4$;
- 3) $N_0 = 100, a = 1, R = 4, b = 3.5$;
- 4) $N_0 = 100, a = 1, R = 4, b = 4.5$

и изучить вид соответствующих режимов эволюции.

Вариант 10.

Для модели (7.31) в фазовой плоскости (b, R) найти границы зон, разделяющих режимы монотонного и колебательного установления стационарной численности популяции изучаемой системы.

Вариант 11.

Для модели (7.31) в фазовой плоскости (b, R) найти границы зон, разделяющих режим колебательного установления стационарной численности популяции изучаемой системы и режим устойчивых предельных циклов.

Вариант 12.

Реализовать моделирование межвидовой конкуренции по формулам (7.33) при значениях параметров $r_1 = 2, r_2 = 2, K_1 = 200, K_2 = 200, \alpha_{12} = 0.5, \alpha_{21} = 0.5$. Проанализировать зависимость судьбы популяций от соотношения значений их начальной численности N_1^0, N_2^0 .

Вариант 13.

Реализовать моделирование межвидовой конкуренции по формулам (7.33) при значениях параметров $r_1 = 2, r_2 = 2, K_1 = 200, K_2 = 200, N_1^0 = 100, N_2^0 = 100$. Проанализировать зависимость судьбы популяций от соотношения значений коэффициентов конкуренции α_{12} и α_{21} .

Вариант 14.

Построить в фазовой плоскости $(N_1^{(0)}, N_2^{(0)})$ границы зон, разделяющих какие-либо два режима эволюции конкурирующих популяций (в соответствии с моделью (7.33)). Остальные параметры модели выбрать произвольно. Учесть при этом, что режим устойчивого сосуществования популяций может в принципе реализоваться только при $\alpha_{12} \cdot \alpha_{21} < 1$.

Вариант 15.

Провести моделирование динамики численности популяций в системе «хищник-жертва» (модель (7.34)) при значениях параметров

$r = 5, a = 0,1, q = 2, f = 0,6$. Проанализировать зависимость исхода эволюции от соотношения значений параметров N_0 и C_0 .

Вариант 16.

Провести моделирование динамики численности популяций в системе «хищник-жертва» (модель (7.34)) при значениях параметров $r = 5, a = 0,1, q = 2, N_0 = 100, C_0 = 6$. Проанализировать зависимость результатов моделирования от значения параметра f в диапазоне $0,1 \leq f \leq 2$.

Вариант 17.

Провести моделирование динамики численности популяций в системе «хищник-жертва» (модель (7.34)) при значениях параметров $r = 5, a = 0,1, f = 2, N_0 = 100, C_0 = 6$. Проанализировать зависимость результатов моделирования от значения параметра q в диапазоне $0,1 \leq q \leq 2$.

Вариант 18.

Провести моделирование динамики численности популяций в системе «хищник-жертва» (модель (7.34)) при значениях параметров $a = 0,1, f = 2, q = 2, N_0 = 100, C_0 = 6$. Проанализировать зависимость результатов моделирования от значения параметра r в диапазоне $0,1 \leq r \leq 2$.

Вариант 19.

Провести моделирование динамики численности популяций в системе «хищник-жертва» (модель (7.34)) при значениях параметров $r = 5, q = 2, f = 2, N_0 = 100, C_0 = 6$. Проанализировать зависимость результатов моделирования от значения параметра a в диапазоне $0,1 \leq a \leq 2$.

Вариант 20.

Модель (7.34) предсказывает сопряженные колебания численности жертв и хищников. Исследовать зависимость запаздывания амплитуд колебаний численности хищников от амплитуд колебаний численности жертв в зависимости от значений параметра a . Значения остальных параметров фиксировать по усмотрению.

Вариант 21.

Модель (7.34) предсказывает сопряженные колебания численности жертв и хищников. Исследовать зависимость запаздывания амплитуд колебаний численности хищников от амплитуд колебаний численности жертв в зависимости от значений параметра q . Значения остальных параметров фиксировать по усмотрению.

Вариант 22.

Модель (7.34) предсказывает сопряженные колебания численности жертв и хищников. Исследовать зависимость запаздывания амплитуд колебаний численности хищников от амплитуд колебаний численности жертв в зависимости от значений параметра f . Значения остальных параметров фиксировать по усмотрению.

Вариант 23.

Модель (7.34) предсказывает сопряженные колебания численности жертв и хищников. Исследовать зависимость запаздывания амплитуд колебаний численности хищников от амплитуд колебаний численности жертв в зависимости от значений параметра r . Значения остальных параметров фиксировать по усмотрению.

Вариант 24.

Модель (7.34) предсказывает сопряженные колебания численности жертв и хищников. Исследовать зависимость запаздывания амплитуд колебаний численности хищников от амплитуд колебаний численности жертв в зависимости от соотношения значений начальных численностей популяций N_0 и C_0 . Значения остальных параметров фиксировать по усмотрению.

Дополнительная литература

1. Бейли Н. Статистические методы в биологии. — М.: ИЛ, 1962.
2. Бейли Н. Математика в биологии и медицине. — М.: Мир, 1970.
3. Бигон М., Харпер Дж., Тауесенд К. Экология. Особи, популяции и сообщества. Пер. с англ. В двух книгах. — М.: Мир, 1989.
4. Горстко А.Б., Угольницкий Г.А. Введение в моделирование эколого-экономических систем. — Ростов, РГУ, 1990.
5. Рифлекс Р. Основы общей экологии. Пер. с англ. — М.: Мир, 1979.

Расчетная работа №4. Моделирование случайных процессов

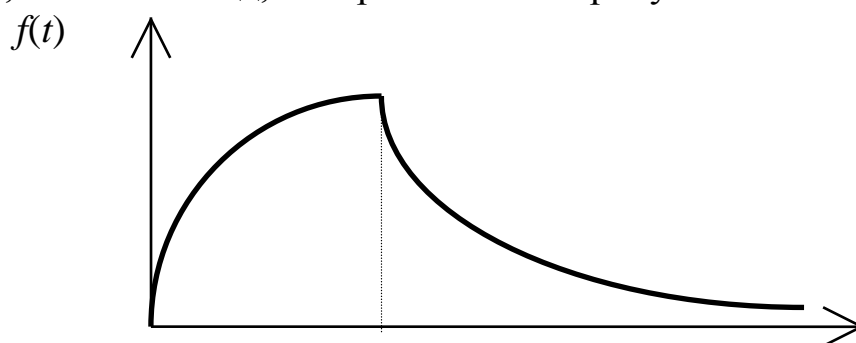
Краткая теории.

К числу случайных процессов, изучаемых методом имитационного моделирования (методом Монте-Карло) относятся, в частности, процессы, связанные с формированием и обслуживанием очередей (так называемые процессы **массового обслуживания**). Простейшая задача данного класса такова. Имеется система массового обслуживания с одним узлом обслуживания (магазин с одним продавцом, ремонтная зона в автохозяйстве, травмопункт с одним врачом, телефонная станция с одним входом, сервер с одним входным каналом и т.д.). К услугам системы клиенты прибегают случайным образом (с заданной функцией распределения отрезков времени между приходами). Если система свободна, то начинает обслуживать клиента сразу, иначе ставит его в очередь. Длительность обслуживания каждого клиента — случайная величина с известным законом распределения.

В ходе решения данной задачи требуется дать ответ на вопросы типа: какова функция распределения вероятностей времени ожидания клиента в очереди? Времени простоя системы в ожидании клиентов? Если сами эти функции определять сложно, то каковы их наиболее важные характеристики (т.е. математическое ожидание, дисперсия и т.д.)?

Основа этой задачи — случайный процесс прихода клиентов в систему обслуживания. Промежутки между приходами любой последовательной пары клиентов — независимые случайные события, распределенные по некоторому закону. Реальный характер этого закона может быть установлен лишь путем многочисленных наблюдений; в качестве простейшей модельной функции плотности вероятности можно взять равновероятное распределение в диапазоне времени от 0 до некоторого T — максимально возможного промежутка между приходами двух последовательных покупателей. При этом распределении вероятность того, что между приходами двух покупателей пройдет 1 минута, 3 минуты или 8 минут одинакова (если $T > 8$ мин).

Такое распределение, конечно, малореалистично; реально для большинства процессов массового обслуживания функция распределения растет от $t = 0$, имеет при некотором значении $t = \tau$ максимум и быстро спадает при больших t , т.е. имеет вид, изображенный на рисунке 7.6.



τt

Рис. Схематическое изображение плотности вероятности распределения времени между появлениями клиентов в системе массового обслуживания

Можно, конечно, подобрать немало элементарных функций, имеющих качественно такой вид. В теории массового обслуживания широко используется семейство функций Пуассона

$$p_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} \cdot e^{-\lambda t} \quad (4.1)$$

где λ — некоторая константа, n — произвольное целое. Функции (4.1) имеют максимум при $\tau = n/\lambda$ и нормированы.

Второй случайный процесс в этой задаче, никак не связанный с первым, определяется последовательностью случайных событий — длительностей обслуживания каждого из покупателей. Распределение вероятностей длительности обслуживания имеет тот же качественный вид, что и в предыдущем случае.

Для примера в таблице в колонке *A* записаны случайные числа — промежутки между приходами клиентов (в минутах), в колонке *B* — случайные числа — длительности обслуживания (в минутах). Для определенности взято $a_{\max} = 10$ и $b_{\max} = 5$. Из этой короткой таблицы, разумеется, невозможно установить, каковы законы распределения приняты для величин *A* и *B*. Остальные колонки предусмотрены для удобства анализа; входящие в них числа находятся путем элементарного расчета. В колонке *C* представлено условное время прихода клиента, *D* — момент начала обслуживания, *E* — конца обслуживания, *F* — длительность времени, проведенного клиентом в системе в целом, *G* — в очереди в ожидании обслуживания, *H* — время, проведенное системой в ожидании клиентов (если их нет). Таблицу удобно заполнять по горизонтали, переходя от строчки к строчке. Приведем для удобства соответствующие формулы (в них $i = 1, 2, 3, \dots$):

$$c_1 = 0, c_{i+1} = c_i + a_{i+1}, d_1 = 0, d_{i+1} = \max(c_{i+1}, e_i) \quad (4.2)$$

— так как начало обслуживания очередного клиента определяется либо временем его прихода, если система не занята, либо временем ухода предыдущего клиента;

$$e_1 = b_1, e_i = d_i + b_i; f_i = e_i - c_i; g_1 = 0, g_{i+1} = f_{i+1} - b_{i+1}; h_1 = 0, h_{i+1} = d_{i+1} - e_i \quad (4.3)$$

Таким образом, при данных случайных наборах чисел в колонках *A* и *B*, и клиентам приходилось стоять в очереди (колонка *G*), и системе простаивать в ожидании клиента (колонка *H*).

№ п/п	A	B	C	D	E	F	G	H
1	0	3	0	0	3	3	0	0
2	1	1	1	3	4	3	2	0
3	8	2	9	9	11	2	0	5
4	3	3	12	12	15	3	0	1
5	5	4	17	17	21	4	0	2

Какие вопросы возникают в первую очередь при моделировании систем такого вида? Во-первых, какое среднее время приходится стоять в очереди? Ответить на него кажется несложно: найти

$$\bar{g} = \frac{1}{n}(g_1 + g_2 + \dots + g_n) \quad (4.4)$$

в некоторой серии испытаний. Аналогично можно найти среднее значение величины *h*. Труднее ответить на вопрос о достоверности полученных результатов; для этого надо провести несколько серий испытаний и использовать стандартные методы математической статистики (часто уместна обработка с помощью распределения Стьюдента).

Более сложный вопрос — каково распределение случайных величин *G* и *H* при заданных распределениях случайных величин *A* и *B*? Качественный ответ на него можно попытаться получить построив соответствующие гистограммы по результатам моделирования. Затем делается некоторая гипотеза о виде распределения и используются один или несколько статистических критериев проверки достоверности этой гипотезы.

Располагая функцией распределения (пусть даже эмпирической, но достаточно надежной), можно ответить на любой вопрос о характере процесса ожидания в очереди. Например: какова вероятность прождать дольше *m* минут? Ответ будет получен, если найти отношение площади криволинейной трапеции, ограниченной графиком плотности распределения, прямыми *x=m* и *y=0*, к площади всей фигуры.

Контрольные вопросы

1. Что такое «случайный процесс»?
2. Каковы принципы компьютерного генерирования равномерно распределенных случайных чисел?

3. Как можно получить последовательность случайных чисел с пуассоновским законом распределения?
4. Что такое «система массового обслуживания»? Приведите примеры.
5. В чем заключается метод Монте-Карло вычисления площадей плоских фигур? Объемов тел?
6. Какие примеры случайных процессов Вы можете привести?

Рекомендации.

1. При выполнении данной работы необходима генерация длинных последовательностей псевдослучайных чисел с заданным законом распределения вероятностей. Ее можно основывать на стандартном датчике равномерно распределенных случайных чисел, встроенном в применяемую систему программирования, с использованием одной из процедур пересчета данной последовательности в последовательность с нужным законом распределения (например, процедуру «отбор-отказ»).

2. Одна из центральных задач при моделировании случайных процессов — нахождение характеристик случайных величин, являющихся объектом моделирования. Главная такая характеристика — функция распределения. Ее вид можно качественно оценить по гистограмме, построенной в ходе моделирования, а гипотезу о функциональной форме проверить с помощью одного из стандартных критериев, используемых в математической статистике (например, критерия χ^2). Однако это не всегда целесообразно, особенно если в задаче требуется определить лишь некоторые характеристики случайной величины — чаще всего среднее значение и дисперсию. Их можно найти без моделирования самой функции распределения. При этом статистическая оценка достоверности результатов является обязательной.

3. Результаты моделирования уместно выводить на экран компьютера в следующих видах: таблицы значений рассчитываемой величины (как правило, в нескольких выборках), гистограмм распределения случайных величин, построенных в ходе моделирования.

4. Целесообразно там, где это возможно, сопровождать имитационное моделирование визуальным отображением соответствующего процесса на экране компьютера (процесс формирования очереди, рождение и исчезновение объектов в задачах моделирования популяций и т.д.).

Задание к расчетной работе №4

Произвести имитационное моделирование указанного случайного процесса и оценить достоверность полученных результатов, пользуясь статистическими критериями.

Варианты к расчетной работе №4

Вариант 1.

Провести моделирование очереди в магазине с одним продавцом при равновероятных законах распределения описанных выше случайных величин: приход покупателей и длительность обслуживания (при некотором фиксированном наборе параметров). Получить устойчивые характеристики: средние значения ожидания в очереди покупателем и простой продавца в ожидании прихода покупателей, оценить их достоверность. Оценить характер функции распределения величин g и h .

Вариант 2.

Провести то же моделирование при пуассоновских законах распределения вероятностей входных событий: приход покупателей и длительность обслуживания (при некотором фиксированном наборе параметров).

Вариант 3.

Провести то же моделирование при нормальном законе распределения вероятностей входных событий: приход покупателей и длительность обслуживания (при некотором фиксированном наборе параметров).

Вариант 4.

В рассмотренной выше системе может возникнуть критическая ситуация, когда очередь неограниченно растет со временем. В самом деле, если покупатели заходят в магазин очень часто (или продавец работает слишком медленно), то очередь начинает нарастать, и в рассматриваемой системе с конечным временем обслуживания наступит кризис.

Построить зависимость между величинами (a_{\max}, b_{\max}) , отражающую границу указанной критической ситуации, при равновероятном распределении входных событий.

Вариант 5.

На междугородней телефонной станции две телефонистки обслуживают общую очередь заказов. Очередной заказ обслуживает та телефонистка, которая первой освободилась. Если обе в момент поступления заказа заняты, то звонок аннулируется и требуется звонить снова. Смоделировать процесс, считая входные потоки пуассоновскими.

Вариант 6.

Смоделировать ситуацию, описанную в предыдущем варианте, но считать, что если в момент попытки сделать заказ обе телефонистки заняты, то формируется очередь.

Вариант 7.

Пусть на телефонной станции с одним входом используется обычная система: если абонент занят, то очередь не формируется и надо звонить снова. Смоделировать ситуацию: три абонента пытаются дозвониться до одного и того же лица и в случае успеха разговаривают с ним некоторое (случайное по длительности) время. Какова вероятность, что некто, пытающийся дозвониться, не сможет сделать это за определенное время T ?

Вариант 8.

Смоделировать ситуацию, описанную в предыдущем варианте, но считать, что если в момент попытки связаться телефон абонента занят, то формируется очередь.

Вариант 9.

На травмопункте работает один врач. Длительность лечения больного и промежутки времени между поступлениями больных — случайные величины, распределенные по пуассоновскому закону. По тяжести травм больные делятся на три категории, поступление больного любой категории — случайное событие с равновероятным распределением. Врач вначале занимается больными с максимально тяжелыми травмами (в порядке их поступления), затем, если таковых нет, больными с травмами средней степени (в порядке их поступления), и лишь затем — больными с легкими травмами. Смоделировать процесс и оценить средние времена ожидания в очереди больных каждой из категорий.

Вариант 10.

Смоделировать ситуацию, описанную в предыдущем варианте, при условии, что врачей два, а больные делятся не на три, а на две категории.

Вариант 11.

Одна ткачиха обслуживает группу станков, осуществляя по мере необходимости краткосрочное вмешательство, длительность которого — случайная величина. Какова вероятность простоя сразу двух станков? Как велико среднее время простоя одного станка?

Вариант 12.

Смоделировать ситуацию, описанную в предыдущем варианте, если группу станков совместно обслуживают две ткачихи.

Вариант 13.

В городском автохозяйстве две ремонтных зоны. Одна обслуживает ремонты краткой и средней продолжительности, другая — средней и долгой (т.е. среднесрочный ремонт может осуществлять каждая из зон). По мере поломок в автохозяйство доставляют транспорт; промежуток времени между доставками — пуассоновская случайная величина. Продолжительность ремонта — случайная величина с нормальным законом распределения. Смоделировать описанную систему. Каковы средние времена ожидания в очереди транспорта, требующего, соответственно, краткосрочного, среднесрочного и длительного ремонта?

Вариант 14.

Реализовать имитационную модель статистического моделирования для решения задачи Бюффона (XVIII в.). Автор аналитически нашел, что если на поле, разграфленное параллельными прямыми, расстояние между которыми L , бросается наугад игла длиной l , то вероятность того, что игла пересечет хотя бы одну прямую, определяется формулой $p = \frac{2l}{\pi L}$. Эта задача дала способ

имитационному определению числа π . Действительно, если $L=2l$, то $p = \frac{1}{\pi}$. В ходе моделирования выполнить этот расчет.

Вариант 15.

Разработать модель случайного одномерного блуждания (модель «пьяницы»). Блуждание задается по правилу: если случайное число из отрезка $[0,1]$ меньше 0,5, то делается шаг вправо на расстояние h , в противном случае — влево. Распределение случайных чисел принять равновероятным.

Решить задачи: какова вероятность при таком блуждании удалиться от начальной точки на n шагов?

Вариант 16.

В условиях задачи из предыдущего варианта получить ответ на вопрос: какова вероятность «пьянице» вернуться через n шагов в начальную точку?

Вариант 17.

Точка хаотически блуждает на плоскости по узлам квадратной сетки с возможностью делать с равной вероятностью шаги влево-вправо-вверх-вниз на фиксированный (за один ход) шаг. Движение происходит в замкнутом прямоугольном объеме и при соприкосновении со стенкой происходит зеркальное отражение от нее.

Ответить в ходе моделирования на вопрос: как связана частота посещения каждого узла с расстоянием от него до того узла, из которого начинается движение?

Вариант 18.

Смоделировать ту же ситуацию, что и в задании к варианту 11, при условии неограниченной области блуждания, и ответить на заданный вопрос.

Вариант 19.

Смоделировать полет пчелы. На плоскости (поляне) случайным образом растут медоносные растения с заданной концентрацией (на 1 м^2). В центре — улей, из которого вылетает пчела. Пчела может долететь от растения до любого другого растения, но вероятность выбора монотонно уменьшается с увеличением расстояния между растениями (по некоторому закону). Какова вероятность посещения пчелой некоторого растения за заданное количество элементарных полетов?

Вариант 20.

Реализовать модель плоского броуновского движения n частиц в прямоугольнике. Частицы считать шариками конечного размера. Удары частиц друг о друга и о стенки моделировать как абсолютно упругие. Определить в этой модели зависимость давления газа на стенки от числа частиц.

Вариант 21.

Разработать в деталях и реализовать модель перемешивания (диффузии) газов в замкнутом сосуде. В начальный момент времени каждый газ занимает половину сосуда. Изучить с помощью этой модели зависимость скорости диффузии от различных входных параметров.

Вариант 22.

Реализовать имитационную модель системы «хищник-жертва» по следующей схеме.

«Остров» размером 20×20 заселен дикими кроликами, волками и волчицами. Имеется по несколько представителей каждого вида. Кролики довольно глупы: в каждый момент времени они с одинаковой вероятностью $1/9$ передвигаются в один из восьми соседних квадратов (за исключением участков, ограниченных береговой линией) или просто сидят неподвижно. Каждый кролик с вероятностью $0,2$ превращается в двух кроликов. Каждая волчица передвигается случайным образом, пока в одном из соседних восьми квадратов не окажется кролик, за которым она охотится. Если волчица и кролик оказываются в одном квадрате, волчица съедает кролика и получает одно очко. В противном случае она теряет $0,1$ очка.

Волки и волчицы с нулевым количеством очков умирают.

В начальный момент времени все волки и волчицы имеют 1 очко.

Волк ведет себя подобно волчице до тех пор, пока в соседних квадратах не исчезнут все кролики; тогда если волчица находится в одном из восьми близлежащих квадратов, волк гонится за ней.

Если волк и волчица окажутся в одном квадрате и там нет кролика, которого нужно съесть, они производят потомство случайного пола.

Пронаблюдать за изменением популяции в течение некоторого периода времени. Проследить, как сказываются на эволюции популяций изменения параметров модели.

Вариант 23.

Промоделировать процесс распространения инфекции стригущего лишая по участку кожи размером n на n (n — нечетное) клеток.

Предполагается, что исходной зараженной клеткой кожи является центральная. В каждый интервал времени пораженная инфекцией клетка может с вероятностью 0,5 заразить любую из соседних здоровых клеток. По прошествии шести единиц времени зараженная клетка становится невосприимчивой к инфекции, возникший иммунитет действует в течение последующих четырех единиц времени, а затем клетка оказывается здоровой. В ходе моделирования описанного процесса выдавать текущее состояние моделируемого участка кожи в каждом интервале времени, отмечая зараженные, невосприимчивые к инфекции и здоровые клетки.

Проследить, как сказываются на результатах моделирования изменение размеров поля и вероятность заражения.

Вариант 24.

Разработать в деталях и реализовать модель распространения загрязняющих окружающую среду частиц вещества, выпускаемых в атмосферу заводской трубой (например, золы, получающейся после сжигания угля на электростанции). Считать движение частицы состоящим из двух компонент: в горизонтальной плоскости — под влиянием случайных порывов ветра (в простейшем случае — как описано в задании к варианту 14), в вертикальном — под действием силы тяжести.

Дополнительная литература

1. *Бейли Н.* Статистические методы в биологии. — М.: ИЛ, 1962.
2. *Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н.* Введение в теорию массового обслуживания. — М.: Наука, 1966.
3. *Саати Т.* Элементы теории массового обслуживания и ее приложения. Пер. с англ. — М.: Сов. радио, 1991.

4. *Шеннон Р.* Имитационное моделирование систем — искусство и наука. Пер. с англ. — Мир, 1978.

Рекомендуемая литература

1. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы математической физики. —М.: Научный мир, 2003.
2. Мажукин В.И., Королева О.Н. Математическое моделирование в экономике. — М.: МПСИ, Флинта, 2004.
3. Михайлов Г.А., Войтишек А.В. Численное статистическое моделирование. Методы Монте-Карло: Учеб.пособ. М.:Изд. Центр,»Академия»,2006.-368с.
4. Введение в математическое моделирование: Учеб. пособие /В.Н. Ашихмин, М.Б.Гитман, И.Э.Келлер и др.-М.:Логос,2005.-439с.
5. Введение в математическое моделирование: Учеб. Пособие \Под ред.П.В.Трусова-М.:Логос, 2005..-440 с.
6. Бордовский Г.А.Физические основы математического моделирования: Учеб. пособ. для вузов/ Бордовский Г.А., Кондратьев А.С. Чоудери А.Д.Р .-М.:Изд.Центр «Академия», 2005.-320с.
7. Соболев Е.В. , Месхи Б.Ч., Пешхоев И.М. Практикум по вычислительной математике – Ростов н/Д : Феникс, 2008. – 342 с.
8. Зализняк В.Е. Численные методы. Основы научных вычислений: учебное пособие для бакалавров /В.Е. Зализняк. – 2-е изд., -М.: Издательство Юрайт, 2012. – 356 с.
9. Самарский А.А. Численные методы решения обратных задач математической физики/ А.А.Самарский, П.Н. Вабищевич. -М.: Едиториал УРСС,2004.-478с.
10. Павловский Ю.Н. и др. Имитационное моделирование: Учеб. пособ. для вуов./Павловский Ю.Н, Белотелов Н.В., Бродский Ю.Н.- М.:Академия,2008.-236с.
11. Демидович Б.Н., Марон И.А. Основы вычислительной математики. -М.: Наука, 1966.
12. Лапчик М.П., Рагулина М.И., Хеннер Е.К. Численные методы.- М.: ”Академия”, 2004.
13. Назаров Н.Г. Метромегия. Основные понятия математической модели. Уч. пособие.-М.: Высшая школа, 2002.
14. Киреев В.И., Пантелеев А.В. Численные методы в примерах и задачах: Учеб. пособие-М.:Высш. школа,2004.-480с.

15. Бахвалов Н.С., Лапин А.В. Численные методы в задачах и упражнениях. Уч. пособие / Под ред. В.А. Садовнического.-М.: Высшая школа, 2000.
16. Костомаров Д.П.Фаворский А.П. Вводные лекции по численным методам:Учеб пособ.-М.:Логос,2004-184с.
17. Лапчик М.П.Численные методы: Учеб. пособ. для вузов./М.П.Лапчик, М.И.Рагулина, Хеннер Е.К. -М.: Изд. «Академия», 2005.-384с.
18. Бахвалов Н.С. Численные методы -М.: Наука, 2004.
19. Демидович Б.Н., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. –М.: Наука, 1967.
20. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. –М.: Наука, 1989.
21. Воробьева Г.Н., Данилова А.Н. Практикум по вычислительной математике. -М.: Высшая школа, 1990.
22. Березин Н.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. Т 1,2. - М.: Физматгиз, 1962.
23. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. -М.: Наука, 1986.
24. Иванов В.В. Методы вычислений на ЭВМ. Киев: Наукова думка, 1986.
25. Сборник Задач по методам вычислений: Учебное пособие: Для вузов. / Под ред. П.И. Монастырского. - 2-е изд. перераб. и доп. - М.: Физматлит, 1994. -320 с.
26. Латыпов И.И. Численные методы. Лабораторный практикум: Учеб. пособ. для студ. физ.-мат. фак. Кн.1.-Бирск: Бирск. гос. соц.-пед.акад.,2007.-82 с. Гриф УМО.