

БИРСКИЙ ФИЛИАЛ
ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО БЮДЖЕТНОГО
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(БИРСКИЙ ФИЛИАЛ БАШГУ)

Бигаева Л.А., Латыпов И.И.

Курс лекций по численным методам

Учебное пособие для студентов
физико-математического факультета

Бирск 2018

УДК 519.21
ББК **. **
Б- **

Печатается по решению
редакционно-издательского совета
Бирского филиала Башкирского
государственного университета

Рецензенты:

доктор ф.-м.н., профессор **Гималтдинов И.К.** (УГНТУ);
кандидат ф.-м.н., доцент **Чудинов В.В.** (Бирский филиал
БашГУ)

Бигаева Л.А., Латыпов И.И. Курс лекций по численным методам:
Учебное пособие для студентов физико-математического факультета.–
Бирск: Бирск. фил. Баш. гос. ун-та, 2018. – 120 с.

ISBN - - - -

В пособии представлены материалы, необходимые для изучения курса «Численные методы». Пособие содержит необходимый материал по теории погрешностей и основных разделов вычислительной математики. Приведены алгоритмы программной реализации численных методов, подборки примеров и задач для практических занятий по выделенным темам, тестовые задания. В работе включены примерные темы спецкурсов, вычислительного практикума, предлагаемые направления курсовых исследований; приводятся задания для проверки остаточных знаний и список вопросов для экзаменов.

Учебное пособие адресовано студентам очного и заочного отделений физико-математического факультета по направлениям подготовки «Математика», «Механика», «Прикладная математика», «Прикладная информатика» высших учебных заведений.

ISBN - - - -

© Л.А. Бигаева, И.И. Латыпов, 2018
© Бирский филиал Башкирского
государственного университета, 2018

Содержание

Введение	5
1.Элементы теории погрешностей	10
1.1.Классификация погрешностей.	10
1.2.Абсолютная и относительная погрешности.	12
1.3.Десятичная запись приближенных чисел. Значащая цифра.....	13
1.4.Округление чисел.	14
1.5.Погрешность суммы, разности, произведения и частного.	14
1.6.Общая формула для погрешности.	15
1.7 Тестовые задания.	18
2. Численные методы решения алгебраических и трансцендентных уравнений.....	19
2.1. Отделение корней алгебраических и трансцендентных уравнений.	19
2.2. Метод половинного деления	23
2.3 Тестовые задания.	26
3.Численные методы решения систем уравнений	27
3.1 Метод квадратных корней.....	28
3.2 Метод Халецкого	29
3.3. Метод простой итерации.....	30
3.4. Метод Зейделя	36
3.5 Тестовые задания.	40
3.6 Методы решения систем нелинейных уравнений.....	41
3.6.1 Метод Ньютона	41
3.6.2 Метод итерации.....	44
3.6.3 Метод скорейшего спуска (метод градиента)	46
4. Методы приближения функций.....	49
4.1.Постановка задачи аппроксимации функций.....	49
4.2.Существование и единственность интерполяционного многочлена.	51
4.3.Интерполяционный многочлен Лагранжа.....	52
4.4. Организация ручных вычислений по формуле Лагранжа	53
4.5.Программирование интерполяционного многочлена Лагранжа.....	54
4.6. Интерполяционные формулы Ньютона.....	57
4.6.1. Первая интерполяционная формула Ньютона	58
4.6.2. Вторая интерполяционная формула Ньютона.....	60
4.7. Погрешность многочленной интерполяции	62
4.8. Интерполирование функций кубическими сплайнами	64

4.9. Обратное интерполирование.....	67
4.10. Приближенное дифференцирование	70
4.11 Тестовые задания.	74
5. Численное интегрирование.....	75
5.1. Квадратурные формулы Ньютона-Котеса.....	77
5.2. Формула Трапеций	77
5.3. Формула Симпсона.....	81
5.4. Формулы прямоугольников.	85
5.5. Учет погрешностей квадратурных формул методом двойного пересчета.	86
5.6 Тестовые задания. Численное интегрирование.....	89
6. Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений.....	91
6.1. Метод последовательных приближений (Метод Пикара).....	93
6.2. Метод Эйлера.....	96
6.3. Модификации метода Эйлера	97
6.4. Метод Рунге-Кутты.	98
6.5 Тестовые задания.	100
7. Темы спецкурсов.	102
8. Темы для вычислительного практикума	103
9. Примерные темы курсовых работ.....	107
10. Примерные вопросы к экзамену по курсу «Численные методы»	110
11. Задания для проверки остаточных знаний	112
Литература	117

Введение

Становление математики как науки связано с необходимостью решения практических задач: измерений на местности, определения площадей и объемов, навигации и т.д. Вследствие этого математика была **численной**, ее целью являлось получение решения в виде **чисел**.

Раздел математики, имеющий дело с созданием и обоснованием численных алгоритмов для решения сложных задач различных областей науки, называют **прикладной математикой**.

Главная задача прикладной математики — нахождение решения с требуемой точностью; этим она отличается от классической математики, которая основное внимание уделяет исследованию условий существования решения и свойств решения.

История развития прикладной математики.

Первый период (3—4 тыс. лет назад).

Период связан с введением конторских книг, вычислением площадей и объемов, расчетами простейших механизмов; т.е. несложными задачами арифметики, алгебры и геометрии.

Вычислительные средства - собственные пальцы, счеты.

Исходные данные содержали мало цифр, большинство выкладок выполнялось точно, без округлений.

Второй период (XVII-XIX в).

Решались задачи астрономии, геодезии и расчета механических конструкций, сводящиеся либо к ОДУ (обыкновенным дифференциальным уравнениям), либо к большим СУ (системам уравнений).

Вычислительные средства: таблицы элементарных функций, арифмометры и логарифмические линейки; клавишные машины с электромотором. Скорость этих средств была невелика, и вычисления занимали дни, недели и даже месяцы.

Вычисления выполнялись с округлением; нередко приходилось сохранять до 8 значащих цифр. Появились численные методы **Ньютона, Эйлера, Лобачевского, Гаусса, Чебышева, Тихонова**.

Третий период (связанный с появлением ЭВМ, начался примерно с 1940 г. (ЭНИАК, МЭСМ)).

Военные задачи — например, наводка зенитных орудий на быстро движущийся самолет— требовали недоступных человеку скоростей и привели к разработке ЭВМ.

Скорость ЭВМ настолько превосходила скорость механических средств, что стало возможным проводить вычисления огромного объема, численно решать новые классы задач; например, процессы в сплошных средах, описываемые уравнениями в частных производных. Стали разрабатываться новые методы, ориентированные на ЭВМ (метод Монте-Карло), так как многие старые методы оказались неподходящими для автоматизированных расчетов.

Современные численные методы и мощные ЭВМ дали возможность решать такие задачи, о которых полвека назад могли только мечтать. Но цифровые ЭВМ умеют выполнять только арифметические действия и логические операции. Поэтому помимо разработки математической модели, требуется еще разработка алгоритма, сводящего все вычисления к последовательности арифметических и логических действий.

Численные методы являются одним из мощных математических средств решения задачи. Простейшие численные методы мы используем всюду, например, извлекая квадратный корень на листке бумаги. Есть задачи, где без достаточно сложных численных методов не удалось бы получить ответа; классический пример — открытие Нептуна по аномалиям (возмущениям) движения Урана.

Однако численные методы не всемогущи. Они не отменяют все остальные математические методы. Начиная исследовать проблему, целесообразно использовать простейшие модели, аналитические методы. И только разобравшись в основных чертах явления, надо переходить к полной модели и сложным численным методам; даже в этом случае численные методы выгодно применять в комбинации с аналитическими методами.

Современный физик или инженер-конструктор для успешной работы должен одинаково хорошо владеть и «классическими» методами, и численными методами математики. Успех в прикладной науке требует широкой математической подготовки, т.к. только такая подготовка может обеспечить приспособляемость к непрерывно меняющимся типам задач. Одной из причин необходимости изучения «бесполезных» для практики на первый взгляд разделов математики является достижение более уверенного и более свободного владения «нужными» разделами математики.

Основные этапы решения задач на ЭВМ

1. Математическая постановка задачи.
2. Построение математической модели, (выявление существенных моментов, отбрасывание второстепенных деталей);
3. Выбор метода решения и разработка алгоритма решения задачи.
4. Создание программы, отладка и тестирование.
5. Подстановка исходных данных, численный расчет и анализ результатов

1. Фабула практических задач изначально связана не с идеальными, а с реальными объектами — производственными процессами и явлениями природы, физическими закономерностями, экономическими отношениями. Поэтому решение задачи начинается с описания исходных данных и целей на языке строго определенных математических понятий. **Математической постановкой задачи** называют точную формулировку условий и целей решения средствами математики.

2. Выделяя наиболее существенные свойства реального объекта, исследователь описывает их с помощью математических соотношений. Этот этап называют **построением математической модели, или моделированием**. Математическая модель может иметь вид уравнения, системы уравнений или быть выраженной в форме иных, как угодно сложных, математических структур или соотношений самой различной природы.

3. Исследователь разрабатывает (или подбирает из числа известных) **метод** решения задачи и составляет **алгоритм** решения задачи в рамках заданной математической модели.

4. На **этапе программирования** алгоритм задачи записывается на языке, понятном ЭВМ (или используется имеющееся программное обеспечение).

5. Этап **реализации** на ЭВМ, получение и интерпретация результатов. Осмысливание полученных результатов, сопоставление их с результатами контрольного просчета, а также с экспериментальными данными. Одни результаты могут оказаться приемлемыми, а другие — нет; такие решения следует отбросить. Высшим критерием пригодности полученных результатов в конечном итоге является практика. Если расчеты хорошо согласуются с экспериментом, то это свидетельствует о правильном выборе модели; такую модель можно

использовать для расчета процессов данного типа. Если же расчет и эксперимент не согласуются, то модель необходимо пересмотреть и уточнить.

Построение математической модели является наиболее сложным и ответственным этапом решения. Если выбранная математическая модель слишком грубо отражает изучаемое явление, то какие бы методы решения вслед за этим ни применялись, найденные значения не будут отвечать условиям реальной задачи и окажутся бесполезными. Например, скорость ракеты $v(t)$ при вертикальном полете в вакууме определяется уравнением

$$\left(M - \int_0^t m(\tau) d\tau \right) \left(\frac{dv}{dt} + g \right) = cm(t),$$

где M — начальная масса ракеты, $m(\tau)$ — заданный расход горючего, g — ускорение поля тяготения, а c — скорость истечения газов.

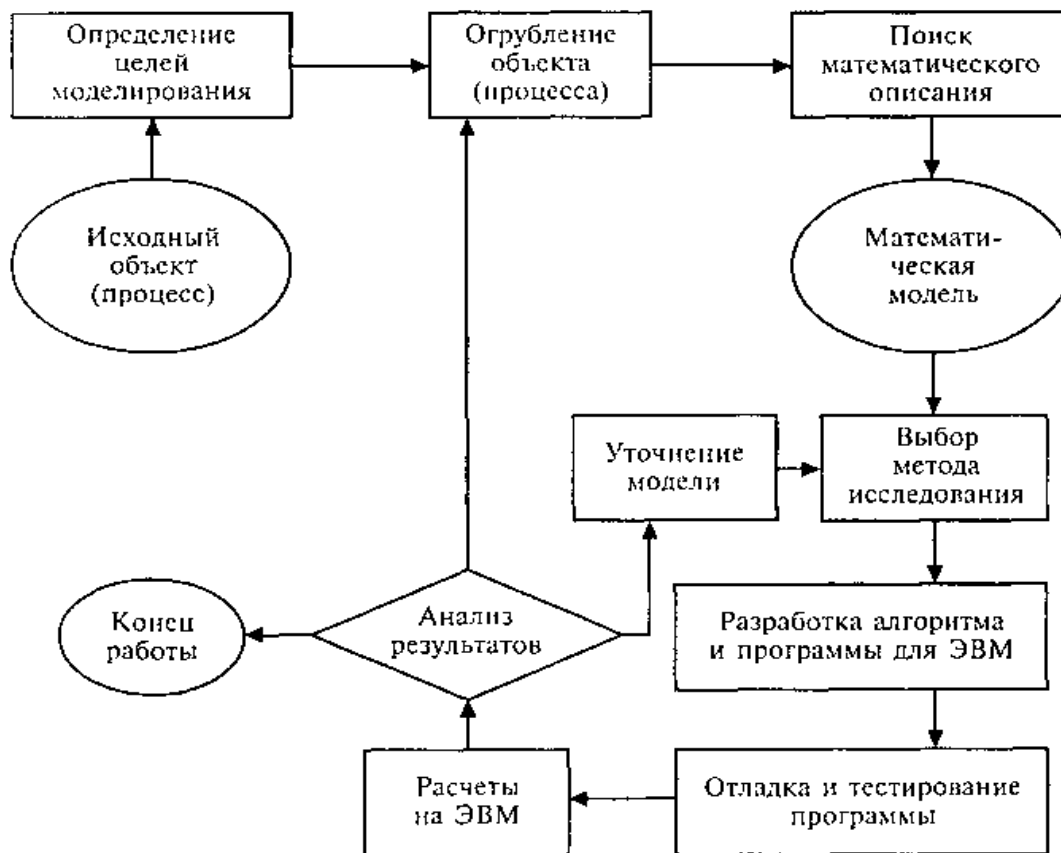


Рис.1 Примерный алгоритм численной реализации математической модели.

Так, это уравнение непригодно для запуска ракеты с поверхности Земли, ибо в нем не учтено сопротивление воздуха.

В зависимости от сложности модели применяются различные математические подходы. Для наиболее грубых и несложных моделей зачастую удается получить аналитические решения.

Например, данное уравнение легко интегрируется при $g = \text{const}$ и

$$m(t) = \text{const}, v(0) = 0 : v(t) = c \ln \left(\frac{M}{M - mt} \right) - gt.$$

Из-за грубости модели физическая точность этого подхода невелика; нередко такой подход позволяет оценить лишь порядки величин.

Выяснение в исходной информации необходимых и достаточных условий для существования и единственности решения имеет большое практическое значение, так как определяет цикл тех наблюдений, которые должны быть включены в модель. В числе общетеоретических вопросов можно назвать также вопрос об устойчивости решений по входным условиям задачи. Под устойчивостью понимают непрерывную зависимость решения от входных данных т.е. когда малым изменениям входных данных отвечает малое изменение решения.

Определение. Задача нахождения элемента $x \in X$ по заданному элементу y (X и Y - полные метрические пространства) из уравнения $A(x) = y$ называется **корректной (или корректно поставленной по Адамару)**, если для любых y решение x существует, единственно и непрерывно зависит от правой части уравнения (т.е. из сходимости $y_n \rightarrow y$ по метрике пространства Y следует сходимость $x_n \rightarrow x$ по метрике пространства X).

Примеры.

$$\begin{array}{ll} 1) \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases} & 2) \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + 1.00001x_2 = 1.000005 \end{cases} \\ 3) \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + 1.00001x_2 = 1 \end{cases} & 4) \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 1.000005 \end{cases} \end{array}$$

Из анализа приведенных систем уравнений, следует

- 1) решение не единственно;
- 2) решение существует и единственно, $x^* = (0.5; 0.5)$.

3) решение $x^* = (1; 0)$, значительно отличающееся от $x^* = (0.5; 0.5)$.

4) система вовсе не имеет решения.

В условиях использования ЭВМ численные методы выступают как мощное математическое средство решения практических задач. При этом важно иметь в виду, что сам по себе фактор использования ЭВМ не упрощает, а в некотором смысле даже усложняет (ввиду резкого возрастания количества выполняемых операций) оценку точности получаемых результатов.

Суть возникающих здесь проблем точно подмечена в известном принципе Питера: «ЭВМ многократно увеличивает некомпетентность вычислителя». Из этого остроумного замечания следует, что, используя для решения задачи ЭВМ, вычислитель должен не столько полагаться на могущество вычислительной техники, сколько помнить о том, *что* в конечном итоге он получает на выходе.

1.Элементы теории погрешностей

1.1.Классификация погрешностей.

На различных этапах решения возникают те или иные погрешности в расчетах, причинами которых являются:

1) математическое описание задачи является неточным, в частности неточно заданы исходные данные;

2) применяемые для решения задачи методы часто являются неточными, то есть получение точного решения требует неограниченного или очень большого числа арифметических действий, и поэтому вместо точного решения получаем приближенное решение с определенной точностью;

3) при вводе исходных данных в машину, при выполнении расчетов и при выводе результатов производятся округления.

Погрешности, соответствующие этим причинам называют:

- 1) ***неустранимой погрешностью;***
- 2) ***погрешностью метода;***
- 3) ***вычислительной погрешностью.***

Пример. Рассмотрим путь проходящий телом при равноускоренном движении a и с начальной скоростью v_0 за время t :

$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

1) неустранимая ошибка в самой математической модели: не учитывается сопротивление среды в которой движется тело, его размеры;

2) данные v_0 , a – определяются с некоторой точностью.

Полная погрешность задачи

Рассмотрим погрешность задачи в соответствии с выше рассмотренными причинами возникновения погрешностей.

Пусть:

T – точное решение задачи;

P – решение задачи по данному математическому описанию (соотношению);

P_1 – решение задачи, полученное при реализации численного метода в предположении отсутствия округления;

P_2 – решение, полученное в результате реальных вычислений.

Тогда:

Погрешность решения задачи $\Delta_0 = |P_2 - T|$ может быть представлена в виде

$$\Delta_0 = |P_2 - T| = |P_2 - P_1 + P_1 - P + P - T| \leq |P_2 - P_1| + |P_1 - P| + |P - T|.$$

Так как

$\Delta_1 = |P - T|$ – неустранимая погрешность, т.е. погрешность математической модели;

$\Delta_2 = |P_1 - P|$ – погрешность метода;

$\Delta_3 = |P_2 - P_1|$ – погрешность вычислений;

то полная погрешность решения задачи определяется следующим образом:

$$\Delta_0 \leq \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3$$

т.е. она складывается из всех перечисленных погрешностей.

Таким образом, при численном решении задачи получаем решение с определенной точностью – *приближенное решение*.

1.2. Абсолютная и относительная погрешности.

Приближенным числом \tilde{a} называют число, незначительно отклоняющееся от точного числа a и заменяющее последнее в вычислениях.

Абсолютной погрешностью Δ приближенного числа \tilde{a} называется величина:

$$\Delta = |a - \tilde{a}|.$$

Под предельной абсолютной погрешностью $\Delta_{\tilde{a}}$ приближенного числа \tilde{a} понимается всякое число, не меньшее абсолютной погрешности Δ , т.е.

$$\Delta = |a - \tilde{a}| \leq \Delta_{\tilde{a}}$$

Обычно записывается следующим образом: $a = \tilde{a} \pm \Delta_{\tilde{a}}$, которое имеет смысл неравенства

$$\tilde{a} - \Delta_{\tilde{a}} \leq a \leq \tilde{a} + \Delta_{\tilde{a}}.$$

Пример. Определить предельную абсолютную погрешность числа $u = 3,1415$, являющегося приближением числа $\pi = 3,141592\dots$

Имеет место неравенство:

$$3,1415 < \pi < 3,1416 \text{ или } |u - \pi| < 0,0001,$$

тогда $\Delta_u = 0,0001$; $\pi = 3,1415 \pm 0,0001$.

Абсолютная погрешность недостаточна для характеристики точности измерений или вычислений, например

$$l_1 = 1000,4 \pm 0,1 \text{ см}, l_2 = 10,5 \pm 0,1 \text{ см}.$$

Очевидно, что качество первого измерения выше, хотя предельные абсолютные погрешности у них одинаковы. Для характеристики степени точности приближения используют абсолютную погрешность, приходящуюся на единицу приближенной величины.

Относительной погрешностью δ приближенного числа \tilde{a} называют отношение абсолютной погрешности Δ этого числа к модулю точного числа a ($a \neq 0$):

$$\delta = \frac{\Delta}{|a|}, \Delta = |a| \cdot \delta$$

Предельной относительной погрешностью $\delta_{\tilde{a}}$ приближенного числа \tilde{a} называют всякое число не меньшее относительной погрешности этого числа δ :

$$\delta \leq \delta_{\tilde{a}}.$$

1.3.Десятичная запись приближенных чисел. Значащая цифра.

Число верных знаков.

Известно, что любое положительное число можно записать в виде конечной или бесконечной десятичной дроби:

$$a = a_m \cdot 10^m + a_{m-1} \cdot 10^{m-1} + \dots + a_{m-n+1} \cdot 10^{m-n+1} + \dots,$$

где $a_i = 0, 1, \dots, 9$.

Например: $23,71\dots = 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 + 7 \cdot 10^{-1} + 1 \cdot 10^{-2} + \dots$

На практике используются приближенные числа, которые представляют собой конечную десятичную дробь:

$$\tilde{a} = a_m \cdot 10^m + a_{m-1} \cdot 10^{m-1} + \dots + a_{m-n+1} \cdot 10^{m-n+1}$$

Все сохраняемые десятичные знаки называются **значащими цифрами** приближенного числа \tilde{a} , среди которых могут быть и нули.

$$\tilde{a} = 10,0153100$$

$$\tilde{a} = 0,00051000.$$

- **Значащими цифрами** приближенного числа называются все цифры в его десятичном представлении, начиная с первой не нулевой слева.
- Говорят, что n первых значащих цифр приближенного числа являются **верными в узком смысле**, если абсолютная погрешность этого числа не превышает половины единицы разряда, выражаемого n -й значащей цифрой, считая слева направо.

Тогда, если

$$\Delta = |a - \tilde{a}| \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{m-n+1},$$

то первые n цифр $a_m, a_{m-1}, \dots, a_{m-n+1}$ являются верными.

Пример. $a = 12,574, \tilde{a} = 12,580$.

$$\Delta = |a - \tilde{a}| = 0,006 < \frac{1}{2} \cdot 10^{-1}, \text{ тогда } m = 1, m - n + 1 = -1, n = 3.$$

Число верных знаков равно 3.

- Если $\Delta = |a - \tilde{a}| \leq 1 \cdot 10^{m-n+1}$, то первые n цифр $a_m, a_{m-1}, \dots, a_{m-n+1}$ являются **верными в широком смысле**.

1.4.Округление чисел.

Под округлением понимается замена точного или приближенного числа a числом a_1 с меньшим количеством значащих цифр. При этом a_1 выбирают так, чтобы погрешность округления $|a - a_1|$ была наименьшей.

Правила округления.

Чтобы округлить число до n -значащей цифры, отбрасывают все стоящие справа от n -значащей цифры, или, если это необходимо для сохранения разрядов, заменяют их нулями. При этом если первая из отброшенных цифр:

1) меньше 5, то оставшиеся десятичные сохраняются без изменений;

2) больше 5, то к последней оставшейся цифре прибавляется единица;

3) равна 5, и среди остальных отбрасываемых цифр есть ненулевые, то к последней оставшейся цифре прибавляется единица;

4) (правило четной цифры) равна 5, а остальные отбрасываемые равны нулю, то последняя оставшаяся цифра:

а) сохраняется неизменной, если она четная,

б) увеличивается на единицу, если она нечетная.

Пример.

1. $\pi = 3,141592$. Округление до 5 значащих цифр:

$$3,1416, \Delta \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{-4}; 4 - 3,142, \Delta \leq \frac{1}{2} \cdot 0,001; 3 - 3,14, \Delta \leq \frac{1}{2} \cdot 0,01.$$

6. $a = 21,27500$, $b = 3,248500$. Округлить до 4 значащих цифр.

$$a_1 = 21,28, \Delta \leq \frac{1}{2} \cdot 0,01, b_1 = 3,248, \Delta \leq \frac{1}{2} \cdot 0,001.$$

1.5.Погрешность суммы, разности, произведения и частного.

а) Пусть $S = x + y$ и $D = x - y$. Тогда $\Delta S = \Delta x + \Delta y$ и $\Delta D = \Delta x + \Delta y$.

$$\delta(x + y) = \frac{\Delta x + \Delta y}{|x + y|} = \frac{|x|}{|x + y|} \frac{\Delta x}{|x|} + \frac{|y|}{|x + y|} \frac{\Delta y}{|y|} = \frac{|x|}{|x + y|} \delta x + \frac{|y|}{|x + y|} \delta y \text{ и}$$

$$\delta(x - y) = \frac{\Delta x + \Delta y}{|x - y|} = \frac{|x|}{|x - y|} \frac{\Delta x}{|x|} + \frac{|y|}{|x - y|} \frac{\Delta y}{|y|} = \frac{|x|}{|x - y|} \delta x + \frac{|y|}{|x - y|} \delta y.$$

б) Пусть $p = x \cdot y$, $q = x / y$ и $p > 0$, $q > 0$ (иначе берем по модулю).

Тогда $\ln p = \ln x + \ln y$ и $\ln q = \ln x - \ln y$. Так как $\Delta \ln z \approx d \ln z = \frac{\Delta z}{z}$, тогда

$\Delta \ln p = \Delta \ln q = \Delta \ln x + \Delta \ln y$. Отсюда $\frac{\Delta p}{p} = \frac{\Delta q}{q} = \frac{\Delta x}{|x|} + \frac{\Delta y}{|y|}$ и

$\delta(x \cdot y) = \delta(x / y) = \delta(x) + \delta(y)$, а также $\Delta(x \cdot y) = \Delta x |y| + \Delta y |x|$ и

$$\Delta(x / y) = \frac{\Delta x |y| + \Delta y |x|}{y^2}.$$

1.6.Общая формула для погрешности.

Пусть задана дифференцируемая функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и пусть $|\Delta x_i|$ ($i = 1, 2, \dots, n$) - абсолютные погрешности аргументов функции. В виду того, что $|\Delta x_i|$ - малые величины, то

$$\left| df(x_1, x_2, \dots, x_n) \right| = \left| \sum_{i=1}^n \frac{df}{dx_i} \Delta x_i \right| \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{df}{dx_i} \right| |\Delta x_i|.$$

Тогда предельная абсолютная погрешность функции

$$\Delta_f = \sum_{i=1}^n \left| \frac{df}{dx_i} \right| \Delta_{x_i},$$

где Δ_{x_i} - предельные абсолютные погрешности аргументов.

Пример. Вычислить и определить предельные абсолютную и относительную погрешности результата, пользуясь общей формулой погрешности: 1) в узком смысле; 2) в широком смысле.

Исходное выражение $X = a^3 + (b - c)^2 + \ln(a + c)$, где $a = 2,15 \pm 0,008$, $b = 3,01 \pm 0,003$, $c = 5,3 \pm 0,08$.

Тогда по общей формуле погрешностей имеем

$$\Delta_X = \left| \frac{\partial X}{\partial a} \right| \Delta_a + \left| \frac{\partial X}{\partial b} \right| \Delta_b + \left| \frac{\partial X}{\partial c} \right| \Delta_c;$$

$$\left| \frac{\partial X}{\partial a} \right| = 3 \cdot a^2 + \frac{1}{a + c}, \quad \left| \frac{\partial X}{\partial b} \right| = 2 \cdot (b - c), \quad \left| \frac{\partial X}{\partial c} \right| = -2(b - c) + \frac{1}{a + c}.$$

$$\Delta_X = |3 \cdot 4,6225 + 0,13423| \cdot 0,008 + |2 \cdot 2,29| \cdot 0,003 + \\ + |-2 \cdot 2,29 + 0,13423| \cdot 0,08 = 0,112014 + 0,01374 + 0,355662 = 0,481416$$

$$X = 9,938375 + 5,2441 + 2,008214 = 17,190689.$$

Определим число верных знаков в значении $X = 17,190689$.

$$\Delta_X = 0,481416 < \frac{1}{2}10^0 = \frac{1}{2}10^{m-n+1}, \quad m=1, \quad m-n+1=0 \Rightarrow n=2.$$

Следовательно, необходимо округлить до верных знаков

$$X_1 = 17, \Delta_{окр} = |X - X_1| \leq 0,1907;$$

$$\Delta_{X_1} = \Delta_X + \Delta_{окр} = 0,6721154 \leq \frac{1}{2}10^1 = \frac{1}{2}10^{m-n_1+1} \Rightarrow n_1 = 1;$$

$$X_2 = 20, \Delta_{окр_1} = |X_2 - X_1| \leq 3;$$

$$\Delta_{X_2} = \Delta_{X_1} + \Delta_{окр_1} = 3,6721154 \leq \frac{1}{2}10^1 = \frac{1}{2}10^{m-n_2+1} \Rightarrow n_2 = n_1 = 1.$$

$$\text{Тогда } \delta_{X_2} \approx \frac{\Delta_{X_2}}{X_2} = \frac{3,6721154}{20} \leq 0,184 = 18,4\%.$$

$$\text{Ответ: } X = 20 \pm 3,67212; \delta_X = 18,4\%.$$

Пример. Округлить сомнительные цифры числа $\tilde{a} = 3,567 \pm 0,0027$ оставив верные знаки в узком смысле. Определить предельные абсолютную и относительную погрешности результата.

Решение. Так как $m=0$, и верно неравенство $0,0027 \leq \frac{1}{2}10^{-2} = \frac{1}{2}10^{m-n+1}$, то получим $m-n+1=-2$, $n=3$.

Округлим $\tilde{a} = 3,567$ до трех верных знаков и получим $\tilde{a}_1 = 3,57$ с погрешностью округления $\Delta_{окр} = 0,003$. При этом погрешность полученного приближенного числа равен $\Delta\tilde{a}_1 = \Delta\tilde{a} + \Delta_{окр} = 0,0057$.

Определим число верных знаков приближенного числа $\tilde{a}_1 = 3,57$.

$$0,0057 \leq \frac{1}{2}10^{-1} = \frac{1}{2}10^{m-n_1+1}, \quad m-n_1+1=-1; \quad n_1=2. \quad \text{Округлим}$$

$\tilde{a}_1 = 3,57$ до двух верных знаков и получим $\tilde{a}_2 = 3,6$ с погрешностью

округления $\Delta_{окр_1} = 0,03$. При этом погрешность полученного приближенного числа $\tilde{a}_2 = 3,6$ равна $\Delta\tilde{a}_2 = \Delta\tilde{a}_1 + \Delta_{окр_1} = 0,0357$.

Определим число верных знаков приближенного числа $\tilde{a}_2 = 3,6$.

$0,0357 \leq \frac{1}{2}10^{-1} = \frac{1}{2}10^{m-n_2+1}$; $m - n_2 + 1 = -1$; $n_2 = 2$. Так как $n_2 = n_1$, то приближенное число $\tilde{a}_2 = 3,6$ имеет только верные знаки.

Определим предельную относительную погрешность приближенного числа $\tilde{a}_2 = 3,6 \pm 0,0357$. Для этого используем определение предельной погрешности: $\delta a = \frac{\Delta a}{|a|} \leq \delta_{\tilde{a}}$, $\delta_{\tilde{a}} \approx \frac{\Delta_{\tilde{a}}}{|\tilde{a}|}$. Тогда получим $\delta_{\tilde{a}_2} \approx \frac{0,0357}{3,6} = 0,00992 < 0,01 = 1\%$.

Ответ: $\tilde{a}_2 = 3,6 \pm 0,0357$, $\delta_{\tilde{a}_2} = 1\%$.

Пример. Округлить сомнительные цифры числа $\tilde{a} = 18,965$; $\delta = 0,35\%$ оставив верные знаки в широком смысле. Определить предельные абсолютную и относительную погрешности результата.

Решение. Дано приближенное число $\tilde{a} = 18,965$; $\delta = 0,35\%$, где $\Delta\tilde{a} \approx \tilde{a} \cdot \delta \leq \Delta_{\tilde{a}} = 0,067$.

Определим число верных знаков в широком смысле, используя следующее выражение $\Delta\tilde{a} = |a - \tilde{a}| \leq 10^{m-n+1}$.

Так как $m = 1$, и верно неравенство $0,067 \leq 10^{-1} = 10^{m-n+1}$, то получим $m - n + 1 = -1$, $n = 3$. Округлим $\tilde{a} = 18,965$ до трех верных знаков и получим $\tilde{a}_1 = 19,0$ с погрешностью округления. При этом погрешность полученного приближенного числа равна $\Delta\tilde{a}_1 = \Delta\tilde{a} + \Delta_{окр} = 0,102$.

Определим число верных знаков приближенного числа $\tilde{a}_1 = 19,0$. $0,102 \leq 10^0 = 10^{m-n_1+1}$, $m - n_1 + 1 = 0$, $n_1 = 2$. Округлим $\tilde{a}_1 = 19,0$ до двух верных знаков и получим $\tilde{a}_2 = 19$ с погрешностью округления $\Delta'_{окр} = 0,0$. При этом погрешность полученного приближенного числа $\tilde{a}_2 = 19$ равна $\Delta\tilde{a}_2 = \Delta\tilde{a}_1 + \Delta'_{окр} = 0,102$.

Определим число верных знаков приближенного числа $\tilde{a}_2 = 19$.

Из условия $0,102 \leq 10^0 = 10^{m-n_2+1}$, получим $m - n_2 + 1 = 0$, $n_2 = 2$. Так как $n_2 = n_1$, то приближенное число $\tilde{a}_2 = 19$ имеет только верные знаки.

Определим предельную относительную погрешность приближенного числа $\tilde{a}_2 = 19 \pm 0,102$. Для этого используем определение предельной погрешности: $\delta a = \frac{\Delta a}{|a|} \leq \delta_{\tilde{a}}$, $\delta_{\tilde{a}} \approx \frac{\Delta_{\tilde{a}}}{|\tilde{a}|}$. Тогда получим $\delta_{\tilde{a}_2} \approx \frac{0,102}{19} = 0,0054 \approx 0,54\%$.

Ответ: $\tilde{a}_2 = 19 \pm 0,102$, $\delta_{\tilde{a}_2} = 0,54\%$.

1.7 Тестовые задания.

1. Погрешность составляет

- а) сумму между точным числом a и его приближенным значением \tilde{a} ;
- б) разность между точным числом a и его приближенным значением \tilde{a} ;
- в) произведение между точным числом a и его приближенным значением \tilde{a} ;
- г) отношение точного числа a к его приближенному значению \tilde{a} .

2. Если приближенное число $\tilde{a} \pm \Delta_{\tilde{a}}$ записано с n верными значащими цифрами в широком смысле, то

- а) $\Delta_{\tilde{a}} \leq \frac{1}{2} 10^{m-n+1}$, $m \geq 0$;
- б) $\Delta_{\tilde{a}} \leq 10^{m-n+1}$, $m \geq 0$;
- в) $\Delta_{\tilde{a}} \leq \frac{1}{2} 10^{n-m+1}$, $m \geq 0$;
- г) $\Delta_{\tilde{a}} \leq 10^{m-n+1}$, $\forall m \in \mathbb{Z}$

3. Абсолютные погрешности величин x и y равны $\Delta x = 0,4$ и $\Delta y = 0,3$. Абсолютная погрешность разности $\Delta(x-y)$ будет равна _____ (укажите число с точностью до 0,1)

- а) 0,3
- б) 0,7
- в) 0,5
- г) 0,6

4. Для величин $x = 10$ и $y = 20$ известны относительные погрешности $\delta(x) = 0,005$ и $\delta(y) = 0,003$. Относительная погрешность

произведения $\delta(x \cdot y)$ равна _____ (укажите число с точностью до 0,001)

- а) 0,007
- б) 0,008
- в) 0,009
- г) 0,005

2. Численные методы решения алгебраических и трансцендентных уравнений

2.1. Отделение корней алгебраических и трансцендентных уравнений.

Пусть имеется уравнение вида

$$F(x) = 0, \quad (2.1)$$

где $F(x)$ - алгебраическая или трансцендентная функция, определенная и непрерывная на отрезке $[a; b]$.

Необходимо найти корни уравнения (2.1) т.е. $\xi \in [a; b]$, $F(\xi) = 0$.

Решить такое уравнение – значит установить, имеет ли оно корни, сколько корней, найти значения корней.

Решение указанной задачи начинается с **отделения корней**, т.е. установления:

- а) количества корней;
- б) наиболее «тесных» промежутков, каждый из которых содержит только один корень (локализация корня).

Рассмотрим 2 способа отделения корней.

1. Графический. Если нарисовать график функции $F(x)$, то примерное положение корней уравнения (2.1) очевидно – это точки пересечения графика с осью абсцисс. Однако построение графиков функций иногда представляет собой весьма нелегкую задачу.

Тем не менее, отделение корней во многих случаях можно произвести графически. Задачу часто удается сильно упростить, заменив уравнение (2.1) равносильным ему уравнением: $f_1(x) = f_2(x)$

Пример 2.1. Для графического отделения корней уравнения $\sin 2x - \ln(x) = 0$ преобразуем его к равносильному уравнению $\sin 2x = \ln(x)$ и отдельно построим графики этих функций.

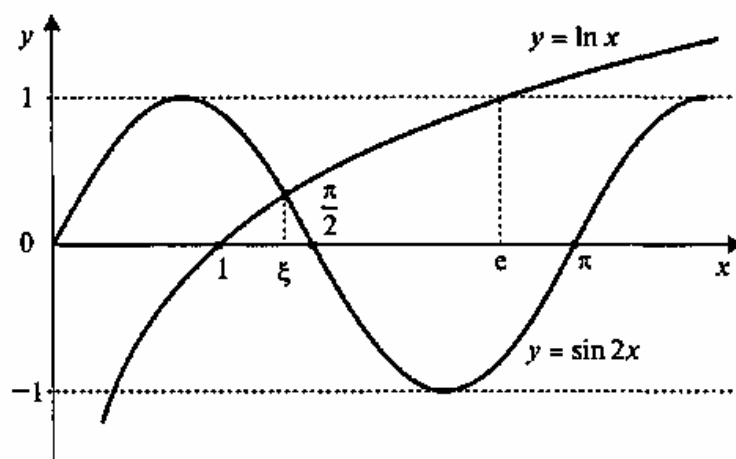


Рис.2 Иллюстрация к отделению корней уравнения

Из графика вполне очевидно, что уравнение имеет единственный корень; и этот корень находится на отрезке $[1; 1,5]$.

Полезны следующие очевидные положения:

1) Если непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $F(x)$ принимает на его концах значения разных знаков (т.е. $F(a)F(b) < 0$), то уравнение (2.1) имеет на этом отрезке по меньшей мере один корень.

2) Если функция $F(x)$ к тому же еще и монотонна, то корень на отрезке $[a, b]$ единственный.

2. Пошаговый (программный) метод.

Пусть имеется уравнение $F(x)=0$, причем известно, что все интересующие вычислителя корни находятся на отрезке $[A, B]$, на котором функция $F(x)$ определена, непрерывна и $F(A)F(B) < 0$. Требуется отделить корни уравнения, т.е. указать все отрезки $[a; b] \subset [A; B]$, содержащие по одному корню.

Будем вычислять значения $F(x)$, начиная с точки $x = A$, двигаясь вправо с некоторым шагом h (см. Рис. 3).

Как только обнаружится пара соседних значений $F(x)$, имеющих разные знаки, и функция $F(x)$ монотонна на этом отрезке, так соответствующие значения аргумента x (предыдущее и следующее) можно считать концами отрезка, содержащего корень. $[a, b]$

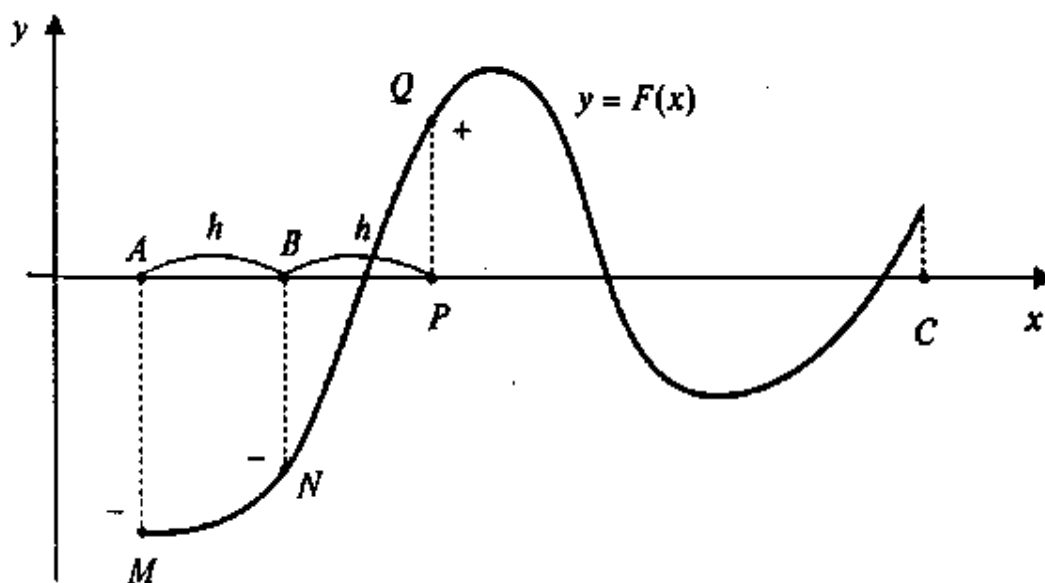


Рис. 3 Иллюстрация к процессу отделения корней

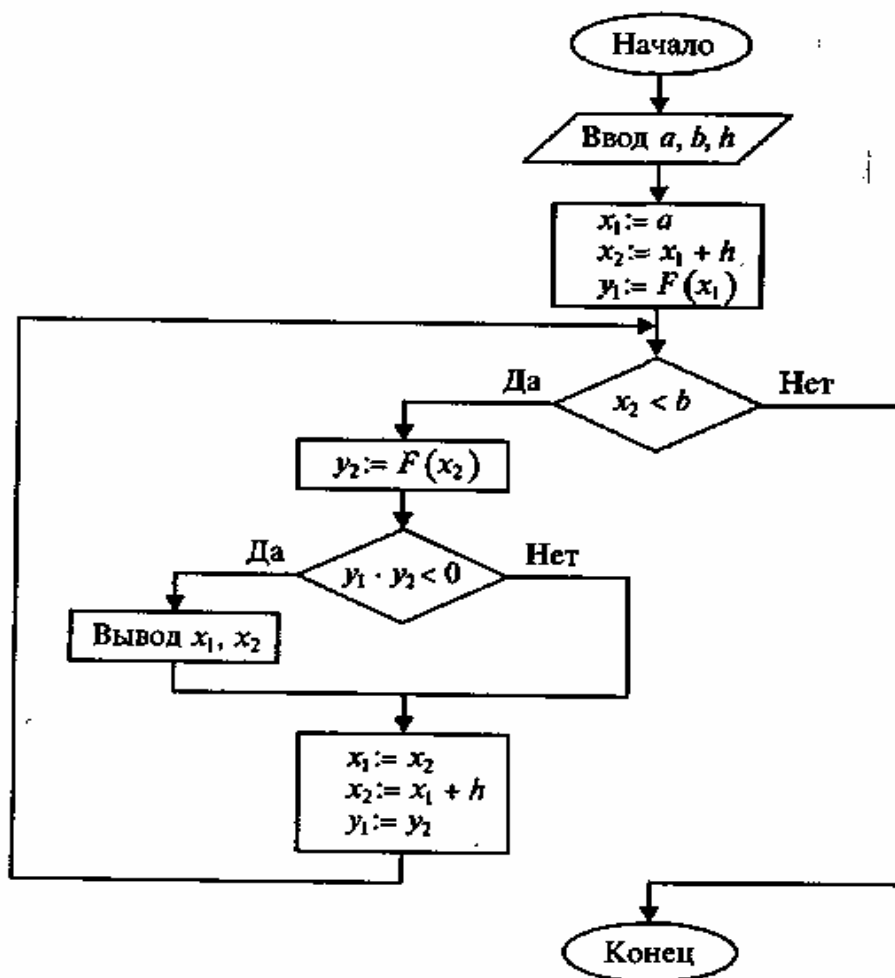


Рис. 4 Блок-схема алгоритма отделения корней уравнения $F(x)=0$

Программа отделения корней уравнения на языке Turbo Pascal

```

program Separat_root;
uses crt;
var a, b, x1, x2, y1, y2, h: real; k: integer;
function f(x: real): real; {уравнение вида F(x)=0}
begin f:=cos(x)-0.1*x; end;
begin
clrscr; writeln ( 'Введите a, b, h' ); read (a, b, h);
k:=0; x1:=a; x2:=x1+h; y1:=f(x1);
while x2<b do
begin y2:=f(x2);
if y1*y2<0 then
begin inc(k);
writeln(k,'-й корень [' ,x1:4:1, ',' ,x2:4:1, ' ] ')
end;
x1:=x2; x2:=x1+h; y1:=y2;
end;
repeat until keypressed
end.

```

Надежность рассмотренного алгоритма отделения корней уравнения зависит:

- а) от характера функции $F(x)$,
- б) от выбранной величины шага h .

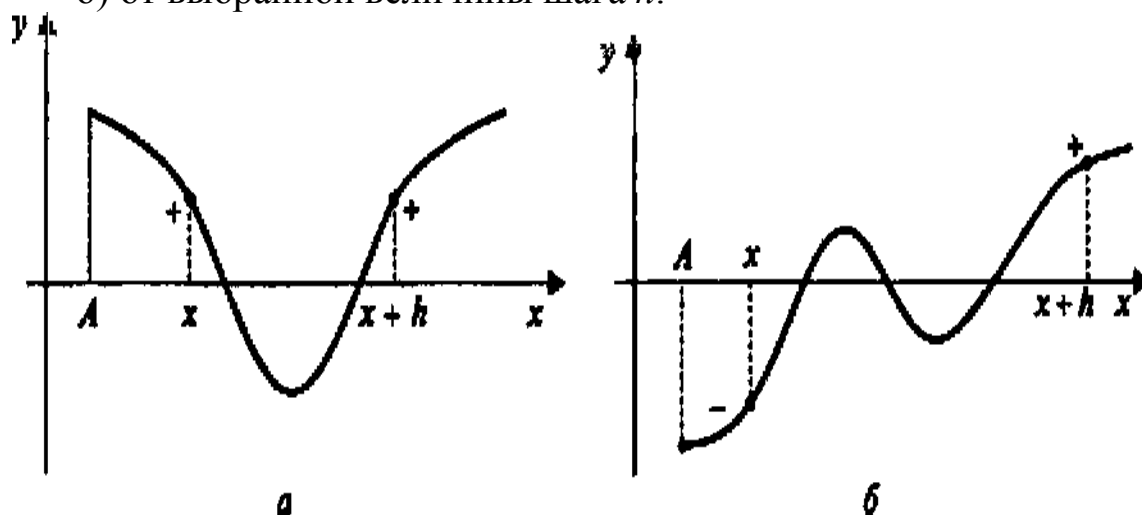


Рис. 5 Зависимость количества корней функции $F(x)$ на отрезке $[x, x + h]$ от характера функции и величины шага h .

На Рис. 4а — функция не меняет знака на отрезке $[x, x+h]$, но не монотонна, поэтому на отрезке $[x, x+h]$ имеются корни; на Рис. 4б — функция на отрезке $[x, x+h]$ меняет знак, но не монотонна, поэтому корней на отрезке не один, а несколько

2.2. Метод половинного деления

Пусть уравнение (2.1) имеет на отрезке $[a, b]$ единственный корень, причем функция $F(x)$ на этом отрезке непрерывна. Разделим отрезок $[a, b]$ пополам точкой $c = [a+b]/2$. Если $F(c) \neq 0$ (что практически наиболее вероятно), то возможны два случая: $F(x)$ меняет знак либо на отрезке $[a; c]$ (рис. 5а), либо на отрезке $[c; b]$ (рис. 5б). Выбирая в каждом случае тот из отрезков, на котором функция меняет знак, и продолжая процесс половинного деления дальше, можно прийти до сколь угодно малого отрезка, содержащего корень уравнения.

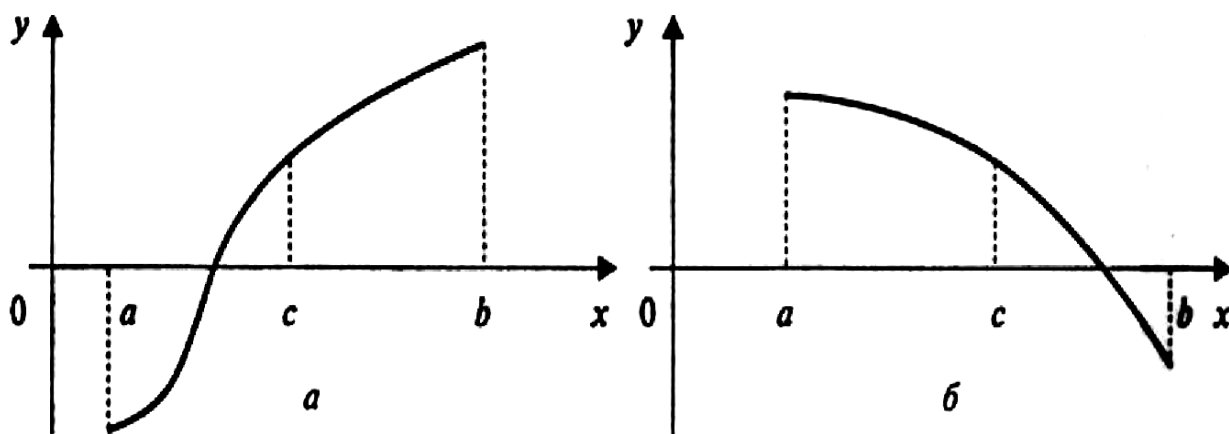


Рис. 6 Рисунок к решению уравнения $F(x) = 0$ методом половинного деления: а - функция $F(x)$ меняет знак на отрезке $[a; c]$; б- функция $F(x)$ меняет знак на отрезке $[c; b]$.

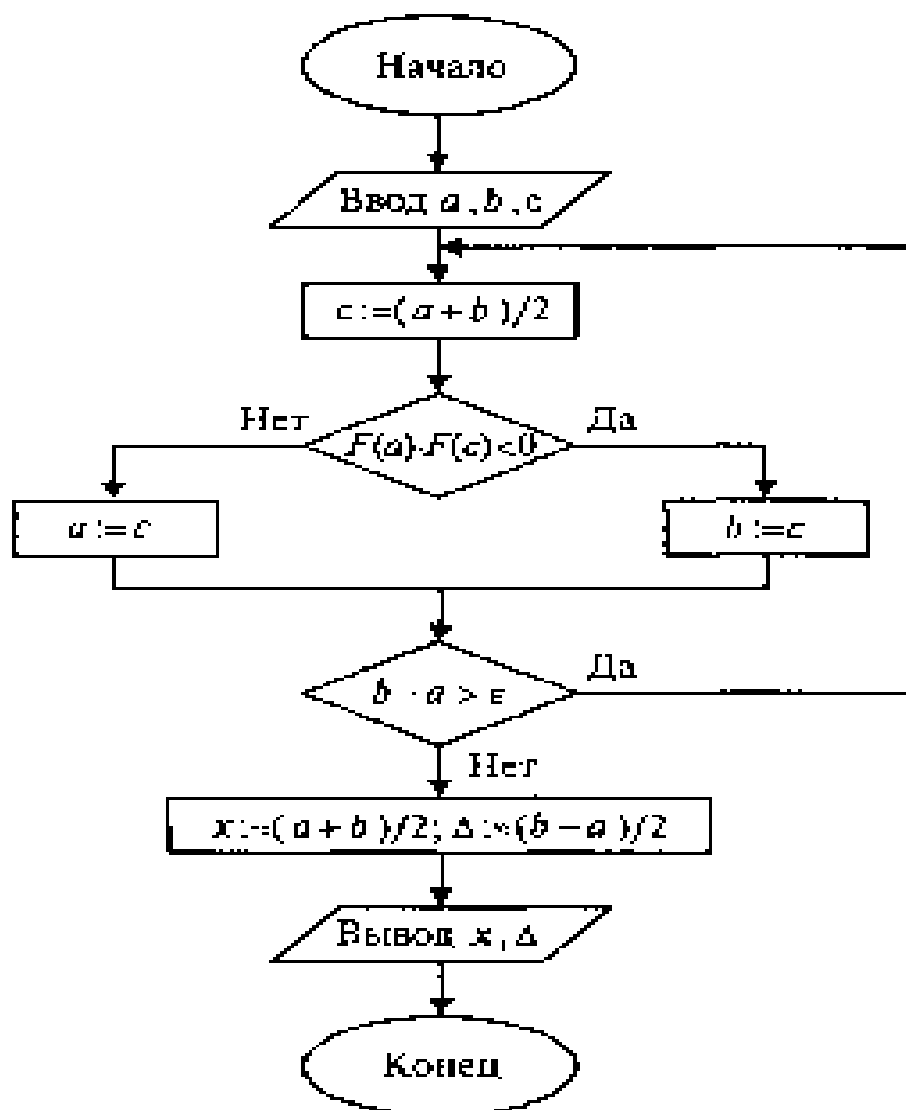


Рис. 7 Блок-схема алгоритма уточнения корня уравнения $F(x) = 0$

на отрезке $[a; b]$ с точностью ε методом половинного деления

Оценка погрешности метода половинного деления.

Если на каком-то этапе процесса получен отрезок $[a; b]$, содержащий корень, то, приняв приближенно $x = (a + b)/2$, получим ошибку, не превышающую значения

$$\Delta x = (b - a)/2$$

При алгоритмизации метода половинного деления остановить процедуру уточнения корня можно и другим способом. Зная допустимое значение погрешности ε :

$$\frac{b - a}{2^n} \leq \varepsilon$$

легко вычислить количество шагов $N(\varepsilon)$ получения

последовательных приближений: $N \geq \frac{\ln \frac{b-a}{\varepsilon}}{\ln 2} = 1,4427 \cdot \ln \frac{b-a}{\varepsilon}$.

Учитывая, что N — число целое, окончательно получим

$$N = \left[1,4427 \cdot \ln \frac{b-a}{\varepsilon} \right] + 1,$$

где, как это принято, квадратные скобки означают целую часть числа.

Пример. Уравнение $\sin 2x - \ln x = 0$ имеет единственный корень на отрезке $[1,3; 1,5]$. Решить это уравнение с точностью до $1 \cdot 10^{-4}$ методом половинного деления.

Решение. В соответствии с блок-схемой алгоритма, программа на языке Turbo Pascal имеет вид:

```
program divide_half;
uses crt;
type T=real;
var a, b, c, eps, x: T;
function f(x: T): T;
begin f:=sin(2*x)-ln(x) end;
begin clrscr;
writeln(' Введите a, b, eps ');
read(a, b, eps);
repeat
c:=(a+b)/2;
if f(a)*f(c)<=0 then b:=c else a:=c;
until b-a<=eps;
x:=(a+b)/2;
writeln('x=', x: 4: 5);
repeat until keypressed
end.
```

Результат работы программы:

Введите a, b, eps
1.3 1.5 0.0001
$x = 1.3995$

2.3 Тестовые задания.

1. Тот факт, что функция имеет на концах отрезка разные знаки, говорит ли о существовании у нее корня на этом отрезке?

а) Да. б) Нет.

2. При численном решении нелинейного уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[a, b]$ методом половинного деления приближенное решение $\tilde{\xi}$ имеет вид

а) $\tilde{\xi} = \frac{b_n - a_n}{2}, \Delta_{\tilde{\xi}} = \frac{b_n + a_n}{2}, n = 0, 1, 2, \dots$

б) $\tilde{\xi} = \frac{a_n + b_n}{2}, \Delta_{\tilde{\xi}} = \frac{b_n - a_n}{2}, n = 0, 1, 2, \dots$

в) $\tilde{\xi} = b_n, \Delta_{\tilde{\xi}} = \frac{b_n - a_n}{2}, n = 0, 1, 2, \dots$

г) $\tilde{\xi} = a_n, \Delta_{\tilde{\xi}} = \frac{b_n - a_n}{2}, n = 0, 1, 2, \dots$

3. Один шаг метода половинного деления для уравнения $x^2 - 5 = 0$ для начального отрезка $[0; 3]$ дает следующий отрезок

а) $[1,5; 3]$

б) $[0; -1,5]$

в) $[0; 1,5]$

г) $[-1,5; 0]$

4. Задано нелинейное уравнение $x^3 - 2,5x^2 + x = 0$ и отрезок $[1; 4]$, на котором находится корень. Один шаг метода половинного деления дает отрезок

а) $[1; 2,5]$

б) $[-1,5; 0]$

в) $[2,5; 4]$

г) $[3; 4]$

действий неизбежны. В силу этого название «точный» не вполне соответствует существу дела (но является традиционным).

Ко второму классу методов решения систем линейных алгебраических уравнений относятся различные **итерационные методы**, основанные на применении принципа сжимающих отображений (к числу их относятся метод итерации, метод Зейделя, метод релаксации и др.).

Погрешности вычисления корней системы уравнений складывается:

- 1) из вычислительной погрешности для точных методов;
- 2) из вычислительной погрешности и погрешности метода для приближенных методов.

3.1 Метод квадратных корней

Постановка задачи:

Необходимо найти решение $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ алгебраической системы уравнений $Ax = b$, где $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$, A симметрическая матрица т.е. $A = \{a_{ij}\}$, $a_{ij} = a_{ji}$; $i, j = \overline{1, n}$.

Опираясь на теорему о LU -разложении, представим матрицу A в виде: $A = C^T C$, где

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}, \quad C^T = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & \dots & 0 \\ c_{12} & c_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ c_{1n} & c_{2n} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}.$$

Подставив в место A произведение $C^T C$, сведем искомую задачу к решению системы уравнений

$$Ax = b \Rightarrow C^T Cx = b \Rightarrow \begin{cases} Cx = y, \\ C^T y = b. \end{cases}$$

Таким образом, метод решения системы уравнений $Ax = b$ сводится к выполнению следующих операций:

- находятся элементы матрицы C : $\{c_{ij}\}$, $i \leq j$; $i, j = \overline{1, n}$ используя уравнение $A = C^T C$;

- находятся элементы матрицы $y = \{y_i\}^T, i = \overline{1, n}$: как решение системы $C^T y = b$ (по схеме прямого хода: $y_i, i = \overline{1, n}$);
- находится решение искомой задачи $x = \{x_i\}^T, i = \overline{1, n}$: как решение системы $Cx = y$ (по схеме обратного хода: $x_i, i = \overline{n, 1}$).

Расчетные выражения имеют вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_{11} = \sqrt{a_{11}}; \\ c_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} c_{ki}^2}, i = \overline{2, n}; \\ c_{ij} = \frac{1}{c_{ii}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} c_{ki} c_{kj} \right), j > i, i = \overline{2, n}; \\ c_{ij} = 0, j < i; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} y_1 = \frac{b_1}{c_{11}}; \\ y_i = \frac{1}{c_{11}} \left(b_i - \sum_{k=1}^{i-1} c_{ki} b_k \right), i = \overline{2, n}; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x_n = \frac{y_n}{c_{nn}}; \\ x_i = \frac{1}{c_{ii}} \left(y_i - \sum_{k=i+1}^n c_{ki} x_k \right), i = \overline{n-1, 1}. \end{array} \right.$$

3.2 Метод Халецкого

Постановка задачи: Необходимо найти решение

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ алгебраической системы уравнений $Ax = b$, где $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$, $A = \{a_{ij}\}$, $i, j = \overline{1, n}$.

Опираясь на теорему о LU -разложении, представим матрицу A в виде: $A = D \cdot C$, где

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ d_{21} & d_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ d_{n1} & d_{n2} & \dots & d_{nn} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Подставив вместо A произведение $D \cdot C$, сведем искомую задачу к решению системы уравнений

$$Ax = b \Rightarrow D \cdot Cx = b \Rightarrow \begin{cases} Dy = b, \\ Cx = y. \end{cases}$$

- находятся элементы матриц D и C : $C = \{c_{ij}\}$, $i < j$; $i, j = \overline{1, n}$,
 $D = \{d_{ij}\}$, $i > j$; $i, j = \overline{1, n}$ используя уравнение $A = D \cdot C$;

- находятся элементы матрицы $y = \{y_i\}^T, i = \overline{1, n}$: как решение системы $Dy = b$ (по схеме прямого хода: $y_i, i = \overline{1, n}$);

$$\left[\begin{array}{l} d_{i1} = a_{i1}; i = \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} c_{1i} &= \frac{a_{1i}}{d_{11}}; \quad i = \overline{2, n}; \\ d_{ij} &= a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} d_{ik} c_{kj}, \quad 1 < j \leq i \leq n; \\ c_{ij} &= \frac{1}{d_{ii}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} d_{ik} c_{kj} \right), \quad 1 < i < j \leq n; \end{aligned} \right. \quad \left\{ \begin{aligned} x_n &= y_n; \\ x_i &= y_i - \sum_{k=i+1}^n c_{ik} x_k, \quad i = \overline{n-1, 1}. \end{aligned} \right.$$

Приведем систему (3.1) к равносильной ей системе вида $x = Ax$.

В развернутом виде новая система выглядит так:

[illegible]

или в сокращенной записи $x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + \beta_i$ ($i=1,2,\dots,n$). О системе с такой структурой говорят, что она «**приведена к нормальному виду**».

Правая часть системы (3.2) определяет отображение (обозначим его F):

$$F : y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + \beta_i \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (3.3)$$

преобразующее точку $\bar{x}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ n -мерного векторного пространства в точку $\bar{y}(y_1, y_2, \dots, y_n)$ того же пространства. Используя отображение (3.3) и выбрав начальную точку $\bar{x}^{(0)}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$, можно построить итерационную последовательность точек n -мерного пространства (аналогично методу простой итерации для скалярного уравнения $x = f(x)$):

$$\bar{x}^{(0)}, \bar{x}^{(1)}, \dots, \bar{x}^{(n)}, \dots \quad (3.4)$$

Например, пусть дана система уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 1; \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 = 2; \\ x_1 - x_2 - x_3 = 3. \end{cases}$$

Перепишем эту систему в виде простейшим образом: $Ax = b \Rightarrow (x + Ax) = x + b$. Равносильность такого преобразования очевидна. Получим

$$\begin{cases} x_1 = 3x_1 - x_2 - x_3 - 1; \\ x_2 = 3x_1 - 3x_2 + x_3 - 2; \\ x_3 = x_1 - x_2 - 3. \end{cases}$$

Примем за начальное приближение, например, точку $(0; 0; 0)$ трехмерного пространства, подставим ее координаты в правую часть системы и произведем вычисления. Получим координаты новой точки $(-1; -2; -3)$. Используя теперь эту точку как начальную, можно получить следующую точку $(1; -2; -2)$ и т.д. Тем самым будет получена последовательность точек: $(0; 0; 0), (-1; -2; -3), (1; -2; -2), \dots$

Если отображение является сжимающим отображением, то эта последовательность сходится и ее предел является решением данной системы и тем самым исходной системы.

Напомним, что отображение F называется **сжимающим**, если существует такое число $\alpha: 0 < \alpha < 1$, что для любых двух точек \bar{x}' и \bar{x}'' выполняется условие

$$\rho(F\bar{x}', F\bar{x}'') \leq \alpha(\bar{x}', \bar{x}'')$$

(т. е. расстояние между образами меньше, чем расстояние между исходными точками). Рассмотрим условия, при которых отображение (3.3) будет сжимающим. Решение этого вопроса зависит от способа метризации пространства (т.е. определения расстояния между n -мерными векторами). В отличие от пространства действительных чисел в данном случае существует несколько способов метризации.

Пусть $\bar{x}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $\bar{y}(y_1, y_2, \dots, y_n)$ — две точки n -мерного пространства. Для применения метода итерации систему линейных уравнений удобно «погрузить» в пространство с одной из трех следующих метрик:

$$\text{а) } \rho_1(\bar{x}, \bar{y}) = \max |x_i - y_i|; \quad (3.5)$$

$$\text{б) } \rho_2(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|; \quad (3.6)$$

$$\text{в) } \rho_3(\bar{x}, \bar{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}. \quad (3.7)$$

Сформулируем условия, при которых отображение (3.3) в пространствах с метриками ρ_1, ρ_2, ρ_3 будет сжимающим. Эти условия выражаются через коэффициенты при неизвестных системы (3.2):

а) в пространстве с метрикой ρ_1 :

$$\alpha_1 = \max \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}| < 1 \quad (3.8)$$

т.е. максимальная из сумм модулей коэффициентов при неизвестных в правой части системы (3.2), взятых по строкам, должна быть меньше единицы;

б) в пространстве с метрикой ρ_2 :

$$\alpha_2 = \max \sum_{i=1}^n |\alpha_{ij}| < 1 \quad (3.9)$$

т.е. максимальная из сумм модулей коэффициентов при неизвестных в правой части системы (3.2), взятых по столбцам, должна быть меньше единицы;

в) в пространстве с метрикой ρ_3

$$\alpha_1 = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2} < 1. \quad (3.10)$$

т.е. сумма квадратов всех коэффициентов при неизвестных в правой части системы (3.2) должна быть меньше единицы.

Условия (3.8) — (3.10) легко вывести. Рассмотрим, например, получение условия (3.8).

Для точек $\bar{x}'(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ и $\bar{x}''(x''_1, x''_2, \dots, x''_n)$ в соответствии с (3.8) имеем:

$$\rho_1(F\bar{x}', F\bar{x}'') = \max \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} (x'_j - x''_j). \quad (3.11)$$

По свойству абсолютной величины имеем:

$$\left| \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} (x'_j - x''_j) \right| \leq \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}| |x'_j - x''_j|. \quad (3.12)$$

Это неравенство лишь усилится, если заменить каждый модуль $|x'_j - x''_j|$ значением $\rho_1(\bar{x}', \bar{x}'')$:

$$\left| \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} (x'_j - x''_j) \right| \leq \rho_1(\bar{x}', \bar{x}'') \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}|.$$

Подставляя это в (3.12), получим

$$\rho_1(F\bar{x}', F\bar{x}'') \leq \max \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}| \cdot \rho_1(\bar{x}', \bar{x}''). \quad (3.13)$$

Сравнивая (3.13) с (3.11), получаем условие (3.8).

Заметим, что каждое из условий (3.8) — (3.10) является достаточным для того, чтобы отображение (3.3) было сжимающим. Условие (3.9) является также и необходимым для сжимаемости отображения (3.3) (в смысле метрики ρ_2), но ни одно из условий (3.8) — (3.10) не является необходимым для результативности метода итераций.

Итак, для применения метода итераций система (3.1) должна быть переписана в виде (3.2). Гарантией сходимости итерационного процесса может служить выполнение хотя бы одного из достаточных условий (3.8) — (3.10). Для обеспечения условий сходимости нужно получить систему вида (3.2) так, чтобы коэффициенты при неизвестных были существенно меньше единицы. Этого можно достичь, если исходную систему с помощью равносильных

преобразований привести к **системе с преобладающими диагональными коэффициентами**, т.е. у которой абсолютные величины коэффициентов, стоящих на главной диагонали, больше абсолютных величин остальных в соответствующих уравнениях. Если потом разделить все уравнения на соответствующие диагональные коэффициенты и выразить из каждого уравнения неизвестное с коэффициентом, равным единице, то будет получена система вида (3.2), у которой все $|\alpha_{ij}| < 1$. Выполнение этого условия необходимо, но не достаточно для выполнения условий сжимаемости (3.8) — (3.10).

Теорема 1 (достаточное условие сходимости процесса итерации).

Если для приведенной системы $x = \beta + \alpha \cdot x$ выполнено по меньшей мере одно из условий

$$1) \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}| < 1, \quad i = \overline{1, n},$$

$$2) \sum_{i=1}^n |\alpha_{ij}| < 1, \quad j = \overline{1, n},$$

то процесс итерации $x^{(k+1)} = \beta + \alpha \cdot x^{(k)}$, $k = 0, 1, 2, \dots$ сходится к единственному решению этой системы, независимо от выбора начального приближения.

Следствие. Для системы

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = \overline{1, n}$$

метод итерации сходится, если выполнены неравенства

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i}^n |a_{ij}|, \quad i = \overline{1, n}.$$

Теорема 2 (необходимое и достаточное условие сходимости процесса итерации).

Для сходимости процесса итерации

$$x^{(k+1)} = \beta + \alpha \cdot x^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

при любом выборе начального вектора $x^{(0)}$ и любом свободном члене β необходимо и достаточно, чтобы собственные значения λ_i матрицы α , т. е. корни характеристического уравнения

$$\det(\alpha - E \cdot x) = 0,$$

были по модулю меньше единицы $|\lambda_i| < 1, i = \overline{1, n}$.

Замечание. Приведение линейной системы к виду, удобному для итерации, Теорема сходимости накладывает жесткие условия на коэффициенты данной линейной системы

$$Ax = b. \quad (*)$$

Однако, если $|A| \neq 0$, то с помощью линейного комбинирования уравнений системы последнюю всегда можно заменить эквивалентной системой

$$x = \beta + \alpha \cdot x \quad (**)$$

такой, что условия теоремы сходимости будут выполнены.

В самом деле, умножим уравнение (*) на матрицу $D = A^{-1} - \varepsilon$, где $\varepsilon = \{\varepsilon_{ij}\}$ — матрица с малыми по модулю элементами. Тогда будем иметь:

$$(A^{-1} - \varepsilon)Ax = D \cdot b, \quad A^{-1}Ax - \varepsilon Ax = D \cdot b \Rightarrow x - \varepsilon Ax = D \cdot b,$$

$$\alpha = \varepsilon \cdot A, \quad \beta = D \cdot b \Rightarrow x = \beta + \alpha \cdot x.$$

Если $|\varepsilon_{ij}|$ достаточно малы, то очевидно, что система (**) удовлетворяет условиям теоремы сходимости.

Оценка точности метода.

При решении уравнений методом простой итерации в пп 2.3 была получена оценка

$$\rho(\xi, x^{(k)}) \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} \rho(x^{(k-1)}, x^{(k)}). \quad (3.14)$$

Только здесь надо иметь в виду, что ρ - метрика, по которой была установлена сходимость и получено соответствующее значение α .

На основе данной оценки, требуя, чтобы $\rho(\xi, x^{(k)}) \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} \rho(x^{(k-1)}, x^{(k)}) < \varepsilon$, получаем формулу, позволяющую установить момент прекращения итерационного процесса при достижении точности ε :

$$\rho(x^{(k-1)}, x^{(k)}) \leq \frac{\varepsilon(1-\alpha)}{\alpha}. \quad (3.15)$$

3.4. Метод Зейделя

Будем снова рассматривать исходную систему линейных уравнений (3.1) и эквивалентную ей приведенную систему (3.2). При решении системы (3.2) методом простой итерации каждый шаг итерационного процесса состоит в переходе от уже имеющегося приближения значений неизвестных к новому (очередному) приближению. Обозначим элементы имеющегося приближения через x_1, x_2, \dots, x_n , а элементы очередного (вычисляемого) приближения через y_1, y_2, \dots, y_n . Вычислительные формулы имеют вид

$$y_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j + \beta_i (i=1,2,\dots,n).$$

Основная идея метода Зейделя состоит в том, что на каждом шаге итерационного процесса при вычислении значения y_i учитываются уже полученные значения y_1, y_2, \dots, y_{i-1} :

$$\begin{aligned} y_i &= \sum_{j=1}^n \alpha_{1j} x_j + \beta_i ; \\ y_2 &= \alpha_{21} y_1 + \sum_{j=2}^n \alpha_{2j} x_j + \beta_2 ; \\ &\dots\dots\dots \\ y_i &= \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} y_j + \sum_{j=i}^n \alpha_{ij} x_j + \beta_i ; \\ y_n &= \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{ni} y_i + \sum_{i=n}^n \alpha_{nn} x_n + \beta_n . \end{aligned} \tag{3.16}$$

Справедливо следующее утверждение:

Если для матрицы коэффициентов системы выполняется хотя бы одно из условий (3.8) — (3.10), то итерационный процесс метода Зейделя сходится к решению системы при любом выборе начального приближения $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$.

Таким образом, каждое из условий (3.8) — (3.10) является достаточным для сходимости итерационного процесса метода Зейделя. Преимущество этого метода состоит в том, что он обычно

обеспечивает более быструю сходимость, чем метод простой итерации.

Замечание. Необходимые и достаточные условия сходимости процесса Зейделя.

Для линейной системы

$$x = \beta + \alpha \cdot x,$$

где $\alpha = \{\alpha_{ij}\}$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)^T$, $i, j = \overline{1, n}$, итерационный процесс по Зейделю выписывается в виде

$$x_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{i,j} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i}^n \alpha_{i,j} x_j^{(k)} + \beta_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

при начальном приближении $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})^T$. В матричном форме этот процесс можно записать

$$x^{(k+1)} = B \cdot x^{(k+1)} + C \cdot x^{(k)} + \beta, \quad k = 0, 1, 2, \dots; \quad \alpha = B + C,$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ 0 & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

Теорема. Для сходимости процесса итерации по Зейделю $x^{(k+1)} = B \cdot x^{(k+1)} + C \cdot x^{(k)} + \beta$, $k = 0, 1, 2, \dots$ для системы $Ax = b$ при любом выборе свободного члена β и начального вектора $x^{(0)}$ необходимо и достаточно, чтобы все корни λ_i , $i = \overline{1, n}$ уравнения

$$\det[C - (E - B)\lambda] \equiv \begin{vmatrix} \alpha_{11} - \lambda & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21}\lambda & \alpha_{22} - \lambda & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1}\lambda & \alpha_{n2}\lambda & \dots & \alpha_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

были по модулю меньше единицы $|\lambda_i| < 1$, $i = \overline{1, n}$.

Алгоритмически метод Зейделя очень похож на метод простой итерации. Небольшое различие алгоритмических схем между указанными методами отражено на рис. 6.

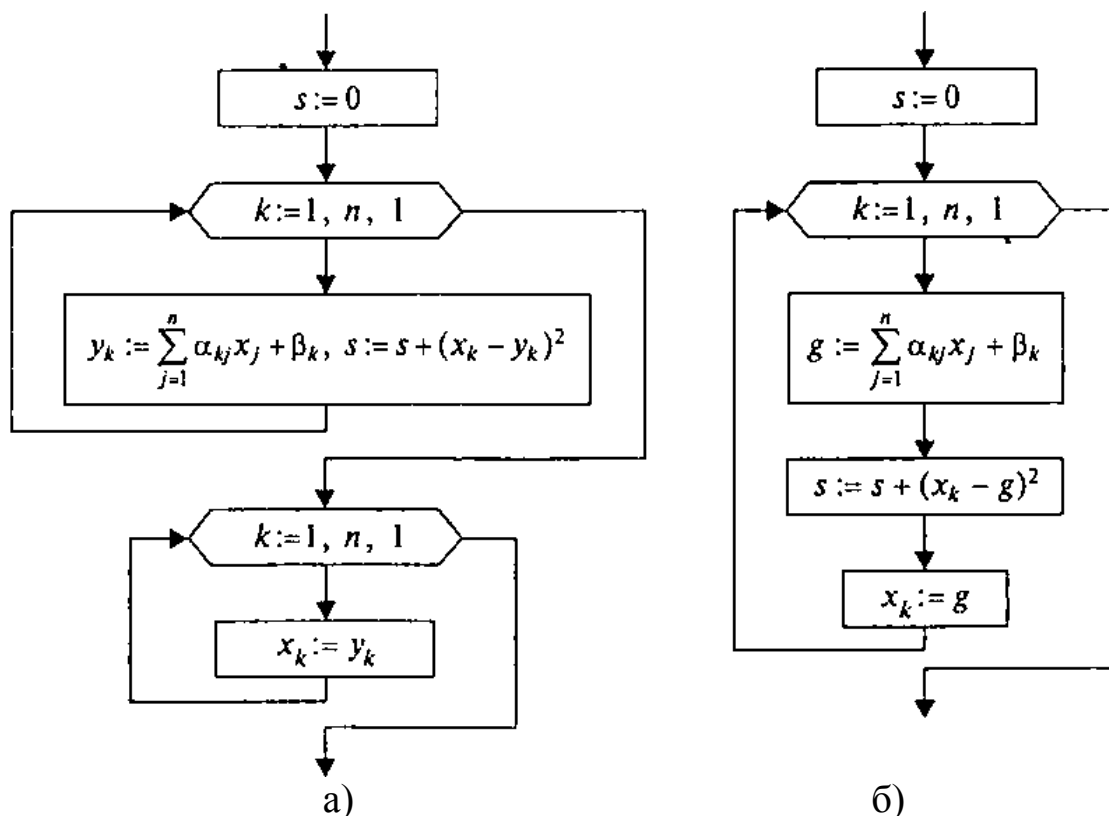


Рис. 8. Фрагмент алгоритма: методом простой итерации (а); методом Зейделя (б).

Пример. Решить СЛАУ методами простой итерации и Зейделя:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 14; \\ 2x_1 + 10x_2 + x_3 = 13; \\ 10x_1 + x_2 + x_3 = 12. \end{cases}$$

Решение. Приведем данную систему к нормальному виду, поменяв сначала местами первое и третье уравнения:

$$\begin{cases} x_1 = 1,2 - 0,1x_2 - 0,1x_3; \\ x_2 = 1,3 - 0,2x_1 - 0,1x_3; \\ x_3 = 1,4 - 0,2x_1 - 0,2x_2. \end{cases}$$

Примем за начальное приближение столбец свободных членов:
 $x_1^{(0)} = 1,2; x_2^{(0)} = 1,3; x_3^{(0)} = 1,4.$

а) Покажем, как выполнить первую итерацию. Найдём с помощью первого уравнения системы $x_1^{(1)}$:

$$x_1^{(1)} = 1,2 - 0,1x_2^{(0)} - 0,1x_3^{(0)} = 1,2 - 0,1 \cdot 1,3 - 0,1 \cdot 1,4 = 0,93.$$

Далее, вычисляем $x_2^{(1)}$:

$$x_2^{(1)} = 1,3 - 0,2x_1^{(0)} - 0,1x_3^{(0)} = 1,3 - 0,2 \cdot 1,2 - 0,1 \cdot 1,4 = 0,92.$$

Аналогично

$x_3^{(1)}$:

$$x_3^{(1)} = 1,4 - 0,2x_1^{(0)} - 0,2x_2^{(0)} = 1,4 - 0,2 \cdot 1,2 - 0,2 \cdot 1,3 = 0,9.$$

При вычислении второй итерации используем полученные значения первой итерации:

$$x_1^{(2)} = 1,2 - 0,1x_2^{(1)} - 0,1x_3^{(1)} = 1,2 - 0,1 \cdot 0,92 - 0,1 \cdot 0,9 = 1,018.$$

$$x_2^{(2)} = 1,3 - 0,2x_1^{(1)} - 0,1x_3^{(1)} = 1,3 - 0,2 \cdot 0,93 - 0,1 \cdot 0,9 = 1,024.$$

$$x_3^{(2)} = 1,4 - 0,2x_1^{(1)} - 0,2x_2^{(1)} = 1,4 - 0,2 \cdot 0,93 - 0,2 \cdot 0,92 = 1,03.$$

Приведем результаты еще нескольких приближений:

$$x_1^{(3)} = 0,9946, \quad x_2^{(3)} = 0,9934, \quad x_3^{(3)} = 0,9916.$$

$$x_1^{(4)} = 1,002, \quad x_2^{(4)} = 1,002, \quad x_3^{(4)} = 1,002.$$

б) Покажем, как в данном случае выполнить первую итерацию по методу Зейделя.

$$\begin{cases} x_1 = 1,2 - 0,1x_2 - 0,1x_3; \\ x_2 = 1,3 - 0,2x_1 - 0,1x_3; \\ x_3 = 1,4 - 0,2x_1 - 0,2x_2. \end{cases}$$

Примем за начальное приближение также столбец свободных членов: $x_1^{(0)} = 1,2; x_2^{(0)} = 1,3; x_3^{(0)} = 1,4$.

Найдем с помощью первого уравнения системы $x_1^{(1)}$:

$$x_1^{(1)} = 1,2 - 0,1x_2^{(0)} - 0,1x_3^{(0)} = 1,2 - 0,1 \cdot 1,3 - 0,1 \cdot 1,4 = 0,93.$$

При вычислении $x_2^{(1)}$ используем только что вычисленное значение $x_1^{(1)}$:

$$x_2^{(1)} = 1,3 - 0,2x_1^{(1)} - 0,1x_3^{(0)} = 1,3 - 0,2 \cdot 0,93 - 0,1 \cdot 1,4 = 0,974$$

(для сравнения: метод итераций дает результат - **0,92**).

При вычислении $x_3^{(1)}$ используем только что вычисленные значения $x_1^{(1)}$ и $x_2^{(1)}$:

$$x_3^{(1)} = 1,4 - 0,2x_1^{(1)} - 0,2x_2^{(1)} = 1,4 - 0,2 \cdot 0,93 - 0,2 \cdot 0,974 = 1,019$$

(метод итераций - 0,9).

Приведем результаты еще нескольких приближений:

$$x_1^{(2)} = 1,0007 \quad (1,018) \quad x_2^{(2)} = 0,9979 \quad (1,024), \quad x_3^{(2)} = 1,0003 \quad (1,03).$$

$x_1^{(3)} = 1,0002 \quad (0,9946), \quad x_2^{(3)} = 0,99994 \quad (0,9934), \quad x_3^{(3)} = 0,99998 \quad (0,9916).$

Точное решение системы (1,1,1). Видно, что точность решения методом Зейделя достигается быстрее, чем в методе простой итерации.

3.5 Тестовые задания.

1. Укажите соответствие между видами матриц и их названием:

А. матрица, у которой выше главной диагонали все элементы матрицы равны нулю.

В. квадратная матрица, у которой все ненулевые элементы образуют «ленту», параллельную главной диагонали, а все остальные элементы матрицы равны нулю

С. матрица, у которой ненулевых элементов гораздо меньше, чем нулевых

1. нижняя треугольная матрица
2. разреженная матрица
3. ленточная матрица

2. Задана система уравнений
$$\begin{cases} x_1 = 0,6x_2 - 0,2x_1 \\ x_2 = 0,2x_2 + 0,4x_1 + 0,5 \end{cases}$$
 Для заданного начального приближения $x_1^{(0)} = 0$; $x_2^{(0)} = 0,1$, первый шаг метода простой итерации дает следующие значения первого приближения $\{x_1^{(1)}, x_2^{(1)}\}$

- а) $\{1,03; 0,422\}$
- б) $\{0,02; 0,528\}$
- в) $\{0,02; 0,520\}$
- г) $\{1,06; 1,15\}$

3. Задана система уравнений
$$\begin{cases} x_1 = 0,6x_2 - 0,2x_1 \\ x_2 = 0,2x_2 + 0,4x_1 + 1 \end{cases}$$
 Для заданного начального приближения $x_1^{(0)} = 0$; $x_2^{(0)} = 0,1$, первый шаг метода Зейделя дает следующие значения первого приближения $\{x_1^{(1)}, x_2^{(1)}\}$

- а) $\{0,155; 1,305\}$
- б) $\{0,06; 1,044\}$
- в) $\{2,425; 0,275\}$
- г) $\{0,06; 1,115\}$

3.6 Методы решения систем нелинейных уравнений

3.6.1 Метод Ньютона

Дана нелинейная система уравнений с действительными левыми частями

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ \dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \end{cases} \quad (3.17)$$

которую можно записать в виде

$$F(x) = 0, \quad (3.18)$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, $F = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$ соответствующие n -мерные вектора; $x, F \in \Omega \subset R^n$.

Решение системы уравнений (3.18) будем искать методом последовательных приближений (полагая, что Ω некоторая выпуклая область).

По аналогии с одномерным уравнением, допустим определен какой-либо изолированный корень системы (3.18), и пусть найдено какое-либо его k -ое приближение:

$$x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}).$$

Тогда точное значение корня можно записать в виде

$$x = x^{(k)} + \varepsilon^{(k)},$$

где $\varepsilon^{(k)} = (\varepsilon_1^{(k)}, \varepsilon_2^{(k)}, \dots, \varepsilon_n^{(k)})$ - погрешность приближенного значения $\bar{x}^{(k)}$.

Из выражения (1.2) следует $F(x^{(k)} + \varepsilon^{(k)}) = 0$.

Предполагая, что функция f непрерывно-дифференцируема в Ω , разложим $F(x^{(k)} + \varepsilon^{(k)})$ в ряд по степеням малого вектора $\bar{\varepsilon}^{(k)}$.

$$F(x^{(k)} + \varepsilon^{(k)}) = F(x^{(k)}) + F'(x^{(k)})\varepsilon^{(k)} + O(\varepsilon^{(k)}). \quad (3.19)$$

В развернутом виде данное выражение

$$f_i\left(x_1^{(k)} + \varepsilon_1^{(k)}, x_2^{(k)} + \varepsilon_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} + \varepsilon_n^{(k)}\right) = f_i\left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}\right) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i\left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}\right)}{\partial x_j} \varepsilon_j^{(k)} + \sum_{j=1}^n O\left(\varepsilon_j^{(k)}\right), \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.20)$$

Выражение (3.18) можно аппроксимировать уравнением

$$F\left(x^{(k)} + \varepsilon^{(k)}\right) = F\left(x^{(k)}\right) + F'\left(x^{(k)}\right) \varepsilon^{(k)} = 0$$

с порядком аппроксимации $O\left(\varepsilon^{(k)}\right)$.

В выражении (3.20) производную $F'\left(x^{(k)}\right)$ можно записать используя матрицу Якоби для системы функций $f_i\left(x^{(k)}\right), i = \overline{1, n}$ относительно переменных $x_i^{(k)}, i = \overline{1, n}$, тогда получим

$$F'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} = W(x),$$

$$F\left(x^{(k)} + \varepsilon^{(k)}\right) = F\left(x^{(k)}\right) + W\left(x^{(k)}\right) \varepsilon^{(k)} \approx 0 \Rightarrow \varepsilon^{(k)} \approx -W^{-1}\left(x^{(k)}\right) \cdot F\left(x^{(k)}\right).$$

Полагая, что выражение $x^{(k)} + \varepsilon^{(k)}$ дает новое $(k+1)$ приближение, получим

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \varepsilon^{(k)} = x^{(k)} - W^{-1}\left(x^{(k)}\right) \cdot F\left(x^{(k)}\right), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.21)$$

Теорема 1. (существования решения и сходимости процесса Ньютона). Пусть дана нелинейная система алгебраических или трансцендентных уравнений с действительными коэффициентами $F(x) = 0$, где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, $F = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$ соответствующие n -мерные вектора; $x, F \in \Omega \subset R^n$, причем вектор-функция $F = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$ определена и непрерывна, вместе со

своими частными производными первого и второго порядков, в некоторой области Ω т. е. $F(x) \in C^2(\Omega)$.

Положим, что $x^{(0)}$ есть точка, лежащая в Ω вместе со своей замкнутой δ -окрестностью: $\bar{\Omega}_\delta(x^{(0)}) = \left\{ \|x - x^{(0)}\|_p \leq \delta \right\} \subset \Omega$, где $p = \{m, l, \bar{k}\}$ одна из канонических норм, причем выполнены следующие условия:

1. Матрица Якоби $W(x)$ при $x = x^{(0)}$ имеет обратную $W^{-1}(x^{(0)})$, такую что $\|W^{-1}(x^{(0)})\|_p \leq A$;
2. $\|W^{-1}(x^{(0)}) \cdot F(x^{(0)})\|_p \leq B \leq \frac{\delta}{2}$;
3. $\sum_{s=1}^n \left| \frac{\partial^2 f_i(x)}{\partial x_j \partial x_s} \right| \leq C$, $i, j = \overline{1, n}$, $x \in \bar{\Omega}_\delta(x^{(0)})$;
4. Постоянные A, B, C удовлетворяют неравенству $\mu = 2nA \cdot B \cdot C \leq 1$.

Тогда процесс Ньютона

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - W^{-1}(x^{(k)}) \cdot F(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

при начальном приближении $x^{(0)}$ сходится и предельный вектор

$$\xi = \lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)}, \quad \xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T$$

есть решение системы $F(x) = 0$, такое что

$$\|\xi - x^{(0)}\|_p \leq 2B \leq \delta.$$

Теорема 2. (единственность решения)

При выполнении условий Теоремы 1 в области $\|x - x^{(0)}\|_p \leq 2B$ содержится единственное решение системы $F(x) = 0$.

Теорема 3. Если выполнены условия 1) — 4) теоремы 1, то для последовательных приближений $x^{(k+1)}$, $k = 0, 1, 2, \dots$ справедливо неравенство

$$\|\xi - x^{(k)}\|_p \leq B \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \mu^{2^{k-1}},$$

где $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T$ — решение системы (3.18).

Теорема 4. Если выполнены условия 1) — 4) теоремы 1 из и $\frac{2}{\mu}B \leq \delta$, где $\mu = 2nA \cdot B \cdot C \leq 1$, то процесс Ньютона сходится к единственному решению $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T$ системы (3.18) в основной области $\|\xi - x^{(0)}\|_p \leq 2B$ при любом выборе начального приближения $\bar{x}^{(0)}$ из области $\|\bar{x}^{(0)} - x^{(0)}\|_p \leq \frac{1-\mu}{2\mu}B$.

Замечание 1.

1. За нулевое приближение $x^{(0)}$ можно взять любое достаточно грубое значение, близкое к точному значению корня $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T$.

2. Погрешность приближения на k -ом шаге можно оценить по величине $\|\varepsilon^{(k)}\|_p$.

3. Модифицированный метод Ньютона.

Если матрица $W^{-1}(x^{(k)})$ непрерывна в окрестности искомого решения $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T$ и начальное приближение $x^{(0)}$ достаточно близко к ξ , то приближенно можно положить $W^{-1}(x^{(k)}) \approx W^{-1}(x^{(0)})$. Тогда можно модифицировать процесс Ньютона

$$\bar{x}^{(k+1)} = \bar{x}^{(k)} - W^{-1}(x^{(0)}) \cdot F(\bar{x}^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

3.6.2 Метод итерации

Пусть дана система нелинейных уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ \dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \end{cases} \quad (3.22)$$

которую можно записать в виде

$$F(x) = 0, \quad (3.23)$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, $F = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$, $x, F \in \Omega \subset R^n$, n - мерные вектора.

Систему (3.22) преобразуют к системе специального вида

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ x_2 = \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \dots \\ x_n = \varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_n), \end{cases} \quad (3.24)$$

или $x = \varphi(x)$, $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)^T$, где функции $\varphi_i, i = \overline{1, n}$ действительны, определены и непрерывны в некоторой окрестности ω изолированного решения $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T$.

Для нахождения решения исходной системы можно использовать метод итерации

$$x^{(k+1)} = \varphi(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.25)$$

где начальное приближение $x^{(0)} \approx \xi$.

Если процесс итерации (3.25) сходится, то предельное значение $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)}$ обязательно является корнем уравнения (3.24).

Действительно, в силу непрерывности функции $\varphi(x)$ будем иметь:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k+1)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(x^{(k)}) = \varphi\left(\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)}\right) \Rightarrow \xi = \varphi(\xi).$$

Если, все приближения $x^{(k)}, k = 0, 1, 2, \dots$ принадлежат области ω ($x^{(k)} \in \omega, k = 0, 1, 2, \dots$) и x^* — единственный корень системы в ω , то $x^* = \xi$.

Теорема 5. Пусть область G замкнута и отображение (3.24) является сжимающим в G , т.е. существует правильная дробь q такая, что для любых двух точек $x_1, x_2 \in G$, их образы $\varphi(x_1), \varphi(x_2)$ удовлетворяют условию

$$\|\varphi(x_2) - \varphi(x_1)\|_p \leq q \cdot \|x_2 - x_1\|_p, \quad 0 \leq q < 1, \quad p = \{m, l, \bar{k}\}.$$

Тогда, если все $x^{(k)} \in G, k = 0, 1, 2, \dots$, то

1) независимо от выбора начального приближения $x^{(0)}$ процесс

итерации сходится, т. е. существует $\xi = \lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)}$;

2) предельный вектор ξ является единственным решением системы уравнений (3.24) в области G ;

3) справедлива оценка

$$\|\xi - x^{(k)}\|_p \leq \frac{q^k}{1-q} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|_p.$$

Замечание 2. При выполнении условий теоремы верна также оценка

$$\|\xi - x^{(k)}\|_p \leq \frac{q}{1-q} \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_p.$$

Замечание 3. Если необходимо найти решение системы уравнений (1.6) или (1.8) с заданной точностью ε , то есть необходимо найти приближенное решение $\tilde{\xi}$ такое, что $\|\xi - \tilde{\xi}\|_p \leq \varepsilon$, тогда

$$\tilde{\xi} = x^{(k)}, \|\xi - x^{(k)}\|_p \leq \varepsilon \Rightarrow \|\xi - x^{(k)}\|_p \leq \frac{q}{1-q} \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_p \leq \varepsilon.$$

В этом случае достигаем заданной точности, как только выполнится условие $\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_p \leq \varepsilon \frac{1-q}{q}$, $k = 0, 1, 2, \dots$

$$\text{Следовательно } \tilde{\xi} = x^{(k)}, \Delta \tilde{\xi} = \frac{q}{1-q} \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_p.$$

Замечание 4. Метод итерации может быть применен также к общей системе (3.22): $F(x) = 0$, где $F = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$ — вектор-функция, определенная и непрерывная в некоторой окрестности ω изолированного решения $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T$. Для этого приводят исходную систему к виду (3.24):

$$x = x + A \cdot F(x) \Rightarrow \varphi(x) \equiv x + A \cdot F(x) \Rightarrow x = \varphi(x),$$

где A — неособенная матрица.

3.6.3 Метод скорейшего спуска (метод градиента)

Пусть дана система нелинейных уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ \dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \end{cases} \quad (3.26)$$

которую можно записать в виде

$$F(x) = 0, \quad (3.29)$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, $F = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$, $x, F \in \Omega \subset R^n$ n -мерные вектора.

Предположим, что функции f_i , $i = \overline{1, n}$ действительны и непрерывно дифференцируемы в их общей области определения. Рассмотрим функцию

$$U(x) = \sum_{i=1}^n [f_i(x)]^2 \equiv (F(x), F(x)). \quad (3.30)$$

Каждое решение системы (3.29) является нулем функции $U(x)$ т.е.

$$\forall \xi, \quad F(\xi) = 0 \Leftrightarrow U(\xi) = 0.$$

Будем предполагать, что система имеет лишь изолированное решение, которое представляет собой точку строгого минимума функции $U(x)$. Таким образом, задача сводится к нахождению минимума функции $U(x)$ в n -мерном пространстве Ω : $x, F \in \Omega \subset R^n$.

Обозначим через $\Delta U(x) = \left\{ \frac{\partial U}{\partial x_1}, \frac{\partial U}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial U}{\partial x_n} \right\}^n$ градиент функции $U(x)$.

Итерационная схема в этом случае строится следующим образом

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \lambda_k \cdot \Delta U(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.31)$$

Для нахождения неизвестного коэффициента λ_k строится функция

$$\Phi(\lambda) = U \left[x^{(k)} - \lambda \cdot \Delta U(x^{(k)}) \right],$$

которая дает значение (линию уровня) функции $U(x)$ вдоль нормали при выбранном λ . Ищется такое значение $\lambda = \lambda_k$ при котором достигается минимум функции $\Phi(\lambda)$: $\lambda_k = \arg(\min[\Phi(\lambda)])$. Следовательно, имеем

$$\Phi'(\lambda) = \frac{d}{d\lambda} U \left[x^{(k)} - \lambda \cdot \Delta U(x^{(k)}) \right] = 0. \quad (3.32)$$

Наименьший положительный корень уравнения (3.32) и дает значение $\lambda = \lambda_k$.

Приближенное значение корня данного уравнения можно найти следующим образом

$$\lambda_k = \frac{\sum_{i=1}^n f_i(x^{(k)}) \frac{\partial f_i(x^{(k)})}{\partial x} \Delta U(x^{(k)})}{\sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial f_i(x^{(k)})}{\partial x} \Delta U(x^{(k)}) \right]^2} = \frac{\left(f(x^{(k)}), W(x^{(k)}) \Delta U(x^{(k)}) \right)}{\left(W(x^{(k)}) \Delta U(x^{(k)}), W(x^{(k)}) \Delta U(x^{(k)}) \right)}$$

Используя соотношения

$$\frac{\partial U}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \sum_{i=1}^n [f_i(x)]^2 \right\} = 2 \sum_{i=1}^n f_i(x) \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}, \quad j = \overline{1, n},$$

$$\Delta U(x) = 2W'(x)f(x),$$

где $W'(x)$ транспонированная матрица Якоби, получим

$$\lambda_k = \frac{1}{2} \frac{\left(f(x^{(k)}), W(x^{(k)}) W'(x^{(k)}) f(x^{(k)}) \right)}{\left(W(x^{(k)}) W'(x^{(k)}) f(x^{(k)}), W(x^{(k)}) W'(x^{(k)}) f(x^{(k)}) \right)}.$$

Обозначив $\mu_k = 2\lambda_k$, итерационный процесс можно записать в виде

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \mu_k \cdot W'(x^{(k)}) f(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.33)$$

4. Методы приближения функций

4.1. Постановка задачи аппроксимации функций

В вычислительной математике нередки случаи, когда одну функцию приходится заменять другой, более простой и удобной для дальнейшей работы. Такую задачу называют **аппроксимацией функций**.

Задача аппроксимации функции ставится в следующих случаях:

1. Необходимо вычислить неизвестное значение функции, заданной таблично, т.е. когда для конечного набора значений x_i величины x из отрезка $[a; b]$, где $a = x_0 < x_1 < \dots < x_i \dots < x_n = b$, получен набор значений y_i (табл. 4.1):

Таблица 4.1

x	x_0	x_1	x_2	\dots	x_i	\dots	x_n
$F(x)$	y_0	y_1	y_2	\dots	y_i	\dots	y_n

Точки x_0, x_1, \dots, x_n называются **узлами**. Если расстояние $h = x_{i+1} - x_i = \text{const}$, то сетка значений, представленная табл. 4.1, называется **равномерной**.

2. Аналитическое выражение для некоторой функции имеется, однако оно оказывается малоприменимым для решения поставленной задачи, потому что операция, которую требуется осуществить над этой функцией, трудновыполнима.

Например, для вычисления значения $\ln 4,3276$ проще всего воспользоваться степенным разложением функции. При этом получится приближенное значение функции, но если мы умеем контролировать погрешность, то можно считать, что мы получили интересующий нас результат — хотя бы потому, что в реальности все равно приходится ограничиваться приближенным представлением значений логарифмической функции.

3. Другая ситуация, когда может потребоваться аппроксимация аналитически заданной функции, — вычисление определенных интегралов.

Например, как вычислить интеграл $\int_1^2 \frac{\sin x}{x} dx$? Он, несомненно,

существует, но по формуле Ньютона—Лейбница вычислен быть практически не может, так как первообразная от подынтегральной функции не выражается в элементарных функциях. Аппроксимация

подынтегральной функции — один из возможных приемов приближенного вычисления интегралов.

Классический подход к численному решению подобных задач заключается в том, чтобы, опираясь на информацию о функции F , по некоторому алгоритму подобрать аппроксимирующую функцию G , в определенном смысле «близкую» к F . Чаще всего задача аппроксимации решается с помощью многочленов. Вычисления значений многочлена легко автоматизировать, производная и интеграл от многочлена, в свою очередь, также являются многочленами. Наряду с многочленами для аппроксимации используют ряды Фурье, экспоненциальные и другие элементарные функции.

Для оценки «близости» функций выбирают тот или иной **критерий согласия**. Эти критерии основаны на использовании той или иной метрики, т. е. способа введения расстояния между функциями, принадлежащими тому или иному классу: $\rho = \rho(F(x), G(x))$.

Например, для функций, ограниченных на отрезке $[a, b]$, расстояние может быть введено следующим образом:

$$\rho(F(x), G(x)) = \max |F(x) - G(x)|; \quad (4.1)$$

для функций, непрерывных на отрезке $[a; b]$, по формуле

$$\rho(x, y) = \int_a^b |F(x) - G(x)| dx \text{ или } \rho(x, y) = \int_a^b [F(x) - G(x)]^2 dx. \quad (4.2)$$

Для функций, заданных таблично, достаточно распространенным критерием согласия является **критерий Чебышева**, который определяет расстояние ρ между аппроксимируемой и аппроксимирующей функциями так:

$$\rho = \max |F(x_i) - G(x_i)| \quad (4.3)$$

Если $\rho = 0$ в (4.3), т.е. $F(x_i) = G(x_i) = y_i$, то соответствующий способ аппроксимации называют **интерполяцией**, а процедуру вычисления значений $F(x)$ с помощью $G(x)$ в точках, не являющихся узлами сетки, — **интерполированием**.

С геометрической точки зрения график функции $G(x)$ при интерполировании должен проходить через все точки $A_0(x_0, y_0), A_1(x_1, y_1), \dots, A_n(x_n, y_n)$. Подчеркнем, что для значений x , не

являющихся узловыми, значения функции $G(x)$ ничем не регламентированы, и в принципе могут значительно отличаться от значений функции $F(x)$).

Часто процедура аппроксимации связана с другим критерием согласия:

$$\rho = \min \sum_{i=0}^n [F(x_i) - G(x_i)]^2. \quad (4.4)$$

Применяемый на его основе способ аппроксимации получил название метода *наименьших квадратов*.

Выбор критерия согласия позволяет строить методы, позволяющие однозначно определять параметры аппроксимирующей функции (если задан ее вид).

4.2.Существование и единственность интерполяционного многочлена

Пусть известные значения некоторой функции $F(x)$ образуют таблицу вида табл. 4.1. Будем решать задачу интерполирования этой функции с помощью построения интерполяционного многочлена n -й степени

$$G(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n, \quad (4.5)$$

который в узлах x_i - принимает табличные значения y_i :

$$G(x_0) = y_0, G(x_1) = y_1, \dots, G(x_n) = y_n. \quad (4.6)$$

Условия интерполяции (4.6) приводят к системе из $(n+1)$ линейных алгебраических уравнений с $(n+1)$ неизвестными — коэффициентами многочлена:

[illegible]

Решая эту систему относительно неизвестных a_0, a_1, \dots, a_n , мы и получим аналитическое выражение полинома (4.5). Система (4.7) всегда будет иметь единственное решение, поскольку ее определитель, известный в алгебре как *определитель Вандермонда*

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^n \end{vmatrix}$$

составленный из попарно различных значений элементов x_i (а различными они в данной ситуации будут всегда), не равен нулю. Отсюда и вытекают существование и единственность решения системы (4.7) и, следовательно, многочлена (4.5).

Совершенно очевидно, что интерполяционный многочлен меньшей степени, вообще говоря, не существует, а большей существует, но не единственен. Поэтому интерполяция стандартно производится многочленами, степень которых на единицу меньше числа узлов.

4.3. Интерполяционный многочлен Лагранжа

Описанный прием можно использовать и для практического решения задачи построения интерполяционного многочлена: достаточно составить и решить систему вида (4.7) и подставить найденное решение в (4.5). Такой путь вполне может быть применен. Вместе с тем для многочленной интерполяции существуют более эффективные приемы, описанные ниже, которые позволяют обойти решение систем уравнений при построении интерполяционных многочленов.

Пусть функция $F(x)$ задана табл. 4.1. Построим многочлен $L_n(x)$, степень которого не выше, чем n , и для которого выполнены условия интерполяции

$$L_n(x_0) = y_0, L_n(x_1) = y_1, \dots, L_n(x_n) = y_n. \quad (4.8)$$

Очевидно, что требование (4.8) с учетом (4.7) вполне обеспечивает выполнение условий (4.6). Многочлены $l_i(x)$ составим следующим образом:

$$l_i(x) = C_i(x - x_0)(x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdot \dots \cdot (x - x_n), \quad (4.9)$$

где C_i — коэффициент, значение которого найдем из первой части условия (4.8):

$$C_i = \frac{y_i}{(x_i - x_0) \cdot \dots \cdot (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdot \dots \cdot (x_i - x_n)}$$

(заметим, что ни один множитель в знаменателе не равен нулю). Подставим C_i в (4.9) и далее с учетом (4.8) окончательно имеем:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \frac{(x-x_0) \cdot \dots \cdot (x-x_{i-1})(x-x_{i+1}) \cdot \dots \cdot (x-x_n)}{(x_i-x_0) \cdot \dots \cdot (x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1}) \cdot \dots \cdot (x_i-x_n)}. \quad (4.10)$$

Это и есть **интерполяционный многочлен Лагранжа**. По таблице исходной функции F формула (4.10) позволяет довольно просто составить «внешний вид» многочлена.

Пример 4.1. Построить интерполяционный многочлен Лагранжа для функции, заданной таблицей значений:

x	1	2	3
$F(x)$	12	4	6

Из таблицы следует, что $n=2$ (т.е. степень многочлена будет не выше 2); здесь $x_0=1, x_1=2, x_2=3$. Используя формулу (4.10), получаем

$$\begin{aligned} L_2(x) &= 12 \frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} + 4 \frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} + 6 \frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)} = \\ &= 6(x^2 - 5x + 6) - 4(x^2 - 4x + 3) + 3(x^2 - 3x + 2) = 5x^2 - 23x + 30. \end{aligned}$$

Используя обозначение $\prod_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1) \cdot \dots \cdot (x-x_n)$ формуле (4.10) можно придать более сжатый вид. Для этого продифференцируем $\prod_{n+1}(x)$ по x :

$$\frac{d}{dx} \prod_{n+1}(x) = \prod_{n+1}'(x) = \sum_{j=1}^n (x-x_0) \cdot \dots \cdot (x-x_{j-1})(x-x_{j+1}) \cdot \dots \cdot (x-x_n).$$

При $x = x_i$ имеем ($i = 0, 1, \dots, n$):

$$\prod_{n+1}'(x_i) = (x_i-x_0) \cdot \dots \cdot (x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1}) \cdot \dots \cdot (x_i-x_n).$$

Тогда формула Лагранжа (4.10) принимает вид

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \frac{\prod_{n+1}(x)}{(x-x_i) \prod_{n+1}'(x_i)}. \quad (4.11)$$

4.4. Организация ручных вычислений по формуле Лагранжа

Непосредственное применение формулы Лагранжа приводит к большому числу однотипных вычислений. Организация вычислений существенно улучшается, если пользоваться специальной

вычислительной схемой.

Ниже в таблице показано построение такой схемы для 4 узлов ($i = 0, 1, 2, 3$) Таблица составляется заново для каждого нового значения аргумента x .

Заполнение таблицы начинается с того, что вычисляются и заносятся в соответствующие клетки все элементарные разности. Вслед за этим вычисляются произведения P_i разностей по строкам:

$$P_0 = (x - x_0)(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3);$$

$$P_1 = (x - x_0)(x - x_1)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \text{ и т.д.}$$

x	x_0	x_1	x_2	x_3	P_i	y_i	y_i / P_i
x_0	$x - x_0$	$x_0 - x_1$	$x_0 - x_2$	$x_0 - x_3$			
x_1	$x_1 - x_0$	$x - x_1$	$x_1 - x_2$	$x_1 - x_3$			
x_2	$x_2 - x_0$	$x_2 - x_1$	$x - x_2$	$x_2 - x_3$			
x_3	$x_3 - x_0$	$x_3 - x_1$	$x_3 - x_2$	$x - x_3$			
							$S = \sum (y_i / P_i)$

Легко видеть, что обозначение P_i — это знаменатель в формуле Лагранжа (4.11), т.е.

$$P_i = (x - x_i) \prod_{n+1}^{\bullet} (x_i) \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n).$$

С учетом этого обозначения формула Лагранжа имеет вид

$$L_n(x) = \prod_{n+1} (x) \sum_{i=0}^n \frac{y_i}{P_i}. \quad (4.12)$$

Сумма S образуется сложением элементов последнего столбца. Для получения окончательного значения $L_n(x)$ достаточно умножить S на произведение $\prod_{n+1} (x)$ (произведение диагональных разностей таблицы).

4.5. Программирование интерполяционного многочлена Лагранжа

Рассмотрим способ программной реализации алгоритма вычислений по формуле Лагранжа. Для составления программы вычисления одного значения интерполяционного многочлена Лагранжа на ЭВМ воспользуемся формулой (4.10). Основная рабочая часть алгоритма состоит из двойного цикла: во внутреннем цикле

вычисляются $n + 1$ значений многочленов - слагаемых вида ($i = 0, 1, \dots, n$)

$$l_i(x) = y_i \frac{(x - x_0) \cdot \dots \cdot (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdot \dots \cdot (x - x_n)}{(x_i - x_0) \cdot \dots \cdot (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdot \dots \cdot (x_i - x_n)}$$

(в числителе и знаменателе n скобок), а во внешнем — накапливается общая сумма: $L_n(x) = \sum_{i=0}^n l_i(x)$.

Работа внутреннего цикла контролируется с помощью индекса j . Изменяясь в пределах от 0 до n , индекс j принимает ровно n значений, «проскакивая» текущее значение индекса i , определяемого во внешнем цикле. Тем самым обеспечивается правильное составление многочленов — слагаемых формулы Лагранжа. Носителем окончательного результата является переменная f .

Ниже приведены блок-схема и программа вычисления значения f с помощью интерполяционной формулы Лагранжа на языке Turbo Pascal. Ввод исходной таблицы происходит в цикле, причем массивы значений x и y вводятся не последовательно, а парами соответствующих элементов.

```

Program Lagrang;
uses crt;
type mus=array[0..7] of real;
label 1;
var x,y:mus; n, i, j:integer; a, l ,f:real;
begin clrscr;
  writeln('Задайте степень многочлена'); readln(n);
  writeln('Введите значение аргумента, для которого требуется найти
  значение функции'); readln(a);
  writeln('Введите пары значений x и y через пробел');
  for i:=0 to n do read (x[i], y[i]);
  f:=0;
  for i:=0 to n do
  begin
    j:=0;
    l:=1;
    1:I f i=j then inc(j);
    if j<=n then begin

```

```

l:=l*(a-x[j])/(x[i]-x[j]);
inc (j); goto 1;
end;
l:=y[i]*l; f :=f+1;
end;
writeln ('При a=', a:5:2, ' f(', a:5:2, ')=' f:5:2);
readkey;
end.

```

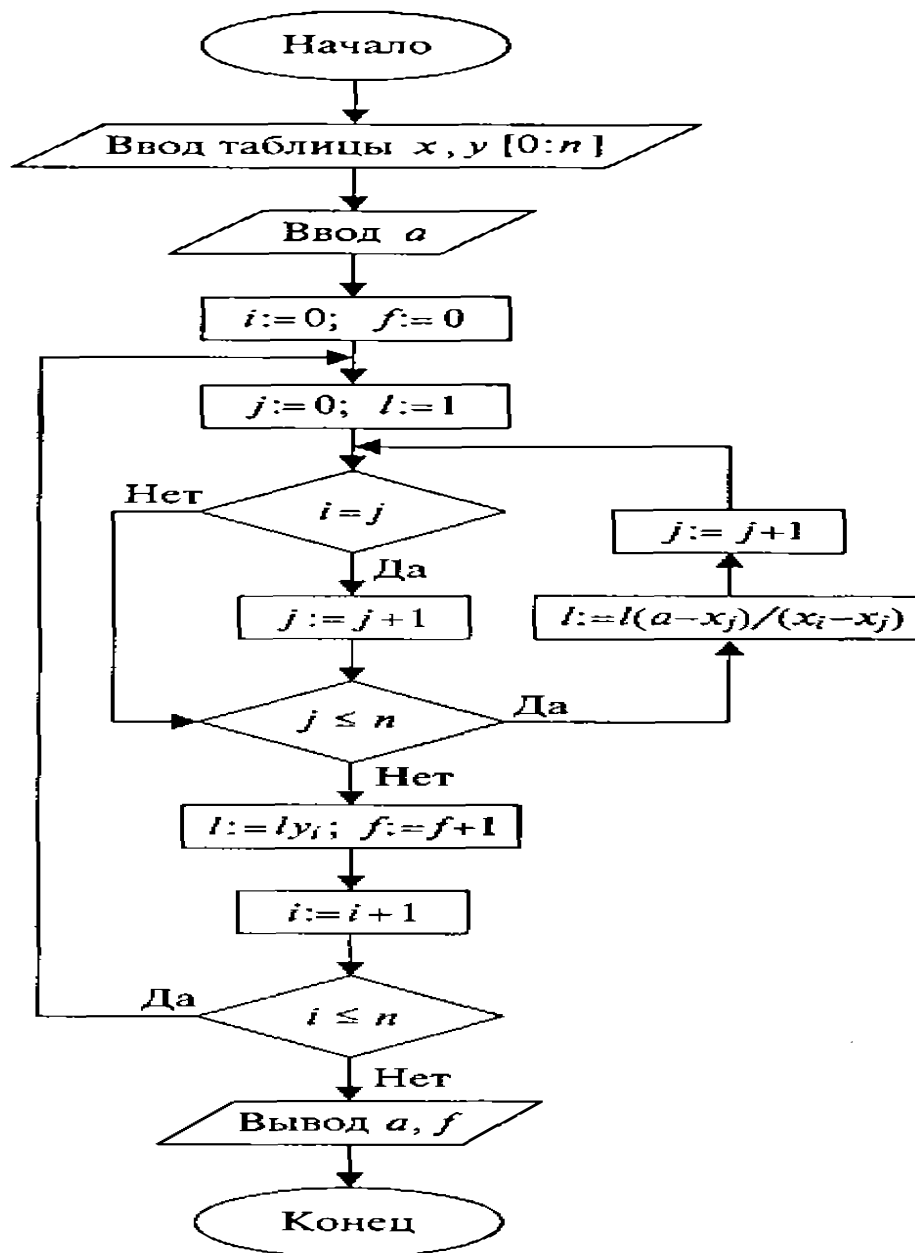


Рис. 9. Блок-схема алгоритма метода Лагранжа.

4.6. Интерполяционные формулы Ньютона

Рассмотрим другой способ построения интерполяционного многочлена. При этом, однако, не следует забывать, что по заданной таблице, содержащей значения функции в $n+1$ узлов, интерполяционный многочлен n -й степени единственен, и поэтому «новые» интерполяционные многочлены отличаются от построенного по той таблице многочлена Лагранжа лишь внешним видом. Тем не менее, они представляют ценность, поскольку вид (т.е. форма записи) многочлена определяет порядок и объем вычислений, что в численных методах существенно.

Часто интерполирование ведется для функций, заданных таблицами с равноотстоящими значениями аргумента. В этом случае шаг таблицы $h = x_{i+1} - x_i$ ($i = 0, 1, 2, \dots$) является величиной постоянной. Для таких таблиц построение интерполяционных формул заметно упрощается, и мы ограничимся получением интерполяционных формул Ньютона лишь для этого случая.

Пусть функция задана таблицей вида табл. 4.1 с постоянным шагом. Разности между значениями функции в соседних узлах интерполяции называются **конечными разностями первого порядка**:

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i \quad (i = 0, 1, \dots, n-1) \quad (4.13)$$

Из конечных разностей первого порядка образуются **конечные разности второго порядка**

$$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i \quad (i = 0, 1, \dots, n-2)$$

Продолжая этот процесс, можно по заданной таблице функции составить таблицу конечных разностей:

x_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	\dots	$\Delta^n y_0$
x_1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$		
x_2	y_2				
				\dots	
			$\Delta^2 y_{n-2}$		
x_{n-1}	y_{n-1}	Δy_{n-1}			
x_n	y_n				

Конечные разности любого порядка могут быть представлены через значения функции. Действительно, для разностей первого порядка это следует из определения. Для разностей второго порядка имеем

$$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i = (y_{i+2} - y_{i+1}) - (y_{i+1} - y_i) = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i$$

Аналогично для разностей третьего порядка

$$\begin{aligned} \Delta^3 y_i &= \Delta^2 y_{i+1} - \Delta^2 y_i = (y_{i+3} - 2y_{i+2} + y_{i+1}) - (y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i) = \\ &= y_{i+3} - 3y_{i+2} + 3y_{i+1} - y_i. \end{aligned}$$

Методом, математической индукции можно доказать, что

$$\Delta^k y_i = y_{i+k} - ky_{i+k-1} + \frac{k(k-1)}{2!} y_{i+k-2} - \dots + (-1)^k y_i.$$

4.6.1. Первая интерполяционная формула Ньютона

Пусть для функции, заданной таблицей с постоянным шагом, составлена таблица конечных разностей. Будем искать интерполяционный многочлен в виде

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + a_n(x - x_0) \cdot \dots \cdot (x - x_{n-1})$$

Это — многочлен n -й степени. Значения коэффициентов a_0, a_1, \dots, a_n найдем из условия совпадения значений исходной функции и многочлена в узлах.

Полагая $x = x_0$ из (10.13) находим $y_0 = P_n(x_0) = a_0$, откуда $a_0 = y_0$. Далее, полагая $x = x_1$, получаем $y_1 = P_n(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0)$, откуда $a_1 = \Delta y_0 / h$.

При $x = x_2$ имеем

$$y_2 = P_n(x_2) = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1),$$

т.е. $y_2 - 2\Delta y_0 - y_0 = 2h^2 a_2$, или $y_2 - 2y_1 + y_0 = 2h^2 a_2$, откуда $a_2 = \Delta^2 y_0 / 2h^2$.

Проведя аналогичные выкладки, можно получить $a_3 = \Delta^3 y_0 / 3!h^3$.

Исходя из этих формул, методом полной математической индукции можно доказать, что в общем случае выражение для a_k будет иметь вид

$$a_k = \frac{\Delta^k y_0}{k!h^k}. \quad (4.14)$$

Подставим теперь (4.14) в выражение для многочлена (4.13)

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_0) \cdot \dots \cdot (x - x_{n-1}). \quad (4.15)$$

Часто эта формула записывается в несколько ином виде. Введем вместо переменной x новую переменную t : $\frac{x - x_0}{h} = t$ или, напротив,

$x = x_0 + ht$ Тогда $\frac{x - x_1}{h} = \frac{x - x_0 - h}{h} = t - 1$, $\frac{x - x_2}{h} = \frac{x - x_0 - 2h}{h} = t - 2$ и т.д.

После этого формула (4.15) примет вид

$$P_n(x) = P_n(x_0 + t \cdot h) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \dots + \frac{t(t-1) \cdot \dots \cdot (t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0 \quad (4.16)$$

Данная формула называется **первой интерполяционной формулой Ньютона**.

Эта формула традиционно применяется для интерполирования в начале отрезка интерполяции, для значений t в интервале $(0, 1)$. Первую интерполяционную формулу Ньютона называют по этой причине формулой для *интерполирования вперед*. Заметим, что путем переопределения узлов за начальное значение x_0 можно принимать любое табличное значение аргумента x (отбросив «лишние» узлы слева).

Пример 4.3. Построить интерполяционный многочлен Ньютона по следующим данным:

x	0,5	1	1,5	2	2,5
y	1,715	2,348	3,127	5,289	8,914

Построим таблицу разностей:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0,5	1,715				
		0,633			
1	2,348		0,146		
		0,779		1,237	
1,5	3,127		1,383		-1,157

		2,162		0,080	
2	5,289		1,463		
		3,625			
2,5	8,914				

Таким образом, многочлен Ньютона, представленный в форме (4.15), имеет вид

$$\begin{aligned}
 P_4(x) &= 1,715 + \frac{0,633}{0,5}(x-0,5) + \frac{0,146}{2!0,5^2}(x-0,5)(x-1) + \\
 &+ \frac{1,237}{3!0,5^3}(x-0,5)(x-1)(x-1,5) - \frac{1,157}{4!0,5^4}(x-0,5)(x-1)(x-1,5)(x-2) = \\
 &= 1,715 + 1,266(x-0,5) + 0,299(x-0,5)(x-1) + 1,649(x-0,5)(x-1) \cdot \\
 &\cdot (x-1,5) - 0,771(x-0,5)(x-1)(x-1,5)(x-2)
 \end{aligned}$$

Представим тот же многочлен в форме (4.16). Введем переменную $t = \frac{x-x_0}{h} = \frac{x-0,5}{0,5}$ и получим

$$\begin{aligned}
 P_4(0,5 + 0,5t) &= 1,715 + 0,633t + \frac{0,146}{2!}t(t-1) + \frac{1,237}{3!}t(t-1)(t-2) - \\
 &- \frac{1,157}{4!}t(t-1)(t-2)(t-3).
 \end{aligned}$$

4.6.2. Вторая интерполяционная формула Ньютона

Когда значение аргумента находится ближе к концу отрезка интерполяции, применять первую интерполяционную формулу становится невыгодно.

В этом случае применяется формула для интерполирования назад — вторая интерполяционная формула Ньютона, которая ищется в виде:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_n) + a_2(x-x_n)(x-x_{n-1}) + \dots + a_n(x-x_n) \cdot \dots \cdot (x-x_1). \quad (4.17)$$

Как и для первой формулы Ньютона, коэффициенты a_0, a_1, \dots, a_n находятся из условия совпадения значений функции и интерполяционного многочлена в узлах. Тогда получаем:

$$a_k = \frac{\Delta^k y_{n-k}}{k!h^k}. \quad (4.18)$$

Подставляя (4.18) в (4.17), получим

$$P_n(x) = y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{h}(x - x_n) + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!h^2}(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \dots$$

$$\dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_n) \cdot \dots \cdot (x - x_1)$$

и переходя к переменной $t = \frac{x - x_n}{h}$ получим окончательный вид второй интерполяционной формулы Ньютона:

$$P_n(x) = P_n(x_n + th) = y_n + t\Delta y_{n-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \dots$$

$$\dots + \frac{t(t+1) \cdot \dots \cdot (t+n-1)}{n!}\Delta^n y_0. \quad (4.19)$$

Пример. Построить интерполяционный многочлен Ньютона для функции, заданной таблицей значений:

x	1	2	3
$F(x)$	12	4	6

Рассмотрим как первую, так и вторую формулы Ньютона. Для этого нам надо построить таблицу конечных разностей.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$
1	12	-8	10
2	4	2	
3	6		

1. Используя формулу

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \dots$$

$$\dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_0) \cdot \dots \cdot (x - x_{n-1}) \quad (4.15)$$

получаем

$$P_n(x) = 12 - \frac{8}{1}(x - 1) + \frac{10}{2!}(x - 1)(x - 2) = 5x^2 - 23x + 30.$$

2. Используя формулу

$$P_n(x) = y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{h}(x - x_n) + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!h^2}(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \dots$$

$$\dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_n) \cdot \dots \cdot (x - x_1),$$

получаем

$$P_n(x) = 6 + \frac{2}{1}(x-3) + \frac{10}{2!}(x-3)(x-2) = 5x^2 - 23x + 30.$$

4.7. Погрешность многочленной интерполяции

Если известно аналитическое выражение интерполируемой функции $f(x)$, то можно получить формулу для оценки погрешности интерполирования (погрешности метода). Остаточный член интерполяционного многочлена $F_n(x)$ имеет вид:
 $R_n(x) = f(x) - F_n(x).$

Предположим, что $f(x)$ имеет все производные до $(n+1)$ -го порядка включительно. Введем вспомогательную функцию

$$u(x) = f(x) - F_n(x) - K \cdot \prod_{n+1}(x) \quad (4.20)$$

где K — постоянный множитель. Как видно, функция $u(x)$ имеет $n+1$ корень (узлы интерполяции x_0, x_1, \dots, x_n). Подберем коэффициент K так, чтобы $u(x)$ имела $(n+2)$ -й корень в любой точке $x^* \neq x_i (i=0, 1, \dots, n)$. Действительно, чтобы было $u(x^*) = 0$, т.е.

$$f(x^*) - F_n(x^*) - K \cdot \prod_{n+1}(x^*) = 0,$$

достаточно принять:

$$K = \frac{f(x^*) - F_n(x^*)}{\prod_{n+1}(x^*)} \quad (4.21)$$

При этом значении K функция $u(x)$ будет иметь $n+2$ корня на отрезке интерполирования и будет обращаться в нуль на концах каждого из отрезков: $[x_0; x_1], [x_1; x_2], \dots, [x_i; x^*], [x^*; x_{i+1}], \dots, [x_{n-1}; x_n]$ (всего отрезков $n+1$).

Применяя теорему Ролля к функции $u(x)$ на каждом из этих отрезков, убеждаемся в том, что $u'(x)$ имеет не менее $n+1$ корней; далее, применяя ту же теорему к производным, последовательно получаем

$u''(x)$ имеет не менее n корней;

.....

$u^{(n+1)}(x)$ имеет не менее одного корня.

Пусть ξ — та самая точка, в которой $u^{(n+1)}(\xi) = 0$. Продифференцируем (4.20) $n+1$ раз: $u^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - K \cdot (n+1)!$,

откуда $K = \frac{f^{(n+1)}(x) - u^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}$, а при $x = \xi$

$$K = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}. \quad (4.22)$$

Сравнивая (4.21) и (4.22), имеем

$$f(x^*) - F_n(x^*) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{n+1}(x^*).$$

Но точка x^* — произвольная (правда, от x^* зависит), поэтому можно написать: $f(x) - F_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{n+1}(x)$. Таким образом, если принять $M_{n+1} = \max |f^{(n+1)}(x)|$, то

$$|R_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\prod_{n+1}(x)|. \quad (4.23)$$

Оценочная формула (4.23) непосредственно применима для подсчета погрешности метода интерполирования по формуле Лагранжа. Используя подстановки $t = \frac{x - x_0}{h}$ и $t = \frac{x - x_n}{h}$ и заменяя соответствующим образом выражение для $\prod_{n+1}(x)$, можно получить из (4.23) формулы оценки погрешностей интерполирования по первой и второй интерполяционным формулам Ньютона

$$|R_n(x)| \leq \frac{h^{n+1} M_{n+1}}{(n+1)!} |t(t-1)(t-2)\dots(t-n)|; \quad (4.24)$$

$$|R_n(x)| \leq \frac{h^{n+1} M_{n+1}}{(n+1)!} |t(t+1)(t+2)\dots(t+n)|. \quad (4.25)$$

Принимая во внимание, что при малых значениях h и при условии непрерывности $f^{(n+1)}(x)$ можно приближенно считать, что $M_{n+1} \approx \frac{\Delta^{n+1}y}{h^{n+1}}$ где $\Delta^{n+1}y = \max |\Delta^{n+1}y_m|$ (т.е. $\Delta^{n+1}y$ — максимальная из модулей конечных разностей $(n+1)$ -го порядка). При этом условии оценки (4.24) и (4.25) остаточных членов первой и второй интерполяционных формул Ньютона принимают следующий вид:

$$|R_n(x)| \approx \frac{|t(t-1)(t-2)\dots(t-n)|}{(n+1)!} \Delta^{n+1}y \quad (4.26)$$

$$|R_n(x)| \approx \frac{|t(t+1)(t+2)\dots(t+n)|}{(n+1)!} \Delta^{n+1} y \quad (4.27)$$

Формулы (4.26) и (4.27) удобны тем, что позволяют делать оценку ошибки метода интерполирования без исследования $(n+1)$ -й производной интерполируемой функции f (в частности, когда аналитическое выражение f вовсе неизвестно).

4.8. Интерполирование функций кубическими сплайнами

Пусть отрезок $[a, b]$ разбит на n -частей точками $x_i: x_i \in [a, b]$, $i = \overline{0, n}$, $x_i < x_{i+1}$, $i = \overline{0, n-1}$.

Определение. Сплайном k -ой степени называется функция, представляющая собой многочлен не выше k -ой степени на каждом из последовательно примыкающих к другу интервалов $[x_i, x_{i+1}]$, $i = \overline{0, n-1}$, причем в точках соприкосновения двух интервалов x_i функция непрерывна со своими производными до порядка не выше k .

Пусть на отрезке $[a, b]$ определена функция $y = f(x)$, значения которой в точке x_i равна $y_i = f(x_i)$, $x_i \in [a, b]$, $i = \overline{0, n}$.

Постановка задачи.

Задача интерполирования функции $y = f(x)$, заданной своими значениями y_i в точках $x_i \in [a, b]$, $i = \overline{0, n}$ кубическим сплайном (сплайном третьей степени) состоит в нахождении функции $S(x)$, равной многочлену третьей степени $S_i(x)$ на каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1, n}$:

$$S(x) = S_i(x) = a_{i0} \cdot x^3 + a_{i1} \cdot x^2 + a_{i2} \cdot x + a_{i3}, \quad x \in [x_{i-1}, x_i], \quad (4.28)$$

которая дважды непрерывно дифференцируема на отрезке $[a, b]$, то есть принадлежит классу функций $C^2[a, b]$ и удовлетворяет условиям

$$S(x_i) = S_{i+1}(x_i) = y_i, \quad i = \overline{0, n-1}, \quad S(x_n) = S_n(x_n) = y_n, \quad (4.29)$$

$$S_i(x_i) = S_{i+1}(x_i), \quad i = \overline{1, n-1}, \quad (4.30)$$

$$S'_i(x_i) = S'_{i+1}(x_i), \quad i = \overline{1, n-1}, \quad (4.31)$$

$$S''_i(x_i) = S''_{i+1}(x_i), \quad i = \overline{1, n-1}. \quad (4.32)$$

Условия (4.29)-(4.32) дают $(4n-2)$ линейных алгебраических уравнений для определения $(4n)$ неизвестных коэффициентов a_{ip} , $i = \overline{1, n}$, $p = \overline{0, 3}$ при соответствующих степенях x в многочленах $S_i(x)$.

Для однозначного решения полученной системы необходимо добавить два уравнения. Для этого предположим, что система уравнений (4.29)-(4.32) удовлетворяет следующим дополнительным условиям (краевым условиям):

$$I. \quad S'(a) = f'(a), \quad S'(b) = f'(b), \quad (4.33)$$

$$II. \quad S''(a) = f''(a), \quad S''(b) = f''(b), \quad (4.34)$$

$$III. \quad S'(a) = f'(b), \quad S''(a) = f''(b), \quad (4.35)$$

(условие периодичности).

Допустим, что $[a, b]$ разбит на отрезки равностоящими точками

$$x_{i+1} = x_i + h \text{ или } x_i = x_0 + i \cdot h, \quad x_0 = a, \quad x_n = b, \quad h = \frac{b-a}{n}, \quad i = \overline{0, n}.$$

Рассмотрим интерполяционный кубический сплайн при различных краевых условиях (4.33)-(4.35).

I. Пусть $S'(a) = f'(a)$, $S'(b) = f'(b)$.

Обозначим $m_i = S'(x_i)$. Эти величины называются наклонами сплайна в узлах x_i , $i = \overline{0, n}$. Тогда кубический сплайн можно искать в виде:

$$S(x) = S_i(x) = y_{i-1} (x - x_i)^2 \frac{h + 2(x - x_{i-1})}{h^3} + y_i (x - x_{i-1})^2 \frac{h + 2(x_i - x)}{h^3} +$$

$$+m_{i-1}(x-x_i)^2 \frac{(x-x_{i-1})}{h^2} + m_i(x-x_{i-1})^2 \frac{(x-x_i)}{h^2}, \quad i = \overline{1, n}, \quad x \in [x_{i-1}, x_i]. \quad (4.36)$$

Действительно

$$S(x_{i-1}) = S_i(x_{i-1}) = y_{i-1} \cdot 1 + y_i \cdot 0 + m_{i-1} \cdot 0 + m_i \cdot 0 = y_{i-1},$$

$$S(x_i) = S_i(x_i) = y_{i-1} \cdot 0 + y_i \cdot 1 + m_{i-1} \cdot 0 + m_i \cdot 0 = y_i,$$

$S(x_i) = S_{i+1}(x_i) = y_i = S_i(x_i)$, т.е. выполняются условия (4.29), (4.30).

$$S'(x_i) = S'_i(x_i) = y_{i-1} \cdot 0 + y_i \cdot \left[\frac{2}{h} + \frac{-2h^2}{h^3} \right] + m_{i-1} \cdot 0 + m_i \cdot 1 = m_i,$$

$$S'_{i+1}(x_i) = y_i \cdot 1 + y_{i+1} \cdot 0 + m_i \cdot 1 + m_{i+1} \cdot 0 = m_i,$$

$$S'_i(x_i) = S'_{i+1}(x_i) = m_i, \text{ т.е. выполняется условие (4.31).}$$

Из условия (4.32) получим

$$S''_i(x_i) = y_{i-1} \cdot \frac{6}{h^2} - y_i \cdot \frac{6}{h^2} + m_{i-1} \cdot \frac{2}{h} + m_i \cdot \frac{4}{h}, \quad i = \overline{1, n},$$

$$S''_{i+1}(x_i) = -y_i \cdot \frac{6}{h^2} + y_{i+1} \cdot \frac{6}{h^2} - m_i \cdot \frac{4}{h} - m_{i+1} \cdot \frac{2}{h}, \quad i = \overline{1, n},$$

Тогда из условий (4.32), (4.33) получим систему из $(n+1)$ линейных уравнений относительно $(n+1)$ неизвестных $m_i, i = \overline{0, n}$:

$$\begin{cases} m_0 = f'(a) = d_0, \\ m_{i-1} + 4m_i + m_{i+1} = \frac{3}{h}[y_{i+1} - y_{i-1}] = d_i, \quad i = \overline{1, n-1}, \\ m_n = f'(b) = d_n, \end{cases} \quad (4.37)$$

Решив данную систему линейных уравнений любым подходящим методом относительно неизвестных $m_i, i = \overline{0, n}$, затем подставив в выражение (4.36) получим интерполяционный кубический сплайн $S(x)$ функции $y = f(x), x \in [a, b]$ у которого известны $y'_0 = f'(a), y'_n = f'(b)$.

II. Пусть $S''(a) = f''(a), S''(b) = f''(b)$. Для этого случая имеем

$$\begin{aligned}
S(x) = S_i(x) = & y_{i-1} \frac{(x_i - x)}{h} + y_i \frac{(x - x_{i-1})}{h} + \\
& + t_{i-1} \frac{(x_i - x)^3 - h^2(x_i - x)}{6h} + t_i \frac{(x - x_{i-1})^3 - h^2(x - x_{i-1})}{6h}, \quad (4.38) \\
& x \in [x_{i-1}, x_i], i = \overline{1, n}.
\end{aligned}$$

Где неизвестные $t_i = S''(x_i)$, $i = \overline{0, n}$, получаются как решение следующей системы уравнений

$$\begin{cases} t_0 = f''(a) = c_0, \\ t_{i-1} + 4t_i + t_{i+1} = \frac{6}{h^2} [y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}] = c_i, \quad i = \overline{1, n-1}. \\ t_n = f''(b) = c_n, \end{cases} \quad (4.39)$$

Решив данную систему линейных уравнений любым подходящим методом относительно неизвестных t_i , $i = \overline{0, n}$, затем подставив в выражение (4.38) получим интерполяционный кубический сплайн $S(x)$ функции $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ у которого известны $y_0'' = f''(a)$, $y_n'' = f''(b)$.

Замечание. Погрешность интерполяции функции $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ кубическим сплайном оценивается выражением

$$|f(x) - S(x)| \leq \frac{5}{2} M \cdot h^3, \quad M = \max_{x \in [a, b]} |f'''(x)|.$$

4.9. Обратное интерполирование

1. Для случая равноотстоящих узлов. Пусть задана некоторая функция $y = f(x)$ со значениями y_i в точках x_i . Задача обратного интерполирования заключается в том, чтобы по известному значению \bar{y} определить соответствующее значение аргумента \bar{x} .

Предположим, что $f(x)$ монотонная функция и значение $\bar{y} \in [y_0, y_1]$, $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$.

Заменим $y = f(x)$ первым интерполяционным полиномом

Ньютона

$$\bar{y} = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!}t + \frac{\Delta^2 y_0}{2!}t(t-1) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!}t(t-1)\dots(t-n+1), \quad (4.40)$$

Необходимо определить t , которое неизвестно, поскольку $t = \frac{\bar{x} - x_0}{h}$; неизвестно значение \bar{x} .

Для этого выделим t из :

$$t = \frac{\bar{y} - y_0}{1!\Delta y_0} + \left(-\frac{\Delta^2 y_0}{2!\Delta y_0} \right) t(t-1) + \dots + \left(-\frac{\Delta^n y_0}{n!\Delta y_0} \right) t(t-1)\dots(t-n+1), \quad (4.41)$$

т.е., получим функцию $t = \varphi(t)$.

Тогда t можно находить методом последовательных приближений $t_m = \varphi(t_{m-1})$, $m = 0, 1, 2, \dots$. За $t_0 = 0$, тогда $t_1 = \frac{\bar{y} - y_0}{1!\Delta y_0}$

Если $f(x)$ $n+1$ - раз непрерывно дифференцируема на $[a, b]$ и h достаточно мал, то существует предел $\lim_{m \rightarrow \infty} t_m = \bar{t}$.

$$\bar{t} = \frac{\bar{x} - x_0}{h} \Rightarrow \bar{x} = x_0 + \bar{t} \cdot h. \quad (4.42)$$

На практике итерации продолжают до тех пор, пока не установятся цифры, соответствующие требуемой точности.

Следовательно, определив \bar{t} , мы можем найти и значение аргумента \bar{x} для $\bar{y} = f(\bar{x})$.

Замечание. За значения $y_0, y_1, \bar{y} \in [y_0, y_1]$ можно брать любой интервал $[y_i, y_{i+1}]$, $i = 0, n-1$. Если $\bar{y} \in [y_k, y_{k+1}]$, то x_k, x_{k+1} обозначают через x_0 и x_1 , а y_k и y_{k+1} — через y_0, y_1 соответственно.

2. *Случай не равноотстоящих узлов.* В этом случае x выражают через y . То есть $y = f(x)$, $x = f^{-1}(y) = \psi(y)$. Тогда можно записать полином Лагранжа:

$$L_n(y) = \sum_{i=0}^n x_i \prod_{k \neq i} \frac{y - y_k}{y_i - y_k}.$$

Полагая что $x = L_n(y)$, $\psi(y) = L_n(y)$.

Пример. Используя значения функции $y = \lg(x)$, которые заданы в таблице, найти ξ такое, что $y_\xi = \lg(\xi) = 1,35$.

x	y
20	1,3010
25	1,3979
30	1,4771

Решение.

Вариант 1. Решим с помощью Лагранжа.

$$L_n(y_\xi) = \sum_{i=0}^2 x_i \prod_{k \neq i} \frac{y_\xi - y_k}{y_i - y_k} = 7,136 + 20,288 - 5,049 = 22,375.$$

Отсюда $\xi = 22,375$.

Зная, что $x_{\text{точное}} = 22,39$ получим оценку погрешности приближенного решения: $\Delta\xi = |x_{\text{точн}} - \xi| \leq 0,015$, $\delta\xi \leq 0,067\%$.

Вариант 2. С помощью первой интерполяционной формулы Ньютона.

Составим таблицу конечных разностей:

x	y	Δy_0	$\Delta^2 y_0$
20	1,3010	0,0969	-0,0177
25	1,3979	0,0792	
30	1,4771		

Тогда $t_0 = 0$, тогда

$$t_1 = \frac{y_\xi - y_0}{1! \Delta y_0} = \frac{1,35 - 1,3010}{0,0969} = 0,506,$$

$$t_2 = 0,506 - \frac{177}{2 \cdot 969} \cdot 0,506 \cdot (1 - 0,506) = 0,483;$$

$$t_2 = 0,506 - \frac{177}{2 \cdot 969} \cdot 0,483 \cdot (1 - 0,483) = 0,483;$$

Тогда $\bar{t} = 0,483$ и $\xi = x_0 + \bar{t} \cdot h = 20 + 0,483 \cdot 5 = 22,416$.

Известно, что $x_{\text{точное}} = 22,39$.

Тогда погрешность приближенного решения равна $\Delta\xi = |x_{\text{точн}} - \xi| \leq 0,027$, $\delta\xi \leq 0,121\%$.

Если шаг уменьшить в два раза, т.е. $h = 2,5$, то $\bar{t} = 0,9548$ и $\xi = 22,387$. Тогда погрешность приближенного решения равна $\Delta\xi = |x_{\text{точн}} - \xi| \leq 0,004$, $\delta\xi \leq 0,02\%$.

4.10. Приближенное дифференцирование

Постановка задачи. Пусть функция $y = f(x)$ задана своими значениями в x_i , $i = \overline{0, n}$. Т.е., задана таблично $y_i = f(x_i)$. Если аналитическое выражение $f(x)$ неизвестно или непосредственное дифференцирование в некоторой точке вызывает затруднения, то в этом случае можно прибегнуть к приближенному дифференцированию.

Для этого функцию $f(x)$ заменяют интерполяционной функцией $F(x)$ и полагают:

$$f(x) = F(x), \quad f^{(k)}(x) = F^{(k)}(x), \quad k = 1, 2, \dots, n \quad \text{на отрезке } x \in [a, b]$$

Если $R_n = f(x) - F(x)$, то

$$R'_n(x) = f'(x) - F'(x) = r(x).$$

Замечание 1. Погрешность производной интерполирующей функции равна производной погрешности этой функции.

Замечание 2. Вместе с тем близость значений $y = f(x)$ и $\bar{y} = F(x)$, т.е. $|y - \bar{y}| = \Delta y < \varepsilon$ на отрезке $[a, b]$ не гарантирует близости на $[a, b]$ их производных $y' = f'(x)$, $\bar{y}' = F'(x)$, то есть из $\Delta \bar{y} < \varepsilon$ не следует $\Delta \bar{y}' < \delta(\varepsilon)$ на $[a, b]$.

1. На основе интерполяционной формулы Ньютона.

Ограничимся рассмотрением только равноотстоящих точек.

Пусть дана функция $y = f(x)$ со своими значениями $y_i = f(x_i)$, $i = \overline{0, n}$, в равноотстоящих узлах $x_i = x_0 + i \cdot h$, $x_i \in [a, b]$.

По первой формуле Ньютона имеем:

$$y(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \dots + \frac{q(q-1)(q-2)\dots(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0, \quad q = \frac{x-x_0}{h}.$$

Раскроем скобки:

$$\begin{aligned} y(x) &= y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q^2 - q}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{q^3 - 3q^2 + 2q}{3!}\Delta^3 y_0 + \\ &\quad + \frac{q^4 - 6q^3 + 18q^2 - 6q}{4!}\Delta^4 y_0 + \dots \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dq} \cdot \frac{dq}{dx} = \frac{1}{h} \cdot \frac{dy}{dq} \\ y' &= \frac{dy}{dx} = \frac{1}{h} \left[\Delta y_0 + \frac{2q-1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{3q^2-6q+2}{6}\Delta^3 y_0 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2q^3-9q^2+11q-3}{12}\Delta^4 y_0 + \dots \right], \\ y'' &= \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dq} \left(\frac{dy}{dq} \cdot \frac{dq}{dx} \right) \frac{dq}{dx} = \\ &= \frac{1}{h^2} \left[\Delta^2 y_0 + \frac{3q-3}{3}\Delta^3 y_0 + \frac{6q^2-18q+11}{12}\Delta^4 y_0 + \dots \right]. \end{aligned}$$

Замечание 3. Если необходимо вычислить значения производных на правой границе, т.е. используется вторая интерполяционная формула, то в этих формулах вместо знака минус ставится знак плюс.

Замечание 4. В качестве точки x_0 нужно выбирать ближайшую точку x_i к точке x , в которой ищется производная.

Иногда требуется вычислить производные в узловых точках x . Если считать, что $x = x_0$, тогда $q = 0$, поэтому:

$$\begin{aligned} y'(x_0) &= \frac{1}{h} \left[\Delta y_0 - \Delta^2 y_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 y_0 - \frac{1}{4}\Delta^4 y_0 + \frac{1}{5}\Delta^5 y_0 + \dots \right], \\ y''(x_0) &= \frac{1}{h^2} \left[\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11}{12}\Delta^4 y_0 - \frac{5}{6}\Delta^5 y_0 + \dots \right]. \end{aligned}$$

Если используется вторая интерполяционная формула, то в этих формулах также вместо знака минус ставится знак плюс.

Пример. Найти $y'(50)$ функции $y = \lg x$, заданной таблицей:

x	y
50	1,6990
55	1,7404
60	1,7782
65	1,8129

Решение. Для этого нам надо построить таблицу конечных разностей.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
50	1,6990	0,0414	-0,0036	0,0005
55	1,7404	0,0378	-0,0031	
60	1,7782	0,0347		
65	1,8129			

Используя формулу (2.6'), находим:

$$y'(x_0) = \frac{1}{h} \left[\Delta y_0 - \Delta^2 y_0 + \frac{1}{3} \Delta^3 y_0 \right] = \frac{1}{5} (0,0414 - 0,0036 + 0,0005) = 0,0087.$$

Известно, что $y'(x) = \frac{1}{x \ln 10} = \frac{0,43429}{x}$, тогда

$$y'(50) = \frac{0,43429}{50} = 0,00869.$$

Как видно, они совпадают до 4-х знаков после запятой.

2. На основе интерполяционной формулы Лагранжа.

Рассмотрим многочлен Лагранжа для равноотстоящих узлов (4.10):

$$\begin{aligned} L_n(x) &= \sum_{i=0}^n y_i \frac{(x-x_0) \cdot \dots \cdot (x-x_{i-1})(x-x_{i+1}) \cdot \dots \cdot (x-x_n)}{(x_i-x_0) \cdot \dots \cdot (x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1}) \cdot \dots \cdot (x_i-x_n)} = \\ &= \sum_{i=0}^n y_i \frac{\prod_{n+1}(x)}{(x-x_i) \prod_{n+1}(x_i)}. \end{aligned}$$

Примем подстановку: $\frac{x-x_0}{h} = t$, тогда получим новые выражения для

$\prod_{n+1}(x)$ и $\prod_{n+1}^{\bullet}(x_i)$. Сначала находим $x-x_0 = ht$;

$$x-x_1 = x-x_0-h = h(t-1); \quad x-x_2 = x-x_0-2h = h(t-2); \quad \text{т.е.}$$

$$x-x_i = x-x_0-ih = h(t-i), \quad i=0,1,\dots,n.$$

Поэтому $\prod_{n+1}(x) = h^{n+1}t(t-1)(t-2)\dots(t-n)$. В целях сокращения записей введем обозначение $t(t-1)(t-2)\dots(t-n) = t^{[n+1]}$, которое называется обобщенной степенью.

Так как $x_i = x_0 + ih$, то $x_i - x_0 = ih$, $x_i - x_1 = x_i - x_0 - h = h(i-1)$, $x_i - x_2 = x_i - x_0 - 2h = h(i-2), \dots, x_i - x_n = x_i - x_0 - nh = h(i-n)$.

Здесь ровно n строк, причем первые i строк положительны, а остальные $n-i$ – отрицательны. Тогда получаем:

$$\begin{aligned} \prod_{n+1}^{\bullet}(x_i) &= (x_i - x_0) \cdot \dots \cdot (x_i - x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i+1}) \cdot \dots \cdot (x_i - x_n) = \\ &= h^n i(i-1) \cdot \dots \cdot 1 \cdot (-1) \cdot \dots \cdot [-(n-i)], \end{aligned}$$

$$\text{т.е. } \prod_{n+1}^{\bullet}(x_i) = h^n i!(n-i)!(-1)^{n-i}.$$

Тогда формула Лагранжа для равноотстоящих узлов принимает вид:

$$L_n(x_0 + th) = \sum_{i=0}^n y_i \frac{(-1)^{n-i} t^{[n+1]}}{(t-i)i!(n-i)!}.$$

Тогда дифференцируя многочлен Лагранжа по x как функцию от t , получим:

$$f'(x) \approx \frac{dL_n}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{1}{h} \sum_{i=0}^n y_i \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \frac{d}{dt} \left[\frac{t^{[n+1]}}{t-i} \right].$$

Пример. Найти как первую, так и вторую производные в точке $x=1,1$ функции, заданной таблицей:

x	1	2	3
$F(x)$	12	4	6

Решение.

Используя формулу (2.9)

$$f'(x) \approx \frac{1}{h} \sum_{i=0}^n y_i \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \frac{d}{dt} \left[\frac{t^{[n+1]}}{t-i} \right] = 12 \cdot \frac{1}{2} [t-2+t-1] - 4[t-2+t] + \\ + 6 \cdot \frac{1}{2} [t+t-1] = 6(2t-3) - 4(2t-2) + 3(2t-1) = 10t-13$$

подставив сюда $t = \frac{x-x_0}{h} = 0,1$; получим, как и ожидалось, $f'(x) \approx 10t-13 = -12$.

Напомним, что $P'_n(x) = (5x^2 - 23x + 30)' = 10x - 23$,
тогда $P'_n(1,1) = 10 \cdot 1,1 - 23 = -12$.

Для второй производной имеем $f''(x) \approx (10t-13)' = 10$, что
совпадает с известным значением $P''_n(x) = (5x^2 - 23x + 30)'' = 10$.

4.11 Тестовые задания.

1. Численное дифференцирование.

Задана табличная функция $y = f(x)$

Первая производная на правом конце $y'(0,7)$ с погрешностью $O(h^2)$ равна -: 1,85

1. -:1,65
2. -:0,95
3. -:1,05

2. Интерполирование функций

Задана табличная функция $y = f(x)$

Квадратичная интерполяция дает значение $y(1,4)$, равное -:

2,711

1. -:0,524
2. -:1,008
3. -:3,504

3. Численное дифференцирование.

Задана табличная функция $y = f(x)$

Первая производная на левом конце $y'(1)$ с погрешностью $O(h^2)$ равна-: 1,5

1. -: 0,5
2. -: 0,75
3. -: 1,75

5. Численное интегрирование

При вычислении определенного интеграла

$$I = \int_a^b f(x)dx, \quad (5.1)$$

где $f(x)$ – непрерывная на отрезке $[a; b]$ функция, иногда удается практически воспользоваться формулой Ньютона—Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Здесь $F(x)$; $f(x) = F'(x)$, $\forall x \in [a; b]$ одна из первообразных функций.

Данная формула не исчерпывает практических приемов вычисления интегралов, так как:

1) первообразную не удастся явно найти в аналитической форме,

2) первообразную удастся найти в аналитической форме, но не удастся довести до числового ответа значение определенного интеграла,

3) иногда подынтегральная функция задается таблицей или графиком.

Поэтому часто применяют различные методы приближенного (численного) интегрирования.

Определение. Формулы, используемые для приближенного вычисления интегралов вида (1.1), называют **квадратурными формулами**.

Простой прием построения квадратурных формул состоит в том, что подынтегральная функция $f(x)$ заменяется на отрезке $[a; b]$ интерполяционным многочленом, например многочленом Лагранжа $L_n(x)$, и принимается приближенное равенство

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b L_n(x)dx. \quad (5.2)$$

При этом предполагается, что отрезок $[a; b]$ разбит на n частей точками $a = x_0, x_1, \dots, x_n = b$, наличие которых подразумевается при построении многочлена $L_n(x)$. В силу фактической единственности интерполяционного полинома n -й степени для данной функции и данной системы узлов не имеет значения, использовать ли в этой процедуре многочлен Лагранжа или многочлены Ньютона.

Подставляя в (5.2) в место $L_n(x)$ его представление, получим

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b \sum_{i=1}^n y_i \frac{\prod_{n+1}(x)}{(x-x_i) \prod'_{n+1}(x_i)} = \sum_{i=1}^n y_i \int_a^b \frac{\prod_{n+1}(x)}{(x-x_i) \prod'_{n+1}(x_i)} dx$$

Таким образом,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n y_i A_i, \quad (5.3)$$

где

$$A_i = \int_a^b \frac{\prod_{n+1}(x)}{(x-x_i) \prod'_{n+1}(x_i)} dx. \quad (5.4)$$

По поводу полученных формул можно заметить, что:

- коэффициенты A_i не зависят от вида функции $f(x)$, так как они составлены только с учетом узлов интерполяции;
- если $f(x)$ — полином степени n , то тогда формула (5.3) — точная, ибо в этом случае $L(x) = f(x)$.

5.1. Квадратурные формулы Ньютона-Котеса

Формула (5.4) для «весовых» коэффициентов A_i принимает вид

$$A_i = \int_{x_0}^{x_n} \frac{(-1)^{n-i} t^{[n+1]}}{i!(n-i)!(t-i)} dx \quad (i = 0, 1, \dots, n) \quad (5.5)$$

Перейдем в этом интеграле всюду к переменной $t = \frac{x - x_0}{h}$. Из

подстановки получаем: $dt = \frac{dx}{h}$, т.е. $dx = hdt$. При $x = x_0$ имеем

$t = 0$, а при $x = x_n$ будет $t = \frac{x_n - x_0}{h} = n$.

Тогда

$$A_i = \frac{b-a}{n} \int_0^n \frac{(-1)^{n-i} t^{[n+1]}}{i!(n-i)!(t-i)} dt = (b-a)H_i, \quad (5.6)$$

где

$$H_i = \frac{1}{n} \int_0^n \frac{(-1)^{n-i} t^{[n+1]}}{i!(n-i)!(t-i)} dt \quad (i = 0, 1, \dots, n) \quad (5.7)$$

Числа H_i называют *коэффициентами Котеса*. Как видно, коэффициенты Котеса не зависят от вида функции $f(x)$, а только от числа n точек разбиения. Окончательно с учетом формул (5.2). и (5.5) получаем следующий вид квадратурных формул Ньютона—Котеса:

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a) \sum_{i=1}^n y_i H_i, \quad (5.8)$$

дающих на одном участке интегрирования различные представления для различного числа n отрезков разбиения.

5.2. Формула Трапеций

При $n = 1$ из формулы (5.7):

$$H_i = \frac{1}{n} \int_0^n \frac{(-1)^{n-i} t^{[n+1]}}{i!(n-i)!(t-i)} dt \quad (i = 0, 1, \dots, n) \text{ имеем}$$

$$H_0 = -\int_0^1 \frac{t(t-1)}{t} dt = -\int_0^1 (t-1) dt = \frac{1}{2}; \quad H_1 = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}.$$

Тогда на отрезке $[x_0; x_1]$ получаем интеграл

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx \approx (x_1 - x_0)(H_0 y_0 + H_1 y_1) = \frac{h}{2}(y_0 + y_1). \quad (5.9)$$

Формула (5.9) дает один из простейших способов вычисления определенного интеграла и называется *формулой трапеций*. Действительно, при $n=1$ подынтегральная функция заменяется интерполяционным многочленом Лагранжа первой степени, а геометрически это означает, что площадь криволинейной фигуры подменяется площадью трапеции (рис. 10).

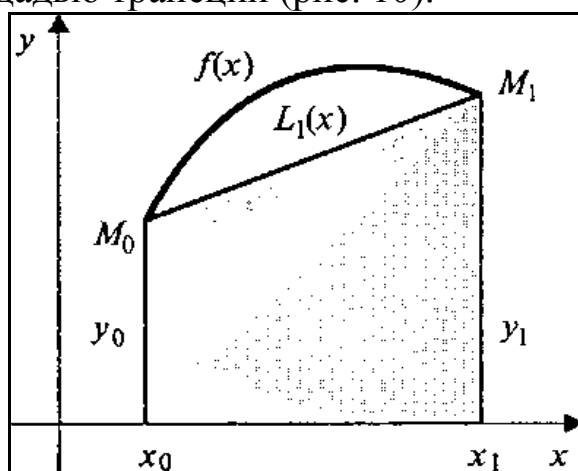


Рис. 10. Иллюстрация к вычислению интеграла по формуле трапеций.

Распространяя формулу (5.9) на все отрезки разбиения, получим общую формулу трапеций для отрезка $[a; b]$

$$\int_a^b f(x) dx = h \left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2} \right) \quad (5.10)$$

Погрешность метода трапеций.

В этом случае имеем:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b L_n(x) dx + R_n(f),$$

откуда следует, что естественно рассматривать R как функцию шага $h: R = R(h)$. Заметим, что $R(0) = 0$. Продифференцируем $R(h)$ по h :

$$R'(h) = \left(\int_{x_0}^{x_0+h} f(x) dx \right)' - \frac{1}{2} [f(x_0) + f(x_0 + h)] - \frac{h}{2} [f'(x_0 + h)] =$$

$$\begin{aligned}
&= f(x_0 + h) - \frac{1}{2} f(x_0 + h) - \frac{1}{2} f(x_0) - \frac{h}{2} f'(x_0 + h) = \\
&= \frac{1}{2} [f(x_0 + h) - f(x_0)] - \frac{h}{2} f'(x_0 + h).
\end{aligned}$$

Замечаем, что $R'(0) = 0$. Далее:

$$R''(h) = \frac{1}{2} f'(x_0 + h) - \frac{1}{2} f'(x_0 + h) - \frac{h}{2} f''(x_0 + h) = -\frac{h}{2} f''(x_0 + h). \quad (5.11)$$

Выведем сейчас R , последовательно интегрируя $R''(h)$ на отрезке $[0; h]$: $\int_0^h R''(z) dz = R'(z)|_0^h = R'(h) - R'(0) = R'(h)$,

откуда с учетом (5.11) имеем

$$R'(h) = \int_0^h R''(z) dz = -\frac{1}{2} \int_0^h z f''(x_0 + z) dz. \quad (5.12)$$

Применяя к (5.12) обобщенную теорему о среднем, получаем

$$R'(h) = -\frac{1}{2} f''(\xi_1) \int_0^h z dz = -\frac{h^2}{4} f''(\xi_1), \quad (5.13)$$

где $\xi_1 \in [x_0; x_0 + h]$ и ξ_1 зависит от h . Далее:

$$\int_0^h R'(z) dz = R(z)|_0^h = R(h) - R(0) = R(h),$$

откуда с учетом (5.13) и обобщенной теоремы о среднем имеем

$$R(h) = \int_0^h R'(z) dz = -\frac{1}{4} \int_0^h z^2 f''(\xi_1) dz = -\frac{h^3}{12} f''(\xi), \quad (5.14)$$

где $\xi \in [x_0; x_0 + h]$.

Таким образом, погрешность метода при интегрировании функции f на отрезке $[x_0; x_1]$ по формуле (5.10) имеет значение

$$R = -\frac{h^3}{12} f''(\xi), \xi \in [x_0; x_1]. \quad (5.15)$$

Из формулы (5.15) видно, что при $f''(\xi) > 0$ формула (5.10) дает значение интеграла с избытком, а при $f''(\xi) < 0$ – с недостатком.

Для оценки общей погрешности интегрирования на всем отрезке $[a; b]$ находим сумму погрешностей на каждом частичном отрезке: $R = R^{(1)} + R^{(2)} + \dots + R^{(n)}$. С учетом (5.15) имеем

$$|R| = \frac{h^3}{12} \left| \sum_{i=1}^n f''(\xi_i) \right| \leq \frac{h^3}{12} \sum_{i=1}^n |f''(\xi_i)| \leq \frac{h^3}{12} n M_2,$$

где $M_2 = \max_{[a,b]} |f''(x)|$

Учитывая, что $h \cdot n = b - a$, получаем следующий окончательный вид формулы для оценки погрешности метода интегрирования по формуле трапеций

$$|R_n| \leq M_2 \frac{|b-a| \cdot h^2}{12}, \quad |R_n| = O(h^2). \quad (5.16)$$

Пример 1. Вычислить интеграл $I = \int_0^1 x^2 \sin x dx$ по формуле трапеций, разделив отрезок $[0; 1]$ на 10 равных частей, и оценить погрешность вычислений. Значения подынтегральной функции в узловых точках приведены в таблице 1.

Таблица 1. Значения подынтегральной функции $y = x^2 \sin x$ в узловых точках.

x_i	$\frac{y_i}{2} (i = 0, 10)$	$y_i (i = 1, 2, \dots, 10)$
0	0	
0,1		0,0009983
0,2		0,0079467
0,3		0,0265968
0,4		0,0623068
0,5		0,1198562
0,6		0,2032711
0,7		0,3156668
0,8		0,4591078
0,9		0,6344948
1,0	0,4207355	
Σ	0,4207355	1,8302453

$$\Sigma = \int_a^b f(x) dx \approx h \left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2} \right).$$

В таблице суммирование по y_i (по столбцам). Используя значения этих сумм, в соответствии с формулой трапеций имеем:

$$I \approx \tilde{S} = 0,1 \cdot (0,4207355 + 1,8302453) = 0,225098.$$

Оценим погрешность метода.

Для этого находим вторую производную подынтегральной функции: $f''(x) = (2 - x^2) \cdot \sin(x) + 4x \cdot \cos(x)$. На отрезке $[0;1]$ $f''(x)$ всюду положительна, причем ее значение ограничено сверху: $f''(x) < 3,3$. Таким образом, используя формулу $|R_n| \leq M_2 \frac{|b-a|h^2}{12}$

при $a = 0, b = 1, h = 0,1$, имеем $|R_n| \leq 3,3 \frac{1 \cdot 0,1^2}{12} = 0,00275$. Таким образом имеем

$$I = \tilde{S} \pm \Delta_{\tilde{S}} = 0,225098 \pm 0,00275.$$

Определим число верных знаков в приближенном значении интеграла.

$$\Delta_{\tilde{S}} = 0,00275 < \frac{1}{2} 10^{-2} = \frac{1}{2} 10^{m-n+1}, m = 0, n = 3;$$

$$\tilde{S}_1 = 0,23; \Delta_{окр} < 0,00491; \Delta_{\tilde{S}_1} = \Delta_{\tilde{S}} + \Delta_{окр} = 0,00766; n_1 = 2;$$

$$\tilde{S}_2 = 0,2; \Delta_{окр1} < 0,03; \Delta_{\tilde{S}_2} = \Delta_{\tilde{S}_1} + \Delta_{окр1} = 0,03766; n_2 = n_1 = 2;$$

$$I = \tilde{S}_2 \pm \Delta_{\tilde{S}_2} = 0,2 \pm 0,038.$$

$$I = \tilde{S}_2 \pm \Delta_{\tilde{S}_2} \Rightarrow \tilde{S}_2 - \Delta_{\tilde{S}_2} \leq I \leq \tilde{S}_2 + \Delta_{\tilde{S}_2} \Rightarrow 0,162 \leq I \leq 0,238$$

В данном случае мы вычислили «точное» значение этого интеграла, интегрируя по частям 2 раза, так что смогли определить значение площади, пользуясь также формулой Ньютона-Лейбница:

$$I = 2 \sin(1) + \cos(1) - 2 \approx 0,223.$$

Как видим, результат, полученный с помощью приближенной формулы трапеций, в пределах погрешности вполне соответствует этому значению.

5.3. Формула Симпсона

При $n = 2$ из формулы (5.7):

$$H_i = \frac{1}{n} \int_0^n \frac{(-1)^{n-i} t^{[n+1]}}{i!(n-i)!(t-i)} dt \quad (i = 0, 1, \dots, n)$$

последовательно имеем ($i = 0, 1, 2$):

$$H_0 = \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{t(t-1)(t-2)}{2t} dt = \frac{1}{6};$$

$$H_1 = -\frac{1}{2} \int_0^2 t(t-2)dt = \frac{2}{3};$$

$$H_2 = \frac{1}{4} \int_0^2 t(t-1)dx = \frac{1}{6}.$$

Тогда с учетом (5.8) получим на отрезке $[x_0; x_2]$:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx (x_2 - x_0) \sum_{i=0}^2 H_i y_i = \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2) \quad (0.1)$$

Геометрически, в соответствии со смыслом интерполяционной формулы Лагранжа при $n=2$, использование формулы (5.17) означает замену подынтегральной функции $f(x)$ параболой $L_2(x)$, проходящей через точки $M_i(x_i, y_i)$ ($i=0,1,2$) (рис. 11).

Рис. 11. Иллюстрация к вычислению интеграла по формуле Симпсона

Если считать, что n — четное ($n = 2m$), то применяя формулу (5.17) последовательно к каждой паре частичных отрезков $[x_{2i-2}; x_{2i}]$ ($i=1,2,\dots,m$), получим

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{2h}{3} \left(\frac{y_0 + y_{2m}}{2} + 2y_1 + y_2 + \dots + 2y_{2m-1} \right). \quad (5.18)$$

Формула (5.18) называется **формулой Симпсона**.

Оценку остаточного члена формулы Симпсона приведем без вывода:

$$|R_n| \leq M_4 \frac{|b-a| \cdot h^4}{180}, \quad M_4 = \max_{[a,b]} |f^{IV}(x)|. \quad (5.19)$$

Как следует из оценки, формула Симпсона оказывается точной для полиномов до третьей степени включительно (так как для этих случаев производная четвертого порядка равна нулю). Формула Симпсона обладает повышенной точностью по сравнению с формулой трапеций. Это означает, что для достижения той же точности, что и по формуле трапеций, в ней можно брать меньшее число n отрезков разбиения.

Если задана предельная допустимая погрешность интегрирования ε , то желая иметь $|R_n| \leq \varepsilon$ с учетом оценки (5.19)

достаточно потребовать $M_4 \frac{|b-a| \cdot h^4}{180} \leq \varepsilon$, откуда $h^4 \leq \frac{180\varepsilon}{|b-a| \cdot M_4}$, то есть

$$h \leq \sqrt[4]{\frac{180\varepsilon}{|b-a| \cdot M_4}}. \quad (5.20)$$

Формула (5.20) позволяет оценить величину шага, необходимую для достижения заданной точности (из формулы видно, что h имеет порядок $\sqrt[4]{\varepsilon}$, $h = o(\sqrt[4]{\varepsilon})$).

Пример. Вычислить интеграл из предыдущего примера. Вычислить интеграл $I = \int_0^1 x^2 \sin x dx$ по формуле Симпсона при том же числе отрезков разбиения ($n = 10$).

Так как

$$\begin{aligned} I &\approx \frac{h}{3} (y_0 + y_{2m} + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2m-2}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2m-1})) = \\ &= \frac{2h}{3} \left(\frac{y_0 + y_{2m}}{2} + (y_2 + y_4 + \dots + y_{2m-2}) + 2(y_1 + y_3 + \dots + y_{2m-1}) \right), \end{aligned}$$

то получим сначала значения подынтегральной функции в узлах в соответствии с формулой Симпсона. Они приведены в таблице 2.

Таблица 2.
Значения подынтегральной функции в узлах.

x_i	$\frac{y_i}{2} (i = 0, 10)$	$y_i (i = 2, 4, 6, 8)$	$2 \cdot y_i (i = 1, 3, 5, 7, 9)$
0	0		
0,1			0,0019966
0,2		0,0079467	
0,3			0,0531936
0,4		0,0623068	
0,5			0,2397124
0,6		0,2032711	
0,7			0,6313333
0,8		0,4591078	
0,9			1,2689896
1,0	0,4207355		

Σ	0,4207355	0,7326324	2,1952255
----------	-----------	-----------	-----------

$$I = \frac{2 \cdot 0,1}{3} (0,4207355 + 0,7326324 + 2,1952255) = 0,2232395. \quad \text{Для}$$

оценки остаточного члена найдем производную четвертого порядка:
 $f^{IV}(x) = (x^2 - 12) \sin x - 8x \cos x$

Значение $|f^{IV}(x)|$ на отрезке $[0;1]$ ограничено числом 0,000008.

Сравнивая этот результат со значением, полученным методом трапеций, замечаем, что при одинаковом числе отрезков разбиения формула Симпсона, как и доказано, дает ответ с более высокой точностью. Напомним, что «точное» значение интеграла, полученное формулой Ньютона-Лейбница равна:
 $S \approx I = 2 \sin(1) + \cos(1) - 2 \approx 0,223$.

Пример. Найти значение интеграла $I = \int_0^1 x^3 dx$, разделив отрезок $[0; 1]$ на 4 равных частей: а) методом трапеций, б) методом Симпсона.

x_i	$\frac{y_i}{2} (i=0,10)$	$y_i (i=1,2,...,10)$
0	0	0,015625
0,25		
0,50		
0,75		
1,00		
Σ	0,5	0,562500

Решение.

а) методом трапеций. Имеем

$$\int_0^1 x^3 dx \approx 0,25 \left(0,5 + (0,25)^3 + (0,5)^3 + (0,75)^3 \right) = 0,25 \cdot 1,0625 = 0,26563.$$

Оценить самостоятельно погрешность найденного значения.

б) методом Симпсона. Имеем

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 x^3 dx \approx \frac{0,25}{3} \left(0 + 4(0,25)^3 + 2(0,5)^3 + 4(0,75)^3 + 1 \right) = \\ &= \frac{0,25}{3} (0 + 4 \cdot 0,015625 + 2 \cdot 0,125000 + 4 \cdot 0,421875 + 1) = \frac{0,25}{3} \cdot 3 = 0,25. \end{aligned}$$

5.4. Формулы прямоугольников.

Итак, требуется вычислить определённый интеграл: $\int_a^b f(x)dx$.

Пусть задана функция $f(x)$ непрерывная на отрезке $[a,b]$. Разделим отрезок $[a,b]$ точками $a=x_0, x_1, x_2, \dots, x_n=b$ на n равных частей длины Δx , где $\Delta x=(b-a)/n$. В данном способе подынтегральная функция заменяется функцией, которая имеет ступенчатый вид (рис. 12).

Рис 12. Применение метода прямоугольников.

Составим суммы:

$$y_0\Delta x + y_1\Delta x + y_2\Delta x + \dots + y_{n-1}\Delta x \quad \text{и}$$

$$y_1\Delta x + y_2\Delta x + y_3\Delta x + \dots + y_n\Delta x.$$

Каждое слагаемое этих сумм выражает площадь, полученных прямоугольников с основанием Δx , которое является шириной прямоугольника, и длиной, выраженной через y_i .

Каждая из этих сумм является интегральной суммой для $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, и равна площади ступенчатых фигур, а значит приближённо вычисляет интеграл. Вынесем $\Delta x = \frac{(b-a)}{n}$ из каждой суммы, получим:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1}), \quad (5.21)$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_1 + y_2 + \dots + y_n). \quad (5.22)$$

Это и есть формулы прямоугольников. Первая формула называется формулой метода **левых прямоугольников**, а вторая – формулой метода **правых прямоугольников**.

Используется также формула **средних прямоугольников**:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \left(y\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) + y\left(x_1 + \frac{h}{2}\right) + \dots + y\left(x_{n-1} + \frac{h}{2}\right) \right). \quad (5.23)$$

Оценка погрешности.

Погрешности формул (5.21) и (5.22) оцениваются одинаково, поэтому далее правые части этих формул $J_n^{(i)}$ и их остаточные члены $R_n^{(i)}$ ($i=1,2$) для простоты будем записывать без верхних индексов. Дадим без доказательства формулу погрешности.

Теорема. Если подынтегральная функция f имеет на $[a,b]$ непрерывную производную f' , то оценка погрешности формул (5.21) и (5.22) (т.е. методов левых и правых прямоугольников) дается равенством:

$$|J - J_n| = |R_n| \leq M_1 \frac{(b-a)^2}{2n}, \quad (5.24)$$

оценка погрешности формулы (5.23) (метод средних прямоугольников) дается равенством:

$$|J - J_n| = |R_n| \leq M_2 \frac{(b-a)^3}{24n^2}, \quad (5.24)$$

где $M_1 = \max_{[a,b]} |f'(x)|$ и $M_2 = \max_{[a,b]} |f''(x)|$.

Как видно из выражений R_n , оценка погрешностей формул прямоугольников зависит от подынтегральной функции, от величины отрезка интегрирования и количества n разбиений отрезка.

5.5. Учет погрешностей квадратурных формул методом двойного пересчета.

Как следует из оценочных формул, оценка погрешности метода интегрирования по формулам прямоугольников, трапеций и Симпсона, возможна лишь тогда, когда подынтегральная функция задана аналитически. Однако даже и в этом случае на практике

широко применяется следующий эмпирический прием, пригодный для каждого из рассмотренных методов интегрирования.

Итак, искомый интеграл вычисляется дважды: при делении отрезка $[a; b]$ на n частей и на $2n$ частей (при интегрировании по формуле Симпсона значение n должно быть четным). Затем полученные значения интеграла (обозначим их I_n и I_{2n}) сравниваются и совпадающие первые десятичные знаки считаются верными.

Пусть R_n и R_{2n} — погрешности интегрирования по формуле Симпсона, соответственно при n и $2n$ отрезках разбиения. Учитывая

(5.19): $|R_n| \leq M_4 \frac{|b-a| \cdot h^4}{180}$, можно составить приближенную оценку

$$\frac{R_n}{R_{2n}} \approx \frac{h_n^4}{h_{2n}^4}, \quad (5.25)$$

где h_n и h_{2n} — длина отрезков разбиения (шаг интегрирования) в первом и втором случае. Понятно, что $h_{2n} = h_n / 2$. Из (5.25) получаем $R_n \approx 16R_{2n}$.

Если I — точное значение интеграла, то $I = I_n + R_n$ и $I = I_{2n} + R_{2n}$, тогда $I_n + 16R_{2n} \approx I_{2n} + R_{2n}$, т.е.

$$|R_{2n}| \approx \frac{|I_n - I_{2n}|}{15} \quad (5.26)$$

Формула (5.26) удобна для практической оценки погрешности метода Симпсона, но требует двойного счета.

Аналогичное рассуждение применительно к методу трапеций приводит к оценке

$$|R_{2n}| \approx \frac{|I_n - I_{2n}|}{7}, \quad (5.27)$$

применительно к методу левых и правых прямоугольников приводит к оценке

$$|R_{2n}| \approx \frac{|I_n - I_{2n}|}{3}. \quad (5.28)$$

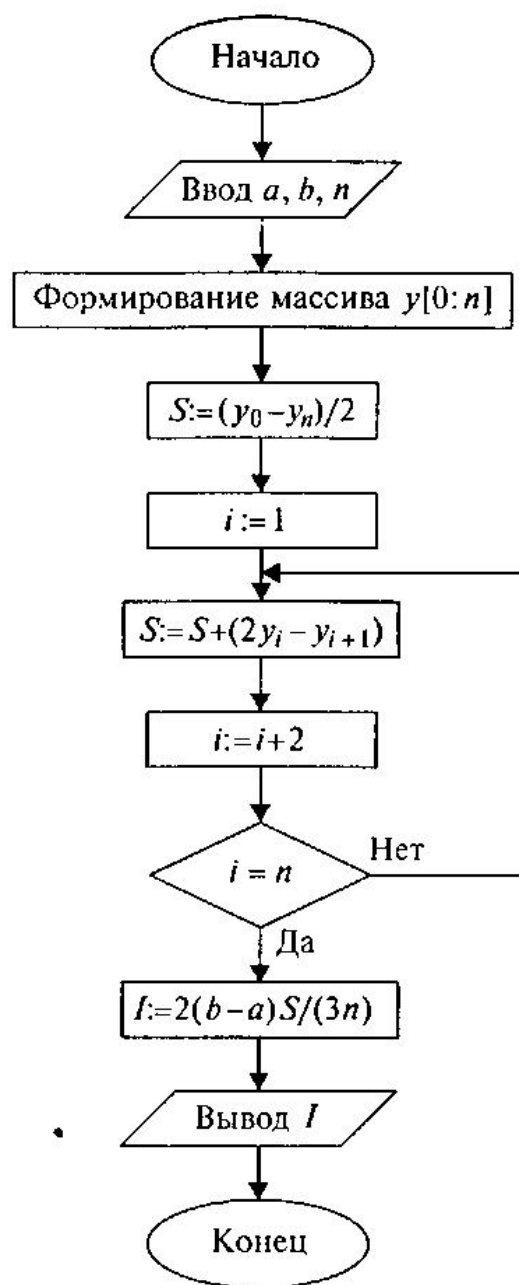


Рис. 13 Алгоритм вычисления интеграла по формуле Симпсона.

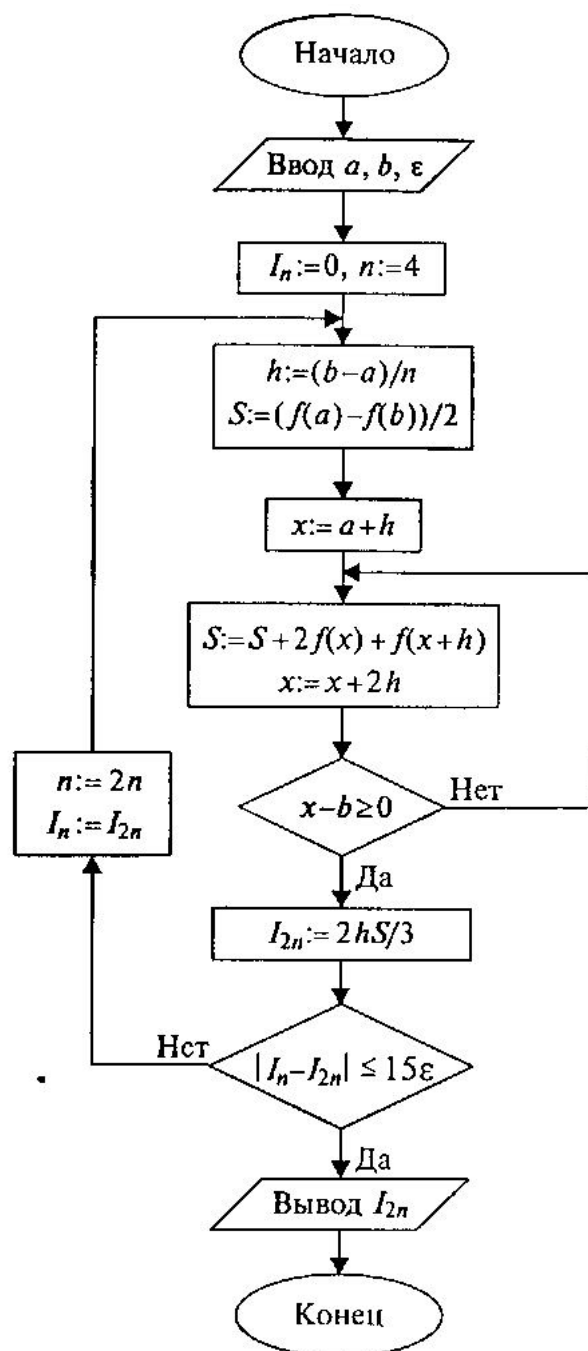


Рис. 14 Алгоритмы вычисления интеграла методом повторного счета.

5.6 Тестовые задания. Численное интегрирование.

1. Вычисление интеграла равносильно вычислению
 - 1) объёма любой фигуры;
 - 2) площади любой фигуры;
 - 3) объёма тела, полученного вращением криволинейной трапеции, у которой $x = a$, $x = b$, $y = 0$, $y = f(x)$;

4) площади криволинейной трапеции, ограниченной линиями $x = a$, $x = b$, $y = 0$, $y = f(x)$.

2. Результат вычисления интеграла $\int_{-1}^1 x^2 dx$ методом Симпсона с разбиением на два интервала ($h = 1$) равен

- 1) 5/7
- 2) 2/3
- 3) 9/11
- 4) 8/13

3. Известно, что интегрируемая функция – линейная, область интегрирования $[-1;1]$, требуемая точность не менее 0,01, интегрирование производится методом трапеций. Какое минимальное количество шагов необходимо для достижения заданной точности?

- 1) 1
- 2) 2
- 3) 10
- 4) 4

3. Подынтегральная функция $y = f(x)$ задана таблично

x	0	0,5	1,0
y	0	0,7	1,5

Вычисление интеграла $\int_0^1 f(x)dx$ методом трапеций при $h = 0,5$

дает значение, равное

- 1) 0,1
- 2) 23,5
- 3) 5,56
- 4) 0,725

4. Наиболее грубым методом численного интегрирования является

- 1) метод прямоугольников;
- 2) трапеций;
- 3) Гаусса;
- 4) Симпсона.

5. Результат вычисления интеграла $\int_{-1}^1 x^2 dx$ методом правых

прямоугольников с разбиением на два интервала ($h = 1$) равен

- 1) 1
- 2) 0,1
- 3) 1,5
- 4) -1,5

6. Подынтегральная функция $y = f(x)$ задана таблично

x	2	2,1	2,2
y	3,5	3,8	4,3

Вычисление интеграла $\int_2^{2,2} f(x) dx$ методом левых

прямоугольников при $h = 0,1$ дает значение, равное

- 1) 1,75
- 2) 0,73
- 3) 0,99
- 4) 0,56

6. Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений

Простейшим обыкновенным дифференциальным уравнением (ОДУ) является уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной

$$y' = f(x, y). \quad (6.1)$$

Основная задача, связанная с этим уравнением, известна как задача Коши: необходимо найти решение (6.1) в виде функции $y = y(x)$, удовлетворяющей начальному условию

$$y(x_0) = y_0. \quad (6.2)$$

Геометрически задачу Коши (6.1) – (6.2) можно интерпретировать следующим образом: необходимо найти интегральную кривую $y = y(x)$, проходящую через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$ при выполнении равенства (6.1).

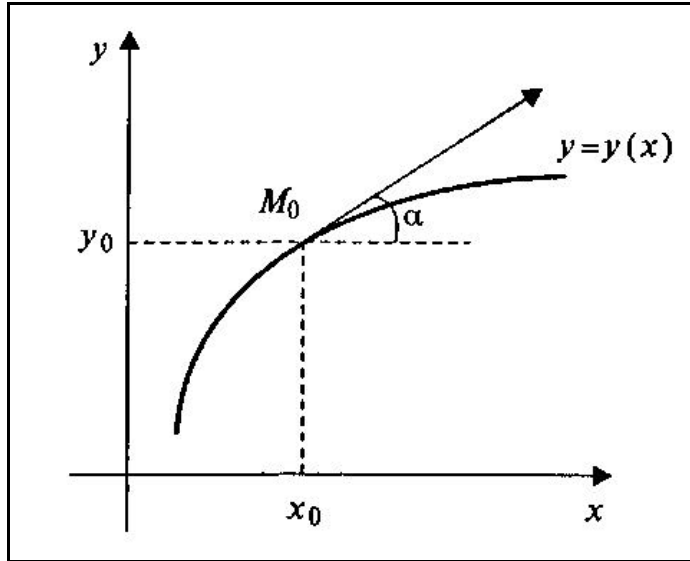


Рис. 15. Геометрическая иллюстрация решения дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$.

Существование и единственность решения задачи Коши для уравнения (6.1) обеспечивается следующей теоремой:

Теорема Пикара. Если функция $f(x, y)$ определена и непрерывна в некоторой плоской области Ω :

$$\Omega = \{(x, y) : |x - x_0| < a, |y - y_0| < b\} \quad (6.3)$$

и в этой области Ω выполняется условие Липшица по y : существует такое положительное число L , что для любых точек $(x, y_1) \in \Omega$, $(x, y_2) \in \Omega$

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L \cdot (y_1 - y_2), \quad (6.4)$$

то на некотором отрезке $|x - x_0| < h$, ($h > 0$) существует единственное решение (6.1), удовлетворяющее начальному условию (6.2).

Число L называется константой Липшица.

Замечание 1. Если $|f'_y(x, y)| < \infty$ в области $(x, y) \in \Omega$, то за постоянную Липшица можно взять $L = \max_{(x, y) \in \Omega} |f'_y(x, y)|$. Величина h вычисляется по формуле: $h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$, где $M = \max_{(x, y) \in \Omega} |f(x, y)|$.

Замечание 2. Для дифференциального уравнения n -порядка задача Коши формулируется следующим образом: найти решение

уравнения $y^{(n)} = f(x, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$ в виде функции $y = y(x)$, при заданных начальных условиях $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$, ..., $y^{(n-1)}(x_0) = y^{(n-1)}_0$, где $y_0, y'_0, \dots, y^{(n-1)}_0$ – заданные числа.

Замечание 3. Так как дифференциальные уравнения n -порядка можно свести к системе дифференциальных уравнений первого порядка. Методы решения систем ОДУ основываются на соответствующих методах решения одного уравнения первого порядка.

Например, обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка $y'' = f(x, y, y')$ можно записать в виде системы двух

уравнений первого порядка:
$$\begin{cases} y' = z; \\ z' = f(x, y, z). \end{cases}$$

Рассмотрим несколько методов приближенного решения обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

6.1. Метод последовательных приближений (Метод Пикара)

Данный метод можно рассматривать как применение метода сжимающих отображений к решению дифференциальных уравнений, который позволяет получить приближенное решение в виде функции, представленной аналитически.

Пусть дано:

Дифференциальное уравнение 1 порядка: $y' = f(x, y)$.

Найти решение данного уравнения в виде функции $y = y(x)$, удовлетворяющего условию $y_0 = y(x_0)$, то есть решение задачи Коши.

Допустим, что $x > x_0$. Проинтегрируем (6.1) на отрезке $[x_0, x]$:

$$\int_{x_0}^x y'(x) dx = \int_{x_0}^x f(x, y) dx, \quad (6.5)$$

$$y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^x f(x, y) dx, \quad (6.6)$$

$$y = y(x_0) + \int_{x_0}^x f(x, y) dx. \quad (6.7)$$

Получили интегральное уравнение. Очевидно, что оно удовлетворяет (6.1) и (6.2), то есть, при $x = x_0$:

$$y = y(x_0) + \int_{x_0}^{x_0} f(x, y) dx = y(x_0).$$

Для нахождения решения интегрального уравнения (6.7) применяем метод последовательных приближений, то есть заменим в (6.7) y на начальное приближение y_0 , тогда получим первое приближение:

$$y_1 = y(x_0) + \int_{x_0}^x f(x, y_0) dx. \quad (6.8)$$

Затем:

$$y_2 = y(x_0) + \int_{x_0}^x f(x, y_1) dx \quad (6.9)$$

и т.д.

Для n -го приближения имеем:

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_{n-1}) dx, n = 1, 2, \dots \quad (6.10)$$

Таким образом, получили последовательность приближений $\{y_n(x)\}$, которые геометрически представляют кривые $y_n = y_n(x)$, проходящие через точку (x_0, y_0) . В теории дифференциальных уравнений доказано, что если выполняется условие минимума (6.4), то на достаточно малом отрезке $[x_0, x_0 + h]$ последовательность $\{y_n(x)\}$ равномерно сходится к некоторой предельной функции $y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x)$, удовлетворяющей дифференциальному уравнению (6.1) и начальному условию (6.2).

Причем, если $f(x, y)$ определена и непрерывна в области

$$\Omega' = \{(x, y) : 0 \leq x - x_0 \leq a, |y - y_0| \leq b\},$$

$$M = \max_{(x, y) \in \Omega'} |f(x, y)|, h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right),$$

то на отрезке $[x_0, x_0 + h]$ верно следующее неравенство

$$l_1(x) = y_0 - M(x - x_0) \leq y(x) \leq y_0 + M(x - x_0) = l_2(x) (**).$$

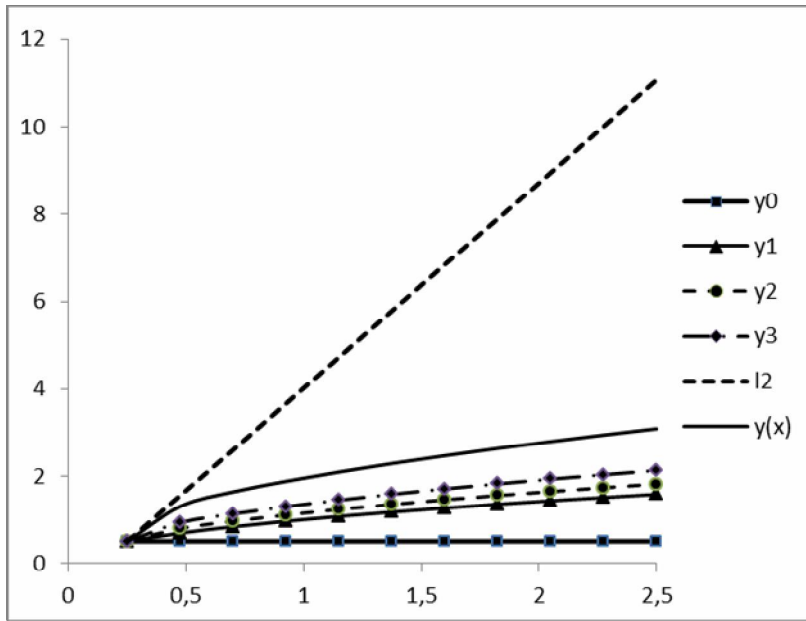


Рис.16. Геометрическая иллюстрация неравенства (**).

На рисунке показана только прямая $l_2(x) = y_0 + M(x - x_0)$, прямая $l_1(x) = y_0 - M(x - x_0)$ будет симметрична прямой $l_2(x)$ относительно линии $y(x) = y_0$.

Оценим **погрешность выражения** (6.10), то есть определим:

$$\varepsilon_n(x) = |y(x) - y_n(x)|. \quad (6.11)$$

Тогда имеем:
$$\varepsilon_n(x) = |y(x) - y_n(x)| \leq \int_{x_0}^x |f(x, y) - f(x, y_{n-1})| dx,$$

где $x \in [x_0, x_0 + h]$. Из условия существования и единственности решения можно записать:

$$|f(x, y) - f(x, y_{n-1})| \leq L |y(x) - y_{n-1}(x)| \leq L \cdot \varepsilon_{n-1}(x)$$

Тогда получим

$$\varepsilon_n(x) \leq \int_{x_0}^x L \cdot \varepsilon_{n-1}(x) dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.12)$$

Для ε_0 можно записать: $\varepsilon_0(x) = |y(x) - y_0|$, $x \in [x_0, x]$; затем, используя теорему Лагранжа, получим

$$\varepsilon_0(x) = |y(x) - y_0| = |y'(x)|(x - x_0) = |f(x, y)|(x - x_0) \leq M(x - x_0).$$

Построим последовательность:

$$\varepsilon_1(x) \leq L \cdot \int_{x_0}^x \varepsilon_0(x) dx \leq L \cdot M \int_{x_0}^x (x - x_0) dx = LM \frac{(x - x_0)^2}{2!},$$

$$\varepsilon_2(x) \leq L \cdot \int_{x_0}^x \varepsilon_1(x) dx = L^2 M \frac{(x - x_0)^3}{3!}, \text{ и т.д..}$$

Для n -го случая запишем:

$$\varepsilon_n(x) \leq L^n M \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}. \quad (6.13)$$

Замечание 4. Очевидно, что $\varepsilon_n(x) \rightarrow 0$, $n \rightarrow +\infty$, $\forall x \in [x_0, x_0 + h]$.

На практике метод Пикара применяется очень редко, так как интегралы, которые необходимо вычислять при построении очередных приближений, чаще всего аналитически не находятся, а применение для их вычисления численных методов так усложняют решение, что становится гораздо удобнее непосредственно применять другие методы, которые изначально являются численными.

6.2. Метод Эйлера.

Пусть дана задача Коши (6.1-6.2). Строится система равноотстоящих точек $x_i = x_0 + i \cdot h$, $i = 0, 1, 2, \dots$. Решение уравнения (6.1), то есть интегральную кривую $y = y(x)$, проходящую через точку $A_0(x_0, y_0)$ заменяют ломаной $A_0 A_1 \dots A_n \dots$, причем угол наклона звена $A_i A_{i+1}$ определяется следующим способом:

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f(x_i, y_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (6.14)$$

$$\text{Тогда:} \quad y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (6.15)$$

$$\text{Или} \quad y_{i+1} = y_i + \Delta y_i, \quad \Delta y_i = h \cdot f(x_i, y_i).$$

Замечание 1. Ломаная $A_0 A_1 \dots A_n \dots$ называется **ломаной Эйлера**.

Замечание 2. Последовательность отрезков ломаной Эйлера при $h \rightarrow 0$ на $[x_0, x_0 + h]$ равномерно стремится к интегральной кривой $y = y(x)$.

Определение. Методы численного интегрирования дифференциальных уравнений, в которых решение получают от одного узла к другому, называют **пошаговыми**. Метод Эйлера –

простейший представитель данного семейства.

Оценка погрешности.

Метод Эйлера обладает малой точностью. Сравнительно легко получить, что на каждом отрезке $[x_i, x_{i+h}]$ погрешность приближения имеет порядок h^2 . Действительно, раскладывая искомое решение на отрезке $[x_i, x_{i+h}]$ в ряд Тейлора, имеем:

$$y_{i+1} = y(x_i + h) = y(x_i) + h \cdot y'(x_i) + \frac{h^2}{2!} y''(x_i) + \dots$$

В методе Эйлера мы использовали: $y_{i+1} = y_i + h \cdot y'(x_i) + R(x_i)$.

Тогда

$$y_{i+1} - y_i = \Delta y_i, \quad R(x_i) = O(h^2).$$

Поэтому для уточнения метода Эйлера используют специальные приемы.

6.3. Модификации метода Эйлера

1. Усовершенствованный метод ломаных.

Для уточнения выражения $y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i)$ используют промежуточные значения:

$$x_{i+\frac{1}{2}} = x_i + \frac{h}{2}, \quad y_{i+\frac{1}{2}} = y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i)$$

и полагают что:

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f\left(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}}\right), \quad R(x_i) = O(h^2). \quad (6.16)$$

2. Усовершенствованный метод Эйлера-Коши.

По методу Эйлера находится грубое приближение

$$\bar{y}_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i)$$

Затем:

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot \left[\frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \bar{y}_{i+1})}{2} \right]. \quad (6.17)$$

На каждом отрезке $[x_i, x_{i+h}]$ погрешность приближений, полученных данным методом, имеет порядок h^3 , т.е. $R(x_i) = O(h^3)$.

3. Метод Эйлера с уточнением (неявный метод)

$$y_{i+1}^{(0)} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i),$$

$$y_{i+1}^{(k+1)} = y_i + \frac{h}{2} \left[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^{(k)}) \right], \quad k = \overline{1, n}; \quad |y_{i+1}^{(n)} - y_{i+1}^{(n-1)}| \leq \varepsilon;$$

$\varepsilon > 0, \varepsilon \propto O(h^3)$ - точность вычисления решения на шаге,

$$y_{i+1} = y_{i+1}^{(n)}, \quad \Delta y_{i+1} = \Delta y_i + O(h^3), \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

6.4. Метод Рунге-Кутты.

Пусть требуется найти решение $y = y(x)$ обыкновенного дифференциального уравнения

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

Предположим, что функция $f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные до n -го порядка. Тогда искомое решение $y = y(x)$ будет иметь непрерывные производные до $n+1$ -порядка, и поэтому можно записать следующий ряд:

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{y^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} + O(|x - x_0|^{n+1}). \quad (6.18)$$

Примем следующие обозначения: $x - x_0 = h, \quad y^{(k)}(x_0) = y_0^{(k)}, \quad \Delta y_0 = y(x) - y_0$, тогда получим:

$$\Delta y_0 = y(x) - y_0 = h y_0' + \dots + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} y_0^{(n+1)} + O(h^{n+1}). \quad (6.19)$$

Из (6.19) следует, что если Δy_0 найдено каким-либо способом, то решение в точке x определяется из выражения $y(x) = y_0 + \Delta y_0$. Для этого необходимо определить $y_0^{(k)}$ в выражении (6.19). Их можно найти, используя исходное дифференциальное уравнение (6.1):

$$y_0' = f(x_0, y_0) = f_0, \quad y_0'' = \frac{\partial f_0}{\partial x} + f \frac{\partial f_0}{\partial y}, \quad \dots$$

Однако практическое использование всех этих частных производных в силу их громоздкости не возможно. Рунге вместо частных производных предложил использовать саму функцию, но

вычислять ее значения в нескольких точках. Например, множеством формул Рунге-Кутты 2-го порядка является семейство формул вида:

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot [\alpha_1 f(x_i, y_i) + \alpha_2 f(x_i + \beta_1 h, y_i + \beta_2 h f(x_i, y_i))], \quad (6.20)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ – некоторые постоянные, удовлетворяющие условиям: $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, $\alpha_2 \beta_1 = 1/2$, $\alpha_2 \beta_2 = 1/2$.

Если $\alpha_1 = \alpha_2 = 1/2$, $\beta_1 = \beta_2 = 1$, то получим усовершенствованный метод Эйлера-Коши (6.17).

Приведем пример одной из самых популярных формул 4-го порядка:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6} \cdot [r_1 + 2r_2 + 2r_3 + r_4], \quad (6.21)$$

где

$$\begin{aligned} r_1 &= hf(x_i, y_i); \\ r_2 &= hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{r_1}{2}\right); \\ r_3 &= hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{r_2}{2}\right); \\ r_4 &= hf(x_i + h, y_i + r_3), \end{aligned} \quad (6.22)$$

Причем сначала последовательно вычисляются r_1, r_2, r_3, r_4 , затем y_{i+1}

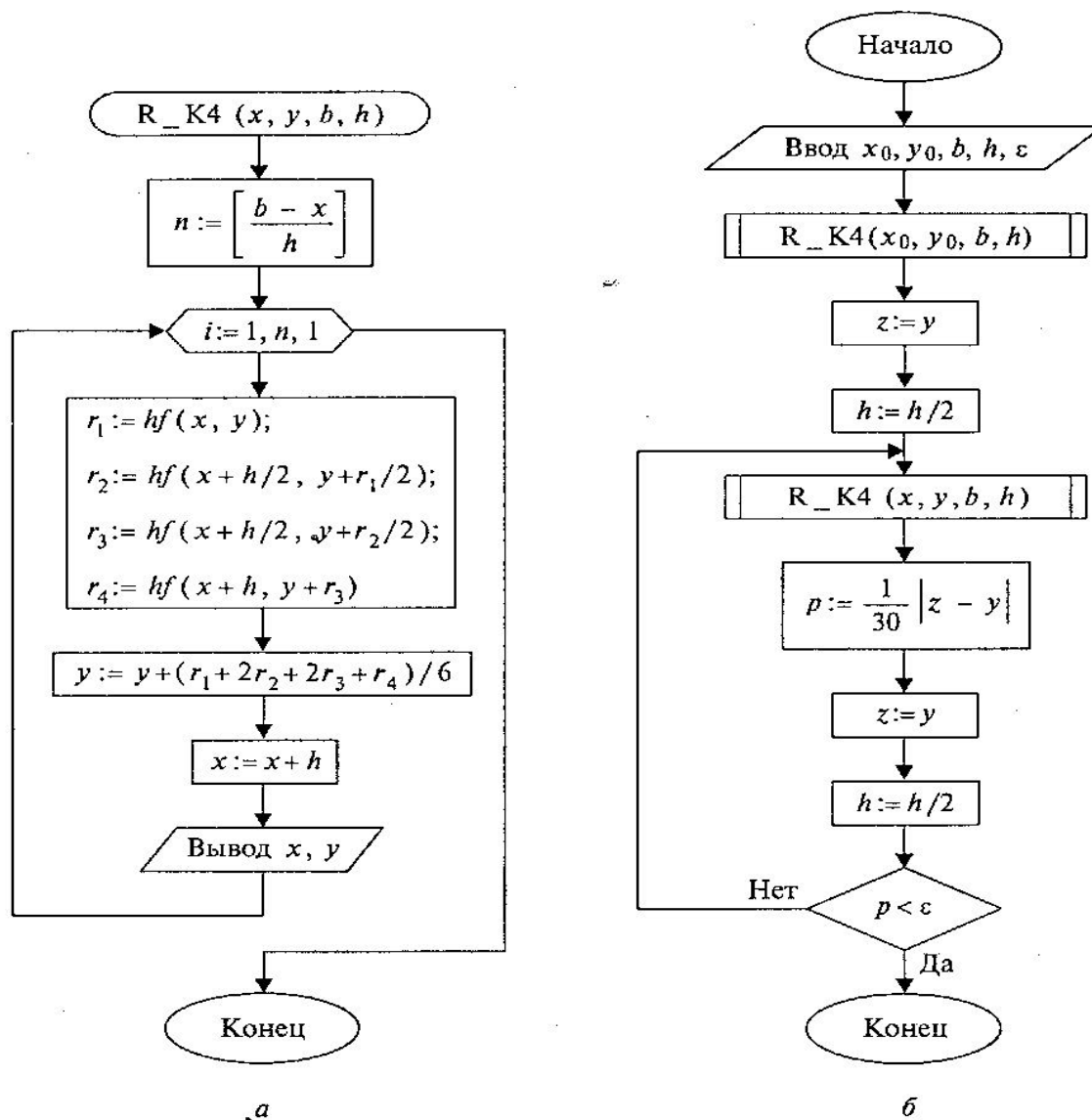


Рис. 17. Алгоритм метода Рунге-Кутты:
 а) однократное прохождение отрезка,
 б) с использованием повторного счета.

6.5 Тестовые задания.

1. Для задачи Коши $y' = yx^2$, $y(2) = 3$ один шаг метода Эйлера с $h = 0,1$ дает результат для $y(2,1)$, равный:

- :2,2
- :1,8
- :3,2
- :4,2

2. Для задачи Коши $y' = \frac{x}{y}$, $y(1) = 1$ один шаг метода Рунге-Кутты 4-го порядка с $h = 0,2$ дает результат для $y(1,2)$, равный

-:4,2

-:1,2

-:1,8

-:2,2

3. Один шаг метода Эйлера для задачи Коши $y' = xy$, $y(1) = 2$ с шагом $h = 0,1$ дает результат

-:2,2

-:1,2

-:0,2

-:3,2

4. Задано дифференциальное уравнение $y' = x + y^2$ и начальное условие $y(0) = 1$. Один шаг метода Эйлера при $h = 0,2$ дает значение

-: 1,6

-: 1,2

-: 0,2

-: 1,8

7. Темы спецкурсов.

Тема 1. Приближение функций.

Часть 1. Равномерное приближение.

§ 1. Постановка задачи. Теоремы Вейерштрасса об аппроксимации.

§ 2. Наилучшее приближение функции многочленами.

§ 3. Многочлены Чебышева и Бернштейна.

Часть 2. Интерполирование функций.

§ 1. Интерполирование функции. Постановка задачи.

§ 2. Интерполяционные формулы Гаусса, Стирлинга, Бесселя, Эверетта.

§ 3. Интерполирование периодических функций тригонометрическими полиномами.

§ 4. Интерполирование с кратными узлами.

Часть 3. Приближение функций сплайнами.

§ 1. Постановка задачи. Интерполяционные кубические сплайны.

§ 2. Сглаживающие кубические сплайны.

§ 3. Сплайновые кривые. Кривые Безье.

§ 4. В - сплайновые и Бета - сплайновые кривые.

§ 5. Сплайновые поверхности.

Часть 4. Квадратичное приближение

§ 1. Приближение функций по методу наименьших квадратов.

§ 2. Квадратичное приближение периодических функций тригонометрическими многочленами.

§ 3. Квадратичное приближение методом Чебышева.

Тема 2. Методы минимизации функций.

Часть 1. Методы минимизации функций (МФ) одной переменной.

§ 1. Постановка задачи. Глобальные и локальные минимумы (максимумы). Унимодальные функции.

§ 2. Классический метод МФ. Метод деления отрезка пополам.

§ 3. Симметричные методы. Метод золотого сечения.

§ 4. Оптимальные методы. Метод Фибоначчи.

§ 5. Метод ломаных. Метод покрытий.

§ 6. Методы минимизации выпуклых функций. Метод касательных.

§ 7. Методы поиска глобального минимума. Метод парабол.

§ 8. Стохастический метод минимизации.

Часть 2. Методы минимизации функций многих переменных.

§ 1. Постановка задачи минимизации. Теорема Вейерштрасса.

§ 2. Классический метод.

- § 3. Градиентный метод. Методы проекции градиента и субградиента, условного градиента.
- § 4. Метод возможных направлений, сопряженных направлений.
- § 5. Методы Ньютона и Стеффенсена.
- § 6. Метод покоординатного спуска.
- § 7. Метод поиска глобального минимума.
- § 8. Метод модифицированных функций Лагранжа.
- § 9. Метод штрафных функций.
- § 10. Метод барьерных функций, нагруженных функций.
- § 11. Метод случайного поиска.

Тема 3. Численные методы решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений специального вида.

- § 1. Введение в дискретные методы решения задачи Коши. Вопросы реализации алгоритмов.
- § 2. Одношаговые методы типа Рунге-Кутты. Условия порядка. Способы оценки погрешностей одношаговых методов. Распространение одношаговых методов на системы ОДУ.
- § 3. Многошаговые методы и их реализация. Переменный порядок и шаг. Распространение многошаговых методов на системы ОДУ.
- § 4. Экстраполяционные методы.
- § 5. Явление жесткости и его влияние на выбор методов решения задачи Коши.
- § 6. Неявные одношаговые (типа Рунге-Кутты) и многошаговые методы. Вопросы их реализации.
- § 7. Структурный метод интегрирования систем ОДУ. Алгоритмы конструирования и реализации его расчетных схем.
- § 8. Современные численные методы интегрирования, наиболее распространенных в задачах моделирования, систем ОДУ специального вида.

8. Темы для вычислительного практикума

Для самостоятельного изучения во время вычислительного практикума предлагается следующий перечень численных методов. При этом рекомендуется выполнять работу по следующему плану:

- Изучить имеющуюся литературу по выбранной теме, разобраться с основными идеями этого метода и выяснить области применения, найти задачи которые решаются этим методом;
- Решить проблему численной реализации данного метода на компьютере или путем составления программы на каком-либо языке

программирования или используя известные математические пакеты прикладных программ;

- Численно решить выбранную задачу, используя изученный метод, и если есть возможность сравнить полученный результат с результатами полученными другими методами.

Форма отчета по вычислительному практикуму может быть такой же как и форма отчета для лабораторных работ.

А. Методы решения нелинейных уравнений.

- A.1. Метод деления отрезка пополам. Метод итерации.
- A.2. Метод Ньютона. Метод хорд.
- A.3. Комбинированный метод.
- A.4. Метод парабол.

В. Методы решения систем линейных уравнений.

- B.1. Метод исключения неизвестных.
- B.2. Метод квадратного корня, метод Халецкого.
- B.3. Итерационные методы (итерации и Зейделя).
- B.4. Релаксационный метод.

С. Методы решения систем нелинейных уравнений.

- C.1. Метод итерации.
- C.2. Метод Ньютона.
- C.3. Метод наискорейшего спуска.

Д. Интерполирование функций.

- D.1. Интерполяционные формулы Ньютона.
- D.2. Интерполяционные формулы Гаусса, Стирлинга.
- D.3. Интерполяционные формулы Бесселя, Эверетта.
- D.4. Интерполирование тригонометрическими полиномами.

Е. Интерполирование функций многих переменных.

- E.1. Интерполирование функции двух переменных с равностоящими значениями аргументов.
- E.2. Интерполяционная формула Лагранжа с двумя переменными.

Ф. Обратное интерполирование.

- F.1. Обратная интерполяция. Формула Лагранжа.
- F.2. Обратная интерполяция последовательными приближениями.

Г. Численное дифференцирование функций.

- G.1. Формулы численного дифференцирования с конечными разностями.
- G.2. Формула Маркова.

Н. Численное интегрирование.

- H.1. Формулы прямоугольников (левые, правые и средние).
- H.2. Формулы трапеции, Симпсона.
- H.3. Квадратурные формулы Ньютона - Котеса.

- Н.4. Квадратурные формулы Гаусса.
- Н.5. Квадратурные формулы Чебышева.
- Н.6. Квадратурные формулы Маркова.
- Н.7. Метод Монте-Карло.
- Н.8. Приближенное вычисление несобственных интегралов.
- Н.9. Вычисление кратных интегралов.
- Н.10. Кубатурные формулы. Повторное применение квадратурных формул.
- Н.11. Кубатурные формулы. Метод поперечных сечений.
- Н.12. Кубатурные формулы, получаемые интегрированием интерполяционных формул.
- Н.13. Кубатурные формулы с разностями.
- Н.14. Кубатурные формулы вычисления двойного интеграла в прямоугольнике.
- Н.15. Кубатурные формулы вычисления двойного интеграла в круге.
- Н.16. вычисление кратных интегралов методом Монте-Карло.
- I. Методы равномерного (наилучшего) приближения.**
 - I.1. Наилучшее приближение функции многочленами.
 - I.2. Многочлены Чебышева.
 - I.3. Многочлены Бернштейна.
- J. Приближение функций сплайнами.**
 - J.1. Интерполяционные кубические сплайны.
 - J.2. Сглаживающие кубические сплайны.
 - J.3. Сплайновые кривые. Кривые Безье.
 - J.4. В - сплайновые и Бета - сплайновые кривые.
- К. Квадратичное приближение.**
 - К.1. Приближение функций по методу наименьших квадратов.
 - К.2. Квадратичное приближение периодических функций тригонометрическими многочленами.
 - К.3. Квадратичное приближение методом Чебышева.
- L. Методы минимизации функций одной переменной (МФ).**
 - L.1. Классический метод МФ. Метод деления отрезка пополам.
 - L.2. Симметричные методы. Метод золотого сечения.
 - L.3. Оптимальные методы. Метод Фибоначчи.
 - L.4. Метод ломаных. Метод покрытий.
 - L.5. Методы минимизации выпуклых функций. Метод касательных.
 - L.6. Методы поиска глобального минимума. Метод парабол.
 - L.7. Стохастический метод минимизации.
- M. Методы минимизации функций многих переменной.**
 - M.1. Градиентный метод. Методы проекции градиента и субградиента, условного градиента.

- М.2. Методы возможных направлений, сопряженных направлений.
- М.3. Методы Ньютона и Стеффенсена.
- М.4. Метод покоординатного спуска.
- М.5. Метод поиска глобального минимума.
- М.6. Метод модифицированных функций Лагранжа.
- М.7. Метод штрафных функций.
- М.8. Метод барьерных функций, нагруженных функций.
- М.9. Метод случайного поиска.

Н. Методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ).

- Н.1. Метод Эйлера и его модификации.
- Н.2. Семейство методов Рунге-Кутты (второго и четвертого порядков).
- Н.3. Метод Адамса.
- Н.4. Метод сеток.
- Н.5. Методы Рунге-Кутты для системы ОДУ.

О. Методы решения краевых задач для ОДУ.

- О.1. Метод сеток.
- О.2. Метод прогонки.
- О.3. Метод редукции к задаче Коши.
- О.4. Метод коллокации.
- О.5. Метод Галеркина.
- О.6. Метод Ритца.

Р. Метод сеток для дифференциальных уравнений в частных производных.

- Р.1. Метод сеток решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона в прямоугольной и произвольной области.
- Р.2. Метод сеток решения задачи Неймана для уравнения Пуассона в прямоугольной и произвольной области.
- Р.3. Метод сеток решения смешанной задачи для уравнения теплопроводности.
- Р.4. Метод сеток решения смешанной задачи для уравнения гиперболического типа.

9. Примерные темы курсовых работ

1. Явные методы решения системы уравнений. Сравнительный анализ.
2. Неявные методы решения системы уравнений.
3. Решение систем линейных уравнений (разреженные матрицы).
4. Численное интегрирование кратных интегралов.
5. Аппроксимация функций.
6. Многошаговый метод Адамса решения задачи Коши.
7. Одношаговые методы типа Рунге-Кутты. Условия порядка. Способы оценки погрешностей одношаговых методов. Распространение одношаговых методов на системы ОДУ.
8. Многошаговые методы и их реализация. Переменный порядок и шаг. Распространение многошаговых методов на системы ОДУ.
9. Экстраполяционные методы.
10. Явление жесткости и его влияние на выбор методов решения задачи Коши.
11. Неявные одношаговые (типа Рунге-Кутты) и многошаговые методы. Вопросы их реализации.
12. Структурный метод интегрирования систем ОДУ. Алгоритмы конструирования и реализации его расчетных схем.
13. Современные численные методы интегрирования, наиболее распространенных в задачах моделирования, систем ОДУ специального вида.
14. Методы решения интегральных уравнений Вольтера II рода (метод Рунге-Кутты).
15. Решение задачи Дирихле в области специального вида методом Монте-Карло.
16. Многошаговый метод Адамса решения задачи Коши.
17. Численные методы решения проблемы собственных значений.
18. Численные методы решения жестких задач (неявные методы).
19. Численные методы решения жестких задач (адаптивные методы).
20. Имитационные модели.
21. Вариационные методы. Численное решение методом Рунге.
22. Вариационные методы. Численное решение методом Галеркина.
23. Основы теории и численная реализация параллельных вычислений.
- 24.
25. Методы безусловной минимизации.
26. Методы условной минимизации.
27. Метод штрафных функций в теории оптимизации.

28. Методы оптимизации. Метод сопряженных градиентов Флетчера-Ривса.
29. Методы оптимизации. Метод Нелдера-Мида.
30. Многокритериальная оптимизация.
31. Задача выбора.
32. Поиск наилучшего пути в графе.
33. Моделирование стратегических игр (шахматы).
34. Релаксационные методы решения задач нелинейного программирования.
35. Метод Монте – Карло решения целочисленной задачи линейного программирования.
36. Метод динамического программирования.
37. Многомерный статистический анализ: кластерный анализ.
38. Многомерный статистический анализ: методы снижения размерностей.
39. Многомерный статистический анализ: метод многомерного шкалирования.
40. Теория возмущений.
41. Методы решения сингулярно возмущенных задач.
42. Метод двухмасштабных разложений (Линейный осциллятор).
43. Метод Ван-дер-Поля. Автоколебания.
44. Метод Крылова-Боголюбова.
45. Метод сращиваемых разложений.
46. Метод Вишика-Люстерника. Пограничный слой.
47. Метод малых параметров в теории колебаний.
48. Асимптотическое моделирование реальных трещин.
49. Компьютерные модели случайных процессов.
50. Компьютерная модель диффузионного процесса.
51. Модель марковских процессов.
52. Модели динамических процессов в системах с отказами.
53. Хаотическая динамика систем.
54. Спектральный анализ экспериментальных данных.
55. Модели процессов размножения и гибели в случайных средах.
56. Модели систем массового обслуживания.
57. Метод диффузионной аппроксимации в моделировании.
58. Имитационное моделирование и его численная реализация.
59. Стохастическая паутина.
60. Структуры с симметрией типа «квазикристалл» в природе и в орнаментах.
61. Системы дифференциальных уравнений с малым параметром.
62. Математическое моделирование исторических процессов.

63. Математическое моделирование демографических процессов.
64. Моделирование динамики биологической системы конкурирующих популяций.
65. Моделирование динамики биологической системы «хищник-жертва».
66. Моделирование поведения динамики многочастичной системы.
67. Моделирование поведения динамической системы, описываемой уравнениями Колмогорова.
68. Моделирование марковских случайных процессов.
69. Моделирование блуждания частицы методом Монте-Карло в сложной области.
70. Имитационные модели и системы. Имитационные эксперименты.
71. Многоотраслевая модель экономики Леонтьева.
72. Создание динамических баз данных.
73. Моделирование случайных процессов.
74. Теория бильярда в сложной области.
75. Численное моделирование в теории теплообмена.
76. Моделирование динамических систем со случайными возмущениями.
77. Определение информационной насыщенности текста.
78. Сравнительный анализ численных методов решения систем линейных уравнений.
79. Метод сеток для трехмерной области.
80. Метод конечных элементов для трехмерной области.
81. Численное решение обратных динамических задач для гиперболических уравнений.
82. Метод итеративной регуляризации Фридмана.
83. Метод регуляризации Лаврентьева.
84. Метод квазирешений Иванова.
85. Применение проекционных методов при решении некорректных задач.
86. Применение метода Тихонова в акустической термографии.
87. Решение обратных некорректных задач в многомерной области.
88. Решение обратной задачи с использованием вейвлет-разложения.
89. Динамическое программирование в среде MatLab.
90. Символические вычисления в среде Matematika.
91. Моделирование в среде MatCad.
92. Математическая теория катастроф.
93. Исследование динамических систем методами теории катастроф.
94. Модели динамических систем.
95. Управляемые динамические модели в экономике.

96. Методы нелинейной теории управляемых динамических систем.
97. Методы исследования систем управления с параметрической неопределенностью.
98. Математические модели конкуренции и кооперации.
99. Динамические задачи в международной торговле.
100. Динамические задачи в теории управления.

10. Примерные вопросы к экзамену по курсу «Численные методы»

1. Вычислительная математика. Численные методы. Этапы решения задач на ЭВМ.
2. Корректность постановки задачи. Примеры некорректных задач.
3. Основы теории погрешностей. Абсолютная и относительная погрешности. Предельные погрешности. Примеры.
4. Значащая цифра. Число верных значащих цифр (в узком и широком смысле). Связь между относительной погрешностью и числом значащих цифр.
5. Округление чисел. Правило округления. Примеры.
6. Абсолютные и относительные погрешности суммы, разности, произведения и частного.
7. Относительные погрешности элементарных функций.
8. Общая формула погрешности. Пример.
9. Приближенное решение нелинейных уравнений. Аналитические и геометрические методы отделения корней. Оценка погрешности.
10. Приближенное решение нелинейных уравнений. Метод половинного деления. Оценка погрешности.
11. Приближенное решение нелинейных уравнений. Метод хорд. Оценка погрешности.
12. Приближенное решение нелинейных уравнений. Метод касательных. Оценка погрешности.
13. Приближенное решение нелинейных уравнений. Метод итерации. Достаточное условие сходимости.
14. Приближенное решение нелинейных уравнений. Метод итерации. Оценка погрешности.
15. Численное решение систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Постановка задачи. Метод Гаусса, формулы Крамера.
16. Численное решение СЛАУ. Постановка задачи. Метод квадратного корня.
17. Численное решение СЛАУ. Постановка задачи. Метод Халецкого.
18. Приближенное решение СЛАУ. Постановка задачи. Метод итерации. Достаточное условие сходимости.

19. Приближенное решение СЛАУ. Постановка задачи. Метод итерации. Оценка погрешности приближения. Метод Зейделя.
20. Приближенное решение СЛАУ. Метод релаксации. Сходимость метода релаксации.
21. Многослойные схемы. Двухслойная итерационная схема с чебышевскими параметрами.
22. Попеременно-треугольный метод решения СЛАУ. Выбор параметра схемы и сходимость.
23. Решение СЛАУ. Вариационно-итерационные методы.
24. Интерполирование функций. Постановка задачи. Аппроксимация функций.
25. Приближение функций. Сплаины.
26. Конечные разности.
27. Интерполирование функций. Формулы Ньютона.
28. Интерполирование функций. Формула Лагранжа.
29. Приближенное дифференцирование функций.
30. Обратное интерполирование функций. Формула Лагранжа.
31. Приближенное интегрирование функций. Квадратурные формулы Ньютона -Котеса.
32. Приближенное интегрирование функций. Формулы прямоугольников. Оценка погрешности.
33. Приближенное интегрирование функций. Формула трапеции и ее остаточный член.
34. Приближенное интегрирование функций. Формула Симпсона и ее остаточный член. Оценка погрешности (метод пересчета).
35. Приближенное интегрирование функций. Метод Монте-Карло. Оценка погрешности.
36. Приближенное решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Метод последовательных приближений (метод Пикара). Оценка погрешности.
37. Приближенное решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Метод Эйлера. Оценка погрешности. Модификации метода Эйлера.
38. Приближенное решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Метод Рунге- Кутта. Общий случай. Погрешность метода на шаге.
39. Явные методы приближенного решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений
40. Неявные методы приближенного решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

11. Задания для проверки остаточных знаний

Вариант 1

1. Округлить сомнительные цифры числа $a = 397,3557$, $\delta = 1,3\%$ оставив верные знаки в узком смысле. Определить абсолютную и относительную погрешности результата.
2. Отделить корни уравнения $2 \cdot x^2 - \cos(x) = 0$ графически и уточнить один из них методом хорд с точностью до $\varepsilon = 0,001$.
3. Составить алгоритм вычисления интеграла $\int_0^{\pi} e^{1+3\cos(x)} dx$ методом трапеции с $n = 100$.
4. Составить алгоритм решения методом Эйлера дифференциального уравнения $y'(x) = y(x) + e^x$, удовлетворяющего начальному условию $y_0(1) = e$ на отрезке $x \in [1; 2,1]$; шаг взять $h = 0,1$.

Вариант 2

1. Округлить сомнительные цифры числа $a = 99,857$, $\delta = 2,5\%$ оставив верные знаки в широком смысле. Определить абсолютную и относительную погрешности результата.
2. Отделить корни уравнения $x + 2\sin(x-1) = 0$ графически и уточнить один из них методом касательных с точностью до $\varepsilon = 0,001$.
3. Составить алгоритм вычисления интеграла $\int_1^2 (x + x \cdot \sin(x)) dx$ методом Симпсона с $n = 50$.
4. Составить алгоритм решения методом Рунге-Кутты дифференциального уравнения $y'(x) = \frac{3y(x)}{x}$, удовлетворяющего начальному условию $3y_0(1) = 1$ на отрезке $x \in [1; 1,3]$; шаг взять $h = 0,1$.

Вариант 3

1. Округлить сомнительные цифры числа $a = 885,585 \pm 0,0045$, оставив верные знаки в узком смысле. Определить абсолютную и относительную погрешности результата.
2. Отделить корни уравнения $3x^3 - \cos(x) = 1$ графически и уточнить один из них методом итерации с точностью до $\varepsilon = 0,001$.

3. Составить алгоритм вычисления интеграла $\int_0^2 (x+1) \sin\left(\frac{x}{2}\right) dx$ методом прямоугольника с $n = 30$.
4. Составить алгоритм решения методом Эйлера дифференциального уравнения $y'(x) = \frac{y(x)-1}{x} + 1$, удовлетворяющего начальному условию $y_0(1) = 1$ на отрезке $x \in [1; 2,1]$; шаг взять $h = 0,1$.

Вариант 4

1. Округлить сомнительные цифры числа $a = 0,0655 \pm 0,0039$ оставив верные знаки в широком смысле. Определить абсолютную и относительную погрешности результата.
2. Отделить корни уравнения $x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = 0$ графически и уточнить один из них методом половинного деления с точностью до $\varepsilon = 0,001$.
3. Составить алгоритм вычисления интеграла $\int_1^2 \frac{1}{x} \sin(x^2 + 2) dx$ методом Симпсона с точностью до $\varepsilon = 0,001$ (использовать метод двойного пересчета).
4. Составить алгоритм решения методом Рунге-Кутты дифференциального уравнения $y'(x) = 2 \frac{y(x)-1}{x} + x$, удовлетворяющего начальному условию $y_0(1) = 1$ на отрезке $x \in [1; 1,2]$; шаг взять $h = 0,1$.

Вариант 5

1. Округлить сомнительные цифры числа $a = 72,3547$, $\delta = 0,25\%$ оставив верные знаки в узком смысле. Определить абсолютную и относительную погрешности результата.
2. Отделить корни уравнения $2x - \lg(x) - 71 = 0$ графически и уточнить один из них методом хорд с точностью до $\varepsilon = 0,001$.
3. Составить алгоритм вычисления интеграла $\int_2^{12} e^{1+\sin(x)} dx$ методом трапеции с $n = 50$.

4. Составить алгоритм решения методом Эйлера дифференциального уравнения $y'(x) = x + \sin\left(\frac{y(x)}{3}\right)$, удовлетворяющего начальному условию $y_0(1,6) = 4,6$ на отрезке $x \in [1,8; 2,8]$; шаг взять $h = 0,1$.

Вариант 6

1. Округлить сомнительные цифры числа $a = 23,6357$, $\delta = 0,17\%$ оставив верные знаки в широком смысле. Определить абсолютную погрешность результата.
2. Отделить корни уравнения $x^2 + 2 \cdot \sin(x) = 0$ графически и уточнить один из них методом касательных с точностью до $\varepsilon = 0,001$.
3. Составить алгоритм вычисления интеграла $\int_1^2 (0,5 \cdot x + x \cdot \lg(x)) dx$ методом Симпсона с $n=50$.
4. Составить алгоритм решения методом Рунге-Кутты дифференциального уравнения $y' = \frac{\cos(x)}{x+2} - 0,3 \cdot y^2$, удовлетворяющего начальному условию $y_0(0)=0$ на отрезке $x \in [0;1]$; шаг взять $h=0,1$.

Вариант 7

1. Округлить сомнительные цифры числа $a = 5,1578 \pm 0,00439$ оставив верные знаки в узком смысле. Определить абсолютную погрешность результата.
2. Отделить корни уравнения $x + \cos(x) = 1$ графически и уточнить один из них методом итерации с точностью до $\varepsilon = 0,001$.
3. Составить алгоритм вычисления интеграла $\int_0^5 (x + 0,5) \cdot \sin\left(\frac{x}{3}\right) dx$ методом прямоугольника с $n=100$.
4. Составить алгоритм решения методом Эйлера дифференциального уравнения $y' = 1 + 0,4 \cdot y \cdot \sin(x) - 1,5 \cdot y^2$, удовлетворяющего начальному условию $y_0(0)=0$ на отрезке $x \in [0;1]$; шаг взять $h=0,1$.

Вариант 8

1. Округлить сомнительные цифры числа $a = 0,61657 \pm 0,00239$ оставив верные знаки в широком смысле. Определить абсолютную погрешность результата.
2. Отделить корни уравнения $x^3 + x - 3 = 0$ графически и уточнить один из них методом половинного деления с точностью до $\varepsilon = 0,001$.

3. Составить алгоритм вычисления интеграла $\int_1^2 \frac{1}{x} \cdot \ln(x+2) dx$ методом Симпсона с точностью до $\varepsilon=0,001$ (использовать метод двойного пересчета).
4. Составить алгоритм решения методом Рунге-Кутта дифференциального уравнения $y' = x + \cos\left(\frac{y}{\sqrt{0,3}}\right)$, удовлетворяющего начальному условию $y_0(0,7)=2,1$ на отрезке $x \in [0,7;1,7]$; шаг взять $h=0,1$.

Вариант 9

1. Округлить сомнительные цифры числа $a = 32,3557$, $\delta = 0,31$ % оставив верные знаки в узком смысле. Определить абсолютную погрешность результата.
2. Отделить корни уравнения $2 \cdot x - \cos(x) = 0$ графически и уточнить один из них методом хорд с точностью до $\varepsilon=0,001$.
3. Составить алгоритм вычисления интеграла $\int_0^{\pi} e^{1+\cos(x)} dx$ методом трапеции с $n=100$.
4. Составить алгоритм решения методом Эйлера дифференциального уравнения $y' = y + e^x$, удовлетворяющего начальному условию $y_0(0)=0$ на отрезке $x \in [0;1,5]$; шаг взять $h=0,1$.

Вариант 10

1. Округлить сомнительные цифры числа $a = 278,557$, $\delta = 0,75$ % оставив верные знаки в широком смысле. Определить абсолютную погрешность результата.
2. Отделить корни уравнения $x^2 + 2 \cdot \sin(x-1) = 0$ графически и уточнить один из них методом касательных с точностью до $\varepsilon=0,001$.
3. Составить алгоритм вычисления интеграла $\int_1^2 (x^2 + x \cdot \lg(x)) dx$ методом Симпсона с $n=50$.
4. Составить алгоритм решения методом Рунге-Кутта дифференциального уравнения $y' = \frac{3y}{x}$, удовлетворяющего начальному условию $y_0(0)=0$ на отрезке $x \in [0;1]$; шаг взять $h=0,1$.

Вариант 11

1. Округлить сомнительные цифры числа $a = 8,1568 \pm 0,00459$ оставив верные знаки в узком смысле. Определить абсолютную погрешность результата.
2. Отделить корни уравнения $3x - \cos(x) = 1$ графически и уточнить один из них методом итерации с точностью до $\varepsilon = 0,001$.
3. Составить алгоритм вычисления интеграла $\int_0^2 (x+2) \cdot \sin\left(\frac{x}{5}\right) dx$ методом прямоугольника с $n=100$.
4. Составить алгоритм решения методом Эйлера дифференциального уравнения $y' = \frac{y-3}{x} + 1$, удовлетворяющего начальному условию $y_0(1)=3$ на отрезке $x \in [1; 2]$; шаг взять $h=0,1$.

Вариант 12

1. Округлить сомнительные цифры числа $a = 0,65655 \pm 0,0049$ оставив верные знаки в широком смысле. Определить абсолютную погрешность результата.
2. Отделить корни уравнения $x^3 + x^2 - 1 = 0$ графически и уточнить один из них методом половинного деления с точностью до $\varepsilon = 0,001$.
3. Составить алгоритм вычисления интеграла $\int_1^2 \frac{1}{x} \cdot \lg(x^2 + 2) dx$ методом Симпсона с точностью до $\varepsilon = 0,001$ (использовать метод двойного пересчета).
4. Составить алгоритм решения методом Рунге-Кутты дифференциального уравнения $y' = 2 \frac{y-2}{x} + x$, удовлетворяющего начальному условию $y_0(1)=2$ на отрезке $x \in [1; 2]$; шаг взять $h=0,1$.

Литература

1. Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В. Вычислительные методы для инженеров: Учеб. пособие. –М.: Высш. шк., 1994.
2. Бахвалов Н.С. Численные методы - М.: Наука, 2004.
3. Бахвалов Н.С., Лапин А.В. Численные методы в задачах и упражнениях. Уч. пособие / Под ред. В.А. Садовнического.-М.: Высшая школа, 2000.
4. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы.– М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2003.
5. Березин Н.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. Т 1,2. - М.: Физматгиз, 1962.
6. Бордовский Г.А. Физические основы математического моделирования: Учеб. пособ. для вузов/ Бордовский Г.А., Кондратьев А.С. Чоудери А.Д.Р .-М.: Изд. Центр «Академия», 2005.-320с.
7. Васильев Ф. П. Методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1981.
8. Васильев Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач.– М.: Наука, 1981.
9. Васильев Ф. П., Иваницкий А. Ю. Линейное программирование. – М: Факториал, 1998.
10. Введение в математическое моделирование: Учеб. пособие /В.Н. Ашихмин, М.Б. Гитман, И.Э. Келлер и др.-М.: Логос, 2005.-439с.
11. Введение в математическое моделирование: Учеб. Пособие \Под ред.П.В.Трусова -М.: Логос, 2005..-440 с.
12. Волков Е.А. Численные методы. – М.: Наука, 1987.
13. Воробьева Г.Н., Данилова А.Н. Практикум по вычислительной математике. -М.: Высшая школа, 1990.
14. Демидович Б. Н. Численные методы анализа. Приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения/ Б.П. Демидович, И.А. Марон-СПБ.: Лань, 2010.-400 с.
15. Демидович Б.Н., Марон И.А. Основы вычислительной математики. -М.: Наука, 1966.
16. Демидович Б.Н., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. –М.: Наука, 1967.

17. Дж. Форсайт, М. Мальком, К. Моулер. Машинные методы математических вычислений. Изд-во "Мир". Москва. 1980.
18. Зализняк В.Е. Численные методы. Основы научных вычислений: учебное пособие для бакалавров /В.Е. Зализняк. – 2-е изд., -М.: Издательство Юрайт, 2012. – 356 с.
19. Иванов В.В. Методы вычислений на ЭВМ. Киев: Наукова думка, 1986.
20. Калиткин Н.Н. Численные методы. – М.: Наука, 1978.
21. Карманов В. Г. Математическое программирование. – М.: Наука, 1986.
22. Кацман Ю.Я. Прикладная математика. Численные методы. Учебное пособие. – Томск: Изд. ТПУ, 2000.
23. Копченова Н.В., Марон И. А. Вычислительная математика в примерах и задачах. – М.: Наука, 1972.
24. К. Де Бор. Практическое руководство по сплайнам. Изд-во "Радио и связь". Москва. 1985.
25. Киреев В.И., Пантелеев А.В. Численные методы в примерах и задачах: Учеб. пособ. - М. : Высш. школа, 2004.-480с.
26. Костомаров Д.П., Фаворский А.П. Вводные лекции по численным методам: Учеб. пособ.-М.:Логос,2004-184с.
27. Мудров А.Е. Численные методы для ПЭВМ на языках Бейсик, Фортран и Паскаль. – Томск: МП «РАСКО», 1991.
28. Мухачёва Э. А., Рубинштейн Г. Ш. Математическое программирование. – Новосибирск: Наука, 1987.
29. Лапчик М.П. Численные методы: Учеб. пособ. для вузов./М.П. Лапчик, М.И. Рагулина, Хеннер Е.К.-М.: Изд. «Академия»,2005.-384с.
30. Латыпов И.И. Численные методы. Лабораторный практикум: Учеб. пособ. для студ. физ.-мат. фак. Кн.1.-Бирск: Бирск. гос. соц.-пед.акад.,2007.-82 с. Гриф УМО.
31. Латыпов И.И. Численные методы. Лабораторный практикум: Учеб. пособ.-М: Изд. Дом Лидер-М, 2010.-106с.
32. Мажукин В.И., Королева О.Н. Математическое моделирование в экономике. – М.: МПСИ, Флинта, 2004.
33. Михайлов Г.А., Войтишек А.В. Численное статистическое моделирование. Методы Монте-Карло: Учеб. пособ. -М.: Изд. Центр,»Академия»,2006.-368с.
34. Назаров Н.Г. Метромегия. Основные понятия математической модели. Уч. пособие.-М.: Высшая школа, 2002.

35. Пирумов У.Г. Численные методы: Учебное пособие. – М.: Изд-во МАИ, 1998.
36. Павловский Ю.Н. и др. Имитационное моделирование: Учеб. пособ. для вузов./Павловский Ю.Н, Белотелов Н.В., Бродский Ю.Н.-М.: Академия,2008.-236с.
37. Практикум по численным методам. / Л.Я. Егорова, Л.Л. Левин, Б.Г. Ослин и др. – Томск: Изд. ТГУ, 1979.
38. Рашиков В. И., Рошаль А. С. Численные методы решения физических задач.– СПб.: Изд-во «Лань».2005.
39. Самарский А.А. Введение в численные методы. – М.: Наука, 1987г.
40. Самарский А.А. Численные методы решения обратных задач математической физики/ А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич. - М.: Едиториал УРСС,2004.-478с.
41. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. –М.: Наука, 1989.
42. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы математической физики. –М.: Научный мир, 2003.
43. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. – М.: Наука. 1978.
44. Сборник Задач по методам вычислений: Учебное пособие: Для вузов. / Под ред. П.И. Монастырского. - 2-е изд. перераб. и доп. -М.: Физматлит, 1994. -320 с.
45. Соболев Е.В. , Месхи Б.Ч., Пешхоев И.М. Практикум по вычислительной математике – Ростов н/Д : Феникс, 2008. – 342 с.
46. Сухарев А. Г., Тихонов А. В., Федоров В. В. Курс методов оптимизации. – М.: Наука, 1986.
47. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. -М.: Наука, 1986.
48. Турчак Л.И. Основы численных методов. М.:Наука, 1987г.
49. Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., Flannery B.P., Numerical Recipes in C. The Art of Scientific Computing. 2-nd ed. – Copyright © Cambridge University Press, 1992.
50. Латыпов И.И., Бигаева Л.А. Теория вероятностей. Учебное пособие. Бирск: БирГСПА, 2011. – 121 с.
51. Латыпов И.И., Бигаева Л.А. Практикум по теории вероятностей. Учебное пособие. Бирск: Бирск.фил. Баш. гос. ун-та, 2012. – 162 с.
52. Бигаева Л.А., Латыпов И.И. Практикум по математической статистике. Учебное пособие. Бирск: Бирск.фил. Баш. гос. ун-та, 2015. – 168 с.

Учебное издание

**Бигаева Люзия Ахатовна
Латыпов Ильмир Ибрагимович**

Курс лекций по численным методам

*Учебное пособие для студентов
физико-математического факультета*

Технический редактор **И.И. Латыпов**
Компьютерный набор **Л.А. Бигаева**

Печатается в авторской редакции

Подписано в печать .10.2018 г.
Гарнитура «Times». Печать на ризографе с оригинала.
Формат 60x84¹/₁₆. Усл.-печ.л. 7,5. Уч.-изд.л. 8,12.
Бумага писчая. Тираж 100 экз. Заказ № _____.
Цена договорная.

452450, Республика Башкортостан, г. Бирск, Интернациональная 10.
Бирский филиал Башкирского государственного университета.
Отдел множительной техники Бирского филиала БГУ