代码库

上海交通大学

2016 年 10 月 9 日

目录

1 数论 4
1.1 快速求逆元 4
1.2 扩展欧几里德算法 4
1.3 中国剩余定理 4
1.4 Miller Rabin 素数测试 4
1.5 Pollard Rho 大数分解 4
1.6 快速数论变换 4
1.7 直线下整点个数 4

2 数值 5
2.1 快速傅立叶变换 5
2.2 单纯形法求解线性规划 5
2.3 自适应辛普森 5

3 数据结构 5
3.1 平衡的二叉查找树 5
3.1.1 Treap 5
3.1.2 Splay 5
3.2 坚固的数据结构 5
3.2.1 坚固的线段树 5
3.2.2 坚固的平衡树 5
3.2.3 坚固的字符串 5
3.2.4 坚固的左偏树 6
3.3 树上的魔术师 6
3.3.1 轻重树链剖分 6
3.3.2 Link Cut Tree 6
3.4 k-d 树 6

4 图论 6
4.1 强连通分量 6
4.2 2-SAT 问题 6
4.3 二分图最大匹配 6

4.3.1 Hungary 算法 6
4.3.2 Hopcroft Karp 算法 6
4.4 二分图最大权匹配 6
4.5 最大流 6
4.6 上下界网络流 6
4.6.1 无源汇的上下界可行流 6
4.6.2 有源汇的上下界可行流 7
4.6.3 有源汇的上下界最大流 7
4.6.4 有源汇的上下界最小流 7
4.7 最小费用最大流 7
4.7.1 稀疏图 7
4.7.2 稠密图 7
4.8 一般图最大匹配 7
4.9 无向图全局最小割 7
4.10 有根树的同构 7
4.11 哈密尔顿回路（ORE 性质的图） 8

5 字符串 8
5.1 模式匹配 8
5.1.1 KMP 算法 8
5.1.2 扩展 KMP 算法 8
5.1.3 AC 自动机 9
5.2 后缀三姐妹 9
5.2.1 后缀数组 9
5.2.2 后缀自动机 9
5.3 回文三兄弟 9
5.3.1 Manacher 算法 9
5.3.2 回文树 9
5.4 循环串最小表示 9

6 计算几何 9
6.1 二维基础 9
6.1.1 点类 9
6.1.2 凸包 9
6.1.3 最近点对 9
6.2 多边形 9
6.2.1 判断点在多边形内部 9

7 其他 9
7.1 某年某月某日是星期几 9
7.2 枚举大小为 k 的子集 9
7.3 环状最长公共子串 9

8 Java 9
8.1 基础模板 9

9 数学 9
9.1 常用数学公式 9
9.1.1 求和公式 9
9.1.2 斐波那契数列 10
9.1.3 错排公式 10
9.1.4 莫比乌斯函数 10
9.1.5 伯恩赛德引理 11
9.1.6 五边形数定理 11
9.1.7 树的计数 11
9.1.8 欧拉公式 11
9.1.9 皮克定理 12
9.1.10 牛顿恒等式 12
9.2 平面几何公式 12
9.2.1 三角形 12
9.2.2 四边形 13
9.2.3 正 n 边形 13
9.2.4 圆 13
9.2.5 棱柱 14
9.2.6 棱锥 14
9.2.7 棱台 14
9.2.8 圆柱 15
9.2.9 圆锥 15
9.2.10 圆台 15
9.2.11 球 15
9.2.12 球台 16
9.2.13 球扇形 16
9.3 立体几何公式 16
9.3.1 球面三角公式 16
9.3.2 四面体体积公式 16

1 数论

1.1 快速求逆元

返回结果：

$$x^{-1}(mod)$$

使用条件：$x \in [0, mod)$ 并且 x 与 mod 互质

1.2 扩展欧几里德算法

返回结果：

$$ax + by = gcd(a, b)$$

时间复杂度：$\mathcal{O}(nlogn)$

1.3 中国剩余定理

返回结果：

$$x \equiv r_i(mod\ \ p_i)\ \ (0 \leq i < n)$$

使用条件：p_i 无需两两互质
时间复杂度：$\mathcal{O}(nlogn)$

1.4 Miller Rabin 素数测试

1.5 Pollard Rho 大数分解

时间复杂度：$\mathcal{O}(n^{1/4})$

1.6 快速数论变换

返回结果：

$$c_i = \sum_{0 \leq j \leq i} a_j \cdot b_{i-j}(mod)\ \ (0 \leq i < n)$$

使用说明：$magic$ 是 mod 的原根
时间复杂度：$\mathcal{O}(nlogn)$

1.7 直线下整点个数

返回结果：

$$\sum_{0 \leq i < n} \lfloor \frac{a + b \cdot i}{m} \rfloor$$

使用条件：$n, m > 0$，$a, b \geq 0$
时间复杂度：$\mathcal{O}(nlogn)$

2 数值

2.1 快速傅立叶变换

返回结果：

$$c_i = \sum_{0 \le j \le i} a_j \cdot b_{i-j} \ \ (0 \le i < n)$$

时间复杂度：$\mathcal{O}(nlogn)$

2.2 单纯形法求解线性规划

返回结果：

$$max\{c_{1\times m} \cdot x_{m\times 1} \mid x_{m\times 1} \ge 0_{m\times 1}, a_{n\times m} \cdot x_{m\times 1} \le b_{n\times 1}\}$$

2.3 自适应辛普森

3 数据结构

3.1 平衡的二叉查找树

3.1.1 Treap

3.1.2 Splay

3.2 坚固的数据结构

3.2.1 坚固的线段树

3.2.2 坚固的平衡树

3.2.3 坚固的字符串

1. ext 库中的 rope
2. 可持久化平衡树实现的 rope

3.2.4 坚固的左偏树

3.3 树上的魔术师

3.3.1 轻重树链剖分

3.3.2 Link Cut Tree

3.4 k-d 树

4 图论

4.1 强连通分量

4.2 2-SAT 问题

4.3 二分图最大匹配

4.3.1 Hungary 算法

时间复杂度：$\mathcal{O}(V \cdot E)$

4.3.2 Hopcroft Karp 算法

时间复杂度：$\mathcal{O}(\sqrt{V} \cdot E)$

4.4 二分图最大权匹配

时间复杂度：$\mathcal{O}(V^4)$

4.5 最大流

时间复杂度：$\mathcal{O}(V^2 \cdot E)$

4.6 上下界网络流

$B(u,v)$ 表示边 (u,v) 流量的下界，$C(u,v)$ 表示边 (u,v) 流量的上界，$F(u,v)$ 表示边 (u,v) 的流量。设 $G(u,v) = F(u,v) - B(u,v)$，显然有

$$0 \le G(u,v) \le C(u,v) - B(u,v)$$

4.6.1 无源汇的上下界可行流

建立超级源点 S^* 和超级汇点 T^*，对于原图每条边 (u,v) 在新网络中连如下三条边：$S^* \to v$，容量为 $B(u,v)$；$u \to T^*$，容量为 $B(u,v)$；$u \to v$，容量为 $C(u,v) - B(u,v)$。最后求新网络的最大流，判断从超级源点 S^* 出发的边是否都满流即可，边 (u,v) 的最终解中的实际流量为 $G(u,v) + B(u,v)$。

4.6.2 有源汇的上下界可行流

从汇点 T 到源点 S 连一条上界为 ∞，下界为 0 的边。按照无源汇的上下界可行流一样做即可，流量即为 $T \to S$ 边上的流量。

4.6.3 有源汇的上下界最大流

1. 在有源汇的上下界可行流中，从汇点 T 到源点 S 的边改为连一条上界为 ∞，下届为 x 的边。x 满足二分性质，找到最大的 x 使得新网络存在无源汇的上下界可行流即为原图的最大流。
2. 从汇点 T 到源点 S 连一条上界为 ∞，下界为 0 的边，变成无源汇的网络。按照无源汇的上下界可行流的方法，建立超级源点 S^* 和超级汇点 T^*，求一遍 $S^* \to T^*$ 的最大流，再将从汇点 T 到源点 S 的这条边拆掉，求一次 $S \to T$ 的最大流即可。

4.6.4 有源汇的上下界最小流

1. 在有源汇的上下界可行流中，从汇点 T 到源点 S 的边改为连一条上界为 x，下界为 0 的边。x 满足二分性质，找到最小的 x 使得新网络存在无源汇的上下界可行流即为原图的最小流。
2. 按照无源汇的上下界可行流的方法，建立超级源点 S^* 与超级汇点 T^*，求一遍 $S^* \to T^*$ 的最大流，但是注意这一次不加上汇点 T 到源点 S 的这条边，即不使之改为无源汇的网络去求解。求完后，再加上那条汇点 T 到源点 S 上界 ∞ 的边。因为这条边下界为 0，所以 S^*，T^* 无影响，再直接求一次 $S^* \to T^*$ 的最大流。若超级源点 S^* 出发的边全部满流，则 $T \to S$ 边上的流量即为原图的最小流，否则无解。

4.7 最小费用最大流

4.7.1 稀疏图

时间复杂度：$\mathcal{O}(V \cdot E^2)$

4.7.2 稠密图

使用条件：费用非负
时间复杂度：$\mathcal{O}(V \cdot E^2)$

4.8 一般图最大匹配

时间复杂度：$\mathcal{O}(V^3)$

4.9 无向图全局最小割

时间复杂度：$\mathcal{O}(V^3)$
注意事项：处理重边时，应该对边权累加

4.10 有根树的同构

时间复杂度：$\mathcal{O}(VlogV)$

4.11 哈密尔顿回路（ORE 性质的图）

ORE 性质：

$$\forall x, y \in V \wedge (x, y) \notin E \quad s.t. \quad deg_x + deg_y \geq n$$

返回结果：从顶点 1 出发的一个哈密尔顿回路
使用条件：$n \geq 3$

5 字符串

5.1 模式匹配

5.1.1 KMP 算法

5.1.2 扩展 KMP 算法

返回结果：

$$next_i = lcp(text, text_{i...n-1})$$

5.1.3 AC 自动机

5.2 后缀三姐妹

5.2.1 后缀数组

5.2.2 后缀自动机

5.3 回文三兄弟

5.3.1 Manacher 算法

5.3.2 回文树

5.4 循环串最小表示

6 计算几何

6.1 二维基础

6.1.1 点类

6.1.2 凸包

6.1.3 最近点对

6.2 多边形

6.2.1 判断点在多边形内部

7 其他

7.1 某年某月某日是星期几

7.2 枚举大小为 k 的子集

使用条件：$k > 0$

7.3 环状最长公共子串

8 Java

8.1 基础模板

9 数学

9.1 常用数学公式

9.1.1 求和公式

1. $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$
2. $\sum_{k=1}^{n} k^3 = [\frac{n(n+1)}{2}]^2$

3. $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^3 = n^2(2n^2-1)$

4. $\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$

5. $\sum_{k=1}^{n} k^5 = \frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}$

6. $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

7. $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

8. $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)(k+3) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5}$

9.1.2 斐波那契数列

1. $fib_0 = 0, fib_1 = 1, fib_n = fib_{n-1} + fib_{n-2}$

2. $fib_{n+2} \cdot fib_n - fib_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$

3. $fib_{-n} = (-1)^{n-1} fib_n$

4. $fib_{n+k} = fib_k \cdot fib_{n+1} + fib_{k-1} \cdot fib_n$

5. $gcd(fib_m, fib_n) = fib_{gcd(m,n)}$

6. $fib_m | fib_n^2 \Leftrightarrow nfib_n | m$

9.1.3 错排公式

1. $D_n = (n-1)(D_{n-2} - D_{n-1})$

2. $D_n = n! \cdot (1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!})$

9.1.4 莫比乌斯函数

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{若}n = 1 \\ (-1)^k & \text{若}n\text{无平方数因子，且}n = p_1 p_2 \ldots p_k \\ 0 & \text{若}n\text{有大于1的平方数因数} \end{cases}$$

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{若}n = 1 \\ 0 & \text{其他情况} \end{cases}$$

$$g(n) = \sum_{d|n} f(d) \Leftrightarrow f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) g(\frac{n}{d})$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{[x]} f(\frac{x}{n}) \Leftrightarrow f(x) = \sum_{n=1}^{[x]} \mu(n) g(\frac{x}{n})$$

9.1.5 伯恩赛德引理

设 G 是一个有限群，作用在集合 X 上。对每个 g 属于 G，令 X^g 表示 X 中在 g 作用下的不动元素，轨道数（记作 $|X/G|$）由如下公式给出：

$$|X/G| = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|X^g|.$$

9.1.6 五边形数定理

设 $p(n)$ 是 n 的拆分数，有

$$p(n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}(-1)^{k-1}p\left(n-\frac{k(3k-1)}{2}\right)$$

9.1.7 树的计数

1. 有根树计数：$n+1$ 个结点的有根树的个数为

$$a_{n+1} = \frac{\sum_{j=1}^{n} j\cdot a_j\cdot S_{n,j}}{n}$$

   其中，

$$S_{n,j} = \sum_{i=1}^{n/j} a_{n+1-ij} = S_{n-j,j} + a_{n+1-j}$$

2. 无根树计数：当 n 为奇数时，n 个结点的无根树的个数为

$$a_n - \sum_{i=1}^{n/2} a_i a_{n-i}$$

   当 n 为偶数时，n 个结点的无根树的个数为

$$a_n - \sum_{i=1}^{n/2} a_i a_{n-i} + \frac{1}{2}a_{\frac{n}{2}}(a_{\frac{n}{2}}+1)$$

3. n 个结点的完全图的生成树个数为

$$n^{n-2}$$

4. 矩阵—树定理：图 G 由 n 个结点构成，设 $\boldsymbol{A}[G]$ 为图 G 的邻接矩阵、$\boldsymbol{D}[G]$ 为图 G 的度数矩阵，则图 G 的不同生成树的个数为 $\boldsymbol{C}[G]=\boldsymbol{D}[G]-\boldsymbol{A}[G]$ 的任意一个 $n-1$ 阶主子式的行列式值。

9.1.8 欧拉公式

平面图的顶点个数、边数和面的个数有如下关系：

$$V - E + F = C + 1$$

其中，V 是顶点的数目，E 是边的数目，F 是面的数目，C 是组成图形的连通部分的数目。当图是单连通图的时候，公式简化为：

$$V - E + F = 2$$

9.1.9　皮克定理

给定顶点坐标均是整点（或正方形格点）的简单多边形，其面积 A 和内部格点数目 i、边上格点数目 b 的关系：

$$A = i + \frac{b}{2} - 1$$

9.1.10　牛顿恒等式

设

$$\prod_{i=1}^{n}(x - x_i) = a_n + a_{n-1}x + \cdots + a_1 x^{n-1} + a_0 x^n$$

$$p_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k$$

则

$$a_0 p_k + a_1 p_{k-1} + \cdots + a_{k-1} p_1 + k a_k = 0$$

特别地，对于

$$|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}| = (-1)^n (a_n + a_{n-1}\lambda + \cdots + a_1 \lambda^{n-1} + a_0 \lambda^n)$$

有

$$p_k = Tr(\boldsymbol{A}^k)$$

9.2　平面几何公式

9.2.1　三角形

1. 半周长

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

2. 面积

$$S = \frac{a \cdot H_a}{2} = \frac{ab \cdot sinC}{2} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

3. 中线

$$M_a = \frac{\sqrt{2(b^2+c^2) - a^2}}{2} = \frac{\sqrt{b^2 + c^2 + 2bc \cdot cosA}}{2}$$

4. 角平分线

$$T_a = \frac{\sqrt{bc \cdot [(b+c)^2 - a^2]}}{b+c} = \frac{2bc}{b+c} cos\frac{A}{2}$$

5. 高线

$$H_a = bsinC = csinB = \sqrt{b^2 - (\frac{a^2+b^2-c^2}{2a})^2}$$

6. 内切圆半径

$$r=\frac{S}{p}=\frac{arcsin\frac{B}{2}\cdot sin\frac{C}{2}}{sin\frac{B+C}{2}}=4R\cdot sin\frac{A}{2}sin\frac{B}{2}sin\frac{C}{2}$$
$$=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}=p\cdot tan\frac{A}{2}tan\frac{B}{2}tan\frac{C}{2}$$

7. 外接圆半径

$$R=\frac{abc}{4S}=\frac{a}{2sinA}=\frac{b}{2sinB}=\frac{c}{2sinC}$$

9.2.2 四边形

D_1, D_2 为对角线，M 对角线中点连线，A 为对角线夹角，p 为半周长

1. $a^2+b^2+c^2+d^2=D_1^2+D_2^2+4M^2$

2. $S=\frac{1}{2}D_1D_2sinA$

3. 对于圆内接四边形

$$ac+bd=D_1D_2$$

4. 对于圆内接四边形

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

9.2.3 正 n 边形

R 为外接圆半径，r 为内切圆半径

1. 中心角

$$A=\frac{2\pi}{n}$$

2. 内角

$$C=\frac{n-2}{n}\pi$$

3. 边长

$$a=2\sqrt{R^2-r^2}=2R\cdot sin\frac{A}{2}=2r\cdot tan\frac{A}{2}$$

4. 面积

$$S=\frac{nar}{2}=nr^2\cdot tan\frac{A}{2}=\frac{nR^2}{2}\cdot sinA=\frac{na^2}{4\cdot tan\frac{A}{2}}$$

9.2.4 圆

1. 弧长

$$l=rA$$

2. 弦长

$$a=2\sqrt{2hr-h^2}=2r\cdot sin\frac{A}{2}$$

3. 弓形高

$$h = r - \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}} = r(1 - cos\frac{A}{2}) = \frac{1}{2} \cdot arctan\frac{A}{4}$$

4. 扇形面积

$$S_1 = \frac{rl}{2} = \frac{r^2 A}{2}$$

5. 弓形面积

$$S_2 = \frac{rl - a(r-h)}{2} = \frac{r^2}{2}(A - sinA)$$

9.2.5 棱柱

1. 体积

$$V = Ah$$

A 为底面积，h 为高

2. 侧面积

$$S = lp$$

l 为棱长，p 为直截面周长

3. 全面积

$$T = S + 2A$$

9.2.6 棱锥

1. 体积

$$V = Ah$$

A 为底面积，h 为高

2. 正棱锥侧面积

$$S = lp$$

l 为棱长，p 为直截面周长

3. 正棱锥全面积

$$T = S + 2A$$

9.2.7 棱台

1. 体积

$$V = (A_1 + A_2 + \sqrt{A_1 A_2}) \cdot \frac{h}{3}$$

A_1, A_2 为上下底面积，h 为高

2. 正棱台侧面积

$$S = \frac{p_1 + p_2}{2} l$$

p_1, p_2 为上下底面周长，l 为斜高

3. 正棱台全面积

$$T = S + A_1 + A_2$$

9.2.8 圆柱

1. 侧面积

$$S = 2\pi rh$$

2. 全面积

$$T = 2\pi r(h + r)$$

3. 体积

$$V = \pi r^2 h$$

9.2.9 圆锥

1. 母线

$$l = \sqrt{h^2 + r^2}$$

2. 侧面积

$$S = \pi rl$$

3. 全面积

$$T = \pi r(l + r)$$

4. 体积

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 h$$

9.2.10 圆台

1. 母线

$$l = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$$

2. 侧面积

$$S = \pi(r_1 + r_2)l$$

3. 全面积

$$T = \pi r_1(l + r_1) + \pi r_2(l + r_2)$$

4. 体积

$$V = \frac{\pi}{3}(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)h$$

9.2.11 球

1. 全面积

$$T = 4\pi r^2$$

2. 体积

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3$$

9.2.12 球台

1. 侧面积

$$S=2\pi rh$$

2. 全面积

$$T=\pi(2rh+r_1^2+r_2^2)$$

3. 体积

$$V=\frac{\pi h[3(r_1^2+r_2^2)+h^2]}{6}$$

9.2.13 球扇形

1. 全面积

$$T=\pi r(2h+r_0)$$

h 为球冠高，r_0 为球冠底面半径

2. 体积

$$V=\frac{2}{3}\pi r^2 h$$

9.3 立体几何公式

9.3.1 球面三角公式

设 a,b,c 是边长，A,B,C 是所对的二面角，有余弦定理

$$cosa=cosb\cdot cosc+sinb\cdot sinc\cdot cosA$$

正弦定理

$$\frac{sinA}{sina}=\frac{sinB}{sinb}=\frac{sinC}{sinc}$$

三角形面积是 $A+B+C-\pi$

9.3.2 四面体体积公式

U,V,W,u,v,w 是四面体的 6 条棱，U,V,W 构成三角形，$(U,u),(V,v),(W,w)$ 互为对棱，则

$$V=\frac{\sqrt{(s-2a)(s-2b)(s-2c)(s-2d)}}{192uvw}$$

其中

$$\left\{\begin{array}{lcl} a &=& \sqrt{xYZ}, \\ b &=& \sqrt{yZX}, \\ c &=& \sqrt{zXY}, \\ d &=& \sqrt{xyz}, \\ s &=& a+b+c+d, \\ X &=& (w-U+v)(U+v+w), \\ x &=& (U-v+w)(v-w+U), \\ Y &=& (u-V+w)(V+w+u), \\ y &=& (V-w+u)(w-u+V), \\ Z &=& (v-W+u)(W+u+v), \\ z &=& (W-u+v)(u-v+W) \end{array}\right.$$