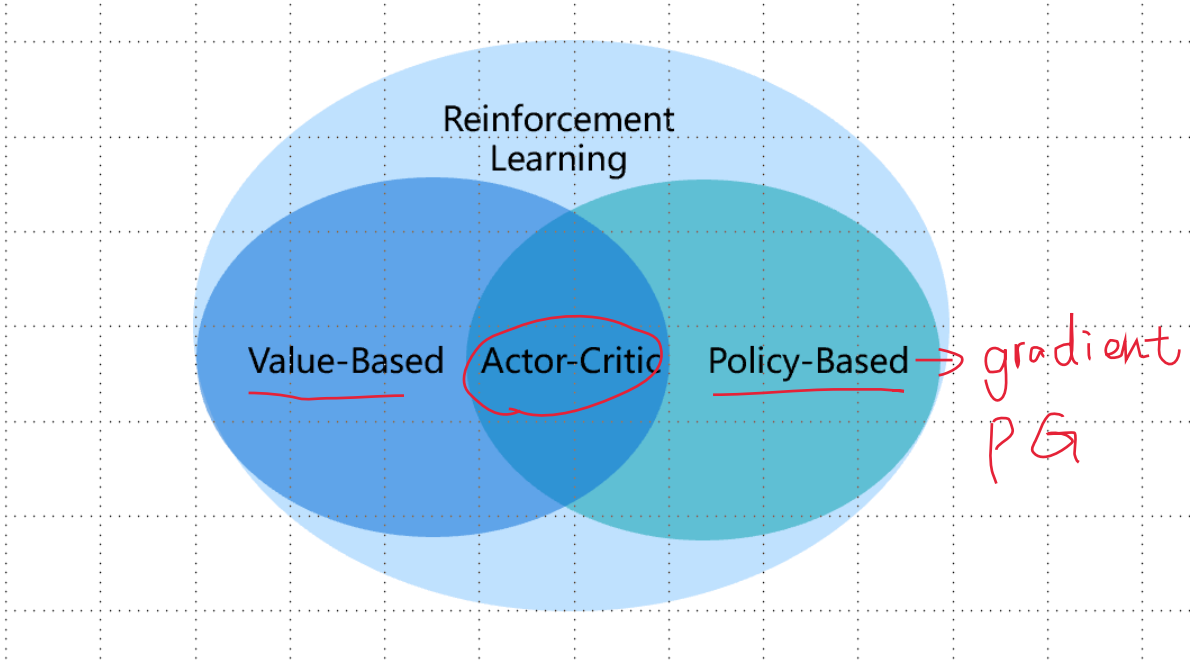
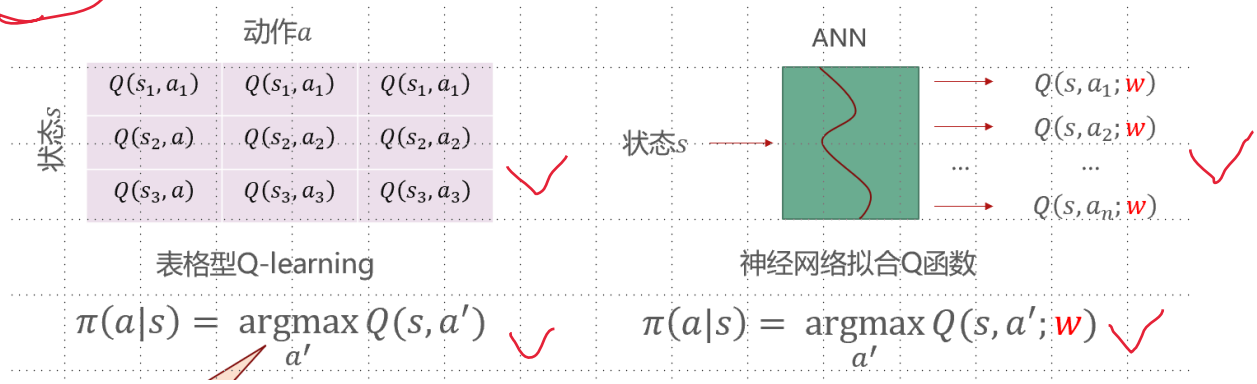
1策略梯度算法——REINFORCE

1 策略梯度算法概述



1.1 基于价值的方法存在的问题

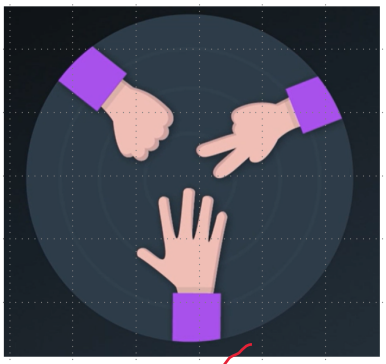
前面介绍的一系列基于价值函数的(value-based)方法，都是估计各个"状态-价值"对的未来收益的期望$Q(s,a)$，然后使用贪婪算法来选择动作。

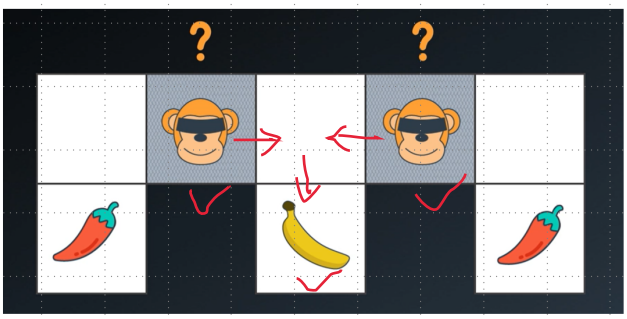


这类方法存在两个比较大的问题：

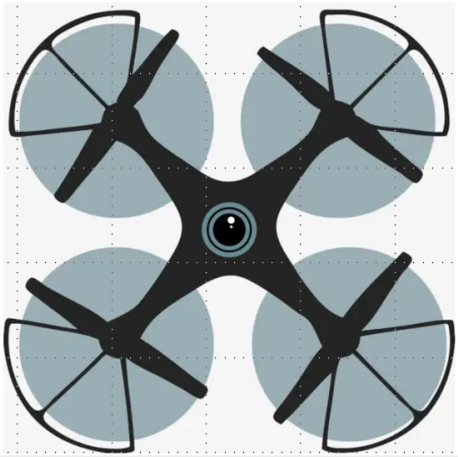
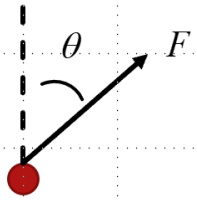
- 无法产生随机策略

> 比如玩"石头-剪刀-布"游戏，最优的测率应该是随机策略。如果你有任何喜欢出某一个动作的习惯，都会被对手察觉到，从而对手就会出相应的策略进行压制。基于价值的方法就难以应对这样的情况。
>
> 又比如走迷宫，在局部观测条件下，很有可能会遇到两个完全一样的观测，但却有着不同的最优策略。此时同样需要使用随机策略。





- 无法应对连续动作

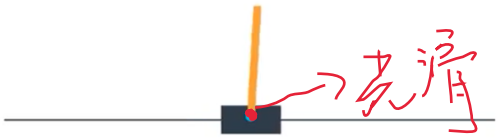
> 在很多问题中，智能体的动作在连续空间中变化。比如无人机飞行方向和动力大小的控制问题。
>
> 
>
> 
>
>
> $\theta \in (-\pi, \pi]$
>
> $F \in [0, \infty)$

可不可以直接优化智能体的策略呢？当然可以。

智能体的策略函数π就是从"状态"到"动作"的映射，即每给定一个状态s，策略函数都给出相应的动作$a = \pi(s)$。直接优化智能体的策略是一种更加直观自然的方式，称之为基于策略(policy-based)的方法。

1.2 离散动作和连续动作对应的策略形式

以Cart-Pole为例，小车和杆子的状态为：车的位置、速度、杆子的角度、杆子末端的速度。智能体的动作为：向左、向右。智能体的任务就是不断地根据当前地状态决定向左或者向右施加力，以保持杆子不会倒下。



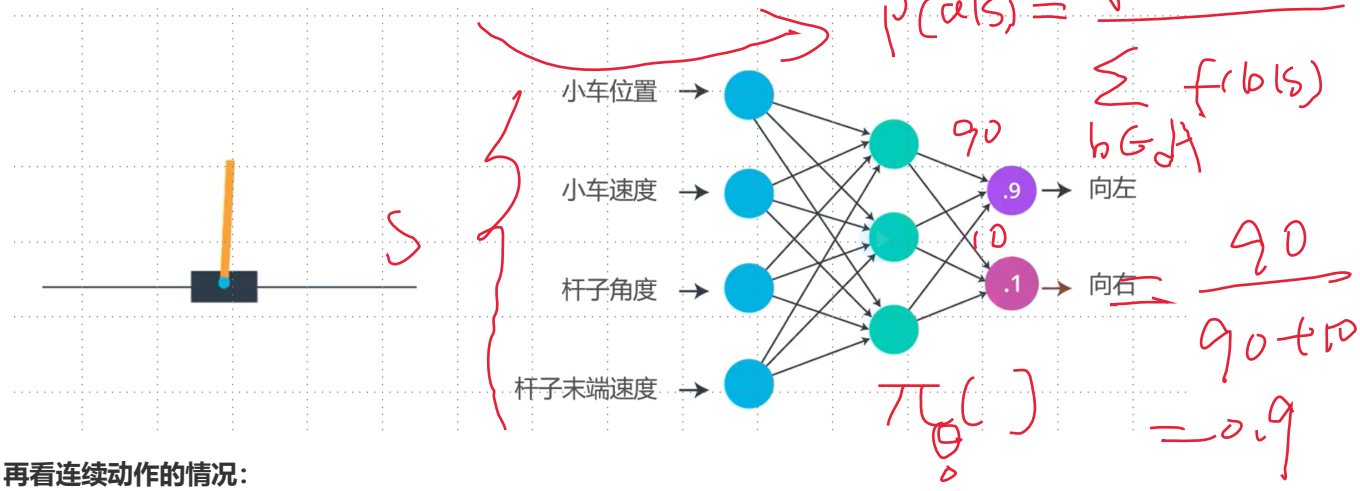
State

	Min	Max
Cart Position	-2.4	2.4
Cart Velocity	-Inf	Inf
Pole Angle	~ -41.8°	~ 41.8°
Pole Velocity At Tip	-Inf	Inf

首先看离散动作的情况：

如果智能体的动作是离散的，策略给出每个动作被选择的概率，即随机策略$\pi(a|s) = Pr(A = a|S = s)$

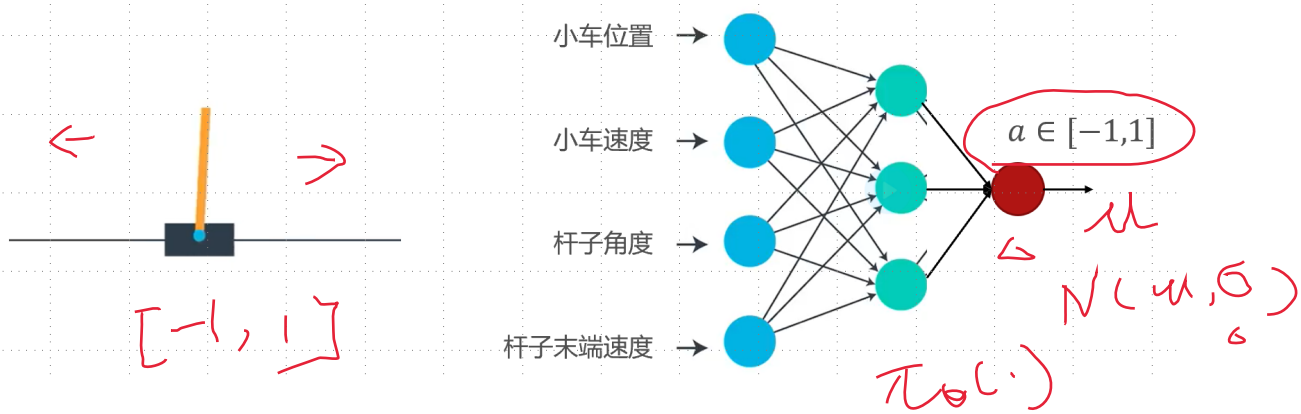
在上面的有图中，神经网络输出了两个动作的选择概率。为了使得神经网络的输出表示各个动作的概率，一般对神经网络的输出结果使用Softmax进行处理，使输出满足概率的特性。



再看连续动作的情况：

如果智能体的动作是连续的，策略需要给出一个数。这时神经网络的输出不在表示概率，而是具体的数值。举例来说，如果Cart-Pole问题中的动作为$[-1, 1]$的一个值，绝对值表示力的大小，负表示向左，正表示向右。如果想限制神经网络的输出永远是合法的，在神经网络的输出后面加上tanh这样的函数即可。当然，此时的神经网络最后一层只有一个神经元。

同时，为了在训练过程中增加对环境的探索，要对动作引入随机性。具体做的做法是，神经网络输出动作的均值μ，然后构造一个新的正态分布$N(\mu, \sigma)$，训练的时候每次都从该分布中采样一个动作。



1.3 策略的参数及其优化

智能体的策略可以用参数化的函数实现，比如神经网络。用θ表示策略的参数，则不同的参数唯一确定了智能体与环境交互的策略。为了在交互中获得更好的表现，就必须优化参数θ（为了方便表述，下面直接称策略为θ）。

首先，需要量化当前策略θ的表现。

考虑分幕型(episodic)强化学习问题，智能体与环境交互的一条轨迹记为

$$\tau = (s_0, a_0, s_1, a_1, \cdots, s_{T-1}, a_{T-1}, s_T)$$

这一幕的回报为

$$G(\tau) = r_1 + r_2 + \cdots + r_T$$

不同的轨迹对应着不同的回报，那么当前策略θ下的期望回报可以记为

$$J(\theta) = \int_\tau p(\tau) G(\tau) d\tau$$

其中$p(\tau)$表示轨迹τ出现的概率。回到强化学习的目标，最大化长期奖励和的期望：

$$\arg\max_\theta \mathbb{E}_\tau J(\theta)$$

2 REINFORCE算法

2.1 目标函数的梯度

目标函数有了，一个很自然的想法就是使用梯度下降法优化策略θ。因此首先要做的就是求出目标函数关于θ的梯度。直接求导：

$$\begin{aligned}
\nabla_\theta J(\theta) &= \nabla_\theta \int_\tau p(\tau) G(\tau) d\tau \\
&= \int_\tau \nabla_\theta p(\tau) G(\tau) d\tau \\
&= \int_\tau p(\tau) \nabla_\theta \log p(\tau) G(\tau) d\tau \\
&= \mathbb{E}_\tau \left[\nabla_\theta \log p(\tau) G(\tau) \right]
\end{aligned}$$

在上面的公式推导过程中使用了几个小技巧。

> - 第1行到第2行，求导和积分交换了顺序。
> - 第2行到第3行，只需要对$p(\tau)$求导，而不需要对$G(\tau)$求导。θ决定了智能体在每一步执行的动作，因而决定了整条轨迹τ出现的概率$p(\tau)$。但在动作给出后，状态的转移以及这一步所获得奖励都是由环境的特性决定的，因此$G(\tau)$不是θ的函数。对$p(\tau)$求导的时候，使用了对数求导的特点，即$\nabla p = p \nabla \log p$。

进一步考察$\nabla_\theta \log p(\tau)$，最关键的自然是$p(\tau)$，它表示整条轨迹出现的概率，和每一步的动作被选择的概率之间的关系是什么样的？因为每次做决策的时候都是独立的，因此

$$\begin{aligned}
p(\tau) &= p(s_0, a_0, \cdots, s_{T-1}, a_{T-1}, r_T, s_T) \\
&= p(s_0) \prod_{t=0}^{T-1} \pi_\theta(s_t, a_t) p(s_{t+1} | s_t, a_t)
\end{aligned}$$

进一步有

$$\begin{aligned}
\nabla_\theta \log p(\tau) &= \nabla_\theta \log p(s_0) \prod_{t=0}^{T-1} \pi_\theta(s_t, a_t) p(s_{t+1} | s_t, a_t) \\
&= \nabla_\theta \left[\log p(s_0) + \sum_{t=0}^{T-1} \log \pi_\theta(s_t, a_t) + \sum_{t=0}^{T-1} \log p(s_{t+1} | s_t, a_t) \right] \\
&= \sum_{t=0}^{T-1} \nabla_\theta \log \pi_\theta(s_t, a_t)
\end{aligned}$$

此时目标函数的梯度可以写成

$$\nabla_\theta J(\theta) = \mathbb{E}_\tau \left[\sum_{t=0}^{T-1} \nabla_\theta \log \pi_\theta(s_t, a_t) G(\tau) \right]$$

2.2 梯度的蒙特卡洛估计

经过上面的推导后，发现梯度的表达式中存在求期望的过程。将所有可能找出来然后求期望是不可能的，只能去估计期望值，而蒙特卡洛估计则是非常有效的一种估计思想。假设我们获得了N条智能体与环境交互的轨迹，并且每条轨迹出现的概率相等，则目标函数梯度的蒙特卡洛估计为

$$\nabla_\theta J(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \sum_{t=0}^{T-1} \nabla_\theta \log \pi_\theta(s_t^i, a_t^i) G(\tau^i)$$

得到梯度后，使用梯度上升算法优化参数θ

$$\theta \leftarrow \theta + \alpha \nabla_\theta J(\theta)$$

2.3 使用REINFORCE算法玩Cart-Pole

导入必要的python库，加载环境

```
import gym
gym.logger.set_level(40) # 减少警告输出
import numpy as np
from collections import deque
import matplotlib.pyplot as plt
%matplotlib inline

import torch
torch.manual_seed(500) # 随机种子
import torch.nn as nn
import torch.nn.functional as F
import torch.optim as optim
from torch.distributions import Categorical

env = gym.make('CartPole-v0')
env.seed(500)
print('观测空间:', env.observation_space)
print('动作空间:', env.action_space)

device = torch.device("cuda:0" if torch.cuda.is_available() else "cpu")
```

```
观测空间: Box([-4.8000002e+00 -3.4028235e+38 -4.1887903e-01 -3.4028235e+38],
[4.8000002e+00 3.4028235e+38 4.1887903e-01 3.4028235e+38], (4,), float32)
动作空间: Discrete(2)
```

定义策略神经网络

```
class Policy(nn.Module):
    def __init__(self, s_size=4, h_size=16, a_size=2):
        super(Policy, self).__init__()
        self.fc1 = nn.Linear(s_size, h_size)
        self.fc2 = nn.Linear(h_size, a_size)

    def forward(self, x):
        x = F.relu(self.fc1(x))
```

```
        x = self.fc2(x)
        return F.softmax(x, dim=1)

    def act(self, state):
        state = torch.from_numpy(state).float().unsqueeze(0).to(device)
        probs = self.forward(state).cpu()
        m = Categorical(probs)  # 这个m里面应该包含了概率以及概率的对数
        action = m.sample()
        return action.item(), m.log_prob(action)
```

使用REINFORCE算法训练策略网络

```
policy = Policy().to(device)
optimizer = optim.Adam(policy.parameters(), lr=1e-2)

def reinforce(n_episodes=1000, max_t=2000, gamma=1.0, print_every=100):
    scores_deque = deque(maxlen=100)
    scores = []
    for i_episode in range(1, n_episodes+1):
        saved_log_probs = []
        rewards = []
        #  generate a trajectory
        state = env.reset()
        for t in range(max_t):
            action, log_prob = policy.act(state)
            saved_log_probs.append(log_prob)
            state, reward, done, _ = env.step(action)
            rewards.append(reward)
            if done:
                break

        scores_deque.append(sum(rewards))
        scores.append(sum(rewards))

        discounts = [gamma**i for i in range(len(rewards))]
        G = sum([a*b for a,b in zip(discounts, rewards)])

        policy_loss = []
        for log_prob in saved_log_probs
            policy_loss.append(-log_prob * G) # 最大化目标，使用梯度下降，因此在目标前加负号

        policy_loss = torch.cat(policy_loss).sum() # 这个就是目标函数

        optimizer.zero_grad()
        policy_loss.backward()
        optimizer.step()

        if i_episode % print_every == 0:
            print('Episode {}\tAverage Score: {:.2f}'
                  .format(i_episode, np.mean(scores_deque)))
        if np.mean(scores_deque)>=195.0:
            print('Environment solved in {:d} episodes!\tAverage Score: {:.2f}'
                  .format(i_episode-100, np.mean(scores_deque)))
            break

```

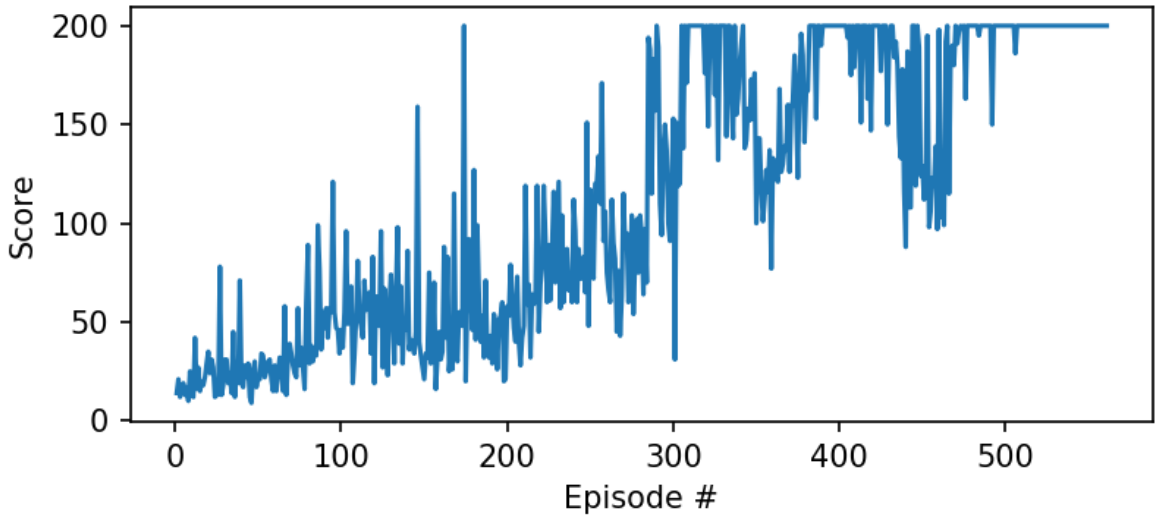
```
    return scores

scores = reinforce()
```

```
Episode 100 Average Score: 31.32
Episode 200 Average Score: 52.96
Episode 300 Average Score: 90.69
Episode 400 Average Score: 168.04
Episode 500 Average Score: 176.96
Environment solved in 461 episodes! Average Score: 195.63
```

画训练曲线

```
fig = plt.figure(figsize=(6,2.5),dpi=150)
ax = fig.add_subplot(111)
plt.plot(np.arange(1, len(scores)+1), scores)
plt.ylabel('Score')
plt.xlabel('Episode #')
plt.show()
```



可视化训练后的智能体体环境交互情况

```
env = gym.make('CartPole-v0')

state = env.reset()
for t in range(1000):
    action, _ = policy.act(state)
    env.render()
    state, reward, done, _ = env.step(action)
    if done:
        break

env.close()
```