



洛必達法則與反常積分

單元八

+ Outline

- 不定型的極限與洛必達法則
- 反常積分

+ 洛必達法則 **L'Hospital's Rule (8.1&8.2)**

- 假設 f 和 g 是可微的，且在包含 a 的開區間 I 中 $g'(x) \neq 0$ 。若：

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \quad \text{且} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$$

或

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty \quad \text{且} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$$

(稱為不定型 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$)

則

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

+ 例1 (不定型的極限)

若存在，求下列極限：

A. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1}$

B. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2}$

C. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$

D. $\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} (\sec x - \tan x)$

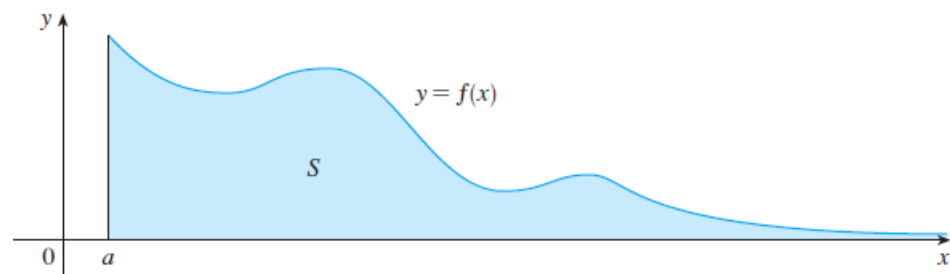
+ 反常積分

■ 直到目前為止所涉及的積分的條件為：

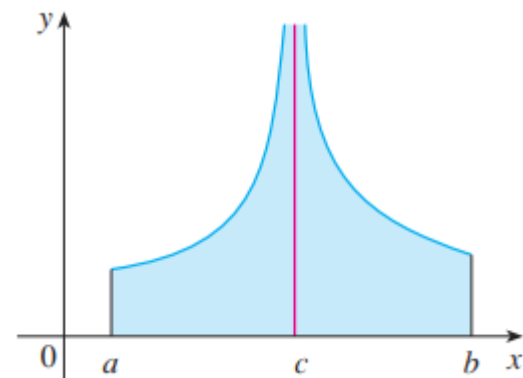
◆ 函數在閉區間 $[a, b]$ 上是連續的。

■ 反常積分(或瑕積分):

◆ 第一型: 無窮區間



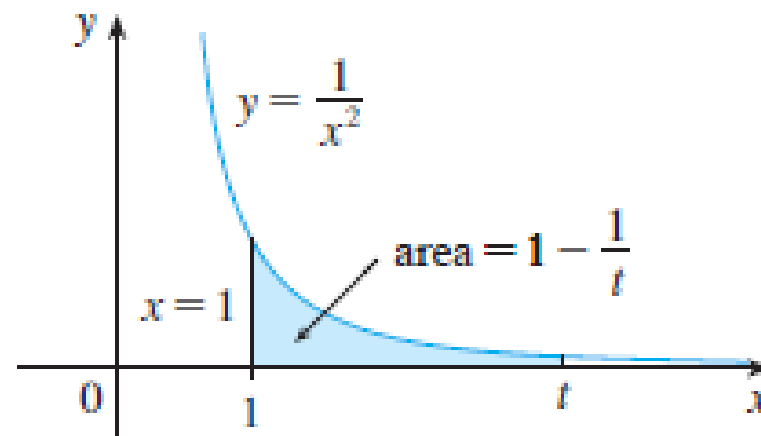
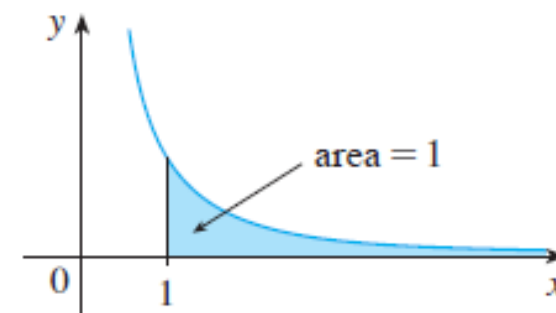
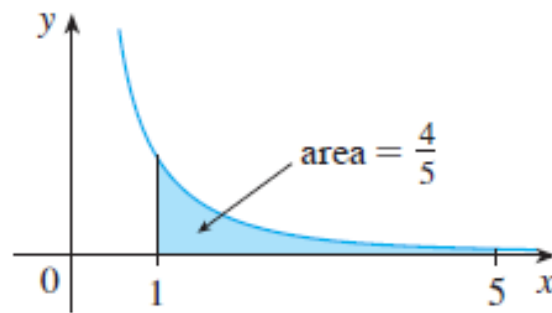
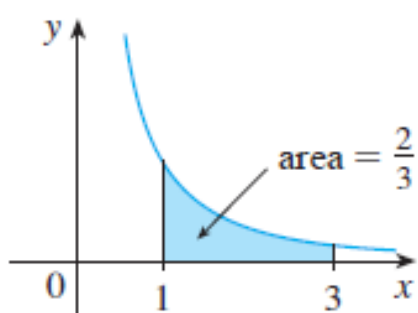
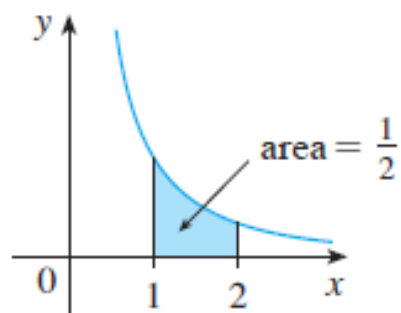
◆ 第二型: 在閉區間 $[a, b]$ 上無界。



+ 範例: 無窮區間

6

■ 考慮曲線 $y = 1/x^2$ 和 x 軸間於 $[1, +\infty)$ 的面積：



+ 第一型反常積分 (8.3)

a) 若對任意 $t \geq a$, $\int_a^t f(x)dx$ 都存在, 則

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x)dx$$

b) 若對任意 $t \leq b$, $\int_t^b f(x)dx$ 都存在, 則

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x)dx$$

c) 若 a) 和 b) 的極限都存在, 則定義

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^{\infty} f(x)dx$$

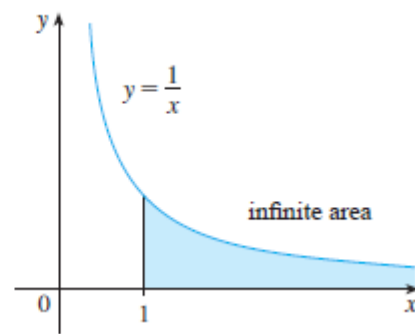
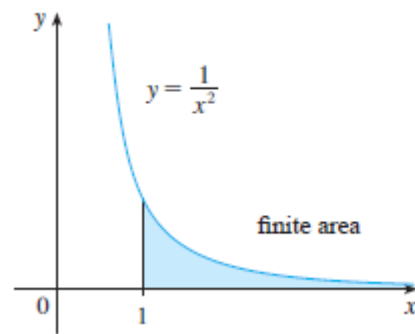
- 若對應極限存在, 則稱瑕積分**收斂** (convergent);
- 若對應極限不存在, 則稱瑕積分**發散** (divergent).

+ 例2

■ 判別下列積分是收斂的或是發散的？

A. $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$

B. $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$



+ $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$ 的收斂與發散

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \begin{cases} \infty, & p \leq 1 \\ \frac{1}{p-1}, & p > 1 \end{cases}$$

■ 即:

◆ $p \leq 1$ 時: $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$ 發散.

◆ $p > 1$ 時: $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$ 收斂.

+ 第二型反常積分(8.4)

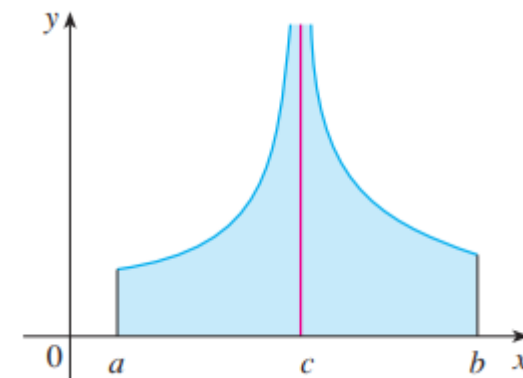
10

- 若 f 在 $[a, b]$ 上連續而在 $x = c$ 上不連續, 其中 $a < c < b$, 若 $\lim_{x \rightarrow c} |f(x)| = \infty$, 定義

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

其中:

$$\begin{aligned} \int_a^c f(x) dx &= \lim_{t \rightarrow c^-} \int_a^t f(x) dx \\ \int_c^b f(x) dx &= \lim_{t \rightarrow c^+} \int_t^b f(x) dx \end{aligned}$$



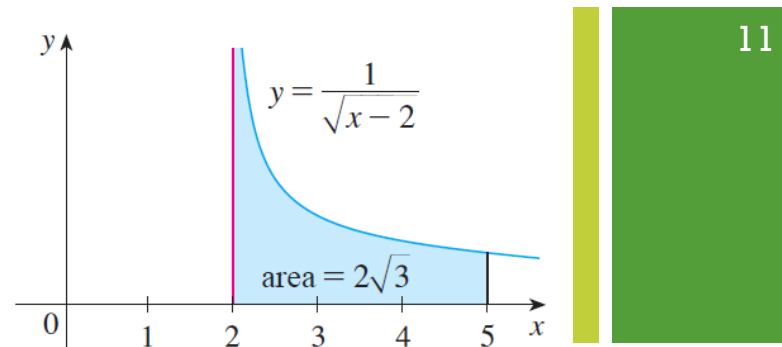
- ◆ 若 $\int_a^c f(x) dx$ 和 $\int_c^b f(x) dx$ 均收斂, 則 $\int_a^b f(x) dx$ 收斂, 否則 $\int_a^b f(x) dx$ 發散。

+ 例3

■ 求下列積分：

A. $\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}} dx$

B. $\int_0^3 \frac{1}{x-1} dx$



+ 例4

■ 求下列積分: (單元六例3B)

$$\int_0^1 \ln x \, dx$$

+ 教材對應閱讀章節及練習

■ 8.1-8.4

■ 對應習題: (可視個人情況定量)

◆ 8.1: 1-18

◆ 8.2: 1-10

◆ 8.3: 1-18

◆ 8.4: 1-18