高等数学

张爱林

深圳大学

December 22, 2021

第七章 微分方程

第四节 一阶线性微分方程

1. 一阶线性微分方程
    - 一阶齐次线性微分方程的解
    - 一阶非齐次线性微分方程的解

一阶微分方程的解

一阶微分方程的解（solution）：

满足一阶微分方程的函数。

一阶微分方程的解

一阶微分方程的解（solution）：

满足一阶微分方程的函数。

一阶微分方程的通解（general solution）：

通解代表的是解的集合（solution set）。

一阶微分方程的通解含有1个任意常数C。

一阶微分方程的解

一阶微分方程的解（solution）：

满足一阶微分方程的函数。

一阶微分方程的通解（general solution）：

通解代表的是解的集合（solution set）。

一阶微分方程的通解含有1个任意常数C。

一阶微分方程的特解（particular solution）：

不含任意常数的解，常数由初值决定。

一阶线性微分方程分类

一阶线性微分方程：

（first order linear differential equation）

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = Q(x)$$

一阶线性微分方程分类

一阶线性微分方程：

（first order linear differential equation）

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = Q(x)$$

齐次的：

$Q(x) \equiv 0$

一阶线性微分方程分类

一阶线性微分方程：

（first order linear differential equation）

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = Q(x)$$

齐次的：

$Q(x) \equiv 0$

非齐次的：

$Q(x) \neq 0$

一阶齐次线性微分方程的解

方程类型：一阶齐次线性微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = 0$$

一阶齐次线性微分方程的解

方程类型：一阶齐次线性微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = 0$$

分离变量：$\dfrac{\mathrm{d}y}{y} = -P(x)\mathrm{d}x$

一阶齐次线性微分方程的解

方程类型：一阶齐次线性微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = 0$$

分离变量：$\dfrac{\mathrm{d}y}{y} = -P(x)\mathrm{d}x$

积分：$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int -P(x)\mathrm{d}x$

一阶齐次线性微分方程的解

方程类型：一阶齐次线性微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = 0$$

分离变量： $$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -P(x)\mathrm{d}x$$

积分： $$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int -P(x)\mathrm{d}x$$

$$\ln|y| = -\int P(x)\mathrm{d}x + C_1$$

一阶齐次线性微分方程的解

方程类型：一阶齐次线性微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = 0$$

分离变量： $\frac{\mathrm{d}y}{y} = -P(x)\mathrm{d}x$

积分： $\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int -P(x)\mathrm{d}x$

$$\ln|y| = -\int P(x)\mathrm{d}x + C_1$$

通解： $y = Ce^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$

一阶齐次线性微分方程的解

方程类型：一阶齐次线性微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = 0$$

分离变量：$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -P(x)\mathrm{d}x$

积分：$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int -P(x)\mathrm{d}x$

$$\ln|y| = -\int P(x)\mathrm{d}x + C_1$$

通解：$y = Ce^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$

思考.一阶齐次线性微分方程的特解？

一阶非齐次线性微分方程的解

方程类型：一阶非齐次线性微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = Q(x)$$

一阶非齐次线性微分方程的解

方程类型：一阶非齐次线性微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = Q(x)$$

分离变量： $$\frac{\mathrm{d}y}{y} = [\frac{Q(x)}{y} - P(x)]\mathrm{d}x$$

一阶非齐次线性微分方程的解

方程类型：一阶非齐次线性微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = Q(x)$$

分离变量： $\dfrac{\mathrm{d}y}{y} = [\dfrac{Q(x)}{y} - P(x)]\mathrm{d}x$

积分： $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int \frac{Q(x)}{y}\mathrm{d}x - \int P(x)\mathrm{d}x$

一阶非齐次线性微分方程的解

方程类型：一阶非齐次线性微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$$

分离变量：$\dfrac{\mathrm{d}y}{y}=[\dfrac{Q(x)}{y}-P(x)]\mathrm{d}x$

积分：$\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}y}{y}=\int\frac{Q(x)}{y}\mathrm{d}x-\int P(x)\mathrm{d}x$

$$\ln\mid y\mid=v(x)-\int P(x)\mathrm{d}x$$

一阶非齐次线性微分方程的解

方程类型：一阶非齐次线性微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$$

分离变量： $\frac{\mathrm{d}y}{y}=[\frac{Q(x)}{y}-P(x)]\mathrm{d}x$

积分： $\int\frac{\mathrm{d}y}{y}=\int\frac{Q(x)}{y}\mathrm{d}x-\int P(x)\mathrm{d}x$

$$\ln|y|=v(x)-\int P(x)\mathrm{d}x$$

通解： $y=e^{v(x)-\int P(x)\mathrm{d}x}$

一阶非齐次线性微分方程

方程类型：一阶非齐次线性微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = Q(x)$$

通解：$y = e^{v(x) - \int P(x)\mathrm{d}x} = e^{v(x)} e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$

一阶非齐次线性微分方程

方程类型：一阶非齐次线性微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = Q(x)$$

通解：$y = e^{v(x) - \int P(x)\mathrm{d}x} = e^{v(x)} e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$

常数变易：

令$y = e^{v(x)} e^{-\int P(x)\mathrm{d}x} = u(x) e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$

一阶非齐次线性微分方程

方程类型：一阶非齐次线性微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = Q(x)$$

通解：$y = e^{v(x)-\int P(x)\mathrm{d}x} = e^{v(x)}e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$

常数变易：

令$y = e^{v(x)}e^{-\int P(x)\mathrm{d}x} = u(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u'(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x} - u(x)P(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$$

一阶非齐次线性微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = Q(x)$$

$$y = u(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u'(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x} - u(x)P(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$$

一阶非齐次线性微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = Q(x)$$

$$y = u(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u'(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x} - u(x)P(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$$

将$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, y$代入原方程：

$$u'(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x} - u(x)P(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x} + P(x)u(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x} = Q(x)$$

一阶非齐次线性微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = Q(x)$$

$$y = u(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u'(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x} - u(x)P(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$$

将$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, y$代入原方程：

$$u'(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x} - u(x)P(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x} + P(x)u(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x} = Q(x)$$

即：$u'(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x} = Q(x)$

一阶非齐次线性微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$$

$$y=u(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u'(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}-u(x)P(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$$

将$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, y$代入原方程：

$$u'(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}-u(x)P(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}+P(x)u(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}=Q(x)$$

即： $u'(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}=Q(x)$

$$u(x)=\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C$$

一阶非齐次线性微分方程

$$y = u(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$$

$$u(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C$$

一阶非齐次线性微分方程

$$y = u(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$$

$$u(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C$$

将$u(x)$代入y即得到通解的完整形式：

$$y = (\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$$

一阶非齐次线性微分方程

方程类型：一阶非齐次线性微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = Q(x)$$

通解：$y = Ce^{-\int P(x)\mathrm{d}x} + e^{-\int P(x)\mathrm{d}x} \int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$

一阶非齐次线性微分方程

方程类型：一阶非齐次线性微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = Q(x)$$

通解：$y = Ce^{-\int P(x)\mathrm{d}x} + e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$

当$C = 0$时，即得**非齐次线性微分方程特解：**

$$e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$$

一阶非齐次线性微分方程

方程类型：一阶非齐次线性微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = Q(x)$$

通解：$y = Ce^{-\int P(x)\mathrm{d}x} + e^{-\int P(x)\mathrm{d}x} \int Q(x) e^{\int P(x)\mathrm{d}x} \mathrm{d}x$

当$C = 0$时，即得**非齐次线性微分方程特解：**

$$e^{-\int P(x)\mathrm{d}x} \int Q(x) e^{\int P(x)\mathrm{d}x} \mathrm{d}x$$

非齐次线性微分方程通解

=对应齐次线性微分方程通解+非齐次线性微分方程特解

例1. 解微分方程$(x+1)y'-2y=(x+1)^{\frac{7}{2}}$。

例1. 解微分方程$(x+1)y'-2y=(x+1)^{\frac{7}{2}}$。

解1.先整理：$y'-\frac{2}{x+1}y=(x+1)^{\frac{5}{2}}$

例1. 解微分方程$(x+1)y' - 2y = (x+1)^{\frac{7}{2}}$。

解1.先整理：$y' - \frac{2}{x+1}y = (x+1)^{\frac{5}{2}}$

通解： $y = (\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$

例1. 解微分方程$(x+1)y'-2y=(x+1)^{\frac{7}{2}}$。

解1.先整理：$y'-\frac{2}{x+1}y=(x+1)^{\frac{5}{2}}$

$$\textbf{通解：}\ y=\left(\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$$

$$y=\left(\int (x+1)^{\frac{5}{2}}e^{\int -\frac{2}{x+1}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)e^{-\int -\frac{2}{x+1}\mathrm{d}x}$$

例1. 解微分方程$(x+1)y'-2y=(x+1)^{\frac{7}{2}}$。

解1.先整理：$y'-\frac{2}{x+1}y=(x+1)^{\frac{5}{2}}$

通解： $y=\left(\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$

$$y=\left(\int(x+1)^{\frac{5}{2}}e^{\int -\frac{2}{x+1}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)e^{-\int -\frac{2}{x+1}\mathrm{d}x}$$

$$=\left(\int(x+1)^{\frac{5}{2}}e^{-\int \frac{2}{x+1}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)e^{\int \frac{2}{x+1}\mathrm{d}x}$$

例1. 解微分方程$(x+1)y'-2y=(x+1)^{\frac{7}{2}}$。

解1.先整理：$y'-\frac{2}{x+1}y=(x+1)^{\frac{5}{2}}$

$$\textbf{通解：}\ y=\left(\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$$

$$y=\left(\int (x+1)^{\frac{5}{2}}e^{\int -\frac{2}{x+1}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)e^{-\int -\frac{2}{x+1}\mathrm{d}x}$$

$$=\left(\int (x+1)^{\frac{5}{2}}e^{-\int \frac{2}{x+1}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)e^{\int \frac{2}{x+1}\mathrm{d}x}$$
$$=\left(\int (x+1)^{\frac{5}{2}}e^{-2\ln|x+1|}\mathrm{d}x+C\right)e^{2\ln|x+1|}$$

例1. 解微分方程$(x+1)y'-2y=(x+1)^{\frac{7}{2}}$。

解1.先整理：$y'-\frac{2}{x+1}y=(x+1)^{\frac{5}{2}}$

通解： $y=\left(\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$

$$y=\left(\int(x+1)^{\frac{5}{2}}e^{\int-\frac{2}{x+1}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)e^{-\int-\frac{2}{x+1}\mathrm{d}x}$$

$$=(\int(x+1)^{\frac{5}{2}}e^{-\int\frac{2}{x+1}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C)e^{\int\frac{2}{x+1}\mathrm{d}x}$$
$$=(\int(x+1)^{\frac{5}{2}}e^{-2\ln|x+1|}\mathrm{d}x+C)e^{2\ln|x+1|}$$
$$=(\int(x+1)^{\frac{5}{2}}\frac{1}{(x+1)^2}\mathrm{d}x+C)(x+1)^2$$

例1. 解微分方程$(x+1)y'-2y=(x+1)^{\frac{7}{2}}$。

解1.先整理：$y'-\frac{2}{x+1}y=(x+1)^{\frac{5}{2}}$

通解： $y=(\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$

$$y=(\int(x+1)^{\frac{5}{2}}e^{\int-\frac{2}{x+1}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C)e^{-\int-\frac{2}{x+1}\mathrm{d}x}$$

$$=(\int(x+1)^{\frac{5}{2}}e^{-\int\frac{2}{x+1}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C)e^{\int\frac{2}{x+1}\mathrm{d}x}$$
$$=(\int(x+1)^{\frac{5}{2}}e^{-2\ln|x+1|}\mathrm{d}x+C)e^{2\ln|x+1|}$$
$$=(\int(x+1)^{\frac{5}{2}}\frac{1}{(x+1)^2}\mathrm{d}x+C)(x+1)^2$$
$$=(\int(x+1)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x+C)(x+1)^2$$

例1. 解微分方程$(x+1)y'-2y=(x+1)^{\frac{7}{2}}$。

解1.先整理：$y'-\frac{2}{x+1}y=(x+1)^{\frac{5}{2}}$

通解： $y=(\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$

$$y=(\int (x+1)^{\frac{5}{2}}e^{\int -\frac{2}{x+1}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C)e^{-\int -\frac{2}{x+1}\mathrm{d}x}$$

$$=(\int (x+1)^{\frac{5}{2}}e^{-\int \frac{2}{x+1}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C)e^{\int \frac{2}{x+1}\mathrm{d}x}$$
$$=(\int (x+1)^{\frac{5}{2}}e^{-2\ln|x+1|}\mathrm{d}x+C)e^{2\ln|x+1|}$$
$$=(\int (x+1)^{\frac{5}{2}}\frac{1}{(x+1)^2}\mathrm{d}x+C)(x+1)^2$$
$$=(\int (x+1)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x+C)(x+1)^2$$
$$=(\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+C)(x+1)^2$$

例1. 解微分方程$(x+1)y'-2y=(x+1)^{\frac{7}{2}}$。

例1. 解微分方程$(x+1)y'-2y=(x+1)^{\frac{7}{2}}$。

解2.先整理：$y'-\frac{2}{x+1}y=(x+1)^{\frac{5}{2}}$

例1. 解微分方程$(x+1)y' - 2y = (x+1)^{\frac{7}{2}}$。

解2.先整理：$y' - \frac{2}{x+1}y = (x+1)^{\frac{5}{2}}$

求对应齐次方程的通解：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \frac{2}{x+1}y = 0$$

例1. 解微分方程$(x+1)y'-2y=(x+1)^{\frac{7}{2}}$。

解2. 先整理：$y'-\frac{2}{x+1}y=(x+1)^{\frac{5}{2}}$

求对应齐次方程的通解：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\frac{2}{x+1}y=0$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=\frac{2\mathrm{d}x}{x+1}$$

例1. 解微分方程$(x+1)y'-2y=(x+1)^{\frac{7}{2}}$。

解2.先整理：$y'-\frac{2}{x+1}y=(x+1)^{\frac{5}{2}}$

求对应齐次方程的通解：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\frac{2}{x+1}y=0$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=\frac{2\mathrm{d}x}{x+1}$$

$$\ln|y|=2\ln|x+1|+C_1$$

例1. 解微分方程$(x+1)y'-2y=(x+1)^{\frac{7}{2}}$。

解2.先整理：$y'-\frac{2}{x+1}y=(x+1)^{\frac{5}{2}}$

求对应齐次方程的通解：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\frac{2}{x+1}y=0$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=\frac{2\mathrm{d}x}{x+1}$$

$$\ln|y|=2\ln|x+1|+C_1$$

$$y=C(x+1)^2$$

例1. 解微分方程$(x+1)y'-2y=(x+1)^{\frac{7}{2}}$。

解2续.$y=C(x+1)^2$

常数变易：把C换成u

$$y=u(x+1)^2$$

例1. 解微分方程$(x+1)y'-2y=(x+1)^{\frac{7}{2}}$。

解2续.$y=C(x+1)^2$

常数变易：把C换成u

$$y=u(x+1)^2$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u'(x+1)^2+2u(x+1)$$

例1. 解微分方程$(x+1)y'-2y=(x+1)^{\frac{7}{2}}$。

解2续.$y=C(x+1)^2$

常数变易：把C换成u

$$y=u(x+1)^2$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u'(x+1)^2+2u(x+1)$$

代入原微分方程$y'-\frac{2}{x+1}y=(x+1)^{\frac{5}{2}}$**：**

$$u'=(x+1)^{\frac{1}{2}}$$

例1. 解微分方程$(x+1)y'-2y=(x+1)^{\frac{7}{2}}$。

解2续. $y=C(x+1)^2$

常数变易：把C换成u

$$y=u(x+1)^2$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u'(x+1)^2+2u(x+1)$$

代入原微分方程$y'-\frac{2}{x+1}y=(x+1)^{\frac{5}{2}}$：

$$u'=(x+1)^{\frac{1}{2}}$$

$$u=\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+C$$

例1. 解微分方程$(x+1)y' - 2y = (x+1)^{\frac{7}{2}}$。

解2续.

$$y = u(x+1)^2$$

$$u = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + C$$

例1. 解微分方程$(x+1)y'-2y=(x+1)^{\frac{7}{2}}$。

解2续.

$$y=u(x+1)^2$$

$$u=\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+C$$

$$y=(\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+C)(x+1)^2$$

例2. 求微分方程$xy' + y = \sin x$满足$y(\pi) = 1$的特解。

例2. 求微分方程$xy' + y = \sin x$满足$y(\pi) = 1$的特解。

解.先整理：$y' + \frac{1}{x}y = \frac{\sin x}{x}$

例2. 求微分方程$xy' + y = \sin x$满足$y(\pi) = 1$的特解。

解.先整理：$y' + \frac{1}{x}y = \frac{\sin x}{x}$

通解： $y = (\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$

例2. 求微分方程$xy' + y = \sin x$满足$y(\pi) = 1$的特解。

解.先整理：$y' + \frac{1}{x}y = \frac{\sin x}{x}$

通解： $y = \left(\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$

$$y = \left(\int \frac{\sin x}{x} e^{\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right)e^{-\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x}$$

例2. 求微分方程$xy'+y=\sin x$满足$y(\pi)=1$的特解。

解.先整理：$y'+\frac{1}{x}y=\frac{\sin x}{x}$

通解： $$y=\left(\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$$

$$y=\left(\int \frac{\sin x}{x}e^{\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)e^{-\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x}$$

$=(\int \frac{\sin x}{x}e^{\ln x}\mathrm{d}x+C)e^{-\ln x \mathrm{d}x}$

例2. 求微分方程$xy' + y = \sin x$满足$y(\pi) = 1$的特解。

解.先整理：$y' + \frac{1}{x}y = \frac{\sin x}{x}$

$$\text{通解：}\ y = \left(\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$$

$$y = \left(\int \frac{\sin x}{x}e^{\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right)e^{-\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x}$$

$$= \left(\int \frac{\sin x}{x}e^{\ln x}\mathrm{d}x + C\right)e^{-\ln x\mathrm{d}x}$$
$$= \left(\int \frac{\sin x}{x}x\mathrm{d}x + C\right)e^{\ln \frac{1}{x}}$$

例2. 求微分方程$xy' + y = \sin x$满足$y(\pi) = 1$的特解。

解.先整理：$y' + \frac{1}{x}y = \frac{\sin x}{x}$

$$\text{通解：}\ y = \left(\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$$

$$y = \left(\int \frac{\sin x}{x}e^{\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right)e^{-\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x}$$

$$= \left(\int \frac{\sin x}{x}e^{\ln x}\mathrm{d}x + C\right)e^{-\ln x \mathrm{d}x}$$
$$= \left(\int \frac{\sin x}{x}x\mathrm{d}x + C\right)e^{\ln \frac{1}{x}}$$
$$= \left(\int \sin x\mathrm{d}x + C\right)\frac{1}{x}$$

例2. 求微分方程$xy'+y=\sin x$满足$y(\pi)=1$的特解。

解.先整理：$y'+\frac{1}{x}y=\frac{\sin x}{x}$

$$\text{通解：}\ y=\left(\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$$

$$y=\left(\int\frac{\sin x}{x}e^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)e^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}$$

$$=\left(\int\frac{\sin x}{x}e^{\ln x}\mathrm{d}x+C\right)e^{-\ln x\mathrm{d}x}$$
$$=\left(\int\frac{\sin x}{x}x\mathrm{d}x+C\right)e^{\ln\frac{1}{x}}$$
$$=\left(\int\sin x\mathrm{d}x+C\right)\frac{1}{x}$$
$$=(-\cos x+C)\frac{1}{x}$$

例2. 求微分方程$xy' + y = \sin x$满足$y(\pi) = 1$的特解。

解续.

$$y = (-\cos x + C)\frac{1}{x}$$

例2. 求微分方程$xy' + y = \sin x$满足$y(\pi) = 1$的特解。

解续.

$$y = (-\cos x + C)\frac{1}{x}$$

代入初值条件$x = \pi, y = 1$:

$$C = \pi - 1$$

例2. 求微分方程$xy' + y = \sin x$满足$y(\pi) = 1$的特解。

解续.

$$y = (-\cos x + C)\frac{1}{x}$$

代入初值条件$x = \pi, y = 1$:

$$C = \pi - 1$$

故所求特解为

$$y = (-\cos x + \pi - 1)\frac{1}{x}$$

注.

1)为何解$e^{\int P(x)\mathrm{d}x}$时，却不加常数c?

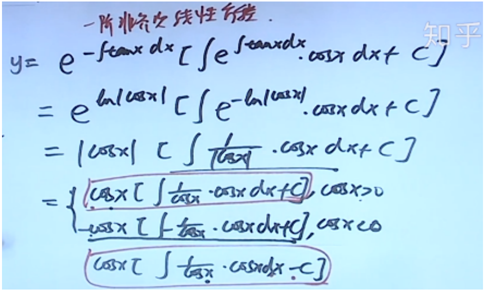
整个推导过程中，$e^{\int P(x)\mathrm{d}x}$指的都是一个具体的函数。故而没有常数。

注.

1)为何解$e^{\int P(x)\mathrm{d}x}$时，却不加常数c?

整个推导过程中，$e^{\int P(x)\mathrm{d}x}$指的都是一个具体的函数。故而没有常数。

2)为何解$e^{\int P(x)\mathrm{d}x}$时，却不加绝对值符号?



教材P317**例2.**

教材P318**例3.**

作业

习题7-4:

1. （5） （6） （8）
2. （1） （5）