多重積分

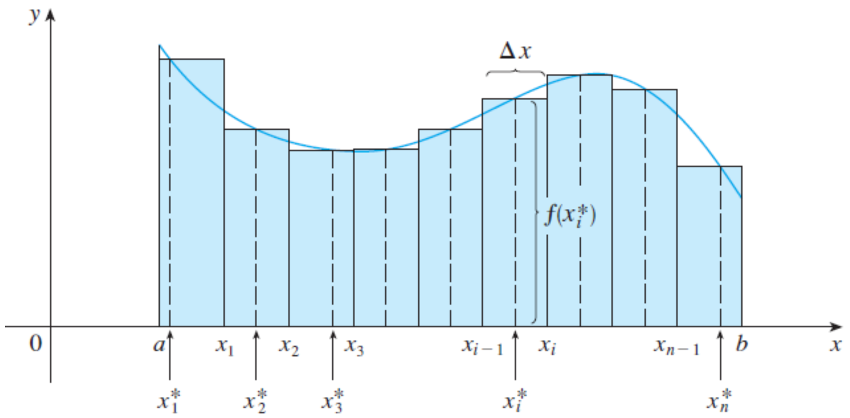
單元十一

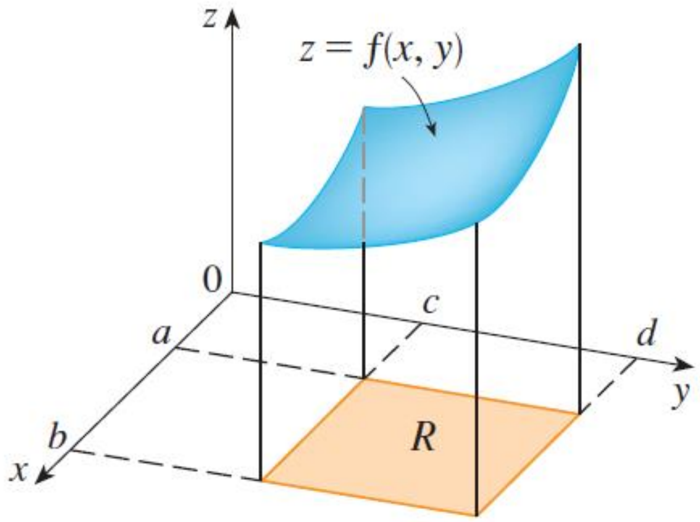
Outline

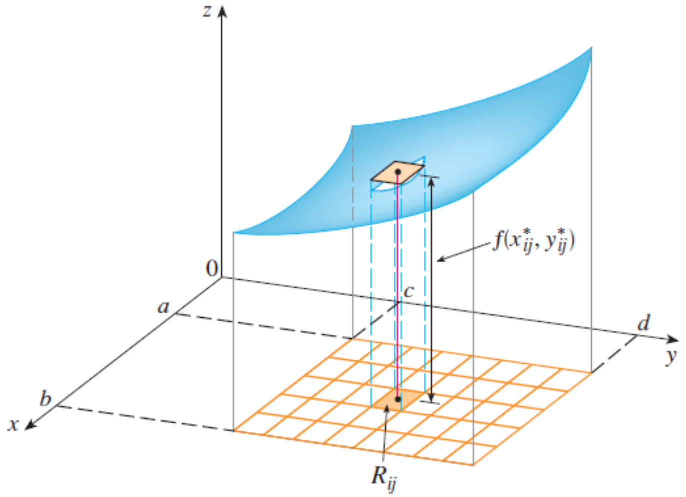
- 二重積分
  - 投影為矩形區域
  - 投影為非矩形區域

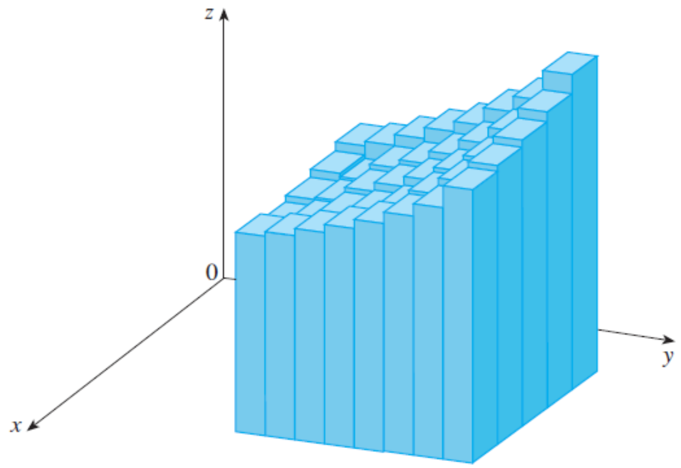
+ 體積與二重積分 (Volumes and Double Integrals)

- 回憶前面定積分的定義:





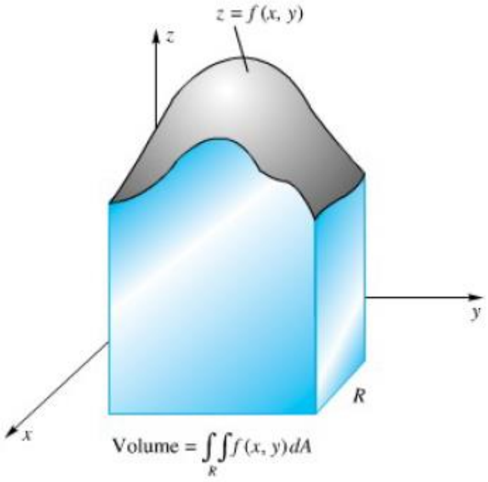




二重積分

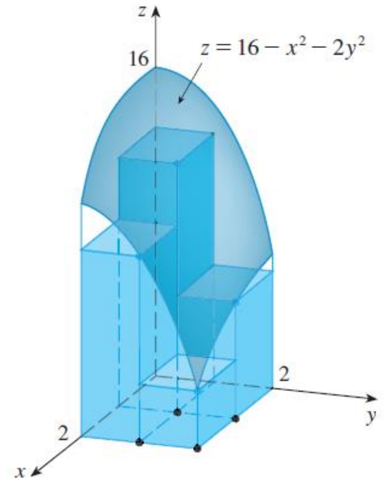
- 若 $z = f(x, y)$ 在一個封閉的矩形區域 R 上有界且連續，則 f 在 R 上可積, 即f 在 R 上的二重積分(**double integral**)為:

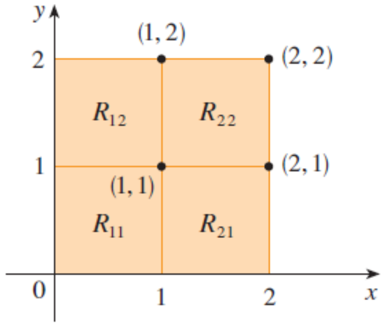
$$V = \iint_R f(x,y)dA = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}, y_{ij})\Delta A$$

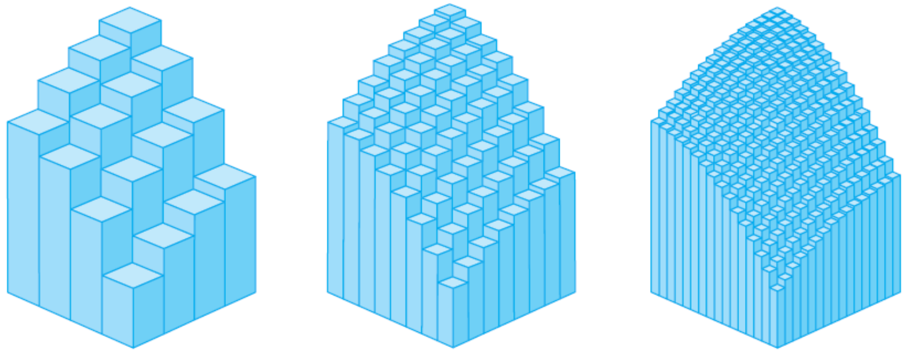


例1

- 估計在正方形 $R = [0,2] \times [0,2]$上被橢圓拋物面 $z = 16 - x^2 - 2y^2$ 所覆蓋的實體體積。







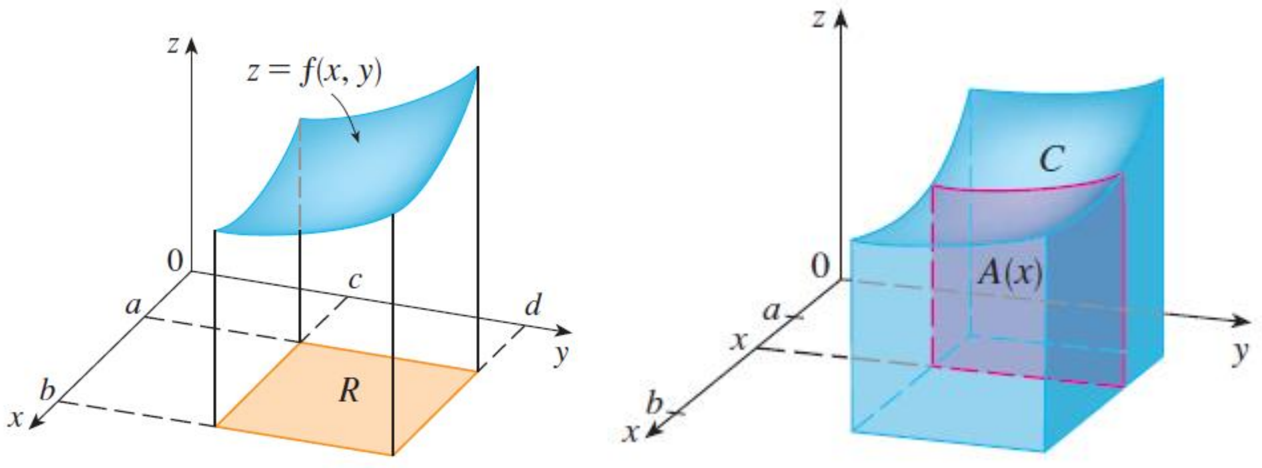
(a) $m = n = 4$, $V \approx 41.5$ (b) $m = n = 8$, $V \approx 44.875$ (c) $m = n = 16$, $V \approx 46.46875$

+ 二重積分的性質

- $\iint_R kf(x,y)dA = k\iint_R f(x,y)dA$
- $\iint_R [f(x,y)+g(x,y)]dA = \iint_R f(x,y)dA + \iint_R g(x,y)dA$

+ 逐次積分 (Iterated Integral)

- 已知 f 為定義在矩形區域 $R=[a,b]\times[c,d]$的可積函數，則有 $A(x)=\int_c^d f(x,y)dy$
  令 $V(x)=\int_a^b A(x)dx=\int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)dy\right]dx$
  - 先對變量 y 從 c 積分到 d，然後再對變量 x 從 a 積分到 b。



例2

計算:

A. $\int_0^3 \int_1^2 x^2 y \, dy \, dx$

B. $\int_1^2 \int_0^3 x^2 y \, dx \, dy$

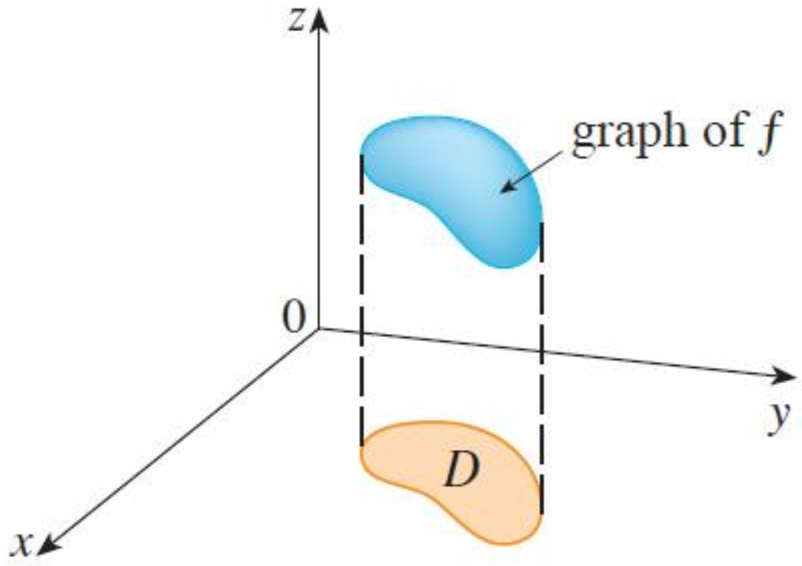
C. $\int_1^2 \int_0^\pi y \sin(xy) \, dy \, dx$

D. $\int_0^3 \int_{-1}^2 \int_0^1 xyz^2 \, dx \, dy \, dz$

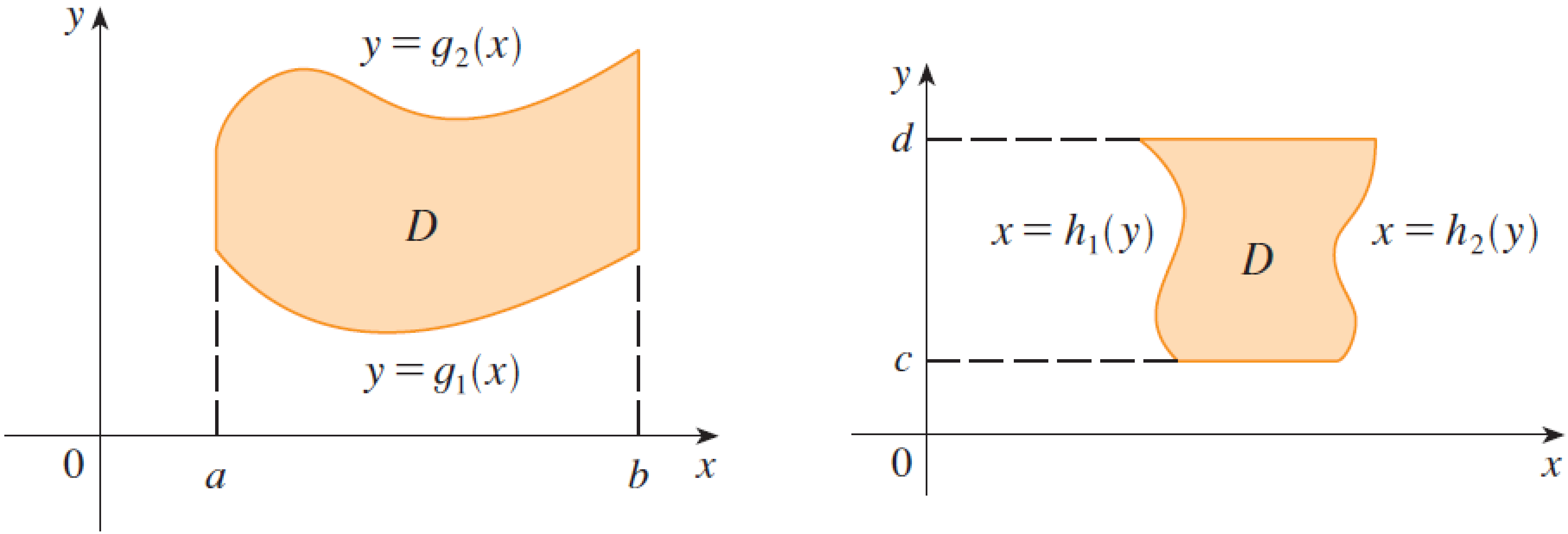
+ 非矩形區域上的二重積分 (13.3)

- 已知 f 為定義在區域 D 的可積函數，則 f 在區域 D 之二重積分(**double integral of** f **over** D)為:

$$V(x) = \iint_D f(x,y)\,dA$$

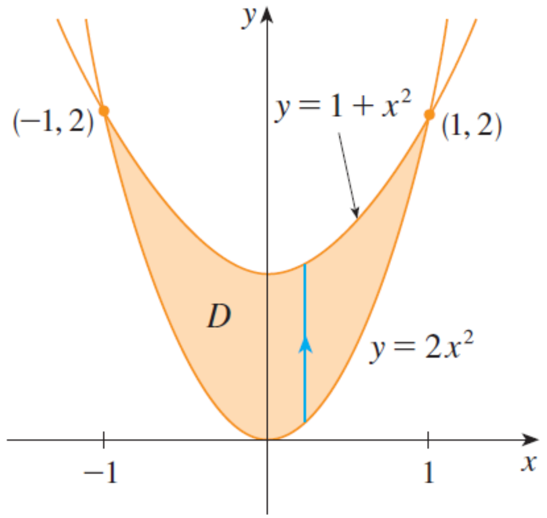


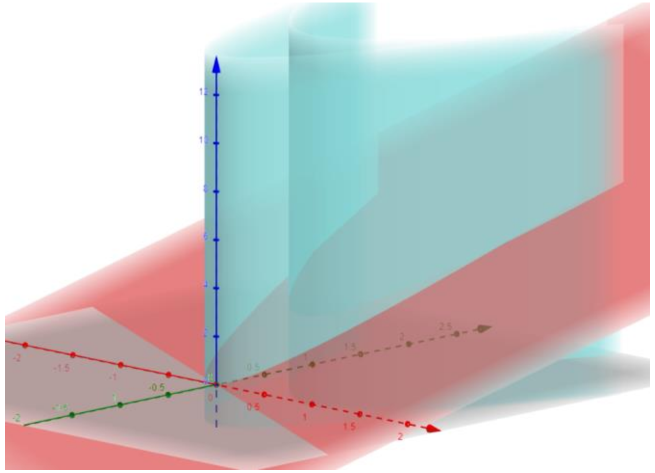
平面區域 D 的常見類型



例3

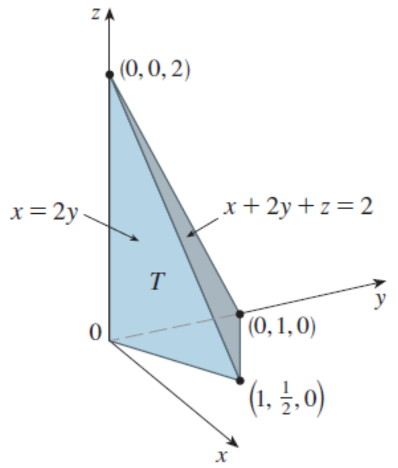
- 若 D 為 xy 平面上由拋物線 $y = 1 + x^2$ 和 $y = 2x^2$ 所圍成的區域，試求$\iint_D (x + 2y)dA$。

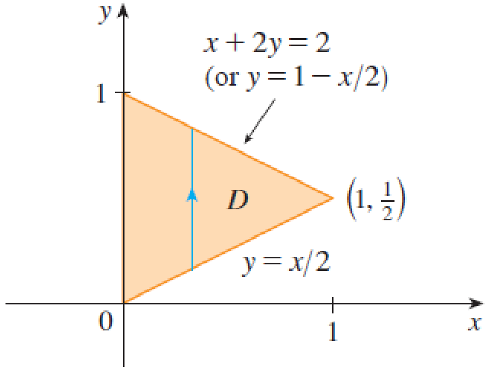




例4

- 試求邊界別為平面 $x + 2y + z = 2$、$x = 2y$、$x = 0$ 及 $z = 0$ 之四面體體積。





例5

- 求下列積分的值:

A. $\int_0^4 \int_0^{\sqrt{y}} xy^2 \, dx \, dy$

B. $\int_0^1 \int_{x^2}^{x} (1 + 2x) \, dy \, dx$

C. $\int_0^1 \int_0^{s^2} \cos(s^3) \, dt \, ds$

+ 教材對應閱讀章節及練習

- 13.1-13.3(~例4)
- 對應習題: (可視個人情況定量)
  - 13.2: 1-24
  - 13.3: 1-14