



導數的應用

單元三

+ Outline

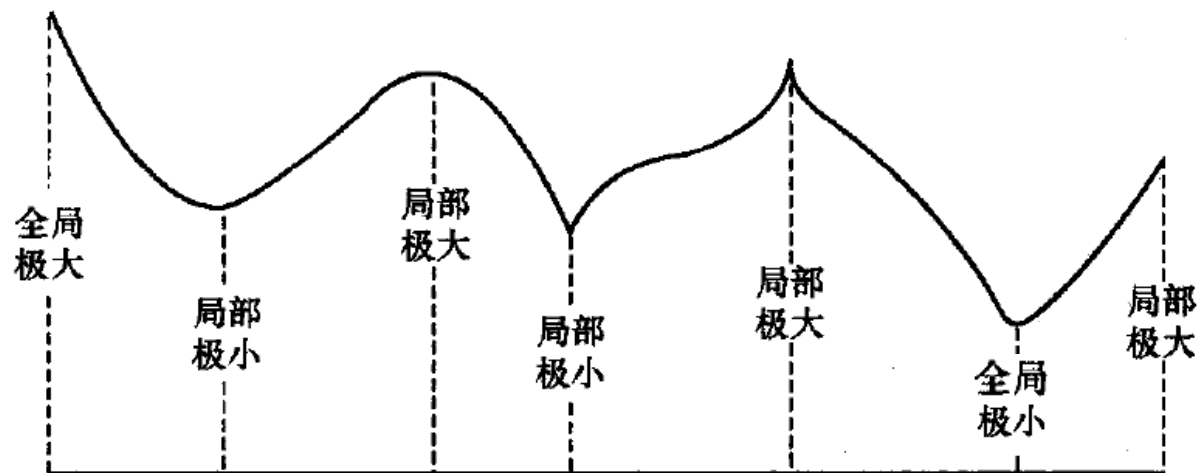
- 最值及極值
- 函數的單調性和凹凸性
- 最優化問題
- 函數的描繪
- 微分中值定理
- 不定積分

+ 最值及極值 (3.1&3.3)

3

設在函數 f 的定義域 S 中存在一點 c ，稱 $f(c)$ 為 f 的：

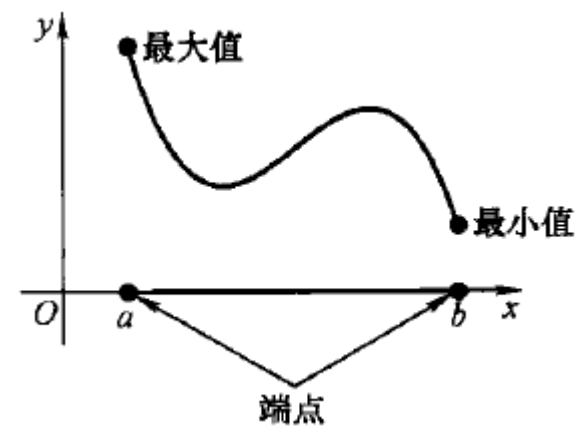
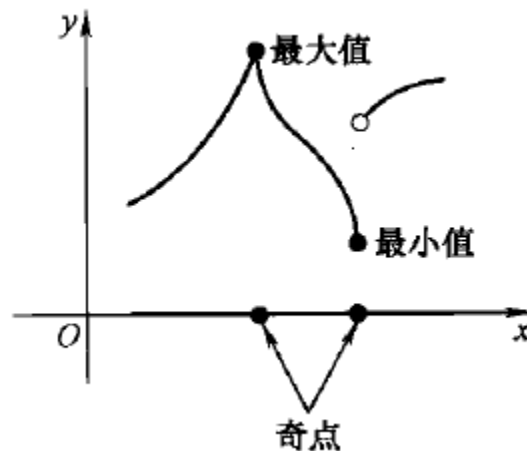
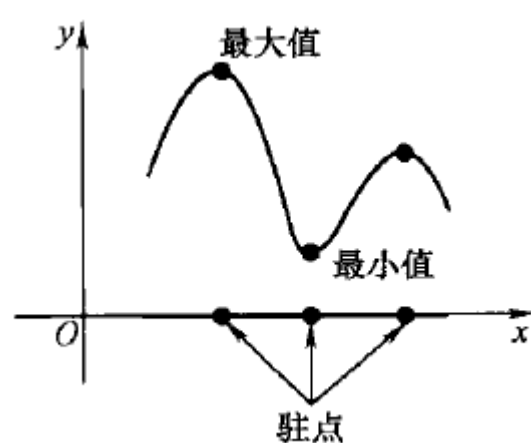
- 最大值 (global max) 若對於所有在定義域中的 x 滿足 $f(c) \geq f(x)$ ；
- 最小值 (global min) 若對於所有在定義域中的 x 滿足 $f(c) \leq f(x)$ ；
- 極大值 (local max) 若對於在 c 附近的 x 滿足 $f(c) \geq f(x)$ ；
- 極小值 (local min) 若對於在 c 附近的 x 滿足 $f(c) \leq f(x)$ 。



+ 臨界點 (Critical Point)(3.1定理B)

■ 函數在區間 I 上的點 c 稱為臨界點若 c 是：

- ◆ f 的一個駐點： $f'(c) = 0$ ；
- ◆ f 的一個奇點： $f'(c)$ 不存在；
- ◆ I 的一個端點。

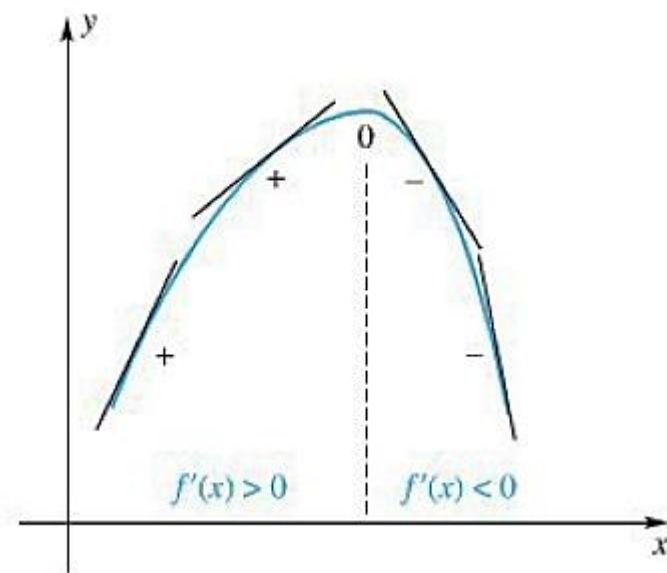


+ 單調性 (3.2定理A)

5

f 是定義在區間 I 上並在 I 內每一點都可導的連續函數。

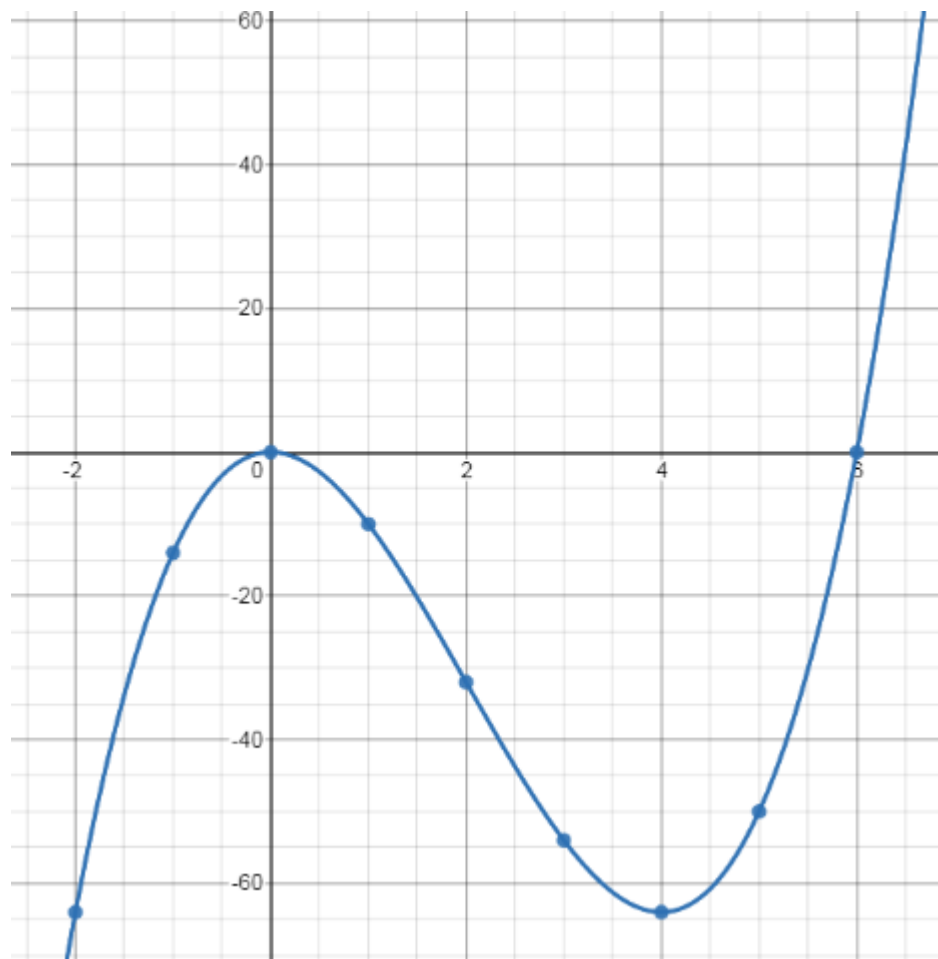
- 若在 I 上的所有 x 都有 $f'(x) > 0$, 則 f 在 I 上遞增 ;
- 若在 I 上的所有 x 都有 $f'(x) < 0$, 則 f 在 I 上遞減。



+ 範例: 單調性和凹凸性

■ $f(x) = 2x^3 - 12x^2$

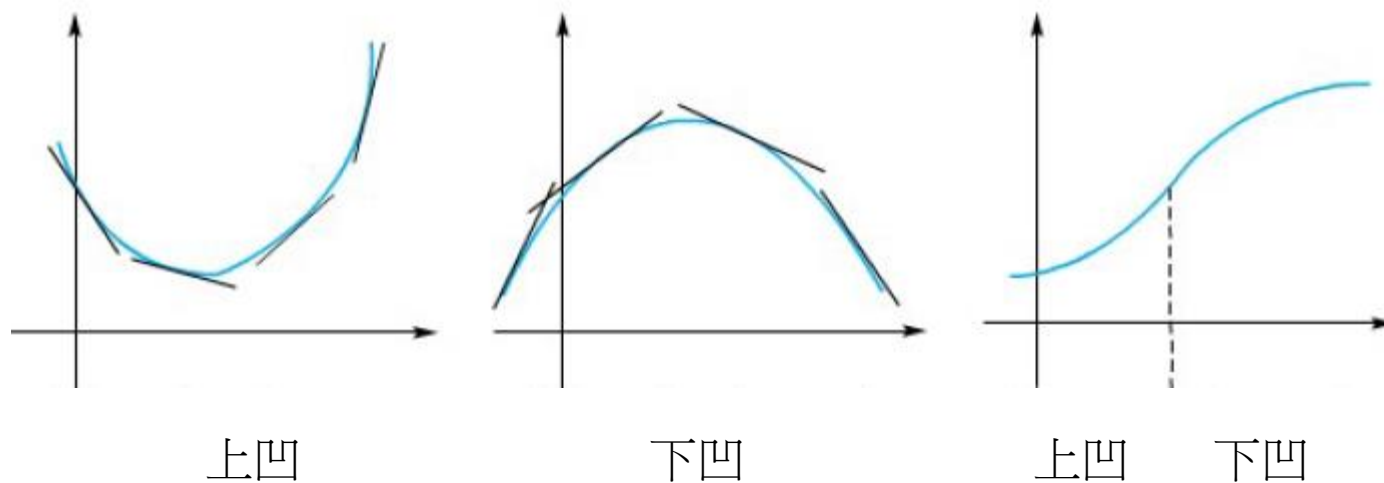
x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-2	-64	72	-48
-1	-14	30	-36
0	0	0	-24
1	-10	-18	-12
2	-32	-24	0
3	-54	-18	12
4	-64	0	24
5	-50	30	36
6	0	72	48




+ 凹凸性 (3.2定理B)

- 若在某區間中 $f''(x) > 0$ ，則在此區間中 f 是上凹的。
- 若在某區間中 $f''(x) < 0$ ，則在此區間中 f 是下凹的。

若函數於 $x = c$ 處由上凹變下凹或由下凹變上凹，則稱點 $(c, f(c))$ 為拐點。

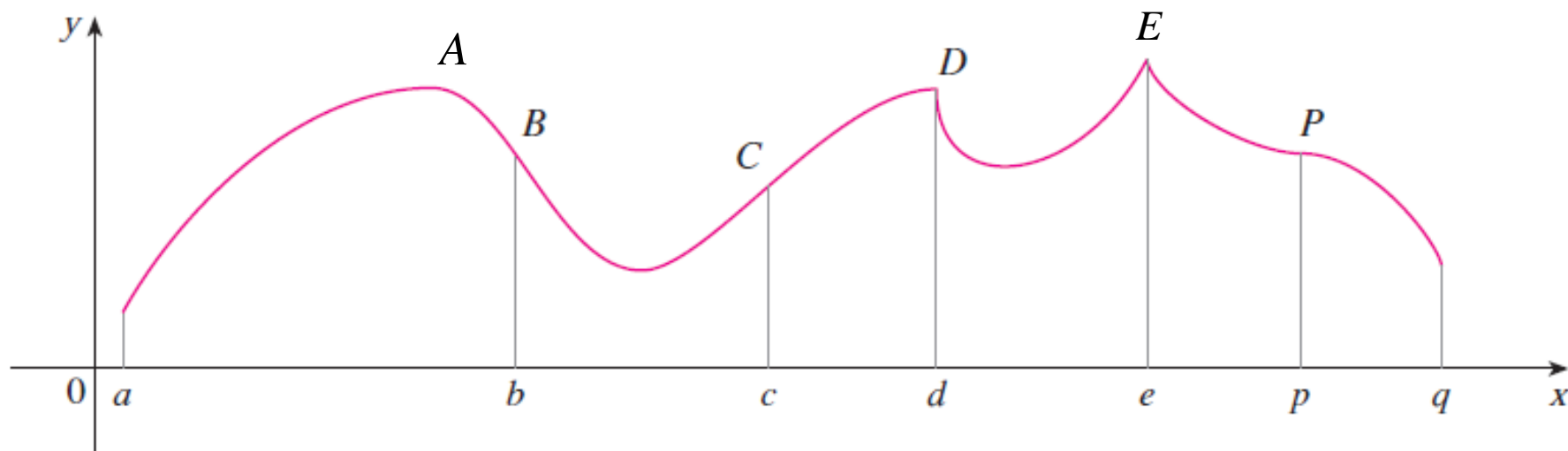


+ 總結

$f'(x)$ 的符號	單調性	$f''(x)$ 的符號	凹凸性	圖象形狀
+	增	+	上凹	
+	增	-	下凹	
-	減	+	上凹	
-	減	-	下凹	

+ 例1

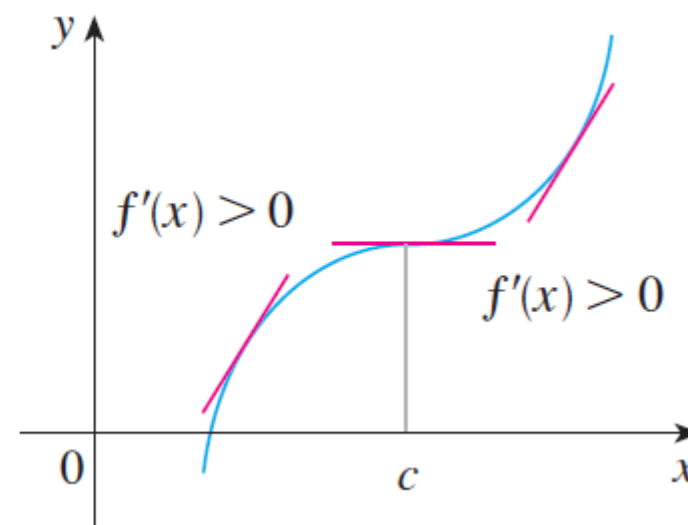
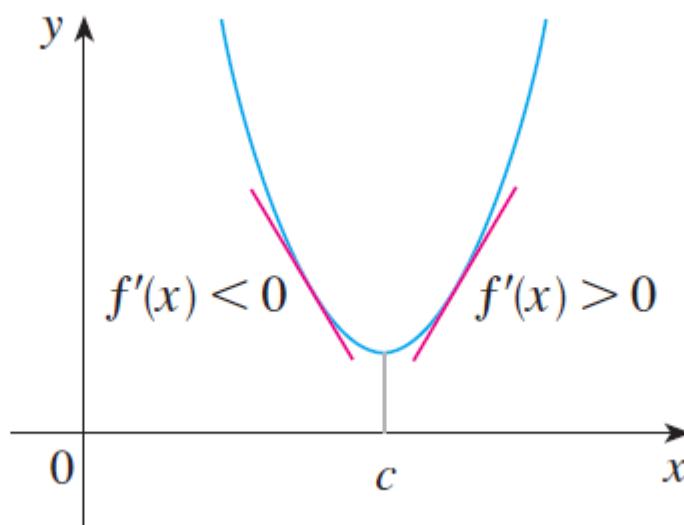
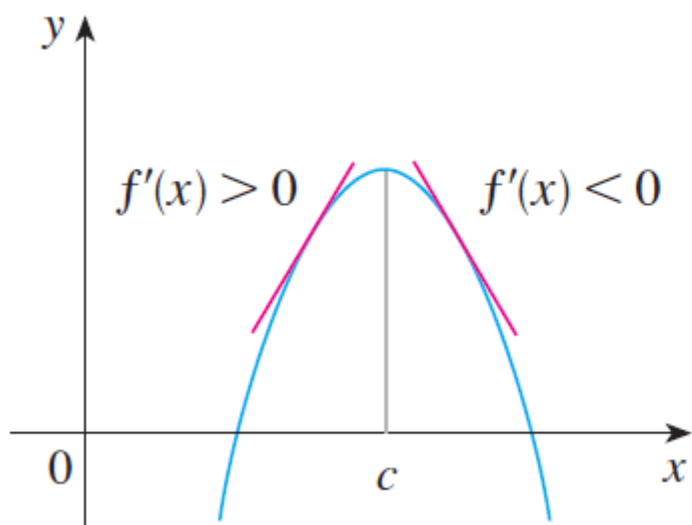
- 判斷以下函數凹凸的區間及其拐點。



+ 一階導數法則(3.3定理A)

假設連續函數 f 在 $x = c$ 有臨界點，亦即 $f'(c) = 0$ ：

- a) 若 f' 在該處符號由“+”變“-”，則 $f(c)$ 為局部極大值；
- b) 若 f' 在該處符號由“-”變“+”，則 $f(c)$ 為局部極小值；
- c) 若 f' 在該處符號未改變符號，則 $f(c)$ 不是局部極值。



+ 例2

- 找出函數 $f(x)$ 在以下區間的最大值和最小值：

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1 \quad x \in \left[-\frac{1}{2}, 4\right]$$

+ 二階導數法則(3.3定理B)

假設連續函數 f 在 $x = c$ 有 $f'(c) = 0$:

- a) 若 $f''(c) < 0$, 則 $f(c)$ 為局部極大值 ;
- b) 若 $f''(c) > 0$, 則 $f(c)$ 為局部極小值 ;
- c) 若 $f''(c) = 0$, 則沒有定論。

+ 例3: 最優化問題

- 一個農夫想要用總長為**1200**公尺的籬笆沿着一直線的河岸圍出一塊矩形區域，而且靠河的那邊不需要籬笆。問如何才能圍出最大面積？

+ 例4: 作圖

■ 對於函數：(1) $f(x) = x^4 - 4x^3$ ，求以下各項並作圖：

- A. 定義域
- B. 對稱性
- C. 截距
- D. 漸近線
- E. 單調區間及極值點
- F. 凹凸性和拐點

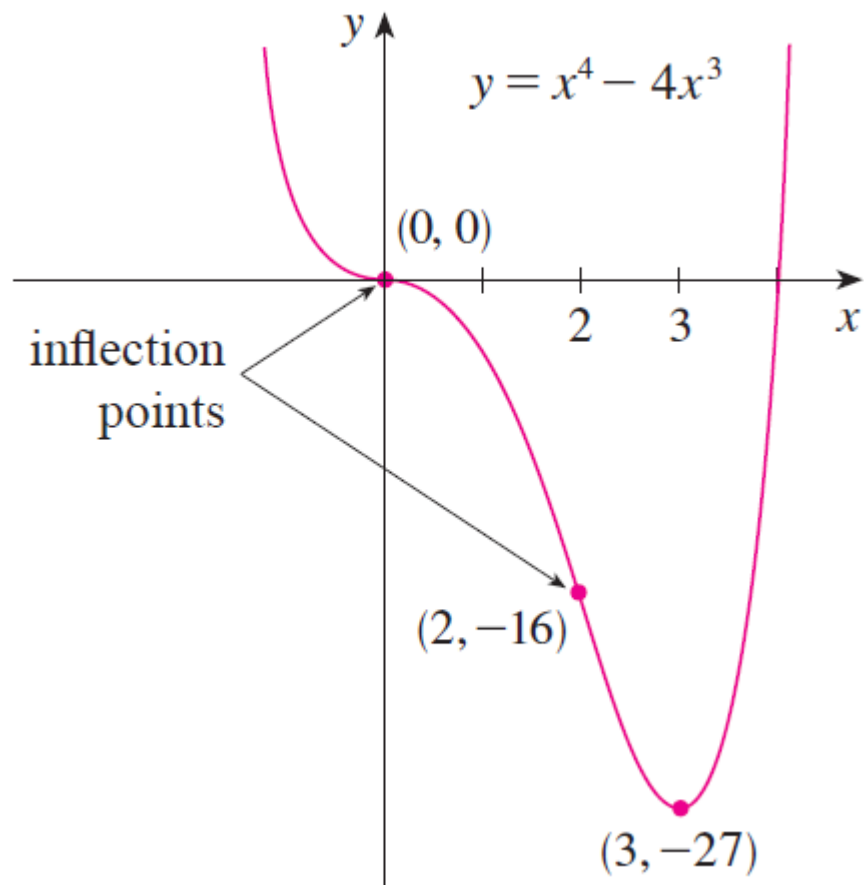
+ 例4: 作圖 (續)

■ 對於函數：(2) $g(x) = \frac{2x^2}{x^2-1}$ ，求以下各項並作圖：

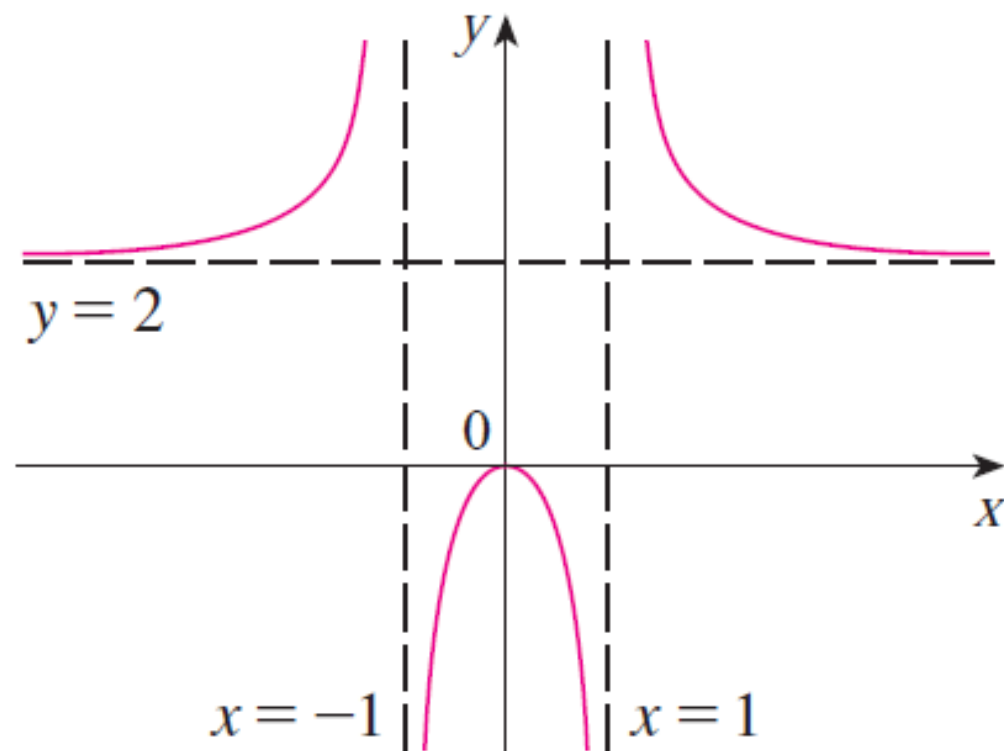
- A. 定義域
- B. 對稱性
- C. 截距
- D. 漸近線
- E. 單調區間及極值點
- F. 凹凸性和拐點

+ 例4 圖象

■ (1)



(2)



+ 微分中值定理 (3.6)

■ 若函數 f 滿足下列條件:

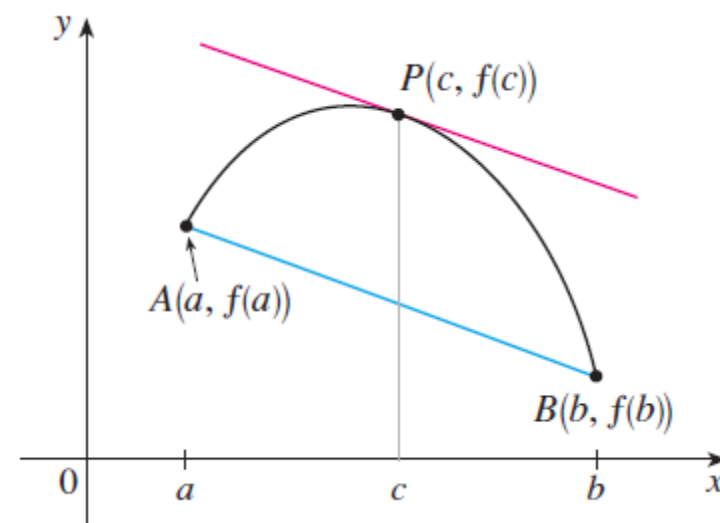
- ◆ f 在閉區間 $[a, b]$ 連續
- ◆ f 在開區間 (a, b) 可微, 則:

在開區間 (a, b) 上存在點 c 使

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

或寫作:

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$



+ 例5

- 在某城市的高速公路的限速為 **70**公里/小時。上周一，**Peter** 下午 **2:00** 途經該市 **A** 收費站，並在下午 **2:30** 經過該市 **B** 收費站。已知兩個收費站之間相距 **42** 公里，且中間並未設置測速器。但在幾天後 **Peter** 收到了一張超速罰單，請問罰單是否合理？

+ 不定積分 (Indefinite Integral)

- 若在區間 I 的所有 x 滿足 $F'(x) = f(x)$ ，則稱 F 為 f 在 I 的不定積分。
- 若 F 為 f 在區間 I 上的不定積分，則其通式為：





$$F(x) + C$$

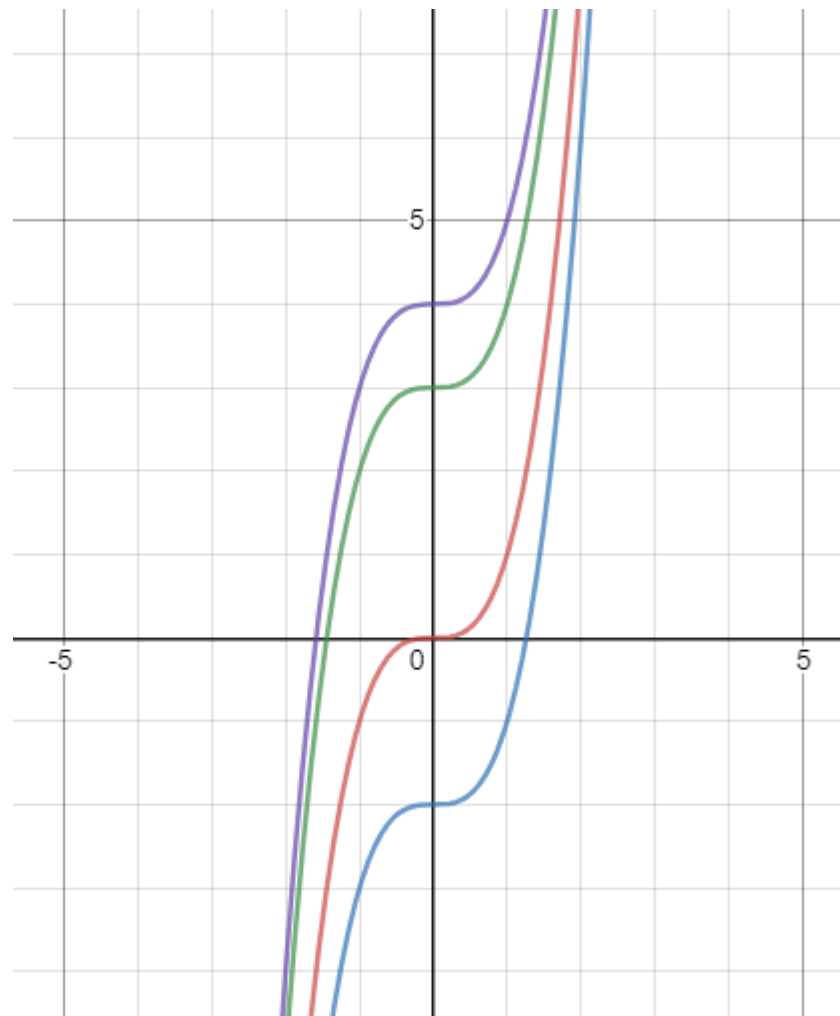
其中 C 為任意常數

+ $F(x) + C$

■ $f(x) = 3x^2$

■ 滿足 $F'(x) = f(x)$ 的例子:

2		$F_1(x) = x^3$
3		$F_2(x) = x^3 - 2$
4		$F_3(x) = x^3 + 3$
5		$F_4(x) = x^3 + 4$



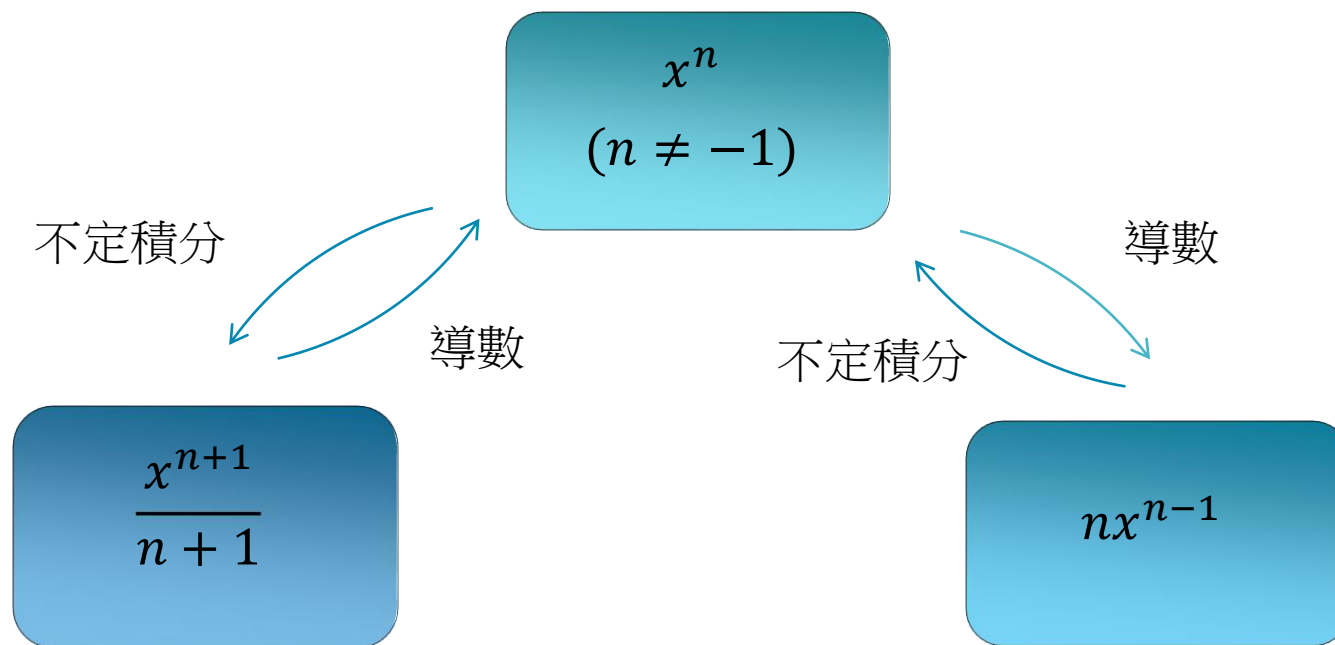
+ 積分的記號

■ 不定積分 $\int f(x)dx$ 中：

- ◆ \int – 積分號
- ◆ $f(x)$ – 被積函數
- ◆ dx – 積分的自變數為 x

+ 導數 vs. 不定積分

- 我們接觸過的導數公式亦可應用於不定積分中，例如：



+ 例6

■ 求下列函數的不定積分：

A. $f(x) = 2$

B. $f(x) = \sin x$

C. $f(x) = x^n, n \geq 0$

D. $f(x) = 4 \sin x + \frac{2x^5 - \sqrt{x}}{x}$

+ 例7

A. 若 $f'(x) = x\sqrt{x}$ 且 $f(1) = 2$ ，求 f 。

B. 若 $f''(x) = 12x^2 + 6x - 4$, $f(0) = 4$ 和 $f(1) = 1$ ，求 f 。

+ 教材對應閱讀章節及練習

- 第 3 章 3.1-3.6, 3.8(~例4)
- 對應習題: (可視個人情況定量)
 - ◆ 3.1: 1-26
 - ◆ 3.2: 1-18
 - ◆ 3.3: 1-18
 - ◆ 3.4: 1-16
 - ◆ 3.5: 1-16
 - ◆ 3.6: 1-20
 - ◆ 3.8: 1-26