多元函數的微分

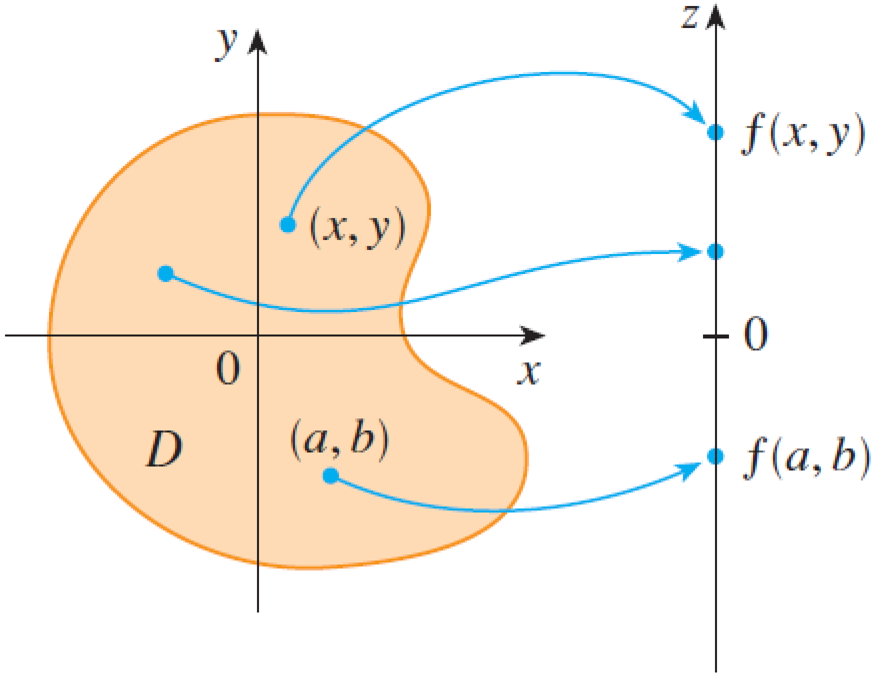
單元十

Outline

- 多元函數
- 偏導數
- 鏈式法則
- 最大值最小值
- 拉格朗日乘數法

雙變量函數 (Functions of Two Variables)

- 一個雙變量函數 f 是對集合 D 中的每個數 (x, y) 指定一個實數 z，記作 $z = f(x, y)$。其中集合 D 稱為函數 f 的定義域，f 的值域則為所有$f(x, y)$ 的集合。
  - 自變量: x, y
  - 因變量: z



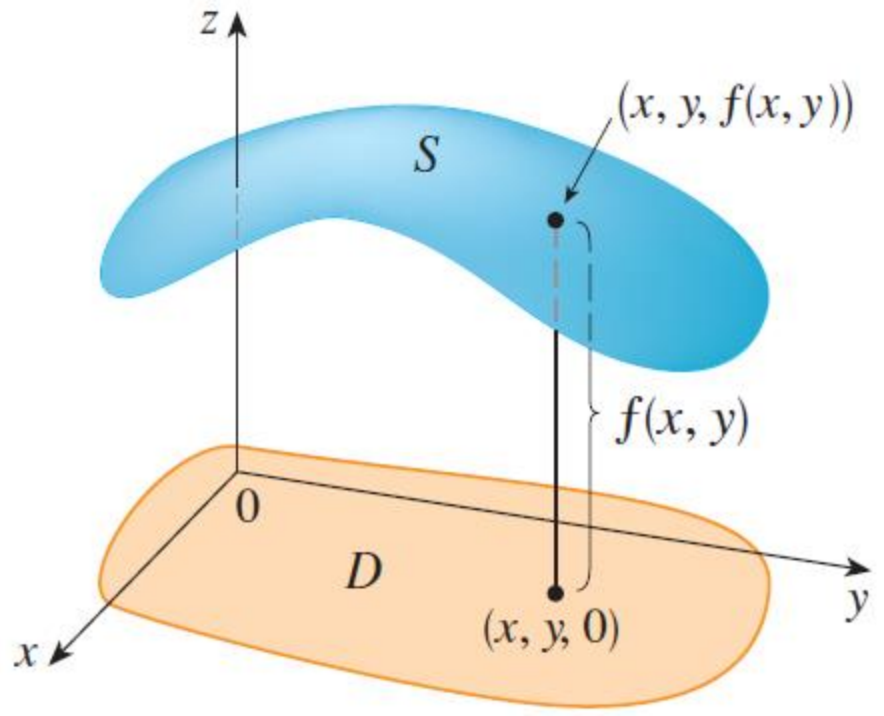
例1

- 求以下函數的定義域及 $f(3,2)$:

$$f(x,y)=\frac{\sqrt{x+y+1}}{x-1}$$

+ 雙變量函數的圖象

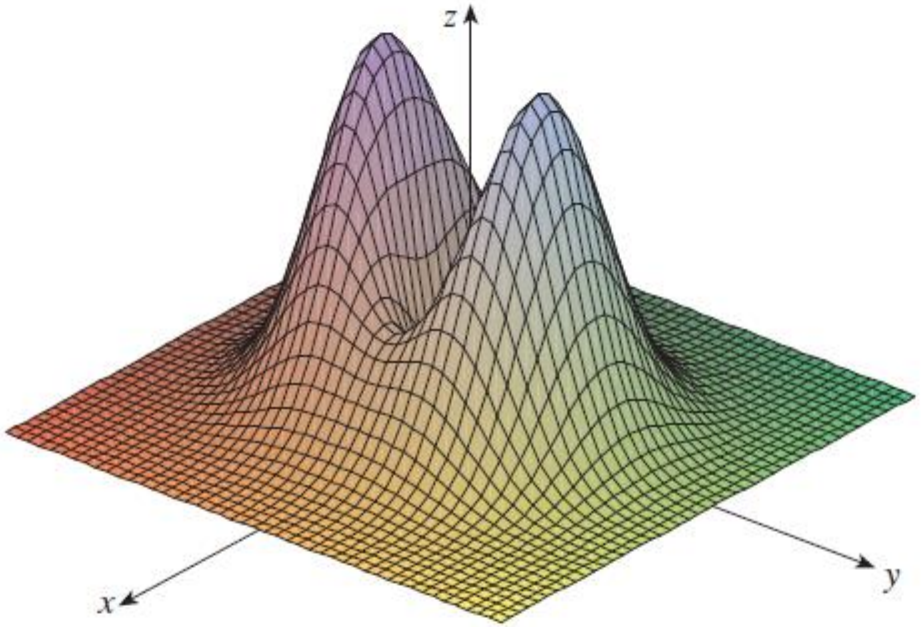
- 若 D 為一個雙變量函數 f 的定義域，則 f 的圖象即為 $\mathbb{R}^3$中的所有點 (x, y, z) 形成的集合。
  - 其中 $z = f(x, y)$



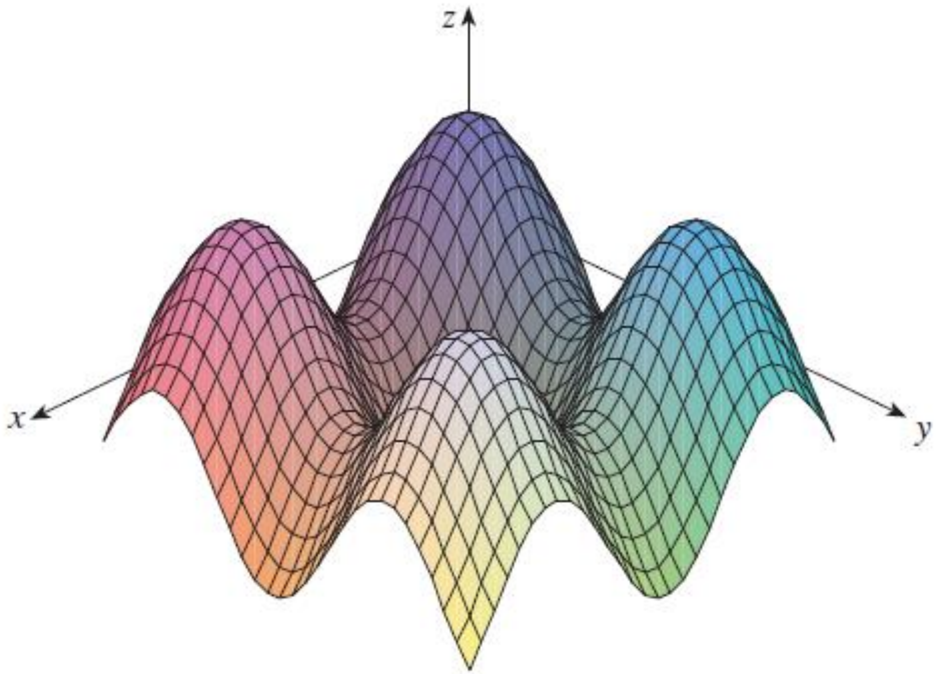
例2

- 試作出函數 $f(x,y)=6-3x-2y$ 的圖象。

+ 範例



(a) $f(x, y) = (x^2 + 3y^2)e^{-x^2-y^2}$

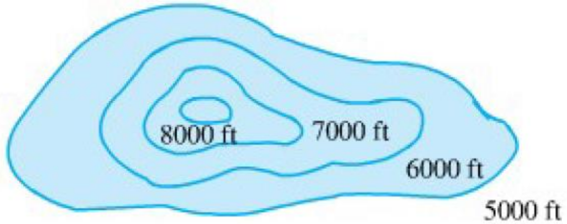


(c) $f(x, y) = \sin x + \sin y$

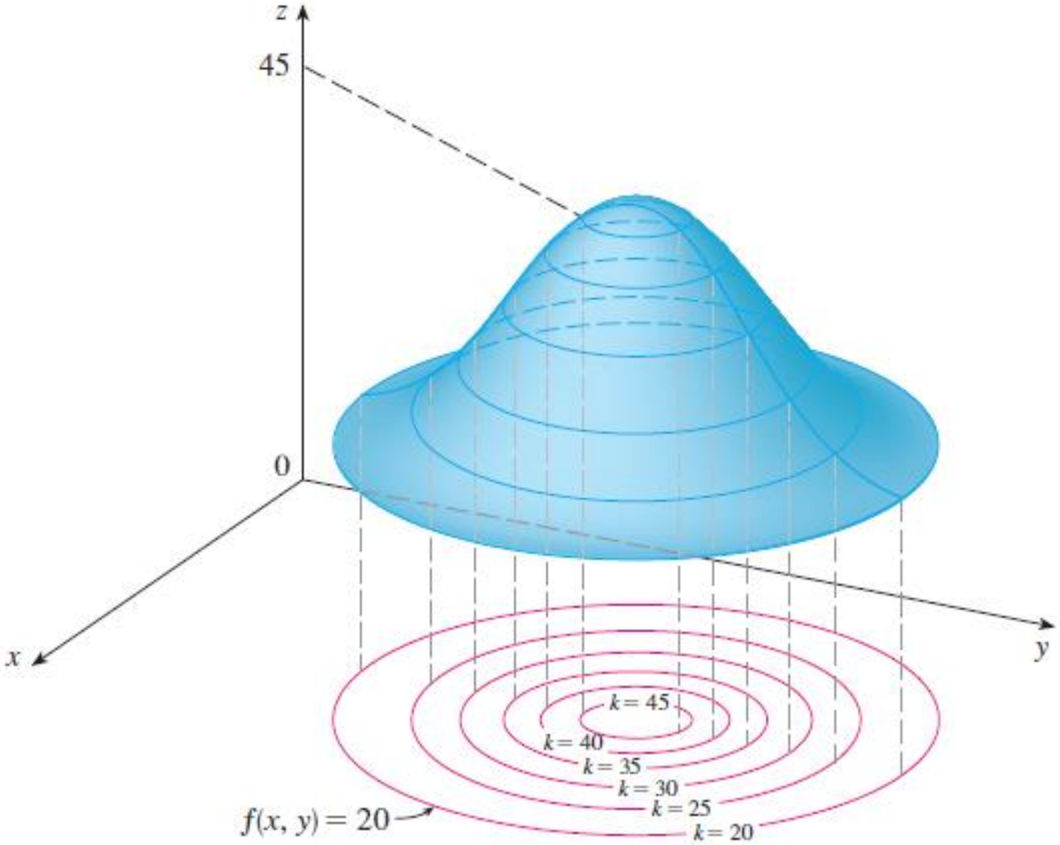
+ 等位線 (Level Curves)

- 一個雙變量函數 f 的等位線為平面上滿足方程式 $f(x, y) = k$ 之所有點的集合 (k 為常數)。

帶等位線的等高線圖：

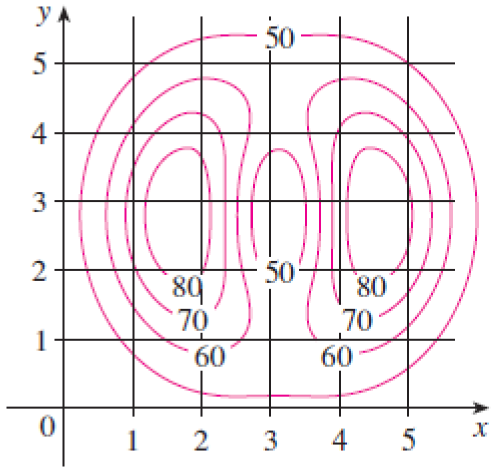


Contour map
with level curves



+ 例3

- 右圖為函數 f 的等高線圖試估計 $f(1, 3)$ 與 $f(4, 5)$ 的值。



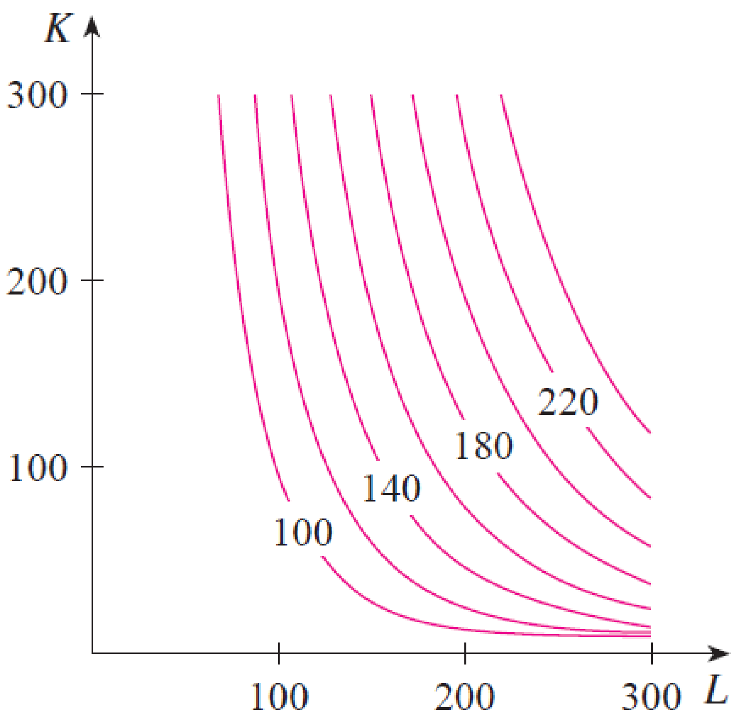
+ 應用範例

- 柯布-道格拉斯(Cobb-Douglas)生產函數模型:

$$P(L,K) = bL^{a}K^{1-a}$$

- 其中 L 是勞動力，K 是資本量，b 是技術水平系數，a 是勞動力的產出彈性系數。b 與 a $(0 < a < 1)$，
決定，$P(L, K)$ 為產出。

例: $P(L,K) = 1.01L^{0.75}K^{0.25}$

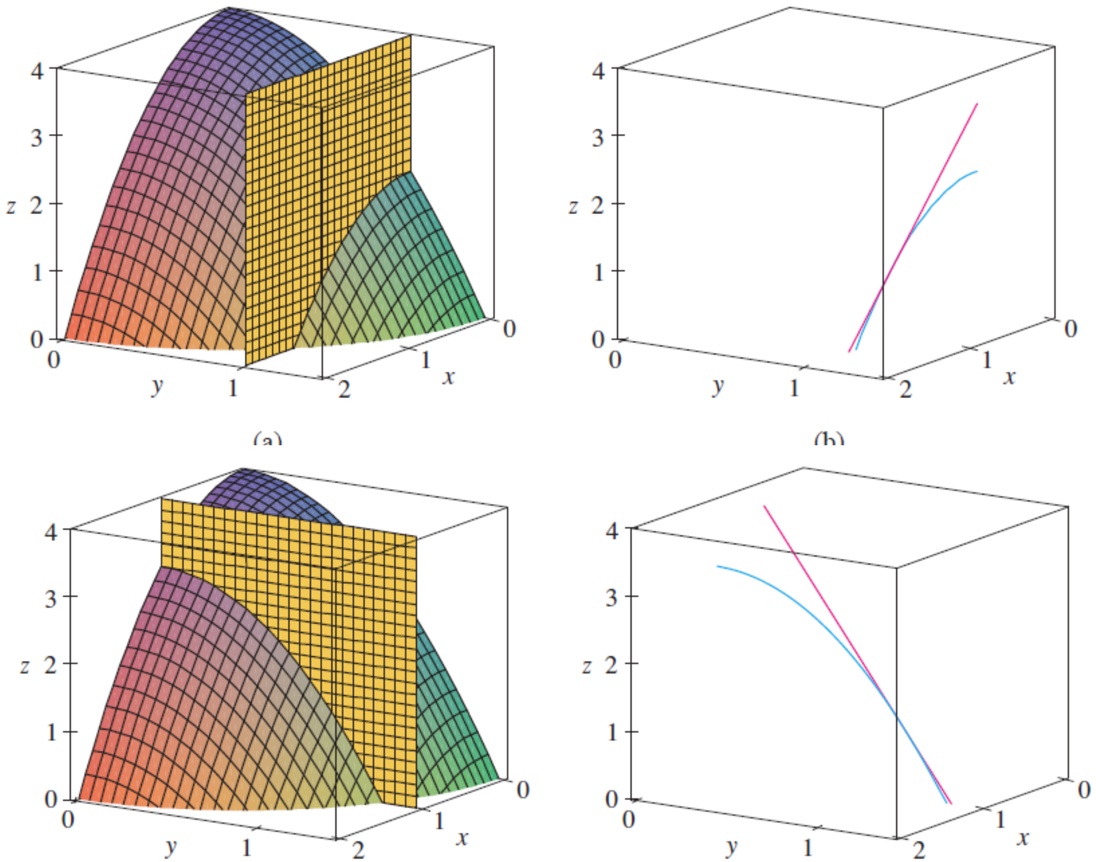


偏導數 (Partial Derivatives)

- 若 f 為雙變數函數 $z = f(x, y)$, 它的偏導數 f_x 和 f_y 定義如下：

$$f_x(x,y) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$$

$$f_y(x,y) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}$$



(a) (b)

- 計算方式：當對變數 x 作偏微分時，將變數 y 視作常數。(反之亦然)
- 而 n 個變數函數的偏導數，只需將對應變數以外的視作常數計算即可。

偏導數 (Partial Derivatives)

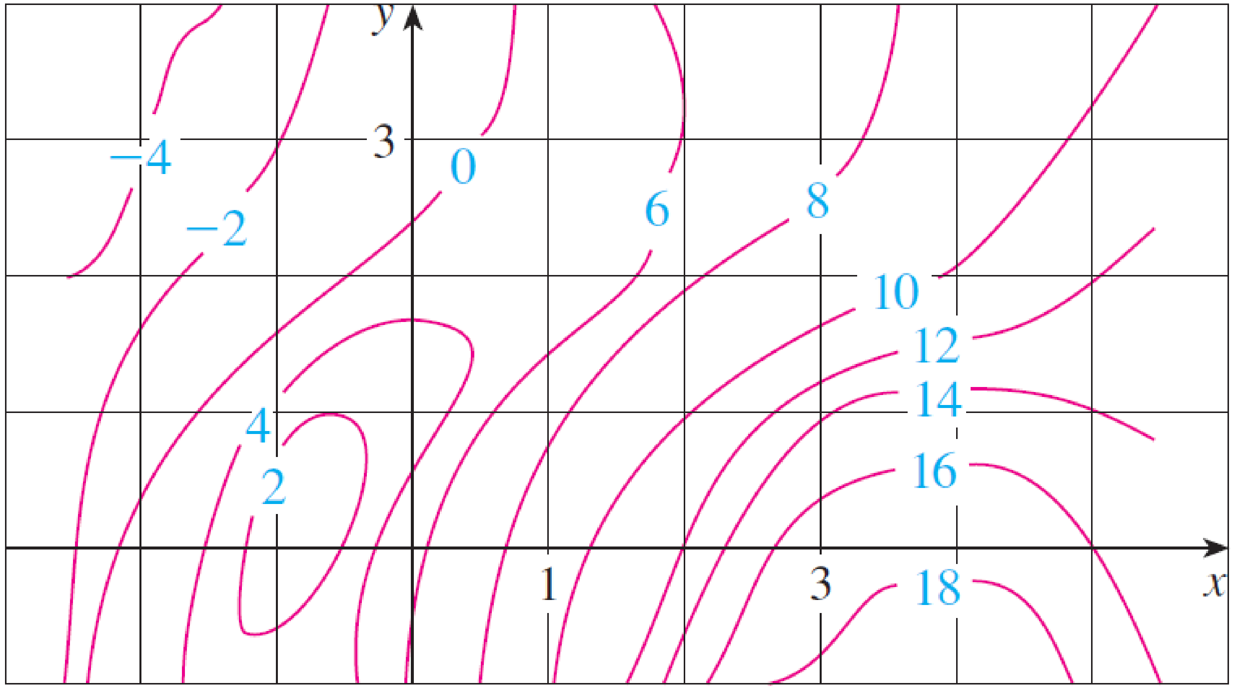
- 若 f_x 為 z 對 x 的偏導數:
- 讀作 ‘偏 z 偏 x’ 或 ‘partial z partial x’
- 記法：

$$f_x(x,y) = f_x = z_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)$$

$$f_y(x,y) = f_y = z_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)$$

例4

- 下圖為函數 f 的等高線圖試估計 $f_x(2, 1)$ 與 $f_y(2, 1)$ 的值。



例5

- 若 $f(x,y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$，求：
  A. $\frac{\partial f}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial f}{\partial y}$
  B. $f_x(2,1)$和$f_y(2,1)$

例6

- 求下列函數的 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$：

1. $z = \sin\left(\frac{x}{1+y}\right)$
2. $x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1$

連鎖律

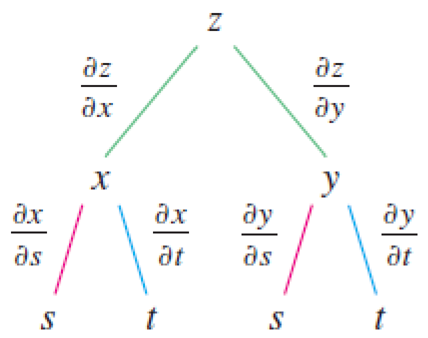
- 形式1: 若 $z=f(x,y)$為變數 x 和 y 的可微分函數，且 $x=g(t), y=h(t)$ 為變數 t 的可微分函數，則

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$$

- 形式2: 若 $z=f(x,y)$為變數 x 和 y 的可微分函數，且 $x=g(s,t), y=h(s,t)$為變數 s 和 t 的可微分函數，則

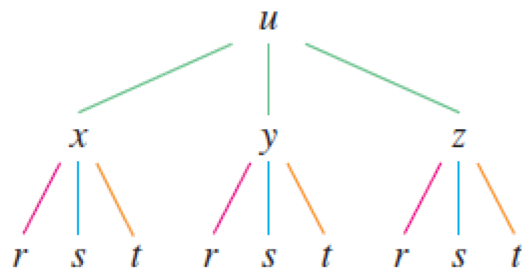
$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}$$



+ 例7

- 已知 $u = x^4y + y^2z^3$，其中 $x = rse^t$、$y = rs^2e^{-t}$、$z = r^2s\sin t$。當 $r = 2$、$s = 1$、 $t = 0$ 時，求 $\partial u/\partial s$。



二階偏導數

- 給定函數 $z = f(x, y)$, 它的二階偏導數定義如下：
  - $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z_{xx} = (z_x)_x$
  - $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z_{xy} = (z_x)_y$
  - $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z_{yx} = (z_y)_x$
  - $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z_{yy} = (z_y)_y$
- 若 $f_{xy}(x,y)$ 與 $f_{yx}(x,y)$ 在 D 內連續，則 $f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y)$。

例8

- 求函數 $z = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$ 的二階偏導數。

雙變量的極值

- 設函數 $z = f(x, y)$ 在點 (x_0, y_0)的某鄰域內有定義，如果對於該鄰域內的任何點(x, y)恒有$f(x, y) \le f(x_0, y_0)$，則稱函數 z 於點(x_0, y_0)處有極大值$f(x_0, y_0)$。

  (同理，$f(x, y) \ge f(x_0, y_0)$時有極小值)

- 函數 $z = f(x, y)$ 在點 (x_0, y_0)處有偏導數，若

$$f_x(x_0, y_0) = 0, \qquad f_y(x_0, y_0) = 0$$

則(x_0, y_0)為穩定點。

二階偏導檢驗法 (12.8C)

- 令 $D = f_{xx}f_{yy} - [f_{xy}]^2$, 則：
  - $D > 0$ 且 $f_{xx} > 0$ 時 f 有極小值。
  - $D > 0$ 且 $f_{xx} < 0$ 時 f 有極大值。
  - $D < 0$ 時 (x_0, y_0) 處為 f 的鞍點 (非最大值或最小值)。
  - $D = 0$, 檢驗法無效。

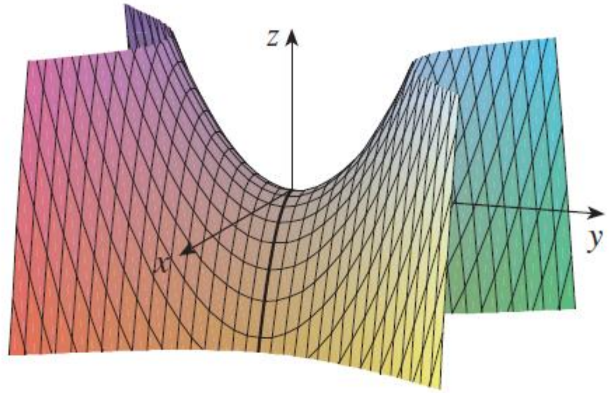


FIGURE 3
$z = y^2 - x^2$

例9

- 求函數 $f(x,y)=x^4+y^4-4xy+1$的極值。

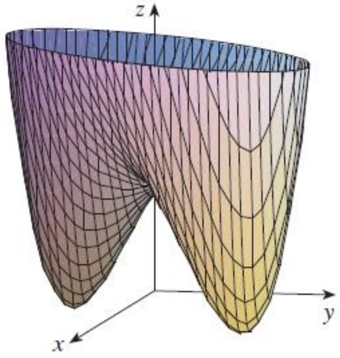
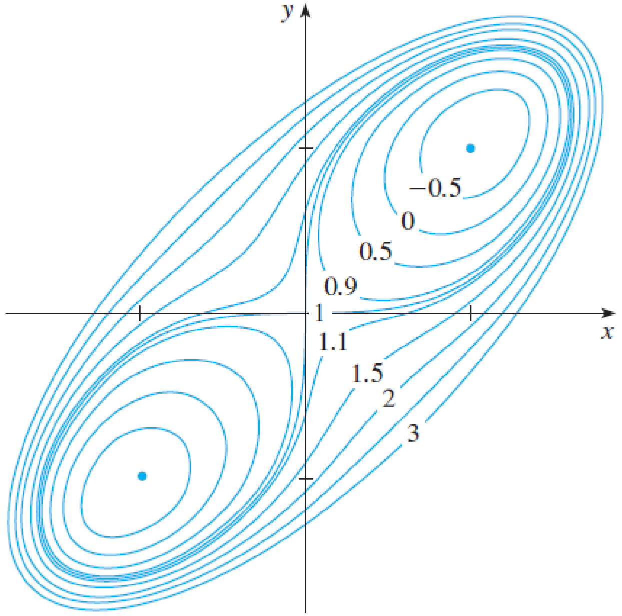


FIGURE 4
$z = x^4 + y^4 - 4xy + 1$

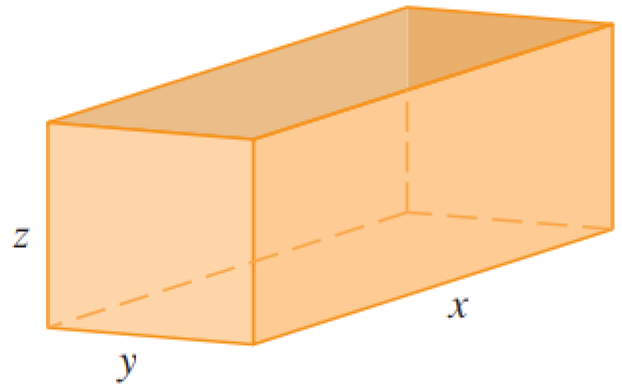


條件極值

- 在討論極值時，除定義域外無其他限制時，這類極值問題稱為無條件極值問題；若受到其他附加約束條件的限制，則稱為條件極值問題。

例10

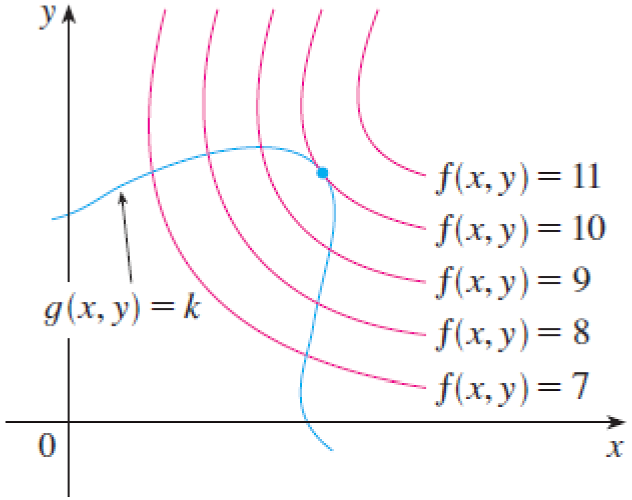
- 一個無蓋長方形盒子是由 12 立方米的材料製造而成。求此長方形盒子的最大容積。



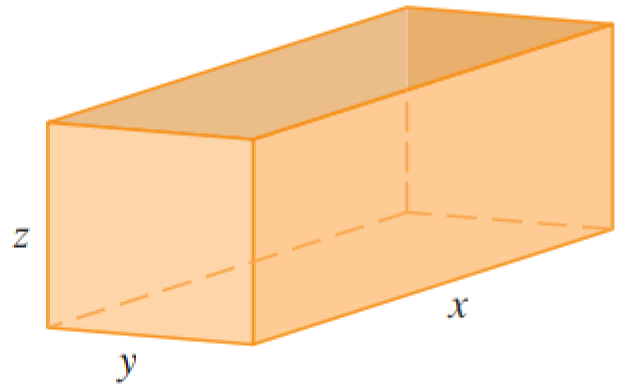
拉格朗日乘數法 (Method of Lagrange Multipliers)

- 設函數 $f(x,y)$ 與 $\varphi(x,y)$ 具有連續的偏導數，則欲求函數 $f(x,y)$ 在約束條件 $\varphi(x,y)=0$ 下的極值點其步驟如下：
  1. 作拉格朗日函數 $z(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$
  2. 求 $z(x,y,\lambda)$可能的極值點, 即:

$$\begin{cases} Z_x(x,y,\lambda)=0 \\ Z_y(x,y,\lambda)=0 \\ Z_\lambda(x,y,\lambda)=0 \end{cases}$$



例10 (拉格朗日乘數法)

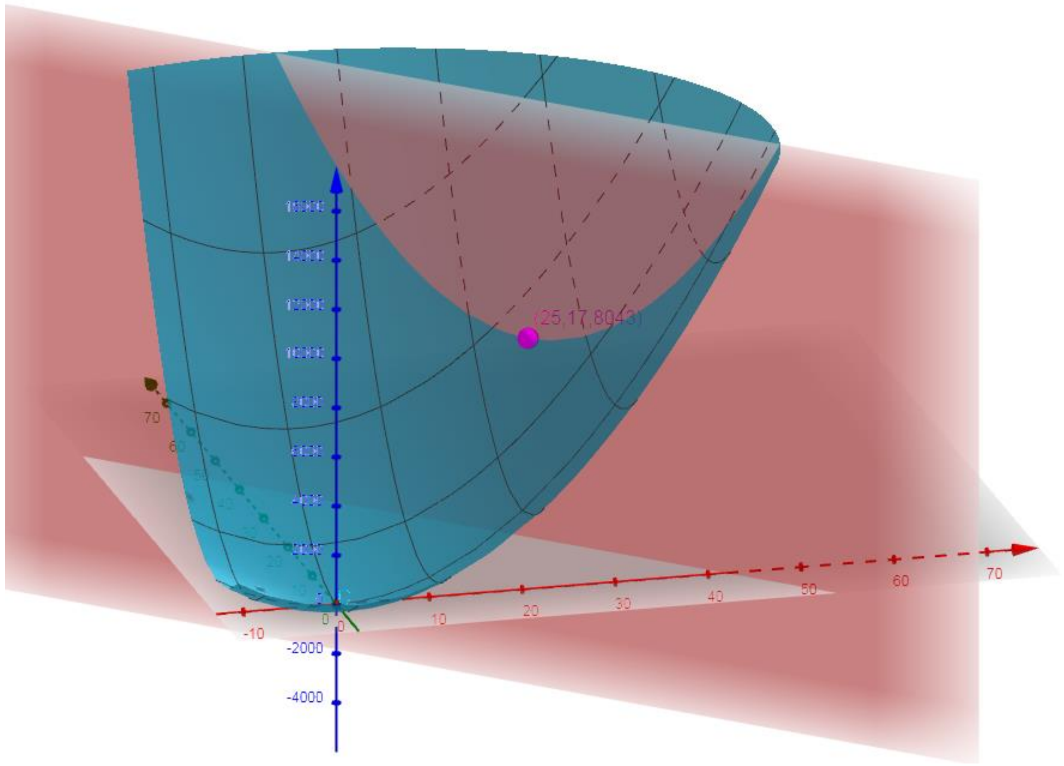


例11

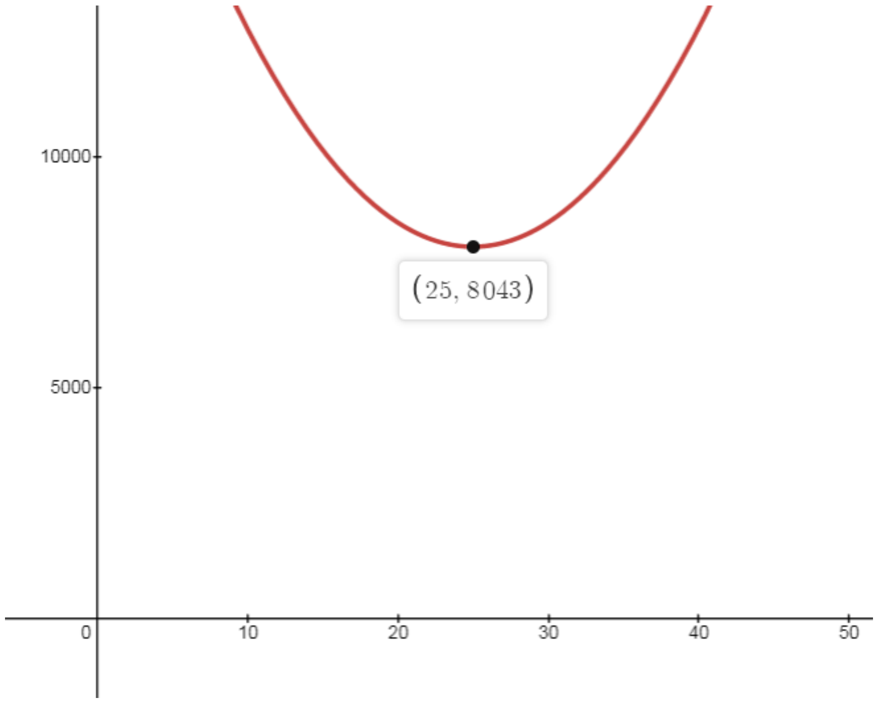
- 某企業生產兩種商品的日產量為 x 和 y (件)，總成本函數 $C(x,y) = 8x^2 - xy + 12y^2$ (元)，商品的限額為 $x + y = 42$，求最小成本。

換元 vs 拉格朗日乘數法 (例11)

- $C(x, y) = 8x^2 - xy + 12y^2$
- $x + y = 42$



$$C(x) = 8x^2 - x(42 - x) + 12(42 - x)^2$$



教材對應閱讀章節及練習

- 12.1, 12.2, 12.6(~例4), 12.8, 12.9
- 對應習題: (可視個人情況定量)
  - 12.1: 1-4
  - 12.2: 1-16
  - 12.6: 1-17
  - 12.8: 1-6
  - 12.9: 1-7