高等数学

张爱林

深圳大学

March 26, 2022

第九章 多元函数微分法及其应用

第二节 偏导数

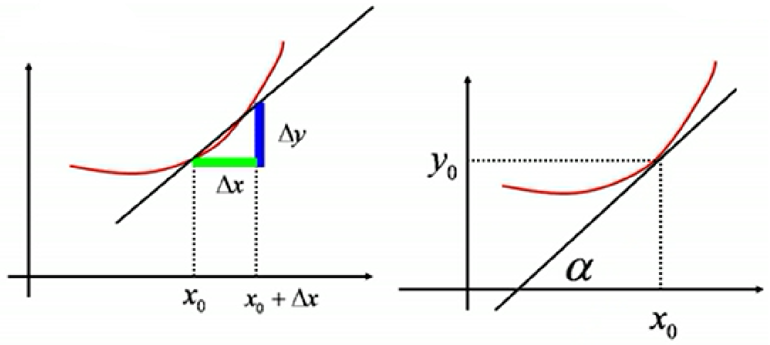
1. 偏导数的定义与计算
   - 偏导数的定义
   - 偏导数的计算
   - 偏导数的几何意义
   - 偏导数与连续性的关系

2. 高阶偏导数
   - 高阶偏导数的定义
   - 克莱罗定理
   - 利用对称性计算高阶偏导数

回忆：一元函数一阶导数定义

函数$y=f(x)$在点x_0处的导数，记为$f'(x_0)$，即

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$



多元函数的偏导数

多元函数.

$$y = f(x_1, x_2, ..., x_n),\ (x, y) \in D.$$

其中$x_1, x_2, ..., x_n$是自变量，y是因变量。

多元函数的偏导数

多元函数.

$$y = f(x_1, x_2, ..., x_n),\ (x, y) \in D.$$

其中$x_1, x_2, ..., x_n$是自变量，y是因变量。

多元函数关于某一个自变量的变化率

即其**对该自变量的偏导数(Partial Derivatives)**。

多元函数的偏导数

二元函数的偏导数.

$z = f(x, y)$

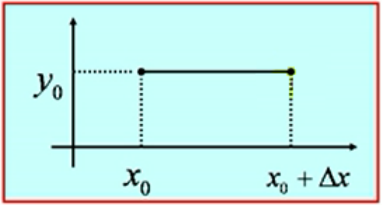
多元函数的偏导数

二元函数的偏导数.

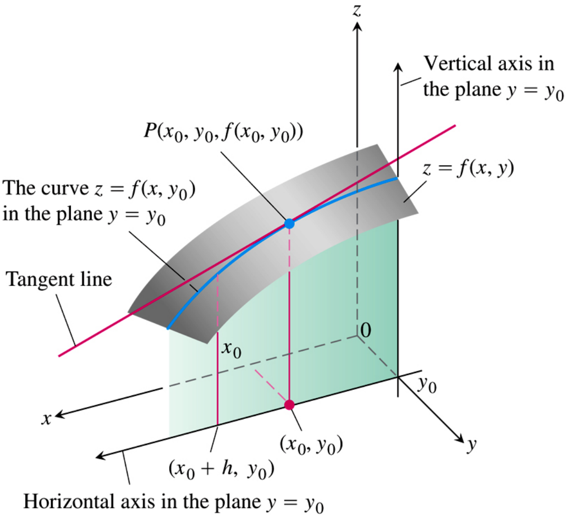
$z = f(x, y)$

关于x的偏增量:

$$\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$$



多元函数的偏导数


z
Vertical axis in the plane $y = y_0$
$P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$
$z = f(x, y)$
The curve $z = f(x, y_0)$ in the plane $y = y_0$
Tangent line
0
x_0
y_0
x
y
(x_0, y_0)
$(x_0 + h,\ y_0)$
Horizontal axis in the plane $y = y_0$

多元函数的偏导数

$$\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$$

多元函数的偏导数

$$\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$$

二元函数$f(x, y)$对自变量x的偏导数：

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta_x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

也可记作

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}, \quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}, \quad z_x\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$$

多元函数的偏导数

二元函数的偏导数.

$z = f(x, y)$

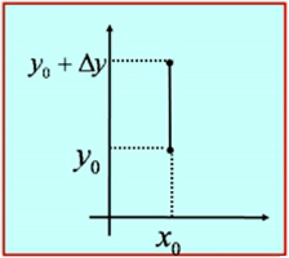
多元函数的偏导数

二元函数的偏导数.

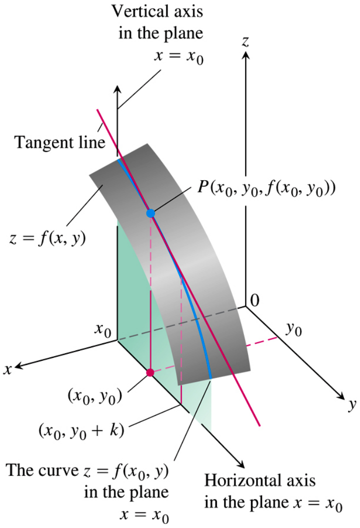
$z = f(x, y)$

关于y的偏增量:

$\Delta_y z = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$



多元函数的偏导数


Vertical axis
in the plane
$x = x_0$
z
Tangent line
$P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$
$z = f(x, y)$
0
x_0
y_0
x
y
(x_0, y_0)
$(x_0, y_0 + k)$
The curve $z = f(x_0, y)$
in the plane
$x = x_0$
Horizontal axis
in the plane $x = x_0$

多元函数的偏导数

$$\Delta_y z = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

多元函数的偏导数

$$\Delta_y z = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

二元函数$f(x, y)$对自变量y的偏导数：

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta_y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

也可记作

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}, \quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}, \quad z_y\Big|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}$$

多元函数的偏导数

三元函数的偏导数.

$$u = f(x, y, z)$$

多元函数的偏导数

三元函数的偏导数.

$u = f(x, y, z)$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y, z) - f(x, y, z)}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(x, y, z + \Delta z) - f(x, y, z)}{\Delta z}$$

偏导数的计算

对二元函数求偏导数的方法.

偏导数的计算

对二元函数求偏导数的方法.

求偏导数$\frac{\partial z}{\partial x}$:

只需将自变量y暂时看成不变的常量，对自变量x求导数:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{d}{dx} f(x, y)$$

偏导数的计算

对二元函数求偏导数的方法.

求偏导数$\frac{\partial z}{\partial x}$：

只需将自变量y暂时看成不变的常量，对自变量x求导数：

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)=\frac{d}{dx}f(x,y)$$

求偏导数$\frac{\partial z}{\partial y}$：

只需将自变量x暂时看成不变的常量，对自变量y求导数：

$$\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)=\frac{d}{dy}f(x,y)$$

教材P67**例1.** 求$z=x^2+3xy+y^2$在点$(1,2)$处的偏导数。

教材P67**例1.** 求$z=x^2+3xy+y^2$在点$(1,2)$处的偏导数。

解1.

只需将自变量y暂时看成不变的常量，对自变量x求导数：

教材P67**例1.** 求$z = x^2 + 3xy + y^2$在点$(1, 2)$处的偏导数。

解1.

只需将自变量y暂时看成不变的常量，对自变量x求导数：

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 3y$$

教材P67**例1.** 求$z=x^2+3xy+y^2$在点$(1,2)$处的偏导数。

解1.

只需将自变量y暂时看成不变的常量，对自变量x求导数：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x+3y$$

只需将自变量x暂时看成不变的常量，对自变量y求导数：

教材P67**例1.** 求$z=x^2+3xy+y^2$在点$(1,2)$处的偏导数。

解1.

只需将自变量y暂时看成不变的常量，对自变量x求导数：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x+3y$$

只需将自变量x暂时看成不变的常量，对自变量y求导数：

$$\frac{\partial z}{\partial y}=3x+2y$$

教材P67**例1.** 求$z = x^2 + 3xy + y^2$在点$(1,2)$处的偏导数。

解1.

只需将自变量y暂时看成不变的常量，对自变量x求导数：

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 3y$$

只需将自变量x暂时看成不变的常量，对自变量y求导数：

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3x + 2y$$

再代入点$(1,2)$：

$$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{\substack{x=1\\y=2}} = 8, \quad \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{\substack{x=1\\y=2}} = 7$$

教材P67**例1.** 求$z=x^2+3xy+y^2$在点$(1,2)$处的偏导数。

教材P67例1. 求$z = x^2 + 3xy + y^2$在点$(1, 2)$处的偏导数。

解2.

先将$y = 2$代入，得一元函数$g(x) = x^2 + 6x + 4$

教材P67**例1.** 求$z = x^2 + 3xy + y^2$在点$(1, 2)$处的偏导数。

解2.

先将$y = 2$代入，得一元函数$g(x) = x^2 + 6x + 4$

再对自变量x求导数：

教材P67例1. 求$z = x^2 + 3xy + y^2$在点$(1, 2)$处的偏导数。

解2.

先将$y = 2$代入，得一元函数$g(x) = x^2 + 6x + 4$

再对自变量x求导数：

$$g'(x) = 2x + 6$$

教材P67例1. 求$z = x^2 + 3xy + y^2$在点$(1, 2)$处的偏导数。

解2.

先将$y = 2$代入，得一元函数$g(x) = x^2 + 6x + 4$

再对自变量x求导数：

$$g'(x) = 2x + 6$$

最后代入$x = 1$：

教材P67**例1.** 求$z = x^2 + 3xy + y^2$在点$(1, 2)$处的偏导数。

解2.

先将$y = 2$代入，得一元函数$g(x) = x^2 + 6x + 4$

再对自变量x求导数：

$$g'(x) = 2x + 6$$

最后代入$x = 1$：

$$g'(x) = 8$$

例1. 求$z = x^2 + 3xy + y^2$在点$(1, 2)$处的偏导数。

例1. 求$z = x^2 + 3xy + y^2$在点$(1, 2)$处的偏导数。

解2.

先将$x = 1$代入，得一元函数$g(y) = y^2 + 3y + 1$

例1. 求$z = x^2 + 3xy + y^2$在点$(1,2)$处的偏导数。

解2.

先将$x = 1$代入，得一元函数$g(y) = y^2 + 3y + 1$

再对自变量y求导数：

例1. 求$z = x^2 + 3xy + y^2$在点$(1,2)$处的偏导数。

解2.

先将$x = 1$代入，得一元函数$g(y) = y^2 + 3y + 1$

再对自变量y求导数：

$$g'(y) = 2y + 3$$

例1. 求$z = x^2 + 3xy + y^2$在点$(1, 2)$处的偏导数。

解2.

先将$x = 1$代入，得一元函数$g(y) = y^2 + 3y + 1$

再对自变量y求导数：

$$g'(y) = 2y + 3$$

最后代入$y = 2$：

例1. 求$z = x^2 + 3xy + y^2$在点$(1,2)$处的偏导数。

解2.

先将$x = 1$代入，得一元函数$g(y) = y^2 + 3y + 1$

再对自变量y求导数：

$$g'(y) = 2y + 3$$

最后代入$y = 2$：

$$g'(y) = 7$$

教材P67例2, 3

习题9-1 2. 4.

偏导数的计算

利用对称性求偏导数.

偏导数的计算

利用对称性求偏导数.

若函数$f(x,y)$关于自变量x和y对称:

即函数表达式中两个自变量对调后，仍表示原来的函数。

$$f(x,y)=f(y,x)$$

则

$$f_x(x,y)=\varphi(x,y)$$

偏导数的计算

利用对称性求偏导数.

若函数$f(x,y)$关于自变量x和y对称:

即函数表达式中两个自变量对调后，仍表示原来的函数。

$$f(x,y)=f(y,x)$$

则

$$f_x(x,y)=\varphi(x,y)$$

$$f_y(x,y)=\varphi(y,x)$$

例1. 求函数$f(x,y)=\ln(x^2+xy+y^2)$的偏导数。

例1. 求函数$f(x,y)=\ln(x^2+xy+y^2)$的偏导数。

解.

$$f(x,y)=f(y,x)$$

例1. 求函数$f(x,y)=\ln(x^2+xy+y^2)$的偏导数。

解.

$$f(x,y)=f(y,x)$$

$$f_x(x,y)=\frac{2x+y}{x^2+xy+y^2}$$

例1. 求函数$f(x,y)=\ln(x^2+xy+y^2)$的偏导数。

解.

$$f(x,y)=f(y,x)$$

$$f_x(x,y)=\frac{2x+y}{x^2+xy+y^2}$$

故而

$$f_y(x,y)=\frac{2y+x}{x^2+xy+y^2}$$

例1. 求函数$f(x,y)=\ln(x^2+xy+y^2)$的偏导数。

解.

$$f(x,y)=f(y,x)$$

$$f_x(x,y)=\frac{2x+y}{x^2+xy+y^2}$$

故而

$$f_y(x,y)=\frac{2y+x}{x^2+xy+y^2}$$

教材P67例4

习题9-1 3.

教材P68例5

教材P68例5

$$\frac{dp}{dV}\frac{dV}{dT}\frac{dT}{dp}=1$$

$$\frac{\partial p}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial p}=-1$$

偏导数的记号是一个整体记号，不能看做分子与分母之商.

教材P68例5

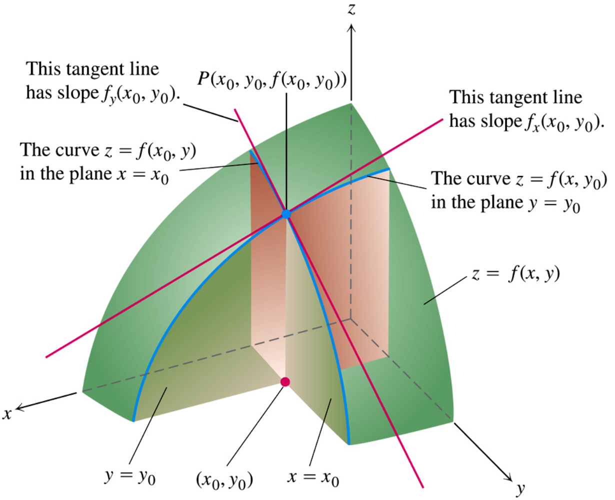
$$\frac{dp}{dV}\frac{dV}{dT}\frac{dT}{dp}=1$$

$$\frac{\partial p}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial p}=-1$$

偏导数的记号是一个整体记号，不能看做分子与分母之商.

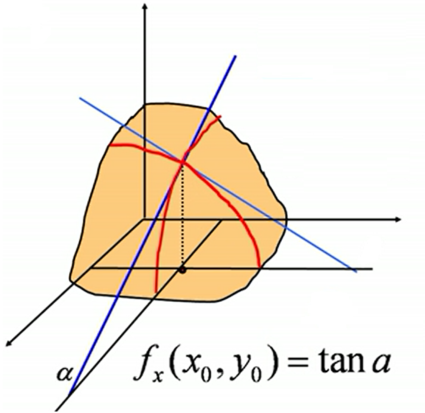
习题9-1 1.

偏导数的几何意义


z
This tangent line
has slope $f_y(x_0, y_0)$.
$P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$
This tangent line
has slope $f_x(x_0, y_0)$.
The curve $z = f(x_0, y)$
in the plane $x = x_0$
The curve $z = f(x, y_0)$
in the plane $y = y_0$
$z = f(x, y)$
x
$y = y_0$
(x_0, y_0)
$x = x_0$
y

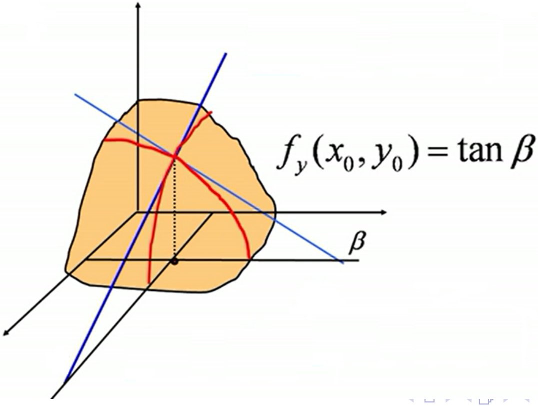
偏导数的几何意义

$f_x(x_0, y_0)$表示：
曲面被平面$y = y_0$所截得曲线在点M_0处沿x轴变化率，
即该点处切线对于x轴的斜率。



偏导数的几何意义

$f_y(x_0, y_0)$表示：
曲面被平面$x = x_0$所截得曲线在点M_0处沿y轴变化率，
即该点处切线对于y轴的斜率。



例2. 曲线

$$\begin{cases} z = \dfrac{x^2+y^2}{4} \\ y = 4 \end{cases}$$

在点$(2,4,5)$处的切线对于x轴的倾角是多少？

例2. 曲线

$$\begin{cases} z = \dfrac{x^2 + y^2}{4} \\ y = 4 \end{cases}$$

在点$(2, 4, 5)$处的切线对于x轴的倾角是多少？

解.

$$z = f(x, y)$$

例2. 曲线

$$\begin{cases} z = \dfrac{x^2+y^2}{4} \\ y = 4 \end{cases}$$

在点$(2,4,5)$处的切线对于x轴的倾角是多少？

解.

$$z = f(x,y)$$

按照偏导数的几何意义，$f_x(2,4)$就是曲线在点$(2,4,5)$处的切线对于x轴的斜率。

例2. 曲线

$$\begin{cases} z = \dfrac{x^2+y^2}{4} \\ y = 4 \end{cases}$$

在点$(2,4,5)$处的切线对于x轴的倾角是多少？

解.

$$z = f(x,y)$$

按照偏导数的几何意义，$f_x(2,4)$就是曲线在点$(2,4,5)$处的切线对于x轴的斜率。

$$f_x(2,4) = \frac{1}{2}x|_{x=2} = 1$$

例2. 曲线

$$\begin{cases} z = \dfrac{x^2+y^2}{4} \\ y = 4 \end{cases}$$

在点$(2,4,5)$处的切线对于x轴的倾角是多少？

解.

$$z = f(x,y)$$

按照偏导数的几何意义，$f_x(2,4)$就是曲线在点$(2,4,5)$处的切线对于x轴的斜率。

$$f_x(2,4) = \frac{1}{2}x|_{x=2} = 1$$

即

$$k = \tan\alpha = 1,$$

例2. 曲线

$$\begin{cases} z = \dfrac{x^2+y^2}{4} \\ y = 4 \end{cases}$$

在点$(2,4,5)$处的切线对于x轴的倾角是多少？

解.

$$z = f(x,y)$$

按照偏导数的几何意义，$f_x(2,4)$就是曲线在点$(2,4,5)$处的切线对于x轴的斜率。

$$f_x(2,4) = \frac{1}{2}x|_{x=2} = 1$$

即

$$k = \tan\alpha = 1, \quad \alpha = \frac{\pi}{4}$$

一元函数可微、可导、连续、有极限之间的关系

一元函数

可导

一元函数可微、可导、连续、有极限之间的关系

一元函数

可导 $\Longleftrightarrow$ 可微

一元函数可微、可导、连续、有极限之间的关系

一元函数

$$\text{可导} \Longleftrightarrow \text{可微}$$

$$\Downarrow$$

连续

一元函数可微、可导、连续、有极限之间的关系

一元函数

可导$\Longleftrightarrow$ 可微

$\Downarrow$

连续

$\Downarrow$

有极限

多元函数的连续性

多元函数偏导数存在$\Rightarrow$函数连续或有极限？

多元函数的连续性

多元函数偏导数存在$\Rightarrow$函数连续或有极限?

例如

$$z=f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

多元函数的连续性

多元函数偏导数存在$\Rightarrow$函数连续或有极限?

例如

$$z = f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

在上节课已知这函数在点$(0,0)$处不连续,

多元函数的连续性

多元函数偏导数存在⇒函数连续或有极限？

例如

$$z=f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在上节课已知这函数在点$(0,0)$处不连续，

但在点$(0,0)$处的偏导数都存在：

多元函数的连续性

多元函数偏导数存在⇒函数连续或有极限?

例如

$$z = f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

在上节课已知这函数在点$(0,0)$处不连续，

但在点$(0,0)$处的偏导数都存在:

$$f_x(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = 0$$

多元函数的连续性

多元函数偏导数存在$\Rightarrow$函数连续或有极限？

例如

$$z=f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在上节课已知这函数在点$(0,0)$处不连续，

但在点$(0,0)$处的偏导数都存在：

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0$$

$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=0$$

多元函数的连续性

多元函数偏导数存在$\not\Rightarrow$函数连续或有极限

多元函数的连续性

多元函数偏导数存在$\not\Rightarrow$函数连续或有极限

为神马？

多元函数的连续性

多元函数偏导数存在$\not\Rightarrow$函数连续或有极限

为神马？

二元函数偏导数的定义：

$$f_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta_x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

多元函数的连续性

多元函数偏导数存在$\nRightarrow$函数连续或有极限

为神马？

二元函数偏导数的定义：

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta_x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

二元函数连续性的定义：

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)] = 0$$

根本不是同一类极限！

多元函数的连续性

比较:

一元函数在某一点处:

导数$\Rightarrow$ 连续$\Rightarrow$ 极限

多元函数的连续性

比较：

一元函数在某一点处：

导数$\Rightarrow$ 连续$\Rightarrow$ 极限

多元函数在某一点处：

偏导数存在$\not\Rightarrow$连续

偏导数存在$\not\Rightarrow$极限

高阶偏导数(Higher Partial Derivatives)

$z = f(x, y)$

$f(x, y)$的两个一阶偏导数:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_x(x, y), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f_y(x, y)$$

高阶偏导数(Higher Partial Derivatives)

$z = f(x, y)$

$f(x, y)$的两个一阶偏导数:

$\frac{\partial z}{\partial x} = f_x(x, y)$, $\frac{\partial z}{\partial y} = f_y(x, y)$

$f(x, y)$的四个二阶偏导数:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

高阶偏导数(Higher Partial Derivatives)

$z = f(x, y)$

$f(x, y)$的两个一阶偏导数:

$\frac{\partial z}{\partial x} = f_x(x, y)$, $\frac{\partial z}{\partial y} = f_y(x, y)$

$f(x, y)$的四个二阶偏导数:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

其中后两个为**混合偏导数**。

高阶偏导数记号

$z = f(x, y)$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z_{xx} = f_{xx}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z_{xy} = f_{xy}$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} = z_{xyx} = f_{xyx}$$

同样可得三阶，四阶，乃至n阶偏导数。

高阶偏导数记号

$z = f(x, y)$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z_{xx} = f_{xx}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z_{xy} = f_{xy}$$

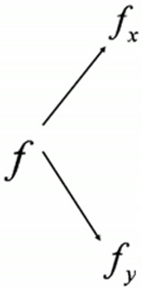
$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} = z_{xyx} = f_{xyx}$$

同样可得三阶，四阶，乃至n阶偏导数。

二阶及二阶以上的偏导数统称为**高阶偏导数**。

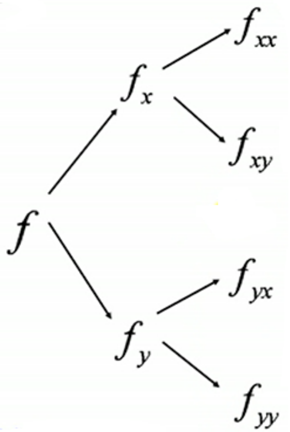
高阶偏导数

二阶及二阶以上的偏导数统称为**高阶偏导数**。



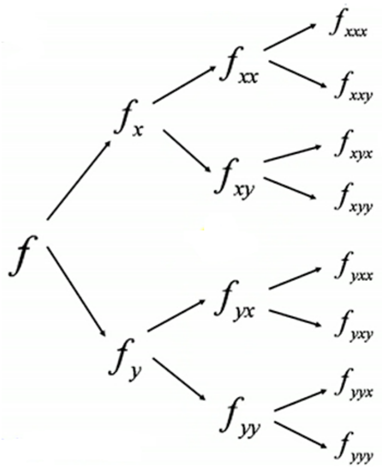
高阶偏导数

二阶及二阶以上的偏导数统称为**高阶偏导数**。



高阶偏导数

二阶及二阶以上的偏导数统称为**高阶偏导数**。



例3. 设$z = x^3y^2 - 3xy^3 - xy + 1$，求

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}.$$

例3. 设$z=x^3y^2-3xy^3-xy+1$，求

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}.$$

解.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2y^2-3y^3-y$$

例3. 设$z=x^3y^2-3xy^3-xy+1$，求

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}.$$

解.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2y^2-3y^3-y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6xy^2$$

例3. 设$z = x^3y^2 - 3xy^3 - xy + 1$，求

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}.$$

解.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y^2 - 3y^3 - y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6xy^2$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = 6y^2$$

例3. 设$z=x^3y^2-3xy^3-xy+1$，求

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}.$$

例3. 设$z = x^3y^2 - 3xy^3 - xy + 1$，求

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}.$$

解.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y^2 - 3y^3 - y$$

例3. 设$z = x^3y^2 - 3xy^3 - xy + 1$，求

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}.$$

解.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y^2 - 3y^3 - y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6x^2y - 9y^2 - 1$$

例3. 设$z = x^3y^2 - 3xy^3 - xy + 1$，求

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}.$$

解.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y^2 - 3y^3 - y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6x^2y - 9y^2 - 1$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2x^3y - 9xy^2 - x$$

例3. 设$z = x^3y^2 - 3xy^3 - xy + 1$，求

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}.$$

解.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y^2 - 3y^3 - y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6x^2y - 9y^2 - 1$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2x^3y - 9xy^2 - x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 6x^2y - 9y^2 - 1$$

混合偏导数

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6x^2y - 9y^2 - 1$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 6x^2y - 9y^2 - 1$$

混合偏导数

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6x^2y - 9y^2 - 1$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 6x^2y - 9y^2 - 1$$

$f(x,y)$**的二阶混合偏导数:**

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

偶然？必然？

混合偏导数

克莱罗定理（Clairaut's Theorem）.

又称The Mixed Derivative Theorem.

混合偏导数

克莱罗定理（Clairaut's Theorem）.

又称The Mixed Derivative Theorem.

若函数$z=f(x,y)$的两个二阶混合偏导数$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$在区域$D$内连续，则在$D$内：

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$$

混合偏导数

克莱罗定理（Clairaut's Theorem）.

又称The Mixed Derivative Theorem.

若函数$z=f(x,y)$的两个二阶混合偏导数$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$

在区域D内连续，则在D内：

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$$

即：**在连续的前提下，混合偏导数与对自变量求偏导数的先后次序无关。**

例4.

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

例4.

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

在点$(0,0)$处，

$$f_{xy}(0,0)=-1 \quad f_{yx}(0,0)=1$$

例4.

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

在点$(0,0)$处，

$$f_{xy}(0,0)=-1 \quad f_{yx}(0,0)=1$$

并不相等。

混合偏导数

在连续的前提下，

$f(x,y)$的**三阶混合偏导数**:

$$f_{xyx}(x,y) = f_{yxx}(x,y)$$

$$f_{yyx}(x,y) = f_{yxy}(x,y)$$

Alexis Clairaut

Alexis Clairaut，法国数学家，力学家，天文学家

Alexis Clairaut

三体问题

Three body problems（三体问题）：

三体问题

Three body problems（三体问题）：

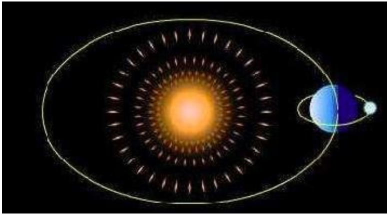
它是指三个质量、初始位置和初始速度都是任意的可视为质点的天体，在相互之间万有引力的作用下的运动规律问题。

三体问题

Three body problems（三体问题）：

它是指三个质量、初始位置和初始速度都是任意的可视为质点的天体，在相互之间万有引力的作用下的运动规律问题。

所以这样就存在着无数种的运动轨迹，比如最简单的一个例子就是太阳系中太阳、地球和月球的运动。



三体问题

地球所处的环境是围绕这一个恒星（太阳）做运动的。

三体问题

地球所处的环境是围绕这一个恒星（太阳）做运动的。

太阳、地球、月亮这三个质量、初始位置和初始速度都不一样的天体在相互之间万有引力的作用下构成了一个“三体”模型！

三体问题

地球所处的环境是围绕这一个恒星（太阳）做运动的。

太阳、地球、月亮这三个质量、初始位置和初始速度都不一样的天体在相互之间万有引力的作用下构成了一个“三体”模型！

而太阳的轨道恒定，地球的轨道恒定，地日的关系恒定，因此地球才能维持相对恒定的生存环境。我们可以将它看成是一种限制性“三体问题”。

三体问题

地球所处的环境是围绕这一个恒星（太阳）做运动的。

太阳、地球、月亮这三个质量、初始位置和初始速度都不一样的天体在相互之间万有引力的作用下构成了一个“三体”模型！

而太阳的轨道恒定，地球的轨道恒定，地日的关系恒定，因此地球才能维持相对恒定的生存环境。我们可以将它看成是一种限制性“三体问题”。

略去太阳轨道偏心率、太阳视差和月球轨道倾角，将它看成一种特殊的数学模型，从而得到一个周期解。

三体问题

刘慈欣小说《三体》中的三体人就与我们地球人所处的环境不相同。

三体问题

刘慈欣小说《三体》中的三体人就与我们地球人所处的环境不相同。

三体星拥有三个太阳。由于三个太阳之间的万有引力定律，形成了一个“三体”模型。

三体问题

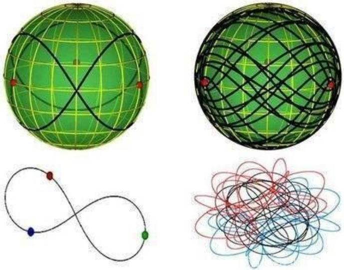
刘慈欣小说《三体》中的三体人就与我们地球人所处的环境不相同。

三体星拥有三个太阳。由于三个太阳之间的万有引力定律，形成了一个“三体”模型。

但三个太阳处于无规律运转状态，带来了气候的不稳定性，物种的混乱，且完全无法预测未来的天气走向，造成行星上智慧生命不断地重生和毁灭，最后只剩下三体文明存活下来。

三体问题

如果要真正解决三体问题，是要建立一种数学模型，使得在已知任何一个时间断面的初始运动矢量时，能够精确预测三体系统以后的所有运动状态。因为每一个天体在其他两个天体的万有引力作用下的运动方程都可以表示成3个二阶的常微分方程，或6个一阶的常微分方程，而我们无法求解这个十八阶的微分方程组。



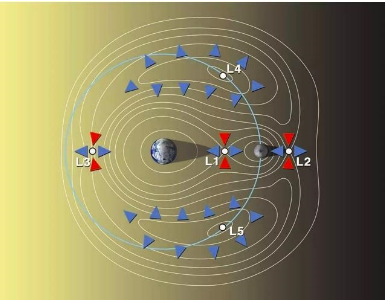
三体问题

1752～1754，Clairaut在研究三体问题时，第一个给出了这个问题的近似解。

三体问题

1752～1754，Clairaut在研究三体问题时，第一个给出了这个问题的近似解。

1772年，法国数学家、力学家和天文学家Lagrange发表了一篇关于“三体问题”的论文。为了求得三体问题的通解，他用了其中我们最为熟悉的限制性三体问题的特殊条件解，那就是拉格朗日点。



三体问题

对于大型乃至巨型空间站来说，地日和地月拉格朗日点，尤其是L4，L5两个稳定平衡点无疑是最佳选择。

三体问题

对于大型乃至巨型空间站来说，地日和地月拉格朗日点，尤其是L4，L5两个稳定平衡点无疑是最佳选择。

而中国科学家尝试把中继卫星发射到月球背面上空的地月引力平衡点L2点。

三体问题

对于大型乃至巨型空间站来说，地日和地月拉格朗日点，尤其是L4，L5两个稳定平衡点无疑是最佳选择。

而中国科学家尝试把中继卫星发射到月球背面上空的地月引力平衡点L2点。

为什么会选择不稳定的L2 呢？

三体问题

对于大型乃至巨型空间站来说，地日和地月拉格朗日点，尤其是L4，L5两个稳定平衡点无疑是最佳选择。

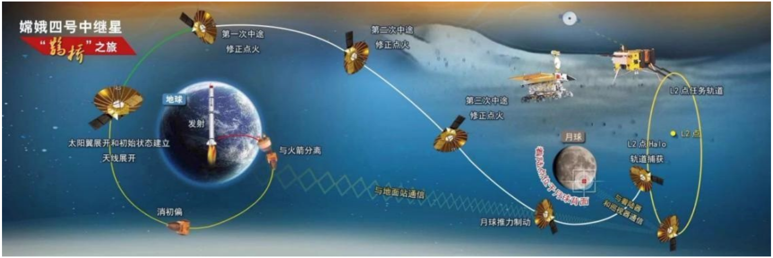
而中国科学家尝试把中继卫星发射到月球背面上空的地月引力平衡点L2点。

为什么会选择不稳定的L2 呢？

虽然L1- L3是不稳定的，但可选取适当的初始扰动，使相应平动点附近的运动仍为周期运动或拟周期运动。相应的运动变为稳定的，此时这种稳定称为条件稳定。

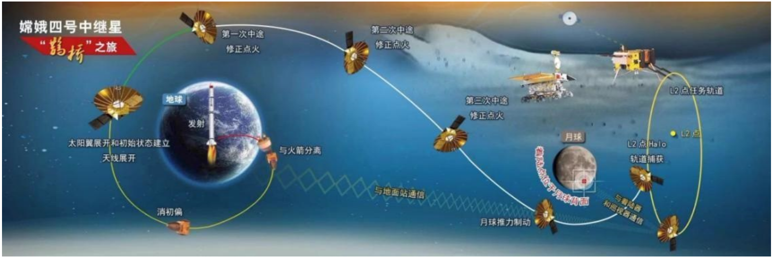
三体问题

2018年5月21日清晨，西昌卫星发射中心成功发射探月工程嫦娥四号任务鹊桥号中继星，这是世界首颗运行于地月拉格朗日L2点的通信卫星，鹊桥卫星的发射成功，也为后来的嫦娥四号提供了信号支持，让中国成为全球首个登陆月背的国家。



三体问题

2018年5月21日清晨，西昌卫星发射中心成功发射探月工程嫦娥四号任务鹊桥号中继星，这是世界首颗运行于地月拉格朗日L2点的通信卫星，鹊桥卫星的发射成功，也为后来的嫦娥四号提供了信号支持，让中国成为全球首个登陆月背的国家。



我们的征途是星辰大海!

利用对称性计算高阶偏导数

利用对称性求高阶偏导数.

利用对称性计算高阶偏导数

利用对称性求高阶偏导数.

若函数$f(x,y)$关于自变量x和y对称:

$$f(x,y)=f(y,x)$$

则

$$f_{xx}(x,y)=\varphi(x,y)$$

利用对称性计算高阶偏导数

利用对称性求高阶偏导数.

若函数$f(x,y)$关于自变量x和y对称：

$$f(x,y)=f(y,x)$$

则

$$f_{xx}(x,y)=\varphi(x,y)$$

$$f_{yy}(x,y)=\varphi(y,x)$$

教材P70例7, 8

拉普拉斯算子与方程

记

$$\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y})$$

$$\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z})$$

即**梯度**

拉普拉斯算子与方程

记

$$\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y})$$

$$\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z})$$

即**梯度**

教材P106-108

拉普拉斯算子与方程

拉普拉斯方程(Laplace Function)为

$$\nabla^2 u = 0$$

拉普拉斯算子与方程

拉普拉斯方程(Laplace Function)为

$$\nabla^2 u = 0$$

所以$\triangle = \nabla^2$为**拉普拉斯算子(Laplace Operator)**

拉普拉斯算子与方程

拉普拉斯方程(Laplace Function)为

$$\nabla^2 u = 0$$

所以$\triangle = \nabla^2$为**拉普拉斯算子(Laplace Operator)**

教材P235

Pierre-Simon Laplace

Pierre-Simon Laplace，法国数学家和物理学家。
被誉为法国的牛顿和天体力学之父。

Pierre-Simon Laplace

科学四大神兽：

Pierre-Simon Laplace

科学四大神兽：

拉普拉斯妖，薛定谔猫，芝诺乌龟，麦克斯韦妖精。

Pierre-Simon Laplace

科学四大神兽：

拉普拉斯妖，薛定谔猫，芝诺乌龟，麦克斯韦妖精。

假如有这么一个智者，能够清楚的知道宇宙中某一刻当中所有的物质，包括微观粒子。他能知道所有物质的运动状态和位置，还有所受到的力。而且这个智者，还拥有足够强大的运算能力，能够分析并对数据进行处理！

Pierre-Simon Laplace

科学四大神兽：

拉普拉斯妖，薛定谔猫，芝诺乌龟，麦克斯韦妖精。

假如有这么一个智者，能够清楚的知道宇宙中某一刻当中所有的物质，包括微观粒子。他能知道所有物质的运动状态和位置，还有所受到的力。而且这个智者，还拥有足够强大的运算能力，能够分析并对数据进行处理！

那么宇宙当中所有的变化就将包含在一条简单的公式当中，所以对于这个智者而言，就没有什么事情可以难倒他，他也没有什么事情是模糊的，一切都是可知的，未来只会像过去一样出现在他眼前！这就是所谓的拉普拉斯妖！

例5.

$$f(x,y)=\int_0^{xy} e^{-t^2}\partial t$$

求 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

例5.

$$f(x,y)=\int_0^{xy} e^{-t^2}\partial t$$

求 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$， $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

解.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=e^{-(xy)^2}y=ye^{-x^2y^2}$$

例5.

$$f(x,y)=\int_0^{xy}e^{-t^2}\partial t$$

求 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

解.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=e^{-(xy)^2}y=ye^{-x^2y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=ye^{-x^2y^2}(-2xy^2)=-2xy^3e^{-x^2y^2}$$

例5.

$$f(x,y)=\int_0^{xy} e^{-t^2}\partial t$$

求 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

解.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=e^{-(xy)^2}y=ye^{-x^2y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=ye^{-x^2y^2}(-2xy^2)=-2xy^3e^{-x^2y^2}$$

由对称性：

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-2yx^3e^{-y^2x^2}$$

作业

习题9-2：5. 6. 7. 8.

2020: $\int \frac{1}{x^5} dx$

2021: $\int \frac{1}{x^5+1} dx$

2022: $$\lim_{x\to+\infty} - \frac{\int_0^x \frac{\ln t}{(t^2+1)(t^3+1)} dt \left(\int_0^x |\sin t|\, dt\right)^2 \exp\left(3\sum_{k=0}^{x} \frac{1}{x+k}\right)}{x^5 Li_5\left(\frac{1}{x}\right) - x^4 - \frac{1}{32}x^3}$$

知识拓展：Bilibili上Laplace方程视频