高等数学

张爱林

深圳大学

March 26, 2022

第九章 多元函数微分法及其应用

第三节 全微分

多元函数的连续性

多元函数偏导数存在$\not\Rightarrow$函数连续或有极限

二元函数偏导数的定义：

$$f_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta_x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

二元函数连续性的定义：

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Delta z=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}[f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)]=0$$

根本不是同一类极限！

多元函数的连续性

?$\Rightarrow$多元函数连续或有极限

回忆：一元函数微分

一元函数$y=f(x)$在x处可微，

$$\Delta y = \textcolor{red}{f'(x_0)\Delta x} + \textcolor{blue}{\alpha\Delta x}$$

回忆：一元函数微分

一元函数$y=f(x)$在x处可微，

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha\Delta x$$

$f'(x_0)\Delta x$：Δx的线性函数，是Δy的主要部分

回忆：一元函数微分

一元函数$y=f(x)$在x处可微，

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha\Delta x$$

$f'(x_0)\Delta x$：Δx的线性函数，是Δy的主要部分

$\alpha\Delta x$：Δx的高阶无穷小，微不足道的一小部分

回忆：一元函数微分

函数的微分记为：$dy = A(x)\Delta x$

回忆：一元函数微分

函数的微分记为：$dy = A(x)\Delta x$

定理.

$y = f(x)$在x处可微的充分必要条件是$y = f(x)$在x处可导，且

$$\frac{dy}{dx} = A(x), \Delta x = dx$$

故而

$$dy = f'(x)dx$$

多元函数全微分

由一元函数中增量Δx与微分dy之间的关系，

多元函数全微分

由一元函数中增量Δx与微分dy之间的关系，

二元函数$z = f(x, y)$也可写出两个偏增量：

$$f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$$

$$f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

多元函数全微分

由一元函数中增量Δx与微分dy之间的关系，

二元函数$z = f(x, y)$也可写出两个偏增量：

$$f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$$

$$f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

故而得到两个偏导数：

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = f_x(x_0, y_0)$$

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} = f_y(x_0, y_0)$$

多元函数全微分

二元函数$z=f(x,y)$如果写出关于函数的全增量：

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$$

多元函数全微分

二元函数$z=f(x,y)$如果写出关于函数的全增量：

$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$

假设矩阵边长为x,y，则面积为$z=f(x,y)=xy$

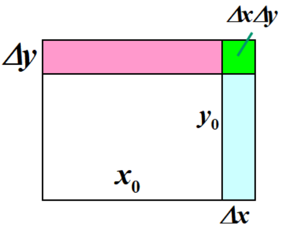
多元函数全微分

二元函数$z=f(x,y)$如果写出关于函数的全增量：

$\Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0)$

假设矩阵边长为x,y，则面积为$z=f(x,y)=xy$

矩形面积在(x_0,y_0)处的全增量为：



$\Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0)$

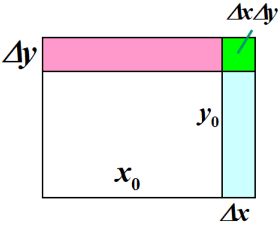
多元函数全微分

二元函数$z=f(x,y)$如果写出关于函数的全增量：

$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$

假设矩阵边长为x,y，则面积为$z=f(x,y)=xy$

矩形面积在(x_0,y_0)处的全增量为：



$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$

$=(x_0+\Delta x)(y_0+\Delta y)-x_0y_0$

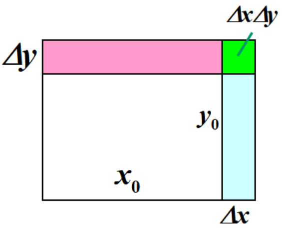
多元函数全微分

二元函数$z=f(x,y)$如果写出关于函数的全增量：

$\Delta z=f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$

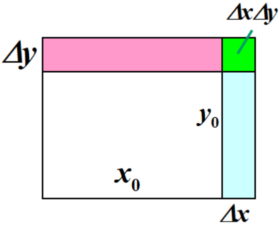
假设矩阵边长为x,y，则面积为$z=f(x,y)=xy$

矩形面积在(x_0,y_0)处的全增量为：



$$\Delta z=f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$$
$$=(x_0+\Delta x)(y_0+\Delta y)-x_0y_0$$
$$=y_0\Delta x+x_0\Delta y+\Delta x\Delta y$$

多元函数全微分

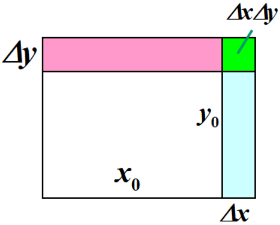


$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

$$= (x_0 + \Delta x)(y_0 + \Delta y) - x_0 y_0$$

$$= y_0 \Delta x + x_0 \Delta y + \Delta x \Delta y$$

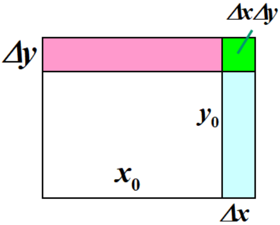
多元函数全微分



$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$
$$= (x_0 + \Delta x)(y_0 + \Delta y) - x_0 y_0$$
$$= y_0 \Delta x + x_0 \Delta y + \Delta x \Delta y$$

$y_0 \Delta x + x_0 \Delta y$：线性主要部分

多元函数全微分



$$\Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0)$$

$$= (x_0+\Delta x)(y_0+\Delta y) - x_0 y_0$$

$$= y_0\Delta x + x_0\Delta y + \Delta x\Delta y$$

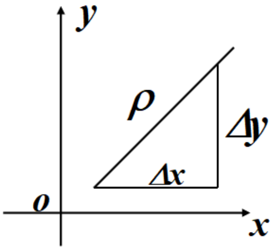
$y_0\Delta x + x_0\Delta y$：线性主要部分

$\Delta x\Delta y$：高阶无穷小，微不足道的一小部分

多元函数全微分

二元函数$z=f(x,y)$如果写出关于函数的全增量：

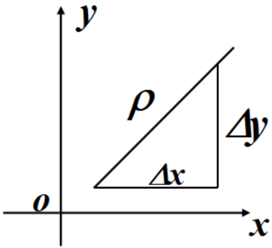
$$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$$



多元函数全微分

二元函数$z=f(x,y)$如果写出关于函数的全增量：

$\Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0)$



可表示为$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$,

$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$

那么称$y=f(x,y)$在(x,y)处可微。

多元函数全微分

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$$

二元函数的全微分记为：

$$dz = A\Delta x + B\Delta y$$

多元函数全微分

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$$

二元函数的全微分记为：

$$dz = A\Delta x + B\Delta y$$

$\Delta z - dz = o(\rho)$

$\Delta z \approx dz$，误差：$o(\rho)$

多元函数全微分

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$$

二元函数的全微分记为：

$$dz = A\Delta x + B\Delta y$$

$\Delta z - dz = o(\rho)$

$\Delta z \approx dz$，误差：$o(\rho)$

注.如果函数$y = f(x, y)$在区域D内各点处都可微分，那么称这函数在D内可微分。

可微与连续的关系

定理.（可微与连续的关系）

$z=f(x,y)$在(x,y)处可微$\Longrightarrow z=f(x,y)$在(x,y)处连续

可微与连续的关系

定理.（可微与连续的关系）

$z=f(x,y)$在(x,y)处可微$\Longrightarrow z=f(x,y)$在(x,y)处连续

证.$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$

可微与连续的关系

定理.（可微与连续的关系）

$z=f(x,y)$在(x,y)处可微$\Longrightarrow z=f(x,y)$在(x,y)处连续

证.$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$

函数$f(x,y)$在点(x,y)处连续当且仅当

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Delta z=0$$

可微与连续的关系

定理.（可微与连续的关系）

$z=f(x,y)$在(x,y)处可微$\Longrightarrow z=f(x,y)$在(x,y)处连续

证. $\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$

函数$f(x,y)$在点(x,y)处连续当且仅当

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Delta z=0$$

函数$f(x,y)$在点(x,y)处可微：$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$

可微与连续的关系

定理.（可微与连续的关系）

$z=f(x,y)$在(x,y)处可微$\Longrightarrow z=f(x,y)$在(x,y)处连续

证.$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$

函数$f(x,y)$在点(x,y)处连续当且仅当

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Delta z=0$$

函数$f(x,y)$在点(x,y)处可微：$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$

故而

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Delta z=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}(A\Delta x+B\Delta y+o(\rho))=0$$

可微与连续的关系

定理.（可微与连续的关系）

$z=f(x,y)$在(x,y)处可微$\Longrightarrow z=f(x,y)$在(x,y)处连续

证.$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$

函数$f(x,y)$在点(x,y)处连续当且仅当

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Delta z=0$$

函数$f(x,y)$在点(x,y)处可微：$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$

故而

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Delta z=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}(A\Delta x+B\Delta y+o(\rho))=0$$

所以$f(x,y)$在点(x,y)处连续

可微与偏微分的关系

定理1.（可微的必要条件）

$z=f(x,y)$在(x,y)处可微

$\Longrightarrow z=f(x,y)$在(x,y)处的偏导数存在，

且$A=f_x(x,y), B=f_y(x,y)$

可微与偏微分的关系

定理1.（可微的必要条件）

$z=f(x,y)$在(x,y)处可微

$\Longrightarrow z=f(x,y)$在(x,y)处的偏导数存在，

且$A=f_x(x,y), B=f_y(x,y)$

故而

$$dz=f_x(x,y)\Delta x+f_y(x,y)\Delta y$$

即

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$$

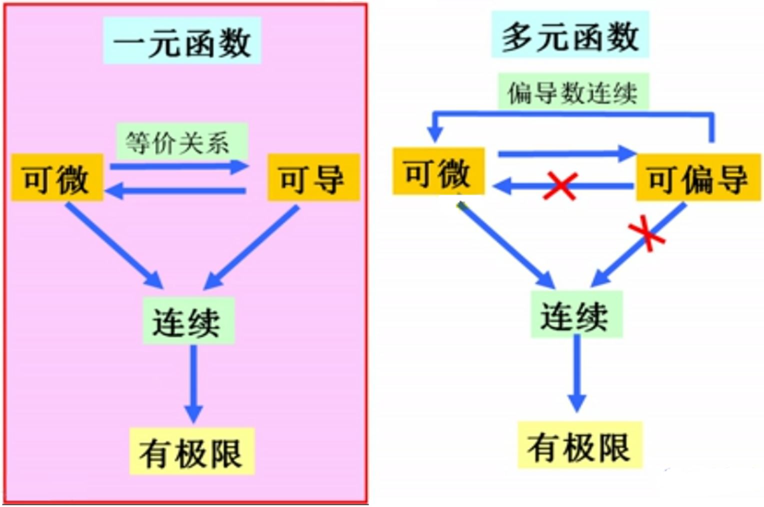
可微与偏微分的关系

定理2.（可微的充分条件）

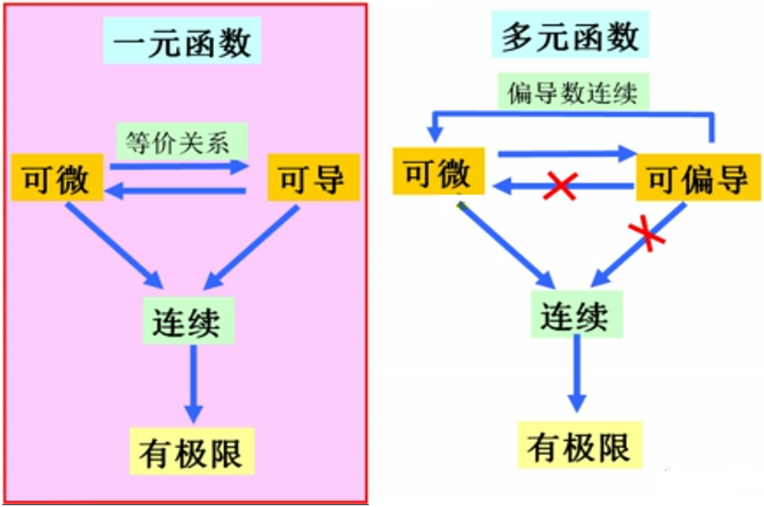
$z=f(x,y)$的偏导数$\frac{\partial z}{\partial x}$、$\frac{\partial z}{\partial y}$在$(x,y)$处连续

$\Longrightarrow z=f(x,y)$在(x,y)处可微

多元函数的连续性



多元函数的连续性



习题9-3: 5.

多元函数的连续性

你若失眠，默念三遍：

可导一定连续，连续一定可积，连续一定有界，

可积一定有界，可积不一定连续，

连续不一定可微，可微一定连续，

偏导连续一定可微，偏导存在不一定连续，

连续不一定偏导存在，可微不一定偏导连续，

二阶混合偏导连续的偏导相等，

偏导一个连续一个有界函数可微。

二元函数全微分的计算

二元函数计算全微分的公式:

$$dz = f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$$

二元函数全微分的计算

二元函数计算全微分的公式：

$$dz = f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$$

将增量记作$\Delta x = dx, \Delta y = dy$

二元函数全微分的计算

二元函数计算全微分的公式:

$$dz = f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$$

将增量记作$\Delta x = dx, \Delta y = dy$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

二元函数全微分的计算

二元函数计算全微分的公式：

$$dz = f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$$

将增量记作$\Delta x = dx, \Delta y = dy$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

二元函数全微分等于其两个偏微分之和。

三元函数全微分的计算

三元函数计算全微分的公式： $u = f(x, y, z)$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z$$

三元函数全微分的计算

三元函数计算全微分的公式： $u = f(x, y, z)$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z$$

将增量记作$\Delta x = dx, \Delta y = dy, \Delta z = dz$

三元函数全微分的计算

三元函数计算全微分的公式： $u = f(x, y, z)$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z$$

将增量记作$\Delta x = dx, \Delta y = dy, \Delta z = dz$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$$

三元函数全微分的计算

三元函数计算全微分的公式： $u=f(x,y,z)$

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial u}{\partial z}\Delta z$$

将增量记作$\Delta x=dx,\Delta y=dy,\Delta z=dz$

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz$$

教材P75，例1, 2, 3

三元函数全微分的计算

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$$

三元函数全微分的计算

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$$

微分的向量形式：

$$du = (\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z})(dx, dy, dz)$$

$$= \nabla u \cdot dr$$

梯度与导数

导数：

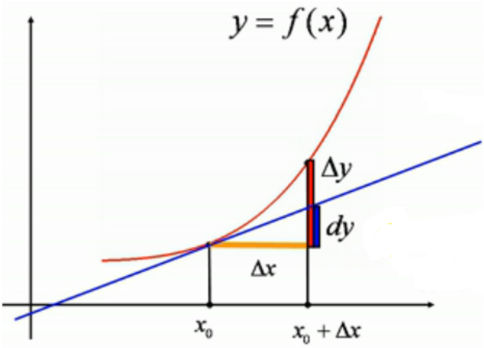
$$dy = f'(x)dx$$

梯度：

$$du = \nabla u \cdot dr$$

一元函数微分的几何意义

切线函数的增量：

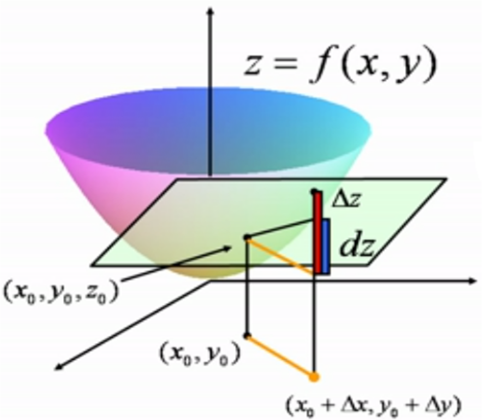


$$\Delta y = A(x)\Delta x + o(\Delta x)$$

$$dy = A(x)\Delta x$$

全微分的几何意义

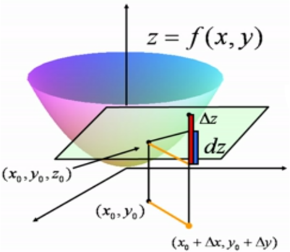
切平面函数的增量：



$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

全微分的几何意义

切平面函数的增量：

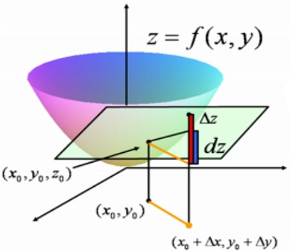


全微分dz是函数全增量Δz的局部线性化，

是函数的线性近似。

全微分的几何意义

切平面函数的增量：



全微分dz是函数全增量Δz的局部线性化，

是函数的线性近似。

从几何上看，是函数上某一点处局部地用简单的切平面近似代替复杂的曲面。

作业

习题9-3：1．2.