高等数学

张爱林

深圳大学

March 24, 2022

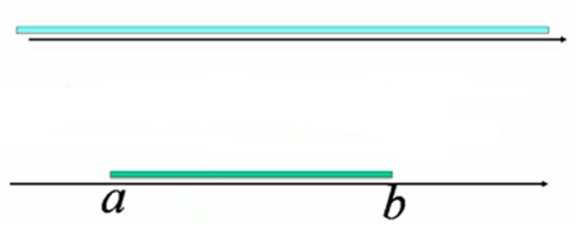
第九章 多元函数微分法及其应用

第一节 多元函数的基本概念

一维点集

直线R中的点集.

实数集/一维空间：$R = \{x | -\infty < x < +\infty\}$

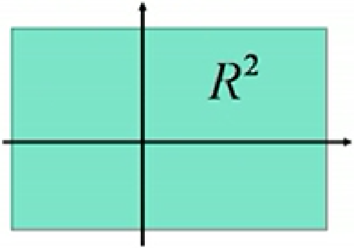


$[a, b]$区间：$A = \{x | a \le x \le b\}$

二维点集

平面点集. 坐标平面上具有某种性质P的点的集合.

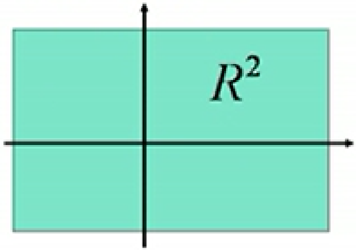
实平面/二维空间： $R^2 = \{(x, y) | -\infty < x, y < +\infty\}$



二维点集

平面点集. 坐标平面上具有某种性质P的点的集合.

实平面/二维空间： $R^2 = \{(x, y) | -\infty < x, y < +\infty\}$



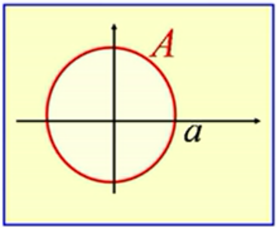
平面点集记作$E = \{(x, y) | (x, y)具有性质P\}$

二维点集

平面点集举例.

圆:

$$A = \{(x, y)|x^2 + y^2 = a^2\}$$

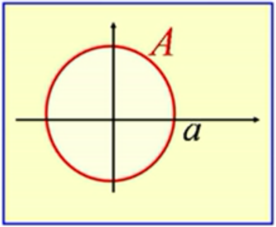


二维点集

平面点集举例.

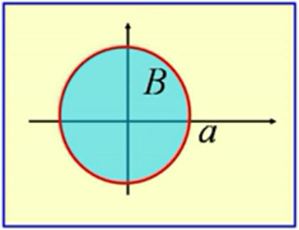
圆:

$$A=\{(x,y)|x^2+y^2=a^2\}$$



圆域:

$$A=\{(x,y)|x^2+y^2\le a^2\}$$



二维点集

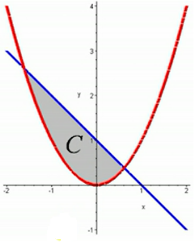
平面点集举例.

$$C = \{(x, y) | x^2 \le y \le 1 - x\}$$

二维点集

平面点集举例.

$$C=\{(x,y)|x^2\le y\le 1-x\}$$



二维点集

平面点集举例. $D = \{(x, y) | \mid x \mid + \mid y \mid \leq \mid 1 \mid \}$

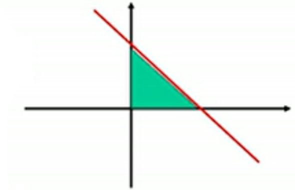
$$x > 0, y > 0 \Rightarrow x + y \leq 1$$

$$x > 0, y < 0 \Rightarrow x - y \leq 1$$

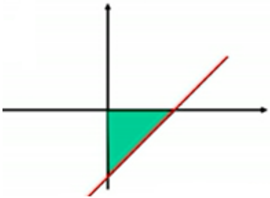
二维点集

平面点集举例. $D = \{(x, y) | \mid x \mid + \mid y \mid \leq \mid 1 \mid\}$

$$x > 0, y > 0 \Rightarrow x + y \leq 1$$



$$x > 0, y < 0 \Rightarrow x - y \leq 1$$



二维点集

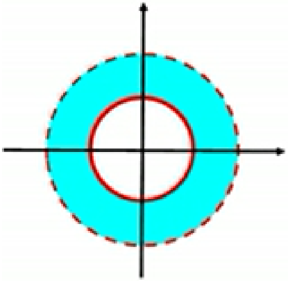
平面点集举例.

圆环域：$E=\{(x,y)|1\leq x^2+y^2<4\}$

二维点集

平面点集举例.

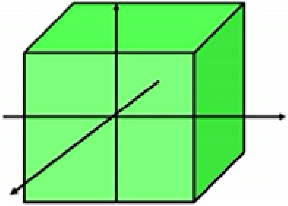
圆环域： $E=\{(x,y)|1\leq x^2+y^2<4\}$



三维点集

空间点集.

实空间/三维空间：$R^3 = \{(x,y,z)| -\infty < x,y,z < +\infty\}$

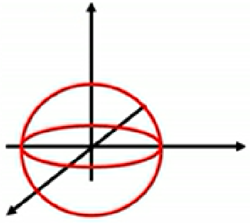


三维点集

空间点集举例.

球面:

$$A = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$$

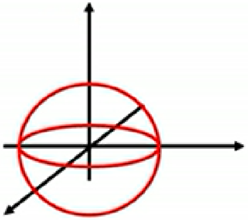


三维点集

空间点集举例.

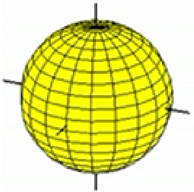
球面:

$$A = \{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2=a^2\}$$



球体:

$$A = \{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\le a^2\}$$



三维点集

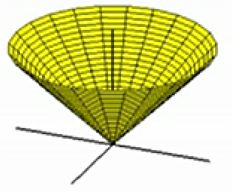
空间点集举例.

$$C=\{(x,y,z)|\sqrt{x^2+y^2}<z<\sqrt{a^2-x^2-y^2}\}$$

三维点集

空间点集举例.

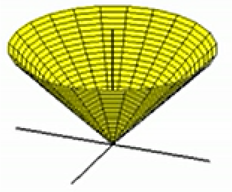
$$C = \{(x, y, z) | \sqrt{x^2 + y^2} < z < \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\}$$

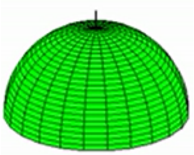


三维点集

空间点集举例.

$$C=\{(x,y,z)|\sqrt{x^2+y^2}<z<\sqrt{a^2-x^2-y^2}\}$$

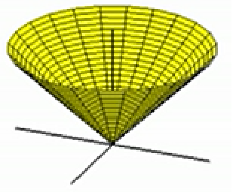


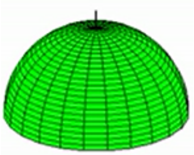


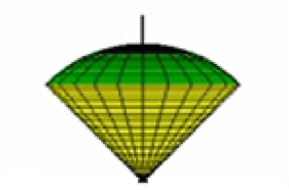
三维点集

空间点集举例.

$$C = \{(x, y, z) | \sqrt{x^2 + y^2} < z < \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\}$$





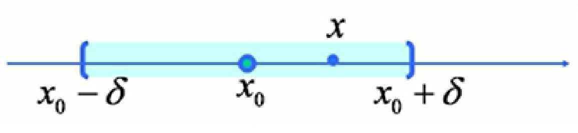


邻域

一维邻域.

点x_0的δ邻域：

$$U(x_0,\delta)=\{x|\quad |x-x_0|<\delta\}$$
$$=(x_0-\delta,x_0+\delta)$$



邻域

平面中的邻域.

点$M_0(x_0, y_0)$的δ邻域:

$$U(M_0, \delta) = \{(x, y) | \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta\}$$

$$= \{(x, y) | \quad (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < \delta^2\}$$

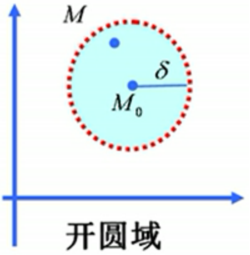
邻域

平面中的邻域.

点$M_0(x_0,y_0)$的δ邻域:

$$U(M_0,\delta)=\{(x,y)|\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}$$

$$=\{(x,y)|\quad (x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2\}$$



邻域

空间中的邻域.

点$M_0(x_0, y_0, z_0)$的δ邻域：

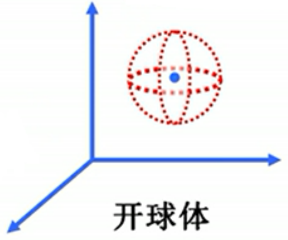
$$U(M_0, \delta)$$
$$= \{(x, y, z) | \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} < \delta\}$$
$$= \{(x, y, z) | \quad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 < \delta^2\}$$

邻域

空间中的邻域.

点$M_0(x_0, y_0, z_0)$的δ邻域:

$$U(M_0, \delta)$$
$$= \{(x, y, z) | \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} < \delta\}$$
$$= \{(x, y, z) | \quad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 < \delta^2\}$$

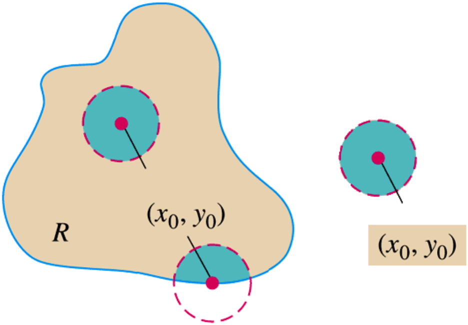


点与点集之间的关系

任意一点$P \subset R^2$与任意一个点集$E \subset R^2$之间必有以下几种关系中的一种：

点与点集之间的关系

任意一点$P \subset R^2$与任意一个点集$E \subset R^2$之间必有以下几种关系中的一种：



教材P55图9-1

点与点集之间的关系

内点	若存在领域$U(P)$使得$U(P) \subset E$
外点	若存在领域$U(P)$使得$U(P) \cap E = \varnothing$
边界点	若点P的任一领域内既有属于E的点又有不属于E的点
聚点	若存在去心领域$U(P)$使得领域中总有属于E的点

点与点集之间的关系

内点 若存在领域$U(P)$使得$U(P) \subset E$

外点 若存在领域$U(P)$使得$U(P) \cap E = \varnothing$

边界点 若点P的任一领域内既有属于E的点又有不属于E的点

聚点 若存在去心领域$U(P)$使得领域中总有属于E的点

E的边界点的全体称E的边界，记作∂E，∂读作round。

点与点集之间的关系

内点 若存在领域$U(P)$使得$U(P) \subset E$

外点 若存在领域$U(P)$使得$U(P) \cap E = \varnothing$

边界点 若点P的任一领域内既有属于E的点又有不属于E的点

聚点 若存在去心领域$\mathring{U}(P)$使得领域中总有属于E的点

E的边界点的全体称E的边界，记作∂E，∂读作round。

点集E的聚点P本身，可以属于E，也可以不属于E。

点与点集之间的关系

内点 若存在领域$U(P)$使得$U(P) \subset E$

外点 若存在领域$U(P)$使得$U(P) \cap E = \varnothing$

边界点 若点P的任一领域内既有属于E的点又有不属于E的点

聚点 若存在去心领域$U(P)$使得领域中总有属于E的点

E的边界点的全体称E的边界，记作∂E，∂读作round。

点集E的聚点P本身，可以属于E，也可以不属于E。

教材P55例如.

重要的平面点集

开集：	若点集E的点都是其内点
闭集：	若点集E的边界$\partial E \subset E$

重要的平面点集

开集： 若点集E的点都是其内点

闭集： 若点集E的边界$\partial E \subset E$

开集例子：开圆域（开集不包含任何边界点）

$$D = \{(x, y) | x^2 + y^2 < a^2\}$$

重要的平面点集

开集：　若点集E的点都是其内点

闭集：　若点集E的边界$\partial E \subset E$

开集例子：开圆域（开集不包含任何边界点）

$$D = \{(x, y) | x^2 + y^2 < a^2\}$$

闭集例子：闭圆域（闭集包含每一个边界点）

$$D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq a^2\}$$

重要的平面点集

开集：	若点集E的点都是其内点
闭集：	若点集E的边界$\partial E \subset E$

开集例子：开圆域（开集不包含任何边界点）

$$D = \{(x, y)|x^2 + y^2 < a^2\}$$

闭集例子：闭圆域（闭集包含每一个边界点）

$$D = \{(x, y)|x^2 + y^2 \leq a^2\}$$

教材P56例如.

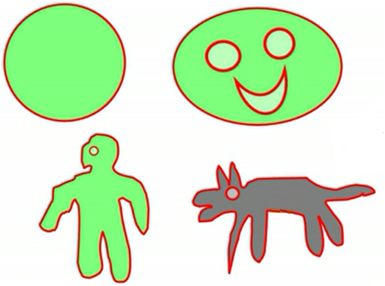
重要的平面点集

连通集：若点集E内任意两点都可用折线连接，

且该折线上的点都属于E。

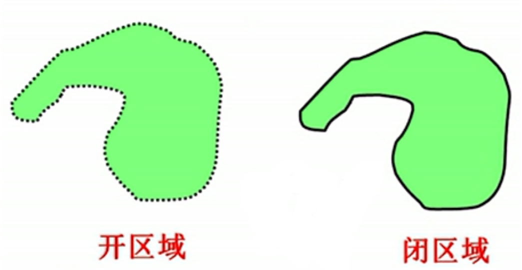
重要的平面点集

连通集：若点集E内任意两点都可用折线连接，且该折线上的点都属于E。



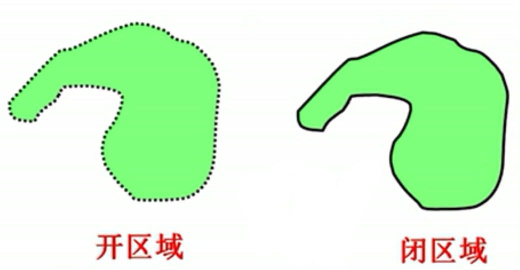
重要的平面点集

开区域	连通的开集
闭区域	连通的闭集



重要的平面点集

开区域	连通的开集
闭区域	连通的闭集



教材P56例如.

重要的平面点集

有界点集	$\exists r > 0$使得$E \subset U(0, r)$
无界点集	不$\exists r > 0$使得$E \subset U(0, r)$

重要的平面点集

有界点集	$\exists r > 0$使得$E \subset U(0, r)$
无界点集	不$\exists r > 0$使得$E \subset U(0, r)$

$$A = \{(x, y) | 0 < x^2 + y^2 \leq a^2\}$$

重要的平面点集

有界点集	$\exists r > 0$使得$E \subset U(0,r)$
无界点集	不$\exists r > 0$使得$E \subset U(0,r)$

$A = \{(x,y) | 0 < x^2 + y^2 \le a^2\}$ 有界，开集，连通

重要的平面点集

有界点集	$\exists r>0$使得$E\subset U(0,r)$
无界点集	不$\exists r>0$使得$E\subset U(0,r)$

$A=\{(x,y)|0<x^2+y^2\le a^2\}$　有界，开集，连通

$B=\{(x,y)|a^2\le x^2+y^2\le b^2\}$

重要的平面点集

有界点集	$\exists r > 0$使得$E \subset U(0, r)$
无界点集	不$\exists r > 0$使得$E \subset U(0, r)$

$A = \{(x, y) | 0 < x^2 + y^2 \le a^2\}$　有界，开集，连通

$B = \{(x, y) | a^2 \le x^2 + y^2 \le b^2\}$　有界，闭集，连通

重要的平面点集

有界点集 $\exists r > 0$使得$E \subset U(0, r)$

无界点集 不$\exists r > 0$使得$E \subset U(0, r)$

$A = \{(x, y) | 0 < x^2 + y^2 \leq a^2\}$ 有界，开集，连通

$B = \{(x, y) | a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2\}$ 有界，闭集，连通

$C = \{(x, y) | x^2 + y^2 > a^2\}$

重要的平面点集

有界点集	$\exists r>0$使得$E\subset U(0,r)$
无界点集	不$\exists r>0$使得$E\subset U(0,r)$

$A=\{(x,y)|0<x^2+y^2\leq a^2\}$ 有界，开集，连通

$B=\{(x,y)|a^2\leq x^2+y^2\leq b^2\}$ 有界，闭集，连通

$C=\{(x,y)|x^2+y^2>a^2\}$ 无界，开集，连通

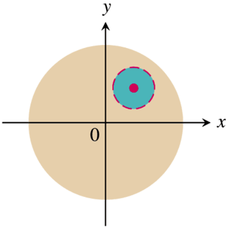
重要的平面点集

教材P56例如.

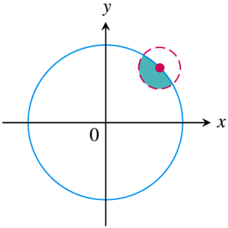
重要的平面点集

教材P56例如.

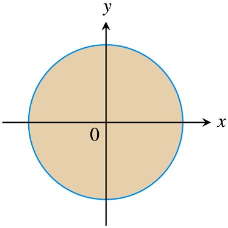
例1.



$\{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$
Open unit disk.
Every point an
interior point.



$\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$
Boundary of unit
disk. (The unit
circle.)

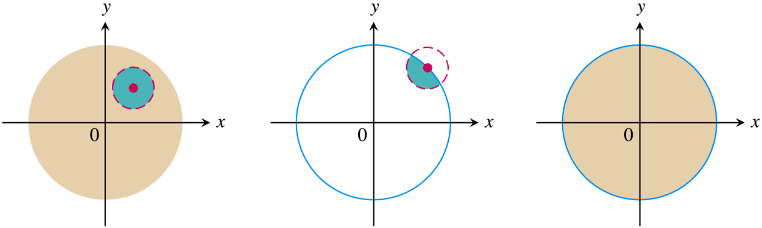


$\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$
Closed unit disk.
Contains all
boundary points.

重要的平面点集

教材P56例如.

例1.



$\{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$
Open unit disk.
Every point an interior point.

$\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$
Boundary of unit disk. (The unit circle.)

$\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$
Closed unit disk.
Contains all boundary points.

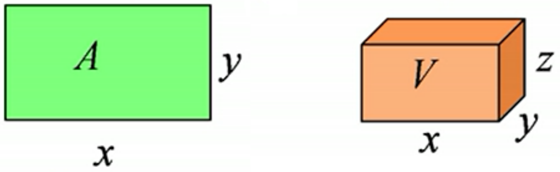
习题9-1 1.

多元函数例子

矩形的面积到长方体的体积

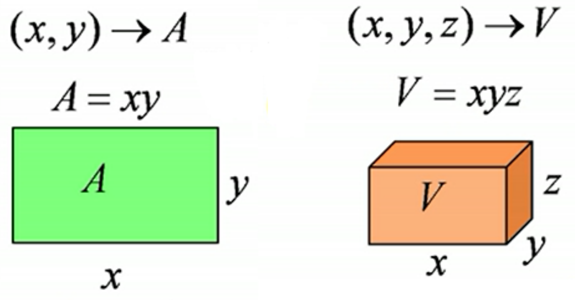
$$(x,y)\to A \qquad (x,y,z)\to V$$

$$A=xy \qquad V=xyz$$



多元函数例子

矩形的面积到长方体的体积



教材P57例1，例2，例3

二元函数的定义

定义. $\forall(x,y)\in D\subset\mathbb{R}^2$，存在唯一的$z\in\mathbb{R}$

称映射$f:(x,y)\to z$为定义在D上的函数，记为

$$z=f(x,y),\ (x,y)\in D.$$

二元函数的定义

定义. $\forall (x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2$，存在唯一的$z \in \mathbb{R}$

称映射$f:(x,y) \to z$为定义在D上的函数，记为

$$z = f(x,y),\ (x,y) \in D.$$

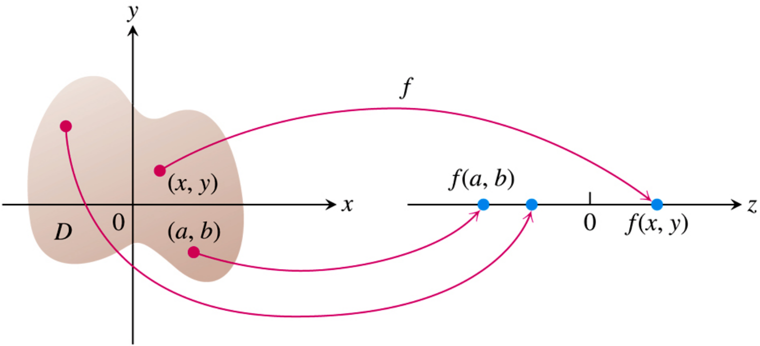
其中x,y是自变量，z是因（x,y而）变量，

D是函数f的定义域，f是对应法则，

函数值$f(x,y)$全体组成的数集称为函数的值域，记作

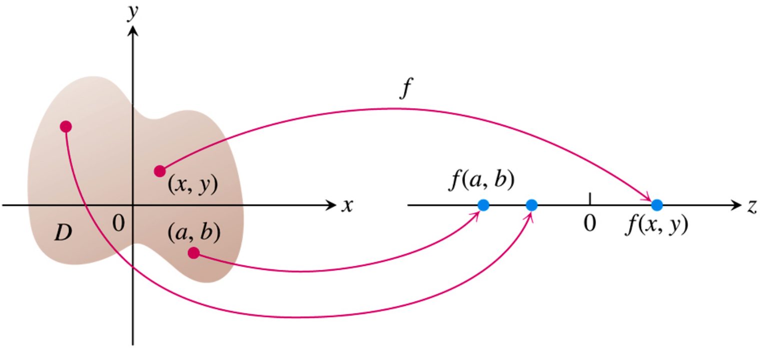
$$f(D) = \{z \mid z = f(x,y), (x,y) \in D\}$$

二元函数的定义



二元函数$z = f(x, y)$的图形是一张曲面.

二元函数的定义



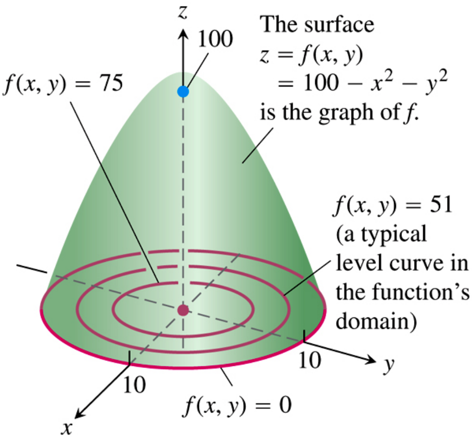
二元函数$z = f(x, y)$的图形是一张曲面.

教材P59例如.

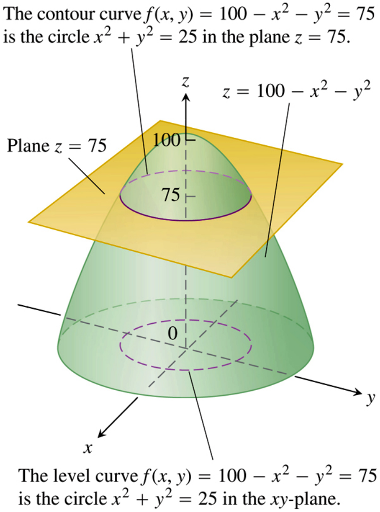
二元函数的图形

二元函数$z = f(x, y)$的图形是一张曲面.

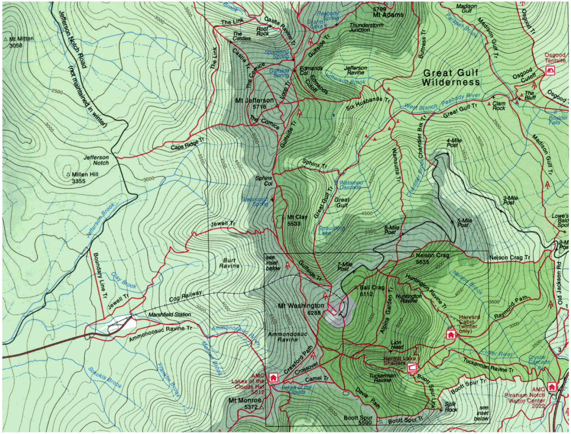
例2.



二元函数的图形


The contour curve $f(x, y) = 100 - x^2 - y^2 = 75$
is the circle $x^2 + y^2 = 25$ in the plane $z = 75$.
z
$z = 100 - x^2 - y^2$
Plane $z = 75$
100
75
0
y
x
The level curve $f(x, y) = 100 - x^2 - y^2 = 75$
is the circle $x^2 + y^2 = 25$ in the xy-plane.

二元函数的图形


Mt Mitten 3058
Jefferson Notch Road
(not maintained in winter)
Jefferson Notch
Millen Hill 3355
Jefferson Brook
Boundary Line Tr
Clay Brook
Jewell Tr
Marshfield Station
Ammonoosuc Ravine Tr
Cog Railway
Sokokis Brook
Franklin Brook
Caps Ridge Tr
The Link
The Castles
Castle Ravine Tr
Castle Tr
Roof Rock
The Cornice
Mt Jefferson 5716
Sphinx Col
Jewell Tr
Burt Ravine
Mt Clay 5533
Gulfside Tr
Mt Washington 6288
Ammonoosuc Ravine
Crawford Path
Crossover
Camel Tr
AMC Lakes of the Clouds Hut 5012
Lakes of the Clouds
Mt Monroe 5372
Boott Spur 5500
Boott Spur Tr
Davis Path
Tuckerman Ravine
Hermit Lake Shelters
Lion Head
Alpine Garden Tr
Huntington Ravine
Huntington Ravine Tr
Ball Crag 6112
Nelson Crag 5635
Nelson Crag Tr
Harvard Cabin (winter only)
Raymond Path
Tuckerman Ravine Tr
Cutler River
Crystal Cascade
AMC Pinkham Notch Visitor Center 2022
Split Rock
see inset below
Old Jackson Rd
Great Gulf
Spaulding Lake
Sphinx Tr
Great Gulf Tr
Wamsutta Tr
Chandler Brk Tr
4-Mile Post
3-Mile Post
5-Mile Post
6-Mile Post
7-Mile Post
Great Gulf Wilderness
Six Husbands Tr
West Branch Peabody River
Jefferson Ravine
Edmands Col
Thunderstorm Junction
5799 Mt Adams
Storm Lake
Buttress Tr
Madison Gulf
Madison Gulf Tr
Osgood Tr
Osgood Tentsite
Osgood Cutoff
The Bluff
Clam Rock
Lowe's Bald Spot

三元以及n元函数的定义

三元函数：

定义. $\forall (x,y,z)\in D\subset\mathbb{R}^3$，存在唯一的$u\in\mathbb{R}$

称映射$f:(x,y,z)\to u$为定义在D上的函数，记为

$$u=f(x,y,z),\ (x,y,z)\in D.$$

三元以及n元函数的定义

三元函数：

定义. $\forall (x,y,z)\in D\subset \mathbb{R}^3$，存在唯一的$u\in\mathbb{R}$

称映射$f:(x,y,z)\to u$为定义在D上的函数，记为

$$u=f(x,y,z),\ (x,y,z)\in D.$$

三元函数的图形在四维空间才可画出.

n元函数：

$y=f(x_1,x_2,...,x_n)$

三元以及n元函数的定义

三元函数：

定义. $\forall(x,y,z)\in D\subset\mathbb{R}^3$，存在唯一的$u\in\mathbb{R}$
称映射$f:(x,y,z)\to u$为定义在D上的函数，记为

$$u=f(x,y,z),\ (x,y,z)\in D.$$

三元函数的图形在四维空间才可画出.

n元函数：

$y=f(x_1,x_2,...,x_n)$

$n\geq 2$时，n元函数统称为多元函数。

n元函数

(a) These are functions of two variables. Note the restrictions that may apply to their domains in order to obtain a real value for the dependent variable z.

Function	**Domain**	**Range**
$z = \sqrt{y - x^2}$	$y \geq x^2$	$[0, \infty)$
$z = \dfrac{1}{xy}$	$xy \neq 0$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
$z = \sin xy$	Entire plane	$[-1, 1]$

(b) These are functions of three variables with restrictions on some of their domains.

Function	**Domain**	**Range**
$w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$	Entire space	$[0, \infty)$
$w = \dfrac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$	$(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$	$(0, \infty)$
$w = xy \ln z$	Half-space $z > 0$	$(-\infty, \infty)$

n元函数

(a) These are functions of two variables. Note the restrictions that may apply to their domains in order to obtain a real value for the dependent variable z.

Function	Domain	Range
$z = \sqrt{y - x^2}$	$y \geq x^2$	$[0, \infty)$
$z = \dfrac{1}{xy}$	$xy \neq 0$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
$z = \sin xy$	Entire plane	$[-1, 1]$

(b) These are functions of three variables with restrictions on some of their domains.

Function	Domain	Range
$w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$	Entire space	$[0, \infty)$
$w = \dfrac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$	$(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$	$(0, \infty)$
$w = xy \ln z$	Half-space $z > 0$	$(-\infty, \infty)$

习题9-1 2. 3. 5.

一元函数的极限

定义. 设函数$f(x)$在点x_0的去心邻域内有定义。

若存在常数A，使：

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0\text{，}\exists\text{正数}\delta\text{，当}0 < |x - x_0| < \delta\text{时，有}|f(x) - A| < \varepsilon\text{。}}$$

或者

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0\text{，}\exists\text{正数}\delta\text{，当}x \in \mathring{U}(x_0, \delta)\text{时，有}|f(x) - A| < \varepsilon\text{。}}$$

则称该函数$f(x)$当$x \to x_0$时**极限**为A，记作

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \to A(x \to x_0)$$

多元函数的极限

二元函数极限定义.

设函数$f(P)=f(x,y)$定义域为D，$P_0=(x_0,y_0)$是D的聚点。若存在常数A，使：

多元函数的极限

二元函数极限定义.

设函数$f(P)=f(x,y)$定义域为D，$P_0=(x_0,y_0)$是D的聚点。若存在常数A，使：

$$\boxed{\forall\varepsilon>0\text{，}\exists\text{正数}\delta\text{，当}(x,y)\in\mathring{U}((x_0,y_0),\delta)\text{时，有}|f(x,y)-A|<\varepsilon\text{。}}$$

多元函数的极限

二元函数极限定义.

设函数$f(P) = f(x, y)$定义域为D，$P_0 = (x_0, y_0)$是D的聚点。若存在常数A，使：

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0，\exists \text{正数}\delta，\text{当}(x, y) \in \mathring{U}((x_0, y_0), \delta)\text{时，有}|f(x, y) - A| < \varepsilon\text{。}}$$

则称该函数$f(x, y)$当$P \to P_0$时极限为A，

多元函数的极限

二元函数极限定义.

设函数$f(P)=f(x,y)$定义域为D，$P_0=(x_0,y_0)$是D的聚点。若存在常数A，使：

$\forall\varepsilon>0$，$\exists$正数δ，当$(x,y)\in\mathring{U}((x_0,y_0),\delta)$时，有$|f(x,y)-A|<\varepsilon$。

则称该函数$f(x,y)$当$P\to P_0$时极限为A，记作

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A \text{ 或 } f(x,y)\to A((x,y)\to(x_0,y_0))$$

多元函数的极限

二元函数极限定义.

设函数$f(P)=f(x,y)$定义域为D，$P_0=(x_0,y_0)$是D的聚点。若存在常数A，使：

$\forall\varepsilon>0$，$\exists$正数δ，当$(x,y)\in\mathring{U}((x_0,y_0),\delta)$时，有$|f(x,y)-A|<\varepsilon$。

则称该函数$f(x,y)$当$P\to P_0$时极限为A，记作

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A \text{ 或 } f(x,y)\to A((x,y)\to(x_0,y_0))$$

或者

$$\lim_{P\to P_0} f(x,y)=A \text{ 或 } f(x,y)\to A(P\to P_0)$$

多元函数的极限

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = A \text{ 或 } f(x,y) \to A((x,y) \to (x_0,y_0))$$

或者

$$\lim_{P \to P_0} f(x,y) = A \text{ 或 } f(x,y) \to A(P \to P_0)$$

称为二重极限.

多元函数的极限

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A \text{ 或 } f(x,y)\to A((x,y)\to(x_0,y_0))$$

或者

$$\lim_{P\to P_0} f(x,y)=A \text{ 或 } f(x,y)\to A(P\to P_0)$$

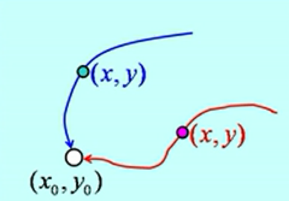
称为二重极限.

教材P60例4

多元函数的极限

二重极限存在，

指P以任何方式趋向于P_0，$f(x,y)$都无限接近于A。



否则极限不存在。

多元函数的极限

确定极限不存在的方法:

找两种不同方式让(x,y)趋向于(x_0,y_0)，使函数$f(x,y)$趋向于两个不同的数，则可断言$f(x,y)$在该点极限不存在.

多元函数的极限

确定极限不存在的方法：

找两种不同方式让(x, y)趋向于(x_0, y_0)，使函数$f(x, y)$趋向于两个不同的数，则可断言$f(x, y)$在该点极限不存在.

教材P61，考察函数

教材P61，例5

多元函数的极限

例3. 求证$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$不存在.

多元函数的极限

例3. 求证$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^2y}{x^4+y^2}$不存在.

解.

当点$P(x,y)$沿$y=kx$趋于原点,

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{kx}{x^2+k^2}=0$$

多元函数的极限

例3. 求证$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y}{x^4+y^2}$不存在.

解.

当点$P(x,y)$沿$y=kx$趋于原点,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{kx}{x^2+k^2}=0$$

当点$P(x,y)$沿$y=kx^2$趋于原点,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{k}{1+k^2}$$

多元函数的极限

例3. 求证$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$不存在.

解.

当点$P(x,y)$沿$y=kx$趋于原点,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{kx}{x^2+k^2} = 0$$

当点$P(x,y)$沿$y=kx^2$趋于原点,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{k}{1+k^2}$$

故而原极限不存在.

一元函数的连续性

定义. 设函数$y = f(x)$在点x_0的某一邻域内有定义，如果

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

或者

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} [f(x + x_0) - f(x_0)] = 0$$

那么就称函数$f(x)$在点x_0连续。

二元函数的连续性

定义. 设函数$y=f(x)$在点x_0的某一邻域内有定义，如果

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$$

或者

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Delta z=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}[f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)]=0$$

那么就称函数$f(x,y)$在点(x_0,y_0)连续。

二元函数的连续性

教材P62，例6

教材P62例如

教材P63，例7

教材P64，例8

习题9-1 8.

多元初等函数

多元初等函数.由多元多项式及基本初等函数经过有限次的四则运算和复合步骤所构成的可用一个式子所表示的多元函数。

多元初等函数

多元初等函数.由多元多项式及基本初等函数经过有限次的四则运算和复合步骤所构成的可用一个式子所表示的多元函数。

一切多元初等函数在其定义域内是连续的。

定理1. （有界性与最大值最小值定理）在有界闭区域D上连续的多元连续函数在D上有界且能取得它的最大值和最小值。

定理1. （有界性与最大值最小值定理）在有界闭区域D上连续的多元连续函数在D上有界且能取得它的最大值和最小值。

定理2. （介值定理）在有界闭区域D上连续的多元连续函数,如果在D上取得两个不同的函数值，则它在D上取得介于这两值之间的任何值至少一次。

作业

习题9-1：4．6.