高等数学

张爱林

深圳大学

November 27, 2021

第四章 不定积分

第三节 分部积分法

1. 分部积分法

分部积分法

由导数公式$(uv)' = u'v + uv'$

积分得$uv = \int u'v\mathrm{d}x + \int uv'\mathrm{d}x.$

分部积分法

由导数公式$(uv)' = u'v + uv'$

积分得$uv = \int u'v\mathrm{d}x + \int uv'\mathrm{d}x$.即

$$\int uv'\mathrm{d}x = uv - \int u'v\mathrm{d}x$$

分部积分法

由导数公式$(uv)' = u'v + uv'$

积分得$uv = \int u'v\mathrm{d}x + \int uv'\mathrm{d}x$.即

$$\int uv'\mathrm{d}x = uv - \int u'v\mathrm{d}x$$

或

$$\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u$$

这就是所谓分部积分公式。

分部积分法

由导数公式$(uv)' = u'v + uv'$

积分得$uv = \int u'v\mathrm{d}x + \int uv'\mathrm{d}x$.即

$$\int uv'\mathrm{d}x = uv - \int u'v\mathrm{d}x$$

或

$$\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u$$

这就是所谓分部积分公式。

注. 选取u和v的原则：

（1）v容易求得；

分部积分法

由导数公式$(uv)' = u'v + uv'$

积分得$uv = \int u'v\mathrm{d}x + \int uv'\mathrm{d}x$.即

$$\int uv'\mathrm{d}x = uv - \int u'v\mathrm{d}x$$

或

$$\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u$$

这就是所谓分部积分公式。

注. 选取u和v的原则:

（1）v容易求得;
（2）$\int u'v\mathrm{d}x$比$\int uv'\mathrm{d}x$ 容易计算。

分部积分法的步骤

$$\int f(x)\mathrm{d}x$$

分部积分法的步骤

$$\int f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int uv'\mathrm{d}x$$

分部积分法的步骤

$$\int f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int uv'\mathrm{d}x$$

$$=\int u\mathrm{d}v$$

分部积分法的步骤

$$\int f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int uv'\mathrm{d}x$$

$$=\int u\mathrm{d}v$$

$$=uv-\int v\mathrm{d}u$$

分部积分法的步骤

$$
\begin{aligned}
&\int f(x)\mathrm{d}x \\
=&\int uv'\mathrm{d}x \\
=&\int u\mathrm{d}v \\
=&uv-\int v\mathrm{d}u \\
=&uv-\int vu'\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

分部积分法的步骤

$$\int f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int uv'\mathrm{d}x$$

$$=\int u\mathrm{d}v$$

$$=uv-\int v\mathrm{d}u$$

$$=uv-\int vu'\mathrm{d}x$$

步骤：

（1）观察；

分部积分法的步骤

$$\int f(x)\mathrm{d}x$$
$$=\int uv'\mathrm{d}x$$
$$=\int u\mathrm{d}v$$
$$=uv-\int v\mathrm{d}u$$
$$=uv-\int vu'\mathrm{d}x$$

步骤：

（1）观察；

（2）凑微分$\mathrm{d}v$；

分部积分法的步骤

$$\int f(x)\mathrm{d}x$$
$$=\int uv'\mathrm{d}x$$
$$=\int u\mathrm{d}v$$
$$=uv-\int v\mathrm{d}u$$
$$=uv-\int vu'\mathrm{d}x$$

步骤：

（1）观察；

（2）凑微分$\mathrm{d}v$；

（3）分部；

分部积分法的步骤

$$\int f(x)\mathrm{d}x$$
$$=\int uv'\mathrm{d}x$$
$$=\int u\mathrm{d}v$$
$$=uv-\int v\mathrm{d}u$$
$$=uv-\int vu'\mathrm{d}x$$

步骤：

（1）观察；

（2）凑微分dv；

（3）分部；

（4）积分。

分部积分法举例

教材P209**例1.** $\int x\cos x \mathrm{d}x$

$$\int f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int uv'\mathrm{d}x$$

$$=\int u\mathrm{d}v$$

$$=uv-\int v\mathrm{d}u$$

$$=uv-\int vu'\mathrm{d}x$$

分部积分法举例

$$\int f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int uv'\mathrm{d}x$$

$$=\int u\mathrm{d}v$$

$$=uv-\int v\mathrm{d}u$$

$$=uv-\int vu'\mathrm{d}x$$

教材P209**例1.** $\int x\cos x\mathrm{d}x$

$$=\int x(\sin x)'\mathrm{d}x$$

分部积分法举例

$$\int f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int uv'\mathrm{d}x$$

$$=\int u\mathrm{d}v$$

$$=uv-\int v\mathrm{d}u$$

$$=uv-\int vu'\mathrm{d}x$$

教材P209**例1.** $\int x\cos x\mathrm{d}x$

$$=\int x(\sin x)'\mathrm{d}x$$

$$=\int x\mathrm{d}\sin x$$

分部积分法举例

$$\int f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int uv'\mathrm{d}x$$

$$=\int u\mathrm{d}v$$

$$=uv-\int v\mathrm{d}u$$

$$=uv-\int vu'\mathrm{d}x$$

教材P209**例1.** $\int x\cos x\mathrm{d}x$

$$=\int x(\sin x)'\mathrm{d}x$$

$$=\int x\mathrm{d}\sin x$$

$$=x\sin x-\int (x)'\sin x\mathrm{d}x$$

分部积分法举例

$$\int f(x)\mathrm{d}x$$
$$=\int uv'\mathrm{d}x$$
$$=\int u\mathrm{d}v$$
$$=uv-\int v\mathrm{d}u$$
$$=uv-\int vu'\mathrm{d}x$$

教材P209例1. $\int x\cos x\mathrm{d}x$

$$=\int x(\sin x)'\mathrm{d}x$$
$$=\int x\mathrm{d}\sin x$$
$$=x\sin x-\int(x)'\sin x\mathrm{d}x$$
$$=x\sin x-\int\sin x\mathrm{d}x$$

分部积分法举例

$$\int f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int uv'\mathrm{d}x$$

$$=\int u\mathrm{d}v$$

$$=uv-\int v\mathrm{d}u$$

$$=uv-\int vu'\mathrm{d}x$$

教材P209例1. $\int x\cos x\mathrm{d}x$

$$=\int x(\sin x)'\mathrm{d}x$$

$$=\int x\mathrm{d}\sin x$$

$$=x\sin x-\int (x)'\sin x\mathrm{d}x$$

$$=x\sin x-\int \sin x\mathrm{d}x$$

$$=x\sin x+\cos x+C$$

分部积分法举反例

换一种方法来做：

$$\int x\cos x\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}
&\int f(x)\mathrm{d}x \\
=&\int uv'\mathrm{d}x \\
=&\int u\mathrm{d}v \\
=&uv-\int v\mathrm{d}u \\
=&uv-\int vu'\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

分部积分法举反例

$$\int f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int uv'\mathrm{d}x$$

$$=\int u\mathrm{d}v$$

$$=uv-\int v\mathrm{d}u$$

$$=uv-\int vu'\mathrm{d}x$$

换一种方法来做：

$$\int x\cos x\mathrm{d}x$$

$$=\int \cos x(\frac{x^2}{2})'\mathrm{d}x$$

分部积分法举反例

$$\int f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int uv'\mathrm{d}x$$

$$=\int u\mathrm{d}v$$

$$=uv-\int v\mathrm{d}u$$

$$=uv-\int vu'\mathrm{d}x$$

换一种方法来做：

$$\int x\cos x\mathrm{d}x$$

$$=\int \cos x(\frac{x^2}{2})'\mathrm{d}x$$

$$=\int \cos x\mathrm{d}(\frac{x^2}{2})$$

分部积分法举反例

$$\int f(x)\mathrm{d}x$$
$$=\int uv'\mathrm{d}x$$
$$=\int u\mathrm{d}v$$
$$=uv-\int v\mathrm{d}u$$
$$=uv-\int vu'\mathrm{d}x$$

换一种方法来做:

$$\int x\cos x\mathrm{d}x$$
$$=\int \cos x(\frac{x^2}{2})'\mathrm{d}x$$
$$=\int \cos x\mathrm{d}(\frac{x^2}{2})$$
$$=\frac{x^2}{2}\cos x-\int(\cos x)'\frac{x^2}{2}\mathrm{d}x$$

分部积分法举反例

$$\int f(x)\mathrm{d}x$$
$$=\int uv'\mathrm{d}x$$
$$=\int u\mathrm{d}v$$
$$=uv-\int v\mathrm{d}u$$
$$=uv-\int vu'\mathrm{d}x$$

换一种方法来做：

$$\int x\cos x\mathrm{d}x$$
$$=\int \cos x(\frac{x^2}{2})'\mathrm{d}x$$
$$=\int \cos x\mathrm{d}(\frac{x^2}{2})$$
$$=\frac{x^2}{2}\cos x-\int(\cos x)'\frac{x^2}{2}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{x^2}{2}\cos x-\int\sin x\frac{x^2}{2}\mathrm{d}x$$
$$=?$$

分部积分法举反例

$$\int f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int uv'\mathrm{d}x$$

$$=\int u\mathrm{d}v$$

$$=uv-\int v\mathrm{d}u$$

$$=uv-\int vu'\mathrm{d}x$$

换一种方法来做:

$$\int x\cos x\mathrm{d}x$$

$$=\int \cos x(\frac{x^2}{2})'\mathrm{d}x$$

$$=\int \cos x\mathrm{d}(\frac{x^2}{2})$$

$$=\frac{x^2}{2}\cos x-\int(\cos x)'\frac{x^2}{2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{x^2}{2}\cos x-\int \sin x\frac{x^2}{2}\mathrm{d}x$$

$$=?$$

注.若u, v选择不当，只会使积分更难。

解题技巧:

解题技巧:

把被积函数视为两个函数之积,按“反对幂指三”的顺序,前者为u,后者为v'。

解题技巧：

把被积函数视为两个函数之积,按“反对幂指三”的顺序，前者为u，后者为v'。

“反对幂指三”是反三角函数、对数函数、幂函数、指数函数、三角函数这五类函数的简称。

其意是说，如果用分部积分法求不定积分，而被积函数$f(x)$恰是这五类函数中任意两个函数的乘积时，则按“反对幂指三”的顺序，次序在前的取为u，次序在后的取为v' 进行分部。

反对幂指三应用举例

幂指型： $\int xe^x\mathrm{d}x$

反对幂指三应用举例

幂指型： $\int xe^x \mathrm{d}x$

幂三型： $\int x\cos x \mathrm{d}x$

反对幂指三应用举例

幂指型：$\int xe^x\mathrm{d}x$

幂三型：$\int x\cos x\mathrm{d}x$

幂三型：$\int \frac{x}{1+\cos x}\mathrm{d}x$

反对幂指三应用举例

幂指型： $\int xe^x \mathrm{d}x$

幂三型： $\int x\cos x \mathrm{d}x$

幂三型： $\int \frac{x}{1+\cos x} \mathrm{d}x$

反幂型： $\int x\arcsin x \mathrm{d}x$

反对幂指三应用举例

幂指型： $\int xe^x \mathrm{d}x$

幂三型： $\int x\cos x \mathrm{d}x$

幂三型： $\int \frac{x}{1+\cos x} \mathrm{d}x$

反幂型： $\int x\arcsin x \mathrm{d}x$

反幂型： $\int x\arctan x \mathrm{d}x$

反对幂指三应用举例

幂指型：$\int xe^x \mathrm{d}x$

幂三型：$\int x\cos x \mathrm{d}x$

幂三型：$\int \frac{x}{1+\cos x} \mathrm{d}x$

反幂型：$\int x\arcsin x \mathrm{d}x$

反幂型：$\int x\arctan x \mathrm{d}x$

对幂型：$\int x\ln x \mathrm{d}x$

反对幂指三应用举例

幂指型：$\int xe^x \mathrm{d}x$

幂三型：$\int x\cos x \mathrm{d}x$

幂三型：$\int \frac{x}{1+\cos x} \mathrm{d}x$

反幂型：$\int x\arcsin x \mathrm{d}x$

反幂型：$\int x\arctan x \mathrm{d}x$

对幂型：$\int x\ln x \mathrm{d}x$

对三型：$\int \frac{\ln\cos x}{\sin^2 x} \mathrm{d}x$

反对幂指三应用举例

幂指型：$\int xe^x\mathrm{d}x$ $= \int x\mathrm{d}e^x$

幂三型：$\int x\cos x\mathrm{d}x$

幂三型：$\int \frac{x}{1+\cos x}\mathrm{d}x$

反幂型：$\int x\arcsin x\mathrm{d}x$

反幂型：$\int x\arctan x\mathrm{d}x$

对幂型：$\int x\ln x\mathrm{d}x$

对三型：$\int \frac{\ln\cos x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$

反对幂指三应用举例

幂指型： $\int xe^x \mathrm{d}x \quad = \int x \mathrm{d}e^x$

幂三型： $\int x\cos x \mathrm{d}x \quad = \int x \mathrm{d}\sin x$

幂三型： $\int \frac{x}{1+\cos x} \mathrm{d}x$

反幂型： $\int x \arcsin x \mathrm{d}x$

反幂型： $\int x \arctan x \mathrm{d}x$

对幂型： $\int x \ln x \mathrm{d}x$

对三型： $\int \frac{\ln\cos x}{\sin^2 x} \mathrm{d}x$

反对幂指三应用举例

幂指型：$\int xe^x\mathrm{d}x \quad = \int x\mathrm{d}e^x$

幂三型：$\int x\cos x\mathrm{d}x \quad = \int x\mathrm{d}\sin x$

幂三型：$\int \frac{x}{1+\cos x}\mathrm{d}x \quad = \int \frac{x}{2\cos^2\frac{x}{2}}\mathrm{d}x = \int x\mathrm{d}(\tan\frac{x}{2})$

反幂型：$\int x\arcsin x\mathrm{d}x$

反幂型：$\int x\arctan x\mathrm{d}x$

对幂型：$\int x\ln x\mathrm{d}x$

对三型：$\int \frac{\ln\cos x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$

反对幂指三应用举例

幂指型：$\int xe^x\mathrm{d}x \quad = \int x\mathrm{d}e^x$

幂三型：$\int x\cos x\mathrm{d}x \quad = \int x\mathrm{d}\sin x$

幂三型：$\int \frac{x}{1+\cos x}\mathrm{d}x \quad = \int \frac{x}{2\cos^2\frac{x}{2}}\mathrm{d}x = \int x\mathrm{d}(\tan\frac{x}{2})$

反幂型：$\int x\arcsin x\mathrm{d}x \quad = \int \arcsin x\mathrm{d}(\frac{x^2}{2})$

反幂型：$\int x\arctan x\mathrm{d}x$

对幂型：$\int x\ln x\mathrm{d}x$

对三型：$\int \frac{\ln\cos x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$

反对幂指三应用举例

幂指型： $\int xe^x\mathrm{d}x$ $= \int x\mathrm{d}e^x$

幂三型： $\int x\cos x\mathrm{d}x$ $= \int x\mathrm{d}\sin x$

幂三型： $\int \frac{x}{1+\cos x}\mathrm{d}x$ $= \int \frac{x}{2\cos^2\frac{x}{2}}\mathrm{d}x = \int x\mathrm{d}(\tan\frac{x}{2})$

反幂型： $\int x\arcsin x\mathrm{d}x$ $= \int \arcsin x\mathrm{d}(\frac{x^2}{2})$

反幂型： $\int x\arctan x\mathrm{d}x$ $= \int \arctan x\mathrm{d}(\frac{x^2}{2})$

对幂型： $\int x\ln x\mathrm{d}x$

对三型： $\int \frac{\ln\cos x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$

反对幂指三应用举例

幂指型：$\int xe^x \mathrm{d}x = \int x \mathrm{d}e^x$

幂三型：$\int x\cos x \mathrm{d}x = \int x \mathrm{d}\sin x$

幂三型：$\int \frac{x}{1+\cos x}\mathrm{d}x = \int \frac{x}{2\cos^2\frac{x}{2}}\mathrm{d}x = \int x\mathrm{d}(\tan\frac{x}{2})$

反幂型：$\int x\arcsin x\mathrm{d}x = \int \arcsin x\mathrm{d}(\frac{x^2}{2})$

反幂型：$\int x\arctan x\mathrm{d}x = \int \arctan x\mathrm{d}(\frac{x^2}{2})$

对幂型：$\int x\ln x\mathrm{d}x = \int \ln x\mathrm{d}(\frac{x^2}{2})$

对三型：$\int \frac{\ln\cos x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$

反对幂指三应用举例

幂指型：$\int xe^x\mathrm{d}x \quad = \int x\mathrm{d}e^x$

幂三型：$\int x\cos x\mathrm{d}x \quad = \int x\mathrm{d}\sin x$

幂三型：$\int \frac{x}{1+\cos x}\mathrm{d}x \quad = \int \frac{x}{2\cos^2\frac{x}{2}}\mathrm{d}x = \int x\mathrm{d}(\tan\frac{x}{2})$

反幂型：$\int x\arcsin x\mathrm{d}x \quad = \int \arcsin x\mathrm{d}(\frac{x^2}{2})$

反幂型：$\int x\arctan x\mathrm{d}x \quad = \int \arctan x\mathrm{d}(\frac{x^2}{2})$

对幂型：$\int x\ln x\mathrm{d}x \quad = \int \ln x\mathrm{d}(\frac{x^2}{2})$

对三型：$\int \frac{\ln\cos x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x \quad = \int \ln\cos x\mathrm{d}(-\cot x)$

反对幂指三应用举例

幂指型：$\int xe^x \mathrm{d}x = \int x \mathrm{d}e^x$

幂三型：$\int x\cos x \mathrm{d}x = \int x \mathrm{d}\sin x$

幂三型：$\int \frac{x}{1+\cos x}\mathrm{d}x = \int \frac{x}{2\cos^2\frac{x}{2}}\mathrm{d}x = \int x\mathrm{d}(\tan\frac{x}{2})$

反幂型：$\int x\arcsin x \mathrm{d}x = \int \arcsin x \mathrm{d}(\frac{x^2}{2})$

反幂型：$\int x\arctan x \mathrm{d}x = \int \arctan x \mathrm{d}(\frac{x^2}{2})$

对幂型：$\int x\ln x \mathrm{d}x = \int \ln x \mathrm{d}(\frac{x^2}{2})$

对三型：$\int \frac{\ln\cos x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = \int \ln\cos x \mathrm{d}(-\cot x)$

注. 1.若被积函数是“幂函数×正弦函数/余弦函数/指数函数”的乘积形式，就可以考虑通过选择幂函数为u，使得其降幂一次以后再求解。

$$\int x^n e^x \mathrm{d}x = \int x^n \mathrm{d}e^x$$

$$\int x^n \cos x \mathrm{d}x = \int x^n \mathrm{d}\sin x$$

$$\int x^n \sin x \mathrm{d}x = -\int x^n \mathrm{d}\cos x$$

注. 1.若被积函数是“幂函数×正弦函数/余弦函数/指数函数”的乘积形式，就可以考虑通过选择幂函数为u，使得其降幂一次以后再求解。

$$\int x^n e^x \mathrm{d}x = \int x^n \mathrm{d}e^x$$

$$\int x^n \cos x \mathrm{d}x = \int x^n \mathrm{d}\sin x$$

$$\int x^n \sin x \mathrm{d}x = -\int x^n \mathrm{d}\cos x$$

教材P209**例2.**

教材P210**例3.**

注. 1.若被积函数是“幂函数×正弦函数/余弦函数/指数函数”的乘积形式，就可以考虑通过选择幂函数为u，使得其降幂一次以后再求解。

$$\int x^n e^x \mathrm{d}x = \int x^n \mathrm{d}e^x$$

$$\int x^n \cos x \mathrm{d}x = \int x^n \mathrm{d}\sin x$$

$$\int x^n \sin x \mathrm{d}x = -\int x^n \mathrm{d}\cos x$$

教材P209**例2.**

教材P210**例3.**
$\int x^2 e^x \mathrm{d}x = \int x^2 \mathrm{d}e^x$

注. 1.若被积函数是“幂函数×正弦函数/余弦函数/指数函数”的乘积形式，就可以考虑通过选择幂函数为u，使得其降幂一次以后再求解。

$$\int x^n e^x \mathrm{d}x = \int x^n \mathrm{d}e^x$$

$$\int x^n \cos x \mathrm{d}x = \int x^n \mathrm{d}\sin x$$

$$\int x^n \sin x \mathrm{d}x = -\int x^n \mathrm{d}\cos x$$

教材P209**例2.**

教材P210**例3.**

$\int x^2 e^x \mathrm{d}x = \int x^2 \mathrm{d}e^x$

$= x^2 e^x - \int e^x \mathrm{d}(x^2) = x^2 e^x - 2\int x e^x \mathrm{d}x$

注. 1.若被积函数是"幂函数×正弦函数/余弦函数/指数函数"的乘积形式，就可以考虑通过选择幂函数为u，使得其降幂一次以后再求解。

$$\int x^n e^x \mathrm{d}x = \int x^n \mathrm{d}e^x$$

$$\int x^n \cos x \mathrm{d}x = \int x^n \mathrm{d}\sin x$$

$$\int x^n \sin x \mathrm{d}x = -\int x^n \mathrm{d}\cos x$$

教材P209**例2.**

教材P210**例3.**

$\int x^2 e^x \mathrm{d}x = \int x^2 \mathrm{d}e^x$

$= x^2 e^x - \int e^x \mathrm{d}(x^2) = x^2 e^x - 2\int x e^x \mathrm{d}x$

$= x^2 e^x - 2\int x \mathrm{d}(e^x) = x^2 e^x - 2(x e^x - \int e^x \mathrm{d}x)$

注. 1.若被积函数是“幂函数×正弦函数/余弦函数/指数函数”的乘积形式，就可以考虑通过选择幂函数为u，使得其降幂一次以后再求解。

$$\int x^n e^x \mathrm{d}x = \int x^n \mathrm{d}e^x$$

$$\int x^n \cos x \mathrm{d}x = \int x^n \mathrm{d}\sin x$$

$$\int x^n \sin x \mathrm{d}x = -\int x^n \mathrm{d}\cos x$$

教材P209**例2.**

教材P210**例3.**

$\int x^2 e^x \mathrm{d}x = \int x^2 \mathrm{d}e^x$

$= x^2 e^x - \int e^x \mathrm{d}(x^2) = x^2 e^x - 2\int x e^x \mathrm{d}x$

$= x^2 e^x - 2\int x \mathrm{d}(e^x) = x^2 e^x - 2(x e^x - \int e^x \mathrm{d}x)$

$= e^x(x^2 - 2x + 2) + C$

注. 2.对含自然数的积分，通过分部积分建立递推公式，然后求解。

注. 2.对含自然数的积分，通过分部积分建立递推公式，然后求解。

教材P210**例5.** $\int \arccos x \mathrm{d}x$

注. 2.对含自然数的积分，通过分部积分建立递推公式，然后求解。

教材P210**例5.** $\int \arccos x \mathrm{d}x$

$= \int \arccos x (x)' \mathrm{d}x$

注. 2.对含自然数的积分，通过分部积分建立递推公式，然后求解。

教材P210**例5.** $\int \arccos x \mathrm{d}x$

$$= \int \arccos x (x)' \mathrm{d}x$$

$$= x \arccos x - \int x (\arccos x)' \mathrm{d}x$$

注. 2.对含自然数的积分，通过分部积分建立递推公式，然后求解。

教材P210**例5.** $\int \arccos x \mathrm{d}x$

$= \int \arccos x (x)' \mathrm{d}x$

$= x \arccos x - \int x (\arccos x)' \mathrm{d}x$

$= x \arccos x + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x$

注. 2.对含自然数的积分，通过分部积分建立递推公式，然后求解。

教材P210**例5.** $\int \arccos x \mathrm{d}x$

$= \int \arccos x (x)' \mathrm{d}x$

$= x \arccos x - \int x (\arccos x)' \mathrm{d}x$

$= x \arccos x + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x$

$= x \arccos x - \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}(1-x^2)$

注. 2.对含自然数的积分，通过分部积分建立递推公式，然后求解。

教材P210**例5.** $\int \arccos x \mathrm{d}x$

$$= \int \arccos x (x)' \mathrm{d}x$$

$$= x \arccos x - \int x (\arccos x)' \mathrm{d}x$$

$$= x \arccos x + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x$$

$$= x \arccos x - \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}(1-x^2)$$

$$= x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$$

注. 2.对含自然数的积分，通过分部积分建立递推公式，然后求解。

教材P210**例5.** $\int \arccos x \mathrm{d}x$

$= \int \arccos x (x)' \mathrm{d}x$

$= x \arccos x - \int x (\arccos x)' \mathrm{d}x$

$= x \arccos x + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x$

$= x \arccos x - \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}(1-x^2)$

$= x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$

同理

$$\int \arcsin x \mathrm{d}x = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$$

注. 2.对含自然数的积分，通过分部积分建立递推公式，然后求解。

教材P210**例5.** $\int \arccos x \mathrm{d}x$

$= \int \arccos x (x)' \mathrm{d}x$

$= x \arccos x - \int x (\arccos x)' \mathrm{d}x$

$= x \arccos x + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x$

$= x \arccos x - \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}(1-x^2)$

$= x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$

同理

$$\int \arcsin x \mathrm{d}x = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$$

教材P211**例6.**

$$\int \ln x \mathrm{d}x$$

$$\int \ln x \mathrm{d}x$$

$$= \int \ln x (x)' \mathrm{d}x$$

$$\int \ln x \mathrm{d}x$$

$$= \int \ln x (x)' \mathrm{d}x$$

$$= x \ln x - \int x (\ln x)' \mathrm{d}x$$

$$\int \ln x \mathrm{d}x$$

$$= \int \ln x (x)' \mathrm{d}x$$

$$= x \ln x - \int x (\ln x)' \mathrm{d}x$$

$$= x \ln x - \int \mathrm{d}x$$

$$\int \ln x \mathrm{d}x$$

$$= \int \ln x (x)' \mathrm{d}x$$

$$= x \ln x - \int x (\ln x)' \mathrm{d}x$$

$$= x \ln x - \int \mathrm{d}x$$

$$= x \ln x - x + C$$

$\int \ln x \mathrm{d}x$

$\int \ln^2 x \mathrm{d}x$

$= \int \ln x (x)' \mathrm{d}x$

$= x \ln x - \int x (\ln x)' \mathrm{d}x$

$= x \ln x - \int \mathrm{d}x$

$= x \ln x - x + C$

做一次分部积分

$$\int \ln x \mathrm{d}x$$

$$= \int \ln x (x)' \mathrm{d}x$$

$$= x \ln x - \int x (\ln x)' \mathrm{d}x$$

$$= x \ln x - \int \mathrm{d}x$$

$$= x \ln x - x + C$$

做一次分部积分

$$\int \ln^2 x \mathrm{d}x$$

$$= \int \ln^2 x (x)' \mathrm{d}x$$

$\int \ln x \mathrm{d}x$	$\int \ln^2 x \mathrm{d}x$
$= \int \ln x (x)' \mathrm{d}x$	$= \int \ln^2 x (x)' \mathrm{d}x$
$= x \ln x - \int x (\ln x)' \mathrm{d}x$	$= x \ln^2 x - \int x (\ln^2 x)' \mathrm{d}x$
$= x \ln x - \int \mathrm{d}x$	
$= x \ln x - x + C$	

做一次分部积分

$$\int \ln x \mathrm{d}x$$

$$= \int \ln x (x)' \mathrm{d}x$$

$$= x \ln x - \int x (\ln x)' \mathrm{d}x$$

$$= x \ln x - \int \mathrm{d}x$$

$$= x \ln x - x + C$$

做一次分部积分

$$\int \ln^2 x \mathrm{d}x$$

$$= \int \ln^2 x (x)' \mathrm{d}x$$

$$= x \ln^2 x - \int x (\ln^2 x)' \mathrm{d}x$$

$$= x \ln^2 x - \int 2 \ln x \mathrm{d}x$$

$$\begin{array}{ll}
\int \ln x \mathrm{d}x & \int \ln^2 x \mathrm{d}x \\
= \int \ln x (x)' \mathrm{d}x & = \int \ln^2 x (x)' \mathrm{d}x \\
= x \ln x - \int x (\ln x)' \mathrm{d}x & = x \ln^2 x - \int x (\ln^2 x)' \mathrm{d}x \\
= x \ln x - \int \mathrm{d}x & = x \ln^2 x - \int 2 \ln x \mathrm{d}x \\
= x \ln x - x + C & = x \ln x - 2(x \ln x - x) + C
\end{array}$$

做一次分部积分

$$\int \ln x \mathrm{d}x$$
$$= \int \ln x (x)' \mathrm{d}x$$
$$= x\ln x - \int x(\ln x)' \mathrm{d}x$$
$$= x\ln x - \int \mathrm{d}x$$
$$= x\ln x - x + C$$

做一次分部积分

$$\int \ln^2 x \mathrm{d}x$$
$$= \int \ln^2 x (x)' \mathrm{d}x$$
$$= x\ln^2 x - \int x(\ln^2 x)' \mathrm{d}x$$
$$= x\ln^2 x - \int 2\ln x \mathrm{d}x$$
$$= x\ln x - 2(x\ln x - x) + C$$

做二次分部积分

$\int \ln^n x \mathrm{d}x$或者$\int x^m \ln^n x \mathrm{d}x$需要做$n$次分部积分。

教材P210**例4.**

注. 3.分部产生循环式，由此解出积分式（两次分部选择的u,v函数类型不变，解出积分后加C）。

注. 3.分部产生循环式，由此解出积分式（两次分部选择的u, v函数类型不变，解出积分后加C）。

教材P211**例7.** $\int e^x \sin x \mathrm{d}x$

注. 3.分部产生循环式，由此解出积分式（两次分部选择的u, v函数类型不变，解出积分后加C）。

教材P211**例7.**$\int e^x \sin x \mathrm{d}x$

$= \int \sin x \mathrm{d}(e^x)$

注. 3.分部产生循环式，由此解出积分式（两次分部选择的u, v函数类型不变，解出积分后加C）。

教材P211**例7.** $\int e^x \sin x \mathrm{d}x$

$= \int \sin x \mathrm{d}(e^x)$

$= e^x \sin x - \int e^x \cos x \mathrm{d}x$

注. 3.分部产生循环式，由此解出积分式（两次分部选择的u, v函数类型不变，解出积分后加C）。

教材P211**例7.**$\int e^x \sin x \mathrm{d}x$

$= \int \sin x \mathrm{d}(e^x)$

$= e^x \sin x - \int e^x \cos x \mathrm{d}x$

$= e^x \sin x - \int \cos x \mathrm{d}(e^x)$

注. 3.分部产生循环式，由此解出积分式（两次分部选择的u, v函数类型不变，解出积分后加C）。

教材P211**例7.** $\int e^x \sin x \mathrm{d}x$

$= \int \sin x \mathrm{d}(e^x)$

$= e^x \sin x - \int e^x \cos x \mathrm{d}x$

$= e^x \sin x - \int \cos x \mathrm{d}(e^x)$

$= e^x \sin x - (e^x \cos x + \int e^x \sin x \mathrm{d}x)$ 产生循环

注. 3.分部产生循环式，由此解出积分式（两次分部选择的u,v函数类型不变，解出积分后加C）。

教材P211**例7.** $\int e^x \sin x \mathrm{d}x$

$= \int \sin x \mathrm{d}(e^x)$

$= e^x \sin x - \int e^x \cos x \mathrm{d}x$

$= e^x \sin x - \int \cos x \mathrm{d}(e^x)$

$= e^x \sin x - (e^x \cos x + \int e^x \sin x \mathrm{d}x)$ 产生循环

故而原式$= \frac{1}{2}(e^x \sin x - e^x \cos x) + C$

注4. “反对幂指三”并不是万能的:

幂指型： $\int \frac{xe^x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$

注4. “反对幂指三”并不是万能的:

幂指型: $\int \frac{xe^x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$

1）取e^x为v' $\Rightarrow \int \frac{x}{(1+x)^2}\mathrm{d}(e^x) = \frac{x}{(1+x)^2}e^x - \int \frac{1-x}{(1+x)^3}e^x\mathrm{d}x$

注4. “反对幂指三”并不是万能的:

幂指型: $\int \frac{xe^x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$

1）取e^x为v' $\Rightarrow \int \frac{x}{(1+x)^2}\mathrm{d}(e^x) = \frac{x}{(1+x)^2}e^x - \int \frac{1-x}{(1+x)^3}e^x\mathrm{d}x$

2）取$\frac{1}{(1+x)^2}$为v'

注4. “反对幂指三”并不是万能的:

幂指型: $\int \frac{xe^x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$

1）取e^x为v' $\Rightarrow \int \frac{x}{(1+x)^2}\mathrm{d}(e^x) = \frac{x}{(1+x)^2}e^x - \int \frac{1-x}{(1+x)^3}e^x\mathrm{d}x$

2）取$\frac{1}{(1+x)^2}$为v'

$\Rightarrow \int xe^x\mathrm{d}(-\frac{1}{1+x})$

注4. “反对幂指三”并不是万能的:

幂指型: $\int \frac{xe^x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$

1）取e^x为v' $\Rightarrow \int \frac{x}{(1+x)^2}\mathrm{d}(e^x) = \frac{x}{(1+x)^2}e^x - \int \frac{1-x}{(1+x)^3}e^x\mathrm{d}x$

2）取$\frac{1}{(1+x)^2}$为v'

$\Rightarrow \int xe^x\mathrm{d}(-\frac{1}{1+x})$

$= -\frac{x}{1+x}e^x + \int \frac{1}{1+x}\mathrm{d}(xe^x)$

注4. “反对幂指三”并不是万能的:

幂指型: $\int \frac{xe^x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$

1）取e^x为v' $\Rightarrow \int \frac{x}{(1+x)^2}\mathrm{d}(e^x) = \frac{x}{(1+x)^2}e^x - \int \frac{1-x}{(1+x)^3}e^x\mathrm{d}x$

2）取$\frac{1}{(1+x)^2}$为v'

$\Rightarrow \int xe^x\mathrm{d}(-\frac{1}{1+x})$

$= -\frac{x}{1+x}e^x + \int \frac{1}{1+x}\mathrm{d}(xe^x)$

$= -\frac{x}{1+x}e^x + \int \frac{1+x}{1+x}e^x\mathrm{d}x$

注4. “反对幂指三”并不是万能的:

幂指型: $\int \frac{xe^x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$

1）取e^x为v' $\Rightarrow \int \frac{x}{(1+x)^2}\mathrm{d}(e^x) = \frac{x}{(1+x)^2}e^x - \int \frac{1-x}{(1+x)^3}e^x\mathrm{d}x$

2）取$\frac{1}{(1+x)^2}$为v'

$\Rightarrow \int xe^x\mathrm{d}(-\frac{1}{1+x})$

$= -\frac{x}{1+x}e^x + \int \frac{1}{1+x}\mathrm{d}(xe^x)$

$= -\frac{x}{1+x}e^x + \int \frac{1+x}{1+x}e^x\mathrm{d}x$

$= -\frac{x}{1+x}e^x + e^x + C$

教材P211**例8.**

教材P212**例9.**

作业

习题4-3:

5. 6. 14. 19. 20. 21. 23.