高等数学

张爱林

深圳大学

March 26, 2022

第九章 多元函数微分法及其应用

第五节 隐函数的求导公式

1. 一个方程的情形
   - 一元隐函数
   - 二元隐函数

2. 方程组的情形
   - 两个二元函数
   - 两个一元函数

显函数：$y = y(x)$ 。

例如$y = \sin x$，$y = \ln x + \sqrt{1 - x^2}$等。

隐函数：$F(x, y) = 0$,

x和y满足一个二元方程$F(x, y) = 0$即一元隐函数$y = y(x)$。

例如$x + y^3 - 1 = 0$。

一元隐函数

隐函数存在定理1:

设$F(x,y)=0$,

在点(x_0,y_0)的某一邻域内具有连续偏导数,

且$F(x_0,y_0)=0$, $F_y(x_0,y_0)\neq 0$,

一元隐函数

隐函数存在定理1:

设$F(x,y)=0$,

在点(x_0,y_0)的某一邻域内具有连续偏导数,

且$F(x_0,y_0)=0$, $F_y(x_0,y_0)\neq 0$,

则方程$F(x,y)=0$在点(x_0,y_0)的某一邻域内

恒能唯一确定一个连续且具有连续导数的函数$y=f(x)$,

一元隐函数

隐函数存在定理1:

设$F(x,y)=0$,

在点(x_0,y_0)的某一邻域内具有连续偏导数,

且$F(x_0,y_0)=0$, $F_y(x_0,y_0)\neq 0$,

则方程$F(x,y)=0$在点(x_0,y_0)的某一邻域内

恒能唯一确定一个连续且具有连续导数的函数$y=f(x)$,

它满足条件$y_0=f(x_0)$并有

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}$$

这就是**隐函数的求导公式**。

一元隐函数

$$F(x,y)=0$$

$$F(x_0,y_0)=0$$

$$F_y(x_0,y_0)\neq 0$$

$$\Downarrow$$

一元隐函数

$$F(x,y)=0$$

$$F(x_0,y_0)=0$$

$$F_y(x_0,y_0)\neq 0$$

$$\Downarrow$$

一元隐函数$y=y(x)$,

以及隐函数的求导公式:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x(x_0,y_0)}{F_y(x_0,y_0)}$$

一元隐函数

$$F(x, y) = 0$$

$$F(x_0, y_0) = 0$$

$$F_x(x_0, y_0) \neq 0$$

$$\Downarrow$$

一元隐函数

$$F(x,y)=0$$

$$F(x_0,y_0)=0$$

$$F_x(x_0,y_0)\neq 0$$

$$\Downarrow$$

一元隐函数$x=x(y)$,

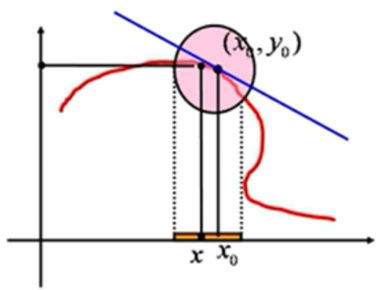
以及隐函数的求导公式:

$$\frac{dx}{dy}=-\frac{F_y(x_0,y_0)}{F_x(x_0,y_0)}$$

切线

$F_y(x_0, y_0) \neq 0$表示：

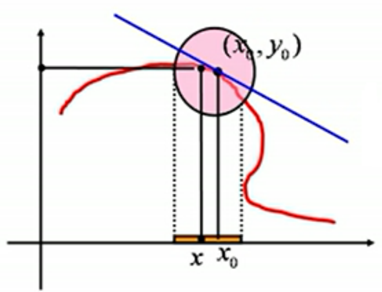
曲线$F(x, y) = 0$在点(x_0, y_0)处的切线不平行于y轴



切线

$F_y(x_0, y_0) \neq 0$表示：

曲线$F(x, y) = 0$在点(x_0, y_0)处的切线不平行于y轴



$F_y(x_0, y_0) = 0$表示：

曲线$F(x, y) = 0$在点(x_0, y_0)处的切线平行于y轴

切线与法线

曲线$F(x,y)=0$在点(x_0,y_0)处的切线：

$$y-y_0=-\frac{F_x(x_0,y_0)}{F_y(x_0,y_0)}(x-x_0)$$

切线与法线

曲线$F(x,y)=0$在点(x_0,y_0)处的切线：

$$y-y_0=-\frac{F_x(x_0,y_0)}{F_y(x_0,y_0)}(x-x_0)$$

点法式：

$$F_x(x_0,y_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0)(y-y_0)=0$$

切线与法线

曲线$F(x,y)=0$在点(x_0,y_0)处的法线：

$$y-y_0=\frac{F_y(x_0,y_0)}{F_x(x_0,y_0)}(x-x_0)$$

切线与法线

曲线$F(x,y)=0$在点(x_0,y_0)处的法线：

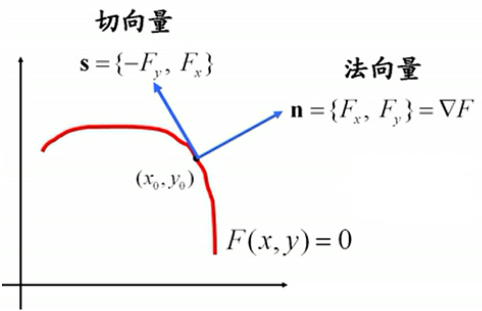
$$y-y_0=\frac{F_y(x_0,y_0)}{F_x(x_0,y_0)}(x-x_0)$$

对称式：

$$\frac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0)}$$

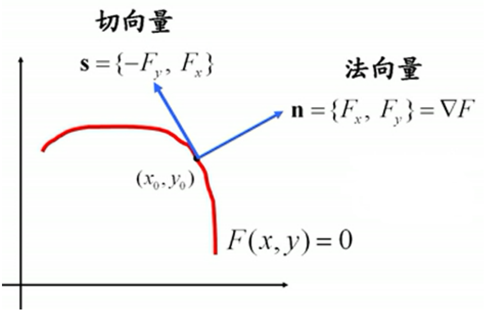
切向量与法向量

曲线$F(x,y)=0$在点(x_0,y_0)处的切向量与法向量：



切向量与法向量

曲线$F(x,y)=0$在点(x_0,y_0)处的切向量与法向量：



切向量：$(1,-\frac{F_x}{F_y})$或者$(-F_y,F_x)$

法向量：$(1,\frac{F_y}{F_x})$或者(F_x,F_y)

教材P87**例1.** 验证$x^2+y^2-1=0$在点$(0,1)$的某一邻域内能唯一确定一个有连续导数的隐函数$y=f(x)$，并求这函数的一阶与二阶导数在$x=0$的值。

教材P87**例1.** 验证$x^2+y^2-1=0$在点$(0,1)$的某一邻域内能唯一确定一个有连续导数的隐函数$y=f(x)$，并求这函数的一阶与二阶导数在$x=0$的值。

解. 设$F(x,y)=x^2+y^2-1$

教材P87**例1.** 验证$x^2+y^2-1=0$在点$(0,1)$的某一邻域内能唯一确定一个有连续导数的隐函数$y=f(x)$，并求这函数的一阶与二阶导数在$x=0$的值。

解. 设$F(x,y)=x^2+y^2-1$

则$F_x=2x, F_y=2y$

教材P87**例1.** 验证$x^2+y^2-1=0$在点$(0,1)$的某一邻域内能唯一确定一个有连续导数的隐函数$y=f(x)$，并求这函数的一阶与二阶导数在$x=0$的值。

解. 设$F(x,y)=x^2+y^2-1$

则$F_x=2x, F_y=2y$

$F(0,1)=0, F_y(0,1)=2\neq 0$

教材P87**例1.** 验证$x^2+y^2-1=0$在点$(0,1)$的某一邻域内能唯一确定一个有连续导数的隐函数$y=f(x)$，并求这函数的一阶与二阶导数在$x=0$的值。

解. 设$F(x,y)=x^2+y^2-1$

则$F_x=2x, F_y=2y$

$F(0,1)=0, F_y(0,1)=2\neq 0$

由隐函数存在定理1可知，方程$x^2+y^2-1=0$在点$(0,1)$的某一邻域内能唯一确定一个有连续导数当$x=0, y=1$时的隐函数$y=f(x)$。

教材P87例1. 验证$x^2+y^2-1=0$在点$(0,1)$的某一邻域内能唯一确定一个有连续导数的隐函数$y=f(x)$，并求这函数的一阶与二阶导数在$x=0$的值。

解1. 设$F(x,y)=x^2+y^2-1$

教材P87例1. 验证$x^2+y^2-1=0$在点$(0,1)$的某一邻域内能唯一确定一个有连续导数的隐函数$y=f(x)$，并求这函数的一阶与二阶导数在$x=0$的值。

解1. 设$F(x,y)=x^2+y^2-1$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{x}{y}$$

教材P87**例1.** 验证$x^2+y^2-1=0$在点$(0,1)$的某一邻域内能唯一确定一个有连续导数的隐函数$y=f(x)$，并求这函数的一阶与二阶导数在$x=0$的值。

解1. 设$F(x,y)=x^2+y^2-1$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{x}{y}$$

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{\substack{x=0\\y=1}}=0$$

教材P87**例1.** 验证$x^2+y^2-1=0$在点$(0,1)$的某一邻域内能唯一确定一个有连续导数的隐函数$y=f(x)$，并求这函数的一阶与二阶导数在$x=0$的值。

解1. 设$F(x,y)=x^2+y^2-1$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{x}{y}$$

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{\substack{x=0\\y=1}}=0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{y^3}$$

教材P87**例1.** 验证$x^2+y^2-1=0$在点$(0,1)$的某一邻域内能唯一确定一个有连续导数的隐函数$y=f(x)$，并求这函数的一阶与二阶导数在$x=0$的值。

解1. 设$F(x,y)=x^2+y^2-1$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{x}{y}$$

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{\substack{x=0\\y=1}}=0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{y^3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{\substack{x=0\\y=1}}=-1$$

教材P87**例1.** 验证$x^2+y^2-1=0$在点$(0,1)$的某一邻域内能唯一确定一个有连续导数，并求这函数的一阶与二阶导数在$x=0$的值。

解2. 直接求导法

教材P87例1. 验证$x^2+y^2-1=0$在点$(0,1)$的某一邻域内能唯一确定一个有连续导数，并求这函数的一阶与二阶导数在$x=0$的值。

解2. 直接求导法

方程两边同时对x求导：

教材P87**例1.** 验证$x^2+y^2-1=0$在点$(0,1)$的某一邻域内能唯一确定一个有连续导数，并求这函数的一阶与二阶导数在$x=0$的值。

解2. 直接求导法

方程两边同时对x求导：

$$2x+2yy'=0$$

教材P87例1. 验证$x^2+y^2-1=0$在点$(0,1)$的某一邻域内能唯一确定一个有连续导数，并求这函数的一阶与二阶导数在$x=0$的值。

解2. 直接求导法

方程两边同时对x求导：

$$2x+2yy'=0$$

$$y'=\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$$

教材P87**例1.** 验证$x^2+y^2-1=0$在点$(0,1)$的某一邻域内能唯一确定一个有连续导数，并求这函数的一阶与二阶导数在$x=0$的值。

解3. 微分法

教材P87**例1.** 验证$x^2+y^2-1=0$在点$(0,1)$的某一邻域内能唯一确定一个有连续导数，并求这函数的一阶与二阶导数在$x=0$的值。

解3. 微分法

方程两边同时微分：

教材P87**例1.** 验证$x^2+y^2-1=0$在点$(0,1)$的某一邻域内能唯一确定一个有连续导数，并求这函数的一阶与二阶导数在$x=0$的值。

解3. 微分法

方程两边同时微分：

$$2xdx+2ydy=0$$

教材P87**例1.** 验证$x^2+y^2-1=0$在点$(0,1)$的某一邻域内能唯一确定一个有连续导数，并求这函数的一阶与二阶导数在$x=0$的值。

解3. 微分法

方程两边同时微分：

$$2xdx+2ydy=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$$

二元隐函数

推广：三元方程$F(x,y,z)=0$即二元隐函数$z=z(x,y)$

二元隐函数

推广：三元方程$F(x,y,z)=0$即二元隐函数$z=z(x,y)$

例如$x^2+y^2+z^2=R^2$

可推出$z=z(x,y)=\pm\sqrt{R^2-x^2-y^2}$。

二元隐函数

隐函数存在定理2:

设$F(x,y,z)=0$,

在点(x_0,y_0,z_0)的某一邻域内具有连续偏导数,

且$F(x_0,y_0,z_0)=0$, $F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$,

二元隐函数

隐函数存在定理2:

设$F(x,y,z)=0$,

在点(x_0,y_0,z_0)的某一邻域内具有连续偏导数,

且$F(x_0,y_0,z_0)=0$, $F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$,

则方程$F(x,y,z)=0$在点(x_0,y_0,z_0)的某一邻域内

恒能唯一确定一个连续且具有连续导数的函数$z=f(x,y)$,

二元隐函数

隐函数存在定理2:

设$F(x,y,z)=0$,

在点(x_0,y_0,z_0)的某一邻域内具有连续偏导数,

且$F(x_0,y_0,z_0)=0$, $F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$,

则方程$F(x,y,z)=0$在点(x_0,y_0,z_0)的某一邻域内

恒能唯一确定一个连续且具有连续导数的函数$z=f(x,y)$,

它满足条件$z_0=f(x_0,y_0)$并有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}$$

二元隐函数

$$F(x,y,z)=0$$

$$F(x_0,y_0,z_0)=0$$

$$F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$$

$$\Downarrow$$

二元隐函数

$$F(x,y,z)=0$$

$$F(x_0,y_0,z_0)=0$$

$$F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$$

$$\Downarrow$$

二元隐函数$z=f(x,y)$,

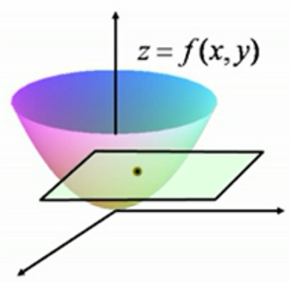
以及隐函数的求偏导公式:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x(x_0,y_0,z_0)}{F_z(x_0,y_0,z_0)},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y(x_0,y_0,z_0)}{F_z(x_0,y_0,z_0)}$$

切平面

$F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$:

曲面$F(x, y, z) = 0$在点(x_0, y_0, z_0)处的切平面不平行于z轴



二元隐函数

$$F(x,y,z)=0,$$

$$F(x_0,y_0,z_0)=0,$$

$$F_y(x_0,y_0,z_0)\neq 0$$

$$\Downarrow$$

二元隐函数

$$F(x,y,z)=0,$$

$$F(x_0,y_0,z_0)=0,$$

$$F_y(x_0,y_0,z_0)\neq 0$$

$$\Downarrow$$

二元隐函数$y=y(x,z)$,

以及隐函数的求偏导公式:

$$\frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{F_x(x_0,y_0,z_0)}{F_y(x_0,y_0,z_0)},\quad \frac{\partial y}{\partial z}=-\frac{F_z(x_0,y_0,z_0)}{F_y(x_0,y_0,z_0)}$$

二元隐函数

$$F(x,y,z)=0,$$

$$F(x_0,y_0,z_0)=0,$$

$$F_x(x_0,y_0,z_0)\neq 0$$

$$\Downarrow$$

二元隐函数

$$F(x,y,z)=0,$$
$$F(x_0,y_0,z_0)=0,$$
$$F_x(x_0,y_0,z_0)\neq 0$$
$$\Downarrow$$

二元隐函数$x=x(y,z)$,

以及隐函数的求偏导公式:

$$\frac{\partial x}{\partial y}=-\frac{F_y(x_0,y_0,z_0)}{F_x(x_0,y_0,z_0)},\quad \frac{\partial x}{\partial z}=-\frac{F_z(x_0,y_0,z_0)}{F_x(x_0,y_0,z_0)}$$

教材P88，例2

习题9-5 1. 2. 3. 6.

方程组的情形

考虑方程组：

$$\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases}$$

方程组的情形

考虑方程组：

$$\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases}$$

在四个变量中，只有两个变量能够独立变化。

因此方程组就有可能确定两个二元函数：

$$\begin{cases} u=u(x,y) \\ v=v(x,y) \end{cases}$$

方程组的情形

隐函数存在定理3:

设$F(x,y,u,v)$，$G(x,y,u,v)$在点$P(x_0,y_0,u_0,v_0)$的某一邻域内具有对各个变量的连续偏导数,

方程组的情形

隐函数存在定理3:

设$F(x,y,u,v)$，$G(x,y,u,v)$在点$P(x_0,y_0,u_0,v_0)$的某一邻域内具有对各个变量的连续偏导数，

又$F(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$，$G(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$，

方程组的情形

隐函数存在定理3：

设$F(x,y,u,v)$，$G(x,y,u,v)$在点$P(x_0,y_0,u_0,v_0)$的某一邻域内具有对各个变量的连续偏导数，

又$F(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$，$G(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$，

且偏导数所组成的Jacobi行列式

$$J=\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v}\\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v}\end{vmatrix}$$

在点$P(x_0,y_0,u_0,v_0)$不等于零，

方程组的情形

则方程组$F(x,y,u,v)=0$，$G(x,y,u,v)=0$

在点(x_0,y_0,u_0,v_0)的某一邻域内恒能唯一确定

一组连续且具有连续导数的函数$u=u(x,y)$和$v=v(x,y)$，

方程组的情形

则方程组$F(x,y,u,v)=0$，$G(x,y,u,v)=0$

在点(x_0,y_0,u_0,v_0)的某一邻域内恒能唯一确定

一组连续且具有连续导数的函数$u=u(x,y)$和$v=v(x,y)$，

它们满足条件$u_0=f(x_0,y_0)$，$v_0=f(x_0,y_0)$并有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}=-\frac{\begin{vmatrix} F_x & F_v \\ G_x & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}$$

方程组的情形

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)} = -\frac{\begin{vmatrix} F_u & F_x \\ G_u & G_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}$$

方程组的情形

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)} = -\frac{\begin{vmatrix} F_u & F_x \\ G_u & G_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)} = -\frac{\begin{vmatrix} F_y & F_v \\ G_y & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}$$

方程组的情形

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}=-\frac{\begin{vmatrix}F_u & F_x\\ G_u & G_x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}=-\frac{\begin{vmatrix}F_y & F_v\\ G_y & G_v\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}=-\frac{\begin{vmatrix}F_u & F_y\\ G_u & G_y\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}}$$

教材P90，例3

方程组的情形

考虑方程组：

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$$

方程组的情形

考虑方程组：

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$$

在三个变量中，只有一个变量能够独立变化。

因此方程组就有可能确定两个一元函数：

$$\begin{cases} z=f(x) \\ y=g(x) \end{cases}$$

故而此种类型的方程组求得的不是偏导数而是导数。

方程组的情形

例1. 求 $\frac{dx}{dz}$， $\frac{dy}{dz}$。

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

方程组的情形

例1. 求 $\frac{dx}{dz}$，$\frac{dy}{dz}$。

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$$

解.

方程组能确定两个一元函数：

$$\begin{cases} x=f(z) \\ y=g(z) \end{cases}$$

方程组的情形

例1. 求 $\frac{dx}{dz}$，$\frac{dy}{dz}$。

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$$

解.
方程组能确定两个一元函数：

$$\begin{cases} x=f(z) \\ y=g(z) \end{cases}$$

将所给方程两端分别对z求导得

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dz}+\dfrac{dy}{dz}+1=0 \\ 2x\dfrac{dx}{dz}+2y\dfrac{dy}{dz}+2z=0 \end{cases}$$

移项得

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dz} + \dfrac{dy}{dz} = -1 \\ 2x\dfrac{dx}{dz} + 2y\dfrac{dy}{dz} = -2z \end{cases}$$

移项得

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dz} + \dfrac{dy}{dz} = -1 \\ 2x\dfrac{dx}{dz} + 2y\dfrac{dy}{dz} = -2z \end{cases}$$

当$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2x & 2y \end{vmatrix} = 2(y-x) \neq 0$时，

解方程组得

移项得

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dz} + \dfrac{dy}{dz} = -1 \\ 2x\dfrac{dx}{dz} + 2y\dfrac{dy}{dz} = -2z \end{cases}$$

当 $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2x & 2y \end{vmatrix} = 2(y-x) \neq 0$时，

解方程组得

$$\frac{dx}{dz} = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2z & 2y \end{vmatrix} = \frac{y-z}{x-y}$$

$$\frac{dy}{dz} = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2x & -2z \end{vmatrix} = \frac{z-x}{x-y}$$

作业

习题9-5: 4. 5. 10(1)(2)(4).

海口复习法:
1.夸下海口，表示自己已经复习完所有内容了，欢迎所有人在微信与自己探讨问题。
2.然后就真的有人会和你探讨问题。
3.为了海口不被戳破，会迅速学完该部分内容并在微信上"及时"回复对方，以此达到复习效果。