高等数学

张爱林

深圳大学

March 26, 2022

第九章 多元函数微分法及其应用

第六节 多元函数微分学的几何应用

1. 向量函数及其导数

2. 空间曲线的切线与法平面
   - 参数方程空间曲线
   - 一般方程空间曲线

3. 空间曲面的切平面与法线
   - 隐式方程空间曲面
   - 显式方程空间曲面

向量举例

Examples of vectors:

1）Linear displacement, velocity,acceleration, force

2）Position vector

3）Moment of force: $|\mathbf{M}| = |\mathbf{F}||\mathbf{r}|\sin\theta$

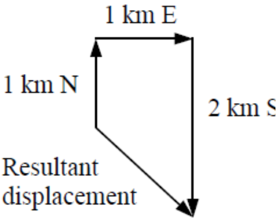


Figure: 位移

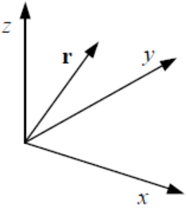


Figure: 位矢

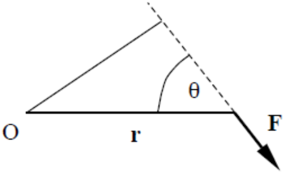
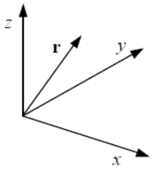


Figure: 力矩

向量函数及其导数

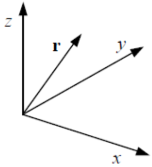
位矢(Position vector)



$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

向量函数及其导数

位矢(Position vector)

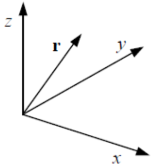


$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{f}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}$$

向量函数及其导数

位矢(Position vector)



$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{f}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}$$

向量方程：$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{f}(t)$

向量函数及其导数

定义1. 设数集$D \subset R$

向量函数及其导数

定义1. 设数集$D \subset R$

则称$f : D \to R^n$为**一元向量值函数**，通常记为

向量函数及其导数

定义1. 设数集$D \subset R$

则称$f : D \to R^n$为**一元向量值函数**，通常记为

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{f}(t), t \in D$$

其中数集D称为函数定义域，t称为自变量，$\boldsymbol{r}$称为因变量。

向量函数及其导数

定义1. 设数集$D \subset R$

则称$f : D \to R^n$为**一元向量值函数**，通常记为

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{f}(t), t \in D$$

其中数集D称为函数定义域，t称为自变量，$\boldsymbol{r}$称为因变量。

在R^3中，向量值函数$\boldsymbol{f}(t)$可表示为

$$\boldsymbol{f}(t) = f_1(t)\boldsymbol{i} + f_2(t)\boldsymbol{j} + f_3(t)\boldsymbol{k}, t \in D$$

向量函数及其导数

定义1. 设数集$D \subset R$

则称$f: D \to R^n$为**一元向量值函数**，通常记为

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{f}(t), t \in D$$

其中数集D称为函数定义域，t称为自变量，$\boldsymbol{r}$称为因变量。

在R^3中，向量值函数$\boldsymbol{f}(t)$可表示为

$\boldsymbol{f}(t) = f_1(t)\boldsymbol{i} + f_2(t)\boldsymbol{j} + f_3(t)\boldsymbol{k}, t \in D$

或者$\boldsymbol{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t)), t \in D$

向量函数及其导数

定义2. 向量值函数$\boldsymbol{f}(t)$的极限通常记为

$$\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{f}(t)=\boldsymbol{r}_0$$

或

$$\boldsymbol{f}(t)\to r_0, t\to t_0$$

向量函数及其导数

在R^3中，向量值函数$\boldsymbol{f}(t)$可表示为

$$\boldsymbol{f}(t) = f_1(t)\boldsymbol{i} + f_2(t)\boldsymbol{j} + f_3(t)\boldsymbol{k}, t \in D$$

或者$\boldsymbol{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t)), t \in D$

向量函数及其导数

在R^3中，向量值函数$\boldsymbol{f}(t)$可表示为

$\boldsymbol{f}(t) = f_1(t)\boldsymbol{i} + f_2(t)\boldsymbol{j} + f_3(t)\boldsymbol{k}, t \in D$

或者$\boldsymbol{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t)), t \in D$

向量值函数$\boldsymbol{f}(t)$当$t \to t_0$时的极限存在的充分必要条件是：
三个分量函数$f_1(t), f_2(t), f_3(t)$当$t \to t_0$时的极限都存在，

向量函数及其导数

在R^3中，向量值函数$\boldsymbol{f}(t)$可表示为

$\boldsymbol{f}(t) = f_1(t)\boldsymbol{i} + f_2(t)\boldsymbol{j} + f_3(t)\boldsymbol{k}, t \in D$

或者$\boldsymbol{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t)), t \in D$

向量值函数$\boldsymbol{f}(t)$当$t \to t_0$时的极限存在的充分必要条件是：三个分量函数$f_1(t), f_2(t), f_3(t)$当$t \to t_0$时的极限都存在，其极限为

$$\lim_{t \to t_0} \boldsymbol{f}(t) = (\lim_{t \to t_0} f_1(t), \lim_{t \to t_0} f_2(t), \lim_{t \to t_0} f_3(t))$$

向量函数及其导数

在R^3中，向量值函数$\boldsymbol{f}(t)$可表示为

$\boldsymbol{f}(t) = f_1(t)\boldsymbol{i} + f_2(t)\boldsymbol{j} + f_3(t)\boldsymbol{k}, t \in D$

或者$\boldsymbol{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t)), t \in D$

向量函数及其导数

在R^3中，向量值函数$\boldsymbol{f}(t)$可表示为

$\boldsymbol{f}(t) = f_1(t)\boldsymbol{i} + f_2(t)\boldsymbol{j} + f_3(t)\boldsymbol{k}, t \in D$

或者$\boldsymbol{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t)), t \in D$

连续性：

$$\lim_{t \to t_0} \boldsymbol{f}(t) = \boldsymbol{f}(t_0)$$

向量函数及其导数

在R^3中，向量值函数$\boldsymbol{f}(t)$可表示为

$\boldsymbol{f}(t) = f_1(t)\boldsymbol{i} + f_2(t)\boldsymbol{j} + f_3(t)\boldsymbol{k}, t \in D$

或者$\boldsymbol{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t)), t \in D$

连续性：

$$\lim_{t \to t_0} \boldsymbol{f}(t) = \boldsymbol{f}(t_0)$$

向量值函数$\boldsymbol{f}(t)$在t_0处连续的充分必要条件是：

三个分量函数$f_1(t), f_2(t), f_3(t)$在t_0处都连续。

向量函数及其导数

定义3. 向量值函数$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{f}(t)$在$t_0$处导数或导向量为

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{f}(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{f}(t_0)}{\Delta t}$$

向量函数及其导数

定义3. 向量值函数$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{f}(t)$在$t_0$处导数或导向量为

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{f}(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{f}(t_0)}{\Delta t}$$

通常记作

$$\boldsymbol{f}'(t_0) \quad \text{或者} \quad \left.\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|_{t=t_0}$$

向量函数及其导数

定义3.向量值函数$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{f}(t)$在$t_0$处导数或导向量为

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{f}(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{f}(t_0)}{\Delta t}$$

通常记作

$$\boldsymbol{f}'(t_0)\quad \text{或者}\quad \left.\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|_{t=t_0}$$

向量值函数$\boldsymbol{f}(t)$在t_0处可导的充分必要条件是:

三个分量函数$f_1(t), f_2(t), f_3(t)$都在t_0处可导。

向量函数及其导数

定义3. 向量值函数$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{f}(t)$在$t_0$处导数或导向量为

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{f}(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{f}(t_0)}{\Delta t}$$

通常记作

$$\boldsymbol{f}'(t_0)\quad \text{或者}\quad \left.\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|_{t=t_0}$$

向量值函数$\boldsymbol{f}(t)$在t_0处可导的充分必要条件是:
三个分量函数$f_1(t), f_2(t), f_3(t)$都在t_0处可导。
其导数为

$$\boldsymbol{f}'(t_0)=f_1'(t_0)\boldsymbol{i}+f_2'(t_0)\boldsymbol{j}+f_3'(t_0)\boldsymbol{k}$$

教材P95例1, 2

教材P96例3

平面曲线切线与法线

曲线$F(x,y)=0$在点(x_0,y_0)处的切线：

$$y-y_0=-\frac{F_x(x_0,y_0)}{F_y(x_0,y_0)}(x-x_0)$$

点法式：

$$F_x(x_0,y_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0)(y-y_0)=0$$

平面曲线切线与法线

曲线$F(x,y)=0$**在点**(x_0,y_0)**处的切线：**

$$y-y_0=-\frac{F_x(x_0,y_0)}{F_y(x_0,y_0)}(x-x_0)$$

点法式：

$$F_x(x_0,y_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0)(y-y_0)=0$$

曲线$F(x,y)=0$**在点**(x_0,y_0)**处的法线：**

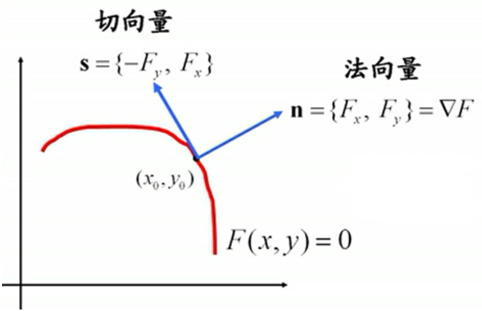
$$y-y_0=\frac{F_y(x_0,y_0)}{F_x(x_0,y_0)}(x-x_0)$$

对称式：

$$\frac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0)}$$

平面曲线切向量与法向量

曲线$F(x,y)=0$在点(x_0,y_0)处的切向量与法向量：



切向量：$(1,-\frac{F_x}{F_y})$或者$(-F_y,F_x)$

法向量：$(1,\frac{F_y}{F_x})$或者(F_x,F_y)

参数方程空间曲线的切线与法平面

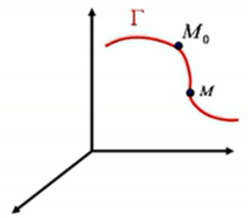
空间曲线的参数方程:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

参数方程空间曲线的切线与法平面

空间曲线的参数方程:

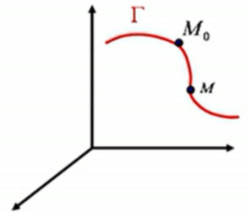
$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$



参数方程空间曲线的切线与法平面

空间曲线的参数方程：

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$



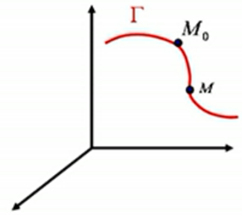
$t = t_0$时，

$M_0(x_0, y_0, z_0) = M_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$，

参数方程空间曲线的切线与法平面

空间曲线的参数方程:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$



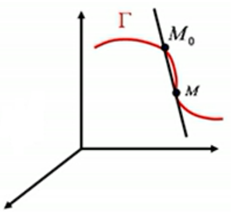
$t = t_0$时,

$M_0(x_0, y_0, z_0) = M_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$,

$x(t), y(t), z(t)$都在$t = t_0$处可导,

求曲线在点$M_0(x_0, y_0, z_0)$处的切线方程。

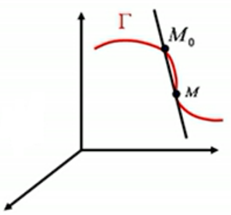
参数方程空间曲线的切线与法平面



$t = t_0$时，

$$M_0(x_0, y_0, z_0) = M_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$$

参数方程空间曲线的切线与法平面



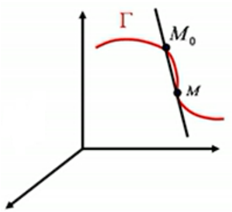
$t = t_0$时，

$M_0(x_0, y_0, z_0) = M_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$

$t = t_0 + \Delta t$时，

$M(x, y, z) = M(x(t_0 + \Delta t), y(t_0 + \Delta t), z(t_0 + \Delta t))$

参数方程空间曲线的切线与法平面



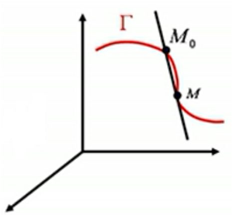
$t = t_0$时，

$M_0(x_0, y_0, z_0) = M_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$

$t = t_0 + \Delta t$时，

$M(x, y, z) = M(x(t_0 + \Delta t), y(t_0 + \Delta t), z(t_0 + \Delta t))$

参数方程空间曲线的切线与法平面



$t=t_0$时，

$$M_0(x_0,y_0,z_0)=M_0(x(t_0),y(t_0),z(t_0))$$

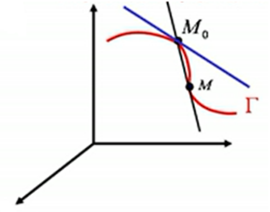
$t=t_0+\Delta t$时，

$$M(x,y,z)=M(x(t_0+\Delta t),y(t_0+\Delta t),z(t_0+\Delta t))$$

割线M_0M的方向向量：

$$\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)=(\Delta x,\Delta y,\Delta z)$$

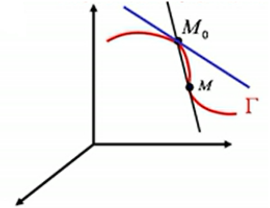
参数方程空间曲线的切线与法平面



切线的方向向量（切向量）：

$$\boldsymbol{T} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{s} = \left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}, \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}, \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t}\right)$$

参数方程空间曲线的切线与法平面



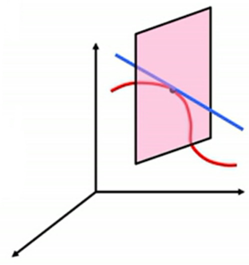
切线的方向向量（切向量）：

$$\boldsymbol{T} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{s} = \left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}, \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}, \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t}\right)$$

切向量：

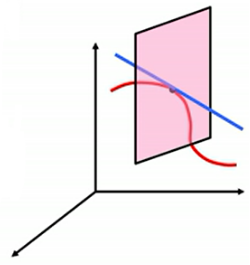
$$\boldsymbol{T} = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$$

参数方程空间曲线的切线与法平面



切向量： $\boldsymbol{T} = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$

参数方程空间曲线的切线与法平面

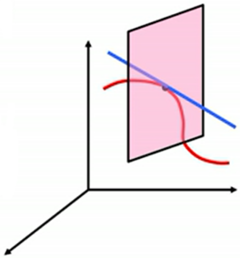


切向量： $\boldsymbol{T} = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$

切线方程：

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)}$$

参数方程空间曲线的切线与法平面



切向量： $\boldsymbol{T}=(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0))$

切线方程：

$$\frac{x-x_0}{x'(t_0)}=\frac{y-y_0}{y'(t_0)}=\frac{z-z_0}{z'(t_0)}$$

法平面方程：

$$x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0$$

教材P97例4

习题9-6 3.

参数方程空间曲线的切线与法平面特例

如果空间曲线的方程以此种形式给出：

$$\begin{cases} y = \varphi(x) \\ z = \psi(x) \end{cases}$$

参数方程空间曲线的切线与法平面特例

如果空间曲线的方程以此种形式给出：

$$\begin{cases} y = \varphi(x) \\ z = \psi(x) \end{cases}$$

可取x为参数，就可将其表示为参数方程的形式：

$$\begin{cases} x = x \\ y = \varphi(x) \\ z = \psi(x) \end{cases}$$

参数方程空间曲线的切线与法平面特例

若$\varphi(x), \psi(x)$都在x_0处可导，

则在$M_0(x_0, y_0, z_0)$处，

参数方程空间曲线的切线与法平面特例

若$\varphi(x), \psi(x)$都在x_0处可导，

则在$M_0(x_0, y_0, z_0)$处，

切线方程：

$$\frac{x - x_0}{1} = \frac{y - y_0}{\varphi'(x_0)} = \frac{z - z_0}{\psi'(x_0)}$$

参数方程空间曲线的切线与法平面特例

若$\varphi(x),\psi(x)$都在x_0处可导，

则在$M_0(x_0,y_0,z_0)$处，

切线方程：

$$\frac{x-x_0}{1}=\frac{y-y_0}{\varphi'(x_0)}=\frac{z-z_0}{\psi'(x_0)}$$

法平面方程：

$$(x-x_0)+\varphi'(x_0)(y-y_0)+\psi'(x_0)(z-z_0)=0$$

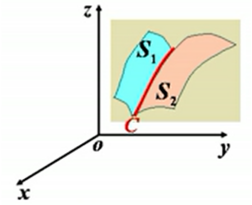
习题9-6 5.

一般方程空间曲线的切线与法平面

空间曲线的一般方程：

两张曲面交线

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$$

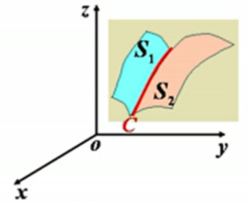


一般方程空间曲线的切线与法平面

空间曲线的一般方程:

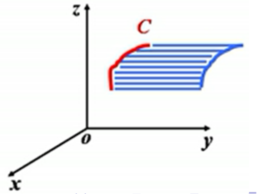
两张曲面交线

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$$



两个柱面交线

$$\begin{cases} y=y(x) \\ z=z(x) \end{cases}$$



一般方程空间曲线的切线与法平面

空间曲线的一般方程：

$$\begin{cases} y = y(x) \\ z = z(x) \end{cases}$$

一般方程空间曲线的切线与法平面

空间曲线的一般方程:

$$\begin{cases} y = y(x) \\ z = z(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = x \\ y = y(x) \\ z = z(x) \end{cases}$$

一般方程空间曲线的切线与法平面

空间曲线的一般方程：

$$\begin{cases} y = y(x) \\ z = z(x) \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x \\ y = y(x) \\ z = z(x) \end{cases}$$

切向量：

$$\boldsymbol{T} = \left(\frac{dx}{dx}, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}\right) = \left(1, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}\right)$$

一般方程空间曲线的切线与法平面

空间曲线的一般方程：

$$\begin{cases} y = y(x) \\ z = z(x) \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x \\ y = y(x) \\ z = z(x) \end{cases}$$

切向量：

$$\boldsymbol{T} = (\frac{dx}{dx}, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}) = (1, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx})$$

$$\boldsymbol{T} = (dx, dy, dz)$$

一般方程空间曲线的切线与法平面

$$\boldsymbol{T} = (dx, dy, dz)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\begin{vmatrix} F_x & F_z \\ G_x & G_z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}}$$

一般方程空间曲线的切线与法平面

$$\boldsymbol{T} = (dx, dy, dz)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\begin{vmatrix} F_x & F_z \\ G_x & G_z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}} \qquad \frac{dz}{dx} = -\frac{\begin{vmatrix} F_y & F_x \\ G_y & G_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}}$$

一般方程空间曲线的切线与法平面

$$\boldsymbol{T} = (dx, dy, dz)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\begin{vmatrix} F_x & F_z \\ G_x & G_z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}} \qquad \frac{dz}{dx} = -\frac{\begin{vmatrix} F_y & F_x \\ G_y & G_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}}$$

$$dx : dy : dz = \begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}$$

一般方程空间曲线的切线与法平面

$$\boldsymbol{T} = (dx, dy, dz)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\begin{vmatrix} F_x & F_z \\ G_x & G_z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}} \qquad \frac{dz}{dx} = -\frac{\begin{vmatrix} F_y & F_x \\ G_y & G_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}}$$

$$dx : dy : dz = \begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{T} = (dx, dy, dz) = (\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix})$$

一般方程空间曲线的切线与法平面

$$\mathbf{T} = (dx, dy, dz) = \left(\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix} \right)$$

一般方程空间曲线的切线与法平面

$$\mathbf{T} = (dx, dy, dz) = \left(\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix} \right)$$

$$= (F_x, F_y, F_z) \times (G_x, G_y, G_z)$$

一般方程空间曲线的切线与法平面

$$\mathbf{T} = (dx, dy, dz) = \left(\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix} \right)$$

$$= (F_x, F_y, F_z) \times (G_x, G_y, G_z)$$

$$= \bigtriangledown F \times \bigtriangledown G$$

一般方程空间曲线的切线与法平面

$$\mathbf{T} = (dx, dy, dz) = (\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix})$$

$$= (F_x, F_y, F_z) \times (G_x, G_y, G_z)$$

$$= \bigtriangledown F \times \bigtriangledown G$$

两个曲面函数的梯度的叉积就是交线的切向量。

一般方程空间曲线的切线与法平面

$$\mathbf{T} = (dx, dy, dz) = \left(\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix} \right)$$

$$= (F_x, F_y, F_z) \times (G_x, G_y, G_z)$$

$$= \bigtriangledown F \times \bigtriangledown G$$

两个曲面函数的梯度的叉积就是交线的切向量。

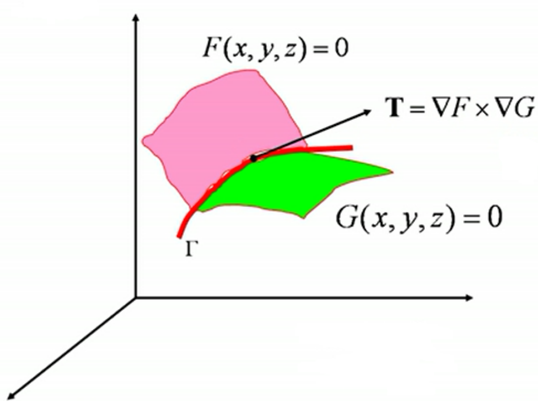
此为求交线切向量的最简便方法。

一般方程空间曲线的切线与法平面

$$\mathbf{T} = \bigtriangledown F \times \bigtriangledown G$$

一般方程空间曲线的切线与法平面

$$\mathbf{T} = \nabla F \times \nabla G$$



一般方程空间曲线的切线与法平面

$$\mathbf{T} = (dx, dy, dz) = \left(\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix} \right)$$

一般方程空间曲线的切线与法平面

$$\mathbf{T} = (dx, dy, dz) = \left(\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix} \right)$$

在$M_0(x_0, y_0, z_0)$处切线方程:

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_{M_0}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}_{M_0}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}_{M_0}}$$

一般方程空间曲线的切线与法平面

$$\mathbf{T}=(dx,dy,dz)=\left(\begin{vmatrix}F_y & F_z\\ G_y & G_z\end{vmatrix},\begin{vmatrix}F_z & F_x\\ G_z & G_x\end{vmatrix},\begin{vmatrix}F_x & F_y\\ G_x & G_y\end{vmatrix}\right)$$

在$M_0(x_0,y_0,z_0)$处切线方程：

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix}F_y & F_z\\ G_y & G_z\end{vmatrix}_{M_0}}=\frac{y-y_0}{\begin{vmatrix}F_z & F_x\\ G_z & G_x\end{vmatrix}_{M_0}}=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix}F_x & F_y\\ G_x & G_y\end{vmatrix}_{M_0}}$$

法平面方程：

$$\begin{vmatrix}F_y & F_z\\ G_y & G_z\end{vmatrix}(x-x_0)+\begin{vmatrix}F_z & F_x\\ G_z & G_x\end{vmatrix}(y-y_0)+\begin{vmatrix}F_x & F_y\\ G_x & G_y\end{vmatrix}(z-z_0)=0$$

教材P99例5

隐式方程空间曲面的切平面与法线

曲面$F(x,y,z)=0$在点$M_0(x_0,y_0,z_0)$处的切平面?

隐式方程空间曲面的切平面与法线

曲面$F(x,y,z)=0$在点$M_0(x_0,y_0,z_0)$处的切平面?

在曲面上过点$M_0(x_0,y_0,z_0)$作一曲线,

隐式方程空间曲面的切平面与法线

曲面$F(x,y,z)=0$在点$M_0(x_0,y_0,z_0)$处的切平面?

在曲面上过点$M_0(x_0,y_0,z_0)$作一曲线,

假定其参数方程为:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

该曲线满足$F[x(t),y(t),z(t)]=0$。

隐式方程空间曲面的切平面与法线

曲面$F(x,y,z)=0$在点$M_0(x_0,y_0,z_0)$处的切平面?

在曲面上过点$M_0(x_0,y_0,z_0)$作一曲线,

假定其参数方程为:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

该曲线满足$F[x(t),y(t),z(t)]=0$。

对t求导:

$F_x x'(t) + F_y y'(t) + F_z z'(t) = 0$

隐式方程空间曲面的切平面与法线

$$F_x x'(t) + F_y y'(t) + F_z z'(t) = 0$$

隐式方程空间曲面的切平面与法线

$$F_x x'(t) + F_y y'(t) + F_z z'(t) = 0$$

$$t_0 \Leftrightarrow M_0(x_0, y_0, z_0)$$

隐式方程空间曲面的切平面与法线

$$F_x x'(t) + F_y y'(t) + F_z z'(t) = 0$$

$t_0 \Leftrightarrow M_0(x_0, y_0, z_0)$

在t_0点处，

$$F_x(M_0)x'(t_0) + F_y(M_0)y'(t_0) + F_z(M_0)z'(t_0) = 0$$

隐式方程空间曲面的切平面与法线

$$F_x x'(t) + F_y y'(t) + F_z z'(t) = 0$$

$$t_0 \Leftrightarrow M_0(x_0, y_0, z_0)$$

在t_0点处，

$$F_x(M_0)x'(t_0) + F_y(M_0)y'(t_0) + F_z(M_0)z'(t_0) = 0$$

$$(F_x(M_0), F_y(M_0), F_z(M_0)) \cdot (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)) = 0$$

隐式方程空间曲面的切平面与法线

$$F_x x'(t) + F_y y'(t) + F_z z'(t) = 0$$

$t_0 \Leftrightarrow M_0(x_0, y_0, z_0)$

在t_0点处，

$$F_x(M_0)x'(t_0) + F_y(M_0)y'(t_0) + F_z(M_0)z'(t_0) = 0$$

$$(F_x(M_0), F_y(M_0), F_z(M_0)) \cdot (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)) = 0$$

因为$(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$是曲线在点$M_0$处的切向量，

隐式方程空间曲面的切平面与法线

$F_x x'(t) + F_y y'(t) + F_z z'(t) = 0$

$t_0 \Leftrightarrow M_0(x_0, y_0, z_0)$

在t_0点处，

$F_x(M_0)x'(t_0) + F_y(M_0)y'(t_0) + F_z(M_0)z'(t_0) = 0$

$(F_x(M_0), F_y(M_0), F_z(M_0)) \cdot (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)) = 0$

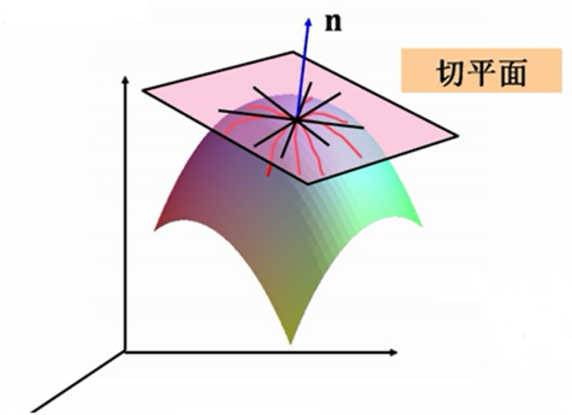
因为$(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$是曲线在点$M_0$处的切向量，

故而，

向量$\boldsymbol{n} = (F_x(M_0), F_y(M_0), F_z(M_0)) = \bigtriangledown F(M_0)$是**法向量**，

与曲线上任意一条经过M_0的曲线在M_0处垂直。

隐式方程空间曲面的切平面与法线



向量$\boldsymbol{n}$即点M_0处法线的方向向量。

过M_0点与向量$\boldsymbol{n}$垂直的切线构成曲面在M_0处的切平面。

隐式方程空间曲面的切平面与法线

$$\boldsymbol{n} = (F_x(M_0), F_y(M_0), F_z(M_0))$$

隐式方程空间曲面的切平面与法线

$$\boldsymbol{n} = (F_x(M_0), F_y(M_0), F_z(M_0))$$

在$M_0(x_0, y_0, z_0)$处，

切平面方程：

$$F_x(M_0)(x - x_0) + F_y(M_0)(y - y_0) + F_z(M_0)(z - z_0) = 0$$

隐式方程空间曲面的切平面与法线

$$\boldsymbol{n} = (F_x(M_0), F_y(M_0), F_z(M_0))$$

在$M_0(x_0, y_0, z_0)$处，

切平面方程：

$$F_x(M_0)(x - x_0) + F_y(M_0)(y - y_0) + F_z(M_0)(z - z_0) = 0$$

法线方程：

$$\frac{x - x_0}{F_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{F_z(M_0)}$$

显式方程空间曲面的切平面与法线

曲面$z = f(x, y)$在点$M_0(x_0, y_0, z_0)$处的切平面?

显式方程空间曲面的切平面与法线

曲面$z=f(x,y)$在点$M_0(x_0,y_0,z_0)$处的切平面?

令$F(x,y,z)=f(x,y)-z$

显式方程空间曲面的切平面与法线

曲面$z=f(x,y)$在点$M_0(x_0,y_0,z_0)$处的切平面?

令$F(x,y,z)=f(x,y)-z$

法向量$\boldsymbol{n}=(F_x(M_0),F_y(M_0),F_z(M_0))$

显式方程空间曲面的切平面与法线

曲面$z=f(x,y)$在点$M_0(x_0,y_0,z_0)$处的切平面?

令$F(x,y,z)=f(x,y)-z$

法向量$\boldsymbol{n}=(F_x(M_0),F_y(M_0),F_z(M_0))$

$$F_x(x,y,z)=f_x(x,y)$$

$$F_y(x,y,z)=f_y(x,y)$$

$$F_z(x,y,z)=-1$$

显式方程空间曲面的切平面与法线

曲面$z = f(x, y)$在点$M_0(x_0, y_0, z_0)$处的切平面?

令$F(x, y, z) = f(x, y) - z$

法向量$\boldsymbol{n} = (F_x(M_0), F_y(M_0), F_z(M_0))$

$F_x(x, y, z) = f_x(x, y)$

$F_y(x, y, z) = f_y(x, y)$

$F_z(x, y, z) = -1$

故而点M_0处$\boldsymbol{n} = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0), -1)$

显式方程空间曲面的切平面与法线

$$\boldsymbol{n} = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0), -1)$$

显式方程空间曲面的切平面与法线

$$\boldsymbol{n} = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0), -1)$$

在$M_0(x_0, y_0, z_0)$处，

切平面方程：

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0$$

或者

$$z = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + f(x_0, y_0)$$

显式方程空间曲面的切平面与法线

$$\boldsymbol{n} = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0), -1)$$

在$M_0(x_0, y_0, z_0)$处，

切平面方程：

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0$$

或者

$$z = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + f(x_0, y_0)$$

法线方程：

$$\frac{x - x_0}{f_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}$$

法向量的方向余弦

$$\boldsymbol{n} = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0), -1)$$

法向量的方向余弦

$$\boldsymbol{n} = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0), -1)$$

$$\cos\alpha = \frac{-f_x}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{-f_y}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}$$

教材P102例6, 7

习题9-6 9. 12.

作业

习题9-6: 4. 6. 8. 10. 11.