高等数学

张爱林

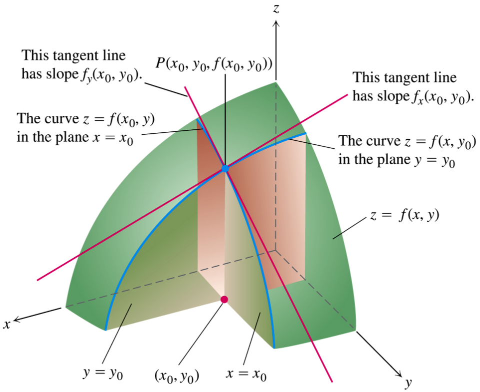
深圳大学

March 30, 2022

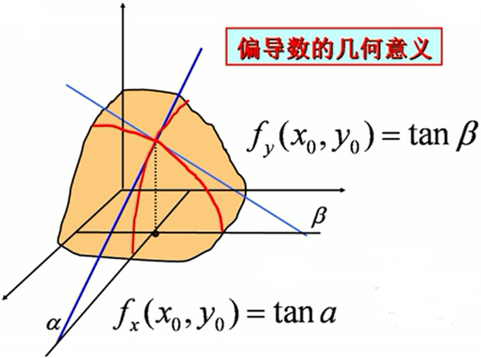
第九章 多元函数微分法及其应用

第七节 方向导数与梯度

偏导数的几何意义


z
This tangent line has slope $f_y(x_0, y_0)$.
$P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$
This tangent line has slope $f_x(x_0, y_0)$.
The curve $z = f(x_0, y)$ in the plane $x = x_0$
The curve $z = f(x, y_0)$ in the plane $y = y_0$
$z = f(x, y)$
x
y
$y = y_0$
(x_0, y_0)
$x = x_0$

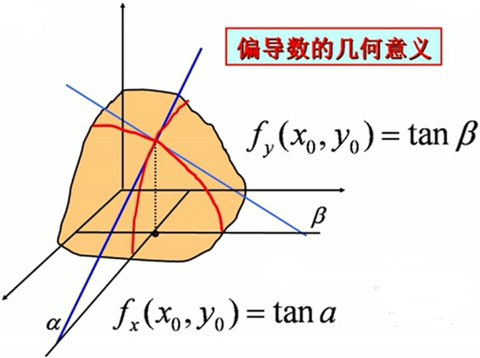
偏导数的几何意义



$f_x(x_0, y_0)$：曲面被$y = y_0$所截曲线在点M_0 处沿x轴变化率

$f_y(x_0, y_0)$：曲面被$x = x_0$所截曲线在点M_0 处沿y轴变化率

偏导数的几何意义



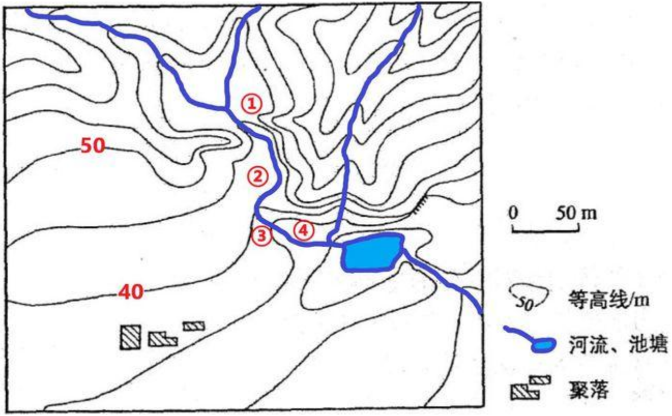
$f_x(x_0,y_0)$: 曲面被$y=y_0$所截曲线在点M_0 处沿x轴变化率

$f_y(x_0,y_0)$: 曲面被$x=x_0$所截曲线在点M_0 处沿y轴变化率

函数沿任意方向的变化率?

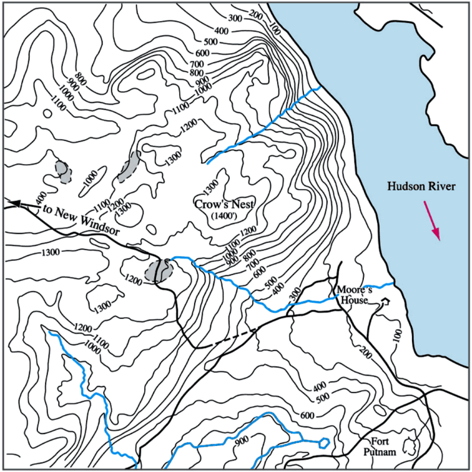
函数沿任意方向的变化率?

函数沿任意方向的变化率？



函数沿任意方向的变化率？

函数沿任意方向的变化率？



方向导数(directional derivatives):

方向导数(directional derivatives):

一个函数沿指定方向的变化率

方向导数(directional derivatives):

一个函数沿指定方向的变化率

梯度(gradient vectors):

方向导数(directional derivatives):

一个函数沿指定方向的变化率

梯度(gradient vectors):

一个函数的最大变化方向向量

方向导数(directional derivatives)

设函数$z=f(x,y)$，其上有一点$P_0(x_0,y_0)$

方向导数(directional derivatives)

设函数$z=f(x,y)$，其上有一点$P_0(x_0,y_0)$

设l是一条以P_0为起点的射线，

方向导数(directional derivatives)

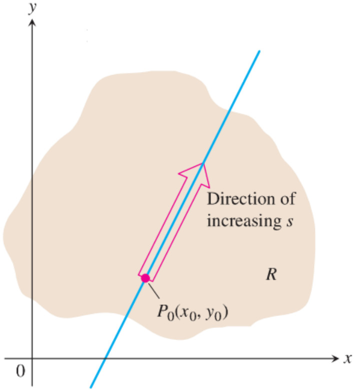
设函数$z=f(x,y)$，其上有一点$P_0(x_0,y_0)$

设l是一条以P_0为起点的射线，

其单位向量$\overrightarrow{e_l}=(\cos\alpha,\cos\beta)$

方向导数(directional derivatives)

设函数$z=f(x,y)$，其上有一点$P_0(x_0,y_0)$
设l是一条以P_0为起点的射线，
其单位向量$\vec{e_l}=(\cos\alpha,\cos\beta)$



方向导数(directional derivatives)

$P_0(x_0, y_0)$，$\overrightarrow{e_l} = (\cos\alpha, \cos\beta)$

从P_0出发，沿着$\overrightarrow{l}$的方向前进ρ个单位，到达P 点：

方向导数(directional derivatives)

$P_0(x_0, y_0)$，$\overrightarrow{e_l} = (\cos\alpha, \cos\beta)$

从P_0出发，沿着$\overrightarrow{l}$的方向前进ρ个单位，到达P点：

$P(x_0 + \rho\cos\alpha, y_0 + \rho\cos\beta)$

方向导数(directional derivatives)

$P_0(x_0, y_0)$，$\overrightarrow{e_l} = (\cos\alpha, \cos\beta)$

从P_0出发，沿着$\overrightarrow{l}$的方向前进ρ个单位，到达P点：

$P(x_0 + \rho\cos\alpha, y_0 + \rho\cos\beta)$

$\overrightarrow{P_0P} = (\rho\cos\alpha, \rho\cos\beta) = \rho\overrightarrow{e_l}$

方向导数(directional derivatives)

$P_0(x_0, y_0)$， $\vec{e_l} = (\cos\alpha, \cos\beta)$

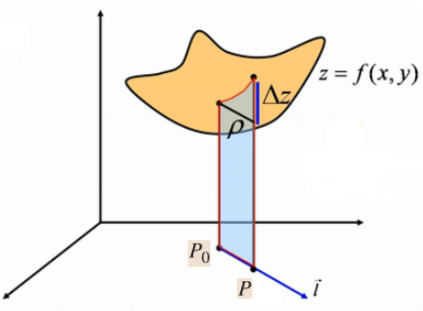
从P_0出发，沿着$\vec{l}$的方向前进ρ个单位，到达P 点：

$P(x_0 + \rho\cos\alpha, y_0 + \rho\cos\beta)$

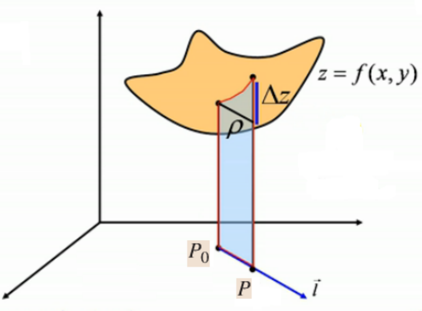
$\overrightarrow{P_0P} = (\rho\cos\alpha, \rho\cos\beta) = \rho\vec{e_l}$

$\Delta x = \rho\cos\alpha, \Delta y = \rho\cos\beta$

方向导数



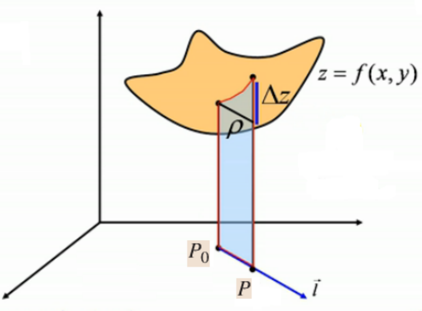
方向导数



沿 $\overrightarrow{l}$ 方向的增量：

$$\Delta z = f(x_0+\rho\cos\alpha, y_0+\rho\cos\beta) - f(x_0, y_0)$$

方向导数



沿 $\overrightarrow{l}$ 方向的增量：

$\Delta z = f(x_0 + \rho\cos\alpha, y_0 + \rho\cos\beta) - f(x_0, y_0)$

沿 $\overrightarrow{l}$ 方向的平均变化率：

$$\frac{\Delta z}{\rho}$$

方向导数

定义.函数$z=f(x,y)$在点$M_0(x_0,y_0)$

沿方向$\vec{e_l}=(\cos\alpha,\cos\beta)$的方向导数：

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta z}{\rho}=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x_0+\rho\cos\alpha,y_0+\rho\cos\beta)-f(x_0,y_0)}{\rho}$$

方向导数

定义. 函数$z=f(x,y)$在点$M_0(x_0,y_0)$

沿方向$\overrightarrow{e_l}=(\cos\alpha,\cos\beta)$的方向导数：

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta z}{\rho}=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x_0+\rho\cos\alpha,y_0+\rho\cos\beta)-f(x_0,y_0)}{\rho}$$

方向导数

是函数$z=f(x,y)$在点$M_0(x_0,y_0)$沿方向$\overrightarrow{l}$对ρ 的**变化率**；

方向导数

定义.函数$z=f(x,y)$在点$M_0(x_0,y_0)$

沿方向$\overrightarrow{e_l}=(\cos\alpha,\cos\beta)$的方向导数：

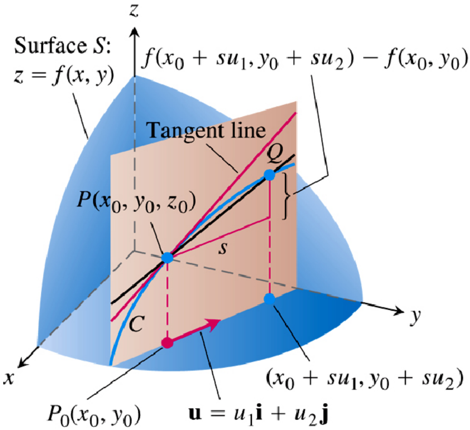
$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta z}{\rho}=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x_0+\rho\cos\alpha,y_0+\rho\cos\beta)-f(x_0,y_0)}{\rho}$$

方向导数

是函数$z=f(x,y)$在点$M_0(x_0,y_0)$沿方向$\overrightarrow{l}$对ρ 的**变化率**；

也是曲面$z=f(x,y)$在点$M_0(x_0,y_0)$沿方向$\overrightarrow{l}$的**倾斜程度（即坡度）**。

方向导数的几何解释


z
Surface S:
$z = f(x, y)$
$f(x_0 + su_1, y_0 + su_2) - f(x_0, y_0)$
Tangent line
Q
$P(x_0, y_0, z_0)$
s
C
y
x
$(x_0 + su_1, y_0 + su_2)$
$P_0(x_0, y_0)$
$\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$

方向导数与偏导数的关系

若偏导数$\frac{\partial f}{\partial x}$存在，且$\overrightarrow{e_l} = (1,0) = \boldsymbol{i}$，则

方向导数与偏导数的关系

若偏导数$\frac{\partial f}{\partial x}$存在，且$\overrightarrow{e_l} = (1,0) = \boldsymbol{i}$，则

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \lim_{\rho \to 0} \frac{f(x_0+\rho, y_0) - f(x_0, y_0)}{\rho}$$

方向导数与偏导数的关系

若偏导数$\frac{\partial f}{\partial x}$存在，且$\overrightarrow{e_l} = (1,0) = \boldsymbol{i}$，则

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \lim_{\rho \to 0} \frac{f(x_0+\rho, y_0) - f(x_0, y_0)}{\rho} = \frac{\partial f}{\partial x} = f_x$$

方向导数与偏导数的关系

若偏导数$\frac{\partial f}{\partial x}$存在，且$\overrightarrow{e_l}=(1,0)=\boldsymbol{i}$，则

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x_0+\rho,y_0)-f(x_0,y_0)}{\rho}=\frac{\partial f}{\partial x}=f_x$$

若偏导数$\frac{\partial f}{\partial y}$存在，且$\overrightarrow{e_l}=(0,1)=\boldsymbol{j}$，则

方向导数与偏导数的关系

若偏导数$\frac{\partial f}{\partial x}$存在，且$\overrightarrow{e_l} = (1, 0) = \boldsymbol{i}$，则

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \lim_{\rho \to 0} \frac{f(x_0 + \rho, y_0) - f(x_0, y_0)}{\rho} = \frac{\partial f}{\partial x} = f_x$$

若偏导数$\frac{\partial f}{\partial y}$存在，且$\overrightarrow{e_l} = (0, 1) = \boldsymbol{j}$，则

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \lim_{\rho \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \rho) - f(x_0, y_0)}{\rho}$$

方向导数与偏导数的关系

若偏导数$\frac{\partial f}{\partial x}$存在，且$\overrightarrow{e_l}=(1,0)=\boldsymbol{i}$，则

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x_0+\rho,y_0)-f(x_0,y_0)}{\rho}=\frac{\partial f}{\partial x}=f_x$$

若偏导数$\frac{\partial f}{\partial y}$存在，且$\overrightarrow{e_l}=(0,1)=\boldsymbol{j}$，则

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\rho)-f(x_0,y_0)}{\rho}=\frac{\partial f}{\partial y}=f_y$$

方向导数与偏导数的关系

但反过来，

若$\frac{\partial f}{\partial l}$存在，且$\overrightarrow{e_l}=(1,0)=\boldsymbol{i}$，则

偏导数$\frac{\partial f}{\partial x}$未必存在。

方向导数与偏导数的关系

但反过来,

若$\frac{\partial f}{\partial l}$存在，且$\overrightarrow{e_l}=(1,0)=\boldsymbol{i}$，则

偏导数$\frac{\partial f}{\partial x}$未必存在。

因为,

偏导数$\frac{\partial f}{\partial x}$是双向导数（$\Delta x$ 可正负）

方向导数$\frac{\partial f}{\partial l}$是单向导数（$\rho>0$）

方向导数与偏导数的关系

但反过来，

若$\frac{\partial f}{\partial l}$存在，且$\vec{e_l}=(1,0)=\boldsymbol{i}$，则

偏导数$\frac{\partial f}{\partial x}$未必存在。

因为，

偏导数$\frac{\partial f}{\partial x}$是双向导数（$\Delta x$ 可正负）

方向导数$\frac{\partial f}{\partial l}$是单向导数（$\rho>0$）

所以，

在一点处沿x轴或y轴方向的方向导数存在，

也不能保证该点的偏导数存在。

教材P104例1.

$z=\sqrt{x^2+y^2}$在原点$(0,0)$处方向导数存在，
而偏导数不存在。

教材P104**例1.**

$z=\sqrt{x^2+y^2}$在原点$(0,0)$处方向导数存在，而偏导数不存在。

解. 设某方向单位向量为$\overrightarrow{e_l}=(\cos\alpha,\cos\beta)$

教材P104**例1.**

$z=\sqrt{x^2+y^2}$在原点$(0,0)$处方向导数存在，
而偏导数不存在。

解. 设某方向单位向量为$\overrightarrow{e_l}=(\cos\alpha,\cos\beta)$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{(0,0)}=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(0+\rho\cos\alpha,0+\rho\cos\beta)-f(0,0)}{\rho}$$

教材P104例1.

$z=\sqrt{x^2+y^2}$在原点$(0,0)$处方向导数存在，
而偏导数不存在。

解. 设某方向单位向量为$\vec{e_l}=(\cos\alpha,\cos\beta)$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{(0,0)}=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(0+\rho\cos\alpha,0+\rho\cos\beta)-f(0,0)}{\rho}$$

$$=\lim_{\rho\to 0}\frac{\sqrt{(\rho\cos\alpha)^2+(\rho\cos\beta)^2}-0}{\rho}$$

教材P104例1.

$z=\sqrt{x^2+y^2}$在原点$(0,0)$处方向导数存在，
而偏导数不存在。

解. 设某方向单位向量为$\overrightarrow{e_l}=(\cos\alpha,\cos\beta)$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{(0,0)}=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(0+\rho\cos\alpha,0+\rho\cos\beta)-f(0,0)}{\rho}$$

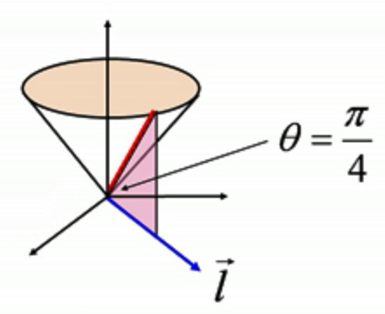
$$=\lim_{\rho\to 0}\frac{\sqrt{(\rho\cos\alpha)^2+(\rho\cos\beta)^2}-0}{\rho}$$

$$=\lim_{\rho\to 0}\frac{\rho}{\rho}=1$$

教材P104**例1.**

$z=\sqrt{x^2+y^2}$在原点$(0,0)$处方向导数存在，

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{(0,0)}=1=\tan\frac{\pi}{4}$$



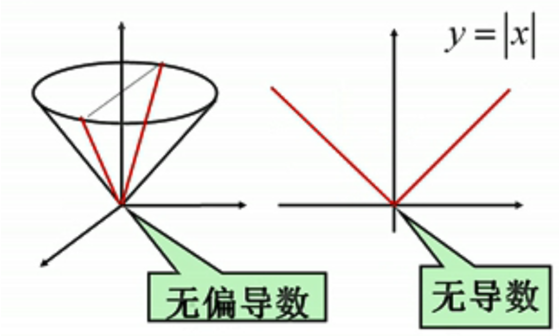
即圆锥面在原点处沿任何方向的方向导数均为1。

教材P104例1.

$z=\sqrt{x^2+y^2}$在原点$(0,0)$处方向导数存在，
而偏导数不存在。

教材P104例1.

$z=\sqrt{x^2+y^2}$在原点$(0,0)$处方向导数存在，
而偏导数不存在。



二元函数方向导数存在的条件与计算

定理.

如果函数$z = f(x, y)$在点$P_0(x_0, y_0)$处可微分，

二元函数方向导数存在的条件与计算

定理.

如果函数$z = f(x, y)$在点$P_0(x_0, y_0)$处可微分,

则函数在该点沿任一方向$\overrightarrow{l}$的方向导数都存在,

二元函数方向导数存在的条件与计算

定理.

如果函数$z = f(x, y)$在点$P_0(x_0, y_0)$处可微分，

则函数在该点沿任一方向$\overrightarrow{l}$的方向导数都存在，

并且

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)} = f_x(x_0, y_0)\cos\alpha + f_y(x_0, y_0)\cos\beta$$

其中$\cos\alpha, \cos\beta$是方向$\overrightarrow{l}$的方向余弦。

二元函数方向导数存在的条件与计算

定理.

如果函数$z=f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$处可微分，

则函数在该点沿任一方向$\overrightarrow{l}$的方向导数都存在，

并且

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)} = f_x(x_0,y_0)\cos\alpha + f_y(x_0,y_0)\cos\beta$$

其中$\cos\alpha, \cos\beta$是方向$\overrightarrow{l}$的方向余弦。

这就是利用偏导数计算方向导数的公式。

二元函数方向导数存在的条件与计算

定理.

如果函数$z=f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$处可微分，

则函数在该点沿任一方向$\vec{l}$的方向导数都存在，

并且

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)} = f_x(x_0,y_0)\cos\alpha + f_y(x_0,y_0)\cos\beta$$

其中$\cos\alpha,\cos\beta$是方向$\vec{l}$的方向余弦。

这就是利用偏导数计算方向导数的公式。

函数可微$\Rightarrow$方向导数存在

教材P105，例1

方向导数的计算

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)} = f_x(x_0,y_0)\cos\alpha + f_y(x_0,y_0)\cos\beta$$

方向导数的计算

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)} = f_x(x_0,y_0)\cos\alpha + f_y(x_0,y_0)\cos\beta$$

$$\frac{\partial f}{\partial l} = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}) \cdot (\cos\alpha, \cos\beta)$$

方向导数的计算

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)} = f_x(x_0,y_0)\cos\alpha + f_y(x_0,y_0)\cos\beta$$

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)\cdot(\cos\alpha, \cos\beta)$$

记

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

即**梯度**

方向导数的计算

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)} = f_x(x_0,y_0)\cos\alpha + f_y(x_0,y_0)\cos\beta$$

$$\frac{\partial f}{\partial l} = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}) \cdot (\cos\alpha, \cos\beta)$$

记

$$\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})$$

即**梯度**

$$= \bigtriangledown f \cdot \overrightarrow{e_l}$$

方向导数的计算

计算方向导数的最简便方法:

$$\frac{\partial f}{\partial l} = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}) \cdot (\cos\alpha, \cos\beta)$$

$$= \bigtriangledown f \cdot \overrightarrow{e_l}$$

方向导数的计算

计算方向导数的最简便方法:

$$\frac{\partial f}{\partial l} = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}) \cdot (\cos\alpha, \cos\beta)$$

$$= \bigtriangledown f \cdot \overrightarrow{e_l} = \textbf{grad} f \cdot \overrightarrow{e_l}$$

方向导数的计算

计算方向导数的最简便方法:

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \cdot (\cos\alpha, \cos\beta)$$

$$= \triangledown f \cdot \overrightarrow{e_l} = \textbf{grad} f \cdot \overrightarrow{e_l}$$

用梯度grad$f$点乘$\overrightarrow{l}$的单位向量e_l就得到方向导数。

三元函数方向导数存在的条件与计算

定理. 如果函数$u=f(x,y,z)$在点$P_0(x_0,y_0,z_0)$处可微分，则函数在该点沿任一方向$\overrightarrow{l}$的方向导数都存在，

并且

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0,z_0)} =$$

$$f_x(x_0,y_0,z_0)\cos\alpha + f_y(x_0,y_0,z_0)\cos\beta + f_z(x_0,y_0,z_0)\cos\gamma$$

三元函数方向导数存在的条件与计算

定理.如果函数$u=f(x,y,z)$在点$P_0(x_0,y_0,z_0)$处可微分，

则函数在该点沿任一方向$\overrightarrow{l}$的方向导数都存在，

并且

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}=$$

$$f_x(x_0,y_0,z_0)\cos\alpha+f_y(x_0,y_0,z_0)\cos\beta+f_z(x_0,y_0,z_0)\cos\gamma$$

其中$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$是方向$\overrightarrow{l}$的方向余弦。

三元函数方向导数存在的条件与计算

$$\frac{\partial f}{\partial l} = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}) \cdot (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

三元函数方向导数存在的条件与计算

$$\frac{\partial f}{\partial l} = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}) \cdot (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

记

$$\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z})$$

即**梯度**

三元函数方向导数存在的条件与计算

$$\frac{\partial f}{\partial l}=(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z})\cdot(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$$

记

$$\nabla f=(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z})$$

即**梯度**

$$=\triangledown f\cdot\overrightarrow{e_l}$$

三元函数方向导数存在的条件与计算

$$\frac{\partial f}{\partial l} = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}) \cdot (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

记

$$\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z})$$

即**梯度**

$$= \triangledown f \cdot \overrightarrow{e_l} = \mathbf{grad} f \cdot \overrightarrow{e_l}$$

教材P106，例2

梯度(Gradient vectors)

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)} = (f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0)) \cdot (\cos\alpha, \cos\beta)$$

$$= \nabla f(x_0,y_0) \cdot \overrightarrow{e_l} = \mathbf{grad} f(x_0,y_0) \cdot \overrightarrow{e_l}$$

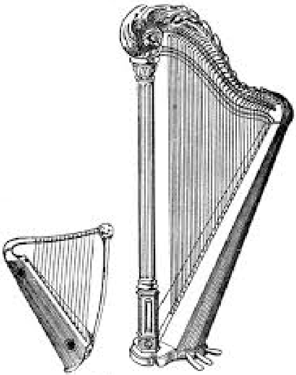
梯度(Gradient vectors)

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)} = (f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0)) \cdot (\cos\alpha, \cos\beta)$$

$$= \bigtriangledown f(x_0,y_0) \cdot \overrightarrow{e_l} = \textbf{grad} f(x_0,y_0) \cdot \overrightarrow{e_l}$$

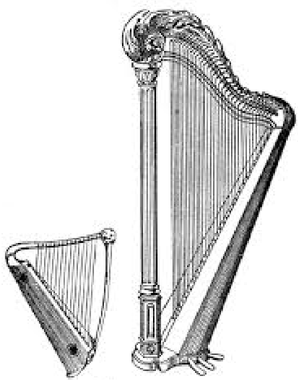
其中$\bigtriangledown f(x_0,y_0)$或$\textbf{grad} f(x_0,y_0)$即**梯度**

Nabla Harp



Harps, p. 984.

Nabla Harp



Harps, p. 984.

梯度(Gradient vectors)

$\bigtriangledown f(x_0, y_0)$或**grad**$f(x_0, y_0)$即**梯度**，

梯度(Gradient vectors)

$\triangledown f(x_0, y_0)$或**grad**$f(x_0, y_0)$即**梯度**，

$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j}$即**向量微分算子(Nabla operator)**，

梯度(Gradient vectors)

$\bigtriangledown f(x_0, y_0)$或**grad**$f(x_0, y_0)$即**梯度**，

$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j}$即**向量微分算子(Nabla operator)**，

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \mathbf{grad} f \cdot \overrightarrow{e_l}$$

梯度(Gradient vectors)

$\bigtriangledown f(x_0, y_0)$或$\mathbf{grad} f(x_0, y_0)$即**梯度**,

$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j}$即**向量微分算子(Nabla operator)**,

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \mathbf{grad} f \cdot \overrightarrow{e_l}$$

$$= |\ \mathbf{grad} f\ ||\ \overrightarrow{e_l}\ | \cos\theta$$

梯度(Gradient vectors)

$\bigtriangledown f(x_0,y_0)$或$\mathbf{grad} f(x_0,y_0)$即**梯度**,

$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j}$即**向量微分算子(Nabla operator)**,

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\mathbf{grad} f\cdot\overrightarrow{e_l}$$

$$=|\mathbf{grad} f||\overrightarrow{e_l}|\cos\theta$$

$$=|\mathbf{grad} f|\cos\theta$$

梯度与方向导数的关系

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \mid \mathbf{grad}\, f \mid \cos\theta$$

1）当$\theta = 0$，即$\overrightarrow{e_l}$与梯度$\mathbf{grad}\, f(x_0, y_0)$方向相同时，

梯度与方向导数的关系

$$\frac{\partial f}{\partial l} = |\ \mathbf{grad}\, f\ | \cos\theta$$

1）当$\theta = 0$，即$\overrightarrow{e_l}$与梯度$\mathbf{grad}\, f(x_0, y_0)$方向相同时，

函数$f(x, y)$增加最快。

梯度与方向导数的关系

$$\frac{\partial f}{\partial l} = |\,\mathbf{grad}\, f\,| \cos\theta$$

1）当$\theta = 0$，即$\overrightarrow{e_l}$与梯度$\mathbf{grad}\, f(x_0, y_0)$方向相同时，

函数$f(x, y)$增加最快。

此时函数在此方向的方向导数达到最大值，就是梯度的模:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)} = |\,\mathbf{grad}\, f(x_0, y_0)\,|$$

$$= \sqrt{\left(\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}\right)^2 + \left(\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}\right)^2}$$

梯度

方向导数(directional derivatives):

一个函数沿指定方向的变化率$\Rightarrow$一个数值

梯度(gradient vectors):

一个函数的最大变化方向向量$\Rightarrow$一个向量

梯度

方向导数(directional derivatives):

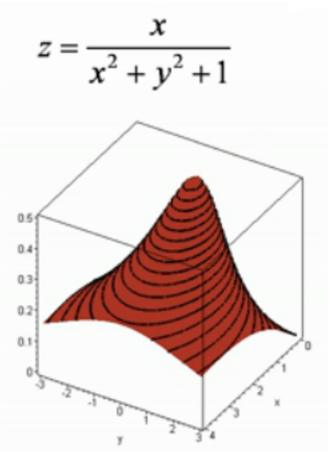
一个函数沿指定方向的变化率⇒一个数值

梯度(gradient vectors):

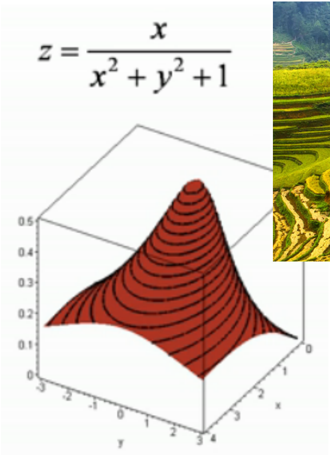
一个函数的最大变化方向向量⇒一个向量

是函数$z = f(x, y)$在点(x, y)处取得最大方向导数的方向。

梯度的几何解释



梯度的几何解释



梯度的几何解释

如果用平面$z = c$

截取曲面$z = f(x, y)$，

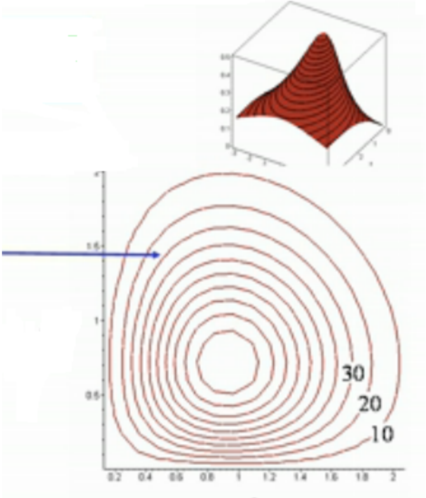
得到的曲线$f(x, y) = c$

为函数的等值线。

梯度的几何解释

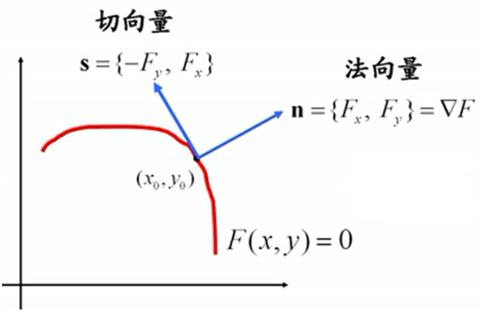
如果用平面$z=c$
截取曲面$z=f(x,y)$,
得到的曲线$f(x,y)=c$
为函数的等值线。

$$\begin{cases} z=f(x,y) \\ z=c \end{cases}$$



平面曲线切向量与法向量

曲线$F(x,y)=0$在点(x_0,y_0)处的切向量与法向量：



切向量：$(1,-\frac{F_x}{F_y})$或者$(-F_y,F_x)$

法向量：$(1,\frac{F_y}{F_x})$或者(F_x,F_y)

梯度的几何解释

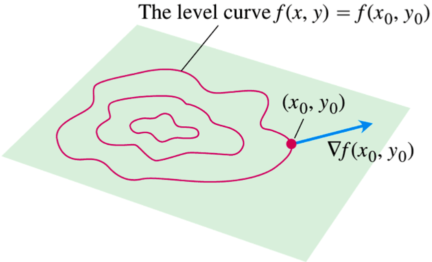
等值线$f(x,y)=c$的法向量为

$$\mathbf{n}=(f_x,f_y)=\nabla f$$

梯度的几何解释

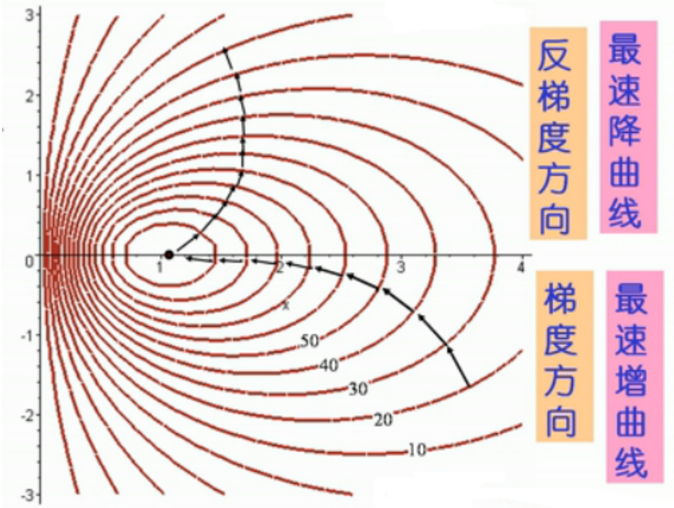
等值线$f(x,y)=c$的法向量为

$$\mathbf{n}=(f_x,f_y)=\nabla f$$



故而梯度在任何点都垂直于函数的等值线，
并从函数值较小的等值线指向函数值较大的等值线。

梯度的几何解释



梯度与方向导数的关系

$$\frac{\partial f}{\partial l} = |\,\textbf{grad}\,f\,|\cos\theta$$

2）当$\theta = \pi$，即$\overrightarrow{e_l}$与梯度$\textbf{grad}\,f(x_0, y_0)$方向相反时，

梯度与方向导数的关系

$$\frac{\partial f}{\partial l} = |\ \mathbf{grad}\, f\ |\cos\theta$$

2）当$\theta=\pi$，即$\vec{e_l}$与梯度$\mathbf{grad}\,f(x_0,y_0)$方向相反时，

函数$f(x,y)$减少最快。

梯度与方向导数的关系

$$\frac{\partial f}{\partial l} = |\ \mathbf{grad} f\ | \cos\theta$$

2）当$\theta = \pi$，即$\vec{e_l}$与梯度$\mathbf{grad} f(x_0, y_0)$方向相反时，

函数$f(x, y)$减少最快。

此时，函数在此方向的方向导数达到最小值：

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)} = -\ |\ \mathbf{grad} f(x_0, y_0)\ |$$

$$= -\sqrt{\left(\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}\right)^2 + \left(\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}\right)^2}$$

梯度与方向导数的关系

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \mid \mathbf{grad}\, f \mid \cos\theta$$

3）当$\theta = \frac{\pi}{2}$，即$\overrightarrow{e_l}$与梯度$\mathbf{grad}\, f(x_0, y_0)$方向垂直时，

梯度与方向导数的关系

$$\frac{\partial f}{\partial l} = |\ \mathbf{grad} f\ | \cos\theta$$

3）当$\theta = \frac{\pi}{2}$，即$\overrightarrow{e_l}$与梯度$\mathbf{grad} f(x_0, y_0)$方向垂直时，

函数$f(x, y)$变化率为0，

梯度与方向导数的关系

$$\frac{\partial f}{\partial l} = |\,\mathbf{grad}\, f\,| \cos\theta$$

3）当$\theta = \frac{\pi}{2}$，即$\overrightarrow{e_l}$与梯度$\mathbf{grad}\, f(x_0, y_0)$方向垂直时，

函数$f(x,y)$变化率为0，

即

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)} = |\,\mathbf{grad}\, f(x_0, y_0)\,| = 0$$

三元函数梯度

对于三元函数$u=f(x,y,z)$，

$\bigtriangledown f(x_0,y_0,z_0)$或$\textbf{grad} f(x_0,y_0,z_0)$即**梯度**，

三元函数梯度

对于三元函数$u = f(x, y, z)$,

$\bigtriangledown f(x_0, y_0, z_0)$或$\textbf{grad}\, f(x_0, y_0, z_0)$即**梯度**,

$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$即**三维向量微分算子**,

三元函数梯度

对于三元函数$u=f(x,y,z)$，

$\bigtriangledown f(x_0,y_0,z_0)$或$\textbf{grad}\, f(x_0,y_0,z_0)$即**梯度**，

$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$即**三维向量微分算子**，

其等值面为$f(x,y,z)=c$。

三元函数梯度

对于三元函数$u=f(x,y,z)$,

$\bigtriangledown f(x_0,y_0,z_0)$或$\mathbf{grad}\, f(x_0,y_0,z_0)$即**梯度**,

$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$即**三维向量微分算子**,

其等值面为$f(x,y,z)=c$。

等值面在点(x,y,z)处的法向量为$\mathbf{n}=(f_x,f_y,f_z)$

三元函数梯度

对于三元函数$u=f(x,y,z)$，

$\bigtriangledown f(x_0,y_0,z_0)$或$\textbf{grad}\, f(x_0,y_0,z_0)$即**梯度**，

$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$即**三维向量微分算子**，

其等值面为$f(x,y,z)=c$。

等值面在点(x,y,z)处的法向量为$\mathbf{n}=(f_x,f_y,f_z)=\nabla f$

三元函数梯度

对于三元函数$u=f(x,y,z)$，

$\bigtriangledown f(x_0,y_0,z_0)$或$\mathbf{grad}\, f(x_0,y_0,z_0)$即**梯度**，

$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$即**三维向量微分算子**，

其等值面为$f(x,y,z)=c$。

等值面在点(x,y,z)处的法向量为$\mathbf{n}=(f_x,f_y,f_z)=\nabla f$

故其梯度向量在任何点都垂直于函数的等值面，

并从函数值较小的等值面指向函数值较大的等值面。

拉普拉斯算子与方程

$$\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z})$$

即**梯度算子或Nabla算子(Nabla operator)**

拉普拉斯算子与方程

$$\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z})$$

即**梯度算子或Nabla算子(Nabla operator)**

则拉普拉斯方程(Laplace Function)为

$$\nabla^2 u = 0$$

拉普拉斯算子与方程

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

即**梯度算子或Nabla算子(Nabla operator)**

则拉普拉斯方程(Laplace Function)为

$$\nabla^2 u = 0$$

所以$\triangle = \nabla^2$为拉普拉斯算子(Laplace Operator)

梯度运算律：习题9-7 9.

教材P108例3

教材P109例4, 5, 6

数量场(Scalar field)

$$(x, y, z) \in G \subset R^3$$

数量场(Scalar field)

$$(x, y, z) \in G \subset R^3$$

$$f(x, y, z) : G \to R$$

数量场(Scalar field)

$(x, y, z) \in G \subset R^3$

$f(x, y, z) : G \to R$

G上的一个三元函数$f(x, y, z)$确定一个G上的数量场。

数量场(Scalar field)

$(x, y, z) \in G \subset R^3$

$f(x, y, z) : G \to R$

G上的一个三元函数$f(x, y, z)$确定一个G上的数量场。

例如，

温度场$T = T(x, y, z)$

数量场(Scalar field)

$(x,y,z) \in G \subset R^3$

$f(x,y,z) : G \to R$

G上的一个三元函数$f(x,y,z)$确定一个G上的数量场。

例如，

温度场$T = T(x,y,z)$

密度场$\rho = \rho(x,y,z)$

向量场(Vector field)

点$M(x,y,z) \in G \subset R^3$

向量场(Vector field)

点$M(x,y,z) \in G \subset R^3$

$$F(M) = P(M)\boldsymbol{i} + Q(M)\boldsymbol{j} + R(M)\boldsymbol{k}$$

向量场(Vector field)

点$M(x,y,z)\in G\subset R^3$

$$F(M)=P(M)\boldsymbol{i}+Q(M)\boldsymbol{j}+R(M)\boldsymbol{k}$$

$$F:G\to R$$

向量场(Vector field)

点$M(x,y,z)\in G\subset R^3$

$F(M)=P(M)\boldsymbol{i}+Q(M)\boldsymbol{j}+R(M)\boldsymbol{k}$

$F:G\rightarrow R$

G上的三个三元函数$P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ 确定一个G 上的向量场。

向量场(Vector field)

点$M(x,y,z)\in G\subset R^3$

$F(M)=P(M)\boldsymbol{i}+Q(M)\boldsymbol{j}+R(M)\boldsymbol{k}$

$F:G\to R$

G上的三个三元函数$P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ 确定一个G 上的向量场。

例如，

力场$F(M)$

向量场(Vector field)

点$M(x,y,z)\in G\subset R^3$

$F(M)=P(M)\boldsymbol{i}+Q(M)\boldsymbol{j}+R(M)\boldsymbol{k}$

$F:G\to R$

G上的三个三元函数$P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ 确定一个G 上的向量场。

例如，

力场$F(M)$

磁场$F(M)$

向量场(Vector field)

点$M(x,y,z)\in G\subset R^3$

$F(M)=P(M)\boldsymbol{i}+Q(M)\boldsymbol{j}+R(M)\boldsymbol{k}$

$F:G\to R$

G上的三个三元函数$P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ 确定一个G 上的向量场。

例如,

力场$F(M)$

磁场$F(M)$

速度场$v(M)$

向量场(Vector field)

点$M(x,y,z)\in G\subset R^3$

$F(M)=P(M)\boldsymbol{i}+Q(M)\boldsymbol{j}+R(M)\boldsymbol{k}$

$F:G\to R$

G上的三个三元函数$P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ 确定一个G 上的向量场。

例如，

力场$F(M)$

磁场$F(M)$

速度场$v(M)$

梯度场$(Gradient \quad field)$

教材P110，例7

作业

习题9-7: 2. 4. 6. 8. 10.