高等数学

张爱林

深圳大学

March 26, 2022

第九章 多元函数微分法及其应用

第四节 多元复合函数的求导法则

一元复合函数的求导法则

链式法则(the chain rule)

如果函数$u=g(x)$在点x处可导,

而$y=f(u)$在点$u=g(x)$处可导,

那么复合函数$y=f[g(x)]$在点x 处可导且导数为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

或者

$$\frac{dy}{dx}=f'(u)g'(x)$$

一元复合函数的求导法则

链式法则(the chain rule)

如果函数$u=g(x)$在点x处可导,

而$y=f(u)$在点$u=g(x)$处可导,

那么复合函数$y=f[g(x)]$在点x 处可导且导数为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

或者

$$\frac{dy}{dx}=f'(u)g'(x)$$

多元复合函数的求导?

一元函数与多元函数复合

定理1.（多元套一元）

如果函数$u=\varphi(t)$ 及$v=\psi(t)$ 都在点t处可导,

一元函数与多元函数复合

定理1.（多元套一元）

如果函数$u=\varphi(t)$ 及$v=\psi(t)$ 都在点t处可导，

函数$z=f(u,v)$在对应点(u,v)具有连续偏导数，

一元函数与多元函数复合

定理1.（多元套一元）

如果函数$u=\varphi(t)$ 及$v=\psi(t)$ 都在点t处可导,

函数$z=f(u,v)$在对应点(u,v)具有连续偏导数,

那么复合函数$z=f[\varphi(t),\psi(t)]$ 在点t处可导且导数为

一元函数与多元函数复合

定理1.（多元套一元）

如果函数$u=\varphi(t)$ 及$v=\psi(t)$ 都在点t处可导，

函数$z=f(u,v)$在对应点(u,v)具有连续偏导数，

那么复合函数$z=f[\varphi(t),\psi(t)]$ 在点t处可导且导数为

$$\frac{dz}{dt}=$$

一元函数与多元函数复合

定理1.（多元套一元）

如果函数$u=\varphi(t)$ 及$v=\psi(t)$ 都在点t处可导,

函数$z=f(u,v)$在对应点(u,v)具有连续偏导数,

那么复合函数$z=f[\varphi(t),\psi(t)]$ 在点t处可导且导数为

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial u}$$

一元函数与多元函数复合

定理1.（多元套一元）

如果函数$u=\varphi(t)$ 及$v=\psi(t)$ 都在点t处可导，

函数$z=f(u,v)$在对应点(u,v)具有连续偏导数，

那么复合函数$z=f[\varphi(t),\psi(t)]$ 在点t处可导且导数为

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dt}$$

一元函数与多元函数复合

定理1.（多元套一元）

如果函数$u=\varphi(t)$ 及$v=\psi(t)$ 都在点t处可导，

函数$z=f(u,v)$在对应点(u,v)具有连续偏导数，

那么复合函数$z=f[\varphi(t),\psi(t)]$ 在点t处可导且导数为

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial z}{\partial v}$$

一元函数与多元函数复合

定理1.（多元套一元）

如果函数$u = \varphi(t)$ 及$v = \psi(t)$ 都在点t处可导，

函数$z = f(u, v)$在对应点(u, v)具有连续偏导数，

那么复合函数$z = f[\varphi(t), \psi(t)]$ 在点t处可导且导数为

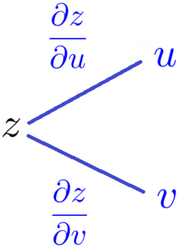
$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dt}$$

称为**全导数**。

一元函数与多元函数复合

全导数：

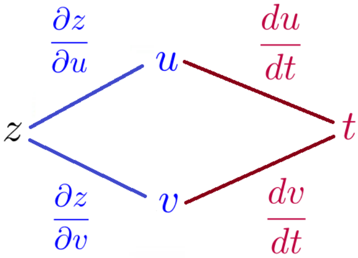
$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial u} \qquad + \frac{\partial z}{\partial v}$$



一元函数与多元函数复合

全导数:

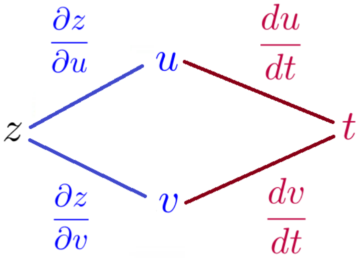
$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dt}$$



一元函数与多元函数复合

全导数：

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dt}$$



口诀：沿线相乘，分线相加。

一元函数与多元函数复合

定理1.（一元套多元）

如果函数$z = f(u)$在点u处可导,

一元函数与多元函数复合

定理1.（一元套多元）

如果函数$z=f(u)$在点u处可导，

函数$u=\varphi(x,y)$ 在对应点(x,y)有偏导数，

一元函数与多元函数复合

定理1.（一元套多元）

如果函数$z = f(u)$在点u处可导，

函数$u = \varphi(x, y)$ 在对应点(x, y)有偏导数，

那么复合函数$z = f[\varphi(x, y)]$在点(x, y) 处有偏导数且偏导数为

一元函数与多元函数复合

定理1.（一元套多元）

如果函数$z=f(u)$在点u处可导，

函数$u=\varphi(x,y)$ 在对应点(x,y)有偏导数，

那么复合函数$z=f[\varphi(x,y)]$在点(x,y) 处有偏导数且偏导数为

$$\frac{\partial z}{\partial x}=$$

一元函数与多元函数复合

定理1.（一元套多元）

如果函数$z=f(u)$在点u处可导，

函数$u=\varphi(x,y)$ 在对应点(x,y)有偏导数，

那么复合函数$z=f[\varphi(x,y)]$在点(x,y) 处有偏导数且偏导数为

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{dz}{du}$$

一元函数与多元函数复合

定理1.（一元套多元）

如果函数$z=f(u)$在点u处可导,

函数$u=\varphi(x,y)$ 在对应点(x,y)有偏导数,

那么复合函数$z=f[\varphi(x,y)]$在点(x,y) 处有偏导数且偏导数为

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{dz}{du}\frac{\partial u}{\partial x}$$

一元函数与多元函数复合

定理1.（一元套多元）

如果函数$z=f(u)$在点u处可导，

函数$u=\varphi(x,y)$ 在对应点(x,y)有偏导数，

那么复合函数$z=f[\varphi(x,y)]$在点(x,y) 处有偏导数且偏导数为

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{dz}{du}\frac{\partial u}{\partial x}=f'(u)\frac{\partial u}{\partial x}$$

一元函数与多元函数复合

定理1.（一元套多元）

如果函数$z=f(u)$在点u处可导,

函数$u=\varphi(x,y)$ 在对应点(x,y)有偏导数,

那么复合函数$z=f[\varphi(x,y)]$在点(x,y) 处有偏导数且偏导数为

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{dz}{du}\frac{\partial u}{\partial x}=f'(u)\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=$$

一元函数与多元函数复合

定理1.（一元套多元）

如果函数$z=f(u)$在点u处可导，

函数$u=\varphi(x,y)$ 在对应点(x,y)有偏导数，

那么复合函数$z=f[\varphi(x,y)]$在点(x,y) 处有偏导数且偏导数为

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{dz}{du}\frac{\partial u}{\partial x}=f'(u)\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{dz}{du}$$

一元函数与多元函数复合

定理1.（一元套多元）

如果函数$z=f(u)$在点u处可导，

函数$u=\varphi(x,y)$ 在对应点(x,y)有偏导数，

那么复合函数$z=f[\varphi(x,y)]$在点(x,y) 处有偏导数且偏导数为

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{dz}{du}\frac{\partial u}{\partial x}=f'(u)\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{dz}{du}\frac{\partial u}{\partial y}$$

一元函数与多元函数复合

定理1.（一元套多元）

如果函数$z=f(u)$在点u处可导，

函数$u=\varphi(x,y)$ 在对应点(x,y)有偏导数，

那么复合函数$z=f[\varphi(x,y)]$在点(x,y) 处有偏导数且偏导数为

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{dz}{du}\frac{\partial u}{\partial x}=f'(u)\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{dz}{du}\frac{\partial u}{\partial y}=f'(u)\frac{\partial u}{\partial y}$$

一元函数与多元函数复合

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dz}{du}$$

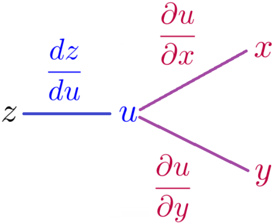
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{dz}{du}$$

$$z \overset{\dfrac{dz}{du}}{\text{———}} u$$

一元函数与多元函数复合

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dz}{du}\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{dz}{du}\frac{\partial u}{\partial y}$$



口诀：沿线相乘。

一元函数与多元函数复合

定理1推广.

如果函数$u=\varphi(t)$，$v=\psi(t)$及$w=\omega(t)$都在点t处可导，函数$z=f(u,v,w)$在对应点(u,v,w)具有连续偏导数，那么复合函数$z=f[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]$ 在点t 处可导且导数为

一元函数与多元函数复合

定理1推广.

如果函数$u=\varphi(t)$，$v=\psi(t)$及$w=\omega(t)$都在点t处可导，

函数$z=f(u,v,w)$在对应点(u,v,w)具有连续偏导数，

那么复合函数$z=f[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]$ 在点t 处可导且导数为

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dt}+\frac{\partial z}{\partial w}\frac{dw}{dt}$$

多元函数与多元函数复合

定理2（多元套多元）. 链式法则(the chain rule)

如果函数$u=\varphi(x,y)$ 及$v=\psi(x,y)$ 都在点(x,y)处有偏导数,

多元函数与多元函数复合

定理2（多元套多元）. 链式法则(the chain rule)

如果函数$u=\varphi(x,y)$ 及$v=\psi(x,y)$ 都在点(x,y)处有偏导数，函数$z=f(u,v)$在对应点(u,v)具有连续偏导数，

多元函数与多元函数复合

定理2（多元套多元）．链式法则(the chain rule)

如果函数$u=\varphi(x,y)$ 及$v=\psi(x,y)$ 都在点(x,y)处有偏导数，

函数$z=f(u,v)$在对应点(u,v)具有连续偏导数，

那么复合函数$z=f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$ 在点(x,y) 处有偏导数且偏导数为

多元函数与多元函数复合

定理2（多元套多元）. 链式法则(the chain rule)

如果函数$u=\varphi(x,y)$ 及$v=\psi(x,y)$ 都在点(x,y)处有偏导数，

函数$z=f(u,v)$在对应点(u,v)具有连续偏导数，

那么复合函数$z=f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$ 在点(x,y) 处有偏导数且偏导数为

$$\frac{\partial z}{\partial x}=$$

多元函数与多元函数复合

定理2（多元套多元）．链式法则(the chain rule)

如果函数$u=\varphi(x,y)$ 及$v=\psi(x,y)$ 都在点(x,y)处有偏导数，

函数$z=f(u,v)$在对应点(u,v)具有连续偏导数，

那么复合函数$z=f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$ 在点(x,y) 处有偏导数且偏导数为

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}$$

多元函数与多元函数复合

定理2（多元套多元）．链式法则(the chain rule)

如果函数$u = \varphi(x, y)$ 及$v = \psi(x, y)$ 都在点(x, y)处有偏导数，

函数$z = f(u, v)$在对应点(u, v)具有连续偏导数，

那么复合函数$z = f[\varphi(x, y), \psi(x, y)]$ 在点(x, y) 处有偏导数且偏导数为

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}$$

多元函数与多元函数复合

定理2（多元套多元）．链式法则(the chain rule)

如果函数$u=\varphi(x,y)$ 及$v=\psi(x,y)$ 都在点(x,y)处有偏导数，

函数$z=f(u,v)$在对应点(u,v)具有连续偏导数，

那么复合函数$z=f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$ 在点(x,y) 处有偏导数且偏导数为

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}$$

多元函数与多元函数复合

定理2（多元套多元）．链式法则(the chain rule)

如果函数$u=\varphi(x,y)$ 及$v=\psi(x,y)$ 都在点(x,y)处有偏导数，

函数$z=f(u,v)$在对应点(u,v)具有连续偏导数，

那么复合函数$z=f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$ 在点(x,y) 处有偏导数且偏导数为

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

多元函数与多元函数复合

定理2（多元套多元）．链式法则(the chain rule)

如果函数$u=\varphi(x,y)$ 及$v=\psi(x,y)$ 都在点(x,y)处有偏导数，

函数$z=f(u,v)$在对应点(u,v)具有连续偏导数，

那么复合函数$z=f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$ 在点(x,y) 处有偏导数且偏导数为

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=$$

多元函数与多元函数复合

定理2（多元套多元）．链式法则(the chain rule)

如果函数$u=\varphi(x,y)$ 及$v=\psi(x,y)$ 都在点(x,y)处有偏导数，

函数$z=f(u,v)$在对应点(u,v)具有连续偏导数，

那么复合函数$z=f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$ 在点(x,y) 处有偏导数且偏导数为

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}$$

多元函数与多元函数复合

定理2（多元套多元）. 链式法则(the chain rule)

如果函数$u=\varphi(x,y)$ 及$v=\psi(x,y)$ 都在点(x,y)处有偏导数,

函数$z=f(u,v)$在对应点(u,v)具有连续偏导数,

那么复合函数$z=f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$ 在点(x,y) 处有偏导数且偏导数为

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}$$

多元函数与多元函数复合

定理2（多元套多元）．链式法则(the chain rule)

如果函数$u=\varphi(x,y)$ 及$v=\psi(x,y)$ 都在点(x,y)处有偏导数，

函数$z=f(u,v)$在对应点(u,v)具有连续偏导数，

那么复合函数$z=f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$ 在点(x,y) 处有偏导数且偏导数为

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}$$

多元函数与多元函数复合

定理2（多元套多元）．链式法则(the chain rule)

如果函数$u=\varphi(x,y)$ 及$v=\psi(x,y)$ 都在点(x,y)处有偏导数，

函数$z=f(u,v)$在对应点(u,v)具有连续偏导数，

那么复合函数$z=f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$ 在点(x,y) 处有偏导数且偏导数为

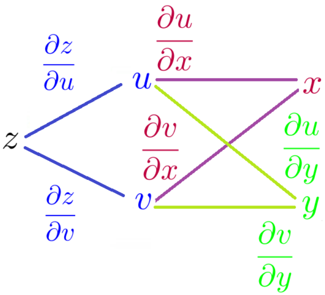
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

多元函数与多元函数复合

链式法则(the chain rule)

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$



口诀：沿线相乘，分线相加。

多元函数与多元函数复合

定理2推广.

如果函数$u=\varphi(x,y)$，$v=\psi(x,y)$及$w=\omega(x,y)$都在点(x,y)处有偏导数，

函数$z=f(u,v,w)$在对应点(u,v,w)具有连续偏导数，

那么复合函数$z=f[\varphi(x,y),\psi(x,y),\omega(x,y)]$在点$(u,v,w)$ 处有偏导数且偏导数为

多元函数与多元函数复合

定理2推广.

如果函数$u=\varphi(x,y)$，$v=\psi(x,y)$及$w=\omega(x,y)$都在点(x,y)处有偏导数，

函数$z=f(u,v,w)$在对应点(u,v,w)具有连续偏导数，

那么复合函数$z=f[\varphi(x,y),\psi(x,y),\omega(x,y)]$在点$(u,v,w)$处有偏导数且偏导数为

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}$$

其他情形

定理3（定理2的特例）.

如果函数$u=\varphi(x,y)$在点(x,y)处有偏导数，

$v=\psi(y)$都在点y处可导，

函数$z=f(u,v)$在对应点(u,v)具有连续偏导数，

那么复合函数$z=f[\varphi(x,y),\psi(y)]$在点$(x,y)$ 处有偏导数且偏导数为

其他情形

定理3（定理2的特例）.

如果函数$u=\varphi(x,y)$在点(x,y)处有偏导数，

$v=\psi(y)$都在点y处可导，

函数$z=f(u,v)$在对应点(u,v)具有连续偏导数，

那么复合函数$z=f[\varphi(x,y),\psi(y)]$在点$(x,y)$ 处有偏导数且偏导数为

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dy}$$

其他情形

特例.

如果函数$u=\varphi(x,y)$在点(x,y)处有偏导数,

函数$z=f(u,x,y)$在对应点(u,v,w)具有连续偏导数,

那么复合函数$z=f[\varphi(x,y),x,y]$在点(u,x,y) 处有对x，y偏导数且偏导数为

其他情形

特例.

如果函数$u=\varphi(x,y)$在点(x,y)处有偏导数,

函数$z=f(u,x,y)$在对应点(u,v,w)具有连续偏导数,

那么复合函数$z=f[\varphi(x,y),x,y]$在点(u,x,y) 处有对x, y偏导数且偏导数为

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial y}$$

例1. $z = ye^x + xe^y$，$x = \cos t$，$y = \sin t$。求 $\frac{dz}{dt}$。

例1. $z=ye^x+xe^y$，$x=\cos t$，$y=\sin t$。求$\frac{dz}{dt}$。

解.

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

例1. $z = ye^x + xe^y$，$x = \cos t$，$y = \sin t$。求 $\frac{dz}{dt}$。

解.

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

$$= (ye^x + e^y)(-\sin t) + (e^x + xe^y)(\cos t)$$

例1. $z = ye^x + xe^y$，$x = \cos t$，$y = \sin t$。求 $\frac{dz}{dt}$。

解.

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

$$= (ye^x + e^y)(-\sin t) + (e^x + xe^y)(\cos t)$$

$$= (\sin t e^{\cos t} + e^{\sin t})(-\sin t) + (e^{\cos t} + \cos t e^{\sin t})(\cos t)$$

$$= e^{\cos t}(\cos t - \sin^2 t) + e^{\sin t}(\cos^2 t - \sin t)$$

例2. $z=(1+xy)^y$，求$\frac{\partial z}{\partial y}$。

例2. $z=(1+xy)^y$，求$\frac{\partial z}{\partial y}$。

解1.先分解：$z=u^v$，$u=1+xy$，$v=y$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial y}$$

例2. $z=(1+xy)^y$，求$\frac{\partial z}{\partial y}$。

解1.先分解：$z=u^v$，$u=1+xy$，$v=y$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial y}$$

$=vu^{v-1}x+u^v\ln u$

例2. $z=(1+xy)^y$，求$\frac{\partial z}{\partial y}$。

解1.先分解：$z=u^v$，$u=1+xy$，$v=y$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial y}$$

$=vu^{v-1}x+u^v\ln u$

$=xy(1+xy)^{y-1}+(1+xy)^y\ln(1+xy)$

例2. $z=(1+xy)^y$，求$\frac{\partial z}{\partial y}$。

例2. $z=(1+xy)^y$，求$\frac{\partial z}{\partial y}$。

解2.对数求导法

原式$z=(1+xy)^y$可看作$z=(1+ay)^y$

例2. $z=(1+xy)^y$，求$\frac{\partial z}{\partial y}$。

解2.对数求导法

原式$z=(1+xy)^y$可看作$z=(1+ay)^y$

$$\ln z = y\ln(1+xy)$$

例2. $z=(1+xy)^y$，求$\frac{\partial z}{\partial y}$。

解2.对数求导法

原式$z=(1+xy)^y$可看作$z=(1+ay)^y$

$$\ln z = y\ln(1+xy)$$

$$\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial y}=\ln(1+xy)+xy\frac{1}{1+xy}$$

例2. $z = (1+xy)^y$，求$\frac{\partial z}{\partial y}$。

解2.对数求导法

原式$z = (1+xy)^y$可看作$z = (1+ay)^y$

$$\ln z = y\ln(1+xy)$$

$$\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial y} = \ln(1+xy) + xy\frac{1}{1+xy}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = xy(1+xy)^{y-1} + (1+xy)^y\ln(1+xy)$$

教材P81例1, 2, 3

习题9-4 1．3．4.

抽象复合函数求偏导

例3. $z = f(x^2 - y^2, xy)$，求$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$。

抽象复合函数求偏导

例3. $z = f(x^2 - y^2, xy)$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$。

解1.先分解：$z = f(u, v)$，$u = x^2 - y^2$，$v = xy$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

抽象复合函数求偏导

例3. $z=f(x^2-y^2,xy)$，求$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$。

解1.先分解：$z=f(u,v)$，$u=x^2-y^2$，$v=xy$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$=2x\frac{\partial z}{\partial u}+y\frac{\partial z}{\partial v}$

抽象复合函数求偏导

例3. $z = f(x^2 - y^2, xy)$，求$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$。

解1.先分解：$z = f(u, v)$，$u = x^2 - y^2$，$v = xy$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$= 2x\frac{\partial z}{\partial u} + y\frac{\partial z}{\partial v}$即$z_x = 2xf_u + yf_v$

抽象复合函数求偏导

例3. $z = f(x^2 - y^2, xy)$，求$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$。

解1.先分解：$z = f(u, v)$，$u = x^2 - y^2$，$v = xy$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$= 2x\frac{\partial z}{\partial u} + y\frac{\partial z}{\partial v}$即$z_x = 2xf_u + yf_v$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

抽象复合函数求偏导

例3. $z=f(x^2-y^2,xy)$，求$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$。

解1.先分解：$z=f(u,v)$，$u=x^2-y^2$，$v=xy$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$=2x\frac{\partial z}{\partial u}+y\frac{\partial z}{\partial v}$即$z_x=2xf_u+yf_v$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

$=-2y\frac{\partial z}{\partial u}+x\frac{\partial z}{\partial v}$

抽象复合函数求偏导

例3. $z=f(x^2-y^2,xy)$，求$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$。

解1.先分解：$z=f(u,v)$，$u=x^2-y^2$，$v=xy$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$=2x\frac{\partial z}{\partial u}+y\frac{\partial z}{\partial v}$即$z_x=2xf_u+yf_v$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

$=-2y\frac{\partial z}{\partial u}+x\frac{\partial z}{\partial v}$即$z_x=-2yf_u+xf_v$

抽象复合函数求偏导

例3. $z=f(x^2-y^2,xy)$，求$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$。

抽象复合函数求偏导

例3. $z = f(x^2 - y^2, xy)$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$。

解2. 不分解直接求偏导。

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_1'(x^2 - y^2)_x' + f_2'(xy)_x'$$

抽象复合函数求偏导

例3. $z = f(x^2 - y^2, xy)$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$。

解2. 不分解直接求偏导。

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_1'(x^2 - y^2)_x' + f_2'(xy)_x'$$

即 $z_x = 2xf_1' + yf_2'$

抽象复合函数求偏导

例3. $z = f(x^2 - y^2, xy)$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$。

解2. 不分解直接求偏导。

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_1'(x^2 - y^2)_x' + f_2'(xy)_x'$$

即 $z_x = 2xf_1' + yf_2'$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f_1'(x^2 - y^2)_y' + f_2'(xy)_y'$$

抽象复合函数求偏导

例3.$z=f(x^2-y^2,xy)$，求$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$。

解2.不分解直接求偏导。

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'(x^2-y^2)_x'+f_2'(xy)_x'$$

即$z_x=2xf_1'+yf_2'$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f_1'(x^2-y^2)_y'+f_2'(xy)_y'$$

即$z_y=-2yf_1'+xf_2'$

抽象复合函数求偏导

例4. $z = f(x^2 - y^2, xy)$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$。

抽象复合函数求偏导

例4. $z = f(x^2 - y^2, xy)$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$。

解. $\frac{\partial z}{\partial x} = z_x = 2xf_1' + yf_2'$

抽象复合函数求偏导

例4. $z = f(x^2 - y^2, xy)$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$。

解. $\frac{\partial z}{\partial x} = z_x = 2x f_1' + y f_2'$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2x f_1' + y f_2')$$

抽象复合函数求偏导

例4. $z=f(x^2-y^2,xy)$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

解. $\frac{\partial z}{\partial x}=z_x=2xf_1'+yf_2'$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(2xf_1'+yf_2')$$

$$=\frac{\partial}{\partial y}(2xf_1')+\frac{\partial}{\partial y}(yf_2')$$

抽象复合函数求偏导

例4. $z = f(x^2 - y^2, xy)$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$。

解. $\frac{\partial z}{\partial x} = z_x = 2xf_1' + yf_2'$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2xf_1' + yf_2')$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}(2xf_1') + \frac{\partial}{\partial y}(yf_2')$$

$$= 2x\frac{\partial}{\partial y}(f_1') + f_2' + y\frac{\partial}{\partial y}(f_2')$$

抽象复合函数求偏导

例4. $z=f(x^2-y^2,xy)$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

解续.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2x\frac{\partial}{\partial y}(f_1')+f_2'+y\frac{\partial}{\partial y}(f_2')$$

抽象复合函数求偏导

例4. $z=f(x^2-y^2,xy)$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

解续.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2x\frac{\partial}{\partial y}(f_1')+f_2'+y\frac{\partial}{\partial y}(f_2')$$

因为 $f_1'=f(x^2-y^2,xy)$，$f_2'=f(x^2-y^2,xy)$

抽象复合函数求偏导

例4. $z = f(x^2 - y^2, xy)$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$。

解续.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2x\frac{\partial}{\partial y}(f_1') + f_2' + y\frac{\partial}{\partial y}(f_2')$$

因为 $f_1' = f(x^2 - y^2, xy)$，$f_2' = f(x^2 - y^2, xy)$，故而

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2x[(f_{11}''(x^2 - y^2)_y' + f_{12}''(xy)_y'] + f_2'$$

$$+y[(f_{21}''(x^2 - y^2)_y' + f_{22}''(xy)_y']$$

抽象复合函数求偏导

例4. $z = f(x^2 - y^2, xy)$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$。

解续.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2x\frac{\partial}{\partial y}(f_1') + f_2' + y\frac{\partial}{\partial y}(f_2')$$

因为 $f_1' = f(x^2 - y^2, xy)$，$f_2' = f(x^2 - y^2, xy)$，故而

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2x[(f_{11}''(x^2 - y^2)_y' + f_{12}''(xy)_y'] + f_2'$$

$$+y[(f_{21}''(x^2 - y^2)_y' + f_{22}''(xy)_y']$$

抽象复合函数求偏导

例4. $z = f(x^2 - y^2, xy)$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$。

解续.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2x[(f''_{11}(x^2 - y^2)'_y + f''_{12}(xy)'_y] + f'_2$$

$$+y[(f''_{21}(x^2 - y^2)'_y + f''_{22}(xy)'_y]$$

抽象复合函数求偏导

例4. $z = f(x^2 - y^2, xy)$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$。

解续.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2x[(f''_{11}(x^2 - y^2)'_y + f''_{12}(xy)'_y] + f'_2$$

$$+y[(f''_{21}(x^2 - y^2)'_y + f''_{22}(xy)'_y]$$

$$= 2x(-2yf''_{11} + xf''_{12}) + f'_2 + y(-2yf''_{21} + xf''_{22})$$

抽象复合函数求偏导

例4. $z=f(x^2-y^2,xy)$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

解续.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2x[(f''_{11}(x^2-y^2)'_y+f''_{12}(xy)'_y]+f'_2$$

$$+y[(f''_{21}(x^2-y^2)'_y+f''_{22}(xy)'_y]$$

$$=2x(-2yf''_{11}+xf''_{12})+f'_2+y(-2yf''_{21}+xf''_{22})$$

由 $f''_{12}=f''_{21}$，

抽象复合函数求偏导

例4. $z=f(x^2-y^2,xy)$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

解续.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2x[(f''_{11}(x^2-y^2)'_y+f''_{12}(xy)'_y]+f'_2$$

$$+y[(f''_{21}(x^2-y^2)'_y+f''_{22}(xy)'_y]$$

$$=2x(-2yf''_{11}+xf''_{12})+f'_2+y(-2yf''_{21}+xf''_{22})$$

由 $f''_{12}=f''_{21}$，

$$=-4xyf''_{11}+2(x^2-y^2)f''_{12}+f'_2+xyf''_{22}$$

教材P81，例4

习题9-4 7. 9. 10.

全微分形式不变性

一元函数的微分形式不变性.

微分形式：$dy = f'(x)dx$

如果函数$y = f(u), u = g(x)$

则$dy = f'(u)du$

全微分形式不变性

一元函数的微分形式不变性.

微分形式：$dy = f'(x)dx$

如果函数$y = f(u), u = g(x)$

则$dy = f'(u)du$

多元函数的微分形式不变性.

如果函数$u = \varphi(x, y)$及$v = \psi(x, y)$都在点(x, y)处有偏导数，

函数$z = f(u, v)$在对应点(u, v)具有连续偏导数，

其全微分形式是否变化？

全微分形式不变性

全微分的形式不变性

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

全微分形式不变性

全微分的形式不变性

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

$$= (\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x})dx + (\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y})dy$$

全微分形式不变性

全微分的形式不变性

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

$$= (\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x})dx + (\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y})dy$$

$$= \frac{\partial z}{\partial u}(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy) + \frac{\partial z}{\partial v}(\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy)$$

全微分形式不变性

全微分的形式不变性

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

$$= (\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x})dx + (\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y})dy$$

$$= \frac{\partial z}{\partial u}(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy) + \frac{\partial z}{\partial v}(\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy)$$

$$= \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv$$

全微分形式不变性

全微分的形式不变性

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

（自变量x, y）

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv$$

（中间变量u, v）

全微分的形式不变性

例5. $z = f(x - y, x^2 - y^2)$，求dz，$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$。

全微分的形式不变性

例5. $z = f(x-y, x^2-y^2)$，求dz，$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$。

解. $dz = df(x-y, x^2-y^2)$

全微分的形式不变性

例5. $z = f(x-y, x^2-y^2)$，求dz，$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$。

解. $dz = df(x-y, x^2-y^2)$

$= f_1' d(x-y) + f_2' d(x^2-y^2)$

全微分的形式不变性

例5. $z = f(x-y, x^2-y^2)$，求dz，$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$。

解. $dz = df(x-y, x^2-y^2)$

$= f_1' d(x-y) + f_2' d(x^2-y^2)$

$= f_1'(dx-dy) + f_2'(2xdx-2ydy)$

全微分的形式不变性

例5. $z=f(x-y,x^2-y^2)$，求dz，$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$。

解. $dz=df(x-y,x^2-y^2)$

$=f_1'd(x-y)+f_2'd(x^2-y^2)$

$=f_1'(dx-dy)+f_2'(2xdx-2ydy)$

$=(f_1'+2xf_2')dx-(f_1'+2yf_2')dy$

全微分的形式不变性

例5. $z=f(x-y,x^2-y^2)$，求dz，$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$。

解. $dz=df(x-y,x^2-y^2)$

$=f_1'd(x-y)+f_2'd(x^2-y^2)$

$=f_1'(dx-dy)+f_2'(2xdx-2ydy)$

$=(f_1'+2xf_2')dx-(f_1'+2yf_2')dy$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'+2xf_2',\frac{\partial z}{\partial y}=-(f_1'+2yf_2')$$

注.有时用全微分求偏导更简单。

教材P84，例6

作业

习题9-4: 2. 5. 6. 8. 11.