

最小生成树

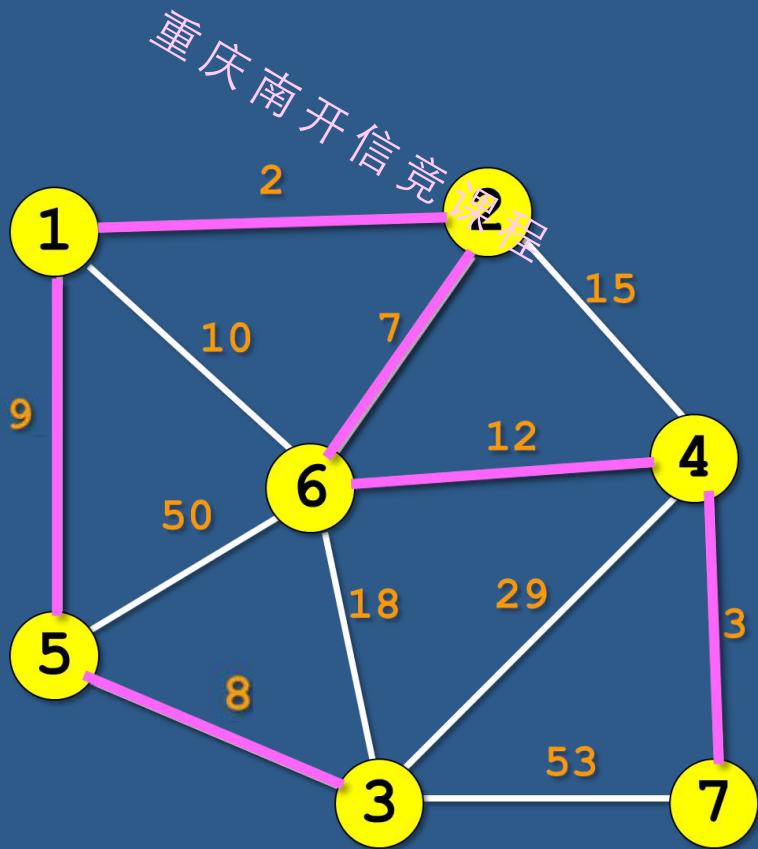
扩展第1课

Kruskal重构树

一. 复习回顾最小生成树和Kruskal算法

二. 什么是Kruskal重构树

Kruskal重构过程



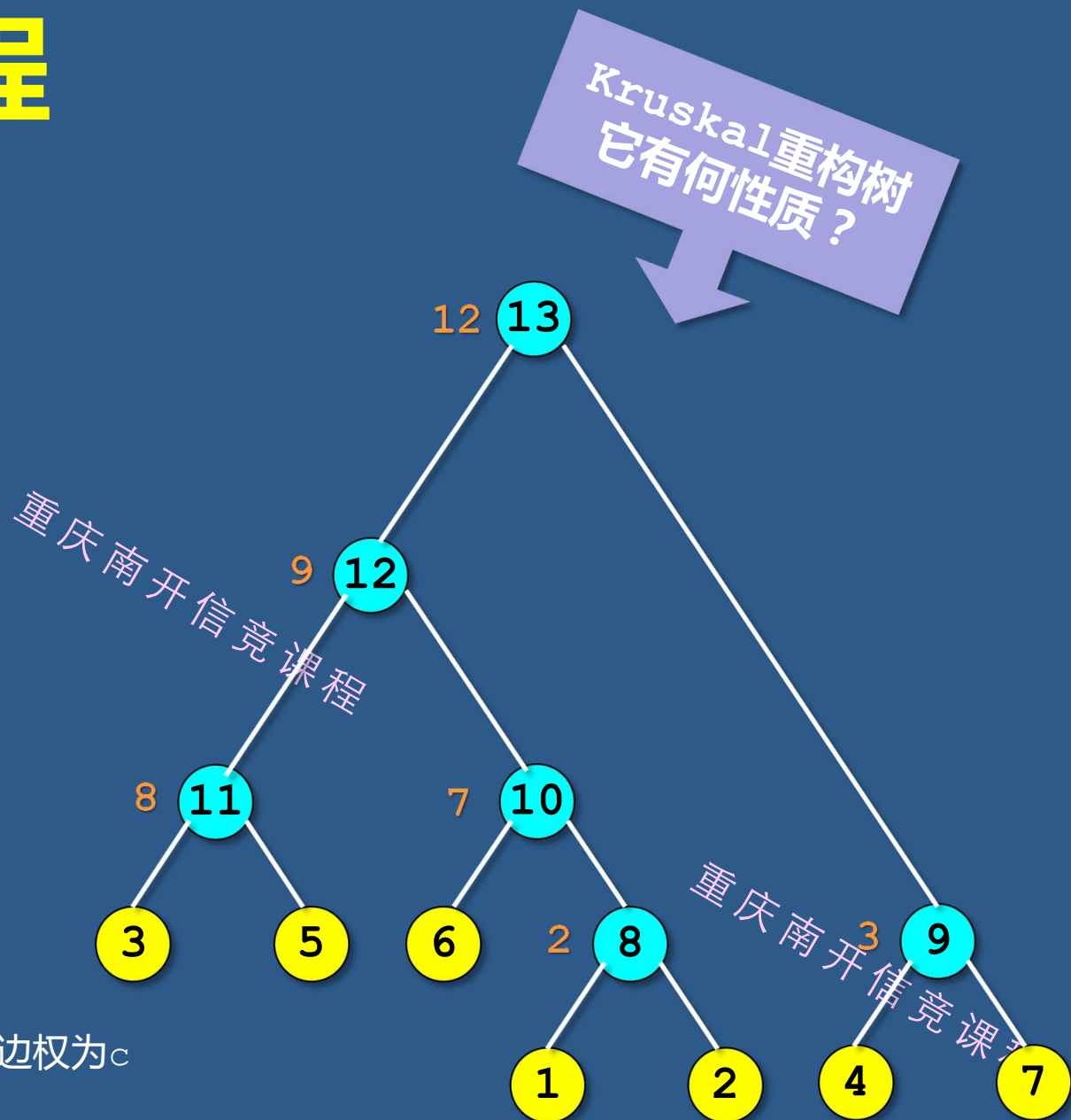
重构方法：

按照kruskal规则连边,对于要连接的边 (a,b) , 边权为 c

$x = \text{getFather}(a)$, $y = \text{getFather}(b)$

若 $x \neq y$, 新建一个节点 z 作为 x 和 y 的父亲 , z 的点权为边 (a,b) 的边权

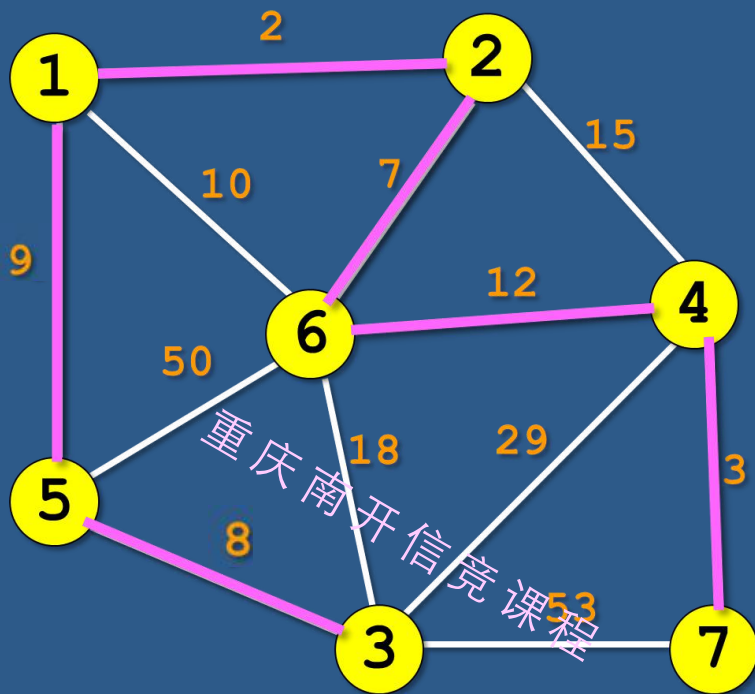
$\text{father}[x] = z$, $\text{father}[y] = z$, $\text{Val}[z] = c$;



Kruskal重构树

性质1：重构树的节点总数为 $2n-1$ 的二叉树

性质2：重构树是一个**大根堆** (按**最小生成树**重构)
重构树是一个**小根堆** (按**最大生成树**重构)



性质3：重构树 (按**最小生成树**重构) 中任意两点 a, b 的路径中的最大边权为它们LCA(a, b)的点权。也是原图中， a, b 路径中**最大边权的最小值**。

重构树 (按**最大生成树**重构) 中任意两点 a, b 的路径中的最小边权为它们LCA(a, b)的点权。也是原图中， a, b 路径中**最小边权的最大值**。



性质4：如果原图不连通，会得到重构树森林

性质5：只有叶子节点是原图中的点，其他非叶节点代表的是原图中的边

三.Kruskal重构树的作用

例1：NKOJ2495 货车运输 [NOIP2013]

问题描述

A国有 n 座城市，编号从1到 n ，城市之间有 m 条双向道路。

每一条道路对车辆都有重量限制，简称限重。

现在有 q 辆货车在运输货物，司机们想知道每辆车在不超过车辆限重的情况下，最多能运多重的货物。

对于 100%的数据， $1 \leq n \leq 100000$ ， $1 \leq m \leq 500000$ ， $1 \leq q \leq 30000$ ， $0 \leq z \leq 100000$ 。

简意：一个 n 个点 m 条边的无向图，给出 q 对点，要求每对点路径经过的边权最小值尽量大。

Kruskal重构树模板题：

1. 按照**最大生成树**原则建立Kruskal重构树；
2. 询问一对点 a, b ：重构树中， $Lca(a, b)$ 的点权即是答案

例2：NKOJ8437 删边

问题描述

n 个节点 m 条边，边带边权，的无向连通图，有 q 次询问，每次询问图中 k_i 个互不相同的点，你可以选择一个数 x ，然后将图中所有边权小于等于 x 的边删除。要求删除这些边后 k_i 个点互不连通，求 x 的最小值。

时限：2s

$$1 \leq n, m, q \leq 5 \times 10^5$$

$$1 \leq \sum_{i=1}^q k_i \leq 10^6, 1 \leq k_i \leq n$$

$$1 \leq u, v \leq n, 1 \leq w_i \leq 10^9$$

重庆南开信竞课程

例2：NKOJ8437 删边

解题分析：

1. 对于 a, b 两点，如果删掉一条 $\leq x$ 的边，它们就不连通。只需要 a 到 b 这条路径中最小的 $\leq x$ 的边即可（即至少删掉一条边，那就删掉权值最小的边）。

如果 a, b 两点间有多条路径，要让这些路径中所有最小边权都 $\leq x$ 。那就是**让最小边权的最大值 $\leq x$** 。

2. **建立kruskal重构树（按照最大生成树规则）；**

3. **对于 a, b 两点，找出 $c = \text{Lca}(a, b)$ ， c 的点权就是要使得 a, b 不连通的最小代价。**

即原图中， a 到 b 所有路径中的最小边权的最大值。

对于1次询问，要使得 k_i 个点不连通，需要两两找 Lca ，在重构树上进行 k_i^2 次 Lca 计算， q 次询问会超时，怎么办？

4. 在重构树上，相邻两点的 Lca 的点权就是这两点直接所连的边的边权。因为是按照最大生成树建立的重构树，本质是小根堆。“距离”越远的两点，其 Lca 的深度可能越小，对应的点权也越小。

怎么确定两点的相邻关系的远近？DFS序，DFS序越接近的点，在树中越相邻。

(1) 求出重构树的DFS序

(2) 对于第 i 次询问的 k_i 个点，将它们放入容器 A （ A 是vector），然后按DFS序排序。

(3) 询问的答案 **$\text{ans}[i] = \max\{ \text{Val}[\text{Lca}(A_1, A_2)], \text{Val}[\text{Lca}(A_2, A_3)], \dots, \text{Val}[\text{Lca}(A_{k_i-1}, A_{k_i})] \}$**

$\text{Val}[x]$ 为重构树中， x 号点的点权

A_1, A_2, \dots, A_{k_i} 为按DFS序排序后的 k_i 个点。

时间复杂度：一次询问进行一次排序和求 k_i 次 Lca ，

总时间复杂度 $O(\log^n * \sum k_i)$ 约为 $O(\log^{500000} * 10^6)$

例3：NKOJ8438 路径权值

问题描述：

给定一个带边权的树，树上任意两点间的路径权值 $d(x, y)$ 定义为 x, y 这两个点之间路径上的最小值。树上任意一点 x 的权值 $Val(x)$ 定义为这个点到树上其他所有点的路径权值和，即 $Val(x) = \sum_{i=1}^n d(x, i)$ ， $1 \leq i \leq n$ 。现求树上一点，使得这个点的权值最大，输出这个值。

输入格式：

第一行，一个整数 n ($1 \leq n \leq 100000$)，树的点的个数，节点编号1到 n 。
接下来 $n-1$ 行，每行三个整数 x, y, s ($1 \leq x, y \leq n, 1 \leq s \leq 10000$)，表示编号为 x 的节点和编号为 y 的节点之间存在一条权值为 s 的边。

输出格式：

一行，树上的点的最大权值

样例输入：

```
4
1 2 2
2 4 1
2 3 1
```

样例输出：

```
4
```

例3：NKOJ8438 路径权值

解题分析：

1. 将原树看作无向图，按照最大生成树进行kruskal重构。

在重构树中， $Lca(x, y)$ 的点权，对应了 x 到 y 路径上的最小边权。

2. 在重构树中，对于一个非叶节点 x ，它左子树中的节点到右子树中的节点的路径一定会经过 x 节点所对应的原树中边，反之亦然。

3. 计算每个点对答案的贡献：

$W[i]$ 表示重构树中点 i 的点权。

$Lt[i], Rt[i]$ 表示重构树中点 i 的左右儿子。

对于 i 号点左子树中的某个点 x ， i 号点贡献的答案为： $W[i] * Size[Rt[i]]$ ；

对于 i 号点右子树中的某个点 y ， i 号点贡献的答案为： $W[i] * Size[Lt[i]]$ ；

4. i 左子树的所有节点都要加上 i 的贡献，怎么处理？

求出重构树的DFS序列， $In[i], Ou[i]$ 分别代表 i 号点DFS序的两个时间戳。

对于 $[In[Lt[i]], Ou[Lt[i]]]$ 区间的所有节点，答案都要加上 $W[i] * Size[Rt[i]]$

通过区间差分，**树状数组维护区间和即可**

```
Modify(In[Lt[i]], W[i]*Size[Rt[i]])
```

```
Modify(Ou[Lt[i]]+1, -W[i]*Size[Rt[i]])
```

右子树同理

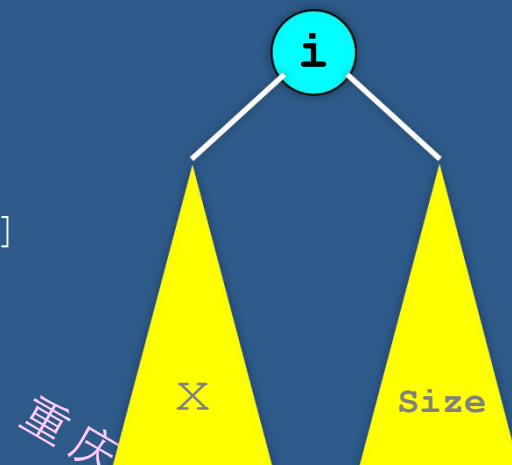
```
Modify(In[Rt[i]], W[i]*Size[Lt[i]])
```

```
Modify(Ou[Rt[i]]+1, -W[i]*Size[Lt[i]])
```

5. 统计答案：

```
Ans=max(Ans, GetSum(In[i])); 1<=i<=n;
```

`Modify()` 和 `GetSum()` 为树状数组的两个基本操作。



例4：NKOJ5309 Peaks加强版

问题描述：

有 N 座山峰，每座山峰有他的高度 H_i 。有些山峰之间有双向道路相连，共 M 条路径，每条路径有一个困难值。

有 Q 组询问，每组询问询问从点 v 开始只经过困难值小于等于 x 的路径所能到达的山峰中第 k 高的山峰，如果无解输出 -1 。

本题要求强制在线 时限：2s

$$1 \leq N \leq 10^5$$

$$1 \leq M, Q \leq 5 \times 10^5$$

重庆南开信竞课程

重庆南开信竞课程

例4：NKOJ5309 Peaks加强版

解题分析：

1. 按最小生成树原则 (边权升序) 建立kruskal重构树；
重构树中， i 是点 v 的祖先，从 v 出发到达 i 子树中的任意节点 u ，路径中的边权都不超过 i 的点权。

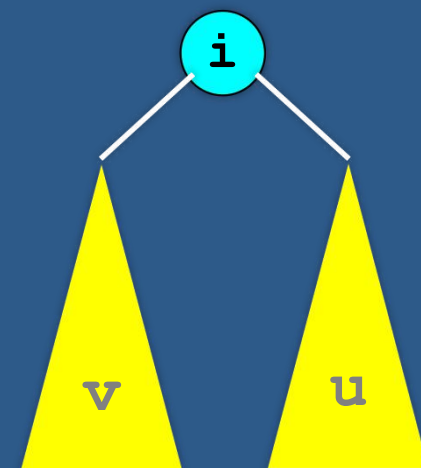
2. 询问从点 v 开始只经过困难值 $\leq x$ 的路径所能到达的第 k 高的山峰：

(1). 在重构树中，让 v 倍增往上跳，到达点权 $\leq x$ 且深度最小的一个点 i ；

(2). 在 i 为根的子树中，查询高度第 k 高的点：

区间第 k 大查询——可持久化线段树。

求出重构树的DFS序， i 为根子树的节点，DFS序是连续的，
用可持久化线段树来维护DFS序。



3. 注意：

(1). 原图可能不连通，得到的是重构树森林。

(2). 只需要维护重构树中，叶子节点的DFS序即可。因为只有叶子节点是原图中的点。

例5：NKOJ5049 归程[NOI2018]

问题描述：

魔都可以抽象成一个 n 个节点 m 条边的无向连通图。用 l, a 描述一条边的长度、海拔。

魔都时常有雨水相伴，因此道路积水不可避免。由于整个城市的排水系统连通，因此有积水的边一定是海拔相对最低的一些边。

用水位线来描述降雨的程度，它的意义是：所有海拔不超过水位线的边都是有积水的。

Yazid的家在魔都的1号节点。接下来 Q 天，每一天Yazid都会告诉你他的出发点，回家去，以及当天的水位线。

每一天，Yazid在出发点都拥有一辆车。这辆车不能经过有积水的边。

Yazid可以在任意节点下车，这样接下来他就可以步行经过有积水的边。但车会被留在他下车的节点并不会再被使用。

需要特殊说明的是，第二天车会被重置，这意味着：

车会在新的出发点被准备好。

Yazid不能利用之前在某处停放的车。

Yazid非常讨厌在雨天步行，因此他希望在完成回家这一目标的同时，最小化他步行经过的边的总长度。

请你帮助Yazid 进行计算。

本题强制在线。

时限：4s

$n \leq 2 \times 10^5, m, q \leq 4 \times 10^5$

重庆南开信竞课程

例5：NKOJ5049 归程[NOI2018]

解题分析：

当天水位线为 p ，从 v 走向 1 的路径可以分为两部分： v 开车行驶到点 u ， u 处下车步行到 1 。

第一步. v 车行到 u

从 v 出发到 u ，路径上所有点的海拔高度都必须 $>p$ ，用kruskal重构树处理。

(1) 按边的海拔高度由大到小建立kruskal重构树；

(2) 从 v 出发往上倍增，找到点权(海拔) $>p$ 且深度最小的节点 x 。

x 为根的子树中，任意一对节点都是可以驾车到达的(不用步行)。如果 1 号点也在 x 为根的子树内，那么所需步行距离为 0 。

x 为根的子树内的每个点都可以作为点 v (路径的断点)，剩下的路程需要步行。

第二步. u 步行到 1

从 x 为根的子树中，找出与 1 号点距离最近的一个，从它出发去 1 即可。

(1) 用dijkstra预处理出 1 号点到任意节点 i 的最短距离 $dis[i]$ ；

(2) 建kruskal重构树时，记录点 i 为根的子树中，用 $MinDis[i]$ 记录 i 为根的子树中， $dis[]$ 的最小值；

(3) 在第一步中求出 x ，第二步直接输出 $MinDis[x]$ 即可；

例6：NKOJ5416 邮票拉力赛

问题描述：

何老板给你一个由 N 个点和 M 条边构成的无向图连通图，点编号1到 N ，边编号1到 M 。

何老板提出了 Q 个问题，每个问题中，他会给出两个点 x 和 y ，问若两辆车分别以 x 和 y 为起点沿边行驶，在恰好经过 z 个不同的点后（起点和终点也算在其中。若某个点被重复经过，只算一次），所经过的边中，编号最大的那个最小可能是多少？

即求包含 x, y 的总大小为 z 的联通块（可能 x, y 不在一个联通块中），使得联通块中的边的编号最大值尽可能小。

$$3 \leq N \leq 10^5$$

$$N - 1 \leq M \leq 10^5$$

$$1 \leq a < b \leq N$$

$$1 \leq Q \leq 10^5$$

$$1 \leq x < y \leq N$$

$$3 \leq z \leq N$$

重庆南开信竞课程

重庆南开信竞课程

例6：NKOJ5416 邮票拉力赛

解题分析：

1. 按编号由小到大建立kruskal重构树；
建kruskal重构树时，需记录每个点为根的子树中的叶子的个数。
2. 对于询问 x, y, z ：
 - (1). 二分答案 Mid ;
 - (2). x 往上跳到点权 $\leq Mid$ 其深度最小的点 u ;
 - (3). y 往上跳到点权 $\leq Mid$ 其深度最小的点 v ;
 - (4). 统计 u 为根的子树中，叶子节点的个数(叶子节点就是 x 往上跳途中经过的原图节点) $Cnt1$;
统计 v 为根的子树中，叶子节点的个数(叶子节点就是 y 往上跳途中经过的原图节点) $Cnt2$;
若 $Cnt1 + Cnt2 \geq z$, 则调小 Mid 的值，否则调大 Mid 的值。

注意：如果 u, v 相同，它俩代表同一棵子树，则只考虑 $Cnt1 \geq z$

时间复杂度 $O(q \log^2 n)$

本题的解法还有：分块、整体二分

重庆南开信竞课程

四 . Kruskal重构树的习题