组合数学复习专题

南开信竞教练组 董又铭

组合数

- 写作 C_n^k或者$\binom{n}{k}$
- 常用公式
  - 定义式 $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$
  - 二维递推 $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$
  - 同行递推 $C_n^k = C_n^{k-1} \times \frac{n-k+1}{k}$
  - 未命名 $C_n^m C_m^k = C_n^k C_{n-k}^{m-k}$
- 按行求和
  - 二项式定理 $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k\, a^{n-k} b^k$
  - 推论 $\sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n$
  - 推论 $\sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^k = [n=0]$
  - ……

组合数

- 按列求和
  - 裂项公式 $C_n^k = C_{n+1}^{k+1} - C_n^{k+1}$
  - 所以 $\sum_{n=l}^{r} C_n^k = C_{r+1}^{k+1} - C_l^{k+1}$
  - ……
- 二次型
  - 范德蒙恒等式 $C_{n+m}^k = \sum_{i=0}^{k} C_n^i C_m^{k-i}$
  - 推论 $C_{2n}^n = \sum_{i=0}^{n} \left(C_n^i\right)^2$
  - ……
- 组合数×幂 $\sum_{i=0}^{n} C_n^i \times i = n2^{n-1}$
  $\sum_{i=0}^{n} C_n^i \times i^2 = n(n+1)2^{n-2}$
- 多重组合数 $\frac{n!}{n_1!\times n_2!\times\cdots\times n_k!}$
  其中 $n = \sum n_i$

组合数

- 求组合数
- 方法1：二维数组递推
- 方法2：同行递推
- 方法3：阶乘和逆元
- 方法4：阶乘分段打表
- 方法5：卢卡斯定理
- 方法6：扩展卢卡斯定理
- ……

组合数

- 二项式反演
- 两个函数f和g，定义域是非负整数，如果满足

$$f(n)=\sum_{i=0}^{n}C_n^i g(i)$$

- 则

$$g(n)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}C_n^i f(i)$$

- 能解决一些问题。

斯特林数

- 第一类写作 $s(n,k)$或者$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$
- 递推公式 $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + (n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}$
- 通项公式 无

- 第二类写作 $S(n,k)$或者$\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}$
- 递推公式 $\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{Bmatrix} + k\begin{Bmatrix} n-1 \\ k \end{Bmatrix}$
- 通项公式 $\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} = \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i} \times C_k^i \times i^n$
  - 求一项，暴力乘，$O(k)$
  - 求一行，NTT，$O(n \log n)$

斯特林数

- 求一行第一类斯特林数
- 利用上升幂和下降幂 $x^{\underline{n}} = x(x-1)\dots(x-n+1)$
  $x^{\overline{n}} = x(x+1)\dots(x+n-1)$
- 上升幂→普通幂 $x^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k$
  倍增NTT，$O(n\log n)$

- 求一列第一类斯特林数 EGF+多项式快速幂 $O(n\log n)$
- 求一列第二类斯特林数 EGF+多项式exp $O(n\log n)$

斯特林数

- 斯特林反演
- 两个函数f和g，定义域是非负整数，如果满足

$$f(n) = \sum_{i=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} g(i)$$

- 则

$$g(n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \begin{Bmatrix} n \\ i \end{Bmatrix} f(i)$$

- 能解决一些问题。

贝尔数

- 写作 B_n
- 递推公式 $B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k B_k$
- 与第二类斯特林数 $B_n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\}$
  - 通项公式 ……
- EGF $B(x) = \exp(\exp(x) - 1)$
  - 多项式exp，$O(n \log n)$

卡特兰数

- 写作 H_n
- 通项公式 $H_n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^{n}$
  $H_n = C_{2n}^{n} - C_{2n}^{n-1}$
- 递推公式 $H_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} H_i H_{n-i}$
  $H_n = H_{n-1} \times \frac{4n-2}{n+1}$

拆分数

- 拆分数，写作 p_n
- k部拆分数，写作 $p(n,k)$
- 递推公式 $p(n,k) = p(n,k-1) + p(n-k,k)$

- 求p_n

根号分治	$O(n\sqrt{n})$
五边形数定理	$O(n\sqrt{n})$
五边形数+多项式求逆	$O(n\log n)$

容斥原理

- 道理都懂，遇到题就不会做了
- 没啥好讲的，多做题