УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Числовые характеристики случайных величин

Гхази Даниэль P3218

Санкт-Петербург, 2017

Числовые характеристика случайных величин позволяют узнать:

- Среднее значение
- Степень разбросанности
- Плотность распределения
- “Крутость” плотности распределения

Начальные и центральные моменты

- Начальные моменты рассматриваются относительно начала координат
- Центральные моменты рассматриваются относительно среднего значения

Начальные моменты

Начальный момент *s*-го порядка $\alpha_s[X]$ случайной величины X определяется следующим образом (s = 1, 2, …):

$$\alpha_s[X] = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i^s p_i & \text{– для дискретной случайной величины;} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^s f(x)\,dx & \text{– для непрерывной случайной величины.} \end{cases}$$

где

- x_i - одно из случайных значений,
- p_i - вероятность появления случайного значения,
- $f(x)$ - плотность распределения.

Математическое ожидание

Математическое ожидание - первый начальный момент случайной величины *X*:

$$\alpha_1[X] = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i p_i & - \quad \text{для дискретной случайной величины;} \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx & - \quad \text{для непрерывной случайной величины.} \end{cases}$$

- Оно показывает среднее значение случайной величины.
- Обозначение: $M[X]$, $\alpha_1[X]$

Рассеивание

Рассеивание - второй начальный момент случайной величины *X*:

$$\alpha_2[X] = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i & - \text{ для дискретной случайной величины;} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx & - \text{ для непрерывной случайной величины.} \end{cases}$$

- Оно показывает разброс (удаленность) значений случайной величины **относительно начала координат**
- Обозначение: $\alpha_2[X]$

Центральные моменты

Начальный момент s-го порядка $\beta_s[X]$ случайной величины X определяется следующим образом ($s = 1, 2, \ldots$):

$$\beta_s[X] = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mathrm{M}[X])^s p_i & - \text{ для дискретной случайной величины;} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathrm{M}[X])^s f(x)\,dx & - \text{ для непрерывной случайной величины.} \end{cases}$$

где

- x_i - одно из случайных значений,
- p_i - вероятность появления случайного значения,
- $f(x)$ - плотность распределения,
- $M[X]$ - математическое ожидание.

Дисперсия

Дисперсия - второй центральный момент случайной величины *X*:

$$D[X] = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - M[X])^2 p_i & - \text{ для дискретной случайной величины;} \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - M[X])^2 f(x)\,dx & - \text{ для непрерывной случайной величины.} \end{cases}$$

- Она показывает разброс (удаленность) значений случайной величины **относительно математического ожидания.**

- Обозначение: $D[X]$, $\beta_2[X]$

Среднеквадратическое отклонение

Имеет одинаковую размерность с размерностью случайной величины.

Вычисляется так:

$$\boxed{\sigma[X] = \sqrt{\mathrm{D}[X]}}$$

Коэффициент вариации

Безразмерная характеристика разброса случайных величин.

Вычисляется так:

$$\boxed{\nu[X] = \frac{\sigma[X]}{M[X]}}$$

- Условие: *M[X] > 0*
- Определен только в области положительных значений.

Пример

Дискретная случайная величина X принимает значения: 1; 2; 3 с вероятностями 0,2; 0,3; 0,5 соответственно.

1. Нарисовать график функции распределения дискретной случайной величины X.
2. Вычислить математическое ожидание, дисперсию, второй начальный момент, среднеквадратическое отклонение и коэффициент вариации случайной величины X.

Пример (продолжение №1)

Дано: $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 1$; $p_1 = 0{,}2$; $p_2 = 0{,}3$; $p_3 = 0{,}5$.

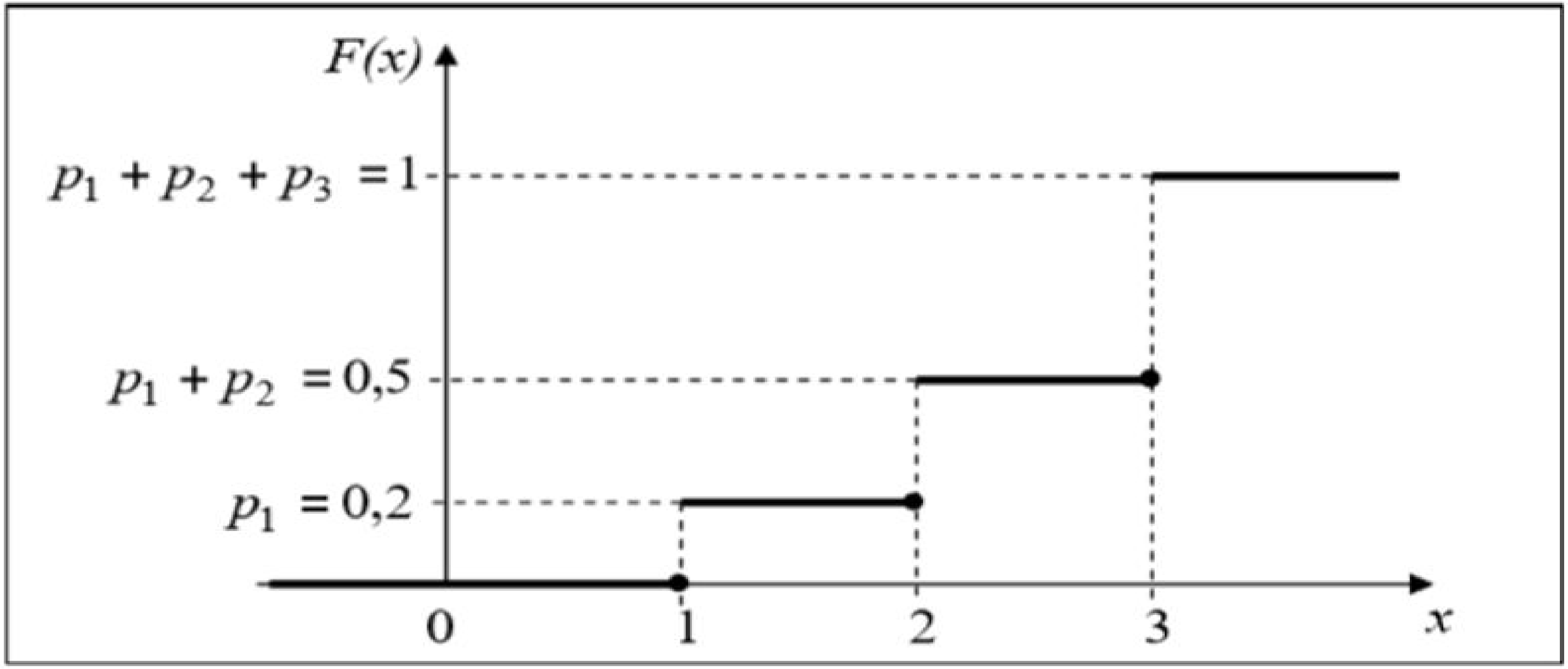
Требуется:

1) нарисовать F(x);

2) вычислить M[X], D[X], $\alpha_2[X]$, σ[X], ν[X].

Решение:

1) График функции распределения случайной величины X:



Пример (продолжение №2)

2) Математическое ожидание:

$$M[X] = p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 = 0{,}2\times1 + 0{,}3\times2 + 0{,}5\times3 = 2{,}3.$$

Второй начальный момент:

$$\alpha_2[X] = p_1x_1^2 + p_2x_2^2 + p_3x_3^2 = 0{,}2\times1 + 0{,}3\times4 + 0{,}5\times9 = 5{,}9.$$

Дисперсия: $D[X] = \alpha_2[X] - (M[X])^2 = 5{,}9 - 5{,}29 = 0{,}61.$

Среднеквадратическое отклонение: $\sigma[X] = \sqrt{D[X]} \approx 0{,}78.$

Коэффициент вариации: $\nu[X] = \dfrac{\sigma[X]}{M[X]} \approx 0{,}34.$

Выводы

1. Числовые характеристики существенно облегчает решение многих вероятностных задач.

2. Очень часто удается решить задачу до конца, оставляя в стороне законы распределения и оперируя одними числовыми характеристиками.

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Спасибо за внимание!

Санкт-Петербург, 2017