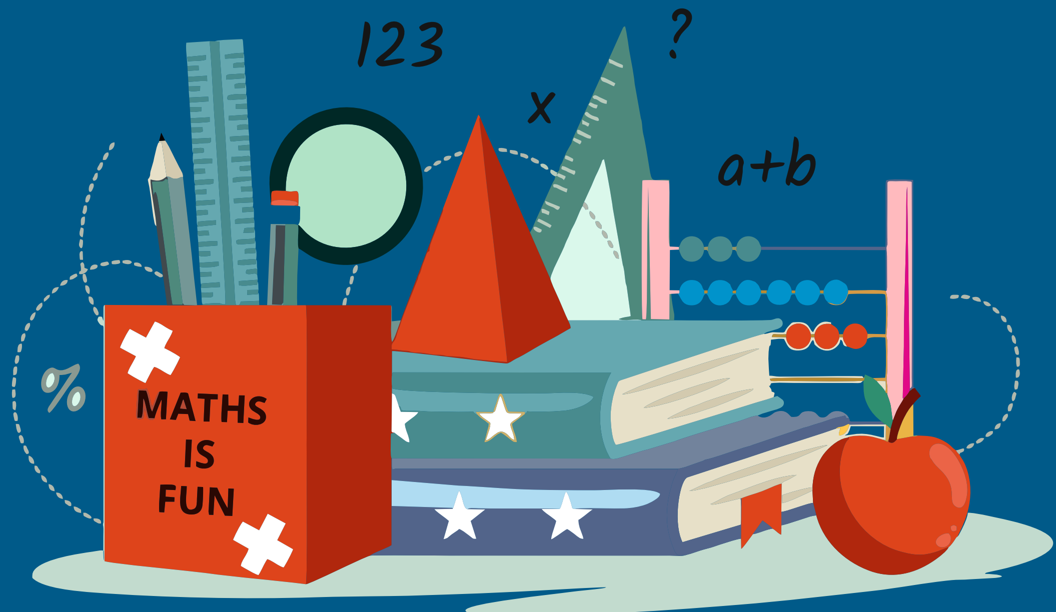
All truths are easy to understand once they are discovered; the point is to discover them.

- Galileo Galilei



State Council of Educational Research & Training
Andhra Pradesh

MATHEMATICS Semester (సెమిస్టర్) - 2 Class VII

MATHEMATICS
గణితశాస్త్రం

7

Free distribution by Samagra Shiksha, Government of Andhra Pradesh

0756

Semester (సెమిస్టర్) - 2

सत्यमेव जयते

CONSTITUTION OF INDIA

Preamble

WE, THE PEOPLE OF INDIA, having
solemnly resolved to constitute India into a
SOVEREIGN SOCIALIST SECULAR DEMOCRATIC REPUBLIC
and to secure to all its citizens:
JUSTICE
Social, economic and political;
LIBERTY
of thought, expression, belief, faith and worship;
EQUALITY
of status and of opportunity; and to
promote among them all
FRATERNITY
assuring the dignity of the individual and the unity and
integrity of the Nation;
IN OUR CONSTITUENT ASSEMBLY
this twenty-sixth day of November, 1949, do
HEREBY ADOPT, ENACT AND GIVE TO
OURSELVES THIS CONSTITUTION

భారత రాజ్యాంగం - పౌర విధులు

1. రాజ్యాంగమునకు బద్ధుడై వుండుట, దాని ఆదర్శాలను, సంస్థలను, జాతీయ పతాకమును,జాతీయ గీతమును గౌరవించుట;
2. జాతీయ స్వాతంత్ర్య పోరాటమునకు స్ఫూర్తినిచ్చిన ఉన్నతాదర్శములను మనస్సుయందు ఉంచుకొని వాటిని అనుసరించుట;
3. భారత సార్వభౌమత్వం, ఐక్యత, అఖండతను సమర్థించుట మరియు సంరక్షించుట.
4. దేశమును రక్షించుట మరియు కోరినపుడు జాతికి సేవ చేయుట;
5. భారత ప్రజల మధ్య మత, భాష, ప్రాంతీయ, వర్గ వైవిధ్యములను అధిగమించి, సామరస్యమును, సోదర భావమును పెంపొందించుట, స్త్రీల గౌరవం తగ్గించు ఆచారములను విడనాడుట;
6. మన ఉమ్మడి సంస్కృతినీ, సుసంపన్న సంప్రదాయాలను గౌరవించి రక్షించుట;
7. అడవులు, సరస్సులు, నదులు, అడవి జంతువులతో సహా ప్రాకృతిక పరిసరాలను కాపాడి అభివృద్ధి చేయుట మరియు సమస్త జీవుల యెడల కరుణార్ద్రత కలిగి వుండుట.
8. శాస్త్రీయ దృక్పథాన్ని, మానవతావాదాన్ని, జిజ్ఞాసను, సంస్కరణ తత్వాన్ని పెంపొందించుకొనటం;
9. ప్రజల ఆస్తిని సంరక్షించుట, హింసను విడనాడుట;
10. ప్రయత్నాలు, సాధనల ఉన్నతస్థాయిలను నిరంతరం అందుకొనునట్లుగా వైయక్తిక, సమిష్టి కార్య రంగాలన్నింటిలో శ్రేష్ఠత కోసం, కృషి చేయుట ప్రాథమిక కర్తవ్యమై వుండవలెను.
11. ఆరు నుండి పద్నాలుగు సంవత్సరముల వయస్సు కలిగిన బాలునికి లేదా బాలికకు తల్లి తండ్రి లేదా సంరక్షకునిగావున్న వ్యక్తి తనబిడ్డ లేదా సందర్భానుసారము తన సంరక్షితునికి విద్యార్జనకు అవకాశములు కల్పించవలెను.

(అధికరణం 51 A)

విద్యాహక్కు చట్టం

6 నుండి 14 సంవత్సరముల పిల్లలందరికి ఉచిత నిర్భంద ఎలిమెంటరీ విద్యనందించడానికి ఉద్దేశించబడినవి. ఇది ఏప్రిల్ 1, 2010 నుండి అమల్లోకి వచ్చింది.

చట్టంలోని ముఖ్యాంశాలు:

- పిల్లలందరికి అందుబాటులో పాఠశాలలను ఏర్పాటుచేయాలి.
- పాఠశాలలకు మౌలిక వసతులను కల్పించాలి.
- పిల్లలందరిని వయస్సుకు తగిన తరగతిలో చేర్పించాలి.
- వయస్సుకు తగ్గ తరగతిలో చేర్చిన తర్వాత తోటి వారితో సమానంగా ఉండటానికి ప్రత్యేకశిక్షణ ఇప్పించాలి.
- ప్రత్యేక అవసరాలు కల్గిన పిల్లలకు సాధారణ పిల్లలతోపాటు విద్యకొనసాగించడానికి తగువసతులు ఏర్పాట్లు చేయాలి.
- బడిలో చేర్చుకోడానికి ఎలాంటి పరీక్షలు నిర్వహించరాదు. ఎటువంటి రుసుము, చార్జీలు వసూలు చేయరాదు.
- బడిలో చేరిన పిల్లల పేరు తీసివేయడం, అదే తరగతిలో కొనసాగించడం చేయరాదు.
- పిల్లల్ని శారీరకంగా, మానసికంగా హింసించరాదు.
- వయస్సు నిర్ధారణ పత్రం, ఇతర ధృవీకరణ పత్రాలు లేవనే కారణం చేత పిల్లలకు బడిలో ప్రవేశాన్ని నిరాకరించరాదు.
- తగిన అర్హతలున్న వారిని మాత్రమే ఉపాధ్యాయులుగా నియమించాలి.
- పిల్లలు నిర్దేశించిన సామర్థ్యాలు సాధించేలా బోధనాభ్యసనం, మూల్యాంకనం ఉండాలి.
- ఎలిమెంటరీ విద్య పూర్తయ్యేవరకు పిల్లలకు ఎలాంటి బోర్డు పరీక్షలు నిర్వహించరాదు.
- పద్నాలుగు సంవత్సరాలు పూర్తయినప్పటికినీ, ఎలిమెంటరీ విద్య పూర్తయ్యేవరకు పాఠశాలలో పిల్లలు కొనసాగవచ్చును.
- బలహీన వర్గాలకు, ప్రతికూల పరిస్థితులను ఎదుర్కొంటున్న బృందాలకు చెందిన పిల్లలు ఏ విధమైన వివక్షతకు గురికాకుండా చూడాలి.
- రాజ్యాంగంలో పొందుపరిచిన విలువలకు అనుగుణంగా, విద్యార్థులను భయం, ఆందోళనకు గురిచేయని రీతిలో వారి సర్వతోముఖాభివృద్ధికి తోడ్పడే పాఠ్యప్రణాళిక రూపొందించాలి.

Mathematics

Textbook for Class VII

Semester - 2

0756

State Council of Educational Research & Training
Andhra Pradesh

First Published 2023

This book has been printed on 70 G.S.M. SS Maplitho
Title Page 200 G.S.M. White Art Card

Free distribution by Samagra Shiksha, Government of Andhra Pradesh

Printed in India
at the A.P. Govt. Text Book Press
Amaravati
Andhra Pradesh

MATHEMATICS

Class - VII Semester - 2

Text Book Development Committee

Sri **Praveen Prakash** I.A.S
Principal Secretary to Government
Department of School Education, AP

Sri **S. Suresh Kumar** I.A.S
Commissioner of School Education &
State Project Director, Samagra Shiksha, AP

Ms. **Nidhi Meena** I.A.S
Special Officer English Medium Project
O/o the Commissioner of School Education, AP

Dr. **B. Pratap Reddy**
MA., B.Ed., Ph.D.
Director, SCERT, AP

Sri **K. Ravindranadh Reddy**
M.A., B.Ed.
Director, Govt. Text book Press, AP

Programme Co-ordinator

Dr. **G. Kesava Reddy**
Prof. C&T, SCERT, AP

Subject Co-ordinators

Sri. **Kathari Satish Babu**
Faculty, SCERT, AP

Sri. **Kesiraju Srinivas**
Faculty, SCERT, AP

Sri. **Sarikonda Satish**
Faculty, SCERT, AP

Technical Co-ordinator

Dr. **Ch.V.S. Ramesh Kumar**
Faculty, SCERT-AP

Published by Samagra Shiksha, Government of Andhra Pradesh, Amaravati.

Translators

Sri **Gangalapudi Bhasker,** SA(Maths)
Z.P.H.S, Venkatagiri, Tirupathi Dt.

Sri **Pathivada Ravi Sankar,** SA(Maths)
Z.P.H.S, Komaragiri, Kakinada Dt

Sri **Syad Shahinsha,** SA(Maths)
Mpl.H.S, Ch.R.Palem, Bhimavaram, West Godavari Dt

Sri **Bhushanam Narasimha Prathap,** SA(Maths)
Z.P.H.S, Narasapuram, Ananthapuramu Dt.

Dr. **Chennamsetti Ramesh,** SA(Maths)
M.P.U.P.S, Vallabharaopalem, Guntur Dt.

Sri **Rangam Reddy Sankara Narayana Reddy,** SA(Maths)
ZPHS, Nallamada, Sri Satya Sai Dt

Sri **Peddinti VLN Sri Ram,** SA(Maths)
Jn.Mpl.HS, Amalapuram, Dr.B.R. Ambedkar Konaseema Dt.

Smt. **Yasam Jaya Bharathi,** SA(Maths)
ZPHS(G), Giddalur, Prakasam Dt.

Sri **Gorthi VS Sastry,** SA(Maths)
ZPHS, Kollipadu, Srikakulam Dt.

Smt. **Cripati Radhika,** SA(Maths)
ZPGHS, Gooty, Ananatapuramu Dt.

Sri **Tupakula Murali,** SA(Maths)
ZPHS, Karakambadi, Tirupathi Dt.

Designing & Page Layout Durga Graphics, Bapatla.

Foreword

The National Curriculum Framework (NCF), 2005, recommends that children's life at school must be linked to their life outside the school. This principle marks a departure from the legacy of bookish learning which continues to shape our system and causes a gap between the school, home and community. The syllabi and textbooks developed on the basis of NCF signify an attempt to implement this basic idea. They also attempt to discourage rote learning and the maintenance of sharp boundaries between different subject areas. We hope these measures will take us significantly further in the direction of a child-centred system of education outlined in the National Policy on Education (1986).

The success of this effort depends on the steps that school principals and teachers will take to encourage children to reflect on their own learning and to pursue imaginative activities and questions. We must recognise that, given space, time and freedom, children generate new knowledge by engaging with the information passed on to them by adults. Treating the prescribed textbook as the sole basis of examination is one of the key reasons why other resources and sites of learning are ignored. Inculcating creativity and initiative is possible if we perceive and treat children as participants in learning, not as receivers of a fixed body of knowledge.

These aims imply considerable change in school routines and mode of functioning. Flexibility in the daily time-table is as necessary as rigour in implementing the annual calendar so that the required number of teaching days are actually devoted to teaching. The methods used for teaching and evaluation will also determine how effective this textbook proves for making children's life at school a happy experience, rather than a source of stress or boredom. Syllabus designers have tried to address the problem of curricular burden by restructuring and reorienting knowledge at different stages with greater consideration for child psychology and the time available for teaching. The textbook attempts to enhance this endeavour by giving higher priority and space to opportunities for contemplation and wondering, discussion in small groups, and activities requiring hands-on experience.

The National Council of Educational Research and Training (NCERT) appreciates the hard work done by the textbook development committee responsible for this book. We wish to thank the Chairperson of the advisory group in science and mathematics, Professor J.V. Narlikar and the Chief Advisor for this book, Dr H.K. Dewan for guiding the work of this committee. Several teachers contributed to the development of this textbook; we are grateful to their principals for making this possible. We are indebted to the institutions and organisations which have generously permitted us to draw upon their resources, material and personnel. We are especially grateful to the members of the National Monitoring Committee, appointed by the Department of Secondary and Higher Education, Ministry of Human Resource Development under the Chairpersonship of Professor Mrinal Miri and Professor G.P. Deshpande, for their valuable time anc contribution. As an organisation committed to systemic reform and continuous improvement in the quality of its products, NCERT welcomes comments and suggestions which will enable us to undertake further revision and refinement.

Director
National Council of Educational
Research and Training

New Delhi
20 November 2006

Rationalisation of Content in the Textbooks

In view of the COVID-19 pandemic, it is imperative to reduce content load on students. The National Education Policy 2020, also emphasises reducing the content load and providing opportunities for experiential learning with creative mindset. In this background, the NCERT has undertaken the exercise to rationalise the textbooks across all classes. Learning Outcomes already developed by the NCERT across classes have been taken into consideration in this exercise.

Contents of the textbooks have been rationalised in view of the following:

- Overlapping with similar content included in other subject areas in the same class
- Similar content included in the lower or higher class in the same subject
- Difficulty level
- Content, which is easily accessible to students without much interventions from teachersand can be learned by children through self-learning or peer-learning
- Content, which is irrelevant in the present context

This present edition, is a reformatted version after carrying out the changes given above.

FOREWORD

"The only way to learn Mathematics is to do Mathematics " - Paul Halmos

India has a rich tradition and several contributions to Mathematics, Since ancient times and the legacy has continued over generations by various means, Mathematics provides an effective way of building mental discipline and encourages logical reasoning and mental rigor. Besides this, mathematical knowledge also plays a crucial role in understanding the Content of other School Subjects in the School.

The New Educational policy (NEP), 2020, provides a platform to build, nurture, foster, encourage and multiply mathematical thinking. It's introduced the reforms needed to balance the need for 21st century employment and entrepreneurship, which is marked by critical, lateral and mathematical thinking.

As efforts are made in preparing high-quality bilingual text books and teaching-learning materials for mathematics, so that the students are enabled to think and speak about the subject both in their home language / mother tongue and English .

The State council of Educational Research and Training (SCERT), Andhra Pradesh (A.P.) has been adopting the National Council of Educational Research and Training (NCERT) Curriculum in the State Starting from the Academic year 2022-23, for the class VIII and now, it is for the class VII in this academic year, 2023-24, with the sole aim of preparing the Government School Students, hailing from even a very backward area, to compete on par with any corporate School student in this Competitive world.

We are thankful and indebted to our Honourable chief Minister Sri Y. S. Jagan Mohan Reddy who's committed for Systematic reforms and continuous improvement in quality education, in order to groom and see our students, as Global citizens, We extend our gratitude to our Hon'ble Minister for Education, Sri Botcha Satyanarayana for his continued support in this endeavour. Our special thanks to Sri Praveen Prakash, IAS, Principal Secretary to Government, Department of School Education, A.P., Sri. S. Suresh Kumar, IAS, Commissioner of School Education & State Project Director, Smagra Shiksha, A.P. and Ms. Nidhi Meena IAS,Special officer, English Medium Project, A.P., for their constant motivation and guidance.

We convey our sincere thanks to the translators who've carried out the translation work of NCERT class VII mathematics textbook, content into Telugu Language, we also thank our Editors, Subject Co-ordinators and DTP and Layout designers for their Contribution for the development of this textbook.

We invite Constructive feedback from the teachers, parents and Educationalists for further improvement of the text book, in the interest of student s' community.

"Teaching Mathematics is a journey, not a destination" Keep going ahead.

Dr. B. Pratap Reddy,
Director,
State Council of Educational
Research and Training
Andhra Pradesh

Preface

The National Curriculum Framework (NCF), 2005 suggests the need for developing the ability for mathematisation in the child. It points out that the aim of learning mathematics is not merely being able to do quantitative calculations but also to develop abilities in the child that would enable her/him to redefine her/his relationship with the World. The NCF-2005 also lays emphasis on development in the children logical abilities as well as abilities to comprehend space, spatial transformations and develop the ability to visualise both these. It recommends that mathematics needs to slowly move towards abstraction even though it starts from concrete experiences and models. The ability to generalise and perceive patterns is an important step in being able to relate to the abstract and logic governed nature of the subject.

We also know that most children in upper primary and secondary classes develop a fear of mathematics and it is one of the reasons for students not being able to continue in schools. NCF-2005 has also mentioned this problem and has therefore emphasised the need to develop a programme which is relevant and meaningful. The need for conceptualising mathematics teaching allows children to explore concepts as well as develop their own ways of solving problems. This also forms corner-stone of the principles highlighted in the NCF-2005.

In Class VI we have begun the process of developing a programme which would help children understand the abstract nature of mathematics while developing in them the ability to construct their own concepts. As suggested by NCF-2005, an attempt has been made to allow multiple ways of solving problems and encouraging children to develop strategies different from each other. There is an emphasis on working with basic principles rather than on memorisation of algorithms and short-cuts.

The Class VII textbook has continued that spirit and has attempted to use language which the children can read and understand themselves. This reading can be in groups or individual and at some places require help and support by the teacher. We also tried to include a variety of examples and opportunities for children to set problems. The appearance of the book has sought to be made pleasant by including many illustrations. The book attempts to engage the mind of the child actively and provides opportunities to use concepts and develop her/his own structures rather than struggling with unnecessarily complicated terms and numbers.

We hope that this book would help all children in their attempt to learn mathematics and would build in them the ability to appreciate its power and beauty. We also hope that this would enable to revisit and consolidate concepts and skills that they have learnt in the primary school. We hope to strengthen the foundation of mathematics, on which further engagement with studies as well as her daily life would become possible in an enriched manner.

The team in developing the textbook consists of many teachers who are experienced and brought to the team the view point of the child and the school. We also had people who have done research in learning of mathematics and those who have been writing textbooks for mathematics for many years. The team has tried to make an effort to remove fear of mathematics from the minds of children and make it a part of their daily routine even outside the school. We had many discussions and a review process with some other teachers of schools across the country. The effort by the team has been to accommodate all the comments.

In the end, I would like to place on record our gratefulness to Prof Krishna Kumar, Director, NCERT, Prof G. Ravindra, Joint Director, NCERT and Prof Hukum Singh, Head, DESM, for giving opportunity to me and the team to work on this challenging task. I am also grateful to Prof J.V. Narlikar, Chairperson of the Advisory Group in Science and Mathematics for his suggestions. I am also grateful for the support of all those who were part of this team including Prof S.K. Singh Gautam, Dr V.P. Singh and Dr Ashutosh K. Wazalwar from NCERT, who have worked very hard to make this possible. In the end I must thank the Publication Department of NCERT for its support and advice and those from Vidya Bhawan who helped produce the book.

The process of developing materials is a continuous one and we would hope to make this book better. Suggestions and comments on the book are most welcome.

Dr H.K. Dewan
Chief Advisor
Textbook Development Committee

A Note for the Teachers

This book is a continuation of the process and builds on what was initiated in Class VI. We had shared with you the main points reflected in NCF-2005. These include relating mathematics to a wider development of abilities in children, moving away from complex calculations and algorithms following, to understanding and constructing a framework of understanding. The mathematical ideas in the mind of the child grow neither by telling nor by merely giving explanations. For children to learn mathematics, to be confident in it and understand the foundational ideas, they need to develop their own framework of concepts. This would require a classroom where children discuss ideas, look for solutions of problems, set new problems and find not only their own ways of solving problems but also their own definitions with the language they can use and understand. These definitions need not be as general and complete as the standard ones.

In the mathematics class it is important to help children read with understanding the textbook and other references. The reading of materials is not normally considered to be related to learning of mathematics but learning mathematics any further would require the child to comprehend the text. The text in mathematics uses a language that has brevity. It requires the ability to deal with terseness and with symbols, to follow logical arguments and appreciate the need for keeping certain factors and constraints. Children need practice in translating mathematical statements into normal statements expressing ideas in words and vice-a-versa. We would require children to become confident of using language in words and also being able to communicate through mathematical statements.

Mathematics at the upper primary stage is a major challenge and has to perform the dual role of being both close to the experience and environment of the child and being abstract. Children often are not able to work in terms of ideas alone. They need the comfort of context and/or models linked to their experience to find meaning. This stage presents before us the challenge of engaging the children while using the contexts but gradually moving them away from such dependence. So while children should be able to identify the principles to be used in a contextual situation, they should not be dependent or be limited to contexts. As we progress further in the middle school there would be greater requirement from the child to be able to do this.

Learning mathematics is not about remembering solutions or methods but knowing how to solve problems. Problem-solving strategies give learners opportunities to think rationally, enabling them to understand and create methods as well as processes; they become active participants in the construction of new knowledge rather than being passive receivers. Learners need to identify and define a problem, select or design possible solutions and revise or redesign the steps, if required. The role of a teacher gets modified to that of a guide and facilitator. Students need to be provided with activities and challenging problems, along with sets of many problem-solving experiences.

On being presented a problem, children first need to decode it. They need to identify the knowledge required for attempting it and build a model for it. This model could be in the form of an illustration or a situation construct. We must remember that for generating proofs in geometry the figures constructed are also models of the ideal dimensionless figure. These diagrams are, however, more abstract than the concrete models required for attempting problems in arithmetic and algebra. Helping children to develop the ability to construct appropriate models by breaking up the problems and evolving their own strategies and analysis of problems is extremely important. This should replace prescriptive algorithms to solve problems.

Teachers are expected to encourage cooperative learning. Children learn a lot in purposeful conversation with each other. Our classrooms should develop in the students the desire and capacity to learn from each other rather than compete. Conversation is not noise and consultation is not cheating. It is a challenge to make possible classroom groups that benefit the most from being with each other and in which each child contributes to the learning of the group. Teachers must recognise that different children and different groups will use distinct strategies. Some of these strategies would appear to be more efficient and some not as efficient. They would reflect the modelling done by each group and would indicate the process of thinking used. It is inappropriate to identify the best strategy or pull down incorrect strategies. We need to record all strategies adopted and analyse them. During this, it is crucial to discuss why some of the strategies are unsuccessful. The class as a group can improve upon the ineffective and unsuccessful strategies and correct them. This implies that we need to complete each strategy rather than discard some as incorrect or inappropriate. Exposures to a variety of strategies would deepen mathematical understanding and ability to learn from others. This would also help them to understand the importance of being aware of what one is doing.

Enquiry to understand is one of the natural ways by which students acquire and construct knowledge. The process can even begin with casual observations and end in generation and acquisition of knowledge. This can be aided by providing examples for different forms of questioning-explorative, open-ended, contextual, error detection etc. Students need to get exposed to challenging investigations. For example in geometry there could be things like, experimenting with suitable nets for solids, visualising solids through shadow play, slicing and elevations etc. In arithmetic we can make them explore relationships among members, generalise the relationships, discover patterns and rules and then form algebraic relations etc.

Children need the opportunity to follow logical arguments and find loopholes in the arguments presented. This will lead them to understand the requirement of a proof.

At this stage topics like Geometry are poised to enter a formal stage. Provide activities that encourage students to exercise creativity and imagination while discovering geometric vocabulary and relationships using simple geometric tools.

Mathematics has to emerge as a subject of exploration and creation rather than an exercise of finding answers to old and complicated problems. There is a need to encourage children to find many different ways to solve problems. They also need to appreciate the use of many alternative algorithms and strategies that may be adopted to solve a problem.

Topics like Integers, Fractions and Decimals, Symmetry have been presented here by linking them with their introductory parts studied in earlier classes. An attempt has been made to link chapters with each other and the ideas introduced in the initial chapters have been used to evolve concepts in the subsequent chapters. Please devote enough time to the ideas of negative integers, rational numbers, exploring statements in Geometry and visualising solids shapes.

We hope that the book will help children learn to enjoy mathematics and be confident in the concepts introduced. We want to recommend the creation of opportunity for thinking individually and collectively. Group discussions need to become a regular feature of mathematics classroom thereby making learners confident about mathematics and make the fear of mathematics a thing of past.

We look forward to your comments and suggestions regarding the book and hope that you will send interesting exercises, activities and tasks that you develop during the course of teaching, to be included in the future editions.

Textbook Development Committee

Chairperson, Advisory Group in Science and Mathematics

J.V. Narlikar, *Emeritus Professor*, Inter University Centre for Astronomy and Astrophysics (IUCCA), Ganeshkhind, Pune University, Pune, Maharashtra

Chief Advisor

H.K. Dewan, Vidya Bhawan Society, Udaipur, Rajasthan

Chief Coordinator

Hukum Singh, *Professor* and *Head (Retd.),* DESM, NCERT, New Delhi

Members

Anjali Gupte, *Teacher*, Vidya Bhawan Public School, Udaipur, Rajasthan

Avantika Dam, *TGT*, CIE Experimental Basic School, Department of Education, Delhi

H.C. Pradhan, *Professor*, Homi Bhabha Centre for Science Education, TIFR, Mumbai, Maharashtra

Mahendra Shankar, *Lecturer (S.G.) (Retd.),* NCERT, New Delhi

Meena Shrimali, *Teacher*, Vidya Bhawan Senior Secondary School, Udaipur, Rajasthan

R. Athmaraman, *Mathematics Education Consultant*, TI Matric Higher Secondary School and AMTI, Chennai, Tamil Nadu

S.K.S. Gautam, *Professor*, DESM, NCERT, New Delhi

Shradha Agarwal, *PGT*, Sir Padampat Singhania Education Centre, Kanpur (U.P.)

Srijata Das, *Senior Lecturer* in Mathematics, SCERT, New Delhi

V.P. Singh, *Reader (Retd.)*, DESM, NCERT, New Delhi

Member-coordinator

Ashutosh K. Wazalwar, *Professor,* DESM, NCERT, New Delhi

Acknowledgements

The Council gratefully acknowledges the valuable contributions of the following participants of the Textbook Review Workshop – Ms. Nirupma Sahni, *TGT,* Mahavir Digambar Jain Sr. Sec. School, Jaipur; Dr Roohi Fatima, *TGT,* Jamia Middle School, New Delhi; Ms. Deepti Mathur, *TGT,* Mother's International School, New Delhi; Shri K. Balaji, *TGT,* Kendriya Vidyalaya, Donimalai, Karnataka; Shri Amit Bajaj, *TGT,* CRPF Public School, Delhi; Ms. Omlata Singh, *TGT,* Presentation Convent Sr. Sec. School, Delhi; Shri Nagesh S. Mone, *TGT,* Dravid High School, Wai, Maharashtra; Shri Gorakh Nath Sharma, *PGT,* Jawahar Navodaya Vidyalaya, Mesra, Ranchi, Jharkhand; Shri Ajay Kumar Singh, *TGT,* Ramjas Sr. Sec. School, No.3, Delhi; Ms. Ragini Subramanian, *TGT,* SRDF Vivekananda Vidyalaya, Chennai, Tamil Nadu; Shri Rajkumar Dhawan, *PGT,* Geeta Sr. Sec. School No.2, Delhi; Dr Sanjay Mudgil, *Lecturer,* CIET, NCERT, New Delhi; Dr. Sushma Jaireth, *Reader,* DWS, NCERT, New Delhi; Dr Mona Yadav, *Lecturer,* DWS, NCERT, New Delhi.

The Council acknowledges the comments/suggestions given by Dr Ram Avtar (*Retd. Professor,* NCERT) *Consultant,* DESM, NCERT, New Delhi, Dr R.P. Maurya, *Reader,* DESM, NCERT, New Delhi and Shri Sanjay Bolia, *Senior Teacher,* Vidya Bhawan Basic Secondary School, Udaipur, Rajasthan for the improvement of the content.

The Council acknowledges the support and facilities provided by Vidya Bhawan Society and its staff, Udaipur, for conducting workshops of the development committee at Udaipur, and to the Director, Centre for Science Education and Communication (CSEC), Delhi University for providing library help.

The Council acknowledges the academic and administrative support of Professor Hukum Singh, *Head,* DESM, NCERT, New Delhi.

The Council also acknowledges the efforts of S.M. Ikram, *DTP Operator,* Vidya Bhawan Society Udaipur; Sajjad Haider Ansari, Rakesh Kumar and Neelam Walecha, *DTP Operators,* Kanwar Singh*, Copy Editor,* NCERT; Abhimanu Mohanty, *Proof Reader,* NCERT; Deepak Kapoor, *Computer Station Incharge,* DESM, NCERT for technical assistance, APC-office and the Administrative Staff, DESM, NCERT; and the Publication Department of the NCERT.

NATIONAL ANTHEM

Jana gana mana adhinayaka jaya he
Bharata bhagya vidhata
Panjaba Sindhu Gujarata Maratha
Dravida Utkala Banga
Vindhya Himachala Yamuna Ganga
uchchala jaladhi taranga
Tava Subha name jage, tave subha asisa mage,
gahe tava jaya gatha.
Jana gana mangala dayaka jaya he
Bharata bhagya vidhata.
Jaya he, Jaya he, Jaya he,
jaya jaya jaya jaya he.

-Rabindranath Tagore

జాతీయ గీతం

జనగణమన అధినాయక జయహే!
భారత భాగ్యవిధాతా!
పంజాబ, సింధు, గుజరాత, మరాఠా,
ద్రావిడ, ఉత్కళ, వంగా!
వింధ్య, హిమాచల, యమునా, గంగా!
ఉచ్ఛల జలధి తరంగా!
తవ శుభనామే జాగే!
తవ శుభ ఆశిష మాఁగే
గాహే తవ జయగాథా!
జనగణ మంగళదాయక జయహే!
భారత భాగ్య విధాతా!
జయహే! జయహే! జయహే!
జయ జయ జయ జయహే!!

- రవీంద్రనాథ్ టాగూర్

PLEDGE | ప్రతిజ్ఞ

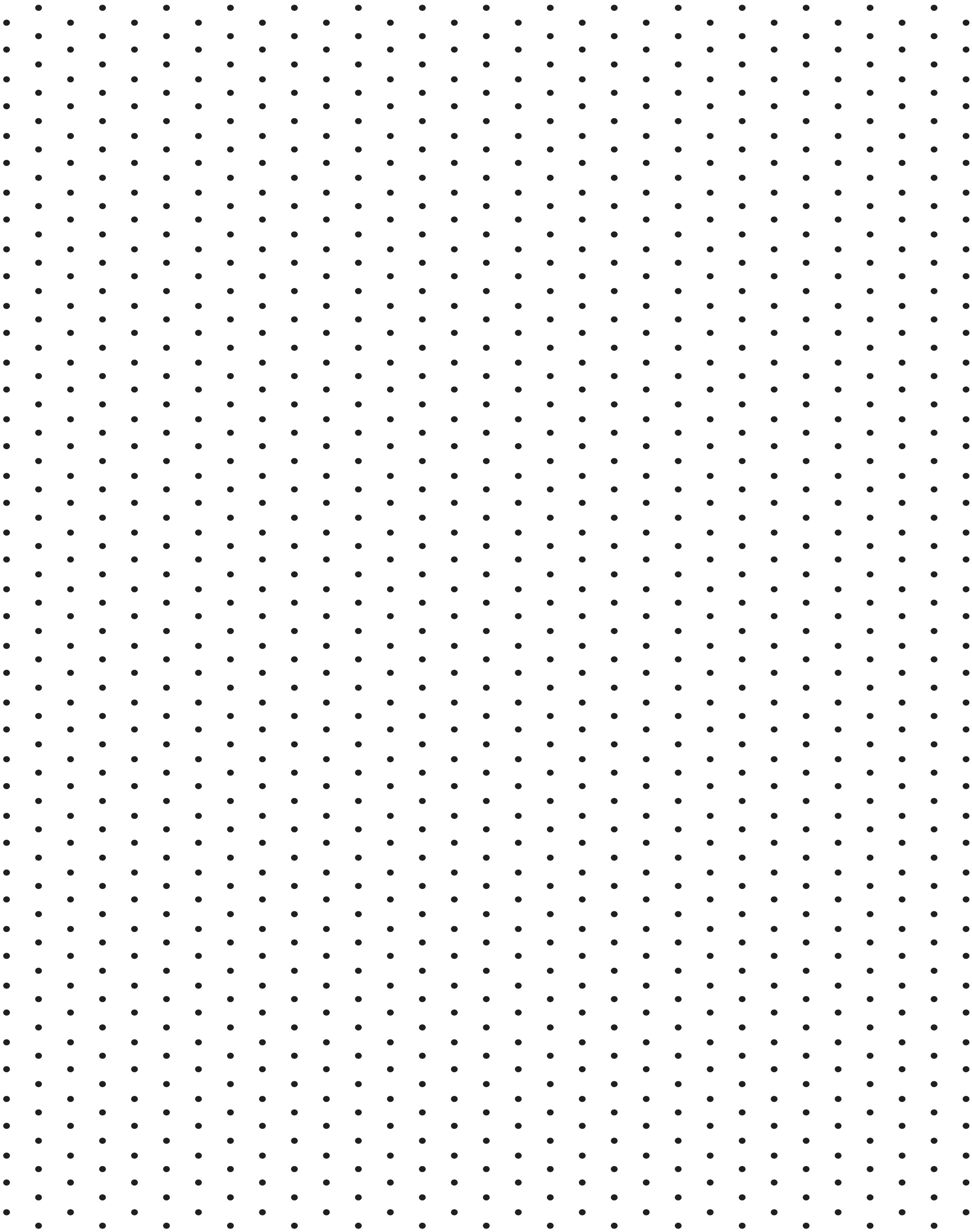
India is my country. All Indians are my brothers and sisters.
I love my country and I am proud of its rich and varied heritage.
I shall always strive to be worthy of it.
I shall give my parents, teachers and all elders respect,
and treat everyone with courtesy. I shall be kind to animals.
To my country and my people, I pledge my devotion.
In their well-being and prosperity alone lies my happiness.

- Pydimarri Venkata Subba Rao

భారతదేశం నా మాతృభూమి. భారతీయులందరూ నా సహోదరులు.
నేను నా దేశాన్ని ప్రేమిస్తున్నాను. సుసంపన్నమైన, బహువిధమైన నా దేశ వారసత్వ
సంపద నాకు గర్వకారణం. దీనికి అర్హత పొందడానికై సర్వదా నేను కృషి చేస్తాను.
నా తల్లిదండ్రుల్ని, ఉపాధ్యాయుల్ని, పెద్దలందర్ని గౌరవిస్తాను. ప్రతివారితోను మర్యాదగా
నడుచుకొంటాను. జంతువులపట్ల దయతో ఉంటాను.
నా దేశంపట్ల, నా ప్రజలపట్ల సేవానిరతితో ఉంటానని ప్రతిజ్ఞ చేస్తున్నాను.
వారి శ్రేయోభివృద్ధులే నా ఆనందానికి మూలం.

- పైడిమర్రి వెంకటసుబ్బారావు

Isometric Dot Sheet



Contents

E5E4H9

Teacher corner

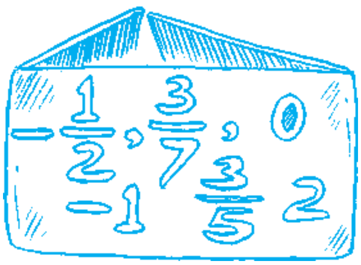
V9Y3C5

Student corner

Chapter 8

Rational Numbers

8.1 Introduction



You began your study of numbers by counting objects around you. The numbers used for this purpose were called counting numbers or natural numbers. They are 1, 2, 3, 4, ... By including 0 to natural numbers, we got the whole numbers, i.e., 0, 1, 2, 3, ... The negatives of natural numbers were then put together with whole numbers to make up integers. Integers are ..., –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, ... We, thus, extended the number system, from natural numbers to whole numbers and from whole numbers to integers.

You were also introduced to fractions. These are numbers of the form $\frac{\text{numerator}}{\text{denominator}}$, where the numerator is either 0 or a positive integer and the denominator, a positive integer. You compared two fractions, found their equivalent forms and studied all the four basic operations of addition, subtraction, multiplication and division on them.

In this Chapter, we shall extend the number system further. We shall introduce the concept of rational numbers alongwith their addition, subtraction, multiplication and division operations.

8.2 Need for Rational Numbers

Earlier, we have seen how integers could be used to denote opposite situations involving numbers. For example, if the distance of 3 km to the right of a place was denoted by 3, then the distance of 5 km to the left of the same place could be denoted by –5. If a profit of ₹ 150 was represented by 150 then a loss of ₹ 100 could be written as –100.

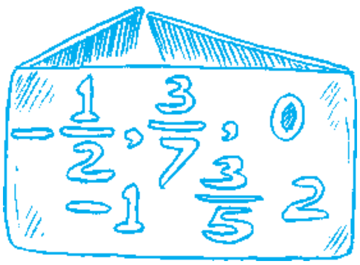
There are many situations similar to the above situations that involve fractional numbers. You can represent a distance of 750m above sea level as $\frac{3}{4}$ km. Can we represent 750m below sea level in km? Can we denote the distance of $\frac{3}{4}$ km below sea level by $\frac{-3}{4}$? We can see $\frac{-3}{4}$ is neither an integer, nor a fractional number. We need to extend our number system to include such numbers.

అధ్యాయం 8

అకరణీయ సంఖ్యలు

Q2S4C5

8.1 పరిచయం



మీ చుట్టూ ఉన్న వస్తువులను లెక్కించడం ద్వారా మీరు సంఖ్యల అధ్యయనాన్ని ప్రారంభించారు. ఈ ప్రయోజనం కోసం ఉపయోగించిన సంఖ్యలను గణన సంఖ్యలు లేదా సహజ సంఖ్యలు అని పిలుస్తారు. అవి 1, 2, 3, 4, ... సహజ సంఖ్యలకు 0 ను చేర్చడం ద్వారా, మనము పూర్ణాంకములు 0, 1, 2, 3, ... లను పొందాము, సహజ సంఖ్యల యొక్క ఋణ సంఖ్యలను పూర్ణాంకములకు కలిపిన పూర్ణ సంఖ్యలు ఏర్పడతాయి. పూర్ణ సంఖ్యలు ..., –3, –2, –1, –0, 1, 2, 3, ... సహజ సంఖ్యల నుండి పూర్ణాంకాలకు, పూర్ణాంకాలనుండి పూర్ణసంఖ్యలకు మనం సంఖ్యా వ్యవస్థను విస్తరించాము.

మీకు భిన్నాలు కూడా పరిచయం చేయబడ్డాయి. ఇవి $\frac{\text{లవము}}{\text{హారము}}$ రూపం లో ఉండే సంఖ్యలు ఇక్కడ లవము 0 లేదా ధన పూర్ణసంఖ్య మరియు హారము, ఒక ధన పూర్ణసంఖ్య. మీరు రెండు భిన్నాలను పోల్చడం, వాటికి సమానమైన రూపాలను కనుగొనడం మరియు వాటిపై సంకలనం , వ్యవకలనం , గుణించడం మరియు భాగాహారం అనే నాలుగు ప్రాథమిక పరిక్రియలను అధ్యయనం చేశారు.

ఈ అధ్యాయంలో మనం సంఖ్యా వ్యవస్థను మరింత విస్తరిద్దాం.మనం అకరణీయ సంఖ్యల భావనను వాటి సంకలనం, వ్యవకలనం, గుణించడం మరియు భాగాహారములను పరిచయం చేద్దాం.

8.2 అకంణీయ సంఖ్యల అవసరం

ఇంతకు ముందు, సంఖ్యలతో కూడిన వ్యతిరేక పరిస్థితులను సూచించడానికి పూర్ణ సంఖ్యలను ఎలా ఉపయోగించవచ్చో మనం చూశాము.ఉదాహరణకు, ఒక ప్రదేశం నుండి కుడివైపుకు3 కిలోమీటర్ల దూరాన్ని 3 ద్వారా సూచించినట్లయితే, అప్పుడు అదే ప్రదేశం నుండి ఎడమకు 5 కిలోమీటర్ల దూరాన్ని –5 ద్వారా సూచించవచ్చు. ఒకవేళ ₹ 150 లాభాన్ని 150 ద్వారా సూచించినట్లయితే, అప్పుడు ₹ 100 నష్టాన్ని –100 వలె రాయవచ్చు.

పై సందర్భాలను పోలిన అనేక సందర్భాలు భిన్నాలను కలిగి ఉన్నాయి.

మీరు సముద్ర మట్టానికి 750 మీటర్ల దూరాన్ని $\frac{3}{4}$ కి.మీ గా సూచిస్తారు. మనం సముద్ర మట్టానికి దిగువన 750 మీటర్లను కి.మీలో సూచించగలమా? సముద్రమట్టానికి దిగువన $\frac{3}{4}$ కి.మీ ఉన్న దూరాన్ని $\frac{-3}{4}$ తో మనం సూచించగలమా? చూడండి $\frac{-3}{4}$ అనేది పూర్ణసంఖ్య కాదు మరియు భిన్న సంఖ్య కాదు. అటువంటి సంఖ్యలను చేర్చడానికి మన సంఖ్యా వ్యవస్థను విస్తరించాల్సిన అవసరం ఉంది.

8.3 What are Rational Numbers?

The word 'rational' arises from the term 'ratio'. You know that a ratio like 3:2 can also be written as $\frac{3}{2}$. Here, 3 and 2 are natural numbers.

Similarly, the ratio of two integers p and q ($q \neq 0$), i.e., $p{:}q$ can be written in the form $\frac{p}{q}$. This is the form in which rational numbers are expressed.

A rational number is defined as a number that can be expressed in the form $\frac{p}{q}$, where p and q are integers and $q \neq 0$.

Thus, $\frac{4}{5}$ is a rational number. Here, $p = 4$ and $q = 5$.

Is $\frac{-3}{4}$ also a rational number? Yes, because $p = -3$ and $q = 4$ are integers.

- You have seen many fractions like $\frac{3}{8}, \frac{4}{8}, 1\frac{2}{3}$ etc. All fractions are rational numbers. Can you say why?

How about the decimal numbers like 0.5, 2.3, etc.? Each of such numbers can be written as an ordinary fraction and, hence, are rational numbers. For example, $0.5 = \frac{5}{10}$, $0.333 = \frac{333}{1000}$ etc.

Try These

1. Is the number $\frac{2}{-3}$ rational? Think about it. **2.** List ten rational numbers.

Numerator and Denominator

In $\frac{p}{q}$, the integer p is the numerator, and the integer q ($\neq 0$) is the denominator.

Thus, in $\frac{-3}{7}$, the numerator is -3 and the denominator is 7.

Mention five rational numbers each of whose

(a) Numerator is a negative integer and denominator is a positive integer.
(b) Numerator is a positive integer and denominator is a negative integer.
(c) Numerator and denominator both are negative integers.
(d) Numerator and denominator both are positive integers.

- Are integers also rational numbers?

Any integer can be thought of as a rational number. For example, the integer -5 is a rational number, because you can write it as $\frac{-5}{1}$. The integer 0 can also be written as $0 = \frac{0}{2}$ or $\frac{0}{7}$ etc. Hence, it is also a rational number.

Thus, rational numbers include integers and fractions.

8.3 అకరణీయ సంఖ్యలు అంటే ఏమిటి?

అకరణీయ అనే పదం 'ratio' అనే పదం నుండి ఉద్భవించింది. 3:2 వంటి నిష్పత్తిని $\frac{3}{2}$ అని కూడా రాయవచ్చని మీకు తెలుసు. ఇక్కడ 3 మరియు 2 లు సహజ సంఖ్యలు.

ఇదేవిధంగా, p మరియు q $(q \neq 0)$, అనే రెండు పూర్ణసంఖ్యల నిష్పత్తిని, అంటే $p{:}q$ ని $\frac{p}{q}$ రూపంలో రాయవచ్చు. ఇది అకరణీయ సంఖ్యలను వ్యక్తీకరించే రూపం.

$\frac{p}{q}$ రూపంలో రాయగల సంఖ్యలను అకరణీయ సంఖ్యలు అందురు. ఇక్కడ p మరియు q లు పూర్ణ సంఖ్యలు మరియు $q \neq 0$.

$\frac{4}{5}$ ఒక అకరణీయసంఖ్య. ఇక్కడ, $p = 4$ మరియు $q = 5$.

$\frac{-3}{4}$ కూడా అకరణీయ సంఖ్య అగునా? అవును, ఎందుకంటే $p = -3$ మరియు $q = 4$ లు పూర్ణసంఖ్యలు.

- మీరు $\frac{3}{8}, \frac{4}{8}, 1\frac{2}{3}$ మొదలైన అనేక భిన్నాలను చూశారు? భిన్నాలన్నీ ఆకరణీయసంఖ్యలు అగునా. ఎందుకో చెప్పగలరా...

  0.5, 2.3, మొ... వంటి దశాంశ సంఖ్యల గురించి ఏమి చెప్పగలరు? అటువంటి ప్రతి సంఖ్యను కూడా సామాన్య భిన్నంగా రాయవచ్చు అందువల్ల అవి అకరణీయ సంఖ్యలు ..ఉదాహరణకు, $0.5 = \frac{5}{10}$, $0.333 = \frac{333}{1000}$ మొదలైనవి.

ప్రయత్నించండి

1. $\frac{2}{-3}$ ఒక అకరణీయ సంఖ్యనా? దాని గురించి ఆలోచించండి. **2.** పది అకరణీయ సంఖ్యల జాబితా రాయండి.

లవము మరియు హారము

$\frac{p}{q}$ లో p ని లవము అనీ, మరియు q $(\neq 0)$ ని హారము అనీ అందురు.

$\frac{-3}{7}$, లో లవం -3 మరియు హారము 7.

ప్రతీ ఒక్క దానికి ఐదు అకరణీయ సంఖ్యలను పేర్కొనండి.

(a) లవము అనేది ఋణ పూర్ణసంఖ్య మరియు హారము అనేది ధన పూర్ణసంఖ్య .
(b) లవము అనేది ధన పూర్ణసంఖ్య మరియు హారము అనేది ఋణ పూర్ణసంఖ్య
(c) లవము మరియు హారము రెండూ ఋణ పూర్ణ సంఖ్యలు.
(d) లవము మరియు హారము రెండూ ధన పూర్ణ సంఖ్యలు.

- పూర్ణసంఖ్యలు కూడా అకరణీయ సంఖ్యలేనా?

పూర్ణ సంఖ్యను ఏదైనా అకరణీయ సంఖ్యగా భావించవచ్చు. ఉదాహరణకి, పూర్ణసంఖ్య -5 ఒక ఆకరణీయ సంఖ్య, ఎందుకంటే మీరు దానిని $\frac{-5}{1}$. లా రాయవచ్చు. పూర్ణసంఖ్య 0ను కూడా $0 = \frac{0}{2}$ లేదా $\frac{0}{7}$ మొదలైన విధాలుగా రాయవచ్చు. అందువల్ల, ఇది కూడా ఒక అకరణీయ సంఖ్య ..

అందువల్ల, అకరణీయ సంఖ్యలలో పూర్ణ సంఖ్యలు మరియు భిన్నాలు ఉంటాయి.

Equivalent rational numbers

A rational number can be written with different numerators and denominators. For example, consider the rational number $\frac{-2}{3}$.

$$\frac{-2}{3} = \frac{-2\times 2}{3\times 2} = \frac{-4}{6}.$$ We see that $\frac{-2}{3}$ is the same as $\frac{-4}{6}$.

Also, $$\frac{-2}{3} = \frac{(-2)\times(-5)}{3\times(-5)} = \frac{10}{-15}.$$ So, $\frac{-2}{3}$ is also the same as $\frac{10}{-15}$.

Thus, $\frac{-2}{3} = \frac{-4}{6} = \frac{10}{-15}$. Such rational numbers that are equal to each other are said to be equivalent to each other.

Again, $$\frac{10}{-15} = \frac{-10}{15} \text{ (How?)}$$

By multiplying the numerator and denominator of a rational number by the same non zero integer, we obtain another rational number equivalent to the given rational number. This is exactly like obtaining equivalent fractions.

Just as multiplication, the division of the numerator and denominator by the same non zero integer, also gives equivalent rational numbers. For example,

$$\frac{10}{-15} = \frac{10\div(-5)}{-15\div(-5)} = \frac{-2}{3}, \qquad \frac{-12}{24} = \frac{-12\div 12}{24\div 12} = \frac{-1}{2}$$

TRY THESE

Fill in the boxes:

(i) $\frac{5}{4} = \frac{\square}{16} = \frac{25}{\square} = \frac{-15}{\square}$

(ii) $\frac{-3}{7} = \frac{\square}{14} = \frac{9}{\square} = \frac{-6}{\square}$

> We write $\frac{-2}{3}$ as $-\frac{2}{3}$, $\frac{-10}{15}$ as $-\frac{10}{15}$, etc.

8.4 Positive and Negative Rational Numbers

Consider the rational number $\frac{2}{3}$. Both the numerator and denominator of this number are positive integers. Such a rational number is called a **positive rational number**. So, $\frac{3}{8}, \frac{5}{7}, \frac{2}{9}$ etc. are positive rational numbers.

TRY THESE

1. Is 5 a positive rational number?
2. List five more positive rational numbers.

The numerator of $\frac{-3}{5}$ is a negative integer, whereas the denominator is a positive integer. Such a rational number is called a **negative rational number**. So, $\frac{-5}{7}, \frac{-3}{8}, \frac{-9}{5}$ etc. are negative rational numbers.

సమానమైన అకరణీయ సంఖ్యలు

ఒక అకరణీయ సంఖ్యను విభిన్న లవములు మరియు హారములతో వ్రాయవచ్చు. ఉదాహరణకి అకరణీయ సంఖ్య $\frac{-2}{3}$ ను పరిగణించండి.

$$\frac{-2}{3} = \frac{-2\times 2}{3\times 2} = \frac{-4}{6},\ \frac{-2}{3},\ \frac{-4}{6}$$ లు ఒకటే అని చూడవచ్చు.

$$\frac{-2}{3} = \frac{(-2)\times(-5)}{3\times(-5)} = \frac{10}{-15},\ \frac{-2}{3},\ \frac{10}{-15}$$ లు ఒకటే అని చూడవచ్చు.

అందుకని, $\frac{-2}{3} = \frac{-4}{6} = \frac{10}{-15}$. అటువంటి సమానమైన అకరణీయ సంఖ్యలను తుల్య అకరణీయ సంఖ్యలు అందురు

మరలా, $\frac{10}{-15} = \frac{-10}{15}$ (ఎందుకు?)

ఒక అకరణీయ సంఖ్య యొక్క లవము మరియు హారములను సున్నాకాని ఒకే(శూన్యేతర) పూర్ణసంఖ్యతో గుణించడం ద్వారా, ఇవ్వబడిన అకరణీయసంఖ్యకు సమానమైన మరొక అకరణీయ సంఖ్యను మనం పొందుతాం. ఇది ఖచ్చితంగా సమాన భిన్నాలను పొందడం వంటిది.

గుణించడం మాదిరిగానే, సున్నా కాని ఒకే పూర్ణసంఖ్య చేత లవము మరియు హారములను భాగించడం ద్వారా కూడా సమానమైన అకరణీయ సంఖ్యలను ఇస్తుంది. ఉదాహరణకి,

$$\frac{10}{-15} = \frac{10\div(-5)}{-15\div(-5)} = \frac{-2}{3},\quad \frac{-12}{24} = \frac{-12\div 12}{24\div 12} = \frac{-1}{2}$$

> $\frac{-2}{3}$ ను $-\frac{2}{3}$, $\frac{-10}{15}$ ను $-\frac{10}{15}$, మొ॥వి గా రాయవచ్చు

ప్రయత్నించండి

బాక్సులను నింపండి:

(i) $\frac{5}{4} = \frac{\square}{16} = \frac{25}{\square} = \frac{-15}{\square}$

(ii) $\frac{-3}{7} = \frac{\square}{14} = \frac{9}{\square} = \frac{-6}{\square}$

8.4 ధన మరియు ఋణ అకరణీయ సంఖ్యలు

$\frac{2}{3}$ అకరణీయ సంఖ్యను పరిగణించండి . ఈ సంఖ్య యొక్క లవము మరియు హారము రెండూ ధన పూర్ణ సంఖ్యలు ఇటువంటి అకరణీయ సంఖ్యను **ధన అకరణీయ సంఖ్య** అంటారు. అందువల్ల $\frac{3}{8}, \frac{5}{7}, \frac{2}{9}$ మొ॥వి ధన ఆకరణీయ సంఖ్యలు.

ప్రయత్నించండి

1. 5 ఒక ధన అకరణీయ సంఖ్యా?
2. మరో ఐదు ధన అకరణీయ సంఖ్యలను జాబితా రాయండి.

$\frac{-3}{5}$ లో లవము ఋణ పూర్ణ సంఖ్య , హారము ధన పూర్ణ సంఖ్య. ఇటువంటి అకరణీయ సంఖ్యను **ఋణ అకరణీయ సంఖ్య** అంటారు.

కాబట్టి $\frac{-5}{7}, \frac{-3}{8}, \frac{-9}{5}$ మొ॥వి ఋణ అకరణీయ సంఖ్యలు.

- Is $\frac{8}{-3}$ a negative rational number? We know that $\frac{8}{-3} = \frac{8\times -1}{-3\times -1} = \frac{-8}{3}$, and $\frac{-8}{3}$ is a negative rational number. So, $\frac{8}{-3}$ is a negative rational number.

  Similarly, $\frac{5}{-7}, \frac{6}{-5}, \frac{2}{-9}$ etc. are all negative rational numbers. Note that their numerators are positive and their denominators negative.
- The number 0 is neither a positive nor a negative rational number.
- What about $\frac{-3}{-5}$?

  You will see that $\frac{-3}{-5} = \frac{-3\times(-1)}{-5\times(-1)} = \frac{3}{5}$. So, $\frac{-3}{-5}$ is a positive rational number.

  Thus, $\frac{-2}{-5}, \frac{-5}{-3}$ etc. are positive rational numbers.

TRY THESE

1. Is – 8 a negative rational number?
2. List five more negative rational numbers.

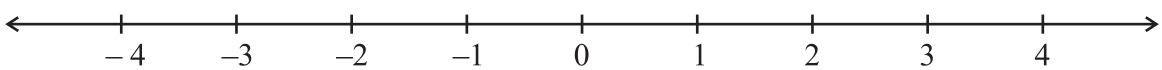
TRY THESE

Which of these are negative rational numbers?

(i) $\frac{-2}{3}$ (ii) $\frac{5}{7}$ (iii) $\frac{3}{-5}$ (iv) 0 (v) $\frac{6}{11}$ (vi) $\frac{-2}{-9}$

8.5 RATIONAL NUMBERS ON A NUMBER LINE

You know how to represent integers on a number line. Let us draw one such number line.



The points to the right of 0 are denoted by + sign and are positive integers. The points to the left of 0 are denoted by – sign and are negative integers.

Representation of fractions on a number line is also known to you.

Let us see how the rational numbers can be represented on a number line.

Let us represent the number $-\frac{1}{2}$ on the number line.

As done in the case of positive integers, the positive rational numbers would be marked on the right of 0 and the negative rational numbers would be marked on the left of 0.

To which side of 0 will you mark $-\frac{1}{2}$? Being a negative rational number, it would be marked to the left of 0.

You know that while marking integers on the number line, successive integers are marked at equal intervels. Also, from 0, the pair 1 and –1 is equidistant. So are the pairs 2 and –2, 3 and –3.

- $\frac{8}{-3}$ ఒక ఋణ అకరణీయ సంఖ్యనా? $\frac{8}{-3} = \frac{8\times -1}{-3\times -1} = \frac{-8}{3}$ మరియు $\frac{-8}{3}$ ఒక ఋణ అకరణీయ సంఖ్య. కాబట్టి $\frac{-8}{3}$ ఒక ఋణ అకరణీయ సంఖ్య.

  ఇదే విధంగా $\frac{5}{-7},\frac{6}{-5},\frac{2}{-9}$ మొదలైనవి అన్నీ ఋణ అకరణీయ సంఖ్యలు. వాటి లవములు. ధన మరియు వాటి హారములు ఋణ పూర్ణ సంఖ్యలు అని గమనించండి.

- సంఖ్య 0 అనేది ధన లేదా ఋణ అకరణీయ సంఖ్య కాదు.

- $\frac{-3}{-5}$ ఏమవుతుంది?

  $\frac{-3}{-5}=\frac{-3\times(-1)}{-5\times(-1)}=\frac{3}{5}$ ..కాబట్టి $\frac{-3}{-5}$ ఒక ధన అకరణీయ సంఖ్య.

  అందుకని, $\frac{-2}{-5},\frac{-5}{-3}$ మొ॥వి ధన అకరణీయ సంఖ్యలు

ప్రయత్నించండి

1. – 8 ఒక ఋణ అకరణీయ సంఖ్య?
2. మరో ఐదు ఋణ అకరణీయసంఖ్యలను జాబితా రాయండి.

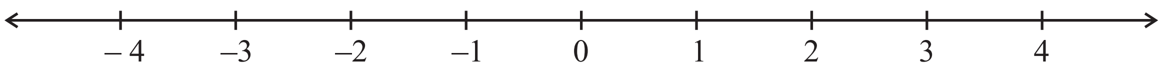
ప్రయత్నించండి

క్రిందివాటిలో ఏవి ఋణ అకరణీయ సంఖ్యలు?

(i) $\frac{-2}{3}$ (ii) $\frac{5}{7}$ (iii) $\frac{3}{-5}$ (iv) 0 (v) $\frac{6}{11}$ (vi) $\frac{-2}{-9}$

8.5 సంఖ్యారేఖపై అకరణీయ సంఖ్యలు

సంఖ్యారేఖపై పూర్ణసంఖ్యలను ఎలా సూచించాలో మీకు తెలుసు. అటువంటి ఒక సంఖ్యారేఖను గీయండి.



0 కి కుడివైపున ఉన్న బిందువులు + గుర్తు ద్వారా సూచించబడతాయి మరియు అవి ధన పూర్ణ సంఖ్యలు. '0' కి ఎడమవైపున ఉన్న బిందువులు – గుర్తు ద్వారా సూచించబడతాయి మరియు అవి ఋణ పూర్ణ సంఖ్యలు. సంఖ్యారేఖపై భిన్నాలను సూచించటం కూడా మీకు తెలుసు. అకరణీయ సంఖ్యలను సంఖ్యారేఖపై ఎలా సూచించవచ్చో చూద్దాం.

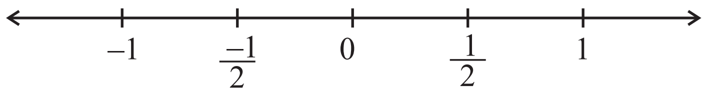
మనం సంఖ్యారేఖపై $-\frac{1}{2}$ సంఖ్యను సూచిద్దాం.

ధన పూర్ణసంఖ్యల విషయంలో చేసినట్లుగా, ధన అకరణీయ సంఖ్యలు '0'కు కుడివైపున మరియు ఋణ అకరణీయ సంఖ్యలు '0' కు ఎడమవైపున గుర్తించ బడతాయి.

మీరు '0' కు ఏ వైపున $-\frac{1}{2}$ ను గుర్తిస్తారు ? ఇది ఋణ అకరణీయ సంఖ్య కావడం వల్ల, '0' కు ఎడమవైపున గుర్తించబడింది.

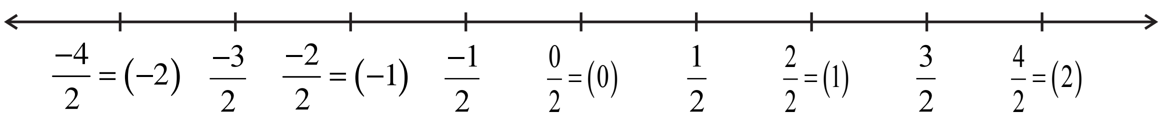
సంఖ్యారేఖపై పూర్ణ సంఖ్యలను గుర్తించేటప్పుడు, వరుస పూర్ణ సంఖ్యలు సమాన దూరాల వద్ద గుర్తించ బడతాయనే విషయం మీకు తెలుసు.'0' నుండి 1 మరియు –1 లు సమాన దూరాలలో ఉంటాయి. ఇలాగే 2 మరియు –2,3 మరియు –3 లు కూడా ఉంటాయి.

In the same way, the rational numbers $\frac{1}{2}$ and $-\frac{1}{2}$ would be at equal distance from 0. We know how to mark the rational number $\frac{1}{2}$. It is marked at a point which is half the distance between 0 and 1. So, $-\frac{1}{2}$ would be marked at a point half the distance between 0 and -1.



We know how to mark $\frac{3}{2}$ on the number line. It is marked on the right of 0 and lies halfway between 1 and 2. Let us now mark $\frac{-3}{2}$ on the number line. It lies on the left of 0 and is at the same distance as $\frac{3}{2}$ from 0.

In decreasing order, we have, $\frac{-1}{2}, \frac{-2}{2}(=-1), \frac{-3}{2}, \frac{-4}{2}(=-2)$. This shows that $\frac{-3}{2}$ lies between – 1 and – 2. Thus, $\frac{-3}{2}$ lies halfway between – 1 and – 2.



Mark $\frac{-5}{2}$ and $\frac{-7}{2}$ in a similar way.

Similarly, $-\frac{1}{3}$ is to the left of zero and at the same distance from zero as $\frac{1}{3}$ is to the right. So as done above, $-\frac{1}{3}$ can be represented on the number line. Once we know how to represent $-\frac{1}{3}$ on the number line, we can go on representing $-\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{5}{3}$ and so on. All other rational numbers with different denominators can be represented in a similar way.

8.6 Rational Numbers in Standard Form

Observe the rational numbers $\frac{3}{5}, \frac{-5}{8}, \frac{2}{7}, \frac{-7}{11}$.

The denominators of these rational numbers are positive integers and 1 is the only common factor between the numerators and denominators. Further, the negative sign occurs only in the numerator.

Such rational numbers are said to be in **standard form**.

ఇదేవిధంగా, అకరణీయ సంఖ్యలు $\frac{1}{2}$ మరియు $-\frac{1}{2}$ లు '0' నుండి సమాన దూరంలో ఉంటాయి. $\frac{1}{2}$ అకరణీయ సంఖ్యను ఎలా గుర్తించాలో తెలుసు. ఇది '0' మరియు 1 ల మధ్య సగం దూరంలో గుర్తించబడింది. కాబట్టి $-\frac{1}{2}$ అనేది '0' మరియు -1 ల మధ్య సగం దూరంలో గుర్తించ బడుతుంది.

$$-1 \quad \frac{-1}{2} \quad 0 \quad \frac{1}{2} \quad 1$$

$\frac{3}{2}$ ను సంఖ్యారేఖపై ఎలా గుర్తించాలో మనకు తెలుసు. ఇది '0' యొక్క కుడివైపున1 మరియు 2 మధ్య సగం దూరంలో గుర్తించ బడింది. మనం ఇప్పుడు $\frac{-3}{2}$ ను సంఖ్యా రేఖ పై గుర్తిద్దాం. ఇది '0' నుండి $\frac{3}{2}$ కు గలదూరం లో '0' కు ఎడమ వైపున ఉంటుంది.

$\frac{-1}{2}, \frac{-2}{2}(=-1), \frac{-3}{2}, \frac{-4}{2}(=-2)$ లు అవరోహణక్రమంలో ఉన్నాయి. దీని నుండి $\frac{-3}{2}$ అనేది -1 మరియు -2. మధ్యఉంటుంది. కాబట్టి $\frac{-3}{2}$ అనేది-1 మరియు-2 మధ్య సమాన దూరంలో ఉంటుంది

$$\frac{-4}{2}=(-2) \quad \frac{-3}{2} \quad \frac{-2}{2}=(-1) \quad \frac{-1}{2} \quad \frac{0}{2}=(0) \quad \frac{1}{2} \quad \frac{2}{2}=(1) \quad \frac{3}{2} \quad \frac{4}{2}=(2)$$

ఇదేవిధంగా $\frac{-5}{2}$ మరియు $\frac{-7}{2}$ లను గుర్తించండి.

ఇదేవిధంగా, $-\frac{1}{3}$ ఇది సున్నాకు ఎడమవైపున ఉంటుంది మరియు $\frac{1}{3}$ సున్నా నుంచి అదే దూరంలో కుడివైపున ఉంటుంది. అందువల్ల పైన చేసినట్లుగా $-\frac{1}{3}$ ను సంఖ్యారేఖపై గుర్తించడం ఎలాగో తెలిస్తే చాలు, మనము $-\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{5}{3}$ మొ॥ వాటిని గుర్తించ వచ్చు. విభిన్న హారాలతో ఉన్న అన్ని ఇతర అకరణీయ సంఖ్యలను ఇదే విధంగా సూచించవచ్చు.

8.6 ప్రామాణిక రూపంలో అకరణీయ సంఖ్యలు

$\frac{3}{5}, \frac{-5}{8}, \frac{2}{7}, \frac{-7}{11}$ అకరణీయ సంఖ్యలను పరిశీలించండి.

ఈ అకరణీయ సంఖ్యల యొక్క హారాలు ధన పూర్ణ సంఖ్యలు మరియు లవములు మరియు హారముల మధ్య ఏకైక ఉమ్మడి కారణాంకం 1. ఇంకా, ఋణ గుర్తు లవములో మాత్రమే కనిపిస్తుంది.

అటువంటి అకరణీయ సంఖ్యలు **ప్రామాణిక రూపంలో** ఉన్నాయని చెబుతారు.

A rational number is said to be in the standard form if its denominator is a positive integer and the numerator and denominator have no common factor other than 1.

If a rational number is not in the standard form, then it can be reduced to the standard form.

Recall that for reducing fractions to their lowest forms, we divided the numerator and the denominator of the fraction by the same non zero positive integer. We shall use the same method for reducing rational numbers to their standard form.

EXAMPLE 1 Reduce $\frac{-45}{30}$ to the standard form.

SOLUTION We have, $\frac{-45}{30} = \frac{-45 \div 3}{30 \div 3} = \frac{-15}{10} = \frac{-15 \div 5}{10 \div 5} = \frac{-3}{2}$

We had to divide twice. First time by 3 and then by 5. This could also be done as

$$\frac{-45}{30} = \frac{-45 \div 15}{30 \div 15} = \frac{-3}{2}$$

In this example, note that 15 is the HCF of 45 and 30.

Thus, to reduce the rational number to its standard form, we divide its numerator and denominator by their HCF ignoring the negative sign, if any. (The reason for ignoring the negative sign will be studied in Higher Classes)

If there is negative sign in the denominator, divide by '– HCF'.

EXAMPLE 2 Reduce to standard form:

(i) $\frac{36}{-24}$ (ii) $\frac{-3}{-15}$

SOLUTION

(i) The HCF of 36 and 24 is 12.

Thus, its standard form would be obtained by dividing by –12.

$$\frac{36}{-24} = \frac{36 \div (-12)}{-24 \div (-12)} = \frac{-3}{2}$$

(ii) The HCF of 3 and 15 is 3.

Thus, $\frac{-3}{-15} = \frac{-3 \div (-2)}{-15 \div (-3)} = \frac{1}{5}$

TRY THESE

Find the standard form of (i) $\frac{-18}{45}$ (ii) $\frac{-12}{18}$

ఒక అకరణీయ సంఖ్య యొక్క హారము ఒక ధన పూర్ణ సంఖ్య మరియు లవహారాలకు 1 తప్ప మరే ఇతర ఉమ్మడి కారణాంకం లేనట్లయితే దానిని ప్రామాణిక రూపంలో ఉన్నట్లుగా పేర్కొంటారు.

ఒకవేళ అకరణీయ సంఖ్య ప్రామాణిక రూపంలో లేనట్లయితే, అప్పుడు దానిని ప్రామాణిక రూపానికి మార్చవచ్చు.

భిన్నాలను వాటి కనిష్ట రూపాలకు తగ్గించడం కొరకు, మనం భిన్నం యొక్క లవమును మరియు హారమును సున్నాకాని ఒకే ధన పూర్ణ సంఖ్య చే భాగించామని గుర్తుకు తెచ్చుకోండి. అకరణీయసంఖ్యలను వాటి ప్రామాణిక రూపానికి తగ్గించడానికి మనం అదే పద్ధతిని ఉపయోగిస్తాము.

ఉదాహరణ 1 $\frac{-45}{30}$ ను ప్రామాణిక రూపంలో రాయండి

సాధన $\frac{-45}{30}=\frac{-45\div 3}{30\div 3}=\frac{-15}{10}=\frac{-15\div 5}{10\div 5}=\frac{-3}{2}$

మనము రెండుసార్లు భాగించాల్సి వచ్చింది. మొదటిసారి 3తో తరువాత 5తో దీనిని ఇలా కూడా చేయవచ్చు.

$$\frac{-45}{30}=\frac{-45\div 15}{30\div 15}=\frac{-3}{2}$$

ఈ ఉదాహరణలో, 15 అనేది 45 మరియు 30 యొక్క గ. సా. భా అని గమనించండి.

అందువల్ల, అకరణీయ సంఖ్యను దాని ప్రామాణిక రూపానికి తగ్గించడానికి, ఋణగుర్తును పట్టించుకోకుండా దాని లవము మరియు హారము లను వాటి గ. సా . భా చే భాగిస్తాము . (ఋణ గుర్తును నిర్లక్ష్యం చేయడానికి గల కారణాన్ని పై తరగతుల్లో అధ్యయనం చేస్తారు)

ఒకవేళ హారములో నెగెటివ్ గుర్తు ఉన్నట్లయితే, '– గ. సా . భా' చేత భాగిస్తాము.

ఉదాహరణ 2 ప్రామాణిక రూపంలోకి మార్చండి:

(i) $\frac{36}{-24}$ (ii) $\frac{-3}{-15}$

సాధన

(i) 36 మరియు 24 యొక్క గ. సా . భా 12.

కాబట్టి, దీని యొక్క ప్రామాణిక రూపం వీటిని –12 చే భాగించడం ద్వారా పొందవచ్చు.

$$\frac{36}{-24}=\frac{36\div(-12)}{-24\div(-12)}=\frac{-3}{2}$$

(ii) 3 మరియు 15 యొక్క గ. సా. భా 3.

కాబట్టి $\frac{-3}{-15}=\frac{-3\div(-2)}{-15\div(-3)}=\frac{1}{5}$

ప్రయత్నించండి

(i) $\frac{-18}{45}$ (ii) $\frac{-12}{18}$ ల ప్రామాణిక రూపం కనుగొనుము

8.7 Comparison of Rational Numbers

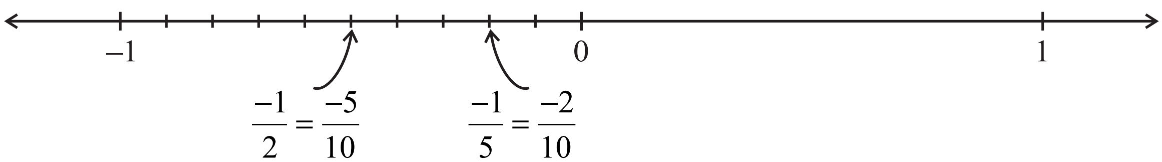
We know how to compare two integers or two fractions and tell which is smaller or which is greater among them. Let us now see how we can compare two rational numbers.

- Two positive rational numbers, like $\frac{2}{3}$ and $\frac{5}{7}$ can be compared as studied earlier in the case of fractions.

- Mary compared two negative rational numbers $-\frac{1}{2}$ and $-\frac{1}{5}$ using number line. She knew that the integer which was on the right side of the other integer, was the greater integer.

For example, 5 is to the right of 2 on the number line and $5 > 2$. The integer -2 is on the right of -5 on the number line and $-2 > -5$.

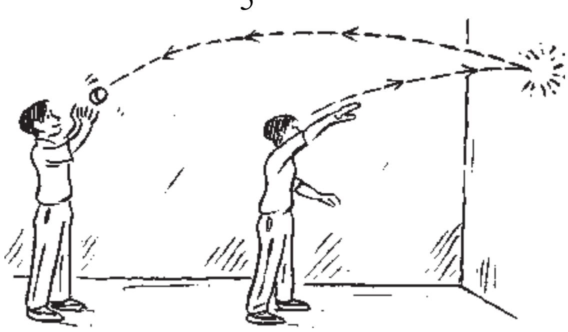
She used this method for rational numbers also. She knew how to mark rational numbers on the number line. She marked $-\frac{1}{2}$ and $-\frac{1}{5}$ as follows:



Has she correctly marked the two points? How and why did she convert $-\frac{1}{2}$ to $-\frac{5}{10}$ and $-\frac{1}{5}$ to $-\frac{2}{10}$? She found that $-\frac{1}{5}$ is to the right of $-\frac{1}{2}$. Thus, $-\frac{1}{5} > -\frac{1}{2}$ or $-\frac{1}{2} < -\frac{1}{5}$.

Can you compare $-\frac{3}{4}$ and $-\frac{2}{3}$? $-\frac{1}{3}$ and $-\frac{1}{5}$?

We know from our study of fractions that $\frac{1}{5} < \frac{1}{2}$. And what did Mary get for $-\frac{1}{2}$ and $-\frac{1}{5}$? Was it not exactly the opposite?



You will find that, $\frac{1}{2} > \frac{1}{5}$ but $-\frac{1}{2} < -\frac{1}{5}$.

Do you observe the same for $-\frac{3}{4}$, $-\frac{2}{3}$ and $-\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{5}$?

Mary remembered that in integers she had studied $4 > 3$ but $-4 < -3$, $5 > 2$ but $-5 < -2$ etc.

8.7 అకరణీయ సంఖ్యల పోలిక

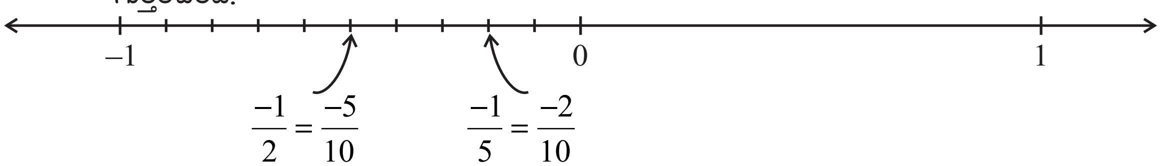
రెండు పూర్ణ సంఖ్యలను లేదా రెండు భిన్నాలను ఎలా పోల్చాలో మనకు తెలుసు మరియు వాటిలో ఏది చిన్నది లేదా ఏది పెద్దది అని చెప్పవచ్చు. ఇప్పుడు మనం రెండు అకరణీయ సంఖ్యలను ఎలా పోల్చవచ్చో చూద్దాం.

- ఇంతకు ముందు భిన్నాలను అధ్యయనం చేసినట్లు గా $\frac{2}{3}, \frac{5}{7}$ వంటి రెండు అకరణీయ సంఖ్యలను పోల్చవచ్చు.

- మేరీ రెండు ఋణ అకరణీయ సంఖ్యలు $-\frac{1}{2}$ మరియు $-\frac{1}{5}$ లను సంఖ్యారేఖను ఉపయోగించి పోల్చింది. ఒక పూర్ణాంకానికి కుడి వైపున ఉన్న పూర్ణాంకం పెద్ద పూర్ణాంకం అని ఆమెకు తెలుసు.

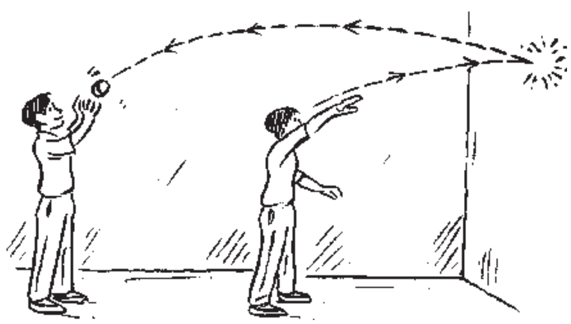
ఉదాహరణకు, 5 అనేది సంఖ్యారేఖపై 2 యొక్క కుడివైపున ఉంది. మరియు $5 > 2$. పూర్ణసంఖ్య -2 సంఖ్య రేఖపై -5 కు కుడివైపున ఉంటుంది మరియు $-2 > -5$.

అకరణీయ సంఖ్యలకు కూడా ఆమె ఈ పద్ధతిని ఉపయోగించింది. అకరణీయ సంఖ్యలను సంఖ్యారేఖ పై ఎలా గుర్తించాలో ఆమెకు తెలుసు. సంఖ్యారేఖపై ఆమె $-\frac{1}{2}$ మరియు $-\frac{1}{5}$ లను ఈ క్రింది విధంగా గుర్తించింది:



రెండు బిందువులను ఆమె సరిగ్గా గుర్తించిందా? ఆమె ఎలా $-\frac{1}{2}$ ను $-\frac{5}{10}$ మరియు $-\frac{1}{5}$ ను $-\frac{2}{10}$ గాను ఎందుకు మార్చింది? ఆమె $-\frac{1}{5}$ అనేది $-\frac{1}{2}$ కు కుడివైపున కనుగొంది. అందువల్ల $-\frac{1}{5} > -\frac{1}{2}$ లేదా $-\frac{1}{2} < -\frac{1}{5}$.

$-\frac{3}{4}$ మరియు $-\frac{2}{3}$, $-\frac{1}{3}$ మరియు $-\frac{1}{5}$ లను పోల్చగలరా? భిన్నాల అధ్యయనం ద్వారా $\frac{1}{5} < \frac{1}{2}$ అని మనకు తెలుసు. $-\frac{1}{2}$ మరియు $-\frac{1}{5}$? నుండి మేరీ ఏమి గమనించింది? ఇది ఖచ్చితంగా వ్యతిరేఖం కాదా?



$\frac{1}{2} > \frac{1}{5}$ కానీ $-\frac{1}{2} < -\frac{1}{5}$ అని మీరు కనుగొంటారు.

$-\frac{3}{4}$, $-\frac{2}{3}$ మరియు $-\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{5}$ లకు కూడా అదే గమనించారా?

తాను చదివిన పూర్ణసంఖ్యల నుండి $4 > 3$ కాని $-4 < -3$, $5 > 2$ కాని $-5 < -2$ మొదలైనవి, మేరీ గుర్తుకు తెచ్చుకుంది.

- The case of pairs of negative rational numbers is similar. *To compare two negative rational numbers, we compare them ignoring their negative signs and then reverse the order.*

  For example, to compare $-\frac{7}{5}$ and $-\frac{5}{3}$, we first compare $\frac{7}{5}$ and $\frac{5}{3}$.

  We get $\frac{7}{5} < \frac{5}{3}$ and conclude that $\frac{-7}{5} > \frac{-5}{3}$.

  Take five more such pairs and compare them.

  Which is greater $-\frac{3}{8}$ or $-\frac{2}{7}$?; $-\frac{4}{3}$ or $-\frac{3}{2}$?

- Comparison of a negative and a positive rational number is obvious. A negative rational number is to the left of zero whereas a positive rational number is to the right of zero on a number line. So, a negative rational number will always be less than a positive rational number.

  Thus, $-\frac{2}{7} < \frac{1}{2}$.

- To compare rational numbers $\frac{-3}{-5}$ and $\frac{-2}{-7}$ reduce them to their standard forms and then compare them.

EXAMPLE 3 Do $\frac{4}{-9}$ and $\frac{-16}{36}$ represent the same rational number?

SOLUTION Yes, because $\frac{4}{-9} = \frac{4\times(-4)}{9\times(-4)} = \frac{-16}{36}$ or $\frac{-16}{36} = \frac{-16+-4}{35\div -4} = \frac{-4}{-9}$.

8.8 RATIONAL NUMBERS BETWEEN TWO RATIONAL NUMBERS

Reshma wanted to count the whole numbers between 3 and 10. From her earlier classes, she knew there would be exactly 6 whole numbers between 3 and 10. Similarly, she wanted to know the total number of integers between –3 and 3. The integers between –3 and 3 are –2, –1, 0, 1, 2. Thus, there are exactly 5 integers between –3 and 3.

Are there any integers between –3 and –2? No, there is no integer between –3 and –2. Between two successive integers the number of integers is 0.

- ఋణ అకరణీయ సంఖ్యల జతల విషయంలో కూడా ఇలాగే ఉంటుంది. *రెండు ఋణ అకరణీయ సంఖ్యలను పోల్చడానికి, వాటి ఋణ సంకేతాలను పట్టించు కోకుండా వాటిని పోల్చి, ఆపై క్రమాన్ని మార్చు చేస్తాము.*

  $-\frac{7}{5}$ మరియు $-\frac{5}{3}$ లను పోల్చడానికి మనము మొదట $\frac{7}{5}$ మరియు $\frac{5}{3}$ లను పోల్చుతాము

  $\frac{7}{5} < \frac{5}{3}$ కావున $\frac{-7}{5} > \frac{-5}{3}$ అని నిర్ణయిస్తాము

  ఇలాంటి మరో ఐదు జతలను తీసుకోండి. మరియు వాటిని పోల్చండి.

  వీటిలో ఏది పెద్దది? $-\frac{3}{8}$ లేదా $-\frac{2}{7}$?; $-\frac{4}{3}$ లేదా $-\frac{3}{2}$?

- ఋణ మరియు ధన అకరణీయ సంఖ్యల యొక్క పోలిక స్పష్టంగా కనిపిస్తుంది. ఒక సంఖ్యారేఖపై ఋణ అకరణీయ సంఖ్య సున్నాకు ఎడమవైపున ఉంటుంది, అయితే ఒక ధన అకరణీయ సంఖ్య సున్నాకు కుడివైపున ఉంటుంది. కాబట్టి, ఋణ అకరణీయ సంఖ్య ఎల్లప్పుడూ ధన అకరణీయ సంఖ్య కంటే తక్కువగా ఉంటుంది.

  కావున, $-\frac{2}{7} < \frac{1}{2}$.

- $\frac{-3}{-5}$ మరియు $\frac{-2}{-7}$ అకరణీయ సంఖ్యలను పోల్చడానికివాటిని వాటి యొక్క ప్రామాణిక రూపాలకు మార్చండి మరియు అప్పుడు వాటిని పోల్చండి.

ఉదాహరణ 3 $\frac{4}{-9}$ మరియు $\frac{-16}{36}$ ఒకే అకరణీయ సంఖ్యను సూచిస్తాయా?

సాధన అవును, ఎందుకంటే $\frac{4}{-9} = \frac{4\times(-4)}{9\times(-4)} = \frac{-16}{36}$ లేదా $\frac{-16}{36} = \frac{-16 + -4}{35 \div -4} = \frac{-4}{-9}$.

8.8 రెండు అకరణీయ సంఖ్యల మధ్య అకరణీయ సంఖ్యలు

రేష్మా 3 మరియు 10 ల మధ్య మొత్తం పూర్ణాంకాలను లెక్కించాలనుకుంది. ఆమె మునుపటి తరగతుల నుండి, 3 మరియు 10 మధ్య ఖచ్చితంగా 6 పూర్ణాంకములు ఉంటాయని ఆమెకు తెలుసు. ఇదేవిధంగా, ఆమె – 3 మరియు 3 మధ్య మొత్తం పూర్ణ సంఖ్యలను తెలుసుకోవాలనుకుంది.– 3 మరియు 3 మధ్య ఉండే పూర్ణ సంఖ్యలు – 2, – 1, 0, 1, 2.అందువల్ల, – 3 మరియు 3 లమధ్య ఖచ్చితంగా 5 పూర్ణ సంఖ్యలు ఉన్నాయి.

– 3 మరియు – 2 మధ్య ఏదైనా పూర్ణ సంఖ్యలు ఉన్నాయా? లేవు, వాటి మధ్య పూర్ణసంఖ్యలు లేవు. రెండు వరుస పూర్ణసంఖ్యల మధ్య పూర్ణసంఖ్యల సంఖ్య ‘0’.

Thus, we find that number of integers between two integers are limited (finite). Will the same happen in the case of rational numbers also?

Reshma took two rational numbers $\frac{-3}{5}$ and $\frac{-1}{3}$.

She converted them to rational numbers with same denominators.

So $\frac{-3}{5} = \frac{-9}{15}$ and $\frac{-1}{3} = \frac{-5}{15}$

We have $\frac{-9}{15} < \frac{-8}{15} < \frac{-7}{15} < \frac{-6}{15} < \frac{-5}{15}$ or $\frac{-3}{5} < \frac{-8}{15} < \frac{-7}{15} < \frac{-6}{15} < \frac{-1}{3}$

She could find rational numbers $\frac{-8}{15} < \frac{-7}{15} < \frac{-6}{15}$ between $\frac{-3}{5}$ and $\frac{-1}{3}$.

Are the numbers $\frac{-8}{15}, \frac{-7}{15}, \frac{-6}{15}$ the only rational numbers between $-\frac{3}{5}$ and $-\frac{1}{3}$?

We have $\frac{-3}{5} < \frac{-18}{30}$ and $\frac{-8}{15} < \frac{-16}{30}$

And $\frac{-18}{30} < \frac{-17}{30} < \frac{-16}{30}$. i.e., $\frac{-3}{5} < \frac{-17}{30} < \frac{-8}{15}$

Hence $\frac{-3}{5} < \frac{-17}{30} < \frac{-8}{15} < \frac{-7}{15} < \frac{-6}{15} < \frac{-1}{3}$

So, we could find one more rational number between $\frac{-3}{5}$ and $\frac{-1}{3}$.

By using this method, you can insert as many rational numbers as you want between two different rational numbers.

For example, $\frac{-3}{5} = \frac{-3\times 30}{5\times 30} = \frac{-90}{150}$ and $\frac{-1}{3} = \frac{-1\times 50}{3\times 50} = \frac{-50}{150}$

We get 39 rational numbers $\left(\frac{-89}{150}, \ldots, \frac{-51}{150}\right)$ between $\frac{-90}{150}$ and $\frac{-50}{150}$

i.e., between $\frac{-3}{5}$ and $\frac{-1}{3}$. You will find that the list is unending.

TRY THESE

Find five rational numbers between $\frac{-5}{7}$ and $\frac{-3}{8}$.

Can you list five rational numbers between $\frac{-5}{3}$ and $\frac{-8}{7}$?

We can find unlimited number of rational numbers between any two rational numbers.

అందువల్ల, రెండు పూర్ణసంఖ్యల మధ్య పూర్ణసంఖ్యల సంఖ్య పరిమితం అని మనం కనుగొంటాము. అకరణీయ సంఖ్యల విషయంలో కూడా ఇదే జరుగుతుందా?

రేష్మ రెండు అకరణీయ సంఖ్యలు $\frac{-3}{5}$ మరియు $\frac{-1}{3}$ లను తీసుకుంది.

ఆమె వాటిని ఒకే హారము గల అకరణీయ సంఖ్యలుగా మార్చింది.

అందువల్ల $\frac{-3}{5} = \frac{-9}{15}$ మరియు $\frac{-1}{3} = \frac{-5}{15}$

$$\frac{-9}{15} < \frac{-8}{15} < \frac{-7}{15} < \frac{-6}{15} < \frac{-5}{15} \text{ లేదా } \frac{-3}{5} < \frac{-8}{15} < \frac{-7}{15} < \frac{-6}{15} < \frac{-1}{3}$$

ఆమె $-\frac{3}{5}$ మరియు $-\frac{1}{3}$ ల మధ్య $\frac{-8}{15} < \frac{-7}{15} < \frac{-6}{15}$ అకరణీయ సంఖ్యలను కనుగొంది.

$-\frac{3}{5}$ మరియు $-\frac{1}{3}$ ల మధ్య $\frac{-8}{15}, \frac{-7}{15}, \frac{-6}{15}$ అకరణీయ సంఖ్యలు మాత్రమే గలవా?

మనకు $\frac{-3}{5} < \frac{-18}{30}$ మరియు $\frac{-8}{15} < \frac{-16}{30}$

మరియు $\frac{-18}{30} < \frac{-17}{30} < \frac{-16}{30}$ అనగా, $\frac{-3}{5} < \frac{-17}{30} < \frac{-8}{15}$

అందువల్ల, $\frac{-3}{5} < \frac{-17}{30} < \frac{-8}{15} < \frac{-7}{15} < \frac{-6}{15} < \frac{-1}{3}$

కాబట్టి, మనం $\frac{-3}{5}$ మరియు $\frac{-1}{3}$.

ఈ పద్ధతిని ఉపయోగించడం ద్వారా, రెండు విభిన్న అకరణీయ సంఖ్యల మధ్య మీకు కావలసినన్ని అకరణీయ సంఖ్యలు ఉండవచ్చు.

ఉదాహరణకి, $\frac{-3}{5} = \frac{-3\times 30}{5\times 30} = \frac{-90}{150}$ మరియు $\frac{-1}{3} = \frac{-1\times 50}{3\times 50} = \frac{-50}{150}$

మనకు $\frac{-90}{150}$ మరియు $\frac{-50}{150}$ ల మధ్య, అంటే $\frac{-3}{5}$ మరియు $\frac{-1}{3}$ ల మధ్య 39 అకరణీయసంఖ్యలు $\left(\frac{-89}{150}, \ldots, \frac{-51}{150}\right)$ ఉంటాయి. జాబితా అంతంకాదని మీరు కనుగొంటారు.

మీరు $\frac{-5}{3}$ మరియు $\frac{-8}{7}$ ల మధ్య ఐదు అకరణీయ సంఖ్యలను రాయగలరా?

ఏదైనా రెండు అకరణీయ సంఖ్యల మధ్య అపరిమితమైన అకరణీయ సంఖ్యలను మనం కనుగొనవచ్చు.

ప్రయత్నించండి

$\frac{-5}{7}$ మరియు $\frac{-3}{8}$ ల మధ్య ఐదు అకరణీయ సంఖ్యలను కనుగొనండి?.

Example 4 List three rational numbers between – 2 and – 1.

Solution Let us write –1 and –2 as rational numbers with denominator 5. (Why?)

We have, $-1 = \frac{-5}{5}$ and $-2 = \frac{-10}{5}$

So, $\frac{-10}{5} < \frac{-9}{5} < \frac{-8}{5} < \frac{-7}{5} < \frac{-6}{5} < \frac{-5}{5}$ or $-2 < \frac{-9}{5} < \frac{-8}{5} < \frac{-7}{5} < \frac{-6}{5} < -1$

The three rational numbers between –2 and –1 would be, $\frac{-9}{5}, \frac{-8}{5}, \frac{-7}{5}$

(You can take any three of $\frac{-9}{5}, \frac{-8}{5}, \frac{-7}{5}, \frac{-6}{5}$)

Example 5 Write four more numbers in the following pattern:

$$\frac{-1}{3}, \frac{-2}{6}, \frac{-3}{9}, \frac{-4}{12}, \ldots$$

Solution We have,

$$\frac{-2}{6} = \frac{-1\times 2}{3\times 2}, \frac{-3}{9} = \frac{-1\times 3}{3\times 3}, \frac{-4}{12} = \frac{-1\times 4}{3\times 4}$$

or $$\frac{-1\times 1}{3\times 1} = \frac{-1}{3}, \frac{-1\times 2}{3\times 2} = \frac{-2}{6}, \frac{-1\times 3}{3\times 3} = \frac{-3}{9}, \frac{-1\times 4}{3\times 4} = \frac{-4}{12}$$

Thus, we observe a pattern in these numbers.

The other numbers would be $\frac{-1\times 5}{3\times 5} = \frac{-5}{15}, \frac{-1\times 6}{3\times 6} = \frac{-6}{18}, \frac{-1\times 7}{3\times 7} = \frac{-7}{21}$.

Exercise 8.1

1. List five rational numbers between:

   (i) –1 and 0 (ii) –2 and –1 (iii) $\frac{-4}{5}$ and $\frac{-2}{3}$ (iv) $-\frac{1}{2}$ and $\frac{2}{3}$

2. Write four more rational numbers in each of the following patterns:

   (i) $\frac{-3}{5}, \frac{-6}{10}, \frac{-9}{15}, \frac{-12}{20}, \ldots\ldots$ (ii) $\frac{-1}{4}, \frac{-2}{8}, \frac{-3}{12}, \ldots\ldots$

ఉదాహరణ 4 – 2 మరియు – 1 ల మధ్య మూడు అకరణీయ సంఖ్యలను రాయండి.

సాధన –1 మరియు –2 లను 5 హారముగా గల అకరణీయ సంఖ్యలుగా రాయుము. (ఎందుకు?)

మనకు, $-1 = \frac{-5}{5}$ మరియు $-2 = \frac{-10}{5}$

అందువల్ల, $\frac{-10}{5} < \frac{-9}{5} < \frac{-8}{5} < \frac{-7}{5} < \frac{-6}{5} < \frac{-5}{5}$ or $-2 < \frac{-9}{5} < \frac{-8}{5} < \frac{-7}{5} < \frac{-6}{5} < -1$

–2 మరియు –1 ల మధ్య మూడు అకరణీయ సంఖ్యలు $\frac{-9}{5}, \frac{-8}{5}, \frac{-7}{5}$

($\frac{-9}{5}, \frac{-8}{5}, \frac{-7}{5}, \frac{-6}{5}$ మీరు వీటిలో ఏవైనా మూడింటిని తీసుకోవచ్చు).

ఉదాహరణ 5 Wకింది వరుసలో మరో నాలుగు సంఖ్యలను రాయండి :

$\frac{-1}{3}, \frac{-2}{6}, \frac{-3}{9}, \frac{-4}{12}, \ldots$

సాధన మనకు,

$$\frac{-2}{6} = \frac{-1\times 2}{3\times 2}, \frac{-3}{9} = \frac{-1\times 3}{3\times 3}, \frac{-4}{12} = \frac{-1\times 4}{3\times 4}$$

లేదా, $$\frac{-1\times 1}{3\times 1} = \frac{-1}{3}, \frac{-1\times 2}{3\times 2} = \frac{-2}{6}, \frac{-1\times 3}{3\times 3} = \frac{-3}{9}, \frac{-1\times 4}{3\times 4} = \frac{-4}{12}$$

కావున, ఈ సంఖ్యలలో ఒక క్రమాన్ని మనం గమనించవచ్చు.

ఇతర సంఖ్యలు ఇలా ఉంటాయి $\frac{-1\times 5}{3\times 5} = \frac{-5}{15}, \frac{-1\times 6}{3\times 6} = \frac{-6}{18}, \frac{-1\times 7}{3\times 7} = \frac{-7}{21}$.

అభ్యాసం 8. 1

1. కింది వాటి మధ్య ఐదు అకరణీయ సంఖ్యలను రాయండి:

(i) –1 మరియు 0 (ii) –2 మరియు –1 (iii) $\frac{-4}{5}$ మరియు $\frac{-2}{3}$ (iv) $-\frac{1}{2}$ మరియు $-\frac{2}{3}$

2. కింది ప్రతి నమూనాలో మరో నాలుగు అకరణీయ సంఖ్యలను రాయండి.:

(i) $\frac{-3}{5}, \frac{-6}{10}, \frac{-9}{15}, \frac{-12}{20}, \ldots\ldots$ (ii) $\frac{-1}{4}, \frac{-2}{8}, \frac{-3}{12}, \ldots\ldots$

(iii) $\frac{-1}{6}, \frac{2}{-12}, \frac{3}{-18}, \frac{4}{-24}, \ldots\ldots$ (iv) $\frac{-2}{3}, \frac{2}{-3}, \frac{4}{-6}, \frac{6}{-9}, \ldots\ldots$

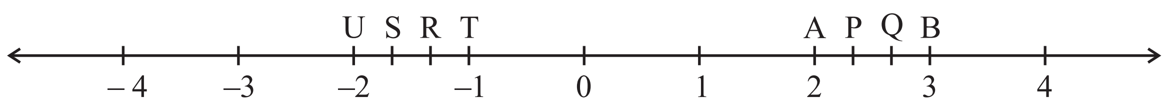
3. Give four rational numbers equivalent to:

(i) $\frac{-2}{7}$ (ii) $\frac{5}{-3}$ (iii) $\frac{4}{9}$

4. Draw the number line and represent the following rational numbers on it:

(i) $\frac{3}{4}$ (ii) $\frac{-5}{8}$ (iii) $\frac{-7}{4}$ (iv) $\frac{7}{8}$

5. The points P, Q, R, S, T, U, A and B on the number line are such that, TR = RS = SU and AP = PQ = QB. Name the rational numbers represented by P, Q, R and S.



6. Which of the following pairs represent the same rational number?

(i) $\frac{-7}{21}$ and $\frac{3}{9}$ (ii) $\frac{-16}{20}$ and $\frac{20}{-25}$ (iii) $\frac{-2}{-3}$ and $\frac{2}{3}$

(iv) $\frac{-3}{5}$ and $\frac{-12}{20}$ (v) $\frac{8}{-5}$ and $\frac{-24}{15}$ (vi) $\frac{1}{3}$ and $\frac{-1}{9}$

(vii) $\frac{-5}{-9}$ and $\frac{5}{-9}$

7. Rewrite the following rational numbers in the simplest form:

(i) $\frac{-8}{6}$ (ii) $\frac{25}{45}$ (iii) $\frac{-44}{72}$ (iv) $\frac{-8}{10}$

8. Fill in the boxes with the correct symbol out of >, <, and =.

(i) $\frac{-5}{7} \square \frac{2}{3}$ (ii) $\frac{-4}{5} \square \frac{-5}{7}$ (iii) $\frac{-7}{8} \square \frac{14}{-16}$

(iv) $\frac{-8}{5} \square \frac{-7}{4}$ (v) $\frac{1}{-3} \square \frac{-1}{4}$ (vi) $\frac{5}{-11} \square \frac{-5}{11}$

(vii) $0 \square \frac{-7}{6}$

(iii) $\frac{-1}{6}, \frac{2}{-12}, \frac{3}{-18}, \frac{4}{-24}, \ldots\ldots$ (iv) $\frac{-2}{3}, \frac{2}{-3}, \frac{4}{-6}, \frac{6}{-9}, \ldots\ldots$

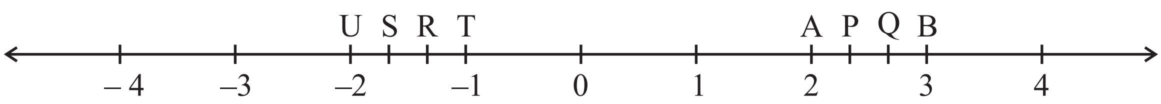
3. వీటికి సమానమైన నాలుగు అకరణీయ సంఖ్యలను ఇవ్వండి.:

(i) $\frac{-2}{7}$ (ii) $\frac{5}{-3}$ (iii) $\frac{4}{9}$

4. సంఖ్యారేఖ గీయండి మరియు దానిపై కింది అకరణీయ సంఖ్యలను గుర్తించండి.

(i) $\frac{3}{4}$ (ii) $\frac{-5}{8}$ (iii) $\frac{-7}{4}$ (iv) $\frac{7}{8}$

5. బిందువులు P, Q, R, S, T, U, A మరియు B లు, TR = RS = SU మరియు AP = PQ = QB అగునట్లు సంఖ్యారేఖపై ఉన్నాయి. P, Q, R మరియు S లు సూచించే అకరణీయ సంఖ్యలను పేర్కొనండి.



6. కిందివాటిలో ఒకే అకరణీయ సంఖ్యను సూచించే జత ఏది?

(i) $\frac{-7}{21}$ మరియు $\frac{3}{9}$ (ii) $\frac{-16}{20}$ మరియు $\frac{20}{-25}$ (iii) $\frac{-2}{-3}$ మరియు $\frac{2}{3}$

(iv) $\frac{-3}{5}$ మరియు $\frac{-12}{20}$ (v) $\frac{8}{-5}$ మరియు $\frac{-24}{15}$ (vi) $\frac{1}{3}$ మరియు $\frac{-1}{9}$

(vii) $\frac{-5}{-9}$ మరియు $\frac{5}{-9}$

7. కింది అకరణీయ సంఖ్యలను ప్రామాణిక రూపం లో రాయండి.:

(i) $\frac{-8}{6}$ (ii) $\frac{25}{45}$ (iii) $\frac{-44}{72}$ (iv) $\frac{-8}{10}$

8. బాక్సులను >, <, మరియు = సరైన గుర్తుతో నింపండి.

(i) $\frac{-5}{7} \boxed{} \frac{2}{3}$ (ii) $\frac{-4}{5} \boxed{} \frac{-5}{7}$ (iii) $\frac{-7}{8} \boxed{} \frac{14}{-16}$

(iv) $\frac{-8}{5} \boxed{} \frac{-7}{4}$ (v) $\frac{1}{-3} \boxed{} \frac{-1}{4}$ (vi) $\frac{5}{-11} \boxed{} \frac{-5}{11}$

(vii) $0 \boxed{} \frac{-7}{6}$

9. Which is greater in each of the following:

(i) $\frac{2}{3}, \frac{5}{2}$ (ii) $\frac{-5}{6}, \frac{-4}{3}$ (iii) $\frac{-3}{4}, \frac{2}{-3}$

(iv) $\frac{-1}{4}, \frac{1}{4}$ (v) $-3\frac{2}{7}, -3\frac{4}{5}$

10. Write the following rational numbers in ascending order:

(i) $\frac{-3}{5}, \frac{-2}{5}, \frac{-1}{5}$ (ii) $\frac{-1}{3}, \frac{-2}{9}, \frac{-4}{3}$ (iii) $\frac{-3}{7}, \frac{-3}{2}, \frac{-3}{4}$

8.9 Operations on Rational Numbers

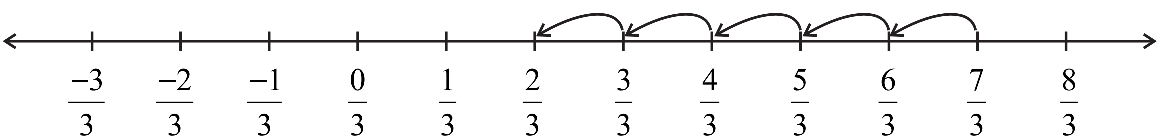
You know how to add, subtract, multiply and divide integers as well as fractions. Let us now study these basic operations on rational numbers.

8.9.1 Addition

- Let us add two rational numbers with same denominators, say $\frac{7}{3}$ and $\frac{-5}{3}$.

We find $\frac{7}{3} + \left(\frac{-5}{3}\right)$

On the number line, we have:



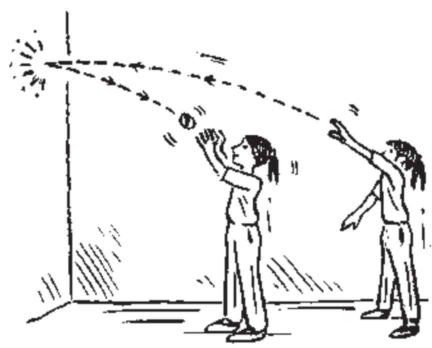
The distance between two consecutive points is $\frac{1}{3}$. So adding $\frac{-5}{3}$ to $\frac{7}{3}$ will mean, moving to the left of $\frac{7}{3}$, making 5 jumps. Where do we reach? We reach at $\frac{2}{3}$.

So, $\frac{7}{3} + \left(\frac{-5}{3}\right) = \frac{2}{3}$.

Let us now try this way:

$$\frac{7}{3} + \frac{(-5)}{3} = \frac{7 + (-5)}{3} = \frac{2}{3}$$

We get the same answer.



Find $\frac{6}{5} + \frac{(-2)}{5}$, $\frac{3}{7} + \frac{(-5)}{7}$ in both ways and check if you get the same answers.

9. కింది వాటిలో ఏది పెద్దది?

(i) $\frac{2}{3}, \frac{5}{2}$ (ii) $\frac{-5}{6}, \frac{-4}{3}$ (iii) $\frac{-3}{4}, \frac{2}{-3}$

(iv) $\frac{-1}{4}, \frac{1}{4}$ (v) $-3\frac{2}{7}, -3\frac{4}{5}$

10. కింది అకరణీయ సంఖ్యలను ఆరోహణ క్రమంలో రాయండి:

(i) $\frac{-3}{5}, \frac{-2}{5}, \frac{-1}{5}$ (ii) $\frac{-1}{3}, \frac{-2}{9}, \frac{-4}{3}$ (iii) $\frac{-3}{7}, \frac{-3}{2}, \frac{-3}{4}$

8.9 అకరణీయ సంఖ్యలపై పరిక్రియలు

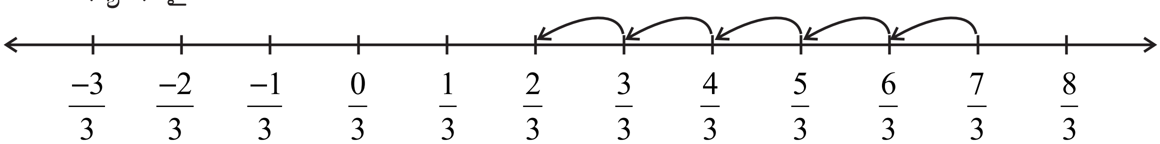
పూర్ణ సంఖ్యలను అదేవిధంగా భిన్నాలను ఎలా కూడాలో, తీసివేయాలో, గుణించాలో మరియు భాగించాలో మీకు తెలుసు. అకరణీయ సంఖ్యలపై ఈ ప్రాథమిక పరిక్రియలను మనం ఇప్పుడు అధ్యయనం చేద్దాం.

8.9.1 సంకలనం

- ఒకే హారములతో గల రెండు అకరణీయ సంఖ్యలను $\frac{7}{3}$ మరియు $\frac{-5}{3}$.

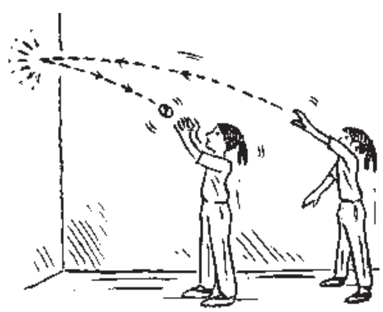
$\frac{7}{3} + \left(\frac{-5}{3}\right)$ ను

సంఖ్యారేఖ పై కనుగొందాం:



రెండు వరస బిందువుల మధ్య దూరం $\frac{1}{3}$. కాబట్టి $\frac{-5}{3}$ ను $\frac{7}{3}$ కూ కలపడం. అంటే $\frac{7}{3}$, ఎడమ వైపుకు 5 స్థానాలు కదులుతుంది. మనం ఎక్కడికి చేరుకుంటాం? మనం $\frac{2}{3}$ వద్దకు చేరుకుంటాం.

అందువల్ల, $\frac{7}{3} + \left(\frac{-5}{3}\right) = \frac{2}{3}$.



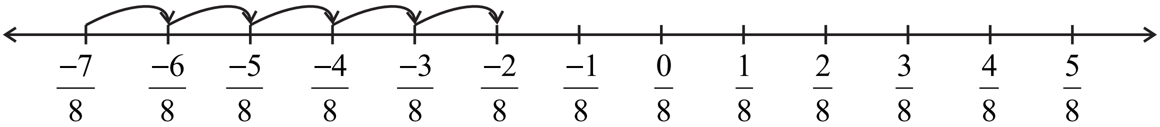
మనం ఇప్పుడు ఈ విధంగా ప్రయత్నిద్దాం:

$$\frac{7}{3} + \frac{(-5)}{3} = \frac{7+(-5)}{3} = \frac{2}{3}$$

మనకు అదే సమాధానం వస్తుంది.

$\frac{6}{5} + \frac{(-2)}{5}$, $\frac{3}{7} + \frac{(-5)}{7}$ లను రెండు పద్ధతులలో కనుగొనండి. రెండు విధాలుగా మీరు ఒకే సమాధానాలు పొందుతున్నారా అని సరిచూడండి.

Similarly, $\frac{-7}{8} + \frac{5}{8}$ would be



What do you get?

Also, $\frac{-7}{8} + \frac{5}{8} = \frac{-7+5}{8} = ?$ Are the two values same?

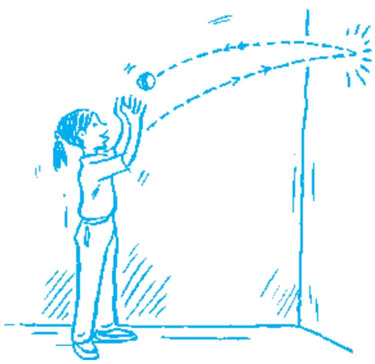
TRY THESE

Find: $\frac{-13}{7} + \frac{6}{7}$, $\frac{19}{5} + \left(\frac{-7}{5}\right)$

So, we find that *while adding rational numbers with same denominators, we add the numerators keeping the denominators same.*

Thus, $\frac{-11}{5} + \frac{7}{5} = \frac{-11+7}{5} = \frac{-4}{5}$

- How do we add rational numbers with different denominators? As in the case of fractions, we first find the LCM of the two denominators. Then, we find the equivalent rational numbers of the given rational numbers with this LCM as the denominator. Then, add the two rational numbers.



For example, let us add $\frac{-7}{5}$ and $\frac{-2}{3}$.

LCM of 5 and 3 is 15.

So, $\frac{-7}{5} = \frac{-21}{15}$ and $\frac{-2}{3} = \frac{-10}{15}$

Thus, $\frac{-7}{5} + \frac{(-2)}{3} = \frac{-21}{15} + \frac{(-10)}{15} = \frac{-31}{15}$

TRY THESE

Find:

(i) $\frac{-3}{7} + \frac{2}{3}$

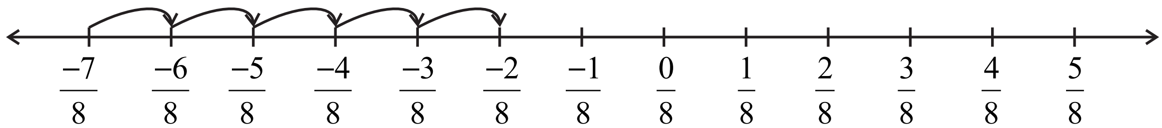
(ii) $\frac{-5}{6} + \frac{-3}{11}$

Additive Inverse

What will be $\frac{-4}{7} + \frac{4}{7} = ?$

$\frac{-4}{7} + \frac{4}{7} = \frac{-4+4}{7} = 0$. Also, $\frac{4}{7} + \left(\frac{-4}{7}\right) = 0$.

అదే విధంగా, $\frac{-7}{8}+\frac{5}{8}$



మీకు ఏమి వచ్చింది?

అంతే కాకుండా, $\frac{-7}{8}+\frac{5}{8}=\frac{-7+5}{8}=$? రెండు విలువలు సమానమేనా?

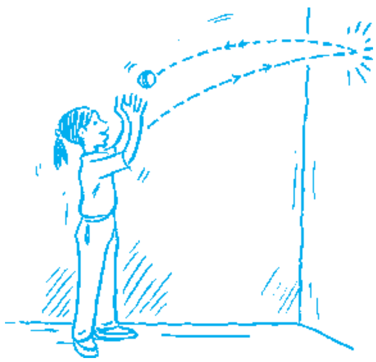
ప్రయత్నించండి

కనుగొనుము: $\frac{-13}{7}+\frac{6}{7}$, $\frac{19}{5}+\left(\frac{-7}{5}\right)$

కాబట్టి, ఒకే హారములతోగల అకరణీయ సంఖ్యలను సంకలనం చేసేటప్పుడు, హారములను అలాగే విధంగా ఉంచి లవములను సంకలనం చేస్తాము.

అందుకని, $\frac{-11}{5}+\frac{7}{5}=\frac{-11+7}{5}=\frac{-4}{5}$

- విభిన్న హారములతో అకరణీయ సంఖ్యలను మనం ఏవిధంగా కూడగలం? భిన్నాల విషయంలో ఉండే విధంగా, మనం మొదట రెండు హారముల యొక్క క. సా. గు (LCM)ని కనుగొంటాము. తరువాత ఈ క. సా. గు (LCM) హారం గా ఇవ్వబడిన అకరణీయ సంఖ్యల యొక్క సమానమైన అకరణీయ సంఖ్యలను తీసుకొంటాం. తరువాత, రెండు అకరణీయ సంఖ్యలను సంకలనం చేస్తాము. మరియు



ఉదాహరణకు, మనం $\frac{-7}{5}$ మరియు $\frac{-2}{3}$ లను సంకలనం చేద్దాము.

5 మరియు 3 క. సా. గు 15

కాబట్టి, $\frac{-7}{5}=\frac{-21}{15}$ మరియు $\frac{-2}{3}=\frac{-10}{15}$

కాబట్టి, $\frac{-7}{5}+\frac{(-2)}{3}=\frac{-21}{15}+\frac{(-10)}{15}=\frac{-31}{15}$

ప్రయత్నించండి

కనుగొనండి:

(i) $\frac{-3}{7}+\frac{2}{3}$

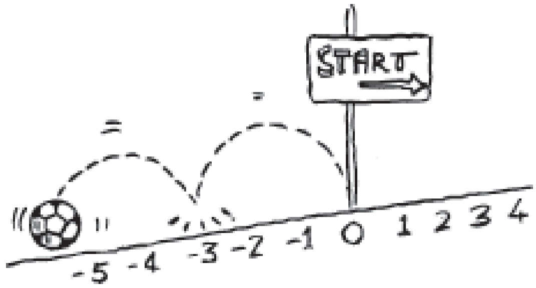
(ii) $\frac{-5}{6}+\frac{-3}{11}$

సంకలన విలోమం

$\frac{-4}{7}+\frac{4}{7}$ లను సంకలనంచేస్తే ఏమి వస్తుంది?

$\frac{-4}{7}+\frac{4}{7}=\frac{-4+4}{7}=0$. అలాగే, $\frac{4}{7}+\left(\frac{-4}{7}\right)=0$.

Similarly, $\frac{-2}{3}+\frac{2}{3}=0=\frac{2}{3}+\left(\frac{-2}{3}\right)$.



In the case of integers, we call – 2 as the additive inverse of 2 and 2 as the additive inverse of – 2.

For rational numbers also, we call $\frac{-4}{7}$ as the **additive inverse** of $\frac{4}{7}$ and $\frac{4}{7}$ as the additive inverse of $\frac{-4}{7}$. Similarly, $\frac{-2}{3}$ is the additive inverse of $\frac{2}{3}$ and $\frac{2}{3}$ is the additive inverse of $\frac{-2}{3}$.

TRY THESE

What will be the additive inverse of $\frac{-3}{9}$?, $\frac{-9}{11}$?, $\frac{5}{7}$?

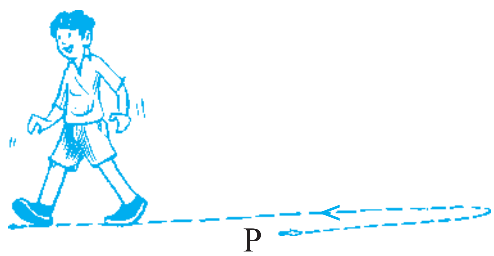
EXAMPLE 6 Satpal walks $\frac{2}{3}$ km from a place P, towards east and then from there $1\frac{5}{7}$ km towards west. Where will he be now from P?

SOLUTION Let us denote the distance travelled towards east by positive sign. So, the distances towards west would be denoted by negative sign.

Thus, distance of Satpal from the point P would be

$$\frac{2}{3}+\left(-1\frac{5}{7}\right)=\frac{2}{3}+\frac{(-12)}{7}=\frac{2\times 7}{3\times 7}+\frac{(-12)\times 3}{7\times 3}$$

$$=\frac{14-36}{21}=\frac{-22}{21}=-1\frac{1}{21}$$



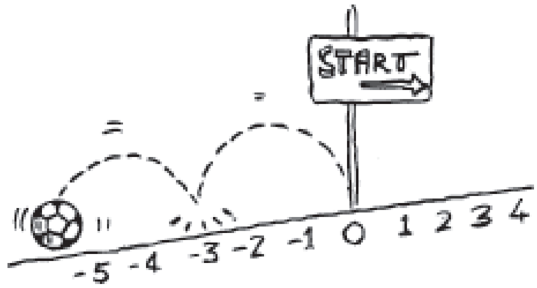
Since it is negative, it means Satpal is at a distance $1\frac{1}{21}$ km towards west of P.

8.9.2 Subtraction

Savita found the difference of two rational numbers $\frac{5}{7}$ and $\frac{3}{8}$ in this way:

$$\frac{5}{7}-\frac{3}{8}=\frac{40-21}{56}=\frac{19}{56}$$

Farida knew that for two integers a and b she could write $a-b=a+(-b)$



ఇదేవిధంగా, $\frac{-2}{3}+\frac{2}{3}=0=\frac{2}{3}+\left(\frac{-2}{3}\right)$.

పూర్ణసంఖ్యల విషయంలో, మనం – 2 అనేది 2 యొక్క సంకలన విలోమంగా పిలుస్తాము. మరియు 2 అనేది –2. యొక్క సంకలనవిలోమం.

అకరణీయ సంఖ్యలకు కూడా, మనం $\frac{-4}{7}$ ను $\frac{4}{7}$ యొక్క సంకలన విలోమంగా పిలుస్తాము మరియు $\frac{4}{7}$ అనేది $\frac{-4}{7}$ యొక్క సంకలన విలోమం. $\frac{-2}{3}$ అనేది $\frac{2}{3}$ యొక్క సంకలన విలోమం మరియు $\frac{2}{3}$ అనేది $\frac{-2}{3}$ యొక్క సంకలన విలోమం.

ప్రయత్నించండి

$\frac{-3}{9}?, \frac{-9}{11}?, \frac{5}{7}?$ ల సంకలన విలోమాలు ఏవి?

ఉదాహరణ 6 సత్పాల్ ఒక ప్రదేశం P నుంచి $\frac{2}{3}$ కి.మీ. తూర్పు వైపు నడిచాడు, తరువాత అక్కడ నుండి $1\frac{5}{7}$ కి.మీ. పడమర వైపు నడిచాడు. అతడు ఇప్పుడు P నుంచి ఎక్కడ ఉంటాడు?

సాధన తూర్పు వైపు ప్రయాణించిన దూరాన్ని ధన గుర్తు ద్వారా సూచిస్తాం. కాబట్టి, పశ్చిమం వైపు దూరం ఋణ గుర్తు ద్వారా సూచించబడుతుంది.

కాబట్టి, P బిందువు నుంచి సత్పాల్ యొక్క దూరం

$$\frac{2}{3}+\left(-1\frac{5}{7}\right)=\frac{2}{3}+\frac{(-12)}{7}=\frac{2\times7}{3\times7}+\frac{(-12)\times3}{7\times3}$$

$$=\frac{14-36}{21}=\frac{-22}{21}=-1\frac{1}{21}$$

ఇది ఋణ సంఖ్య కనుక, సత్పాల్ P నుండి పశ్చిమం వైపు $1\frac{1}{21}$ కి.మీ. దూరంగా ఉన్నాడని అర్థం.

8.9.2 వ్యవకలనం

సవిత రెండు అకరణీయ సంఖ్యలు $\frac{5}{7}$ మరియు $\frac{3}{8}$ భేధాన్ని ఈ విధంగా కనుగొంది:

$$\frac{5}{7}-\frac{3}{8}=\frac{40-21}{56}=\frac{19}{56}$$

ఫరీదాకు a మరియు b అనే రెండు పూర్ణసంఖ్యలకు $a-b=a+(-b)$ అని తాను వ్రాయగలనని తెలుసు.

She tried this for rational numbers also and found, $\frac{5}{7}-\frac{3}{8}=\frac{5}{7}+\frac{(-3)}{8}=\frac{19}{56}$.

Both obtained the same difference.

Try to find $\frac{7}{8}-\frac{5}{9}$, $\frac{3}{11}-\frac{8}{7}$ in both ways. Did you get the same answer?

So, we say *while subtracting two rational numbers, we add the additive inverse of the rational number that is being subtracted, to the other rational number.*

Thus, $1\frac{2}{3}-2\frac{4}{5}=\frac{5}{3}-\frac{14}{5}=\frac{5}{3}+\text{ additive inverse of }\frac{14}{5}=\frac{5}{3}+\frac{(-14)}{5}$

$=\frac{-17}{15}=-1\frac{2}{15}$.

TRY THESE

Find:

(i) $\frac{7}{9}-\frac{2}{5}$ (ii) $2\frac{1}{5}-\frac{(-1)}{3}$

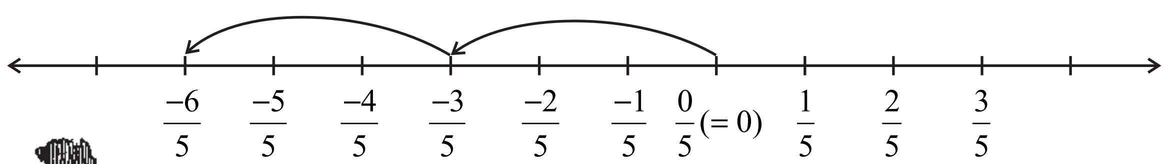
What will be $\frac{2}{7}-\left(\frac{-5}{6}\right)$?

$$\frac{2}{7}-\left(\frac{-5}{6}\right)=\frac{2}{7}+\text{ additive inverse of }\left(\frac{-5}{6}\right)=\frac{2}{7}+\frac{5}{6}=\frac{47}{42}=1\frac{5}{42}$$

8.9.3 Multiplication

Let us multiply the rational number $\frac{-3}{5}$ by 2, i.e., we find $\frac{-3}{5}\times 2$.

On the number line, it will mean two jumps of $\frac{3}{5}$ to the left.



Where do we reach? We reach at $\frac{-6}{5}$. Let us find it as we did in fractions.

$$\frac{-3}{5}\times 2=\frac{-3\times 2}{5}=\frac{-6}{5}$$

We arrive at the same rational number.

Find $\frac{-4}{7}\times 3$, $\frac{-6}{5}\times 4$ using both ways. What do you observe?

అకరణీయ సంఖ్యల కోసం కూడా ఆమె దీన్ని ప్రయత్నించింది, $\frac{5}{7}-\frac{3}{8}=\frac{5}{7}+\frac{(-3)}{8}=\frac{19}{56}$.

ఇద్దరికీ ఒకే భేధం వచ్చింది.

$\frac{7}{8}-\frac{5}{9}$, $\frac{3}{11}-\frac{8}{7}$ లను రెండు విధాలుగా కనుగొనడానికి ప్రయత్నించండి. మీకు కూడా ఒకే జవాబు వచ్చిందా?

కాబట్టి, *రెండు అకరణీయ సంఖ్యల వ్యవకలనం చేయునప్పుడు, తీసివేయబడుతున్న అకరణీయ సంఖ్య యొక్క సంకలన విలోమాన్ని మరొక అకరణీయ సంఖ్యకు కూడతాం.*

కాబట్టి, $1\frac{2}{3}-2\frac{4}{5}=\frac{5}{3}-\frac{14}{5}=\frac{5}{3}+\frac{14}{5}$ యొక్క సంకలన విలోమం $=\frac{5}{3}+\frac{(-14)}{5}$

$=\frac{-17}{15}=-1\frac{2}{15}$.

ప్రయత్నించండి

కనుగొనండి:

(i) $\frac{7}{9}-\frac{2}{5}$ (ii) $2\frac{1}{5}-\frac{(-1)}{3}$

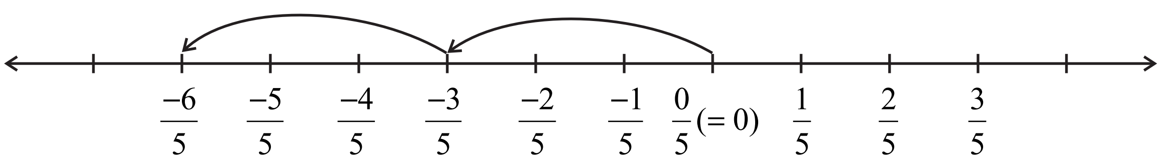
$\frac{2}{7}-\left(\frac{-5}{6}\right)$ ఎంత అవుతుంది?

$\frac{2}{7}-\left(\frac{-5}{6}\right)=\frac{2}{7}+\left(\frac{-5}{6}\right)$ యొక్క సంకలన విలోమం $=\frac{2}{7}+\frac{5}{6}=\frac{47}{42}=1\frac{5}{42}$

8.9.3 గుణకారం

అకరణీయ సంఖ్య $\frac{-3}{5}$ ను 2 చే గుణిద్దాం, అనగా మనము $\frac{-3}{5}\times 2$ కనుగొనాలి.

సంఖ్యారేఖపై, దీని అర్థం ఎడమ వైపు $\frac{3}{5}$ రెండు సార్లు దూకడం అని అర్థం.



మనం ఎక్కడికి చేరుకోవాలి? $\frac{-6}{5}$ ను చేరుకోవాలి. మనం దానిని భిన్నాలకు కనుగొన్నట్లే కనుగొందాం

$$\frac{-3}{5}\times 2=\frac{-3\times 2}{5}=\frac{-6}{5}$$

మనం అదే అకరణీయ సంఖ్యకు చేరుకుంటాము.

$\frac{-4}{7}\times 3, \frac{-6}{5}\times 4$ లను రెండు పద్ధతుల ద్వారా కనుగొనుము. మీరు ఏమి గమనించారు?

So, *we find that while multiplying a rational number by a positive integer, we multiply the numerator by that integer, keeping the denominator unchanged.*

Let us now multiply a rational number by a negative integer,

$$\frac{-2}{9} \times (-5) = \frac{-2 \times (-5)}{9} = \frac{10}{9}$$

Remember, –5 can be written as $\frac{-5}{1}$.

So, $\frac{-2}{9} \times \frac{-5}{1} = \frac{10}{9} = \frac{-2 \times (-5)}{9 \times 1}$

Similarly, $\frac{3}{11} \times (-2) = \frac{3 \times (-2)}{11 \times 1} = \frac{-6}{11}$

TRY THESE

What will be

(i) $\frac{-3}{5} \times 7$? (ii) $\frac{-6}{5} \times (-2)$?

Based on these observations, we find that, $\frac{-3}{8} \times \frac{5}{7} = \frac{-3 \times 5}{8 \times 7} = \frac{-15}{56}$

So, as we did in the case of fractions, we multiply two rational numbers in the following way:

Step 1 Multiply the numerators of the two rational numbers.

Step 2 Multiply the denominators of the two rational numbers.

Step 3 Write the product as $\frac{\text{Result of Step 1}}{\text{Result of Step 2}}$

Thus, $\frac{-3}{5} \times \frac{2}{7} = \frac{-3 \times 2}{5 \times 7} = \frac{-6}{35}$.

Also, $\frac{-5}{8} \times \frac{-9}{7} = \frac{-5 \times (-9)}{8 \times 7} = \frac{45}{56}$

TRY THESE

Find:

(i) $\frac{-3}{4} \times \frac{1}{7}$

(ii) $\frac{2}{3} \times \frac{-5}{9}$

8.9.4 Division

We have studied reciprocals of a fraction earlier. What is the reciprocal of $\frac{2}{7}$? It will be $\frac{7}{2}$. We extend this idea of reciprocals to non-zero rational numbers also.

The reciprocal of $\frac{-2}{7}$ will be $\frac{7}{-2}$ i.e., $\frac{-7}{2}$; that of $\frac{-3}{5}$ would be $\frac{-5}{3}$.

కాబట్టి, ఒక అకరణీయ సంఖ్యను ధన పూర్ణసంఖ్యతో గుణించేటప్పుడు, లవమును పూర్ణ సంఖ్యచే గుణిస్తాము, హారమును మార్చకుండా ఉంచుతాము.

ఇప్పుడు మనం ఒక అకరణీయ సంఖ్యను ఒక ఋణ పూర్ణ సంఖ్యతో గుణిద్దాం.,

$$\frac{-2}{9}\times(-5) = \frac{-2\times(-5)}{9} = \frac{10}{9}$$

-5 ను $\frac{-5}{1}$ అని వ్రాస్తామని అని గుర్తుకుతెచ్చుకోండి

కాబట్టి, $\frac{-2}{9}\times\frac{-5}{1} = \frac{10}{9} = \frac{-2\times(-5)}{9\times 1}$

ఇదే విధంగా, $\frac{3}{11}\times(-2) = \frac{3\times(-2)}{11\times 1} = \frac{-6}{11}$

ప్రయత్నించండి

ఏమి జరుగుతుంది

(i) $\frac{-3}{5}\times 7$?   (ii) $\frac{-6}{5}\times(-2)$?

ఈ పరిశీలనల ఆధారంగా, మనము $\frac{-3}{8}\times\frac{5}{7} = \frac{-3\times 5}{8\times 7} = \frac{-15}{56}$ అని కనుగొనవచ్చు.

కాబట్టి, భిన్నాల విషయంలో చేసినట్లుగా, మనం రెండు అకరణీయ సంఖ్యలను ఈ క్రింది విధంగా గుణిస్తాము:

సోపానం 1 రెండు అకరణీయ సంఖ్యల లవములను గుణించండి.

సోపానం 2 రెండు అకరణీయ సంఖ్యల యొక్క హారములను గుణించండి.

సోపానం 3 లబ్ధమును ఇలా రాయండి $\frac{\text{సోపానం1 యొక్క ఫలితం}}{\text{సోపానం2 యొక్క ఫలితం}}$

అందుకని, $\frac{-3}{5}\times\frac{2}{7} = \frac{-3\times 2}{5\times 7} = \frac{-6}{35}$.

అలాగే, $\frac{-5}{8}\times\frac{-9}{7} = \frac{-5\times(-9)}{8\times 7} = \frac{45}{56}$

ప్రయత్నించండి

కనుగొనండి:

(i) $\frac{-3}{4}\times\frac{1}{7}$

(ii) $\frac{2}{3}\times\frac{-5}{9}$

8.9.4 భాగహారం

మనం ఇంతకు ముందు అకరణీయ సంఖ్యల యొక్క వ్యుత్క్రమము గురించి అధ్యయనం చేసాము. $\frac{2}{7}$ యొక్క గుణకార విలోమము ఎంత? అది $\frac{7}{2}$ అవుతుంది. మనము వ్యుత్క్రమము యొక్క ఈ ఆలోచనను సున్నా కాని అకరణీయ సంఖ్యలకు కూడా విస్తరిస్తాము

$\frac{-2}{7}$ యొక్క వ్యుత్క్రమము $\frac{7}{-2}$ అనగా, $\frac{-7}{2}$; $\frac{-3}{5}$ యొక్క వ్యుత్క్రమము $\frac{-5}{3}$.

Try These

What will be the reciprocal of $\frac{-6}{11}$? and $\frac{-8}{5}$?

Product of reciprocals

The product of a rational number with its reciprocal is always 1.

For example, $\frac{-4}{9} \times \left(\text{reciprocal of } \frac{-4}{9}\right)$

$$= \frac{-4}{9} \times \frac{-9}{4} = 1$$

Similarly, $\frac{-6}{13} \times \frac{-13}{6} = 1$

Try some more examples and confirm this observation.

Savita divided a rational number $\frac{4}{9}$ by another rational number $\frac{-5}{7}$ as,

$$\frac{4}{9} \div \frac{-5}{7} = \frac{4}{9} \times \frac{7}{-5} = \frac{-28}{45}.$$

She used the idea of reciprocal as done in fractions.

Arpit first divided $\frac{4}{9}$ by $\frac{5}{7}$ and got $\frac{28}{45}$.

He finally said $\frac{4}{9} \div \frac{-5}{7} = \frac{-28}{45}$. How did he get that?

He divided them as fractions, ignoring the negative sign and then put the negative sign in the value so obtained.

Both of them got the same value $\frac{-28}{45}$. Try dividing $\frac{2}{3}$ by $\frac{-5}{7}$ both ways and see if you get the same answer.

This shows, *to divide one rational number by the other non-zero rational number we multiply the rational number by the reciprocal of the other.*

Thus, $\frac{-6}{5} \div \frac{-2}{3} = \frac{6}{-5} \times \text{reciprocal of } \left(\frac{-2}{3}\right) = \frac{6}{-5} \times \frac{3}{-2} = \frac{18}{10}$

ప్రయత్నించండి

$\frac{-6}{11}$ మరియు $\frac{-8}{5}$ ల గుణకార విలోమాలు ఏవి?

వ్యుత్క్రమాల లబ్ధం

ఒక ఆకరణీయ సంఖ్య మరియు దాని వ్యుత్క్రమముల లబ్ధము ఎల్లప్పుడూ 1

ఉదాహరణకి, $\frac{-4}{9} \times \left(\frac{-4}{9} \text{ యొక్క వ్యుత్క్రమము}\right)$

$= \frac{-4}{9} \times \frac{-9}{4} = 1$

ఇదేవిధంగా , $\frac{-6}{13} \times \frac{-13}{6} = 1$

మరికొన్ని ఉదాహరణలు ప్రయత్నించండి మరియు దీనిని ధృవీకరించండి.

సవిత ఒక అకరణీయ సంఖ్య $\frac{4}{9}$ ను మరొక అకరణీయ సంఖ్య $\frac{-5}{7}$ తో ఇలా భాగించింది,

$$\frac{4}{9} \div \frac{-5}{7} = \frac{4}{9} \times \frac{7}{-5} = \frac{-28}{45}.$$

ఆమె భిన్నాలలో చేసిన విధంగా వ్యుత్క్రమమును ఉపయోగించింది.

అర్పిత్ మొదట $\frac{4}{9}$ ను $\frac{5}{7}$ చే భాగించి $\frac{28}{45}$ పొందాడు.

చివరకు అతడు $\frac{4}{9} \div \frac{-5}{7} = \frac{-28}{45}$ అన్నాడు. అతను దానిని ఎలా పొందాడు?

అతను వాటిని భిన్నాలుగా విభజించాడు, ఋణ గుర్తును విస్మరించి, తరువాత అలా పొందిన విలువలో ఋణ గుర్తును ఉంచాడు.

ఇద్దరికీ ఒకే విలువ $\frac{-28}{45}$ లభించింది. రెండు పద్ధతులు ఉపయోగించి $\frac{2}{3}$ ను $\frac{-5}{7}$ చే భాగించండి ఒకే సమాధానం వచ్చిందేమో చూడండి.

ఒక అకరణీయ సంఖ్యను మరొక శూన్యేతర అకరణీయ సంఖ్యతో భాగించడానికి మనం అకరణీయ సంఖ్యను దాని యొక్క వ్యుత్క్రమముతో గుణిస్తాము.

అందువల్ల $\frac{-6}{5} \div \frac{-2}{3} = \frac{6}{-5} \times \left(\frac{-2}{3} \text{ యొక్క వ్యుత్క్రమము}\right) = \frac{6}{-5} \times \frac{3}{-2} = \frac{18}{10}$

TRY THESE

Find: (i) $\frac{2}{3} \times \frac{-7}{8}$ (ii) $\frac{-6}{7} \times \frac{5}{7}$

EXERCISE 8.2

1. Find the sum:

(i) $\frac{5}{4} + \left(\frac{-11}{4}\right)$ (ii) $\frac{5}{3} + \frac{3}{5}$ (iii) $\frac{-9}{10} + \frac{22}{15}$

(iv) $\frac{-3}{-11} + \frac{5}{9}$ (v) $\frac{-8}{19} + \frac{(-2)}{57}$ (vi) $\frac{-2}{3} + 0$

(vii) $-2\frac{1}{3} + 4\frac{3}{5}$

2. Find

(i) $\frac{7}{24} - \frac{17}{36}$ (ii) $\frac{5}{63} - \left(\frac{-6}{21}\right)$ (iii) $\frac{-6}{13} - \left(\frac{-7}{15}\right)$

(iv) $\frac{-3}{8} - \frac{7}{11}$ (v) $-2\frac{1}{9} - 6$

3. Find the product:

(i) $\frac{9}{2} \times \left(\frac{-7}{4}\right)$ (ii) $\frac{3}{10} \times (-9)$ (iii) $\frac{-6}{5} \times \frac{9}{11}$

(iv) $\frac{3}{7} \times \left(\frac{-2}{5}\right)$ (v) $\frac{3}{11} \times \frac{2}{5}$ (vi) $\frac{3}{-5} \times \frac{-5}{3}$

4. Find the value of:

(i) $(-4) \div \frac{2}{3}$ (ii) $\frac{-3}{5} \div 2$ (iii) $\frac{-4}{5} \div (-3)$

(iv) $\frac{-1}{8} \div \frac{3}{4}$ (v) $\frac{-2}{13} \div \frac{1}{7}$ (vi) $\frac{-7}{12} \div \left(\frac{-2}{13}\right)$

(vii) $\frac{3}{13} \div \left(\frac{-4}{65}\right)$

ప్రయత్నించండి

(i) $\frac{2}{3}\times\frac{-7}{8}$ (ii) $\frac{-6}{7}\times\frac{5}{7}$ లను కనుగొనండి

అభ్యాసం 8. 2

1. మొత్తం కనుగొనుము:

(i) $\frac{5}{4}+\left(\frac{-11}{4}\right)$ (ii) $\frac{5}{3}+\frac{3}{5}$ (iii) $\frac{-9}{10}+\frac{22}{15}$

(iv) $\frac{-3}{-11}+\frac{5}{9}$ (v) $\frac{-8}{19}+\frac{(-2)}{57}$ (vi) $\frac{-2}{3}+0$

(vii) $-2\frac{1}{3}+4\frac{3}{5}$

2. కనుగొనండి

(i) $\frac{7}{24}-\frac{17}{36}$ (ii) $\frac{5}{63}-\left(\frac{-6}{21}\right)$ (iii) $\frac{-6}{13}-\left(\frac{-7}{15}\right)$

(iv) $\frac{-3}{8}-\frac{7}{11}$ (v) $-2\frac{1}{9}-6$

3. లబ్ధం కనుగొనండి:

(i) $\frac{9}{2}\times\left(\frac{-7}{4}\right)$ (ii) $\frac{3}{10}\times(-9)$ (iii) $\frac{-6}{5}\times\frac{9}{11}$

(iv) $\frac{3}{7}\times\left(\frac{-2}{5}\right)$ (v) $\frac{3}{11}\times\frac{2}{5}$ (vi) $\frac{3}{-5}\times\frac{-5}{3}$

4. విలువను కనుగొనండి?

(i) $(-4)\div\frac{2}{3}$ (ii) $\frac{-3}{5}\div 2$ (iii) $\frac{-4}{5}\div(-3)$

(iv) $\frac{-1}{8}\div\frac{3}{4}$ (v) $\frac{-2}{13}\div\frac{1}{7}$ (vi) $\frac{-7}{12}\div\left(\frac{-2}{13}\right)$

(vii) $\frac{3}{13}\div\left(\frac{-4}{65}\right)$

What have We Discussed?

1. A number that can be expressed in the form $\frac{p}{q}$, where p and q are integers and $q \neq 0$, is called a rational number. The numbers $\frac{-2}{7}, \frac{3}{8}, 3$ etc. are rational numbers.
2. All integers and fractions are rational numbers.
3. If the numerator and denominator of a rational number are multiplied or divided by a non-zero integer, we get a rational number which is said to be equivalent to the given rational number. For example $\frac{-3}{7} = \frac{-3 \times 2}{7 \times 2} = \frac{-6}{14}$. So, we say $\frac{-6}{14}$ is the equivalent form of $\frac{-3}{7}$. Also note that $\frac{-6}{14} = \frac{-6 \div 2}{14 \div 2} = \frac{-3}{7}$.
4. Rational numbers are classified as Positive and Negative rational numbers. When the numerator and denominator, both, are positive integers, it is a positive rational number. When either the numerator or the denominator is a negative integer, it is a negative rational number. For example, $\frac{3}{8}$ is a positive rational number whereas $\frac{-8}{9}$ is a negative rational number.
5. The number 0 is neither a positive nor a negative rational number.
6. A rational number is said to be in the standard form if its denominator is a positive integer and the numerator and denominator have no common factor other than 1.

   The numbers $\frac{-1}{3}, \frac{2}{7}$ etc. are in standard form.
7. There are unlimited number of rational numbers between two rational numbers.
8. Two rational numbers with the same denominator can be added by adding their numerators, keeping the denominator same. Two rational numbers with different denominators are added by first taking the LCM of the two denominators and then converting both the rational numbers to their equivalent forms having the LCM as the denominator. For example, $\frac{-2}{3} + \frac{3}{8} = \frac{-16}{24} + \frac{9}{24} = \frac{-16+9}{24} = \frac{-7}{24}$. Here, LCM of 3 and 8 is 24.
9. While subtracting two rational numbers, we add the additive inverse of the rational number to be subtracted to the other rational number.

   Thus, $\frac{7}{8} - \frac{2}{3} = \frac{7}{8} + \text{additive inverse of } \frac{2}{3} = \frac{7}{8} + \frac{(-2)}{3} = \frac{21 + (-16)}{24} = \frac{5}{24}$.

మనం ఏమి చర్చించాం?

1. $\frac{p}{q}$ రూపంలో రాయగల సంఖ్యలను అకరణీయ సంఖ్యలు అంటారు. ఇక్కడ p మరియు q లు పూర్ణ సంఖ్యలు మరియు $q \neq 0$. $\frac{-2}{7}, \frac{3}{8}, 3$ మొ.వి అకరణీయ సంఖ్యలు.
2. అన్ని పూర్ణసంఖ్యలు మరియు భిన్నాలు అకరణీయ సంఖ్యలు.
3. ఒక అకరణీయసంఖ్యనందు లవము మరియు హారమును వేరొక శూన్యేతర పూర్ణసంఖ్య చే గుణించినా లేదా భాగించినా వచ్చే అకరణీయ సంఖ్య ఇచ్చిన అకరణీయ సంఖ్యకు సమానముగా ఉంటుంది. ఉదాహరణకు $\frac{-3}{7} = \frac{-3 \times 2}{7 \times 2} = \frac{-6}{14}$. కాబట్టి $\frac{-6}{14}$ అనేది $\frac{-3}{7}$. కు సమానమైన రూపం. అంతే గాకుండా $\frac{-6}{14} = \frac{-6 \div 2}{14 \div 2} = \frac{-3}{7}$.
4. అకరణీయ సంఖ్యలను ధన, ఋణ అకరణీయ సంఖ్యలుగా వర్గీకరిస్తారు. లవము మరియు హారము రెండూ కూడా ధన పూర్ణసంఖ్యలు అయినప్పుడు, అది ఒక ధన అకరణీయ సంఖ్య. లవము లేదా హారము ఋణ పూర్ణ సంఖ్య అయినప్పుడు, అది ఋణ అకరణీయ సంఖ్య అవుతుంది. ఉదాహరణకి, $\frac{3}{8}$ ఇది ఒక ధన అకరణీయ సంఖ్య అయితే $\frac{-8}{9}$ ఋణ అకరణీయ సంఖ్య. .
5. '0'అనేది ధన లేదా ఋణ అకరణీయ సంఖ్య కాదు.
6. ఒక అకరణీయ సంఖ్య లవము ధన సంఖ్య అయి, లవ, హారములకు 1 తప్ప మరే ఉమ్మడి కారణాంకం లేకపోతే ఆ అకరణీయ సంఖ్య ప్రామాణిక రూపంలో ఉందని అంటాము. $\frac{-1}{3}, \frac{2}{7}$ మొ॥వి ప్రామాణిక రూపంలో ఉన్నాయి.
7. రెండు అకరణీయ సంఖ్యల మధ్య అపరిమితమైన అకరణీయ సంఖ్యలు ఉన్నాయి.
8. ఒకే హారము కలిగిన రెండు అకరణీయ సంఖ్యలనుహారాన్ని అలాగే ఉంచి వాటి లవములను సంకలనం చేయడం ద్వారా కలుపవచ్చు .విభిన్న హారాలతో కూడిన రెండు ఆకరణీయ సంఖ్యలను మొదట రెండు హారముల యొక్క క. సా. గు ని తీసుకొని, తరువాత రెండు అకరణీయ సంఖ్యలను వాటి సమాన రూపాలకు మార్చడం ద్వారా సంకలనం చేస్తాము. ఉదాహరణకి,

   $\frac{-2}{3} + \frac{3}{8} = \frac{-16}{24} + \frac{9}{24} = \frac{-16+9}{24} = \frac{-7}{24}$. ఇక్కడ 3 మరియు 8 ల యొక్క క.సా.గు 24
9. రెండు అకరణీయ సంఖ్యలను తీసివేస్తున్నప్పుడు, అకరణీయ సంఖ్య యొక్క సంకలన విలోమాన్ని ఇతర అకరణీయ సంఖ్యకు కలుపుతాము.

   అందుకని, $\frac{7}{8} - \frac{2}{3} = \frac{7}{8} + \frac{2}{3}$ యొక్క సంకలన విలోమం $= \frac{7}{8} + \frac{(-2)}{3} = \frac{21+(-16)}{24} = \frac{5}{24}$.

10. To multiply two rational numbers, we multiply their numerators and denominators separately, and write the product as $\frac{\text{product of numerators}}{\text{product of denominators}}$.

11. To divide one rational number by the other non-zero rational number, we multiply the rational number by the reciprocal of the other. Thus,

$$\frac{-7}{2} \div \frac{4}{3} = \frac{-7}{2} \times (\text{reciprocal of } \frac{4}{3}) = \frac{-7}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{-21}{8}.$$

10. రెండు అకరణీయ సంఖ్యలను గుణించడానికి, మనం వాటి లవము మరియు హారములను విడివిడిగా గుణిస్తాము మరియు వాటి లబ్ధంను $\frac{\text{లవముల లబ్ధం}}{\text{హారముల లబ్ధం}}$ అని రాస్తాము.

11. ఒక అకరణీయ సంఖ్యను సున్నా కాని అకరణీయ సంఖ్యతో భాగించడానికి, మనం అకరణీయ సంఖ్యను మరొకదాని వ్యుత్క్రమము తో గుణిస్తాము. అందుకని,

$$\frac{-7}{2} \div \frac{4}{3} = \frac{-7}{2} \times \left(\frac{4}{3} \text{ యొక్క వ్యుత్క్రమము}\right) = \frac{-7}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{-21}{8}.$$

Perimeter and Area

Chapter 9

9.1 Area of a Parallelogram

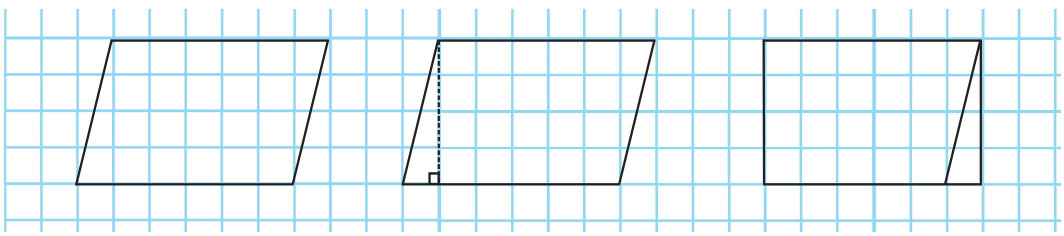
We come across many shapes other than squares and rectangles.

How will you find the area of a land which is a parallelogram in shape?

Let us find a method to get the area of a parallelogram.

Can a parallelogram be converted into a rectangle of equal area?

Draw a parallelogram on a graph paper as shown in Fig 9.1(i). Cut out the parallelogram. Draw a line from one vertex of the parallelogram perpendicular to the opposite side [Fig 9.1(ii)]. Cut out the triangle. Move the triangle to the other side of the parallelogram.



(i) (ii) (iii)

Fig 9.1

What shape do you get? You get a rectangle.

Is the area of the parallelogram equal to the area of the rectangle formed?

Yes, area of the parallelogram = area of the rectangle formed

What are the length and the breadth of the rectangle?

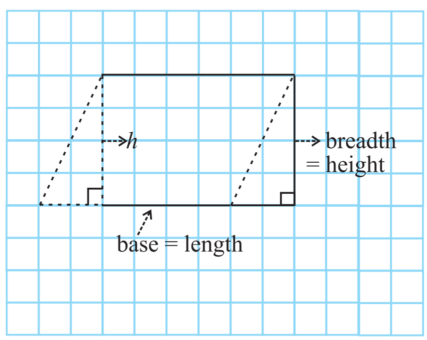


Fig 9.2

అధ్యాయం 9

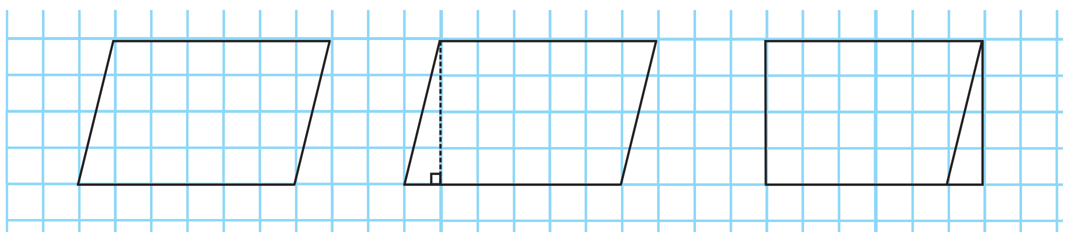
చుట్టుకొలత మరియు వైశాల్యం

B7T7L6

9.1 సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం

మనం చతురస్రాలు, దీర్ఘచతురస్రాలే కాకుండా చాలా ఆకారాలను చూశాం.
సమాంతర చతుర్భుజం ఆకారం లో ఉన్న భూమి యొక్క వైశాల్యాన్ని మీరు ఎలా కనుగొంటారు?
సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యాన్ని పొందటానికి ఒక పద్ధతి ని కనుక్కోందాం.
సమాంతర చతుర్భుజాన్ని సమాన వైశాల్యం గల దీర్ఘచతురస్రం గా మార్చవచ్చా?

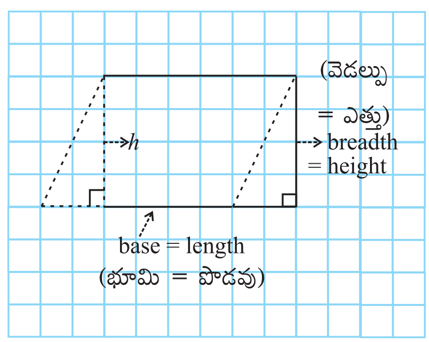
పటం 9.1(i) లో చూపిన విధంగా గ్రాఫ్ పేపర్‌పై సమాంతర చతుర్భుజాన్ని గీయండి. సమాంతర చతుర్భుజాన్ని కత్తిరించండి. సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క ఒక శీర్షం నుండి ఎదుటి భుజంపైకి లంబాన్ని గీయండి [పటం. 9.1(ii)]. త్రిభుజాన్ని కత్తిరించండి. త్రిభుజాన్ని సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క మరొక వైపుకు తరలించండి.



(i) (ii) (iii)

పటం 9.1

మీకు ఏ ఆకారం వచ్చింది ? మీరు దీర్ఘచతురస్రాన్ని పొందుతారు.
సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క వైశాల్యం ఏర్పడిన దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యానికి సమానంగా ఉందా?
అవును, సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం = ఏర్పడిన దీర్ఘ చతురస్రం యొక్క వైశాల్యం
దీర్ఘచతురస్రం యొక్క పొడవు మరియు వెడల్పులు ఎంత?



పటం 9.2

We find that the length of the rectangle formed is equal to the base of the parallelogram and the breadth of the rectangle is equal to the height of the parallelogram (Fig 9.2).

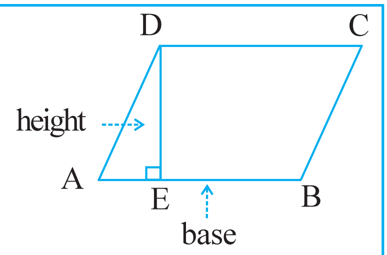
Now, Area of parallelogram = Area of rectangle

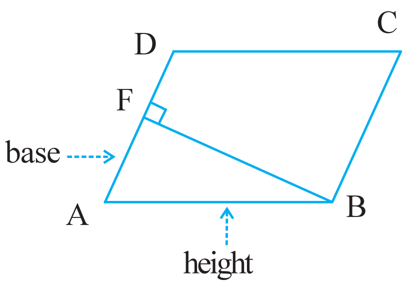
= length × breadth = $l \times b$

But the length l and breadth b of the rectangle are exactly the base b and the height h, respectively of the parallelogram.

Thus, the area of parallelogram = base × height = $b \times h$.

Any side of a parallelogram can be chosen as **base** of the parallelogram. The perpendicular dropped on that side from the opposite vertex is known as **height** (altitude). In the parallelogram ABCD, DE is perpendicular to AB. Here AB is the base and DE is the height of the parallelogram.





In this parallelogram ABCD, BF is the perpendicular to opposite side AD. Here AD is the **base** and BF is the **height**.

Consider the following parallelograms (Fig 9.2).

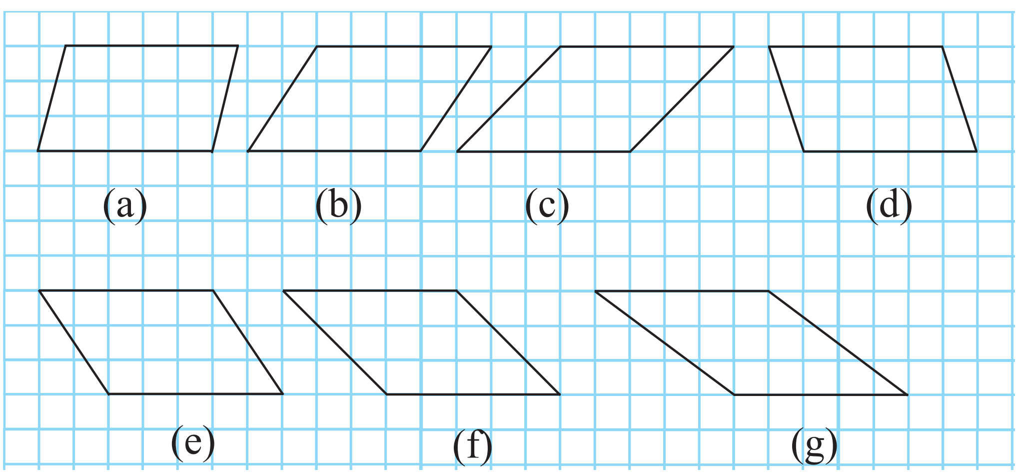


Fig 9.3

Find the areas of the parallelograms by counting the squares enclosed within the figures and also find the perimeters by measuring the sides.

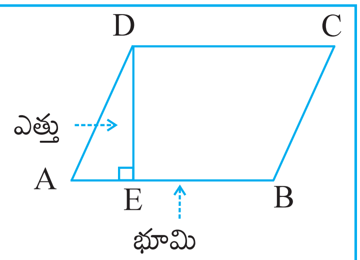
ఏర్పడిన దీర్ఘచతురస్రం యొక్క పొడవు సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క భూమికి సమానంగా ఉంటుందని మరియు దీర్ఘచతురస్రం యొక్క వెడల్పు సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క ఎత్తుకు సమానంగా ఉంటుందని మనము కనుగొంటాము (పటం 9.2).

ఇప్పుడు, సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం = దీర్ఘ చతురస్రం యొక్క వైశాల్యం

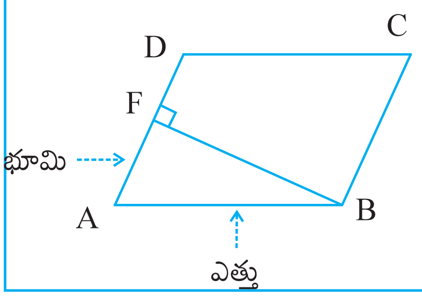
= పొడవు $\times$ వెడల్పు = $l \times b$

కానీ దీర్ఘచతురస్రం యొక్క పొడవు l వెడల్పు b ఖచ్చితంగా సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క భూమి b మరియు ఎత్తు h కు సమానం.

అందువలన, సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క వైశాల్యం = భూమి $\times$ ఎత్తు = $b \times h$

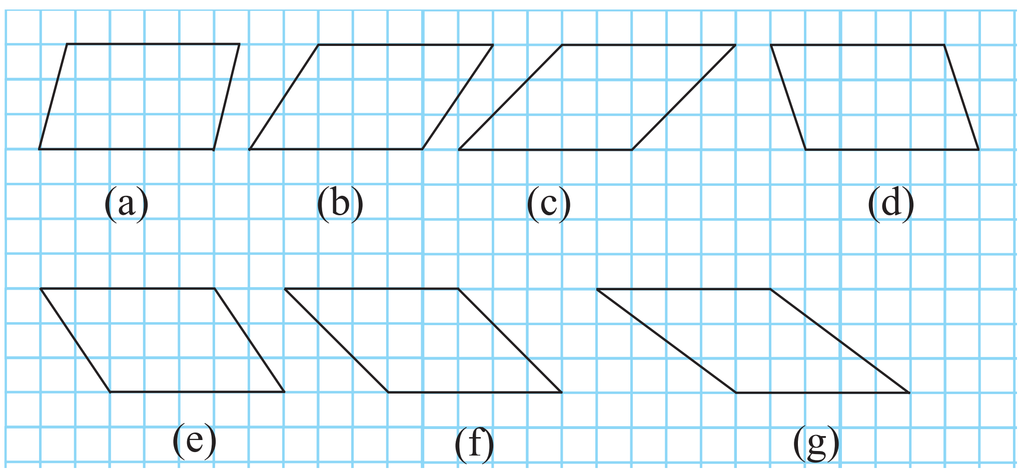


సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క ఏ భుజమునైనా సమాంతర చతుర్భుజానికి **భూమిగా** ఎంచుకోవచ్చు. ఎదురుగా ఉన్న శీర్షం నుండి భుజం మీదికి గీసిన లంబాన్ని **ఎత్తు** (ఉన్నతి) అంటారు. సమాంతరచతుర్భుజం ABCD లో DE అనునది AB కు లంబంగా ఉన్నది. ఇక్కడ భూమి AB మరియు DE సమాంతర చతుర్భుజ ఎత్తు.



సమాంతర చతుర్భుజం ABCD లో BF అనునది ఎదురు భుజం AD కు లంబంగా ఉన్నది. ఇక్కడ AD **భూమి** మరియు BF **ఎత్తు.**

కింది సమాంతర చతుర్భుజాలను పరిగణించండి (పటం 9.2)



పటం 9.3

సమాంతర చతుర్భుజాల వైశాల్యాలను లోపల ఉన్న చతురస్రాలను లెక్కించడం ద్వారా కనుగొనండి మరియు భుజాలను కొలవడం ద్వారా చుట్టుకొలతలను కూడా కనుగొనండి.

Complete the following table:

Parallelogram	Base	Height	Area	Perimeter
(a)	5 units	3 units	15 sq units	
(b)				
(c)				
(d)				
(e)				
(f)				
(g)				

You will find that all these parallelograms have equal areas but different perimeters. Now, consider the following parallelograms with sides 7 cm and 5 cm (Fig 9.4).

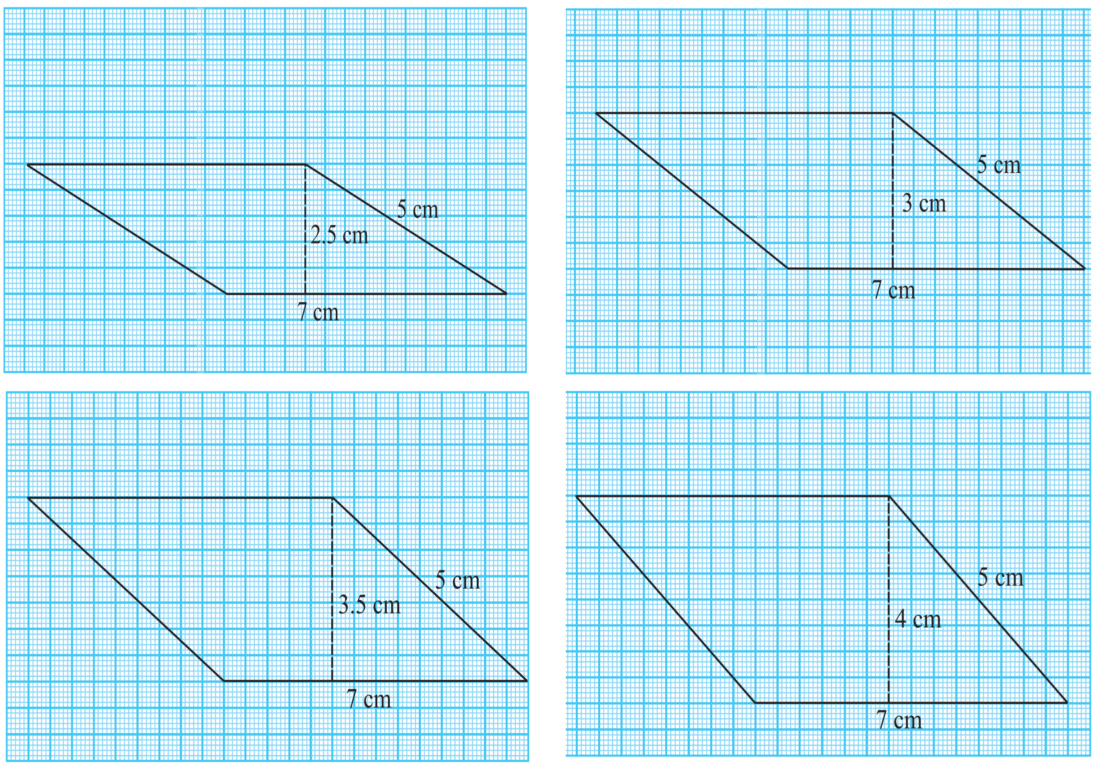


Fig 9.4

Find the perimeter and area of each of these parallelograms. Analyse your results.

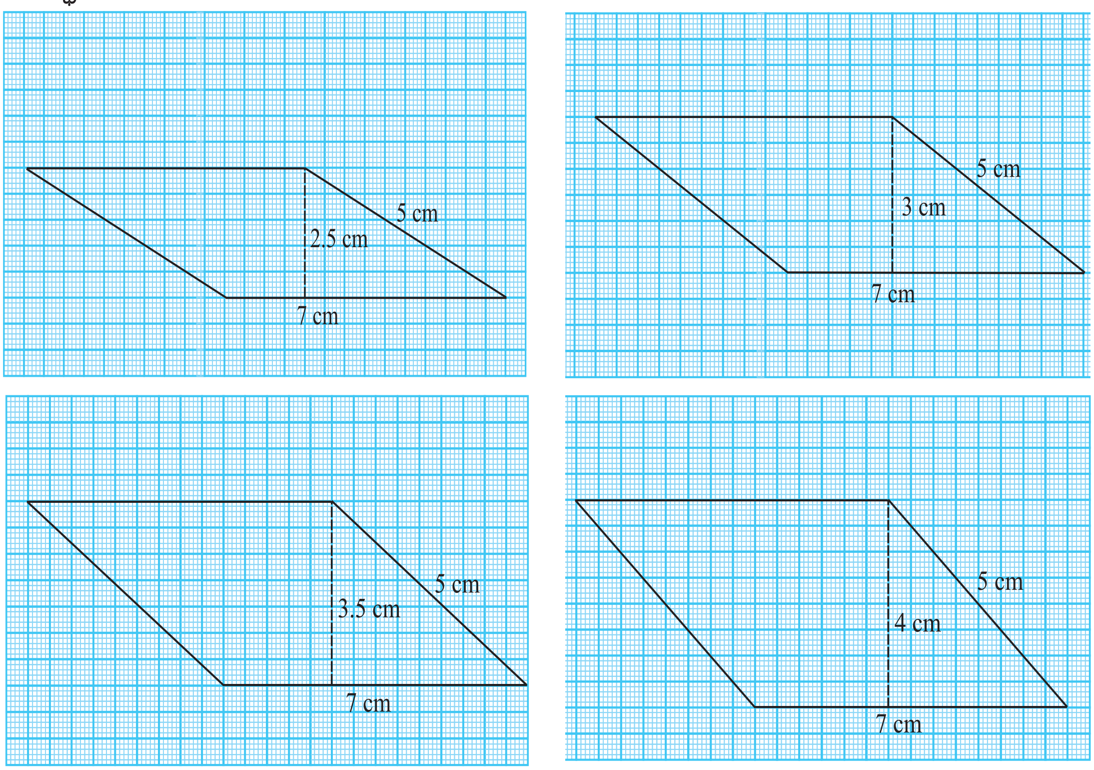
You will find that these parallelograms have different areas but equal perimeters.

To find the area of a parallelogram, you need to know only the base and the corresponding height of the parallelogram.

కింది పట్టికను పూర్తిచేయండి.

సమాంతర చతుర్భుజం	భూమి	ఎత్తు	వైశాల్యం	చుట్టుకొలత
(a)	5 యూనిట్లు	3 యూనిట్లు	15 చ.యూనిట్లు	
(b)				
(c)				
(d)				
(e)				
(f)				
(g)				

ఈ సమాంతర చతుర్భుజాలన్నీ సమాన వైశాల్యాలను కలిగి ఉన్నాయి. కానీ వివిధ చుట్టుకొలతలు ఉన్నాయని మీరు కనుగొంటారు. 7 సెం.మీ. మరియు 5 సెం.మీ. భుజాలు కలిగిన కింది సమాంతర చతుర్భుజాలను పరిగణించండి. (పటం 9.4)



పటం 9.4

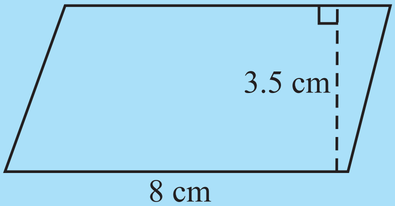
ఇవ్వబడిన సమాంతర చతుర్భుజాల చుట్టుకొలత, వైశాల్యాన్ని కనుగొనండి. మీ ఫలితాలను విశ్లేషించండి. ఈ సమాంతర చతుర్భుజాలు వేర్వేరు వైశాల్యాలు కలిగి ఉన్నాయి కానీ చుట్టుకొలతలు సమానం అని మీరు కనుగొంటారు.

సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క వైశాల్యాన్ని కనుగొనడానికి, మీరు భూమి మరియు సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క అనురూప ఎత్తును మాత్రమే తెలుసుకోవాలి.

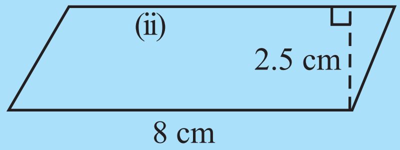
TRY THESE

Find the area of following parallelograms:

(i)

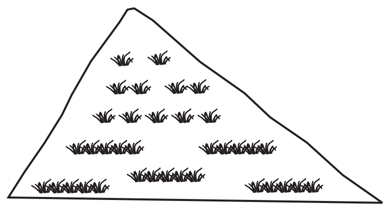


(ii)



(iii) In a parallelogram ABCD, AB = 7.2 cm and the perpendicular from C on AB is 4.5 cm.

9.2 AREA OF A TRIANGLE



A gardener wants to know the cost of covering the whole of a triangular garden with grass.

In this case we need to know the area of the triangular region.

Let us find a method to get the area of a triangle.

Draw a scalene triangle on a piece of paper. Cut out the triangle. Place this triangle on another piece of paper and cut out another triangle of the same size.

So now you have two scalene triangles of the same size.

Are both the triangles congruent?

Superpose one triangle on the other so that they match. You may have to rotate one of the two triangles.

Now place both the triangles such that a pair of corresponding sides is joined as shown in Fig 9.5.

Is the figure thus formed a parallelogram?

Compare the area of each triangle to the area of the parallelogram.

Compare the base and height of the triangles with the base and height of the parallelogram.

You will find that the sum of the areas of both the triangles is equal to the area of the parallelogram. The base and the height of the triangle are the same as the base and the height of the parallelogram, respectively.

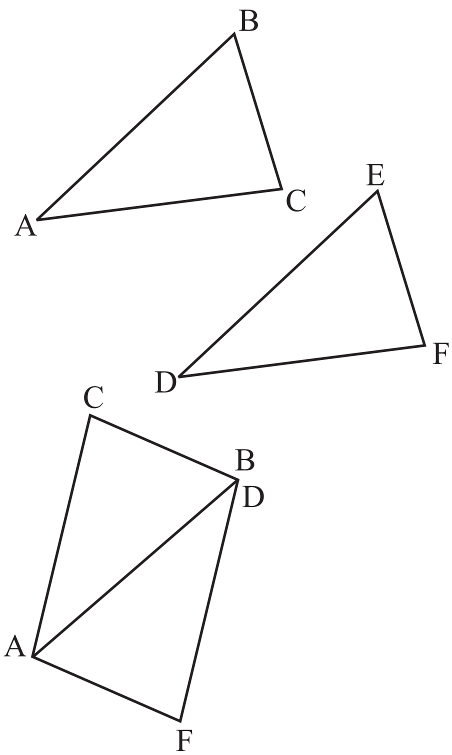


Fig 9.5

$$\text{Area of each triangle} = \frac{1}{2}(\text{Area of parallelogram})$$

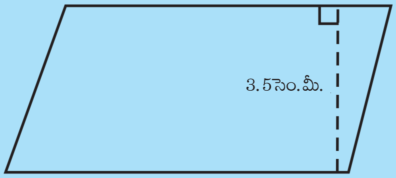
$$= \frac{1}{2}(\text{base} \times \text{height}) \text{ (Since area of a parallelogram = base} \times \text{height)}$$

$$= \frac{1}{2}(b \times h) \text{ (or } \frac{1}{2}bh\text{, in short)}$$

ప్రయత్నించండి

కింది సమాంతర చతుర్భుజాల వైశాల్యాన్ని కనుగొనండి;

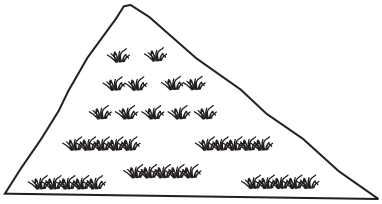
(i)



(ii)

(iii) సమాంతర చతుర్భుజం ABCD లో AB = 7.2 సెం.మీ. C నుండి AB మీదికి లంబం 4.5 సెం.మీ.

9.2 త్రిభుజ వైశాల్యం



ఒక తోటమాలి త్రిభుజాకార తోట మొత్తాన్ని గడ్డితో కప్పి వేయడానికి అయ్యే ఖర్చును తెలుసుకోవాలనుకుంటున్నాడు.

ఈ సందర్భంలో మనం త్రిభుజాకార ప్రాంతం యొక్క వైశాల్యాన్ని తెలుసుకోవాలి.

త్రిభుజం యొక్క వైశాల్యాన్ని పొందడానికి ఒక పద్ధతిని కనుగొందాం.

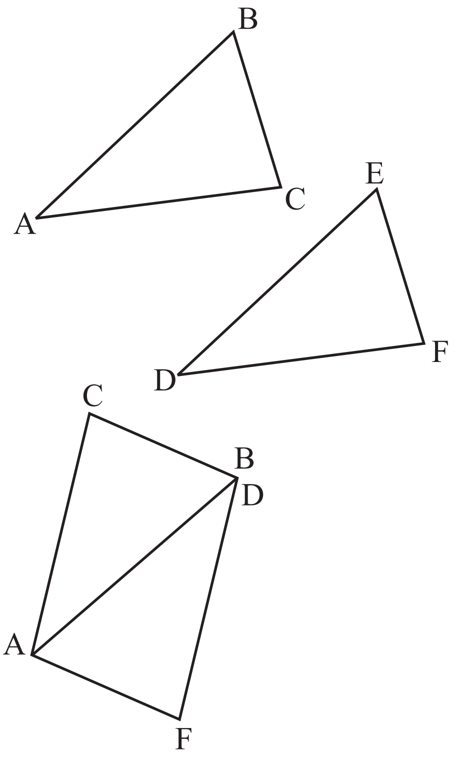
ఒక కాగితపు ముక్కపై విషమబాహు త్రిభుజాన్ని గీయండి. త్రిభుజాన్ని కత్తిరించండి.

ఈ త్రిభుజాన్ని మరొక కాగితంపై ఉంచండి మరియు అదే పరిమాణంలో మరొక త్రిభుజాన్ని కత్తిరించండి.

కాబట్టి ఇప్పుడు మీరు ఒకే పరిమాణంలో రెండు విషమబాహు త్రిభుజాలను కలిగి ఉన్నారు. రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానమా?

ఒక త్రిభుజాన్ని మరొకదానిపై ఉంచండి, తద్వారా అవి సరిపోలుతాయి. మీరు రెండు త్రిభుజాలలో ఒకదానిని భ్రమణం చేయాల్సి రావచ్చు.

ఇప్పుడు రెండు త్రిభుజాలను పటం 9.5 లో చూపిన విధంగా ఒక జత సదృశ భుజాలు కలిపేలా ఉంచండి.



పటం 9.5

ఆ విధంగా ఏర్పడిన పటం సమాంతర చతుర్భుజమా? ప్రతి త్రిభుజం యొక్క వైశాల్యాన్ని సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యంతో పోల్చండి.

త్రిభుజాల భూమి, ఎత్తును సమాంతర చతుర్భుజ భూమి, ఎత్తుతో పోల్చండి.

రెండు త్రిభుజాల వైశాల్యాల మొత్తం సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యానికి సమానం అని మీరు కనుగొంటారు. త్రిభుజం యొక్క భూమి, ఎత్తులు వరసగా సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క భూమి, ఎత్తుతో సమానంగా ఉంటాయి.

ప్రతి త్రిభుజ వైశాల్యం = 1/2 (సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క వైశాల్యం)

= 1/2 (భూమి × ఎత్తు) (సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం =భూమి × ఎత్తు)

$= \frac{1}{2}(b \times h)$ (లేదా $\frac{1}{2}bh$, సంక్షిప్తంగా)

TRY THESE

1. Try the above activity with different types of triangles.
2. Take different parallelograms. Divide each of the parallelograms into two triangles by cutting along any of its diagonals. Are the triangles congruent?

In the figure (Fig 9.6) all the triangles are on the base AB = 6 cm.

What can you say about the height of each of the triangles corresponding to the base AB?

Can we say all the triangles are equal in area? Yes.

Are the triangles congruent also? No.

We conclude that **all the congruent triangles are equal in area but the triangles equal in area need not be congruent.**

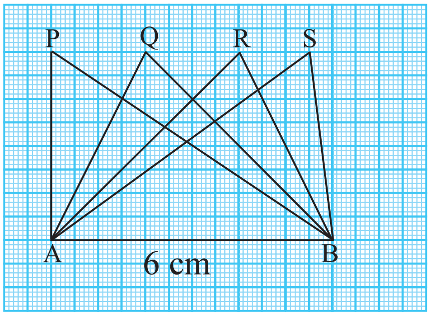


Fig 9.6

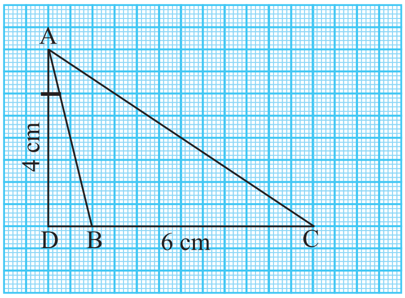


Fig 9.7

Consider the obtuse-angled triangle ABC of base 6 cm (Fig 9.7).

Its height AD which is perpendicular from the vertex A is outside the triangle.

Can you find the area of the triangle?

EXAMPLE 1 One of the sides and the corresponding height of a parallelogram are 4 cm and 3 cm respectively. Find the area of the parallelogram (Fig 9.8).

SOLUTION Given that length of base (b) = 4 cm, height (h) = 3 cm

Area of the parallelogram = $b \times h$

$= 4 \text{ cm} \times 3 \text{ cm} = 12 \text{ cm}^2$

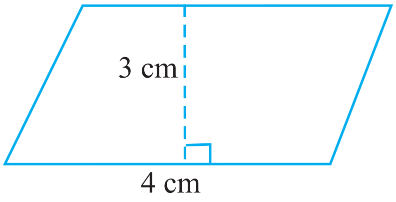


Fig 9.8

EXAMPLE 2 Find the height 'x' if the area of the parallelogram is 24 cm² and the base is 4 cm.

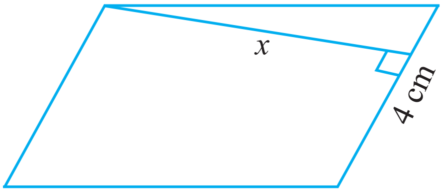


Fig 9.9

SOLUTION Area of parallelogram = $b \times h$

Therefore, $24 = 4 \times x$ (Fig 9.9)

or $\frac{24}{4} = x$ or $x = 6$ cm

So, the height of the parallelogram is 6 cm.

ప్రయత్నించండి

1. వివిధ రకాల త్రిభుజాలతో పై కృత్యాన్ని ప్రయత్నించండి.
2. విభిన్న సమాంతర చతుర్భుజాలను తీసుకోండి. ప్రతి సమాంతర చతుర్భుజాన్ని దాని కర్ణాలలో ఏదో ఒకదాని వెంబడి కత్తిరించడం ద్వారా రెండు త్రిభుజాలుగా విభజించండి. త్రిభుజాలు సర్వసమానంగా ఉన్నాయా?

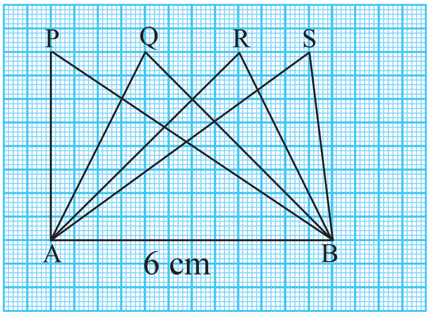
పటంలో (పటం. 9.6) అన్ని త్రిభుజాలు AB = 6 సెం.మీ. అనే భూమిపై ఉన్నాయి.

భూమి AB ఆధారంగా ప్రతి త్రిభుజం ఎత్తు గురించి మీరు ఏమి చెప్పగలరు?

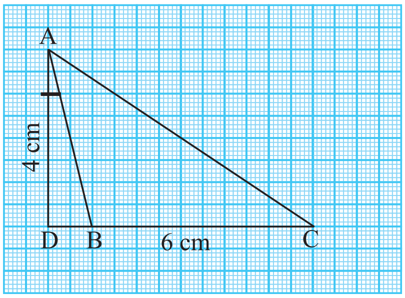
అన్ని త్రిభుజాల వైశాల్యాలు సమానంగా ఉన్నాయని మనం చెప్పగలమా? అవును.

త్రిభుజాలు కూడా సర్వసమానంగా ఉన్నాయా? లేవు

అన్ని సర్వసమాన త్రిభుజాల వైశాల్యాలు సమానంగా ఉన్నాయి కానీ సమాన వైశాల్యాలు గల త్రిభుజాలు సర్వసమానంగా ఉండవలసిన అవసరం లేదు అని మనం నిర్ధారించవచ్చు.



పటం 9.6



పటం 9.7

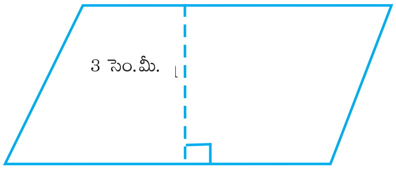
భూమి 6 సెం.మీ గా గల అధికకోణ త్రిభుజం ABC (పటం. 9.7) ని పరిగణించండి. శీర్షం A నుండి లంబంగా ఉన్న దాని ఎత్తు AD త్రిభుజం వెలుపల ఉంది. మీరు త్రిభుజం యొక్క వైశాల్యాన్ని కనుగొనగలరా?

ఉదాహరణ 1 సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క ఒక భుజము మరియు అనురూప ఎత్తు వరుసగా 4 సెం.మీ మరియు 3 సెం.మీ. సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క వైశాల్యాన్ని కనుగొనండి. (పటం. 9.8).

సాధన: భుజం పొడవు $(b) = 4$ సెం.మీ., ఎత్తు $(h) = 3$ సెం.మీ.

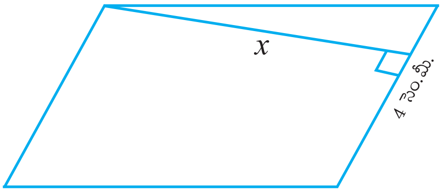
సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం $= b \times h$

$= 4$ సెం.మీ. $\times$ 3 సెం.మీ. $= 12$ సెం.మీ.^{2}



పటం 9.8

ఉదాహరణ 2 సమాంతర చతుర్భుజం వైశాల్యం 24 సెం.మీ.^{2} మరియు భూమి 4 సెం.మీ. అయితే ఎత్తు 'x' ని కనుగొనండి.



పటం 9.9

సాధన: సమాంతర చతుర్భుజం వైశాల్యం $= b \times h$

అందువలన, $24 = 4 \times x$ (పటం 9.9)

లేదా $\frac{24}{4} = x$ లేదా $x = 6$ సెం.మీ.

కావున, సమాంతర చతుర్భుజం ఎత్తు 6 సెం.మీ.

EXAMPLE 3 The two sides of the parallelogram ABCD are 6 cm and 4 cm. The height corresponding to the base CD is 3 cm (Fig 9.10). Find the

(i) area of the parallelogram. (ii) the height corresponding to the base AD.

SOLUTION

(i) Area of parallelogram $= b \times h$

$= 6 \text{ cm} \times 3 \text{ cm} = 18 \text{ cm}^2$

(ii) base $(b) = 4$ cm, height $= x$ (say),

Area $= 18 \text{ cm}^2$

Area of parallelogram $= b \times x$

$18 = 4 \times x$

$\frac{18}{4} = x$

Therefore, $x = 4.5$ cm

Thus, the height corresponding to base AD is 4.5 cm.

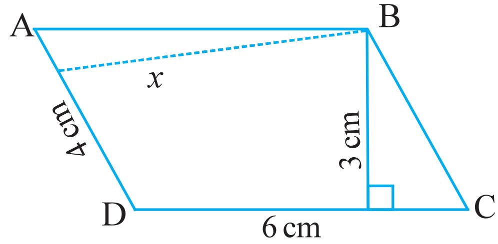
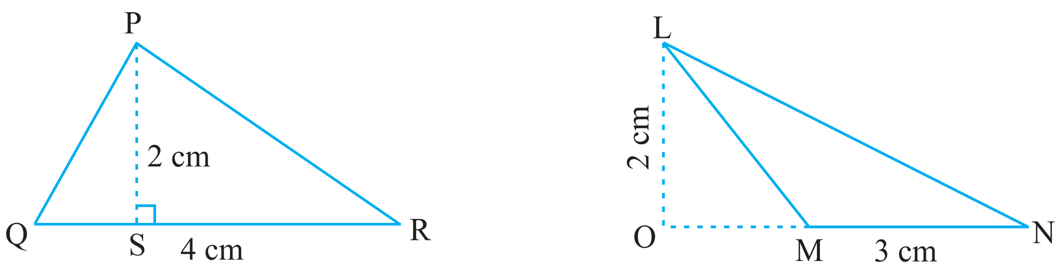


Fig 9.10

EXAMPLE 4 Find the area of the following triangles (Fig 9.11).



(i) **Fig 9.11** (ii)

SOLUTION

(i) Area of triangle $= \frac{1}{2} bh = \frac{1}{2} \times QR \times PS$

$= \frac{1}{2} \times 4 \text{ cm} \times 2 \text{ cm} = 4 \text{ cm}^2$

(ii) Area of triangle $= \frac{1}{2} bh = \frac{1}{2} \times MN \times LO$

$= \frac{1}{2} \times 3 \text{ cm} \times 2 \text{ cm} = 3 \text{ cm}^2$

ఉదాహరణ 3 సమాంతర చతుర్భుజం ABCD యొక్క రెండు భుజాలు 6 సెం.మీ. మరియు 4 సెం.మీ. భూమి CD కి అనురూప ఎత్తు 3 సెం.మీ. (పటం 9.10). కింది వాటిని కనుగొనండి.

(i) సమాంతర చతుర్భుజం వైశాల్యం (ii) భూమి AD కి అనురూప ఎత్తు.

సాధన:

(i) సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం $= b \times h$

$= 6$ సెం.మీ. $\times 3$ సెం.మీ. $= 18$ సెం.మీ.^{2}

(ii) భూమి $(b) = 4$ సెం.మీ., ఎత్తు $= x$ (అనుకొనుము),

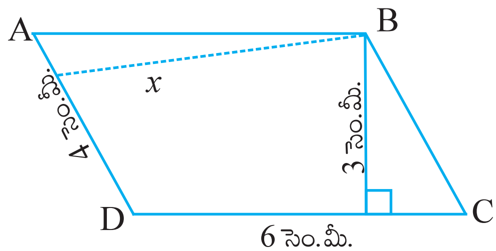
వైశాల్యం $= 18$ సెం.మీ.^{2}

సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం $= b \times x$

$$18 = 4 \times x$$

$$\frac{18}{4} = x$$

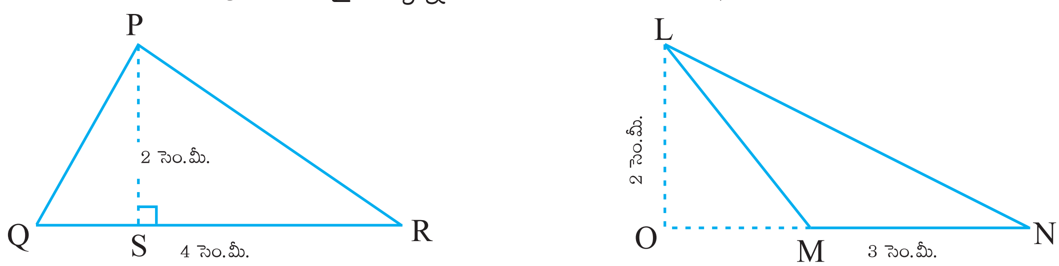
అందువలన, $x = 4.5$ సెం.మీ.



పటం 9.10

ఈ విధంగా, భూమి AD కి అనురూప ఎత్తు 4.5 సెం.మీ.

ఉదాహరణ 4 కింది త్రిభుజాల వైశాల్యాన్ని కనుగొనండి (పటం 9.11).



(i) **పటం 9.11** (ii)

సాధన:

(i) త్రిభుజ వైశాల్యం $= \frac{1}{2} bh = \frac{1}{2} \times QR \times PS$

$= \frac{1}{2} \times 4$సెం.మీ. $\times 2$సెం.మీ. $= 4$ సెం.మీ.^{2}

(ii) త్రిభుజ వైశాల్యం $= \frac{1}{2} bh = \frac{1}{2} \times MN \times LO$

$= \frac{1}{2} \times 3$సెం.మీ.$\times 2$సెం.మీ. $= 3$ సెం.మీ.^{2}

EXAMPLE 5 Find BC, if the area of the triangle ABC is 36 cm^2 and the height AD is 3 cm (Fig 9.12).

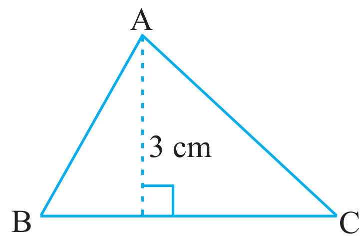


Fig 9.12

SOLUTION Height = 3 cm, Area = 36 cm^2

$$\text{Area of the triangle ABC} = \frac{1}{2}bh$$

or $$36 = \frac{1}{2} \times b \times 3 \text{ i.e., } b = \frac{36 \times 2}{3} = 24 \text{ cm}$$

So, $$\text{BC} = 24 \text{ cm}$$

EXAMPLE 6 In ΔPQR, PR = 8 cm, QR = 4 cm and PL = 5 cm (Fig 9.13). Find:

(i) the area of the ΔPQR

(ii) QM

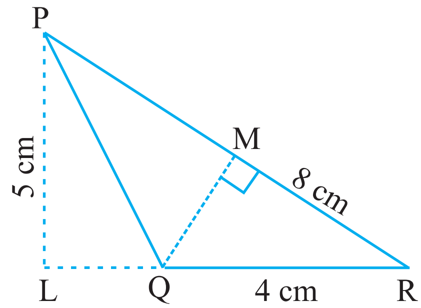


Fig 9.13

SOLUTION

(i) QR = base = 4 cm, PL = height = 5 cm

$$\text{Area of the triangle PQR} = \frac{1}{2}bh$$

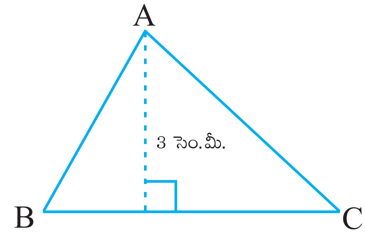
$$= \frac{1}{2} \times 4 \text{ cm} \times 5 \text{ cm} = 10 \text{ cm}^2$$

(ii) PR = base = 8 cm QM = height = ? Area = 10 cm^2

$$\text{Area of triangle} = \frac{1}{2} \times b \times h \quad \text{i.e.,} \quad 10 = \frac{1}{2} \times 8 \times h$$

$$h = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} = 2.5. \quad \text{So,} \quad \text{QM} = 2.5 \text{ cm}$$

ఉదాహరణ 5 త్రిభుజం ABC వైశాల్యం 36 సెం.మీ.^{2}, ఎత్తు AD 3 సెం.మీ. అయితే BC ని కనుగొనండి. (పటం 9.12)



పటం 9.12

సాధన: ఎత్తు = 3 సెం.మీ., వైశాల్యం = 36 సెం.మీ.^{2}

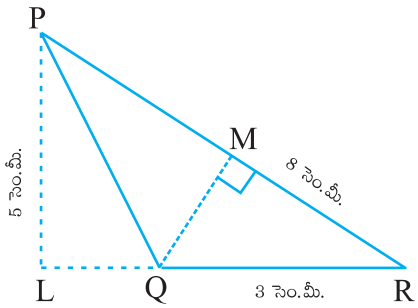
$$ABC \text{ త్రిభుజ వైశాల్యం} = \frac{1}{2}bh$$

లేదా $36 = \frac{1}{2} \times b \times 3$, $b = \frac{36 \times 2}{3} = 24$ సెం.మీ.

కావున, BC = 24 సెం.మీ.

ఉదాహరణ 6 ΔPQR లో PR = 8 సెం.మీ. QR = 4 సెం.మీ., PL = 5 సెం.మీ. (పటం 9.13). కనుగొనుము:

(i) ΔPQR యొక్క వైశాల్యం (ii) QM



పటం 9.13

సాధన:

(i) QR = భూమి =4 సెం.మీ., PL = ఎత్తు = 5 సెం.మీ.

$$\text{త్రిభుజం వైశాల్యం } PQR = \frac{1}{2}bh$$

$$= \frac{1}{2} \times 4\text{సెం.మీ.} \times 5\text{సెం.మీ.} = 10 \text{ సెం.మీ.}^2$$

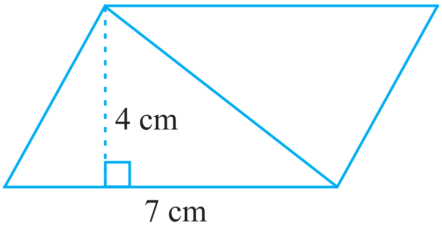
(ii) PR = భూమి = 8 సెం.మీ. QM = ఎత్తు = ? వైశాల్యం = 10 సెం.మీ.^{2}

$$\text{త్రిభుజ వైశాల్యం} = \frac{1}{2} \times b \times h \qquad \text{అంటే,} \quad 10 = \frac{1}{2} \times 8 \times h$$

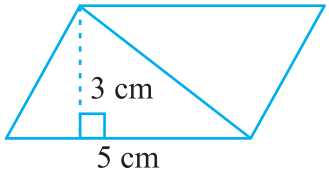
$h = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} = 2.5$. కావున, QM = 2.5 సెం.మీ.

EXERCISE 9.1

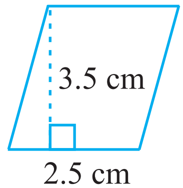
1. Find the area of each of the following parallelograms:



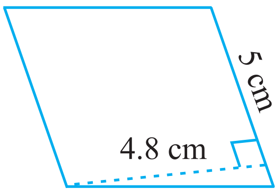
(a)



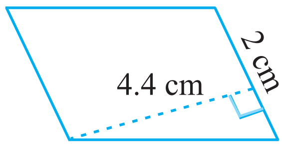
(b)



(c)

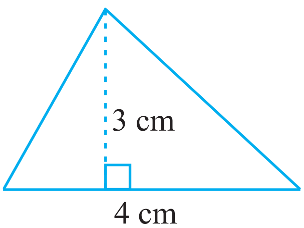


(d)

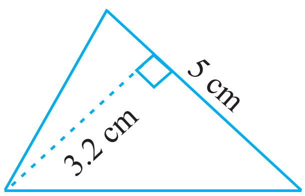


(e)

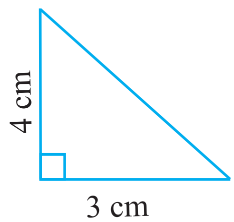
2. Find the area of each of the following triangles:



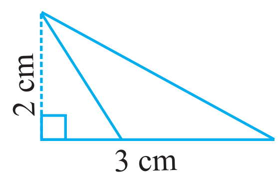
(a)



(b)



(c)



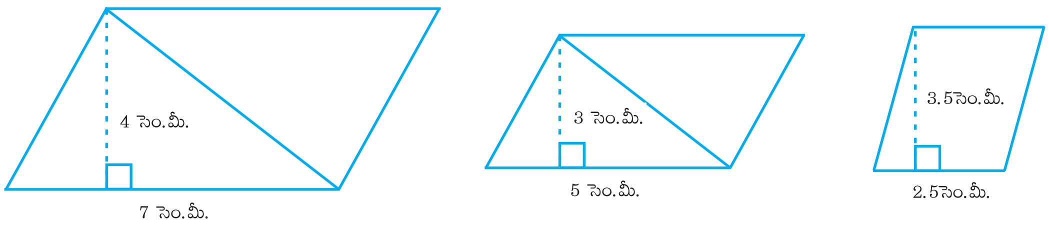
(d)

3. Find the missing values:

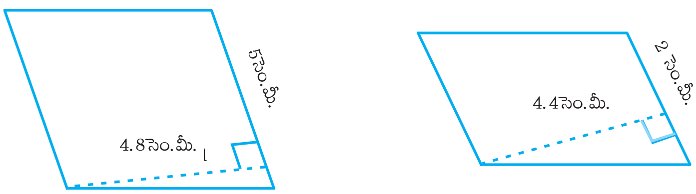
S.No.	Base	Height	Area of the Parallelogram
a.	20 cm		246 cm^2
b.		15 cm	154.5 cm^2
c.		8.4 cm	48.72 cm^2
d.	15.6 cm		16.38 cm^2

అభ్యాసం 9.1

1. కింది ప్రతి సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క వైశాల్యాన్ని కనుగొనండి:

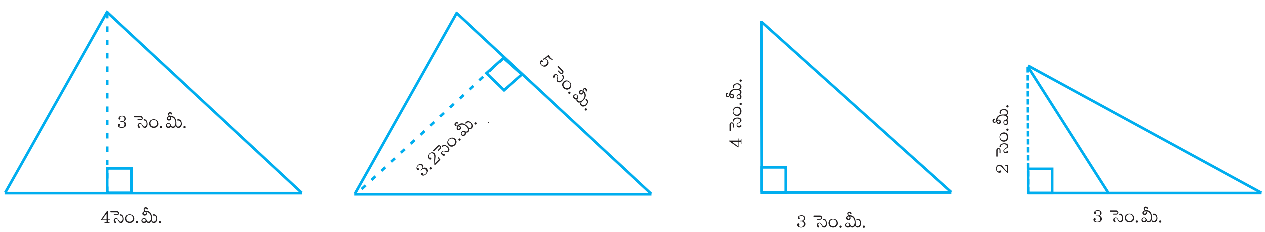


(a) (b) (c)



(d) (e)

2. క్రింది ప్రతి త్రిభుజ వైశాల్యాన్ని కనుగొనండి:



(a) (b) (c) (d)

3. లోపించిన విలువలను కనుగొనండి.

క్ర.సం.	భూమి	ఎత్తు	సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం
a.	20 సెం.మీ.		246 సెం.మీ.^{2}
b.		15 సెం.మీ.	154.5 సెం.మీ.^{2}
c.		8.4 సెం.మీ.	48.72 సెం.మీ.^{2}
d.	15.6 సెం.మీ.		16.38 సెం.మీ.^{2}

4. Find the missing values:

Base	Height	Area of Triangle
15 cm	______	87 cm^2
______	31.4 mm	1256 mm^2
22 cm	______	170.5 cm^2

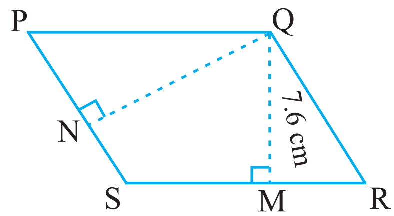


Fig 9.14

5. PQRS is a parallelogram (Fig 9.14). QM is the height from Q to SR and QN is the height from Q to PS. If SR = 12 cm and QM = 7.6 cm. Find:

(a) the area of the parallegram PQRS

(b) QN, if PS = 8 cm

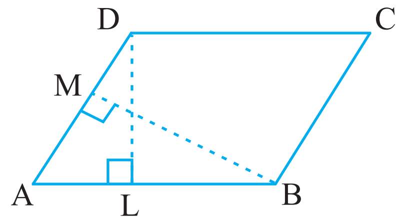


Fig 9.15

6. DL and BM are the heights on sides AB and AD respectively of parallelogram ABCD (Fig 9.15). If the area of the parallelogram is 1470 cm^2, AB = 35 cm and AD = 49 cm, find the length of BM and DL.

7. ΔABC is right angled at A (Fig 9.16). AD is perpendicular to BC. If AB = 5 cm, BC = 13 cm and AC = 12 cm, Find the area of ΔABC. Also find the length of AD.

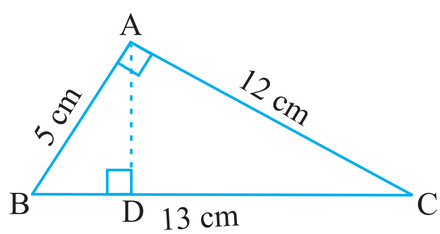


Fig 9.16

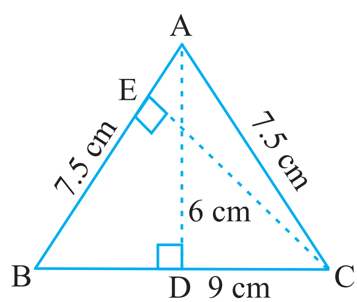


Fig 9.17

8. ΔABC is isosceles with AB = AC = 7.5 cm and BC = 9 cm (Fig 9.17). The height AD from A to BC, is 6 cm. Find the area of ΔABC. What will be the height from C to AB i.e., CE?

9.3 Circles

A racing track is semi-circular at both ends (Fig 9.18).

Can you find the distance covered by an athlete if he takes two rounds of a racing track? We need to find a method to find the distances around when a shape is circular.

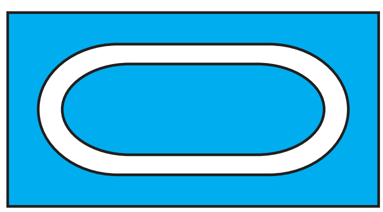
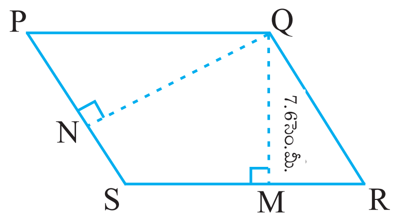


Fig 9.18

4. లోపించిన విలువలను కనుగొనండి.

భూమి	ఎత్తు	త్రిభుజ వైశాల్యం
15 సెం.మీ.	_______	87 సెం.మీ.^{2}
_______	31.4 సెం.మీ.	1256 సెం.మీ.^{2}
22 సెం.మీ.	_______	170.5 సెం.మీ.^{2}

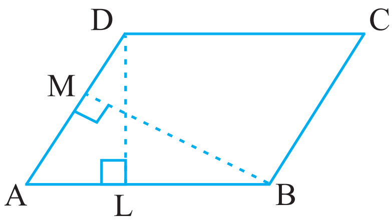


పటం 9.14

5. PQRS ఒక సమాంతర చతుర్భుజం (పటం 9.14). Q నుండి SR కు గల ఎత్తు QM మరియు Q నుండి PS కు గల ఎత్తు QN. SR = 12 సెం.మీ. మరియు QM = 7.6 సెం.మీ. అయితే, కింది వాటిని కనుగొనండి:

(a) PQRS సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం

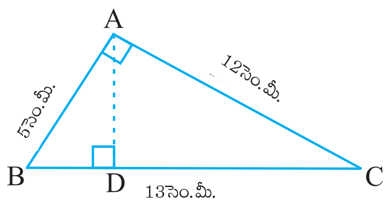
(b) PS = 8 సెం.మీ. అయితే QN



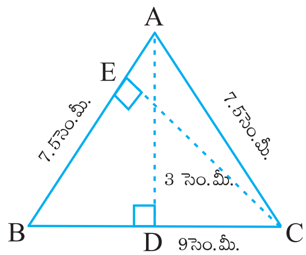
పటం 9.15

6. సమాంతర చతుర్భుజం ABCD (పటం 9.15). యొక్క AB మరియు AD భుజాలపై ఉన్న ఎత్తులు వరుసగా DL మరియు BM సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం 1470 సెం.మీ.^{2}, AB = 35 సెం.మీ. మరియు AD = 49 సెం.మీ., అయితే BM మరియు DL పొడవులను కనుగొనండి.

7. ΔABC, A వద్ద లంబకోణం కలిగి ఉంది. (పటం 9.16). BC కి లంబంగా AD ఉంది. AB = 5 సెం.మీ. BC = 13 సెం.మీ. మరియు AC = 12 సెం.మీ. అయితే ΔABC వైశాల్యాన్ని కనుగొనండి. AD యొక్క పొడవును కూడా కనుగొనండి.



పటం 9.16

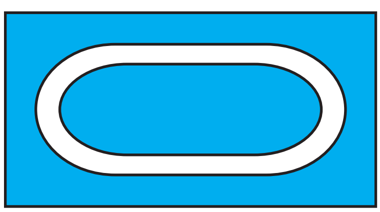


పటం 9.17

8. ΔABC అనేది AB = AC = 7.5 సెం.మీ. మరియు BC = 9 సెం.మీ. (పటం 9.17) కలిగిన సమద్విబాహు త్రిభుజం. A నుండి BC మీదికి ఎత్తు AD 6 సెం.మీ. ΔABC యొక్క వైశాల్యాన్ని కనుగొనండి. C నుండి AB మీదికి ఎత్తు, అంటే CE ఎంత?

9.3 వృత్తాలు

ఒక రేసింగ్ ట్రాక్ రెండు చివర్లలో అర్ధ వృత్తాకారంగా ఉంది (పటం 9.18).

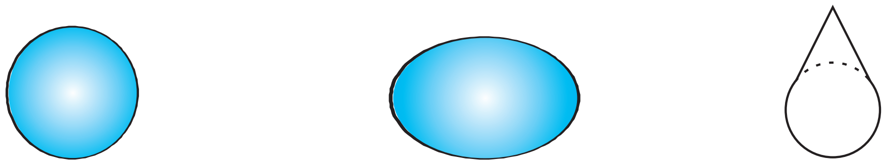


పటం 9.18

ఒక క్రీడాకారుడు రేసింగ్ ట్రాక్‌లో రెండు రౌండ్లు తిరిగి అతను ప్రయాణించే దూరాన్ని మీరు కనుగొనగలరా? ఒక ఆకారం వృత్తాకారంగా ఉన్నప్పుడు చుట్టూ ఉన్న దూరం కనుగొనడానికి మనం ఒక పద్ధతిని కనుగొనడం అవసరం.

9.3.1 Circumference of a Circle

Tanya cut different cards, in curved shape from a cardboard. She wants to put lace around to decorate these cards. What length of the lace does she require for each? (Fig 9.19)



(a) (b) (c)

Fig 9.19

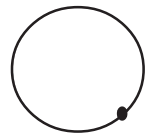


Fig 9.20

You cannot measure the curves with the help of a ruler, as these figures are not "straight". What can you do?

Here is a way to find the length of lace required for shape in Fig 9.19(a). Mark a point on the edge of the card and place the card on the table. Mark the position of the point on the table also (Fig 9. 20).

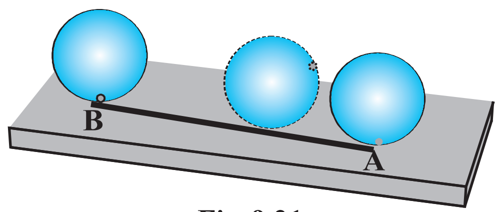


Fig 9.21

Now roll the circular card on the table along a straight line till the marked point again touches the table. Measure the distance along the line. This is the length of the lace required (Fig 9.21). It is also the distance along the edge of the card from the marked point back to the marked point.

You can also find the distance by putting a string on the edge of the circular object and taking all round it.

The distance around a circular region is known as its circumference.

Do This

Take a bottle cap, a bangle or any other circular object and find the circumference.

Now, can you find the distance covered by the athlete on the track by this method?

Still, it will be very difficult to find the distance around the track or any other circular object by measuring through string. Moreover, the measurement will not be accurate.

So, we need some formula for this, as we have for rectilinear figures or shapes.

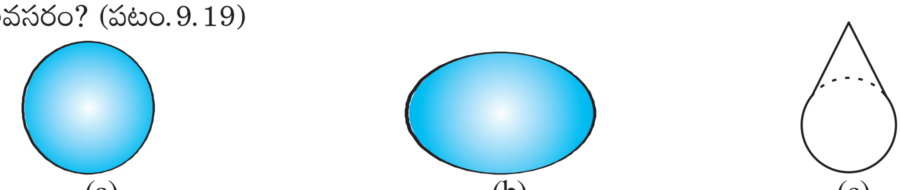
Let us see if there is any relationship between the diameter and the circumference of the circles.

Consider the following table: Draw six circles of different radii and find their circumference by using string. Also find the ratio of the circumference to the diameter.

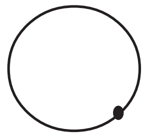
Circle	Radius	Diameter	Circumference	Ratio of Circumference to Diameter
1.	3.5 cm	7.0 cm	22.0 cm	$\frac{22}{7} = 3.14$

9.3.1 వృత్తం పరిధి

తాన్య అట్ట ముక్క నుండి వంపు ఆకారంలో వివిధ కార్డ్ లను కత్తిరించింది. ఆమె ఈ కార్డులను అలంకరించేందుకు చుట్టూ రంగు పట్టీ వేయాలనుకుంటోంది. ప్రతిదానికి ఆమెకు ఎంత పొడవు రంగు పట్టీ అవసరం? (పటం. 9.19)



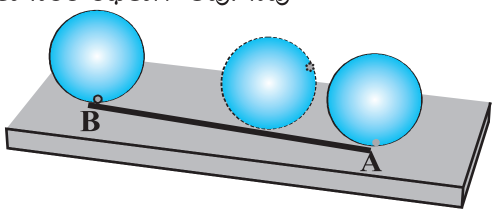
పటం 9.19



పటం 9.20

మీరు స్కేలు సహాయంతో వక్రాలను కొలవలేరు, ఎందుకంటే ఈ ఆకారాలు సరళ రేఖలుగా లేవు. నీవు ఏమి చేయగలవు?

పటం 9.19(a) లో ఆకారానికి అవసరమైన రంగు పట్టీ పొడవును కనుగొనడానికి ఇక్కడ ఒక మార్గం ఉంది. కార్డ్ అంచున ఒక బిందువును గుర్తించి, కార్డును బల్లపై ఉంచండి. బల్లపై బిందువు యొక్క స్థానాన్ని కూడా గుర్తించండి. (పటం 9.20)



పటం 9.21

గుర్తించబడిన బిందువు మళ్లీ బల్లను తాకే వరకు ఇప్పుడు బల్ల పై వృత్తాకార కార్డ్‌ను సరళ రేఖా మార్గంలో దొర్లించండి. రేఖ వెంబడి దూరాన్ని కొలవండి. ఇది అవసరమైన రంగు పట్టీ యొక్క పొడవు (పటం 9.21). ఇది గుర్తు పెట్టబడిన బిందువు నుండి గుర్తు పెట్టబడిన బిందువు వరకు కార్డ్ అంచున ఉన్న దూరం కూడా.

మీరు వృత్తాకార వస్తువు అంచుపై తీగను ఉంచడం మరియు దాని మొత్తం చుట్టు తీసుకోవడం ద్వారా కూడా దూరాన్ని కనుగొనవచ్చు.

వృత్తాకార ప్రాంతం చుట్టూ ఉన్న దూరాన్ని దాని పరిధి అంటారు.

ఇవి చేయండి

ఒక బాటిల్ మూత, ఒక చేతి గాజు లేదా ఏదైనా ఇతర వృత్తాకార వస్తువు తీసుకొని పరిధిని కనుగొనండి.

ఇప్పుడు, మీరు ఈ పద్ధతి ద్వారా ట్రాక్‌పై క్రీడాకారుడు పూర్తి చేసిన దూరాన్ని కనుగొనగలరా?

ఇప్పటికీ, తీగ ద్వారా కొలవడం ద్వారా ట్రాక్ లేదా ఏదైనా ఇతర వృత్తాకార వస్తువు చుట్టూ ఉన్న దూరాన్ని కనుగొనడం చాలా కష్టం. అంతేకాక, కొలత ఖచ్చితమైనది కాదు.

కాబట్టి, రేఖాత్మక పటాలు లేదా ఆకారాలకు ఉన్నట్టుగానే దీనికి కూడా మనకు ఒక సూత్రం అవసరం.

వృత్తాల వ్యాసం మరియు పరిధి మధ్య ఏదైనా సంబంధం ఉందా అని చూద్దాం.

కింది పట్టికను పరిగణించండి: వివిధ వ్యాసార్ధాలతో ఆరు వృత్తాలను గీయండి, తీగను ఉపయోగించి వాటి పరిధి కనుగొనండి. పరిధి, వ్యాసం యొక్క నిష్పత్తిని కూడా కనుగొనండి.

వృత్తం	వ్యాసార్ధం	వ్యాసం	చుట్టుకొలత	పరిధి మరియు వ్యాసం యొక్క నిష్పత్తి
1	3.5 సెం.మీ.	7.0 సెం.మీ.	22.0 సెం.మీ.	$\frac{22}{7} = 3.14$

2.	7.0 cm	14.0 cm	44.0 cm	$\frac{44}{14} = 3.14$
3.	10.5 cm	21.0 cm	66.0 cm	$\frac{66}{21} = 3.14$
4.	21.0 cm	42.0 cm	132.0 cm	$\frac{132}{42} = 3.14$
5.	5.0 cm	10.0 cm	32.0 cm	$\frac{32}{10} = 3.2$
6.	15.0 cm	30.0 cm	94.0 cm	$\frac{94}{30} = 3.13$

What do you infer from the above table? Is this ratio approximately the same? Yes.

Can you say that the circumference of a circle is always more than three times its diameter? Yes.

This ratio is a constant and is denoted by π (pi). Its approximate value is $\frac{22}{7}$ or 3.14.

So, we can say that $\frac{C}{d} = \pi$, where 'C' represents circumference of the circle and 'd' its diameter.

or $\quad C = \pi d$

We know that diameter (d) of a circle is twice the radius (r) i.e., $d = 2r$

So, $\quad C = \pi d = \pi \times 2r \quad$ or $\quad C = 2\pi r$.

Try These

In Fig 9.22,

(a) Which square has the larger perimeter?

(b) Which is larger, perimeter of smaller square or the circumference of the circle?

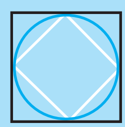


Fig 9.22

Do This

Take one each of quarter plate and half plate. Roll once each of these on a table-top. Which plate covers more distance in one complete revolution? Which plate will take less number of revolutions to cover the length of the table-top?

2.	7.0 సెం.మీ.	14.0 సెం.మీ.	44.0 సెం.మీ.	$\frac{44}{14} = 3.14$
3.	10.5 సెం.మీ.	21.0 సెం.మీ.	66.0 సెం.మీ.	$\frac{66}{21} = 3.14$
4.	21.0 సెం.మీ.	42.0 సెం.మీ.	132.0 సెం.మీ.	$\frac{132}{42} = 3.14$
5.	5.0 సెం.మీ.	10.0 సెం.మీ.	32.0 సెం.మీ.	$\frac{32}{10} = 3.2$
6.	15.0 సెం.మీ.	30.0 సెం.మీ.	94.0 సెం.మీ.	$\frac{94}{30} = 3.13$

పై పట్టిక నుండి మీరు ఏమి ఊహించారు? ఈ నిష్పత్తి ఇంచుమించు ఒకేలా ఉందా? అవును?

ఒక వృత్తపరిధి ఎల్లప్పుడూ దాని వ్యాసానికి మూడు రెట్లు ఎక్కువ ఉంటుందని మీరు చెప్పగలరా? అవును.

ఈ నిష్పత్తి స్థిరము, దీనిని π (పై)తో సూచిస్తాము. దీని విలువ సుమారుగా $\frac{22}{7}$ లేదా 3.14.

కావున $\frac{C}{d} = \pi$ అని మనం చెప్పవచ్చు, ఇక్కడ 'C' వృత్త పరిధి మరియు దాని వ్యాసం 'd'

లేదా $C = \pi d$

వృత్త వ్యాసం (d) వ్యాసార్థానికి (r) రెండు రెట్లు అని మనకు తెలుసు. అంటే, $d = 2r$

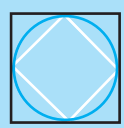
కావున, $C = \pi d = \pi \times 2r$ లేదా $C = 2\pi r$.

ప్రయత్నించండి

పటం 9.22 లో,

(a) ఏ చతురస్రం ఎక్కువ చుట్టుకొలతను కలిగి ఉంది?

(b) చిన్న చతురస్రం చుట్టుకొలత లేదా వృత్త పరిధులలో ఏది పెద్దది?



పటం 9.22

ఇవి చేయండి

పావు ప్లేటు మరియు అర ప్లేట్ ఒక్కొక్కటి తీసుకోండి. బల్ల ఉపరితలంలో ప్రతి ఒక్కటి ఒకసారి దొర్లించండి . ఒక పూర్తి భ్రమణంలో ఏ ప్లేట్ ఎక్కువ దూరాన్ని పూర్తి చేస్తుంది? బల్ల ఉపరితలం యొక్క పొడవును పూర్తి చేయడానికి ఏ ప్లేట్ తక్కువ సంఖ్యలో భ్రమణాలను తీసుకుంటుంది?

EXAMPLE 7 What is the circumference of a circle of diameter 10 cm (Take $\pi = 3.14$)?

SOLUTION Diameter of the circle (d) = 10 cm

Circumference of circle = πd

$= 3.14 \times 10$ cm = 31.4 cm

So, the circumference of the circle of diameter 10 cm is 31.4 cm.

EXAMPLE 8 What is the circumference of a circular disc of radius 14 cm?

$$\left(\text{Use } \pi = \frac{22}{7}\right)$$

SOLUTION Radius of circular disc (r) = 14 cm

Circumference of disc = $2\pi r$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 14 \text{ cm} = 88 \text{ cm}$$

So, the circumference of the circular disc is 88 cm.

EXAMPLE 9 The radius of a circular pipe is 10 cm. What length of a tape is required to wrap once around the pipe ($\pi = 3.14$)?

SOLUTION Radius of the pipe (r) = 10 cm

Length of tape required is equal to the circumference of the pipe.

Circumference of the pipe = $2\pi r$

$= 2 \times 3.14 \times 10$ cm

$= 62.8$ cm

Therefore, length of the tape needed to wrap once around the pipe is 62.8 cm.

EXAMPLE 10 Find the perimeter of the given shape (Fig 9.23) (Take $\pi = \frac{22}{7}$).

SOLUTION In this shape we need to find the circumference of semicircles on each side of the square. Do you need to find the perimeter of the square also? No. The outer boundary, of this figure is made up of semicircles. Diameter of each semicircle is 14 cm.

We know that:

Circumference of the circle = πd

Circumference of the semicircle = $\frac{1}{2}\pi d$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times 14 \text{ cm} = 22 \text{ cm}$$

Circumference of each of the semicircles is 22 cm

Therefore, perimeter of the given figure = 4×22 cm = 88 cm

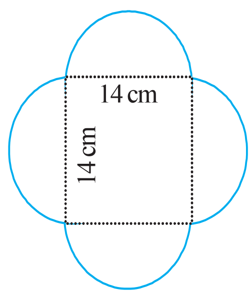


Fig 9.23

ఉదాహరణ 7 వ్యాసం 10 సెం.మీ. కలిగిన వృత్తపరిధి ఎంత? ($\pi = 3.14$ అని తీసుకోండి)?

సాధన: వృత్తం యొక్క వ్యాసం $(d) = 10$ సెం.మీ.

వృత్త పరిధి $= \pi d$

$= 3.14 \times 10$ సెం.మీ. $= 31.4$ సెం.మీ.

కావున, వ్యాసం 10 సెం.మీ. కలిగిన వృత్తం యొక్క పరిధి 31.4 సెం.మీ.

ఉదాహరణ 8 వ్యాసార్థం 14 సెం.మీ. వృత్తాకార ఫలకం యొక్క పరిధి ఎంత?

($\pi = \frac{22}{7}$ ను ఉపయోగించండి)

సాధన: వృత్తాకార ఫలకం యొక్క వ్యాసార్థం $(r) = 14$ సెం.మీ.

ఫలకం యొక్క పరిధి $= 2\pi r$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 14$ సెం.మీ. $= 88$ సెం.మీ.

కావున, వృత్తాకార ఫలకం యొక్క పరిధి 88 సెం.మీ.

ఉదాహరణ 9 వృత్తాకార పైపు యొక్క వ్యాసార్థం 10 సెం.మీ. పైపు చుట్టూ ఒకసారి చుట్టడానికి ఎంత పొడవు టేప్ అవసరం ($\pi = 3.14$)?

సాధన: పైపు యొక్క వ్యాసార్థం $(r) = 10$ సెం.మీ.

అవసరమైన టేప్ పొడవు పైపు యొక్క పరిధికి సమానం

పైపు యొక్క పరిధి $= 2\pi r$

$= 2 \times 3.14 \times 10$ సెం.మీ.

$= 62.8$ సెం.మీ.

అందువలన, పైపు చుట్టూ ఒకసారి చుట్టడానికి అవసరమైన టేప్ పొడవు 62.8 సెం.మీ.

ఉదాహరణ 10 ఇచ్చిన ఆకారం యొక్క చుట్టుకొలతను కనుగొనండి (పటం 9.23)

($\pi = \frac{22}{7}$ గాతీసుకోండి).

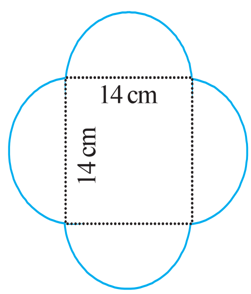
సాధన: ఈ ఆకారంలో మనం చతురస్రం యొక్క ప్రతి భుజంపై ఉన్న అర్ధవృత్తాల యొక్క పరిధిలను కనుగొనాలి. మీరు చతురస్రపు చుట్టుకొలతను కూడా కనుగొనాల్సిన అవసరం ఉందా? లేదు. ఈ ఆకారం యొక్క బయటి సరిహద్దు అర్ధవృత్తాలతో రూపొందించబడింది. ప్రతి అర్ధవృత్తం యొక్క వ్యాసం 14 సెం.మీ.

మనకు తెలుసు:

వృత్తం యొక్క పరిధి $= \pi d$

అర్ధవృత్తం యొక్క పరిధి $= \frac{1}{2} \pi d$

$= \frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times 14$ సెం.మీ. $= 22$ సెం.మీ.



పటం 9.23

అర్ధవృత్త పరిధి 22 సెం.మీ.

అందువలన, ఇచ్చిన ఆకారం యొక్క చుట్టుకొలత $= 4 \times 22$ సెం.మీ. $= 88$ సెం.మీ.

EXAMPLE 11 Sudhanshu divides a circular disc of radius 7 cm in two equal parts. What is the perimeter of each semicircular shape disc? (Use $\pi = \frac{22}{7}$)

SOLUTION To find the perimeter of the semicircular disc (Fig 9.24), we need to find

(i) Circumference of semicircular shape (ii) Diameter

Given that radius (r) = 7 cm. We know that the circumference of circle = $2\pi r$

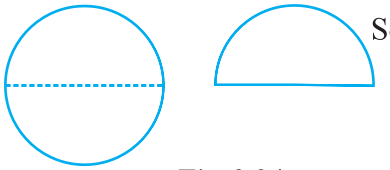


Fig 9.24

So, the circumference of the semicircle $= \frac{1}{2} \times 2\pi r = \pi r$

$= \frac{22}{7} \times 7 \text{ cm} = 22 \text{ cm}$

So, the diameter of the circle $= 2r = 2 \times 7 \text{ cm} = 14 \text{ cm}$

Thus, perimeter of each semicircular disc = 22 cm + 14 cm = 36 cm

9.3.2 Area of Circle

Consider the following:

- A farmer dug a flower bed of radius 7 m at the centre of a field. He needs to purchase fertiliser. If 1 kg of fertiliser is required for 1 square metre area, how much fertiliser should he purchase?
- What will be the cost of polishing a circular table-top of radius 2 m at the rate of ₹ 10 per square metre?

Can you tell what we need to find in such cases, Area or Perimeter? In such cases we need to find the area of the circular region. Let us find the area of a circle, using graph paper.

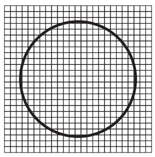


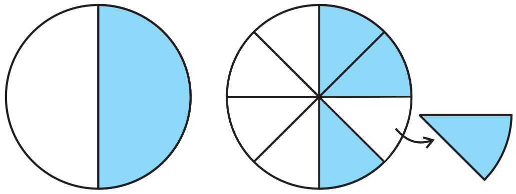
Fig 9.25

Draw a circle of radius 4 cm on a graph paper (Fig 9.25). Find the area by counting the number of squares enclosed.

As the edges are not straight, we get a rough estimate of the area of circle by this method.

There is another way of finding the area of a circle.

Draw a circle and shade one half of the circle [Fig 9.26(i)]. Now fold the circle into **eighths** and cut along the folds [Fig 9.26(ii)].



(i) (ii)

Fig 9.26

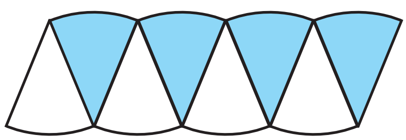


Fig 9.27

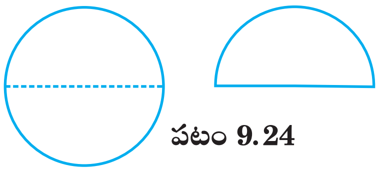
Arrange the separate pieces as shown, in Fig 9.27, which is roughly a parallelogram.

The more sectors we have, the nearer we reach an appropriate parallelogram.

ఉదాహరణ 11 సుదాంశు 7 సెం.మీ. వ్యాసార్థం ఉన్న వృత్తాకార డిస్క్‌ను రెండు సమాన భాగాలు చేశాడు. ఒక్కొక్క అర్ధ వృత్తాకారంలో ఉన్న డిస్క్ చుట్టుకొలత ఎంత? ($\pi = \frac{22}{7}$ ను ఉపయోగించండి.)

సాధన: అర్ధ వృత్తాకార డిస్క్ (పటం 9.24) చుట్టుకొలతను కనుగొనడానికి,

(i) అర్ధ వృత్తాకార పరిధి (ii) వ్యాసం కనుగొనవలెను.



పటం 9.24

ఇచ్చిన వ్యాసార్థం $(r) = 7$ సెం.మీ. వృత్తం యొక్క చుట్టుకొలత $= 2\pi r$ అని తెలుసు

కావున, అర్ధ వృత్తం పరిధి$= \frac{1}{2} \times 2\pi r = \pi r$

$= \frac{22}{7} \times 7$ సెం.మీ. $= 22$ సెం.మీ.

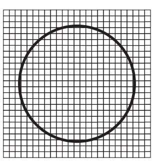
కావున, వృత్తం యొక్క వ్యాసం $= 2r = 2 \times 7$ సెం.మీ. $= 14$ సెం.మీ.

అందువలన, అర్ధ వృత్తాకార డిస్క్ చుట్టుకొలత $= 22$ సెం.మీ. $+ 14$ సెం.మీ. $= 36$ సెం.మీ.

9.3.2 వృత్తం యొక్క వైశాల్యం

కింది వాటిని పరిగణించండి:

- ఒక రైతు పొలం మధ్యలో 7 మీటర్ల వ్యాసార్థంతో పూల తోటకొరకు తవ్వాడు. అతను ఎరువులు కొనుగోలు చేయాలి. 1 చదరపు మీటరు విస్తీర్ణానికి 1 కిలో ఎరువు అవసరమైతే, అతను ఎంత ఎరువు కొనుగోలు చేయాలి?
- 2 మీటర్ల వ్యాసార్థం గల వృత్తాకార బల్ల ఉపరితలంను పాలిష్ చేయడానికి చదరపు మీటరుకు ₹ 10 చొప్పున ఎంత ఖర్చవుతుంది?



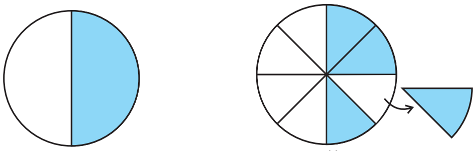
పటం 9.25

ఇటువంటి సందర్భాలలో వైశాల్యం లేదా చుట్టుకొలతలలో మనం ఏమి కనుగొనాలో మీరు చెప్పగలరా? ఇలాంటి సందర్భాలలో మనం వృత్తాకార ప్రాంతం యొక్క వైశాల్యాన్ని కనుగొనవలసి ఉంటుంది. గ్రాఫ్ పేపర్‌ని ఉపయోగించి వృత్తం యొక్క వైశాల్యాన్ని కనుగొనండి.

గ్రాఫ్ పేపర్‌పై 4 సెం.మీ. వ్యాసార్థం గల వృత్తాన్ని గీయండి [పటం 9.26(i)]. వృత్తం లోపల చతురస్రాల సంఖ్యను లెక్కించడం ద్వారా వైశాల్యాన్ని కనుగొనండి.

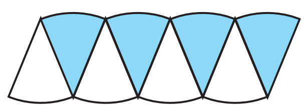
అంచులు నిటారుగా లేనందున, మనం ఈ పద్ధతి ద్వారా వృత్తం యొక్క వైశాల్యాన్ని సుమారుగా అంచనా వేస్తాము. వృత్తం యొక్క వైశాల్యాన్ని కనుగొనడానికి మరొక మార్గం ఉంది.

ఒక వృత్తాన్ని గీయండి, వృత్తంలో ఒక సగం షేడ్ చేయండి [పటం 9.26(i)]. ఇప్పుడు వృత్తమును **ఎనిమిదవ వంతుకు** మడిచి ఆ మడతల వెంబడి కత్తిరించండి. [పటం 9.26(ii)]



(i) (ii)

పటం 9.26



పటం 9.27

పటం9.27 లో చూపిన విధంగా ఆ విడి భాగాలను అమర్చండి. ఇది దాదాపు సమాంతర చతుర్భుజం. మన దగ్గర ఎక్కువ సెక్టార్‌లు ఉంటే, మనం తగిన సమాంతర చతుర్భుజాన్ని పొందుతాము.

As done above if we divide the circle in 64 sectors, and arrange these sectors. It gives nearly a rectangle (Fig 9.28).

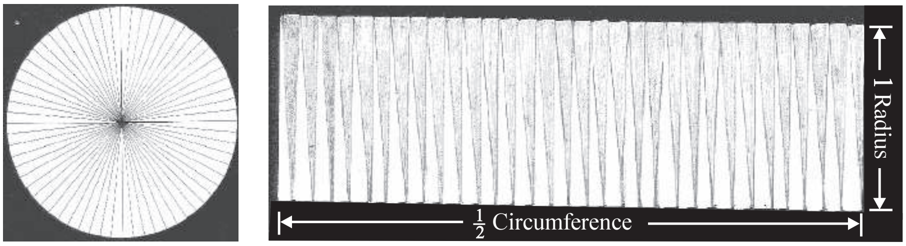


Fig 9.28

What is the breadth of this rectangle? The breadth of this rectangle is the radius of the circle, i.e., 'r'.

As the whole circle is divided into 64 sectors and on each side we have 32 sectors, the length of the rectangle is the length of the 32 sectors, which is half of the circumference. (Fig 9.28)

Area of the circle = Area of rectangle thus formed = $l \times b$

= (Half of circumference) × radius $= \left(\frac{1}{2} \times 2\pi r\right) \times r = \pi r^2$

So, the area of the circle = πr^2

Try These

Draw circles of different radii on a graph paper. Find the area by counting the number of squares. Also find the area by using the formula. Compare the two answers.

Example 12 Find the area of a circle of radius 30 cm (use $\pi = 3.14$).

Solution Radius, $r = 30$ cm

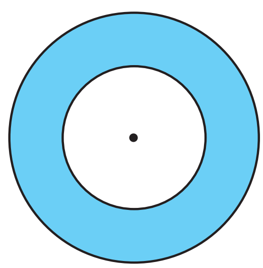
Area of the circle = $\pi r^2 = 3.14 \times 30^2 = 2{,}826\ \text{cm}^2$

Example 13 Diameter of a circular garden is 9.8 m. Find its area.

Solution Diameter, $d = 9.8$ m. Therefore, radius $r = 9.8 \div 2 = 4.9$ m

Area of the circle $= \pi r^2 = \frac{22}{7} \times (4.9)^2\ \text{m}^2 = \frac{22}{7} \times 4.9 \times 4.9\ \text{m}^2 = 75.46\ \text{m}^2$

Example 14 The adjoining figure shows two circles with the same centre. The radius of the larger circle is 10 cm and the radius of the smaller circle is 4 cm.

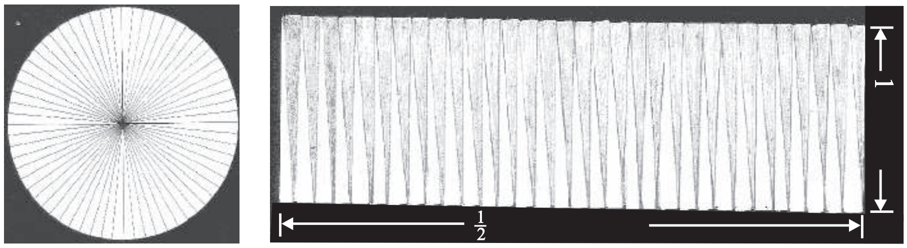


Find: (a) the area of the larger circle

(b) the area of the smaller circle

(c) the shaded area between the two circles. ($\pi = 3.14$)

మనం వృత్తాన్ని 64 సెక్టార్‌లుగా విభజించి, ఈ సెక్టార్‌లను పైన చేసినట్లుగా అమర్చినట్లయితే, ఇది దాదాపు దీర్ఘచతురస్రాన్ని ఇస్తుంది (పటం 9.28).



పటం 9.26

ఈ దీర్ఘచతురస్రం యొక్క వెడల్పు ఎంత? ఈ దీర్ఘచతురస్రం యొక్క వెడల్పు వృత్తం యొక్క వ్యాసార్ధం అంటే 'r'.

మొత్తం వృత్తం 64 సెక్టార్‌లుగా విభజించబడింది. ప్రతి వైపు మనకు 32 సెక్టార్‌లు ఉన్నాయి. దీర్ఘచతురస్రం యొక్క పొడవు 32 సెక్టార్‌ల పొడవు అవుతుంది. ఇది చుట్టుకొలతలో సగం (పటం 9.28)

వృత్త వైశాల్యం = ఈ విధంగా ఏర్పడిన దీర్ఘచతురస్రం వైశాల్యం $= l \times b$

$= $ (పరిధిలో సగం) $\times$ వ్యాసార్ధం $= \left(\frac{1}{2} \times 2\pi r\right) \times r = \pi r^2$

కావున, వృత్తం యొక్క వైశాల్యం $= \pi r^2$

ప్రయత్నించండి

గ్రాఫ్ పేపర్‌పై వివిధ వ్యాసార్ధాలతో వృత్తాలను గీయండి. చతురస్రాల సంఖ్యను లెక్కించడం ద్వారా మరియు సూత్రాన్ని ఉపయోగించి వైశాల్యాన్ని కనుగొనండి. రెండు సమాధానాలను సరిపోల్చండి.

ఉదాహరణ 12 వ్యాసార్ధం 30 సెం.మీ. ఉన్న వృత్తం యొక్క వైశాల్యం కనుగొనండి. ($\pi = 3.14$ ఉపయోగించండి).

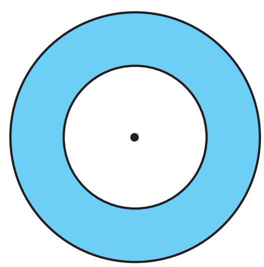
సాధన: వ్యాసార్ధం, $r = 30$ సెం.మీ.

వృత్త వైశాల్యం $= \pi r^2 = 3.14 \times 30^2 = 2{,}826$ సెం.మీ.^{2}

ఉదాహరణ 13 వృత్తాకార తోట వ్యాసం 9.8 మీ. దాని వైశాల్యం కనుగొనుము.

సాధన: వ్యాసం, $d = 9.8$ మీ. అందువలన, వ్యాసార్ధం $r = 9.8 \div 2 = 4.9$ మీ.

వృత్త వైశాల్యం $= \pi r^2 = \frac{22}{7} \times (4.9)^2$ మీ^{2} $= \frac{22}{7} \times 4.9 \times 4.9$ మీ^{2} $= 75.46$ మీ^{2}



ఉదాహరణ 14 ప్రక్కన ఉన్న పటం ఒకే కేంద్రం ఉన్న రెండు వృత్తాలను చూపుతున్నది. పెద్ద వృత్తం యొక్క వ్యాసార్ధం 10 సెం.మీ. మరియు చిన్న వృత్తం యొక్క వ్యాసార్ధం 4 సెం.మీ.

(a) పెద్ద వృత్తం యొక్క వైశాల్యం

(b) చిన్న వృత్తం యొక్క వైశాల్యం

(c) రెండు వృత్తాల మధ్య ఉన్న షేడ్ చేసిన వైశాల్యం. కనుగొనండి ($\pi = 3.14$).

SOLUTION

(a) Radius of the larger circle $= 10$ cm

So, area of the larger circle $= \pi r^2$

$= 3.14 \times 10 \times 10 = 314 \text{ cm}^2$

(b) Radius of the smaller circle $= 4$ cm

Area of the smaller circle $= \pi r^2$

$= 3.14 \times 4 \times 4 = 50.24 \text{ cm}^2$

(c) Area of the shaded region $= (314 - 50.24) \text{ cm}^2 = 263.76 \text{ cm}^2$

EXERCISE 9.2

1. Find the circumference of the circles with the following radius: (Take $\pi = \frac{22}{7}$)

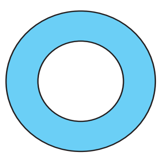
   (a) 14 cm (b) 28 mm (c) 21 cm

2. Find the area of the following circles, given that:

   (a) radius = 14 mm (Take $\pi = \frac{22}{7}$) (b) diameter = 49 m

   (c) radius = 5 cm

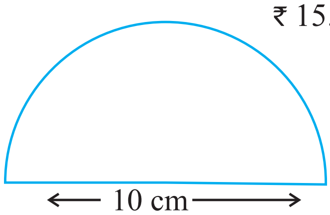
3. If the circumference of a circular sheet is 154 m, find its radius. Also find the area of the sheet. (Take $\pi = \frac{22}{7}$)



4. A gardener wants to fence a circular garden of diameter 21m. Find the length of the rope he needs to purchase, if he makes 2 rounds of fence. Also find the cost of the rope, if it costs ₹ 4 per meter. (Take $\pi = \frac{22}{7}$)

5. From a circular sheet of radius 4 cm, a circle of radius 3 cm is removed. Find the area of the remaining sheet. (Take $\pi = 3.14$)

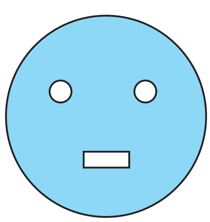
6. Saima wants to put a lace on the edge of a circular table cover of diameter 1.5 m. Find the length of the lace required and also find its cost if one meter of the lace costs ₹ 15. (Take $\pi = 3.14$)



7. Find the perimeter of the adjoining figure, which is a semicircle including its diameter.

8. Find the cost of polishing a circular table-top of diameter 1.6 m, if the rate of polishing is ₹ 15/m². (Take $\pi = 3.14$)

9. Shazli took a wire of length 44 cm and bent it into the shape of a circle. Find the radius of that circle. Also find its area. If the same wire is bent into the shape of a square, what will be the length of each of its sides? Which figure encloses more area, the circle or the square? (Take $\pi = \frac{22}{7}$)



10. From a circular card sheet of radius 14 cm, two circles of radius 3.5 cm and a rectangle of length 3 cm and breadth 1cm are removed. (as shown in the adjoining figure). Find the area of the remaining sheet. (Take $\pi = \frac{22}{7}$)

సాధన:

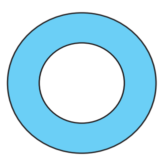
(a) పెద్ద వృత్త వ్యాసార్థం $= 10$ సెం.మీ.
కావున, పెద్ద వృత్తం వైశాల్యం $= \pi r^2$
$= 3.14 \times 10 \times 10 = 314$ సెం.మీ.^{2}

(b) చిన్న వృత్త వ్యాసార్థం $= 4$ సెం.మీ.
చిన్న వృత్తం వైశాల్యం $= \pi r^2$
$= 3.14 \times 4 \times 4 = 50.24$ సెం.మీ.^{2}

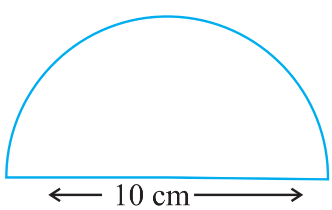
(c) షేడ్ చేసిన ప్రాంతం వైశాల్యం $= (314 - 50.24)$ సెం.మీ.$^2 = 263.76$ సెం.మీ.^{2}

అభ్యాసం 9.2

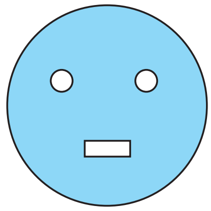
1. కింది వ్యాసార్థాలను కలిగి ఉన్న వృత్తాల యొక్క పరిధిలను కనుగొనండి: ($\pi = \frac{22}{7}$ తీసుకోండి)
   (a) 14 సెం.మీ. (b) 28 మి.మీ. (c) 21 సెం.మీ.
2. కింది వృత్తాల వైశాల్యాన్ని కనుగొనండి:
   (a) వ్యాసార్థం = 14 మి.మీ. ($\pi = \frac{22}{7}$ తీసుకోండి) (b) వ్యాసం = 49 మీ.
   (c) వ్యాసార్థం = 5 సెం.మీ.
3. వృత్తాకార షీట్ యొక్క చుట్టుకొలత 154 మీ. అయితే, దాని వ్యాసార్థం కనుగొనుము. అలాగే షీట్ యొక్క వైశాల్యం కూడా కనుగొనుము ($\pi = \frac{22}{7}$ తీసుకోండి)



4. ఒక తోటమాలి 21 మీటర్ల వ్యాసం కలిగిన వృత్తాకార తోటకి కంచె వేయాలనుకుంటున్నాడు. అతను కంచె 2 రౌండ్లు వేసిన, కొనుగోలు చేయవలసిన తాడు యొక్క పొడవును కనుగొనండి. మీటరుకు ₹ 4 ఖర్చవుతున్నట్లయితే, తాడు ధరను కూడా కనుగొనండి. ($\pi = \frac{22}{7}$ తీసుకోండి.)
5. 4 సెం.మీ. వ్యాసార్థం ఉన్న వృత్తాకార షీట్ నుండి, 3 సెం.మీ. వ్యాసార్థం ఉన్న వృత్తం తీసివేయబడింది. మిగిలిన షీట్ యొక్క వైశాల్యన్ని కనుగొనండి. ($\pi = 3.14$ తీసుకోండి)
6. సైమా 1.5 మీ. వ్యాసం కలిగిన వృత్తాకార టేబుల్ కవర్ అంచున లేస్ వేయాలనుకుంటోంది. అవసరమైన లేస్ పొడవును కనుగొనండి. ఒకమీటర్ లేస్ ఖరీదు ₹15. ($\pi = 3.14$ తీసుకోండి)



7. ప్రక్కనే పటంలో ఉన్న ఒక అర్ధ వృత్తం యొక్క చుట్టుకొలతను వ్యాసంతో సహా కనుగొనండి.
8. 1.6మీ. వ్యాసం కలిగిన వృత్తాకార టేబుల్ పై భాగాన్ని పాలిష్ చేయటానికి పాలిషింగ్ రేటు ₹15/మీ.^{2} చొప్పున ఎంత ఖర్చు అగును ($\pi = 3.14$తీసుకోండి).
9. షాజ్లీ 44 సెం.మీ. పొడవు గల తీగను తీసుకొని దానిని వృత్తాకారంలో వంచాడు. ఆ వృత్తం యొక్క వ్యాసార్థాన్ని కనుగొనండి. దాని వైశాల్యాన్ని కూడా కనుగొనండి. అదే తీగను చతురస్రాకారంలో వంచి ఉంటే, దాని ప్రతి భుజం పొడవు ఎంత ఉంటుంది? వృత్తం లేదా చతురస్రాలలో ఏది ఎక్కువ వైశాల్యం కలిగి ఉంది? ($\pi = \frac{22}{7}$ తీసుకోండి)

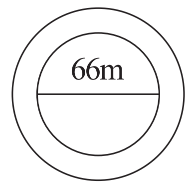


10. ప్రక్క పటంలో చూపినవిధంగా 14 సెం.మీ. వ్యాసార్థం ఉన్న వృత్తాకార కార్డ్ షీట్ నుండి, 3.5 సెం.మీ. వ్యాసార్థం కలిగిన రెండు వృత్తాలు, 3 సెం.మీ. పొడవు, 1 సెం.మీ. వెడల్పు ఉన్న దీర్ఘచతురస్రం తీసివేయగా మిగిలిన షీట్ యొక్క వైశాల్యం ($\pi = \frac{22}{7}$ తీసుకోండి)

11. A circle of radius 2 cm is cut out from a square piece of an aluminium sheet of side 6 cm. What is the area of the left over aluminium sheet? (Take $\pi = 3.14$)

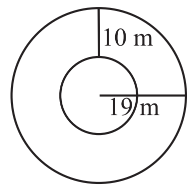
12. The circumference of a circle is 31.4 cm. Find the radius and the area of the circle? (Take $\pi = 3.14$)

13. A circular flower bed is surrounded by a path 4 m wide. The diameter of the flower bed is 66 m. What is the area of this path? ($\pi = 3.14$)



14. A circular flower garden has an area of 314 m^2. A sprinkler at the centre of the garden can cover an area that has a radius of 12 m. Will the sprinkler water the entire garden? (Take $\pi = 3.14$)

15. Find the circumference of the inner and the outer circles, shown in the adjoining figure? (Take $\pi = 3.14$)



16. How many times a wheel of radius 28 cm must rotate to go 352 m? (Take $\pi = \frac{22}{7}$)

17. The minute hand of a circular clock is 15 cm long. How far does the tip of the minute hand move in 1 hour. (Take $\pi = 3.14$)

What have We Discussed?

1. Area of a parallelogram = base × height

2. Area of a triangle = $\frac{1}{2}$ (area of the parallelogram generated from it)

$$= \frac{1}{2} \times \text{base} \times \text{height}$$

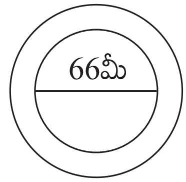
3. The distance around a circular region is known as its circumference.

Circumference of a circle = πd, where d is the diameter of a circle and $\pi = \frac{22}{7}$ or 3.14 (approximately).

4. Area of a circle = πr^2, where r is the radius of the circle.

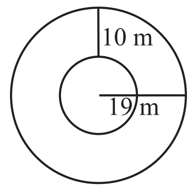
11. 6 సెం.మీ. భుజం గల చతురస్రాకారపు అల్యూమినియం షీట్ నుండి 2 సెంటీమీటర్ల వ్యాసార్థం గల వృత్తం కత్తిరించబడింది. మిగిలిన అల్యూమినియం షీట్ యొక్క వైశాల్యం ఎంత? ($\pi = 3.14$ తీసుకోండి)

12. వృత్త పరిధి 31.4 సెం.మీ. వృత్తం యొక్క వ్యాసార్థం మరియు వైశాల్యాన్ని కనుగొనండి? ($\pi = 3.14$ తీసుకోండి)



13. ఒక వృత్తాకార పూల తోట చుట్టూ 4 మీ. వెడల్పుగల బాట ఉంది. పూల తోట యొక్క వ్యాసం 66 మీ. ఈ బాట యొక్క వైశాల్యం ఎంత ? ($\pi = 3.14$)

14. వృత్తాకార పూల తోట 314 మీ^{2} వైశాల్యం కలిగి ఉంది. తోట మధ్యలో ఉన్న స్ప్రింక్లర్ 12 మీటర్ల వ్యాసార్థం ఉన్న ప్రాంతాన్ని కవర్ చేయగలదు. స్ప్రింక్లర్ తోట మొత్తానికి నీళ్లిస్తుందా? ($\pi = 3.14$ తీసుకోండి)



15. ప్రక్క పటంలో చూపిన విధంగా లోపలి మరియు బయటి వృత్తాల చుట్టుకొలతను కనుగొనండి? ($\pi = 3.14$ తీసుకోండి)

16. 28 సెంటీమీటర్ల వ్యాసార్థం ఉన్న చక్రం 352 మీటర్లు వెళ్లాలంటే అది ఎన్నిసార్లు తిరగాలి? ($\pi = \frac{22}{7}$ తీసుకోండి)

17. వృత్తాకార గడియారం యొక్క నిమిషాల ముల్లు పొడవు 15 సెం.మీ. నిమిషాల ముల్లు యొక్క కొన 1 గంటలో ఎంత దూరం కదులుతుంది. ($\pi = 3.14$ తీసుకోండి)

మనం ఏం చర్చించాం?

1. సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం = భూమి × ఎత్తు

2. త్రిభుజ వైశాల్యం $= \frac{1}{2}$ (ఆ త్రిభుజంలో ఏర్పడిన సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం)

$= \frac{1}{2}$ × భూమి × ఎత్తు

3. వృత్తాకార ప్రాంతం చుట్టూ ఉన్న దూరాన్ని దాని వృత్త పరిధి అంటాం.

వృత్త పరిధి $= \pi d$, d వ్యాసం మరియు $\pi = \frac{22}{7}$

లేదా 3.14 (సుమారుగా).

4. వృత్త వైశాల్యం $= \pi r^2$, ఇచ్చట r వృత్త వ్యాసార్థం.

Algebraic Expressions

Chapter 10

10.1 Introduction

We have already come across simple algebraic expressions like $x + 3$, $y - 5$, $4x + 5$, $10y - 5$ and so on. In Class VI, we have seen how these expressions are useful in formulating puzzles and problems. We have also seen examples of several expressions in the chapter on simple equations.

Expressions are a central concept in algebra. This Chapter is devoted to algebraic expressions. When you have studied this Chapter, you will know how algebraic expressions are formed, how they can be combined, how we can find their values and how they can be used.

10.2 How are Expressions Formed?

We now know very well what a variable is. We use letters $x, y, l, m, \ldots$ etc. to denote variables. A **variable** can take various values. Its value is not fixed. On the other hand, a **constant** has a fixed value. Examples of constants are: 4, 100, –17, etc.

We combine variables and constants to make algebraic expressions. For this, we use the operations of addition, subtraction, multiplication and division. We have already come across expressions like $4x + 5$, $10y - 20$. The expression $4x + 5$ is obtained from the variable x, first by multiplying x by the constant 4 and then adding the constant 5 to the product. Similarly, $10y - 20$ is obtained by first multiplying y by 10 and then subtracting 20 from the product.

The above expressions were obtained by combining variables with constants. We can also obtain expressions by combining variables with themselves or with other variables.

Look at how the following expressions are obtained:

$$x^2,\ 2y^2,\ 3x^2 - 5,\ xy,\ 4xy + 7$$

(i) The expression x^2 is obtained by multiplying the variable x by itself;

$$x \times x = x^2$$

Just as 4×4 is written as 4^2, we write $x \times x = x^2$. It is commonly read as x squared.

బీజీయ సమాసాలు

అధ్యాయం 10

S7X5MZ

10.1 పరిచయం

$x + 3$, $y - 5$, $4x + 5$, $10y - 5$ వంటి సాధారణ బీజీయ సమాసాలను మనం ఇప్పటికే చూశాం. పజిల్స్ మరియు సమస్యలను రూపొందించడంలో ఈ సమాసాలు ఎలా ఉపయోగపడతాయో మనం VI వ తరగతిలో చూశాం. సామాన్య సమీకరణాల అధ్యాయంలో అనేక సమాసాలు ఉదాహరణలను కూడా మనం చూశాం.

సమాసాలు బీజగణితంలో ఒక కేంద్ర భావన వంటివి. ఈ అధ్యాయం బీజగణిత సమాసాలకు అంకితం చేయబడింది. బీజగణిత సమాసాలు ఎలా ఏర్పడతాయి, వాటిని ఎలా కలపవచ్చు, వాటి విలువలను మనం ఎలా కనుగొనవచ్చు మరియు వాటిని ఎలా ఉపయోగించవచ్చో మీరు ఈ అధ్యాయాన్ని చదివినప్పుడు తెలుసుకుంటారు.

10.2 సమాసాలు ఎలా ఏర్పడతాయి?

చరరాశి అంటే ఏమిటో మనకు ఇప్పుడు బాగా తెలుసు. మనం $x, y, l, m, \ldots$ వంటి అక్షరాలను ఉపయోగించి చరరాశులను సూచిస్తాం. ఒక **చరరాశి** వివిధ విలువలను తీసుకోవచ్చు. దాని విలువ స్థిరంగా లేదు. మరోవైపు, **స్థిరరాశులు** స్థిర విలువను కలిగి ఉంటాయి. స్థిరరాశులకు ఉదాహరణలు: 4, 100, –17 మొదలైనవి.

బీజగణిత సమాసాలు చేయడానికి మనం చరరాశులను మరియు స్థిరరాశులను మిళితం చేస్తాం. దీని కోసం, మనం సంకలనం, వ్యవకలనం, గుణకారం మరియు భాగహారాల వంటి ప్రక్రియలను ఉపయోగిస్తాం. మనం ఇప్పటికే $4x + 5$, $10y - 20$ వంటి సమాసాలను చూశాము. x అనే చరరాశి నుంచి $4x + 5$ అనే సమాసం పొందుతాం. మొదట x ను స్థిరరాశి 4తో గుణించడం ద్వారా మరియు తరువాత లబ్ధానికి స్థిరరాశి 5 ను కలపడం ద్వారా పొందవచ్చు. ఇదేవిధంగా, మొదట y ని 10తో గుణించి ద్వారా ఆ లబ్ధం నుంచి 20 ని తీసివేయడం ద్వారా $10y - 20$ పొందుతాం.

చరరాశులను స్థిరరాశులతో కలపడం ద్వారా పై సమాసాలను పొందుతాం. చరరాశిని తమతో లేదా ఇతర చరరాశులతో కలపడం ద్వారా కూడా మనం సమాసాలను పొందవచ్చు.

కింది సమాసాలను ఎలా పొందమో చూడండి:

$$x^2,\ 2y^2,\ 3x^2 - 5,\ xy,\ 4xy + 7$$

(i) x అనే చరరాశిని దానితోనే గుణించడం ద్వారా x^2 అనే సమాసాన్ని పొందవచ్చు.

$$x \times x = x^2$$

4×4ను 4^2 అని వ్రాసినట్లే, $x \times x = x^2$ అని రాస్తాం. దీనిని సాధారణంగా x స్క్వేర్డ్ అని చదువుతాం.

Later, when you study the chapter 'Exponents and Powers' you will realise that x^2 may also be read as x raised to the power 2.

In the same manner, we can write $\quad x \times x \times x = x^3$

Commonly, x^3 is read as 'x cubed'. Later, you will realise that x^3 may also be read as x raised to the power 3.

$x, x^2, x^3, \ldots$ are all algebraic expressions obtained from x.

(ii) The expression $2y^2$ is obtained from y: $\quad 2y^2 = 2 \times y \times y$

Here by multiplying y with y we obtain y^2 and then we multiply y^2 by the constant 2.

(iii) In $(3x^2 - 5)$ we first obtain x^2, and multiply it by 3 to get $3x^2$. From $3x^2$, we subtract 5 to finally arrive at $3x^2 - 5$.

(iv) In xy, we multiply the variable x with another variable y. Thus, $x \times y = xy$.

(v) In $4xy + 7$, we first obtain xy, multiply it by 4 to get $4xy$ and add 7 to $4xy$ to get the expression.

TRY THESE

Describe how the following expressions are obtained:

$7xy + 5, x^2y, 4x^2 - 5x$

10.3 TERMS OF AN EXPRESSION

We shall now put in a systematic form what we have learnt above about how expressions are formed. For this purpose, we need to understand what **terms** of an expression and their **factors** are.

Consider the expression $(4x + 5)$. In forming this expression, we first formed $4x$ separately as a product of 4 and x and then added 5 to it. Similarly consider the expression $(3x^2 + 7y)$. Here we first formed $3x^2$ separately as a product of 3, x and x. We then formed $7y$ separately as a product of 7 and y. Having formed $3x^2$ and $7y$ separately, we added them to get the expression.

You will find that the expressions we deal with can always be seen this way. They have parts which are formed separately and then added. Such parts of an expression which are formed separately first and then added are known as **terms**. Look at the expression $(4x^2 - 3xy)$. We say that it has two terms, $4x^2$ and $-3xy$. The term $4x^2$ is a product of 4, x and x, and the term $(-3xy)$ is a product of (-3), x and y.

Terms are added to form expressions. Just as the terms $4x$ and 5 are added to form the expression $(4x + 5)$, the terms $4x^2$ and $(-3xy)$ are added to give the expression $(4x^2 - 3xy)$. This is because $4x^2 + (-3xy) = 4x^2 - 3xy$.

Note, the minus sign (–) is included in the term. In the expression $4x^2 - 3xy$, we took the term as $(-3xy)$ and not as $(3xy)$. That is why we do not need to say that terms are 'added or subtracted' to form an expression; just 'added' is enough.

Factors of a term

We saw above that the expression $(4x^2 - 3xy)$ consists of two terms $4x^2$ and $-3xy$. The term $4x^2$ is a product of 4, x and x; we say that 4, x and x are the factors of the term $4x^2$. A term is a product of its factors. The term $-3xy$ is a product of the factors -3, x and y.

తరువాత మనం ఘాతాలు మరియు ఘాతాంకాలు అనే అధ్యాయాన్ని అధ్యయనం చేసేటప్పుడు x^2 ను, x ను ఘాతమును 2కు పెంచినట్లుగా (x raised to the power 2) చదువుతాం.

ఇదే విధంగా $x \times x \times x = x^3$ అని మనం రాయవచ్చు.

సాధారణంగా, x^3 ని 'x క్యూబ్డ్' అని చదవుతారు. తరువాత, x ని ఘాతము 3 కి పెంచినట్లుగా (x raised to the power 3) చదవవచ్చని గ్రహిస్తాం.

$x, x^2, x^3, \ldots$ అన్ని బీజగణిత సమాసాలు x నుండి పొందబడ్డాయి.

(ii) $2y^2$ అనే సమాసం y నుంచి పొందబడింది: $2y^2 = 2 \times y \times y$ ఇక్కడ y ని y తో గుణించడం ద్వారా మనం y^2 ను పొందుతాము మరియు తరువాత మనం y^2 ను స్థిరరాశి 2 తో గుణిస్తాం.

(iii) $(3x^2 - 5)$లో మనం మొదటగా x^2ను పొందాలి, 3 చే గుణించగా $3x^2$ వచ్చును. $3x^2$ నుండి 5 ను తీసివేయగా చివరకు $3x^2 - 5$ వస్తుంది.

(iv) xy లో, మనం చరరాశి x ని మరో చరరాశి y తోగుణిస్తాం. అందువలన, $x \times y = xy$

(v) $4xy + 7$ లో, మనం మొదట xy ని పొందుతాము. $4xy$ ని పొందడానికి దానిని 4తో గుణించాలి, సమాసము పొందడానికి 7 ను $4xy$ కు కూడాలి.

ప్రయత్నించండి

కింది సమాసాలు ఎలా ఏర్పడ్డాయో వివరించండి.

$7xy + 5,\ x^2y,\ 4x^2 - 5x$

10.3 సమాసాలలోని పదాలు

సమాసాలు ఎలా ఏర్పడతాయనే దాని గురించి మనం పైన నేర్చుకున్నాము. వాటిని ఇప్పుడు ఒక క్రమబద్ధమైన రూపంలో ఉంచుదాం. సమాసం యొక్క **పదాలు,** వాటి **కారణాంకాలు** ఏమిటో మనం అర్థం చేసుకోవాలి.

$(4x + 5)$ సమాసాన్ని గమనించండి. ఈ సమాసాన్ని రూపొందించడంలో, మనం మొదట $4x$ ను విడిగా 4, x ల లబ్ధంగా రూపొందించి దానికి 5 కలిపాము అదేవిధంగా $(3x^2 + 7y)$ సమాసాన్ని పరిగణించండి. ఇక్కడ మనం మొదట $3x^2$ ను విడిగా 3, x మరియు x యొక్క లబ్ధంగా రూపొందించాం. అప్పుడు మనం 7 మరియు y యొక్క లబ్ధంగా $7y$ ని విడిగా రూపొందించాం. $3x^2$, $7y$ లను విడిగా ఏర్పరచిన తరువాత, సమాసంను పొందడానికి మనం వాటిని కలిపాము.

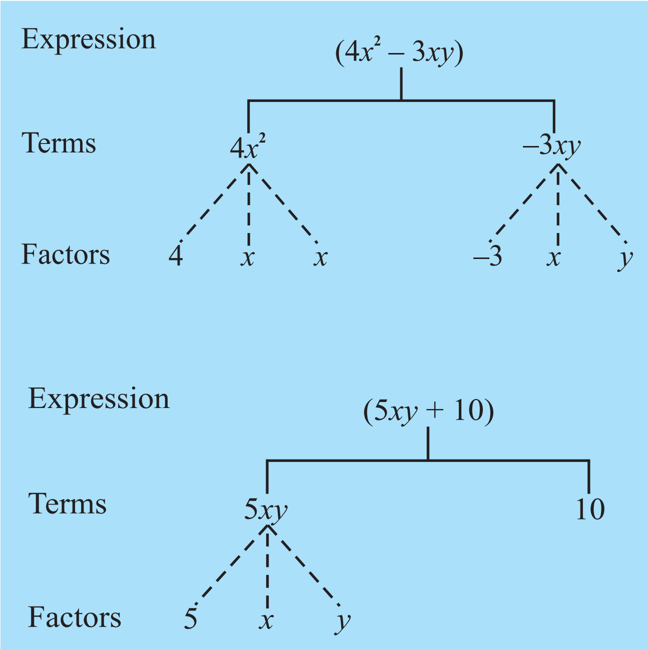
మనం వ్యవహరించే సమాసాలను ఈ విధంగా ఎల్లప్పుడూ చూడవచ్చని మీరు కనుగొంటారు. అవి విడిగా ఏర్పడిన భాగాలను కలిగి ఉంటాయి. తరువాత కలపబడతాయి. ఒక సమాసం యొక్క అటువంటి భాగాలు మొదట విడిగా ఏర్పడతాయి. తరువాత కలుపబడతాయి. వీటిని పదాలు అంటారు. అదేవిధంగా $(4x^2 - 3xy)$ సమాసాన్ని చూడండి. దీనికి $4x^2$, $-3xy$ అనే రెండు పదాలు ఉన్నాయని మనం చెపుతాం. $4x^2$ అనే పదం 4, x మరియు x, యొక్క లబ్ధం,పదం $(-3xy)$ అనేది (-3), x, y యొక్క లబ్ధం.

సమాసాలను రూపొందించడానికి పదాలు కలుపబడతాయి. $(4x + 5)$ సమాసాన్ని రూపొందించడానికి $4x$, 5 అనే పదాలు కలుపుతాం. $(4x^2 - 3xy)$ సమాసాన్ని పొందడానికి $4x^2$ మరియు $(-3xy)$ అనే పదాలను కలుపుతాం. దీనికి కారణం $4x^2 + (-3xy) = 4x^2 - 3xy$.

> గమనిక: తీసివేత గుర్తు (–) పదంలో చేర్చబడింది. $4x^2 - 3xy$, సమాసంలో మనం పదాన్ని $(-3xy)$ గా తీసుకున్నాం. $(3xy)$ గా కాదు. అందుకే సమాసాన్ని రూపొందించడానికి పదాలు 'కలపడం లేదా తీసివేయడం' అని మనం చెప్పనవసరం లేదు. కేవలం 'కలపడం' సరిపోతుంది.

ఒక పదం యొక్క కారణాంకాలు

$(4x^2 - 3xy)$ సమాసం, $4x^2$ మరియు $-3xy$ అనే రెండు పదాలను కలిగి ఉంటుందని మనం పైన చూశాం. $4x^2$ అనే పదం 4, x మరియు x ల లబ్ధము; 4, x లను $4x^2$ అనే పదానికి కారణాంకాలు అని చెప్పవచ్చు. పదం దాని కారణాంకాలలబ్ధం. $-3xy$ అనే పదం -3, x మరియు y అనే కారణాంకాల లబ్ధం.



We can represent the terms and factors of the terms of an expression conveniently and elegantly by a tree diagram. The tree for the expression $(4x^2 - 3xy)$ is as shown in the adjacent figure.

Note, in the tree diagram, we have used dotted lines for factors and continuous lines for terms. This is to avoid mixing them.

Let us draw a tree diagram for the expression $5xy + 10$.

The factors are such that they cannot be further factorised. Thus we do not write $5xy$ as $5 \times xy$, because xy can be further factorised. Similarly, if x^3 were a term, it would be written as $x \times x \times x$ and not $x^2 \times x$. Also, remember that 1 is not taken as a separate factor.

TRY THESE

1. What are the terms in the following expressions? Show how the terms are formed. Draw a tree diagram for each expression:

   $8y + 3x^2$, $7mn - 4$, $2x^2y$.

2. Write three expression each having 4 terms.

Coefficients

We have learnt how to write a term as a product of factors. One of these factors may be numerical and the others algebraic (i.e., they contain variables). The numerical factor is said to be the numerical coefficient or simply the **coefficient** of the term. It is also said to be the coefficient of the rest of the term (which is obviously the product of algebraic factors of the term). Thus in $5xy$, 5 is the coefficient of the term. It is also the coefficient of xy. In the term $10xyz$, 10 is the coefficient of xyz, in the term $-7x^2y^2$, -7 is the coefficient of x^2y^2.

When the coefficient of a term is +1, it is usually omitted. For example, $1x$ is written as x; $1\,x^2y^2$ is written as x^2y^2 and so on. Also, the coefficient (-1) is indicated only by the minus sign. Thus $(-1)\,x$ is written as $-x$; $(-1)\,x^2y^2$ is written as $-x^2y^2$ and so on.

TRY THESE

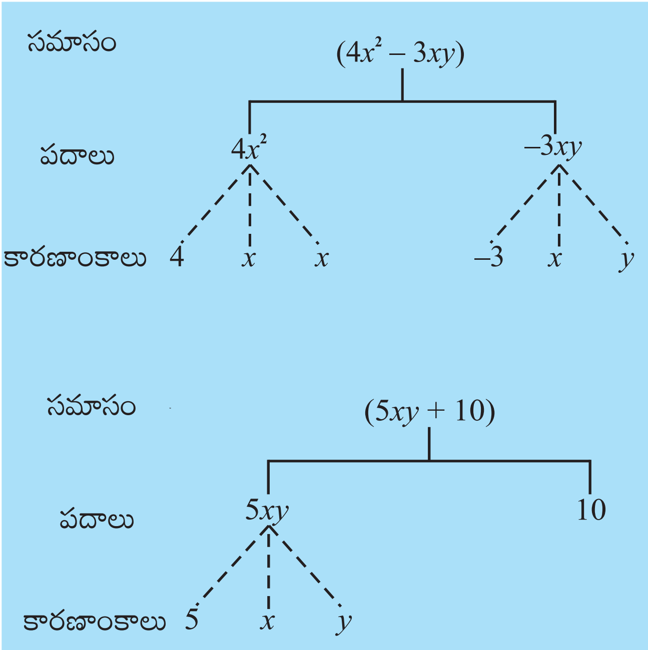
Identify the coefficients of the terms of following expressions:

$4x - 3y$, $a + b + 5$, $2y + 5$, $2xy$

Sometimes, the word 'coefficient' is used in a more general way. Thus we say that in the term $5xy$, 5 is the coefficient of xy, x is the coefficient of $5y$ and y is the coefficient of $5x$. In $10xy^2$, 10 is the coefficient of xy^2, x is the coefficient of $10y^2$ and y^2 is the coefficient of $10x$. Thus, in this more general way, a coefficient may be either a numerical factor or an algebraic factor or a product of two or more factors. It is said to be the coefficient of the product of the remaining factors.

EXAMPLE 1 Identify, in the following expressions, terms which are not constants. Give their numerical coefficients:

$$xy + 4,\ 13 - y^2,\ 13 - y + 5y^2,\ 4p^2q - 3pq^2 + 5$$



మనం ఒక సమాసం యొక్క పదాలను, పదాల యొక్క కారణాంకాలను అనుకూలంగా, అందంగా వృక్ష చిత్రం తో సూచించవచ్చు. $(4x^2 - 3xy)$ సమాసం కొరకు పక్కనున్న వృక్షచిత్రంలో చూపబడింది.

> గమనిక: పటంలో బిందురూపంలో ఉన్న గీతలు కారణాంకాలను, పూర్తి రేఖ రూపంలో వున్న గీతలు పదాలను సూచిస్తాయి. ఇందువలన అవి కలిసిపోకుండా ఉంటాయి.

ఇప్పుడు $5xy + 10$ అనే సమాసానికి వృక్ష చిత్రాన్ని గీద్దాం

కారణాంకాలు మరింతగా కారణాంక విభజన చేయలేనివిగా ఉంటాయి. అందువల్ల మనం $5xy$ ని $5 \times xy$ గా రాయము, ఎందుకంటే xy ని మరింత కారణాంక విభజన చేయవచ్చు. ఇదేవిధంగా ఒకవేళ x^3 అనేది ఒక పదం అయితే, దానిని $x \times x \times x$ వలె రాయాలి మరియు $x^2 \times x$ గా కాదు. అలాగే, 1 ను ప్రత్యేక కారణాంకంగా తీసుకోకూడదని గుర్తుంచుకోండి.

గుణకాలు

కారణాంకాల లబ్ధముగా ఒక పదాన్ని ఎలా రాయాలో మనం నేర్చుకున్నాం. ఈ కారణాంకాలలో ఒకటి సంఖ్యాపరంగా, మరికొన్ని బీజీయంగా ఉండవచ్చు. (అనగా, అవి చరరాశులను కలిగి ఉంటాయి) సంఖ్యా కారణాంకాన్ని సంఖ్యాగుణకం లేదా పదం యొక్క **గుణకం** అని అంటారు. ఇది మిగిలిన పదం యొక్క గుణకం అని కూడా చెప్పబడింది, (ఇది స్పష్టంగా పదం యొక్క బీజీయ కారణాంకాల లబ్ధము). అందువల్ల $5xy$ లో, 5 అనేది పదం యొక్క గుణకం. ఇది xy యొక్క గుణకం కూడా. $10xyz$ అనే పదంలో, 10 అనేది xyz యొక్క గుణకం $-7x^2y^2$, పదంలో -7 అనేది x^2y^2 యొక్క గుణకం.

ప్రయత్నించండి

1. ఈ కింది వాటిలో పదాలు గురించి చెప్పండి. ఈ పదాలు ఎలా ఏర్పడ్డాయో వృక్ష చిత్రం ద్వారా తెలపండి.

   $8y + 3x^2$, $7mn - 4$, $2x^2y$.
2. నాలుగు పదాలు ఉండేట్లుగా మూడు సమాసాలను తయారుచేయండి.

ఒక పదం యొక్క గుణకం +1 అయినప్పుడు, అది సాధారణంగా వదిలివేయబడుతుంది. ఉదాహరణకు, $1x$ ను x గా రాస్తారు; $1\,x^2y^2$ ను x^2y^2 గా రాస్తారు. అలాగే, గుణకం (-1) ను మైనస్ గుర్తు ద్వారా మాత్రమే సూచించబడుతుంది. ఈ విధంగా $(-1)\,x$ ను $-x$ గా రాస్తారు; $(-1)\,x^2y^2$ ను $-x^2y^2$ మొదలైనవిగా రాస్తారు.

ప్రయత్నించండి

కింద ఇవ్వబడిన సమాసాలలో గుణకాలను గుర్తించండి.

$4x - 3y, a + b + 5, 2y + 5, 2xy$

కొన్నిసార్లు, 'గుణకం' అనే పదాన్ని సాధారణంగా ఉపయోగిస్తారు. ఈ విధంగా మనం $5xy$ అనే పదంలో, 5 అనేది xy యొక్క గుణకం, x అనేది $5y$ యొక్క గుణకం మరియు y అనేది $5x$ యొక్క గుణకం. $10xy^2$ లో, 10 అనేది xy^2 యొక్క గుణకం, x అనేది $10y^2$ యొక్క గుణకం మరియు y^2 అనేది $10x$ యొక్క గుణకం. అందువలన, ఈ మరింత సాధారణ పద్ధతిలో, ఒక గుణకం సంఖ్యా కారకం లేదా కారణాంకం లేదా రెండు లేదా అంతకంటే ఎక్కువక కారణాంకాల లబ్ధం కావచ్చు. ఇది మిగిలిన కారణాంకాల లబ్ధం యొక్క గుణకం అని చెప్పబడింది.

ఉదాహరణ 1 ఈ క్రింది సమాసాలలో స్థిరరాశులు కాని పదాలను గుర్తించండి. వాటి యొక్క సంఖ్యా గుణకాలను ఇవ్వండి.

$$xy + 4,\ 13 - y^2,\ 13 - y + 5y^2,\ 4p^2q - 3pq^2 + 5$$

SOLUTION

S. No.	Expression	Term (which is not a Constant)	Numerical Coefficient
(i)	$xy + 4$	xy	1
(ii)	$13 - y^2$	$-y^2$	-1
(iii)	$13 - y + 5y^2$	$-y$ $5y^2$	-1 5
(iv)	$4p^2q - 3pq^2 + 5$	$4p^2q$ $-3pq^2$	4 -3

EXAMPLE 2

(a) What are the coefficients of x in the following expressions?

$$4x - 3y,\ 8 - x + y,\ y^2x - y,\ 2z - 5xz$$

(b) What are the coefficients of y in the following expressions?

$$4x - 3y,\ 8 + yz,\ yz^2 + 5,\ my + m$$

SOLUTION

(a) In each expression we look for a term with x as a factor. The remaining part of that term is the coefficient of x.

S. No.	Expression	Term with Factor x	Coefficient of x
(i)	$4x - 3y$	$4x$	4
(ii)	$8 - x + y$	$-x$	-1
(iii)	$y^2x - y$	y^2x	y^2
(iv)	$2z - 5xz$	$-5xz$	$-5z$

(b) The method is similar to that in (a) above.

S. No.	Expression	Term with factor y	Coefficient of y
(i)	$4x - 3y$	$-3y$	-3
(ii)	$8 + yz$	yz	z
(iii)	$yz^2 + 5$	yz^2	z^2
(iv)	$my + m$	my	m

10.4 LIKE AND UNLIKE TERMS

When terms have the same algebraic factors, they are **like** terms. When terms have different algebraic factors, they are **unlike** terms. For example, in the expression $2xy - 3x + 5xy - 4$, look at the terms $2xy$ and $5xy$. The factors of $2xy$ are 2, x and y. The factors of $5xy$ are 5, x and y. Thus their algebraic (i.e., those which contain variables) factors are the same and

సాధన:

వ.సం.	సమాసము	పదం (స్థిర సంఖ్య కానిది)	సంఖ్యా గుణకం
(i)	$xy + 4$	xy	1
(ii)	$13 - y^2$	$-y^2$	-1
(iii)	$13 - y + 5y^2$	$-y$ $5y^2$	-1 5
(iv)	$4p^2q - 3pq^2 + 5$	$4p^2q$ $-3pq^2$	4 -3

ఉదాహరణ 2

(a) కింది సమాసాలలో x యొక్క గుణకాలు ఏవి?

$$4x - 3y,\ 8 - x + y,\ y^2x - y,\ 2z - 5xz$$

(b) కింది సమాసాలలో y యొక్క గుణకాలు ఏవి?

$$4x - 3y,\ 8 + yz,\ yz^2 + 5,\ my + m$$

సాధన:

(a) ప్రతి సమాసంలోను మనం x ను ఒక కారణాంకంగా ఉన్న పదం కోసం చూశాం. ఆ పదం యొక్క మిగిలిన భాగం x యొక్క గుణకం.

వ.సం.	సమాసము	x కారణాంకంగా గల పదం	x యొక్క గుణకం
(i)	$4x - 3y$	$4x$	4
(ii)	$8 - x + y$	$-x$	-1
(iii)	$y^2x - y$	y^2x	y^2
(iv)	$2z - 5xz$	$-5xz$	$-5z$

(b) ఈ పద్ధతి (a) లో మాదిరిగానే ఉంటుంది.

వ.సం.	సమాసము	y కారణాంకంగా గల పదం	y యొక్క గుణకం
(i)	$4x - 3y$	$-3y$	-3
(ii)	$8 + yz$	yz	z
(iii)	$yz^2 + 5$	yz^2	z^2
(iv)	$my + m$	my	m

10.4 సజాతి మరియు విజాతి పదాలు

పదాలు ఒకే బీజీయ కారణాంకాలను కలిగి ఉంటే అవి **సజాతి** పదాలు. పదాలు వేర్వేరు బీజీయ కారణాంకాలను కలిగివుంటే అవి **విజాతి** పదాలు. ఉదా: $2xy - 3x + 5xy - 4$ సమాసంలో $2xy$, $5xy$. పదాలను చూడండి. $2xy$ యొక్క కారణాంకాలు 2, x మరియు y. $5xy$ యొక్క కారణాంకాలు 5, x మరియు y. అందువలన వాటి బీజీయ కారణాంకాలు (అంటే, చరరాశులను కలిగివున్నవి)

TRY THESE

Group the like terms together from the following:

$12x$, 12, $-25x$, -25, $-25y$, 1, x, $12y$, y

hence they are **like** terms. On the other hand the terms $2xy$ and $-3x$, have different algebraic factors. They are **unlike** terms. Similarly, the terms, $2xy$ and 4, are unlike terms. Also, the terms $-3x$ and 4 are unlike terms.

10.5 Monomials, Binomials, Trinomials and Polynomials

An expression with only one term is called a **monomial**; for example, $7xy$, $-5m$, $3z^2$, 4 etc.

TRY THESE

Classify the following expressions as a monomial, a binomial or a trinomial: a, $a + b$, $ab + a + b$, $ab + a + b - 5$, xy, $xy + 5$, $5x^2 - x + 2$, $4pq - 3q + 5p$, 7, $4m - 7n + 10$, $4mn + 7$.

An expression which contains two unlike terms is called a **binomial**; for example, $x + y$, $m - 5$, $mn + 4m$, $a^2 - b^2$ are binomials. The expression $10pq$ is not a binomial; it is a monomial. The expression $(a + b + 5)$ is not a binomial. It contains three terms.

An expression which contains three terms is called a **trinomial**; for example, the expressions $x + y + 7$, $ab + a + b$, $3x^2 - 5x + 2$, $m + n + 10$ are trinomials. The expression $ab + a + b + 5$ is, however not a trinomial; it contains four terms and not three. The expression $x + y + 5x$ is not a trinomial as the terms x and $5x$ are like terms.

In general, an expression with one or more terms is called a **polynomial**. Thus a monomial, a binomial and a trinomial are all polynomials.

EXAMPLE 3 State with reasons, which of the following pairs of terms are of like terms and which are of unlike terms:

(i) $7x$, $12y$ (ii) $15x$, $-21x$ (iii) $-4ab$, $7ba$ (iv) $3xy$, $3x$

(v) $6xy^2$, $9x^2y$ (vi) pq^2, $-4pq^2$ (vii) mn^2, $10mn$

SOLUTION

S. No.	Pair	Factors	Algebraic factors same or different	Like/ Unlike terms	Remarks
(i)	$7x$ $12y$	$7, x$ $12, y$	Different	Unlike	The variables in the terms are different.
(ii)	$15x$ $-21x$	$15, x$ $-21, x$	Same	Like	
(iii)	$-4ab$ $7\,ba$	$-4, a, b$ $7, a, b$	Same	Like	Remember $ab = ba$

ప్రయత్నించండి

కింది వాటి నుండి సజాతి పదాలను కలిపి గ్రూపు చేయండి.

$12x, 12, -25x, -25, -25y, 1, x, 12y, y$

ఒకే విధంగా ఉంటాయి. అందువలననే అవి **సజాతి** పదాలు. $2xy$, $-3x$ అనే పదాలు వేర్వేరు బీజగణిత కారణాంకాలు కలిగివున్నాయి. అవి **విజాతి** పదాలు. ఇదేవిధంగా $2xy$, 4 విజాతి పదాలు. అలాగే $-3x$, 4 పదాలు విజాతి పదాలు.

10.5 ఏకపది, ద్విపది, త్రిపది మరియు బహుపదులు

ఒకే ఒక పదంతో కూడిన సమాసాన్ని **ఏకపది** అంటారు. ఉదా: $7xy$, $-5m$, $3z^2$, 4 మొదలగునవి.

రెండు విజాతి పదాలను కలిగివున్న సమాసాన్ని **ద్విపది** అంటారు. ఉదాహరణకు $x + y$, $m - 5$, $mn + 4m$, $a^2 - b^2$ లు ద్విపదులు. $10pq$ అనే పదబంధ ద్విపదం కాదు; ఇది ఏకపది. $(a + b + 5)$ అనే సమాసం ద్విపది కాదు. ఇందులో మూడు పదాలు ఉన్నాయి.

ప్రయత్నించండి

కింద ఇవ్వబడిన సమాసాలు ఏకపది, ద్విపది, త్రిపది గా వర్గీకరించండి: a, $a + b$, $ab + a + b$, $ab + a + b - 5$, xy, $xy + 5$, $5x^2 - x + 2$, $4pq - 3q + 5p$, 7, $4m - 7n + 10$, $4mn + 7$.

మూడు పదాలను కలిగి ఉన్న ఒక సమాసాన్ని **త్రిపది** అంటారు. ఉదాహరణకు $x + y + 7$, $ab + a + b$, $3x^2 - 5x + 2$, $m + n + 10$ అనే సమాసాలు త్రిపదులు. $ab + a + b + 5$ అనే సమాసం ఎలాగైనా త్రిపది కాదు; దీనిలో నాలుగు పదాలు ఉన్నాయి మరియు మూడు కాదు. $x + y + 5x$ అనే సమాసం త్రిపది కాదు, ఎందుకంటే x మరియు $5x$ అనే పదాలు సజాతి పదాలు.

సాధారణంగా, ఒకటి లేదా అంతకంటే ఎక్కువ పదాలతో కూడిన సమాసమును **బహుపది** అంటారు. అందువలన ఏకపది, ద్విపది మరియు త్రిపది అన్నీ బహుపదులే.

ఉదాహరణ 3 కింది ఇవ్వబడిన పదాల జతలలో ఏవి సజాతి పదాలో, ఏవి విజాతి పదాలో కారణాలను పేర్కొనండి.

(i) $7x, 12y$ (ii) $15x, -21x$ (iii) $-4ab, 7ba$ (iv) $3xy, 3x$

(v) $6xy^2, 9x^2y$ (vi) $pq^2, -4pq^2$ (vii) $mn^2, 10mn$

సాధన:

వ.సం.	జత	కారణాంకాలు	ఒకే విధమైన లేదా భిన్నమైన బీజీయ కారణాంకాలు	సజాతి/ విజాతి పదాలు	వ్యాఖ్య
(i)	$7x$ $12y$	$7, x$ $12, y$	భిన్నమైనవి	విజాతి	పదాలలోని చరరాశులు వేరు వేరుగా (భిన్నంగా ఉన్నాయి)
(ii)	$15x$ $-21x$	$15, x$ $-21, x$	ఒకే విధమైనవి	సజాతి	
(iii)	$-4ab$ $7\ ba$	$-4, a, b$ $7, a, b$	ఒకే విధమైనవి	సజాతి	గుర్తుకు తెచ్చుకోండి $ab = ba$

(iv)	$3xy$ $3x$	$3, x, y$ $3, x$	Different	Unlike	The variable y is only in one term.
(v)	$6xy^2$ $9x^2y$	$6, x, y, y$ $9, x, x, y$	Different	Unlike	The variables in the two terms match, but their powers do not match.
(vi)	pq^2 $-4pq^2$	$1, p, q, q$ $-4, p, q, q$	Same	Like	Note, numerical factor 1 is not shown

Following simple steps will help you to decide whether the given terms are **like** *or* **unlike** *terms:*

(i) Ignore the numerical coefficients. Concentrate on the algebraic part of the terms.

(ii) Check the variables in the terms. They must be the same.

(iii) Next, check the powers of each variable in the terms. They must be the same.

Note that in deciding like terms, two things do not matter (1) the numerical coefficients of the terms and (2) the order in which the variables are multiplied in the terms.

EXERCISE 10.1

1. Get the algebraic expressions in the following cases using variables, constants and arithmetic operations.

(i) Subtraction of z from y.

(ii) One-half of the sum of numbers x and y.

(iii) The number z multiplied by itself.

(iv) One-fourth of the product of numbers p and q.

(v) Numbers x and y both squared and added.

(vi) Number 5 added to three times the product of numbers m and n.

(vii) Product of numbers y and z subtracted from 10.

(viii) Sum of numbers a and b subtracted from their product.

2. (i) Identify the terms and their factors in the following expressions
Show the terms and factors by tree diagrams.

(a) $x - 3$ (b) $1 + x + x^2$ (c) $y - y^3$

(d) $5xy^2 + 7x^2y$ (e) $-ab + 2b^2 - 3a^2$

(ii) Identify terms and factors in the expressions given below:

(a) $-4x + 5$ (b) $-4x + 5y$ (c) $5y + 3y^2$

(d) $xy + 2x^2y^2$ (e) $pq + q$ (f) $1.2\ ab - 2.4\ b + 3.6\ a$

(iv)	$3xy$ $3x$	$3, x, y$ $3, x$	భిన్నమైనవి	విజాతి	చరరాశి y ఒక పదంలో మాత్రమే ఉంది.
(v)	$6xy^2$ $9x^2y$	$6, x, y, y$ $9, x, x, y$	భిన్నమైనవి	విజాతి	రెండు పదాలలోని చరరాశులు సరిపోయాయి. కానీ వాటి ఘాతంకాలు జత కాలేదు.
(vi)	pq^2 $-4pq^2$	$1, p, q, q$ $-4, p, q, q$	ఒకే విధమైనవి	సజాతి	గమనిక, సంఖ్యాగుణకం 1 చూపబడలేదు

*ఇచ్చిన పదాలు **సజాతి** లేదా **విజాతి** పదాలో నిర్ణయించడానికి కింది ఉన్న సరళమైన సోపానాలు మీకు సహాయపడతాయి.*

(i) సంఖ్యా గుణకాలను విస్మరించండి. పదం యొక్క బీజీయ భాగంపై దృష్టి పెట్టండి.

(ii) పాదాలలోని చరరాశులను తనిఖీ చేయండి. ఒకే రకమైన వాటిని గుర్తించండి.

(iii) తరువాత, పదంలోని ప్రతి చరరాశి యొక్క ఘతాలను తనిఖీ చెయ్యండి. అవి ఒకే విధంగా ఉండాలి.

గమనిక: సజాతి పదాలను నిర్ణయించేటప్పుడు రెండు విషయాలు ముఖ్యమైనవని గమనించండి. (1) పదాల సంఖ్యా గుణకాలు మరియు (2) పదాలలో చరరాశులు గుణించబడిన క్రమం

అభ్యాసం 10.1

1. చరరాశి, స్థిరాంకాలు మరియు అంకగణిత ప్రక్రియలు ఉపయోగించి కింది సందర్భాలకు బీజగణిత సమాసాలను పొందండి.

(i) y నుండి z ను తీసివేయడం.

(ii) x మరియు y సంఖ్యల మొత్తంలో సగం.

(iii) z అనే సంఖ్య తనకు తానే గుణించబడింది.

(iv) p మరియు q సంఖ్యల లబ్దంలో నాలుగింట ఒక వంతు.

(v) x మరియు y అనే సంఖ్యలు రెండు వర్గం చేయబడి కలపబడినాయి.

(vi) m మరియు n సంఖ్యల లబ్దానికి మూడు రెట్లకు సంఖ్య 5 కలుపబడింది.

(vii) y మరియు z సంఖ్యల యొక్క లబ్దం 10 నుంచి తీసివేయబడింది.

(viii) a మరియు b సంఖ్యల మొత్తం వాటి లబ్దం నుండి తీసివేయబడింది.

2. (i) ఈ క్రింది సమాసాలలో పదాలు మరియు వాటి కారణాంకాలను గుర్తించండి. వృక్ష చిత్రాల ద్వారా పదాలు మరియు కారణాంకాలను చూపించండి.

(a) $x - 3$ (b) $1 + x + x^2$ (c) $y - y^3$

(d) $5xy^2 + 7x^2y$ (e) $-ab + 2b^2 - 3a^2$

(ii) కింద ఇవ్వబడిన సమాసాల పదాలు మరియు కారణాంకాలు గుర్తించండి.

(a) $-4x + 5$ (b) $-4x + 5y$ (c) $5y + 3y^2$

(d) $xy + 2x^2y^2$ (e) $pq + q$ (f) $1.2\,ab - 2.4\,b + 3.6\,a$

(g) $\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$ (h) $0.1\,p^2 + 0.2\,q^2$

3. Identify the numerical coefficients of terms (other than constants) in the following expressions:

(i) $5 - 3t^2$ (ii) $1 + t + t^2 + t^3$ (iii) $x + 2xy + 3y$

(iv) $100m + 1000n$ (v) $-p^2q^2 + 7pq$ (vi) $1.2\,a + 0.8\,b$

(vii) $3.14\,r^2$ (viii) $2\,(l + b)$ (ix) $0.1\,y + 0.01\,y^2$

4. (a) Identify terms which contain x and give the coefficient of x.

(i) $y^2x + y$ (ii) $13y^2 - 8yx$ (iii) $x + y + 2$

(iv) $5 + z + zx$ (v) $1 + x + xy$ (vi) $12xy^2 + 25$

(vii) $7x + xy^2$

(b) Identify terms which contain y^2 and give the coefficient of y^2.

(i) $8 - xy^2$ (ii) $5y^2 + 7x$ (iii) $2x^2y - 15xy^2 + 7y^2$

5. Classify into monomials, binomials and trinomials.

(i) $4y - 7z$ (ii) y^2 (iii) $x + y - xy$ (iv) 100

(v) $ab - a - b$ (vi) $5 - 3t$ (vii) $4p^2q - 4pq^2$ (viii) $7mn$

(ix) $z^2 - 3z + 8$ (x) $a^2 + b^2$ (xi) $z^2 + z$

(xii) $1 + x + x^2$

6. State whether a given pair of terms is of like or unlike terms.

(i) $1, 100$ (ii) $-7x,\ \frac{5}{2}x$ (iii) $-29x,\ -29y$

(iv) $14xy,\ 42yx$ (v) $4m^2p,\ 4mp^2$ (vi) $12xz,\ 12x^2z^2$

7. Identify like terms in the following:

(a) $-xy^2, -4yx^2, 8x^2, 2xy^2, 7y, -11x^2, -100x, -11yx, 20x^2y,$
$-6x^2, y, 2xy, 3x$

(b) $10pq, 7p, 8q, -p^2q^2, -7qp, -100q, -23, 12q^2p^2, -5p^2, 41, 2405p, 78qp,$
$13p^2q, qp^2, 701p^2$

10.6 Finding the Value of an Expression

We know that the value of an algebraic expression depends on the values of the variables forming the expression. There are a number of situations in which we need to find the value of an expression, such as when we wish to check whether a particular value of a variable satisfies a given equation or not.

We find values of expressions, also, when we use formulas from geometry and from everyday mathematics. For example, the area of a square is l^2, where l is the length of a side of the square. If $l = 5$ cm., the area is 5^2 cm^2 or 25 cm^2; if the side is 10 cm, the area is 10^2 cm^2 or 100 cm^2 and so on. We shall see more such examples in the next section.

(g) $\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$ (h) $0.1\,p^2 + 0.2\,q^2$

3. కింది సమాసాలలో పదాల యొక్క సంఖ్యా గుణకాలను (స్థిరరాశులు కాకుండా) గుర్తించండి.

(i) $5 - 3t^2$ (ii) $1 + t + t^2 + t^3$ (iii) $x + 2xy + 3y$

(iv) $100m + 1000n$ (v) $-p^2q^2 + 7pq$ (vi) $1.2\,a + 0.8\,b$

(vii) $3.14\,r^2$ (viii) $2\,(l + b)$ (ix) $0.1\,y + 0.01\,y^2$

4. (a) x ను కలిగి ఉన్న పదాలను గుర్తించండి. మరియు x యొక్క గుణకాన్ని గుర్తించండి.

(i) $y^2x + y$ (ii) $13y^2 - 8yx$ (iii) $x + y + 2$

(iv) $5 + z + zx$ (v) $1 + x + xy$ (vi) $12xy^2 + 25$

(vii) $7x + xy^2$

(b) y^2 ను కలిగి ఉన్న పదాలను గుర్తించండి. మరియు y^2 యొక్క గుణకాన్ని గుర్తించండి.

(i) $8 - xy^2$ (ii) $5y^2 + 7x$ (iii) $2x^2y - 15xy^2 + 7y^2$

5. ఏకపదులు, ద్విపదులు మరియు త్రిపదులుగా వర్గీకరించండి.

(i) $4y - 7z$ (ii) y^2 (iii) $x + y - xy$ (iv) 100

(v) $ab - a - b$ (vi) $5 - 3t$ (vii) $4p^2q - 4pq^2$ (viii) $7mn$

(ix) $z^2 - 3z + 8$ (x) $a^2 + b^2$ (xi) $z^2 + z$

(xii) $1 + x + x^2$

6. ఇవ్వబడిన పదాల జత సజాతి పదాల లేక విజాతి పదాల పేర్కొనండి.

(i) $1, 100$ (ii) $-7x, \frac{5}{2}x$ (iii) $-29x, -29y$

(iv) $14xy, 42yx$ (v) $4m^2p, 4mp^2$ (vi) $12xz, 12x^2z^2$

7. ఈ క్రింది వాటిలో సజాతి పదాలు గుర్తించండి.

(a) $-xy^2, -4yx^2, 8x^2, 2xy^2, 7y, -11x^2, -100x, -11yx, 20x^2y,$
$-6x^2, y, 2xy, 3x$

(b) $10pq, 7p, 8q, -p^2q^2, -7qp, -100q, -23, 12q^2p^2, -5p^2, 41, 2405p, 78qp,$
$13p^2q, qp^2, 701p^2$

10.6 బీజీయ సమాసాల విలువ కనుగొనుట

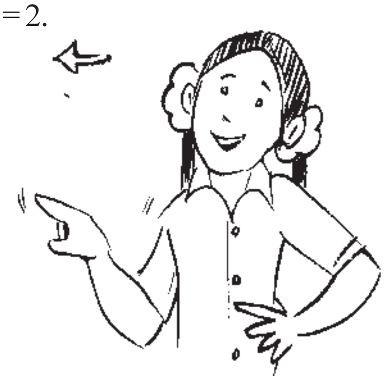
బీజీయ సమాసాలు యొక్క విలువ సమాసాలు రూపొందించే చరరాశి యొక్క విలువలపై ఆధారపడి ఉంటుందని మనకు తెలుసు. ఒక సమాసాలు యొక్క విలువను మనం కనుగొనాల్సిన అనేక సందర్భాలు ఉన్నాయి. ఉదాహరణకు ఒక నిర్ధిష్ట విలువ యొక్క విలువను మనం తనిఖీ చేయాలకున్నప్పుడు చరరాశి ఇవ్వబడ్డ సమీకరణాన్ని సంతృప్తి పరుస్తుంది. లేదా సంతృప్తి చెందదు.

జ్యామితి మరియు రోజువారీ గణితం నుండి సూత్రాలను ఉపయోగించినప్పుడు కూడా సమాసాల విలువలను మనం కనుగొంటాం. ఉదాహరణకు ఒక చతురస్రం యొక్క వైశాల్యం l^2, ఇక్కడ l అనేది చతురస్రం యొక్క ఒక భుజం పొడవు. ఒకవేళ $l = 5$ సెం.మీ. వైశాల్యం 5^2 సెం.మీ.^{2} లేదా 25 సెం.మీ.^{2}; ఒకవేళ భుజం 10 సెం.మీ. అయితే దాని వైశాల్యం 10^2 సెం.మీ.^{2} లేదా 100 సెం.మీ.^{2} మొదలైనవి, అటువంటి మరికొన్ని ఉదాహరణలు తరువాత విభాగంలో చూస్తాం.

EXAMPLE 4 Find the values of the following expressions for $x = 2$.

(i) $x + 4$ (ii) $4x - 3$ (iii) $19 - 5x^2$

(iv) $100 - 10x^3$



SOLUTION Putting $x = 2$

(i) In $x + 4$, we get the value of $x + 4$, i.e.,

$x + 4 = 2 + 4 = 6$

(ii) In $4x - 3$, we get

$4x - 3 = (4 \times 2) - 3 = 8 - 3 = 5$

(iii) In $19 - 5x^2$, we get

$19 - 5x^2 = 19 - (5 \times 2^2) = 19 - (5 \times 4) = 19 - 20 = -1$

(iv) In $100 - 10x^3$, we get

$100 - 10x^3 = 100 - (10 \times 2^3) = 100 - (10 \times 8)$ (Note $2^3 = 8$)

$= 100 - 80 = 20$

EXAMPLE 5 Find the value of the following expressions when $n = -2$.

(i) $5n - 2$ (ii) $5n^2 + 5n - 2$ (iii) $n^3 + 5n^2 + 5n - 2$

SOLUTION

(i) Putting the value of $n = -2$, in $5n - 2$, we get,

$5(-2) - 2 = -10 - 2 = -12$

(ii) In $5n^2 + 5n - 2$, we have,

for $n = -2$, $5n - 2 = -12$

and $5n^2 = 5 \times (-2)^2 = 5 \times 4 = 20$ [as $(-2)^2 = 4$]

Combining,

$5n^2 + 5n - 2 = 20 - 12 = 8$

(iii) Now, for $n = -2$,

$5n^2 + 5n - 2 = 8$ and

$n^3 = (-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$

Combining,

$n^3 + 5n^2 + 5n - 2 = -8 + 8 = 0$

We shall now consider expressions of two variables, for example, $x + y$, xy. To work out the numerical value of an expression of two variables, we need to give the values of both variables. For example, the value of $(x + y)$, for $x = 3$ and $y = 5$, is $3 + 5 = 8$.

ఉదాహరణ 4 $x = 2$ కొరకు దిగువ సమాసాల విలువలను కనుగొనండి.

(i) $x + 4$ (ii) $4x - 3$ (iii) $19 - 5x^2$

(iv) $100 - 10x^3$

సాధన: $x = 2$ అయిన

(i) $x + 4$ లో, $x + 4$ యొక్క విలువను మనం పొందుతాం. అనగా

$x + 4 = 2 + 4 = 6$

(ii) $4x - 3$ లో,

$4x - 3 = (4 \times 2) - 3 = 8 - 3 = 5$

(iii) $19 - 5x^2$ లో,

$19 - 5x^2 = 19 - (5 \times 2^2) = 19 - (5 \times 4) = 19 - 20 = -1$

(iv) $100 - 10x^3$ లో,

$100 - 10x^3 = 100 - (10 \times 2^3) = 100 - (10 \times 8)$ (గమనిక $2^3 = 8$)

$= 100 - 80 = 20$

ఉదాహరణ 5 $n = -2$ అయినప్పుడు కింది సమాసాలు విలువను కనుగొనండి.

(i) $5n - 2$ (ii) $5n^2 + 5n - 2$ (iii) $n^3 + 5n^2 + 5n - 2$

సాధన:

(i) $n = -2$, లో ప్రతిక్షేపించగా $5n - 2$

$5(-2) - 2 = -10 - 2 = -12$

(ii) $5n^2 + 5n - 2$ లో,

$n = -2$ అయితే, $5n - 2 = -12$

మరియు $5n^2 = 5 \times (-2)^2 = 5 \times 4 = 20$ [$(-2)^2 = 4$ కనుక]

కలుపగా

$5n^2 + 5n - 2 = 20 - 12 = 8$

(iii) ఇప్పుడు $n = -2$,

$5n^2 + 5n - 2 = 8$ మరియు

$n^3 = (-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$

కలుపగా

$n^3 + 5n^2 + 5n - 2 = -8 + 8 = 0$

మనం ఇప్పుడు రెండు చరరాశుల సమాసాలను పరిశీలిద్దాం. ఉదాహరణకు $x + y$, xy. రెండు చరరాశి యొక్క సమాసాలు యొక్క సంఖ్యా విలువను తెలుసుకోవడానికి, మనం రెండు చరరాశుల యొక్క విలువలను ఇవ్వాలి. ఉదాహరణకు $x = 3$ మరియు $y = 5$ కొరకు $(x + y)$ యొక్క విలువ అయితే $3 + 5 = 8$.

EXAMPLE 6 Find the value of the following expressions for $a = 3$, $b = 2$.

(i) $a + b$ (ii) $7a - 4b$ (iii) $a^2 + 2ab + b^2$

(iv) $a^3 - b^3$

SOLUTION Substituting $a = 3$ and $b = 2$ in

(i) $a + b$, we get

$a + b = 3 + 2 = 5$

(ii) $7a - 4b$, we get

$7a - 4b = 7 \times 3 - 4 \times 2 = 21 - 8 = 13.$

(iii) $a^2 + 2ab + b^2$, we get

$a^2 + 2ab + b^2 = 3^2 + 2 \times 3 \times 2 + 2^2 = 9 + 2 \times 6 + 4 = 9 + 12 + 4 = 25$

(iv) $a^3 - b^3$, we get

$a^3 - b^3 = 3^3 - 2^3 = 3 \times 3 \times 3 - 2 \times 2 \times 2 = 9 \times 3 - 4 \times 2 = 27 - 8 = 19$

EXERCISE 10.2

1. If $m = 2$, find the value of:

(i) $m - 2$ (ii) $3m - 5$ (iii) $9 - 5m$

(iv) $3m^2 - 2m - 7$ (v) $\dfrac{5m}{2}$ □4

2. If $p = -2$, find the value of:

(i) $4p + 7$ (ii) $-3p^2 + 4p + 7$ (iii) $-2p^3 - 3p^2 + 4p + 7$

3. Find the value of the following expressions, when $x = -1$:

(i) $2x - 7$ (ii) $-x + 2$ (iii) $x^2 + 2x + 1$

(iv) $2x^2 - x - 2$

4. If $a = 2$, $b = -2$, find the value of:

(i) $a^2 + b^2$ (ii) $a^2 + ab + b^2$ (iii) $a^2 - b^2$

5. When $a = 0$, $b = -1$, find the value of the given expressions:

(i) $2a + 2b$ (ii) $2a^2 + b^2 + 1$ (iii) $2a^2b + 2ab^2 + ab$

(iv) $a^2 + ab + 2$

6. Simplify the expressions and find the value if x is equal to 2

(i) $x + 7 + 4(x - 5)$ (ii) $3(x + 2) + 5x - 7$

(iii) $6x + 5(x - 2)$ (iv) $4(2x - 1) + 3x + 11$

7. Simplify these expressions and find their values if $x = 3$, $a = -1$, $b = -2$.

(i) $3x - 5 - x + 9$ (ii) $2 - 8x + 4x + 4$

ఉదాహరణ 6 $a = 3, b = 2$ అయితే కింది సమాసాల విలువలు కనుగొనండి.

(i) $a + b$ (ii) $7a - 4b$ (iii) $a^2 + 2ab + b^2$

(iv) $a^3 - b^3$

సాధన: $a = 3$ మరియు $b = 2$ లను ప్రతిక్షేపించగా

(i) $a + b$,

$a + b = 3 + 2 = 5$ ను పొందుతాం

(ii) $7a - 4b$,

$7a - 4b = 7 \times 3 - 4 \times 2 = 21 - 8 = 13$ను పొందుతాం.

(iii) $a^2 + 2ab + b^2$,

$a^2 + 2ab + b^2 = 3^2 + 2 \times 3 \times 2 + 2^2 = 9 + 2 \times 6 + 4 = 9 + 12 + 4 = 25$ ను పొందుతాం.

(iv) $a^3 - b^3$,

$a^3 - b^3 = 3^3 - 2^3 = 3 \times 3 \times 3 - 2 \times 2 \times 2 = 9 \times 3 - 4 \times 2 = 27 - 8 = 19$ ను పొందుతాం.

అభ్యాసం 10.2

1. $m = 2$, అయితే

(i) $m - 2$ (ii) $3m - 5$ (iii) $9 - 5m$

(iv) $3m^2 - 2m - 7$ (v) $\frac{5m}{2}$ □4 ల విలువలను కనుగొనండి.

2. $p = -2$ అయితే,

(i) $4p + 7$ (ii) $-3p^2 + 4p + 7$ (iii) $-2p^3 - 3p^2 + 4p + 7$

ల విలువలను కనుగొనండి.

3. $x = -1$ అయితే కింది సమాసాల విలువలను కనుగొనండి.

(i) $2x - 7$ (ii) $-x + 2$ (iii) $x^2 + 2x + 1$

(iv) $2x^2 - x - 2$

4. $a = 2, b = -2$ అయితే,

(i) $a^2 + b^2$ (ii)$a^2 + ab + b^2$ (iii)$a^2 - b^2$ ల విలువలను కనుగొనండి.

5. $a = 0, b = -1$ అయితే, కింది సమాసాల విలువలను కనుగొనండి.

(i) $2a + 2b$ (ii) $2a^2 + b^2 + 1$ (iii) $2a^2b + 2ab^2 + ab$ (iv) $a^2 + ab + 2$

6. కింది సమాసాలను సూక్ష్మీకరించండి. $x = 2$ అయితే, దాని విలువ కనుగొనండి.

(i) $x + 7 + 4(x - 5)$ (ii) $3(x + 2) + 5x - 7$

(iii) $6x + 5(x - 2)$ (iv) $4(2x - 1) + 3x + 11$

7. కింది సమాసాలను సూక్ష్మీకరించండి $x = 3, a = -1, b = -2$ అయినప్పుడు వాటి విలువలు కనుగొనండి.

(i) $3x - 5 - x + 9$ (ii) $2 - 8x + 4x + 4$

(iii) $3a + 5 - 8a + 1$ (iv) $10 - 3b - 4 - 5b$

(v) $2a - 2b - 4 - 5 + a$

8. (i) If $z = 10$, find the value of $z^3 - 3(z - 10)$.

(ii) If $p = -10$, find the value of $p^2 - 2p - 100$

9. What should be the value of a if the value of $2x^2 + x - a$ equals to 5, when $x = 0$?

10. Simplify the expression and find its value when $a = 5$ and $b = -3$.

$$2(a^2 + ab) + 3 - ab$$

What have We Discussed?

1. **Algebraic expressions** are formed from **variables** and **constants**. We use the operations of **addition, subtraction, multiplication** and **division** on the variables and constants to form expressions. For example, the expression $4xy + 7$ is formed from the variables x and y and constants 4 and 7. The constant 4 and the variables x and y are multiplied to give the product $4xy$ and the constant 7 is added to this product to give the expression.

2. Expressions are made up of **terms**. Terms are **added** to make an expression. For example, the addition of the terms $4xy$ and 7 gives the expression $4xy + 7$.

3. A term is a **product of factors**. The term $4xy$ in the expression $4xy + 7$ is a product of factors x, y and 4. Factors containing variables are said to be **algebraic factors**.

4. The **coefficient** is the numerical factor in the term. Sometimes anyone factor in a term is called the coefficient of the remaining part of the term.

5. Any expression with one or more terms is called a **polynomial**. Specifically a one term expression is called a **monomial**; a two-term expression is called a **binomial**; and a three-term expression is called a **trinomial**.

6. Terms which have the same algebraic factors are **like** terms. Terms which have different algebraic factors are **unlike** terms. Thus, terms $4xy$ and $-3xy$ are like terms; but terms $4xy$ and $-3x$ are not like terms.

7. In situations such as solving an equation and using a formula, we have to **find the value of an expression**. The value of the expression depends on the value of the variable from which the expression is formed. Thus, the value of $7x - 3$ for $x = 5$ is 32, since $7(5) - 3 = 35 - 3 = 32$.

(iii) $3a + 5 - 8a + 1$ (iv) $10 - 3b - 4 - 5b$

(v) $2a - 2b - 4 - 5 + a$

8. (i) $z = 10$ అయితే, $z^3 - 3(z - 10)$ విలువను కనుగొనండి.

(ii) $p = -10$ అయితే, $p^2 - 2p - 100$ విలువను కనుగొనండి.

9. $x = 0$ అయినప్పుడు $2x^2 + x - a$ విలువ 5 అయితే a విలువ ఎంత?

10. కింది సమాసాన్ని సూక్ష్మీకరించండి $a = 5$ మరియు $b = -3$ అయినప్పుడు దాని విలువ కనుగొనండి.

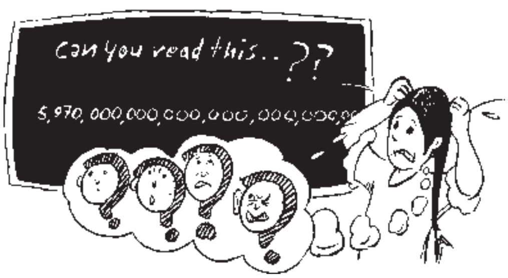
$$2(a^2 + ab) + 3 - ab$$

మనం ఏమి చర్చించాం?

1. **బీజీయ సమాసాలు చరరాశులు** మరియు **స్థిరరాశులు** నుండి ఏర్పడతాయి. మనం వ్యక్తీకరణలను రూపొందించడానికి చరరాశులు మరియు స్థిరరాశులపై **కూడిక, తీసివేత, గుణకారం** మరియు **భాగహారం** యొక్క కార్యకలాపాలను ఉపయోగిస్తాం. ఉదాహరణకు, $4xy + 7$ అనే వ్యక్తీకరణ చరరాశులు x మరియు y మరియు స్థిరరాశులు 4 మరియు 7 నుండి ఏర్పడింది. స్థిరరాశి 4 మరియు చరరాశులు x మరియు y మరియు $4xy$ గుణించబడి ఫలితానికి $4xy$ వస్తుంది. మరియు స్థిరరాశి 7 ఈ ఫలితానికి కలపబడుతుంది.
2. సమాసాలు అనేది **పదాలతో** ఏర్పడుతుంది. సమాసాలు పొందడానికి పదాలను కలుపుతాం. ఉదాహరణకు, $4xy$ మరియు 7 పదాలను కలపగా $4xy + 7$ అనే సమాసం వస్తుంది.
3. పదం అనేది **కారణాంకాల లబ్ధం.** $4xy + 7$ అనే సమాసంలోని $4xy$ అనే పదం x, y మరియు 4 కారణాంకాల యొక్క లబ్ధం. చరరాశులు కలిగి ఉన్న కారణాంకాలు **బీజీయ కారణాంకాలుగా** చెప్పబడతాయి.
4. **గుణకం** అనేది పదంలోని సంఖ్యా కారణాంకం. కొన్నిసార్లు ఒక పదంలో ఏదైనా కారణాంకాన్ని పదం యొక్క మిగిలిన భాగం యొక్క గుణకం అంటారు.
5. ఒకటి లేదా అంతకంటే ఎక్కువ కారణాంకాలు కలిగిన ఏదైనా సమాసాన్ని **బహుపది** అంటారు. ప్రత్యేకంగా ఒక పదం కలిగిన దానిని **ఏకపది** అంటారు. రెండు పదాలు కలిగిన సమాసాన్ని **ద్విపది** అంటారు. మరియు మూడు పదాలను కలిగిన సమాసాన్ని **త్రిపది** అంటారు.
6. ఒకే బీజీయ కారణాంకాలు కలిగిన పదాలను **సజాతి** పదాలు అంటారు. వేరు వేరు బీజీయ కారణాంకాలు కలిగిన పదాలను **విజాతి** పదాలు అంటారు. ఈ విధంగా, $4xy$ మరియు $-3xy$ అనే పదాలు సజాతి పదాలు కాని $4xy$ మరియు $-3x$ అనే పదాలు సజాతి పదాలు కాదు.
7. సమీకరణాన్ని సాధించడంలో మరియు సూత్రాన్ని ఉపయోగించడం వంటి సందర్భాల్లో, మనం **సమాసం యొక్క విలువను కనుగొనవలసి ఉంటుంది.** సమాసం యొక్క విలువ సమాసం ఏర్పడిన చరరాశి విలువపై ఆధారపడి ఉంటుంది. అందువలన, x=5 కనుక $7x$–3 విలువ, (5)–3=35–3 = 32.

Chapter 11

Exponents and Powers



11.1 Introduction

Do you know what the mass of earth is? It is 5,970,000,000,000,000,000,000,000 kg! Can you read this number?

Mass of Uranus is 86,800,000,000,000,000,000,000,000 kg. Which has greater mass, Earth or Uranus?

Distance between Sun and Saturn is 1,433,500,000,000 m and distance between Saturn and Uranus is 1,439,000,000,000 m. Can you read these numbers? Which distance is less?

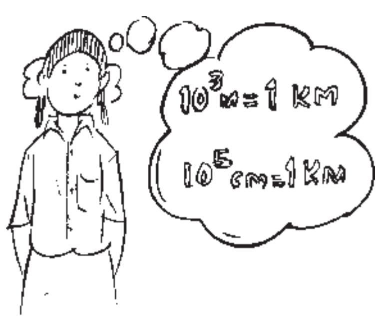
These very large numbers are difficult to read, understand and compare. To make these numbers easy to read, understand and compare, we use exponents. In this Chapter, we shall learn about exponents and also learn how to use them.

11.2 Exponents

We can write large numbers in a shorter form using exponents.

Observe $\quad 10,000 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^4$

The short notation 10^4 stands for the product $10\times10\times10\times10$. Here '10' is called the **base** and '4' the **exponent**. **The number 10^4 is read as 10 raised to the power of 4** or simply as **fourth power of 10. 10^4** is called the **exponential form** of 10,000.



We can similarly express 1,000 as a power of 10. Note that

$$1000 = 10 \times 10 \times 10 = 10^3$$

Here again, 10^3 is the exponential form of 1,000.

Similarly, $\quad 1,00,000 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^5$

10^5 is the exponential form of 1,00,000

In both these examples, the base is 10; in case of 10^3, the exponent is 3 and in case of 10^5 the exponent is 5.

అధ్యాయం 11

ఘాతాలు మరియు ఘాతాంకాలు

K4H6Z5

11.1 పరిచయం

భూమి ద్రవ్యరాశి ఎంతో మీకు తెలుసా? ? ఇది 5,970,000,000,000,000,000,000,000 కి. గ్రా.! ఈ సంఖ్యను మీరు చదవగలరా?

యురేనస్ గ్రహం ద్రవ్యరాశి 86,800,000,000,000,000,000,000,000 కి.గ్రా. దేని ద్రవ్యరాశి ఎక్కువ, భూమి లేక యురేనస్?

సూర్యుడు మరియు శనిల మధ్య దూరం 1,433,500,000,000 మీ. మరియు శని, యురేనస్‌ల మధ్య దూరం 1,439,000,000,000 మీ. మీరు ఈ సంఖ్యలను చదవగలరా? ఏది తక్కువ దూరం?

ఈ పెద్ద సంఖ్యలను చదవడం, అర్థం చేసుకోవడం మరియు పోల్చడం చాలా కష్టం. ఈ పెద్ద సంఖ్యలను తేలికగా చదవడం, అర్థం చేసుకోవడం మరియు పోల్చడానికి మనం ఘాతాంకాలు ఉపయోగిస్తాం. ఈ అధ్యాయంలో, ఘతాంకాలు, వాటిని ఉపయోగించటం గురించి నేర్చుకుందాం.

11.2 ఘాతాంకాలు

ఘాతాంకాలు ఉపయోగించి పెద్ద సంఖ్యలను సంక్షిప్త రూపంలో రాయవచ్చు.

$10,000 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^4$ ని గమనించండి.

గుణకారం $10\times10\times10\times10$ ని సంజ్ఞారూపంలో 10^4 గా రాస్తారు. ఇక్కడ '10' ని **భూమి** అని, '4' ని **ఘాతంకం** అని పిలుస్తారు. **సంఖ్య 10^4 ను 10 యొక్క 4వ ఘాతం లేదా సూక్ష్మంగా 10 యొక్క 4 వ ఘాతం అని చదువుతాం** 10^4 సంఖ్యని 10,000 యొక్క **ఘాతరూపం** అని అంటాం.

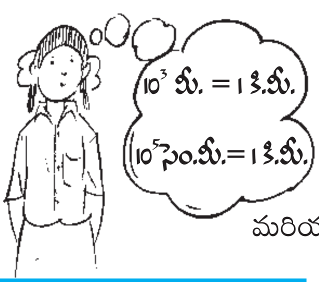
ఇదేవిధంగా 1000 ని 10 యొక్క ఘాతరూపంలో రాయవచ్చు.

$1000 = 10 \times 10 \times 10 = 10^3$ అని గమనించండి.

ఇక్కడ 10^3 అనేది 1,000 యొక్క ఘాతరూపం.

అదేవిధంగా $1,00,000 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^5$

10^5 అనేది 1,00,000 యొక్క ఘాతరూపం



ఈ రెండు ఉదాహరణల్లో 10^3 లో ఘాతాంకం 3 భూమి 10; మరియు 10^5 లో ఘాతాంకం 5.

We have used numbers like 10, 100, 1000 etc., while writing numbers in an expanded form. For example, $47561 = 4 \times 10000 + 7 \times 1000 + 5 \times 100 + 6 \times 10 + 1$

This can be written as $4 \times 10^4 + 7 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 6 \times 10 + 1$.

Try writing these numbers in the same way 172, 5642, 6374.

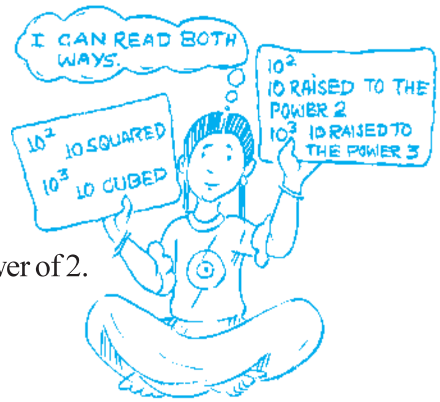
In all the above given examples, we have seen numbers whose base is 10. However the base can be any other number also. For example:

$81 = 3 \times 3 \times 3 \times 3$ can be written as $81 = 3^4$, here 3 is the base and 4 is the exponent.

Some powers have special names. For example,

10^2, which is 10 raised to the power 2, also read as '10 squared' and

10^3, which is 10 raised to the power 3, also read as '10 cubed'.



Can you tell what 5^3 (5 cubed) means?

$$5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$$

So, we can say 125 is the third power of 5.

What is the exponent and the base in 5^3?

Similarly, $2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$, which is the fifth power of 2.

In 2^5, 2 is the base and 5 is the exponent.

In the same way, $243 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5$

$$64 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^6$$

$$625 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^4$$

TRY THESE

Find five more such examples, where a number is expressed in exponential form. Also identify the base and the exponent in each case.

You can also extend this way of writing when the base is a negative integer.

What does $(-2)^3$ mean?

It is $(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$

Is $(-2)^4 = 16$? Check it.

Instead of taking a fixed number let us take any integer a as the base, and write the numbers as,

$a \times a = a^2$ (read as 'a squared' or 'a raised to the power 2')

$a \times a \times a = a^3$ (read as 'a cubed' or 'a raised to the power 3')

$a \times a \times a \times a = a^4$ (read as a raised to the power 4 or the 4th power of a)

....

$a \times a \times a \times a \times a \times a \times a = a^7$ (read as a raised to the power 7 or the 7th power of a) and so on.

$a \times a \times a \times b \times b$ can be expressed as a^3b^2 (read as a cubed b squared)

సంఖ్యలనువిస్తరణరూపంలోరాయడానికి 10, 100, 1000 మొదలైన సంఖ్యలను ఉపయోగిస్తాం.

ఉదాహరణకు $47561 = 4 \times 10000 + 7 \times 1000 + 5 \times 100 + 6 \times 10 + 1$

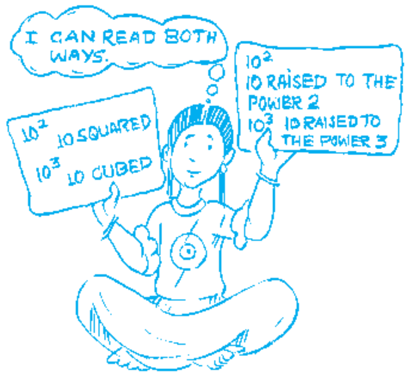
దీనిని $4 \times 10^4 + 7 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 6 \times 10 + 1$. గా రాయవచ్చు.

172, 5642, 6374. ఈ సంఖ్యలను ఈ విధంగా రాయడానికి ప్రయత్నించండి.

పైన తెలిపిన అన్ని ఉదాహరణలలో భూమి 10 గా సంఖ్యలను గమనించాం. కొన్ని సందర్భాలలో భూమి వేర్వేరు సంఖ్యలుగా వుండవచ్చు . ఉదాహరణకు

$81 = 3 \times 3 \times 3 \times 3$ ని $81 = 3^4$ గా రాయవచ్చు, భూమి 3 మరియు 4 ఘాతం.

కొన్ని ఘతాంకాలకు ప్రత్యేకమైన పేర్లు ఉన్నాయి. ఉదాహరణకు



10^2 ని 10 యొక్క 2వ ఘాతానికి పెంచబడింది అని దీనిని 10 స్క్వేర్డ్ అని చదువుతారు మరియు 10^3 ని 10 యొక్క 3 వ ఘాతానికి పెంచబడింది. అని, దీనిని 10 క్యూబ్డ్ అని చదువుతారు.

5^3 (5 క్యూబ్డ్) అర్థం ఏమిటో మీరు చెప్పగలరా ?

$$5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$$

కనుక, 5 యొక్క 3వ ఘాతం 125 అని చెప్పవచ్చు?

5^3 లో ఘాతాంకం మరియు భూమి ఏవి ?

ఇదేవిధంగా $2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$, ఇది 2 యొక్క 5 వ ఘాతం

2^5 లో భూమి 2, ఘాతం 5.

ఇదేవిధంగా,

$$243 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5$$
$$64 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^6$$
$$625 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^4$$

ప్రయత్నించండి

ఘాతాంక రూపంలో వ్యక్తపరచగల మరొక 5 ఉదాహరణలు రాయండి. ప్రతి సంఖ్యకు భూమిని మరియు ఘాతాంకాన్ని గుర్తించండి.

భూమి ఋణ పూర్ణ సంఖ్య అయినప్పటికి ఇదే పద్ధతిని పాటించవచ్చు. $(-2)^3$ అర్థం ఏమిటి?

అనగా $(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$

$(-2)^4 = 16$ అవుతుందా? పరీక్షించండి?

ఒక స్థిర సంఖ్యకు బదులుగా ఏదైనా ఒక పూర్ణ సంఖ్య a ను భూమిగా తీసుకొని ఆ సంఖ్యలను ఈ విధంగా రాయండి.

$a \times a = a^2$ ('a వర్గం' అని లేదా 'a ని 2వ ఘాతానికి పెంచబడింది' అని చదువుతారు)

$a \times a \times a = a^3$ ('a ఘనం' అని లేదా 'a ని 3వ ఘాతానికి పెంచబడింది' అని చదువుతారు)

$a \times a \times a \times a = a^4$ ('a యొక్క 4వ వర్గం' అని లేదా 'a ని 4వ ఘాతానికి పెంచబడింది' అని చదువుతారు)

....

$a \times a \times a \times a \times a \times a \times a = a^7$ ('a యొక్క 7వ వర్గం' అని లేదా 'a ని 7వ ఘాతానికి పెంచబడింది' అని చదువుతారు) మరియు మొదలైనవి.

$a \times a \times a \times b \times b$ ని a^3b^2 తో సూచిస్తారు. (దీనిని a క్యూబ్డ్ b స్క్వేర్డ్ అని చదువుతారు)

TRY THESE

Express:

(i) 729 as a power of 3

(ii) 128 as a power of 2

(iii) 343 as a power of 7

$a \times a \times b \times b \times b \times b$ can be expressed as a^2b^4 (read as a squared into b raised to the power of 4).

EXAMPLE 1 Express 256 as a power 2.

SOLUTION We have $256 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$.

So we can say that $256 = 2^8$

EXAMPLE 2 Which one is greater 2^3 or 3^2?

SOLUTION We have, $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$ and $3^2 = 3 \times 3 = 9$.

Since $9 > 8$, so, 3^2 is greater than 2^3

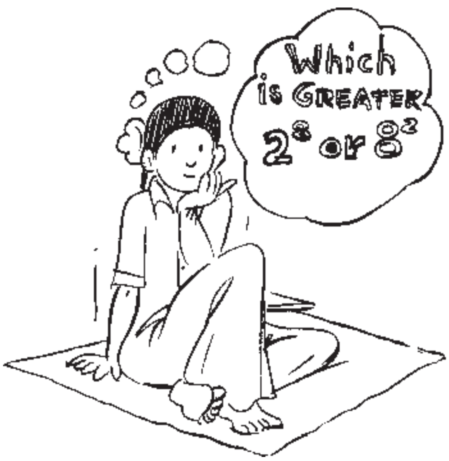
EXAMPLE 3 Which one is greater 8^2 or 2^8?

SOLUTION

$$8^2 = 8 \times 8 = 64$$

$$2^8 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 256$$

Clearly, $2^8 > 8^2$



EXAMPLE 4 Expand $a^3 b^2$, $a^2 b^3$, $b^2 a^3$, $b^3 a^2$. Are they all same?

SOLUTION

$$a^3 b^2 = a^3 \times b^2$$
$$= (a \times a \times a) \times (b \times b)$$
$$= a \times a \times a \times b \times b$$
$$a^2 b^3 = a^2 \times b^3$$
$$= a \times a \times b \times b \times b$$
$$b^2 a^3 = b^2 \times a^3$$
$$= b \times b \times a \times a \times a$$
$$b^3 a^2 = b^3 \times a^2$$
$$= b \times b \times b \times a \times a$$

Note that in the case of terms $a^3 b^2$ and $a^2 b^3$ the powers of a and b are different. Thus $a^3 b^2$ and $a^2 b^3$ are different.

On the other hand, $a^3 b^2$ and $b^2 a^3$ are the same, since the powers of a and b in these two terms are the same. The order of factors does not matter.

Thus, $a^3 b^2 = a^3 \times b^2 = b^2 \times a^3 = b^2 a^3$. Similarly, $a^2 b^3$ and $b^3 a^2$ are the same.

EXAMPLE 5 Express the following numbers as a product of powers of prime factors:

(i) 72 (ii) 432 (iii) 1000 (iv) 16000

SOLUTION

2	72
2	36
2	18
3	9
	3

(i) $72 = 2 \times 36 = 2 \times 2 \times 18$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 9$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^3 \times 3^2$

Thus, $72 = 2^3 \times 3^2$ (required prime factor product form)

ప్రయత్నించండి

వ్యక్తపరచండి:

(i) 729 ని 3 వ ఘాతంగా

(ii) 128ని 2 వ ఘాతంగా

(iii) 343 ని 7 వ ఘాతంగా

$a \times a \times b \times b \times b \times b$ ని a^2b^4 తో సూచిస్తారు. (a స్క్వేర్ b టు ది పవర్ ఆఫ్ 4).

ఉదాహరణ 1 256 ని 2వ ఘాతంగా వ్యక్తపరచండి.

సాధన ఇక్కడ $256 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$.

కనుక $256 = 2^8$ అని చెప్పవచ్చు

ఉదాహరణ 2 2^3 లేదా 3^2 లలో ఏది పెద్దది?

సాధన $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$ మరియు

$3^2 = 3 \times 3 = 9$.

$9 > 8$, కనుక, 3^2, 2^3 కన్నా పెద్దది

ఉదాహరణ 3 8^2 లేదా 2^8 లలో ఏది పెద్దది?

సాధన $8^2 = 8 \times 8 = 64$

$2^8 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 256$

కావున, $2^8 > 8^2$

ఉదాహరణ 4 $a^3b^2, a^2b^3, b^2a^3, b^3a^2$ ను విస్తరించండి. ఇవి అన్నీ ఒకటేనా?

సాధన

$$a^3b^2 = a^3 \times b^2$$
$$= (a \times a \times a) \times (b \times b)$$
$$= a \times a \times a \times b \times b$$
$$a^2b^3 = a^2 \times b^3$$
$$= a \times a \times b \times b \times b$$
$$b^2a^3 = b^2 \times a^3$$
$$= b \times b \times a \times a \times a$$
$$b^3a^2 = b^3 \times a^2$$
$$= b \times b \times b \times a \times a$$

a^3b^2 మరియు a^2b^3 పదాలలో a, b యొక్క ఘాతాలు వేర్వేలుగా ఉన్నాయని గమనించండి. అలాగే a^3b^2 మరియు a^2b^3 వేర్వేరు పదాలు.

మరోవిధంగా, a^3b^2 మరియు b^2a^3 అనేవి ఒకటే. a, b ఘాతాలు ఒకటే కనుక

ఈ రెండు పదాలు ఒకటే. వాటి క్రమం మారినప్పటికీ దాని విలువలో మార్పు లేదు.

అలాగే $a^3b^2 = a^3 \times b^2 = b^2 \times a^3 = b^2a^3$. అదేవిధంగా, a^2b^3 మరియు b^3a^2 పదాలు ఒకటే.

ఉదాహరణ 5 క్రింది సంఖ్యలను ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధంగా ఉపయోగించి ఘాత రూపంలో రాయండి.

(i) 72 (ii) 432 (iii) 1000 (iv) 16000

సాధన: (i) $72 = 2 \times 36 = 2 \times 2 \times 18$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 9$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^3 \times 3^2$

కావున, $72 = 2^3 \times 3^2$ (కావాల్సిన ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధం)

2	72
2	36
2	18
3	9
	3

(ii) $432 = 2 \times 216 = 2 \times 2 \times 108 = 2 \times 2 \times 2 \times 54$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 27 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 9$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3$

or $432 = 2^4 \times 3^3$ (required form)

(iii) $1000 = 2 \times 500 = 2 \times 2 \times 250 = 2 \times 2 \times 2 \times 125$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 25 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5$

or $1000 = 2^3 \times 5^3$

> Atul wants to solve this example in another way:
>
> $1000 = 10 \times 100 = 10 \times 10 \times 10$
>
> $= (2 \times 5) \times (2 \times 5) \times (2 \times 5)$ (Since $10 = 2 \times 5$)
>
> $= 2 \times 5 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5$
>
> or $1000 = 2^3 \times 5^3$
>
> Is Atul's method correct?

(iv) $16{,}000 = 16 \times 1000 = (2 \times 2 \times 2 \times 2) \times 1000 = 2^4 \times 10^3$ (as $16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$)

$= (2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5) = 2^4 \times 2^3 \times 5^3$

(Since $1000 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5$)

$= (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (5 \times 5 \times 5)$

or, $16{,}000 = 2^7 \times 5^3$

EXAMPLE 6 Work out $(1)^5$, $(-1)^3$, $(-1)^4$, $(-10)^3$, $(-5)^4$.

SOLUTION

(i) We have $(1)^5 = 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1$

In fact, you will realise that 1 raised to any power is 1.

> $(-1)^{\text{odd number}} = -1$
>
> $(-1)^{\text{even number}} = +1$

(ii) $(-1)^3 = (-1) \times (-1) \times (-1) = 1 \times (-1) = -1$

(iii) $(-1)^4 = (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) = 1 \times 1 = 1$

You may check that (-1) raised to any **odd** power is (-1), and (-1) raised to any **even** power is $(+1)$.

(iv) $(-10)^3 = (-10) \times (-10) \times (-10) = 100 \times (-10) = -1000$

(v) $(-5)^4 = (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) = 25 \times 25 = 625$

EXERCISE 11.1

1. Find the value of:

(i) 2^6 (ii) 9^3 (iii) 11^2 (iv) 5^4

2. Express the following in exponential form:

(i) $6 \times 6 \times 6 \times 6$ (ii) $t \times t$ (iii) $b \times b \times b \times b$

(iv) $5 \times 5 \times 7 \times 7 \times 7$ (v) $2 \times 2 \times a \times a$ (vi) $a \times a \times a \times c \times c \times c \times c \times d$

(ii) $432 = 2 \times 216 = 2 \times 2 \times 108 = 2 \times 2 \times 2 \times 54$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 27 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 9$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3$

లేదా $432 = 2^4 \times 3^3$ (కావాల్సిన రూపం)

(iii) $1000 = 2 \times 500 = 2 \times 2 \times 250 = 2 \times 2 \times 2 \times 125$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 25 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5$

లేదా $1000 = 2^3 \times 5^3$

> అతుల్ ఈ సమస్యను మరోవిధంగా సాధించాడు:
>
> $1000 = 10 \times 100 = 10 \times 10 \times 10$
>
> $= (2 \times 5) \times (2 \times 5) \times (2 \times 5)$ (కనుక $10 = 2 \times 5$)
>
> $= 2 \times 5 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5$
>
> లేదా $1000 = 2^3 \times 5^3$
>
> అతుల్ సాధించిన పద్ధతి సరైనదేనా ?

(iv) $16{,}000 = 16 \times 1000 = (2 \times 2 \times 2 \times 2) \times 1000 = 2^4 \times 10^3$ (కనుక $16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$)

$= (2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5) = 2^4 \times 2^3 \times 5^3$

(కనుక $1000 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5$)

$= (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (5 \times 5 \times 5)$

లేదా $16{,}000 = 2^7 \times 5^3$

ఉదాహరణ 6 సాధించండి $(1)^5, (-1)^3, (-1)^4, (-10)^3, (-5)^4$.

సాధన: (i) $(1)^5 = 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1$

వాస్తవానికి 1 ఏ ఘాతానికి పెంచబడినా దాని విలువ 1 అని మీరు గ్రహిస్తారు.

$(-1)^{\text{బేసి సంఖ్య}}$	$= -1$
$(-1)^{\text{సరి సంఖ్య}}$	$= +1$

(ii) $(-1)^3 = (-1) \times (-1) \times (-1) = 1 \times (-1) = -1$

(iii) $(-1)^4 = (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) = 1 \times 1 = 1$

(-1) ని ఏ **బేసి** ఘాతానికి పెంచబడితే దాని విలువ (-1),

మరియు (-1) ని ఏ **సరి** ఘాతానికి పెంచబడితే దాని విలువ $(+1)$ అని మీరు గమనించవచ్చు.

(iv) $(-10)^3 = (-10) \times (-10) \times (-10) = 100 \times (-10) = -1000$

(v) $(-5)^4 = (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) = 25 \times 25 = 625$

అభ్యాసం 11.1

1. కింది వాటి విలువలు కనుక్కోండి:

(i) 2^6 (ii) 9^3 (iii) 11^2 (iv) 5^4

2. కింది వాటిని ఘాతాంక రూపంలో వ్యక్తపరచండి.

(i) $6 \times 6 \times 6 \times 6$ (ii) $t \times t$ (iii) $b \times b \times b \times b$

(iv) $5 \times 5 \times 7 \times 7 \times 7$ (v) $2 \times 2 \times a \times a$ (vi) $a \times a \times a \times c \times c \times c \times c \times d$

3. Express each of the following numbers using exponential notation:

(i) 512 (ii) 343 (iii) 729 (iv) 3125

4. Identify the greater number, wherever possible, in each of the following?

(i) 4^3 or 3^4 (ii) 5^3 or 3^5 (iii) 2^8 or 8^2

(iv) 100^2 or 2^{100} (v) 2^{10} or 10^2

5. Express each of the following as product of powers of their prime factors:

(i) 648 (ii) 405 (iii) 540 (iv) 3,600

6. Simplify :

(i) 2×10^3 (ii) $7^2 \times 2^2$ (iii) $2^3 \times 5$ (iv) 3×4^4

(v) 0×10^2 (vi) $5^2 \times 3^3$ (vii) $2^4 \times 3^2$ (viii) $3^2 \times 10^4$

7. Simplify :

(i) $(-4)^3$ (ii) $(-3) \times (-2)^3$ (iii) $(-3)^2 \times (-5)^2$

(iv) $(-2)^3 \times (-10)^3$

8. Compare the following numbers:

(i) 2.7×10^{12} ; 1.5×10^8 (ii) 4×10^{14} ; 3×10^{17}

11.3 Laws of Exponents

11.3.1 Multiplying Powers with the Same Base

(i) Let us calculate $2^2 \times 2^3$

$$2^2 \times 2^3 = (2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2)$$
$$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5 = 2^{2+3}$$

Note that the base in 2^2 and 2^3 is same and the sum of the exponents, i.e., 2 and 3 is 5

(ii) $(-3)^4 \times (-3)^3 = [(-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3)] \times [(-3) \times (-3) \times (-3)]$

$$= (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3)$$
$$= (-3)^7$$
$$= (-3)^{4+3}$$

Again, note that the base is same and the sum of exponents, i.e., 4 and 3, is 7

(iii) $a^2 \times a^4 = (a \times a) \times (a \times a \times a \times a)$

$$= a \times a \times a \times a \times a \times a = a^6$$

(Note: the base is the same and the sum of the exponents is $2 + 4 = 6$)

Similarly, verify:

$$4^2 \times 4^2 = 4^{2+2}$$
$$3^2 \times 3^3 = 3^{2+3}$$

3. క్రింద ఇచ్చిన సంఖ్యలను ఘాత రూపంలో వ్యక్తపరచండి.

(i) 512 (ii) 343 (iii) 729 (iv) 3125

4. ఈ క్రింది ప్రతివాటిలో, పెద్ద సంఖ్య ఏదో సాధ్యమైనచోట గుర్తించండి.

(i) 4^3 లేదా 3^4 (ii) 5^3 లేదా 3^5 (iii) 2^8 లేదా 8^2

(iv) 100^2 లేదా 2^{100} (v) 2^{10} లేదా 10^2

5. ఈ క్రింది ప్రతి వాటిని, ప్రధాన కారణంకాల లబ్ధంగా ఘాత రూపంలో రాయండి.

(i) 648 (ii) 405 (iii) 540 (iv) 3,600

6. సూక్ష్మీకరించండి:

(i) 2×10^3 (ii) $7^2 \times 2^2$ (iii) $2^3 \times 5$ (iv) 3×4^4

(v) 0×10^2 (vi) $5^2 \times 3^3$ (vii) $2^4 \times 3^2$ (viii) $3^2 \times 10^4$

7. సూక్ష్మీకరించండి:

(i) $(-4)^3$ (ii) $(-3) \times (-2)^3$ (iii) $(-3)^2 \times (-5)^2$

(iv) $(-2)^3 \times (-10)^3$

8. క్రింది సంఖ్యలను పోల్చండి:

(i) 2.7×10^{12} ; 1.5×10^8 (ii) 4×10^{14} ; 3×10^{17}

11.3 ఘాతాంక న్యాయాలు

11.3.1 ఒకే భూమి గల ఘాతాల గుణకారం

(i) $2^2 \times 2^3$ విలువను లెక్కిద్దాం.

$$2^2 \times 2^3 = (2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2)$$
$$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5 = 2^{2+3}$$

2^2 మరియు 2^3 ల భూమి సమానం మరియు ఘాతాంకాల మొత్తం 3+2=5 అని మనం గమనించాం.

(ii) $(-3)^4 \times (-3)^3 = [(-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3)] \times [(-3) \times (-3) \times (-3)]$
$$= (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3)$$
$$= (-3)^7$$
$$= (-3)^{4+3}$$

మరల, భూముల సమానం మరియు ఘాతాంకాల మొత్తం 4+3=7 అని గమనించండి.

(iii) $a^2 \times a^4 = (a \times a) \times (a \times a \times a \times a)$
$$= a \times a \times a \times a \times a \times a = a^6$$

(సూచన: ఇక్కడ భూమి ఒకటే మరియు ఘాతాంకాల మొత్తం 2 + 4 = 6)

ఇదే విధంగా, సరిచూడండి.

$$4^2 \times 4^2 = 4^{2+2}$$
$$3^2 \times 3^3 = 3^{2+3}$$

Can you write the appropriate number in the box.

$$(-11)^2 \times (-11)^6 = (-11)^{\square}$$

$$b^2 \times b^3 = b^{\square}$$ (Remember, base is same; b is any integer).

$$c^3 \times c^4 = c^{\square}$$ (c is any integer)

$$d^{10} \times d^{20} = d^{\square}$$

From this we can generalise that for any non-zero integer a, where m numbers,

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

Try These

Simplify and write in exponential form:

(i) $2^5 \times 2^3$

(ii) $p^3 \times p^2$

(iii) $4^3 \times 4^2$

(iv) $a^3 \times a^2 \times a^7$

(v) $5^3 \times 5^7 \times 5^{12}$

(vi) $(-4)^{100} \times (-4)^{20}$

Caution!

Consider $2^3 \times 3^2$

Can you add the exponents? No! Do you see 'why'? The base of 2^3 is 2 and base of 3^2 is 3. The bases are not same.

11.3.2 Dividing Powers with the Same Base

Let us simplify $3^7 \div 3^4$?

$$3^7 \div 3^4 = \frac{3^7}{3^4} = \frac{3\times3\times3\times3\times3\times3\times3}{3\times3\times3\times3}$$

$$= 3 \times 3 \times 3 = 3^3 = 3^{7-4}$$

Thus $3^7 \div 3^4 = 3^{7-4}$

(Note, in 3^7 and 3^4 the base is same and $3^7 \div 3^4$ becomes 3^{7-4})

Similarly,

$$5^6 \div 5^2 = \frac{5^6}{5^2} = \frac{5\times5\times5\times5\times5\times5}{5\times5}$$

$$= 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^4 = 5^{6-2}$$

or $5^6 \div 5^2 = 5^{6-2}$

Let a be a non-zero integer, then,

$$a^4 \div a^2 = \frac{a^4}{a^2} = \frac{a\times a\times a\times a}{a\times a} = a\times a = a^2 = a^{4-2}$$

or $a^4 \div a^2 = a^{4-2}$

Now can you answer quickly?

$$10^8 \div 10^3 = 10^{8-3} = 10^5$$

$$7^9 \div 7^6 = 7^{\square}$$

$$a^8 \div a^5 = a^{\square}$$

మీరు సరైన సంఖ్యను పెట్టెలో రాయగలరా?

$(-11)^2 \times (-11)^6 = \quad (-11)^{\square}$

$b^2 \times b^3 = b^{\square}$ భూమి సమానం; b ఏదైనా ఒక పూర్ణసంఖ్య అని గుర్తుకు తెచ్చుకోండి.

$c^3 \times c^4 = c^{\square}$ (c ఏదైనా ఒక పూర్ణసంఖ్య)

$d^{10} \times d^{20} = d^{\square}$

దీని నుండి a ఏదైనా ఒక శూన్యేతర పూర్ణసంఖ్య, ఇక్కడ m మరియు n లు పూర్ణాంకాలైన మనం క్రిందివిధంగా సాధారణీకరించవచ్చు,

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

ప్రయత్నించండి

సూక్ష్మీకరించి, ఘాత రూపంలో రాయండి:

(i) $2^5 \times 2^3$

(ii) $p^3 \times p^2$

(iii) $4^3 \times 4^2$

(iv) $a^3 \times a^2 \times a^7$

(v) $5^3 \times 5^7 \times 5^{12}$

(vi) $(-4)^{100} \times (-4)^{20}$

గమనిక !

తీసుకోండి $2^3 \times 3^2$

మీరు ఘాతాంకాలను కూడగలరా? కూడలేము 'ఎందుకని' అని మీరు గమనించారా? 2^3 లో భూమి 2 మరియు 3^2 లో భూమి 3. భూములు సమానం కాదు.

11.3.2 ఒకే భూమి గల ఘాతాల భాగాహారం

సూక్ష్మీకరిద్దాం. $3^7 \div 3^4$?

$$3^7 \div 3^4 = \frac{3^7}{3^4} = \frac{3\times3\times3\times3\times3\times3\times3}{3\times3\times3\times3}$$

$$= 3 \times 3 \times 3 = 3^3 = 3^{7-4}$$

కావున $3^7 \div 3^4 = 3^{7-4}$

(గమనిక 3^7 మరియు 3^4 లలో భూములు సమానం మరియు $3^7 \div 3^4 = 3^{7-4}$ అవుతుంది)

ఇదేవిధంగా,

$$5^6 \div 5^2 = \frac{5^6}{5^2} = \frac{5\times5\times5\times5\times5\times5}{5\times5}$$

$$= 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^4 = 5^{6-2}$$

లేదా $5^6 \div 5^2 = 5^{6-2}$

a ఒక శూన్యేతర పూర్ణ సంఖ్య అనుకోండి, అప్పుడు

$$a^4 \div a^2 = \frac{a^4}{a^2} = \frac{a\times a\times a\times a}{a\times a} = a\times a = a^2 = a^{4-2}$$

లేదా $a^4 \div a^2 = a^{4-2}$

ఇపుడు మీరు క్రింది వాటికి జవాబును వెంటనే చెప్పగలరా?

$10^8 \div 10^3 = 10^{8-3} = 10^5$

$7^9 \div 7^6 = 7^{\square}$

$a^8 \div a^5 = a^{\square}$

TRY THESE

Simplify and write in exponential form: (eg., $11^6 \div 11^2 = 11^4$)

(i) $2^9 \div 2^3$ (ii) $10^8 \div 10^4$
(iii) $9^{11} \div 9^7$ (iv) $20^{15} \div 20^{13}$
(v) $7^{13} \div 7^{10}$

For non-zero integers b and c,

$$b^{10} \div b^5 = b^{\square}$$

$$c^{100} \div c^{90} = c^{\square}$$

In general, for any non-zero integer a,

$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$

where m and n are whole numbers and $m > n$.

11.3.3 Taking Power of a Power

Consider the following

Simplify $\left(2^3\right)^2$; $\left(3^2\right)^4$

Now, $\left(2^3\right)^2$ means 2^3 is multiplied two times with itself.

$$\left(2^3\right)^2 = 2^3 \times 2^3$$

$$= 2^{3+3} \text{ (Since } a^m \times a^n = a^{m+n}\text{)}$$

$$= 2^6 = 2^{3 \times 2}$$

Thus $\left(2^3\right)^2 = 2^{3\times2}$

Similarly $\left(3^2\right)^4 = 3^2 \times 3^2 \times 3^2 \times 3^2$

$$= 3^{2+2+2+2}$$

$$= 3^8 \text{ (Observe 8 is the product of 2 and 4).}$$

$$= 3^{2 \times 4}$$

Can you tell what would $\left(7^2\right)^{10}$ would be equal to?

$$\left(2^3\right)^2 = 2^{3 \times 2} = 2^6$$

$$\left(3^2\right)^4 = 3^{2 \times 4} = 3^8$$

So, $\left(7^2\right)^{10} = 7^{2 \times 10} = 7^{20}$

$$\left(a^2\right)^3 = a^{2 \times 3} = a^6$$

$$= a^{m \times 3} = a^{3m}$$

From this we can generalise for any non-zero integer 'a', where 'm' and 'n' are whole numbers,

$$\left(a^m\right)^n = a^{mn}$$

TRY THESE

Simplify and write the answer in exponential form:

(i) $\left(6^2\right)^4$ (ii) $\left(2^2\right)^{100}$

(iii) $\left(7^{50}\right)^2$ (iv) $\left(5^3\right)^7$

ప్రయత్నించండి

సూక్షీకరించి, ఘాత రూపంలో రాయండి:
(ఉదా., $11^6 \div 11^2 = 11^4$)

(i) $2^9 \div 2^3$ (ii) $10^8 \div 10^4$
(iii) $9^{11} \div 9^7$ (iv) $20^{15} \div 20^{13}$
(v) $7^{13} \div 7^{10}$

b మరియు c లు శూన్యేతర పూర్ణ సంఖ్యలైన,

$b^{10} \div b^5 = b^{\square}$

$c^{100} \div c^{90} = c^{\square}$

సాధారణంగా a ఏదైనా శూన్యేతర పూర్ణ సంఖ్య అయిన,

$a^m \div a^n = a^{m-n}$

m మరియు n లు పూర్ణాంకాలైన, మరియు $m > n$.

11.3.3 ఘాతం యొక్క ఘాతం

కింది వాటిని పరిశీలించండి

$(2^3)^2$; $(3^2)^4$ లను సూక్ష్మీకరించండి.

$(2^3)^2$ అంటే 2^3 అనేది అదే సంఖ్యతో రెండు సార్లు గుణించబడింది.

$(2^3)^2 = 2^3 \times 2^3$

$= 2^{3+3}$ (ఎందుకనగా $a^m \times a^n = a^{m+n}$)

$= 2^6 = 2^{3 \times 2}$

కాబట్టి $(2^3)^2 = 2^{3\times 2}$

ఇదేవిధంగా $(3^2)^4 = 3^2 \times 3^2 \times 3^2 \times 3^2$

$= 3^{2+2+2+2}$

$= 3^8$ (8 అనేది 2 మరియు 4 ల లబ్ధం అని గమనించండి).

$= 3^{2 \times 4}$

$(7^2)^{10}$ దేనికి సమానమో మీరు చెప్పగలరా?

$(2^3)^2 = 2^{3 \times 2} = 2^6$

$(3^2)^4 = 3^{2 \times 4} = 3^8$

కావున, $(7^2)^{10} = 7^{2 \times 10} = 7^{20}$

$(a^2)^3 = a^{2 \times 3} = a^6$

$= a^{m \times 3} = a^{3m}$

దీని నుండి క్రింది విధంగా మనం సాధారణీకరించవచ్చు. 'a', ఏదైనా శూన్యేతర పూర్ణ సంఖ్య మరియు 'm' మరియు 'n' లు పూర్ణాంకాలైన

$(a^m)^n = a^{mn}$

ప్రయత్నించండి

సూక్ష్మీకరించి, ఘాత రూపంలో రాయండి.

(i) $(6^2)^4$ (ii) $(2^2)^{100}$

(iii) $(7^{50})^2$ (iv) $(5^3)^7$

EXAMPLE 7 Can you tell which one is greater $(5^2) \times 3$ or $\left(5^2\right)^3$?

SOLUTION $(5^2) \times 3$ means 5^2 is multiplied by 3 i.e., $5 \times 5 \times 3 = 75$

but $\left(5^2\right)^3$ means 5^2 is multiplied by itself three times i.e. ,

$$5^2 \times 5^2 \times 5^2 = 5^6 = 15{,}625$$

Therefore $(5^2)^3 > (5^2) \times 3$

11.3.4 Multiplying Powers with the Same Exponents

Can you simplify $2^3 \times 3^3$? Notice that here the two terms 2^3 and 3^3 have different bases, but the same exponents.

Now, $2^3 \times 3^3 = (2 \times 2 \times 2) \times (3 \times 3 \times 3)$

$= (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3)$

$= 6 \times 6 \times 6$

$= 6^3$ (Observe 6 is the product of bases 2 and 3)

Consider $4^4 \times 3^4$ $= (4 \times 4 \times 4 \times 4) \times (3 \times 3 \times 3 \times 3)$

$= (4 \times 3) \times (4 \times 3) \times (4 \times 3) \times (4 \times 3)$

$= 12 \times 12 \times 12 \times 12$

$= 12^4$

Consider, also, $3^2 \times a^2$ $= (3 \times 3) \times (a \times a)$

$= (3 \times a) \times (3 \times a)$

$= (3 \times a)^2$

$= (3a)^2$ (Note: $3 \times a = 3a$)

Similarly, $a^4 \times b^4$ $= (a \times a \times a \times a) \times (b \times b \times b \times b)$

$= (a \times b) \times (a \times b) \times (a \times b) \times (a \times b)$

$= (a \times b)^4$

$= (ab)^4$ (Note $a \times b = ab$)

TRY THESE

Put into another form using $a^m \times b^m = (ab)^m$:

(i) $4^3 \times 2^3$ (ii) $2^5 \times b^5$

(iii) $a^2 \times t^2$ (iv) $5^6 \times (-2)^6$

(v) $(-2)^4 \times (-3)^4$

In general, for any non-zero integer a

$$a^m \times b^m = (ab)^m \quad \text{(where } m \text{ is any whole number)}$$

EXAMPLE 8 Express the following terms in the exponential form:

(i) $(2 \times 3)^5$ (ii) $(2a)^4$ (iii) $(-4m)^3$

SOLUTION

(i) $(2 \times 3)^5 = (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3)$

$= (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3)$

$= 2^5 \times 3^5$

ఉదాహరణ 7 $(5^2) \times 3$ లేదా $\left(5^2\right)^3$ లలో ఏది పెద్దదో మీరు చెప్పగలరా?

సాధన: $(5^2) \times 3$ అనగా 5^2 అనేది, 3 చే గుణించబడుతుంది అనగా $5 \times 5 \times 3 = 75$

కానీ $\left(5^2\right)^3$ అనగా 5^2 సంఖ్యను అదే సంఖ్య 3 సార్లు గుణిస్తున్నది.

అనగా $5^2 \times 5^2 \times 5^2 = 5^6 = 15{,}625$

అందువలన, $(5^2)^3 > (5^2) \times 3$

13.3.4 ఒకే ఘాతాంకం గల ఘాతాలను గుణించడం

$2^3 \times 3^3$ను సూక్ష్మీకరించగలరా? 2^3 మరియు 3^3 అనే రెండు పదాలు వేర్వేరు భూములు మరియు ఒకే ఘాతాంకాలు కలిగి ఉన్నాయని గమనించండి.

ఇప్పుడు
$$\begin{aligned}2^3 \times 3^3 &= (2 \times 2 \times 2) \times (3 \times 3 \times 3)\\ &= (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3)\\ &= 6 \times 6 \times 6\\ &= 6^3 \quad \text{(6 అనేది భూములైన 2 మరియు 3ల లబ్ధం)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}4^4 \times 3^4 &= (4 \times 4 \times 4 \times 4) \times (3 \times 3 \times 3 \times 3)\\ &= (4 \times 3) \times (4 \times 3) \times (4 \times 3) \times (4 \times 3)\\ &= 12 \times 12 \times 12 \times 12\\ &= 12^4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3^2 \times a^2 &= (3 \times 3) \times (a \times a)\\ &= (3 \times a) \times (3 \times a)\\ &= (3 \times a)^2\\ &= (3a)^2 \qquad \text{(గమనిక: } 3\times a = 3a\text{)}\end{aligned}$$

ప్రయత్నించండి

$a^m \times b^m = (ab)^m$ ని ఉపయోగించి మరొక రూపంలో రాయండి:

(i) $4^3 \times 2^3$ (ii) $2^5 \times b^5$

(iii) $a^2 \times t^2$ (iv) $5^6 \times (-2)^6$

(v) $(-2)^4 \times (-3)^4$

ఇదేవిధంగా,
$$\begin{aligned}a^4 \times b^4 &= (a \times a \times a \times a) \times (b \times b \times b \times b)\\ &= (a \times b) \times (a \times b) \times (a \times b) \times (a \times b)\\ &= (a \times b)^4\\ &= (ab)^4 \qquad \text{(గమనిక: } a \times b = ab\text{)}\end{aligned}$$

సాధారణంగా a, b లు ఏవైనా రెండు శూన్యేతర పూర్ణ సంఖ్యలు అయితే

$$a^m \times b^m = (ab)^m \qquad (m \text{ ఏదైనా ఒక పూర్ణాంకం అయిన})$$

ఉదాహరణ 8 క్రింది వాటిని ఘాత రూపంలో తెల్పండి.

(i) $(2 \times 3)^5$ (ii) $(2a)^4$ (iii) $(-4m)^3$

సాధన:

(i)
$$\begin{aligned}(2 \times 3)^5 &= (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3)\\ &= (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3)\\ &= 2^5 \times 3^5\end{aligned}$$

(ii) $(2a)^4 = 2a \times 2a \times 2a \times 2a$
$= (2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (a \times a \times a \times a)$
$= 2^4 \times a^4$

(iii) $(-4m)^3 = (-4 \times m)^3$
$= (-4 \times m) \times (-4 \times m) \times (-4 \times m)$
$= (-4) \times (-4) \times (-4) \times (m \times m \times m) = (-4)^3 \times (m)^3$

11.3.5 Dividing Powers with the Same Exponents

Observe the following simplifications:

(i) $$\frac{2^4}{3^4} = \frac{2\times2\times2\times2}{3\times3\times3\times3} = \frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^4$$

(ii) $$\frac{a^3}{b^3} = \frac{a\times a\times a}{b\times b\times b} = \frac{a}{b}\times\frac{a}{b}\times\frac{a}{b} = \left(\frac{a}{b}\right)^3$$

From these examples we may generalise

$$a^m \div b^m = \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$ where a and b are any non zero integers and m is a whole number.

TRY THESE

Put into another form using $a^m \div b^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m$:

(i) $4^5 \div 3^5$
(ii) $2^5 \div b^5$
(iii) $(-2)^3 \div b^3$
(iv) $p^4 \div q^4$
(v) $5^6 \div (-2)^6$

EXAMPLE 9 Expand: (i) $\left(\frac{3}{5}\right)^4$ (ii) $\left(\frac{-4}{7}\right)^5$

SOLUTION

(i) $$\left(\frac{3}{5}\right)^4 = \frac{3^4}{5^4} = \frac{3\times3\times3\times3}{5\times5\times5\times5}$$

(ii) $$\left(\frac{-4}{7}\right)^5 = \frac{(-4)^5}{7^5} = \frac{(-4)\times(-4)\times(-4)\times(-4)\times(-4)}{7\times7\times7\times7\times7}$$

- **Numbers with exponent zero**

Can you tell what $\frac{3^5}{3^5}$ equals to?

$$\frac{3^5}{3^5} = \frac{3\times3\times3\times3\times3}{3\times3\times3\times3\times3} = 1$$

by using laws of exponents

What is a^0?
Obeserve the following pattern:
$2^6 = 64$
$2^5 = 32$
$2^4 = 16$
$2^3 = 8$
$2^2 = ?$
$2^1 = ?$
$2^0 = ?$

You can guess the value of 2^0 by just studying the pattern!

You find that $2^0 = 1$

If you start from $3^6 = 729$, and proceed as shown above finding $3^5, 3^4, 3^3$,... etc, what will be $3^0 = ?$

(ii) $(2a)^4 = 2a \times 2a \times 2a \times 2a$
$= (2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (a \times a \times a \times a)$
$= 2^4 \times a^4$

(iii) $(-4m)^3 = (-4 \times m)^3$
$= (-4 \times m) \times (-4 \times m) \times (-4 \times m)$
$= (-4) \times (-4) \times (-4) \times (m \times m \times m) = (-4)^3 \times (m)^3$

13.3.5 ఒకే ఘాతాంకం గల ఘాతాలను భాగించండి.

క్రింది సూక్ష్మీకరణాలను గమనించండి:

(i) $\frac{2^4}{3^4} = \frac{2\times2\times2\times2}{3\times3\times3\times3} = \frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^4$

(ii) $\frac{a^3}{b^3} = \frac{a\times a\times a}{b\times b\times b} = \frac{a}{b}\times\frac{a}{b}\times\frac{a}{b} = \left(\frac{a}{b}\right)^3$

ఈ ఉదాహరణల నుండి ఈ విధంగా సాధారణీకరించవచ్చు.

$a^m \div b^m = \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$ (ఇక్కడ a మరియు b లు ఏవైనా శూన్యేతర పూర్ణ సంఖ్యలు మరియు m ఏదైనా ఒక పూర్ణాంకం)

ఉదాహరణ 9 విస్తరించండి (i) $\left(\frac{3}{5}\right)^4$ (ii) $\left(\frac{-4}{7}\right)^5$

సాధన:

(i) $\left(\frac{3}{5}\right)^4 = \frac{3^4}{5^4} = \frac{3\times3\times3\times3}{5\times5\times5\times5}$

(ii) $\left(\frac{-4}{7}\right)^5 = \frac{(-4)^5}{7^5} = \frac{(-4)\times(-4)\times(-4)\times(-4)\times(-4)}{7\times7\times7\times7\times7}$

- **ఘాతాంకం సున్నగా గల సంఖ్యలు**

$\frac{3^5}{3^5}$ దేనికి సమానమో మీరు చెప్పగలరా?

$\frac{3^5}{3^5} = \frac{3\times3\times3\times3\times3}{3\times3\times3\times3\times3} = 1$

ఘాతాంక న్యాయాలను ఉపయోగించి

ప్రయత్నించండి

$a^m \div b^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m$ ను ఉపయోగించి మరో రూపంలో రాయండి.

(i) $4^5 \div 3^5$
(ii) $2^5 \div b^5$
(iii) $(-2)^3 \div b^3$
(iv) $p^4 \div q^4$
(v) $5^6 \div (-2)^6$

a^0 ఎంత ?

కింది క్రమాన్ని పరిశీలించండి. ?

$2^6 = 64$
$2^5 = 32$
$2^4 = 16$
$2^3 = 8$
$2^2 = ?$
$2^1 = ?$
$2^0 = ?$

ఈ క్రమాన్ని పరిశీలించడం ద్వారా 2^0 యొక్క విలువను ఊహించగలరు.

$2^0 = 1$ అని మీరు తెలుసుకొన్నారు.

ఈ క్రమాన్ని పరిశీలించడం ద్వారా $3^6=729$, నుండి మొదలు పెట్టి పైన తెలిపిన విధంగా 3^5, 3^4, 3^3... మొ. కనుగొంటూ పోతే $3^0 =$ విలువ ఎంత అవుతుంది. ?

$$3^5 \div 3^5 = 3^{5-5} = 3^0$$

So $\qquad 3^0 = 1$

Can you tell what 7^0 is equal to?

$$7^3 \div 7^3 = 7^{3-3} = 7^0$$

And $\qquad \dfrac{7^3}{7^3} = \dfrac{7 \times 7 \times 7}{7 \times 7 \times 7} = 1$

Therefore $\qquad 7^0 = 1$

Similarly $\qquad a^3 \div a^3 = a^{3-3} = a^0$

And $\qquad a^3 \div a^3 = \dfrac{a^3}{a^3} = \dfrac{a \times a \times a}{a \times a \times a} = 1$

Thus $\qquad a^0 = 1$ (for any non-zero integer a)

So, we can say that any number (except 0) raised to the power (or exponent) 0 is 1.

11.4 Miscellaneous Examples using the Laws of Exponents

Let us solve some examples using rules of exponents developed.

Example 10 Write exponential form for $8 \times 8 \times 8 \times 8$ taking base as 2.

Solution We have, $8 \times 8 \times 8 \times 8 = 8^4$

But we know that $\qquad 8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$

Therefore $\qquad 8^4 = (2^3)^4 = 2^3 \times 2^3 \times 2^3 \times 2^3$

$\qquad = 2^{3 \times 4}$ $\qquad$ [You may also use $(a^m)^n = a^{mn}$]

$\qquad = 2^{12}$

Example 11 Simplify and write the answer in the exponential form.

(i) $\left(\dfrac{3^7}{3^2}\right) \times 3^5$ $\qquad$ (ii) $2^3 \times 2^2 \times 5^5$ $\qquad$ (iii) $(6^2 \times 6^4) \div 6^3$

(iv) $[(2^2)^3 \times 3^6] \times 5^6$ $\qquad$ (v) $8^2 \div 2^3$

Solution

(i) $\left(\dfrac{3^7}{3^2}\right) \times 3^5 = \left(3^{7-2}\right) \times 3^5$

$$= 3^5 \times 3^5 = 3^{5+5} = 3^{10}$$

$$3^5 \div 3^5 = 3^{5-5} = 3^0$$

కావున, $3^0 = 1$

7^0 దేనికి సమానమో చెప్పగలరా?

$$7^3 \div 7^3 = 7^{3-3} = 7^0$$

మరియు $\dfrac{7^3}{7^3} = \dfrac{7\times7\times7}{7\times7\times7} = 1$

$7^0 = 1$

ఇదేవిధంగా $a^3 \div a^3 = a^{3-3} = a^0$

మరియు $a^3 \div a^3 = \dfrac{a^3}{a^3} = \dfrac{a\times a\times a}{a\times a\times a} = 1$

కాబట్టి $a^0 = 1$ (a ఏదైనా ఒక శూన్యేతర పూర్ణసంఖ్య)

కావున, ఏదైనా ఒక సంఖ్య (0 కాకుండా) సున్నా ఘాతానికి కలిగివున్న దాని విలువ 1 అవుతుంది.

13.4 ఘాతాంక న్యాయాలను ఉపయోగించి కొన్ని ఉదాహరణలు

ఘాతాంక న్యాయాలను ఉపయోగించి కొన్ని ఉదాహరణలను సాధిద్దాం.

ఉదాహరణ 10 $8 \times 8 \times 8 \times 8$ ని 2 భూమిగా ఘాత రూపంలో రాయండి.

సాధన: $8 \times 8 \times 8 \times 8 = 8^4$ అని ఇవ్వబడింది.

కానీ, $8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$

అందువలన $8^4 = (2^3)^4 = 2^3 \times 2^3 \times 2^3 \times 2^3$

$= 2^{3\times4}$ [$(a^m)^n = a^{mn}$ ఈ న్యాయాన్ని కూడా ఉపయోగించవచ్చు]

$= 2^{12}$

ఉదాహరణ 11 సూక్ష్మీకరించి, జవాబుని ఘాత రూపంలో రాయండి:

(i) $\left(\dfrac{3^7}{3^2}\right)\times3^5$ (ii) $2^3 \times 2^2 \times 5^5$ (iii) $(6^2 \times 6^4) \div 6^3$

(iv) $[(2^2)^3 \times 3^6] \times 5^6$ (v) $8^2 \div 2^3$

సాధన:

(i) $\left(\dfrac{3^7}{3^2}\right)\times3^5 = \left(3^{7-2}\right)\times3^5$

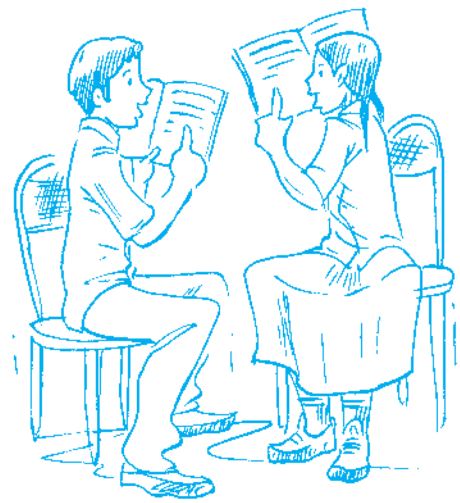
$= 3^5\times3^5 = 3^{5+5} = 3^{10}$

(ii) $2^3 \times 2^2 \times 5^5 = 2^{3+2} \times 5^5$

$= 2^5 \times 5^5 = (2 \times 5)^5 = 10^5$

(iii) $\left(6^2 \times 6^4\right) \div 6^3 = 6^{2+4} \div 6^3$

$= \dfrac{6^6}{6^3} = 6^{6-3} = 6^3$



(iv) $\left[\left(2^2\right)^3 \times 3^6\right] \times 5^6 = [2^6 \times 3^6] \times 5^6$

$= (2 \times 3)^6 \times 5^6$

$= (2 \times 3 \times 5)^6 = 30^6$

(v) $8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$

Therefore $8^2 \div 2^3 = (2^3)^2 \div 2^3$

$= 2^6 \div 2^3 = 2^{6-3} = 2^3$

EXAMPLE 12 Simplify :

(i) $\dfrac{12^4 \times 9^3 \times 4}{6^3 \times 8^2 \times 27}$ (ii) $2^3 \times a^3 \times 5a^4$ (iii) $\dfrac{2 \times 3^4 \times 2^5}{9 \times 4^2}$

SOLUTION

(i) We have

$$\frac{12^4 \times 9^3 \times 4}{6^3 \times 8^2 \times 27} = \frac{(2^2 \times 3)^4 \times (3^2)^3 \times 2^2}{(2 \times 3)^3 \times (2^3)^2 \times 3^3}$$

$$= \frac{\left(2^2\right)^4 \times (3)^4 \times 3^{2\times3} \times 2^2}{2^3 \times 3^3 \times 2^{2\times3} \times 3^3} = \frac{2^8 \times 2^2 \times 3^4 \times 3^6}{2^3 \times 2^6 \times 3^3 \times 3^3}$$

$$= \frac{2^{8+2} \times 3^{4+6}}{2^{3+6} \times 3^{3+3}} = \frac{2^{10} \times 3^{10}}{2^9 \times 3^6}$$

$= 2^{10-9} \times 3^{10-6} = 2^1 \times 3^4$

$= 2 \times 81 = 162$

(ii) $2^3 \times a^3 \times 5a^4 = 2^3 \times a^3 \times 5 \times a^4$

$= 2^3 \times 5 \times a^3 \times a^4 = 8 \times 5 \times a^{3+4}$

$= 40\, a^7$

(ii) $2^3 \times 2^2 \times 5^5 = 2^{3+2} \times 5^5$

$= 2^5 \times 5^5 = (2 \times 5)^5 = 10^5$

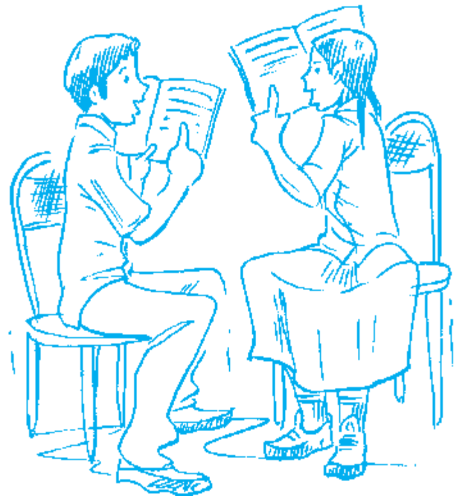
(iii) $\left(6^2 \times 6^4\right) \div 6^3 = 6^{2+4} \div 6^3$

$$= \frac{6^6}{6^3} = 6^{6-3} = 6^3$$

(iv) $\left[\left(2^2\right)^3 \times 3^6\right] \times 5^6 = [2^6 \times 3^6] \times 5^6$

$= (2 \times 3)^6 \times 5^6$

$= (2 \times 3 \times 5)^6 = 30^6$



(v) $8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$

కావున $8^2 \div 2^3 = (2^3)^2 \div 2^3$

$= 2^6 \div 2^3 = 2^{6-3} = 2^3$

ఉదాహరణ 12 సూక్ష్మీకరించండి:

(i) $\dfrac{12^4 \times 9^3 \times 4}{6^3 \times 8^2 \times 27}$ (ii) $2^3 \times a^3 \times 5a^4$ (iii) $\dfrac{2 \times 3^4 \times 2^5}{9 \times 4^2}$

సాధన:

(i)

$$\frac{12^4 \times 9^3 \times 4}{6^3 \times 8^2 \times 27} = \frac{(2^2 \times 3)^4 \times (3^2)^3 \times 2^2}{(2 \times 3)^3 \times (2^3)^2 \times 3^3}$$

$$= \frac{\left(2^2\right)^4 \times (3)^4 \times 3^{2\times3} \times 2^2}{2^3 \times 3^3 \times 2^{2\times3} \times 3^3} = \frac{2^8 \times 2^2 \times 3^4 \times 3^6}{2^3 \times 2^6 \times 3^3 \times 3^3}$$

$$= \frac{2^{8+2} \times 3^{4+6}}{2^{3+6} \times 3^{3+3}} = \frac{2^{10} \times 3^{10}}{2^9 \times 3^6}$$

$= 2^{10-9} \times 3^{10-6} = 2^1 \times 3^4$

$= 2 \times 81 = 162$

(ii) $2^3 \times a^3 \times 5a^4 = 2^3 \times a^3 \times 5 \times a^4$

$= 2^3 \times 5 \times a^3 \times a^4 = 8 \times 5 \times a^{3+4}$

$= 40\ a^7$

(ii) $\frac{2\times 3^4\times 2^5}{9\times 4^2} = \frac{2\times 3^4\times 2^5}{3^2\times\left(2^2\right)^2} = \frac{2\times 2^5\times 3^4}{3^2\times 2^{2\times 2}}$

$= \frac{2^{1+5}\times 3^4}{2^4\times 3^2} = \frac{2^6\times 3^4}{2^4\times 3^2} = 2^{6-4}\times 3^{4-2}$

$= 2^2\times 3^2 = 4\times 9 = 36$

Note: In most of the examples that we have taken in this Chapter, the base of a power was taken an integer. But all the results of the chapter apply equally well to a base which is a rational number.

EXERCISE 11.2

1. Using laws of exponents, simplify and write the answer in exponential form:

(i) $3^2\times 3^4\times 3^8$ (ii) $6^{15}\div 6^{10}$ (iii) $a^3\times a^2$

(iv) $7^x\times 7^2$ (v) $\left(5^2\right)^3\div 5^3$ (vi) $2^5\times 5^5$

(vii) $a^4\times b^4$ (viii) $\left(3^4\right)^3$ (ix) $\left(2^{20}\div 2^{15}\right)\times 2^3$

(x) $8^t\div 8^2$

2. Simplify and express each of the following in exponential form:

(i) $\frac{2^3\times 3^4\times 4}{3\times 32}$ (ii) $\left(\left(5^2\right)^3\times 5^4\right)\div 5^7$ (iii) $25^4\div 5^3$

(iv) $\frac{3\times 7^2\times 11^8}{21\times 11^3}$ (v) $\frac{3^7}{3^4\times 3^3}$ (vi) $2^0+3^0+4^0$

(vii) $2^0\times 3^0\times 4^0$ (viii) $(3^0+2^0)\times 5^0$ (ix) $\frac{2^8\times a^5}{4^3\times a^3}$

(x) $\left(\frac{a^5}{a^3}\right)\times a^8$ (xi) $\frac{4^5\times a^8b^3}{4^5\times a^5b^2}$ (xii) $\left(2^3\times 2\right)^2$

3. Say true or false and justify your answer:

(i) $10\times 10^{11} = 100^{11}$ (ii) $2^3 > 5^2$ (iii) $2^3\times 3^2 = 6^5$

(iv) $3^0 = (1000)^0$

(ii) $\dfrac{2\times 3^4\times 2^5}{9\times 4^2} = \dfrac{2\times3^4\times2^5}{3^2\times\left(2^2\right)^2} = \dfrac{2\times2^5\times3^4}{3^2\times2^{2\times2}}$

$= \dfrac{2^{1+5}\times3^4}{2^4\times3^2} = \dfrac{2^6\times3^4}{2^4\times3^2} = 2^{6-4}\times3^{4-2}$

$= 2^2\times3^2 = 4\times9 = 36$

గమనిక: ఈ అధ్యాయంలో మనం తీసుకున్న చాలా ఉదాహరణలలో, భూమి యొక్క ఘాతాన్ని పూర్ణ సంఖ్య తీసుకోబడింది. కానీ ఈ అధ్యాయంలోని అన్ని రకాల ఫలితాలు అకరణీయ సంఖ్యలు భూములుగాగల వాటికి కూడా వర్తిస్తాయి.

అభ్యాసం 11.2

1. ఘాతాంక న్యాయాలను ఉపయోగించి సూక్ష్మీకరించండి. జవాబులను ఘాత రూపంలో రాయండి.

(i) $3^2\times3^4\times3^8$ (ii) $6^{15}\div6^{10}$ (iii) $a^3\times a^2$

(iv) $7^x\times7^2$ (v) $\left(5^2\right)^3\div5^3$ (vi) $2^5\times5^5$

(vii) $a^4\times b^4$ (viii) $\left(3^4\right)^3$ (ix) $\left(2^{20}\div2^{15}\right)\times2^3$

(x) $8^t\div8^2$

2. క్రింది వాటిని సూక్ష్మీకరించండి. ఘాత రూపంలో వ్యక్తపరచండి.

(i) $\dfrac{2^3\times3^4\times4}{3\times32}$ (ii) $\left(\left(5^2\right)^3\times5^4\right)\div5^7$ (iii) $25^4\div5^3$

(iv) $\dfrac{3\times7^2\times11^8}{21\times11^3}$ (v) $\dfrac{3^7}{3^4\times3^3}$ (vi) $2^0+3^0+4^0$

(vii) $2^0\times3^0\times4^0$ (viii) $(3^0+2^0)\times5^0$ (ix) $\dfrac{2^8\times a^5}{4^3\times a^3}$

(x) $\left(\dfrac{a^5}{a^3}\right)\times a^8$ (xi) $\dfrac{4^5\times a^8b^3}{4^5\times a^5b^2}$ (xii) $\left(2^3\times2\right)^2$

3. సత్యమో, అసత్యమో తెలిపి మీ జవాబును సమర్థించండి:

(i) $10\times10^{11}=100^{11}$ (ii) $2^3>5^2$ (iii) $2^3\times3^2=6^5$

(iv) $3^0=(1000)^0$

4. Express each of the following as a product of prime factors only in exponential form:

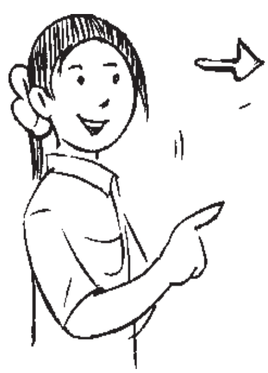
(i) 108×192 (ii) 270 (iii) 729×64

(iv) 768

5. Simplify:

(i) $\dfrac{(2^5)^2 \times 7^3}{8^3 \times 7}$ (ii) $\dfrac{25 \times 5^2 \times t^8}{10^3 \times t^4}$ (iii) $\dfrac{3^5 \times 10^5 \times 25}{5^7 \times 6^5}$

11.5 Decimal Number System



Let us look at the expansion of 47561, which we already know:

$$47561 = 4 \times 10000 + 7 \times 1000 + 5 \times 100 + 6 \times 10 + 1$$

We can express it using powers of 10 in the exponent form:

Therefore, $47561 = 4 \times 10^4 + 7 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 6 \times 10^1 + 1 \times 10^0$

(Note $10{,}000 = 10^4$, $1000 = 10^3$, $100 = 10^2$, $10 = 10^1$ and $1 = 10^0$)

Let us expand another number:

$$\begin{aligned} 104278 &= 1 \times 100{,}000 + 0 \times 10{,}000 + 4 \times 1000 + 2 \times 100 + 7 \times 10 + 8 \times 1 \\ &= 1 \times 10^5 + 0 \times 10^4 + 4 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 7 \times 10^1 + 8 \times 10^0 \\ &= 1 \times 10^5 + 4 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 7 \times 10^1 + 8 \times 10^0 \end{aligned}$$

Notice how the exponents of 10 start from a maximum value of 5 and go on decreasing by 1 at a step from the left to the right upto 0.

11.6 Expressing Large Numbers in the Standard Form

Let us now go back to the beginning of the chapter. We said that large numbers can be conveniently expressed using exponents. We have not as yet shown this. We shall do so now.

1. Sun is located 300,000,000,000,000,000,000 m from the centre of our Milky Way Galaxy.
2. Number of stars in our Galaxy is 100,000,000,000.
3. Mass of the Earth is 5,976,000,000,000,000,000,000,000 kg.

These numbers are not convenient to write and read. To make it convenient we use powers.

Observe the following:

$$59 = 5.9 \times 10 = 5.9 \times 10^1$$

$$590 = 5.9 \times 100 = 5.9 \times 10^2$$

$$5900 = 5.9 \times 1000 = 5.9 \times 10^3$$

$$59000 = 5.9 \times 10000 = 5.9 \times 10^4 \text{ and so on.}$$

Try These

Expand by expressing powers of 10 in the exponential form:

(i) 172

(ii) 5,643

(iii) 56,439

(iv) 1,76,428

4. క్రింది వాటిని ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధంగా ఘాత రూపంలో వ్యక్తపరచండి:

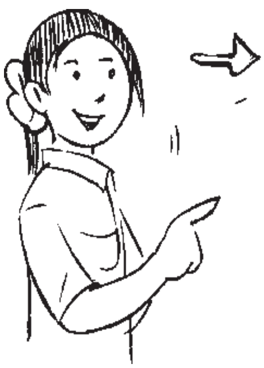
(i) 108×192 (ii) 270 (iii) 729×64

(iv) 768

5. సూక్ష్మీకరించండి:

(i) $\dfrac{(2^5)^2 \times 7^3}{8^3 \times 7}$ (ii) $\dfrac{25 \times 5^2 \times t^8}{10^3 \times t^4}$ (iii) $\dfrac{3^5 \times 10^5 \times 25}{5^7 \times 6^5}$

13.5 దశాంశ సంఖ్యామానం



విస్తరణ రూపం మీకు ముందుగానే తెలుసుకదా 47561 యొక్క విస్తరణ రూపాన్ని గమనించండి.

$$47561 = 4 \times 10000 + 7 \times 1000 + 5 \times 100 + 6 \times 10 + 1$$

మనం దీనిని 10 యొక్క ఘాతాంక రూపంలో వ్యక్తపరచవచ్చు.

కావున , $47561 = 4 \times 10^4 + 7 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 6 \times 10^1 + 1 \times 10^0$

(గమనిక: $10{,}000 = 10^4$, $1000 = 10^3$, $100 = 10^2$, $10 = 10^1$, $1 = 10^0$)

మరియు సంఖ్యను విస్తరిద్దాం.

$$\begin{aligned} 104278 &= 1 \times 100{,}000 + 0 \times 10{,}000 + 4 \times 1000 + 2 \times 100 + 7 \times 10 + 8 \times 1 \\ &= 1 \times 10^5 + 0 \times 10^4 + 4 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 7 \times 10^1 + 8 \times 10^0 \\ &= 1 \times 10^5 + 4 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 7 \times 10^1 + 8 \times 10^0 \end{aligned}$$

10 యొక్క ఘాతం విలువ 5 నుండి మొదలుపెట్టి 1 సంఖ్యను తగ్గిస్తూ అవరోహణా క్రమంలో ఎడమ నుండి కుడివైపుకు 0 వచ్చేవరకు రాయండి.

13.6 పెద్ద సంఖ్యలను ప్రామాణిక రూపంలో వ్యక్తపరచుట

మనం ఈ అధ్యాయం ప్రారంభంలోకి వెళ్దాం. ఘాతాంకాలను ఉపయోగించి పెద్ద సంఖ్యలను సౌకర్యవంతంగా వ్యక్తపరచవచ్చని మనం చెప్పుకున్నాం. దీనిని మనం ఇంతవరకూ చూపలేదు. మనం ఇప్పుడే చేద్దాం.

1. సూర్యుడు పాలపుంత కేంద్రం నుండి 300,000,000,000,000,000,000 మీ. దూరంలో ఉన్నాడు.
2. మన నక్షత్రమండలంలో 100,000,000,000 నక్షత్రాలు ఉన్నాయి.
3. భూమి ద్రవ్యరాశి 5,976,000,000,000,000,000,000,000 కి.గ్రా.

ఇలాంటి పెద్ద సంఖ్యలను రాయడం, చదవడం కష్టం. ఇది సులభతరం కావాలంటే ఘాతాలను ఉపయోగించి రాయాలి.

కింది వాటిని గమనించండి:

$$59 = 5.9 \times 10 = 5.9 \times 10^1$$

$$590 = 5.9 \times 100 = 5.9 \times 10^2$$

$$5900 = 5.9 \times 1000 = 5.9 \times 10^3$$

$59000 = 5.9 \times 10000 = 5.9 \times 10^4$ ఇంకా మరెన్నో ....

ప్రయత్నించండి

10 యొక్క ఘాతంగా విస్తరణ రూపంలో వ్యక్తపరచండి:

(i) 172
(ii) 5,643
(iii) 56,439
(iv) 1,76,428

We have expressed all these numbers in the **standard form**. Any number can be expressed as a decimal number between 1.0 and 10.0 including 1.0 multiplied by a power of 10. Such a form of a number is called its **standard form**. Thus,

$$5,985 = 5.985 \times 1,000 = 5.985 \times 10^3 \text{ is the standard form of } 5,985.$$

Note, 5,985 can also be expressed as 59.85×100 or 59.85×10^2. But these are not the standard forms, of 5,985. Similarly, $5,985 = 0.5985 \times 10,000 = 0.5985 \times 10^4$ is also not the standard form of 5,985.

We are now ready to express the large numbers we came across at the beginning of the chapter in this form.

The, distance of Sun from the centre of our Galaxy i.e.,

300,000,000,000,000,000,000 m can be written as

$3.0 \times 100,000,000,000,000,000,000 = 3.0 \times 10^{20}$ m

Now, can you express 40,000,000,000 in the similar way?

Count the number of zeros in it. It is 10.

So, $40,000,000,000 = 4.0 \times 10^{10}$

Mass of the Earth = 5,976,000,000,000,000,000,000,000 kg

$= 5.976 \times 10^{24}$ kg

Do you agree with the fact, that the number when written in the standard form is much easier to read, understand and compare than when the number is written with 25 digits?

Now,

Mass of Uranus = 86,800,000,000,000,000,000,000,000 kg

$= 8.68 \times 10^{25}$ kg

Simply by comparing the powers of 10 in the above two, you can tell that the mass of Uranus is greater than that of the Earth.

The distance between Sun and Saturn is 1,433,500,000,000 m or 1.4335×10^{12} m. The distance betwen Saturn and Uranus is 1,439,000,000,000 m or 1.439×10^{12} m. The distance between Sun and Earth is 149, 600,000,000 m or 1.496×10^{11} m.

Can you tell which of the three distances is smallest?

EXAMPLE 13 Express the following numbers in the standard form:

(i) 5985.3 (ii) 65,950

(iii) 3,430,000 (iv) 70,040,000,000

SOLUTION

(i) $5985.3 = 5.9853 \times 1000 = 5.9853 \times 10^3$

(ii) $65,950 = 6.595 \times 10,000 = 6.595 \times 10^4$

(iii) $3,430,000 = 3.43 \times 1,000,000 = 3.43 \times 10^6$

(iv) $70,040,000,000 = 7.004 \times 10,000,000,000 = 7.004 \times 10^{10}$

ఈ సంఖ్యలన్నిటినీ **ప్రామాణిక రూపంలో** వ్యక్తపరచాం. ఏ సంఖ్యనైనా 1.0 తో సహా 1.0 మరియు 10.0 ల మధ్య గల దశాంశ మరియు 10 ఘాతాల లబ్ధంగా వ్యక్తపరచవచ్చు. సంఖ్యారూపాన్ని **ప్రామాణిక రూపం** అంటారు. ఆ విధంగా

$5,985 = 5.985 \times 1,000 = 5.985 \times 10^3$ ఇది 5,985 ప్రామాణిక రూపం.

5,985 ను 59.85×100 లేదా 59.85×10^2. ఈ విధంగా కూడా వ్యక్తపరచవచ్చు. కానీ ఇవి 5,985 యొక్క ప్రామాణిక రూపం కాదు. అదేవిధంగా, $5,985 = 0.5985 \times 10,000 = 0.5985 \times 10^4$ ఇది కూడా 5,985 యొక్క ప్రామాణిక రూపం కాదు.

ఈ అధ్యాయం ప్రారంభంలో చూసిన పెద్ద సంఖ్యలను ప్రామాణిక రూపంలో వ్యక్తపరచడానికి సిద్ధంగా ఉన్నాం. మన నక్షత్ర మండల కేంద్రం నుండి సూర్యునికి గల దూరం 300,000,000,000,000,000,000 మీ. ని $3.0 \times 100,000,000,000,000,000,000$మీ. $= 3.0 \times 10^{20}$ మీ. గా రాయవచ్చు.

40,000,000,000 ను కూడా ఈ విధంగా వ్యక్తపరచగలరా?

ఈ సంఖ్యలోని సున్నాలను లెక్కించండి. అవి 10 ఉన్నాయి.

కావున, $40,000,000,000 = 4.0 \times 10^{10}$

భూమి ద్రవ్యరాశి $= 5,976,000,000,000,000,000,000,000$ కి.గ్రా.

$= 5.976 \times 10^{24}$ కి.గ్రా.

ఈ సంఖ్యను 25 అంకెలతో రాయటం కన్నా ప్రామాణిక రూపంలో రాయటం, అర్థం చేసుకోవడం మరియు పోల్చటం సులభం. ఈ విషయంతో మీరు ఏకీభవిస్తారా?

ఇప్పుడు,

యురేనస్ ద్రవ్యరాశి $= 86,800,000,000,000,000,000,000,000$ కి.గ్రా.

$= 8.68 \times 10^{25}$ కి.గ్రా.

పై రెండింటిలో 10 ఘాతాలు పోల్చడం వలన యురేనస్ ద్రవ్యరాశి అనేది భూమి ద్రవ్యరాశి కంటే ఎక్కువ అని, మనం చెప్పగలం.

సూర్యుడు మరియు శనిల మధ్య దూరం 1,433,500,000,000 మీ. లేదా 1.4335×10^{12} మీ. శని మరియు యురేనస్ మధ్య దూరం 1,439,000,000,000 మీ. లేదా 1.439×10^{12} మీ. సూర్యుడు మరియు భూమిల మధ్య దూరం 149, 600,000,000 మీ. లేదా 1.496×10^{11} మీ.

ఈ మూడు దూరాలలో అతి తక్కువ దూరం ఏదో మీరు చెప్పగలరా?

ఉదాహరణ 13 కింది సంఖ్యలను ప్రామాణిక రూపంలో వ్యక్తపరచండి.

(i) 5985.3 (ii) 65,950

(iii) 3,430,000 (iv) 70,040,000,000

సాధన:

(i) $5985.3 = 5.9853 \times 1000 = 5.9853 \times 10^3$

(ii) $65,950 = 6.595 \times 10,000 = 6.595 \times 10^4$

(iii) $3,430,000 = 3.43 \times 1,000,000 = 3.43 \times 10^6$

(iv) $70,040,000,000 = 7.004 \times 10,000,000,000 = 7.004 \times 10^{10}$

A point to remember is that one less than the digit count (number of digits) to the left of the decimal point in a given number is the exponent of 10 in the standard form. Thus, in 70,040,000,000 there is no decimal point shown; we assume it to be at the (right) end. From there, the count of the places (digits) to the left is 11. The exponent of 10 in the standard form is 11 – 1 = 10. In 5985.3 there are 4 digits to the left of the decimal point and hence the exponent of 10 in the standard form is 4 – 1 = 3.

EXERCISE 11.3

1. Write the following numbers in the expanded forms:

279404, 3006194, 2806196, 120719, 20068

2. Find the number from each of the following expanded forms:

(a) $8 \times 10^4 + 6 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 5 \times 10^0$

(b) $4 \times 10^5 + 5 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 2 \times 10^0$

(c) $3 \times 10^4 + 7 \times 10^2 + 5 \times 10^0$

(d) $9 \times 10^5 + 2 \times 10^2 + 3 \times 10^1$

3. Express the following numbers in standard form:

(i) 5,00,00,000 (ii) 70,00,000 (iii) 3,18,65,00,000

(iv) 3,90,878 (v) 39087.8 (vi) 3908.78

4. Express the number appearing in the following statements in standard form.

(a) The distance between Earth and Moon is 384,000,000 m.

(b) Speed of light in vacuum is 300,000,000 m/s.

(c) Diameter of the Earth is 1,27,56,000 m.

(d) Diameter of the Sun is 1,400,000,000 m.

(e) In a galaxy there are on an average 100,000,000,000 stars.

(f) The universe is estimated to be about 12,000,000,000 years old.

(g) The distance of the Sun from the centre of the Milky Way Galaxy is estimated to be 300,000,000,000,000,000,000 m.

(h) 60,230,000,000,000,000,000,000 molecules are contained in a drop of water weighing 1.8 gm.

(i) The earth has 1,353,000,000 cubic km of sea water.

(j) The population of India was about 1,027,000,000 in March, 2001.

గుర్తుంచుకోవాల్సిన అంశం ఏమిటంటే, ఇచ్చిన సంఖ్యలో దశాంశ బిందువుకు ఎడమవైపు ఉన్న అంకెల సంఖ్య కంటే ఒకటి తక్కువగా ఉన్న సంఖ్య ఉంటే అది ప్రామాణిక రూపంలో 10 యొక్క ఘాతాంకం అవుతుంది. అందువలన, 70,040,000,000 లో దశాంశ బిందువు చూపబడలేదు; అది (కుడివైపు) చివర ఉంటుందని మనం ఊహిస్తాం. అక్కడ నుండి, ఎడమవైపు ఉన్న అంకెలు 11. ప్రామాణిక రూపంలో 10 యొక్క ఘాతాంకం $11 - 1 = 10$. సంఖ్య 5985.3 లో దశాంశ బిందువుకు ఎడమవైపున 4 అంకెలు ఉన్నాయి కనుక ప్రామాణిక రూపంలో 10 యొక్క ఘాతాంకం $4 - 1 = 3$.

అభ్యాసం 11.3

1. క్రింది సంఖ్యలను విస్తరణ రూపంలో రాయండి:

279404, 3006194, 2806196, 120719, 20068

2. విస్తరణ రూపంలో ఇవ్వబడిన ప్రతి దానికి వాటి సంఖ్యలను కనుగొనండి:

(a) $8 \times 10^4 + 6 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 5 \times 10^0$

(b) $4 \times 10^5 + 5 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 2 \times 10^0$

(c) $3 \times 10^4 + 7 \times 10^2 + 5 \times 10^0$

(d) $9 \times 10^5 + 2 \times 10^2 + 3 \times 10^1$

3. క్రింది సంఖ్యలను ప్రామాణిక రూపంలో వ్యక్తపరచండి.

(i) 5,00,00,000 (ii) 70,00,000 (iii) 3,18,65,00,000

(iv) 3,90,878 (v) 39087.8 (vi) 3908.78

4. క్రింది వాక్యాలలో కనబడే సంఖ్యలను ప్రామాణిక రూపంలో వ్యక్తపరచండి.

(a) భూమి మరియు చంద్రుని మధ్య దూరం 384,000,000 మీ.

(b) శూన్యంలో కాంతి వేగం 300,000,000 మీ. / సె.

(c) భూమి వ్యాసం 1,27,56,000 మీ.

(d) సూర్యుని వ్యాసం 1,400,000,000 మీ.

(e) ఒక నక్షత్రమండలంలోని సుమారుగా గల నక్షత్రాలు 100,000,000,000.

(f) విశ్వం యొక్క వయస్సు సుమారుగా 12,000,000,000 సంవత్సరాలుగా అంచనా వేయబడింది.

(g) సూర్యుని నుండి పాలపుంత కేంద్రానికి మధ్య గల దూరం 300,000,000,000,000,000,000 మీ. అని అంచనా వేయబడింది.

(h) 1.8 గ్రా. ల బరువు గల ఒక నీటి బిందువులో 60,230,000,000,000,000,000,000 అణువులు కలవని అంచనా వేయబడింది.

(i) భూమిపై గల సముద్రపు నీరు 1,353,000,000 క్యూబిక్ కి.మీ.

(j) మార్చి 2001 లో భారతదేశ జనాభా సుమారుగా 1,027,000,000.

What have We Discussed?

1. Very large numbers are difficult to read, understand, compare and operate upon. To make all these easier, we use exponents, converting many of the large numbers in a shorter form.
2. The following are exponential forms of some numbers?

   $10,000 = 10^4$ (read as 10 raised to 4)

   $243 = 3^5$, $128 = 2^7$.

   Here, 10, 3 and 2 are the bases, whereas 4, 5 and 7 are their respective exponents. We also say, 10,000 is the 4th power of 10, 243 is the 5th power of 3, etc.
3. Numbers in exponential form obey certain laws, which are:

   For any non-zero integers a and b and whole numbers m and n,

   (a) $a^m \times a^n = a^{m+n}$

   (b) $a^m \div a^n = a^{m-n}$, $\quad m > n$

   (c) $(a^m)^n = a^{mn}$

   (d) $a^m \times b^m = (ab)^m$

   (e) $a^m \div b^m = \left(\dfrac{a}{b}\right)^m$

   (f) $a^0 = 1$

   (g) $(-1)^{\text{even number}} = 1$

   $(-1)^{\text{odd number}} = -1$

మనం ఏం చర్చించాం?

1. చాలా పెద్ద సంఖ్యలను చదవడం, అర్థం చేసుకోవడం, పోల్చడం మరియు వాటిపై పరిక్రియలు చేయడం కష్టం. వీటన్నింటినీ సులభతరం చేయడానికి, మనం ఘాతాంకాలను ఉపయోగించి అనేక పెద్ద సంఖ్యలను కనిష్ఠ రూపంలోకి మారుస్తాం.

2. క్రిందివి కొన్ని సంఖ్యల ఘాతాంక రూపాలు

$10{,}000 = 10^4$ (10 ని 4 వ ఘాతానికి పెంచబడింది అని చదువుతారు)

$243 = 3^5$, $128 = 2^7$.

ఇచ్చట 10, 3 మరియు 2 లు భూములు 4, 5 మరియు 7లు వరుసగా వాటి ఘాతాంకాలు 10,000 అనేది 10 యొక్క 4వ ఘాతం, 243 అనేది 3 యొక్క 5వ ఘాతాంకం మొదలైనవి.

3. ఘాతాంక రూపంలో ఉన్న సంఖ్యలు కొన్ని న్యాయాలను పాటిస్తాయి. a మరియు b లు ఏదైనా శూన్యేతర పూర్ణసంఖ్యలు m మరియు n లు పూర్ణాంకాలైన,

(a) $a^m \times a^n = a^{m+n}$

(b) $a^m \div a^n = a^{m-n}$, $\quad m > n$

(c) $(a^m)^n = a^{mn}$

(d) $a^m \times b^m = (ab)^m$

(e) $a^m \div b^m = \left(\dfrac{a}{b}\right)^m$

(f) $a^0 = 1$

(g) $(-1)^{\text{సరి సంఖ్య}} = 1$

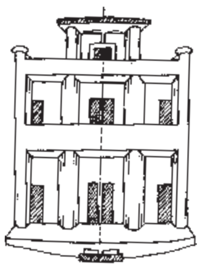
$(-1)^{\text{బేసి సంఖ్య}} = -1$

Chapter 12

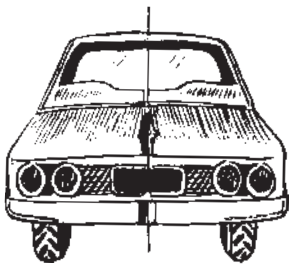
Symmetry

12.1 Introduction

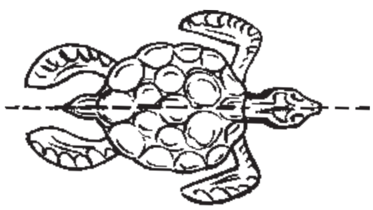
Symmetry is an important geometrical concept, commonly exhibited in nature and is used almost in every field of activity. Artists, professionals, designers of clothing or jewellery, car manufacturers, architects and many others make use of the idea of symmetry. The beehives, the flowers, the tree-leaves, religious symbols, rugs, and handkerchiefs — everywhere you find symmetrical designs.



Architecture



Engineering

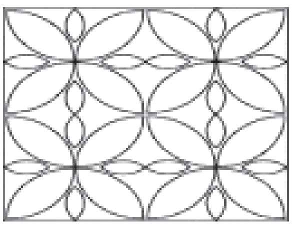


Nature

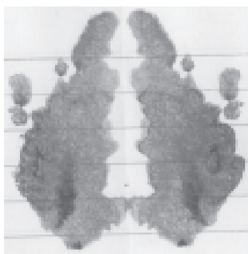
You have already had a 'feel' of **line symmetry** in your previous class.

A figure has a line symmetry, if there is a line about which the figure may be folded so that the two parts of the figure will coincide.

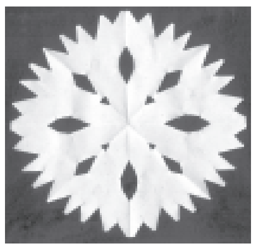
You might like to recall these ideas. Here are some activities to help you.



Compose a picture-album showing symmetry.



Create some colourful Ink-dot devils



Make some symmetrical paper-cut designs.

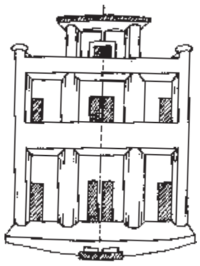
అధ్యాయం 12

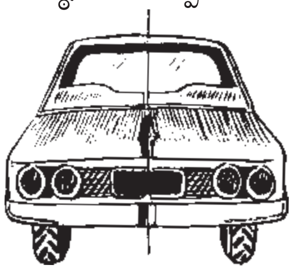
సౌష్ఠవం

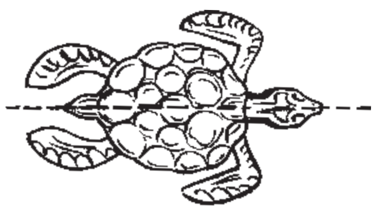
H2G9A2

12.1 పరిచయం

సౌష్ఠవం అనేది ఒక ముఖ్యమైన రేఖాగణిత భావన, ఇది సాధారణంగా ప్రకృతిలో ప్రదర్శించబడుతుంది మరియు దాదాపు ప్రతి కార్యాచరణరంగంలోఉపయోగించబడుతుంది. కళాకారులు, నిపుణులు, దుస్తులు లేదా ఆభరణాల డిజైనర్లు, కారు తయారీదారులు, వాస్తుశిల్పులు మరియు చాలా మంది సౌష్ఠవం అనే ఆలోచనను ఉపయోగిస్తారు. తేనెపట్టులు, పువ్వులు, చెట్టు ఆకులు, మతపరమైన చిహ్నాలు, రగ్గులు మరియు చేతి రుమాళ్లు – మీరు ప్రతిచోటా సౌష్ఠవ రూపకల్పనలను కనుగొంటారు.


ఆర్కిటెక్చర్

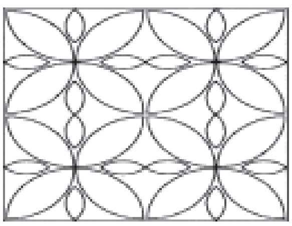

ఇంజనీరింగ్

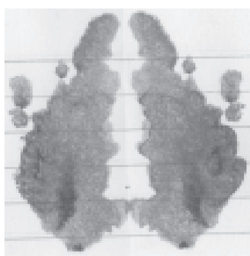

ప్రకృతి

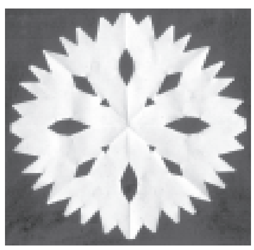
మీ మునుపటి తరగతిలో మీరు ఇప్పటికే **రేఖ సౌష్ఠవం** యొక్క 'అనుభూతిని' పొందారు.

ఒక పటం యొక్క రెండు భాగాలు ఒకే విధంగా ఉండేటట్లు, ఒక రేఖ వెంబడి పటం మడతపెట్టబడి ఉంటే, ఆ పటంకు ఒక రేఖా సౌష్ఠవం ఉంటుంది.

మీరు ఈ ఆలోచనలను గుర్తు చేసుకోవాలనుకోవచ్చు. మీకు సహాయపడే కొన్ని కృత్యాలు ఇక్కడ ఉన్నాయి.

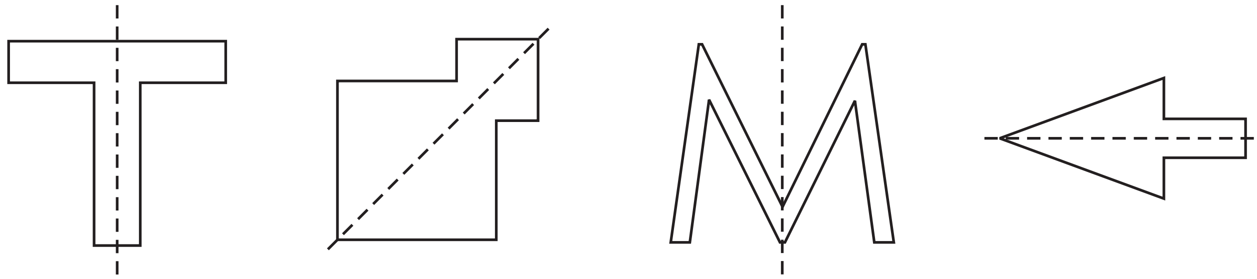

సౌష్ఠవాన్ని చూపించే పిక్చర్ అల్బమ్‌ను కంపోజ్ చేయండి.


కొన్ని రంగురగుల ఇంక్ డాట్ డెవిల్స్ సృష్టించండి.


కొన్ని సౌష్ఠవంగా కత్తిరించిన కాగితపు డిజైన్లను తయారు చేయండి

Enjoy identifying lines (also called axes) of symmetry in the designs you collect.

Let us now strengthen our ideas on symmetry further. Study the following figures in which the lines of symmetry are marked with dotted lines. [Fig 12.1 (i) to (iv)]



(i) (ii) (iii) (iv)

Fig 12.1

12.2 Lines of Symmetry for Regular Polygons

You know that a polygon is a closed figure made of several line segments. The polygon made up of the least number of line segments is the triangle. (Can there be a polygon that you can draw with still fewer line segments? Think about it).

A polygon is said to be regular if all its sides are of equal length and all its angles are of equal measure. Thus, an equilateral triangle is a regular polygon of three sides. Can you name the regular polygon of four sides?

An equilateral triangle is regular because each of its sides has same length and each of its angles measures 60° (Fig 12.2).

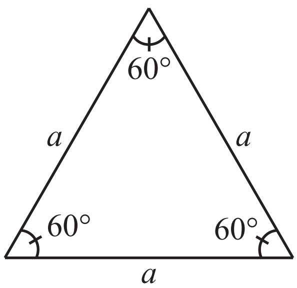


Fig 12.2

A square is also regular because all its sides are of equal length and each of its angles is a right angle (i.e., 90°). Its diagonals are seen to be perpendicular bisectors of one another (Fig 12.3).

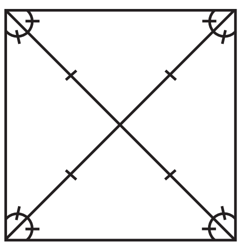
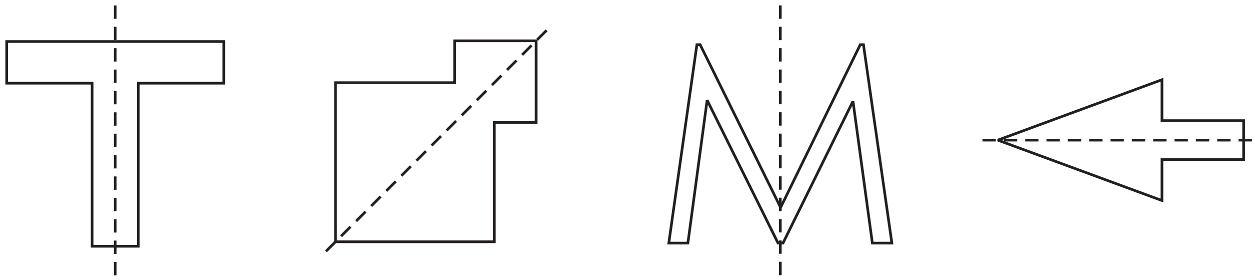


Fig 12.3

మీరు సేకరించే డిజైన్లలో సౌష్ఠవం యొక్క రేఖలను (అక్షాలు అని కూడా పిలుస్తారు) గుర్తించడాన్ని ఆస్వాదించండి.

సౌష్ఠవంపై మన ఆలోచనలను ఇప్పుడు మరింత బలోపేతం చేద్దాం. సౌష్ఠవ రేఖలను చుక్కల రేఖలతో మార్క్ చేయబడ్డ దిగువ పటాలను అధ్యయనం చేయండి. [పటం 12.1 (i) to (iv)]


(i) (ii) (iii) (iv)

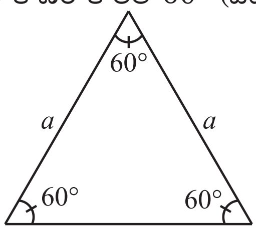
పటం 12.1

12.2 క్రమ బహుభుజిల సౌష్ఠవ రేఖలు

బహుభుజి అనేక రేఖాఖండాలతో తయారు చేయబడిన సంవృత పటం అని మీకు తెలుసు. అతి తక్కువ రేఖాఖండాలతో ఏర్పడిన బహుభుజి త్రిభుజం అగును. (ఇంకా తక్కువ రేఖాఖండాలతో గీయగల బహుభుజి ఉందా? దాని గురించి ఆలోచించండి).

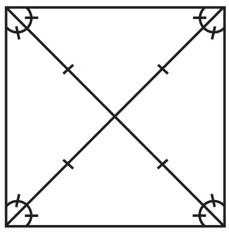
బహుభుజి యొక్క అన్ని భుజాలు సమాన పొడవు మరియు అన్ని కోణాలు సమాన కొలతను కలిగి ఉంటే దానిని క్రమ బహుభుజిగా పేర్కొంటారు. అందువల్ల, సమబాహు త్రిభుజం మూడు భుజాల గల క్రమ బహుభుజి అగును. నాలుగు భుజాల గల క్రమ బహుభుజి పేరు చెప్పగలరా?

ఒక సమబాహు త్రిభుజం క్రమ బహుభుజిగా అవుతుంది. ఎందుకంటే దాని భుజాలు ఒకే పొడవును కలిగి ఉంటుంది మరియు దాని యొక్క ప్రతి కోణం కొలత $60°$ (పటం 12.2).



పటం 12.2

ఒక చతురస్రం కూడా క్రమం బహుభుజి అగును. ఎందుకంటే దాని భుజాలన్నీ సమాన పొడవును కలిగి ఉంటాయి మరియు దాని కోణాలు ప్రతి ఒక్కటి లంబ కోణం (అనగా $90°$) అగును. దీని కర్ణాలు ఒకదానికొకటి లంబసమద్విఖండన రేఖలుగా కనిపిస్తున్నాయి. (పటం 12.3)



పటం 12.3

If a pentagon is regular, naturally, its sides should have equal length. You will, later on, learn that the measure of each of its angles is 108° (Fig 12.4).

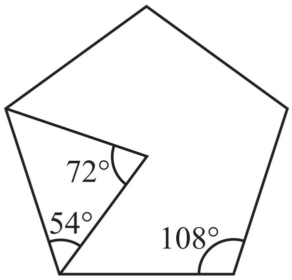


Fig 12.4

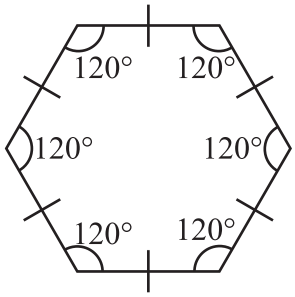


Fig 12.5

A regular hexagon has all its sides equal and each of its angles measures 120°. You will learn more of these figures later (Fig 12.5).

The regular polygons are symmetrical figures and hence their lines of symmetry are quite interesting,

Each regular polygon has as many lines of symmetry as it has sides [Fig 12.6 (i) - (iv)]. We say, they have multiple lines of symmetry.

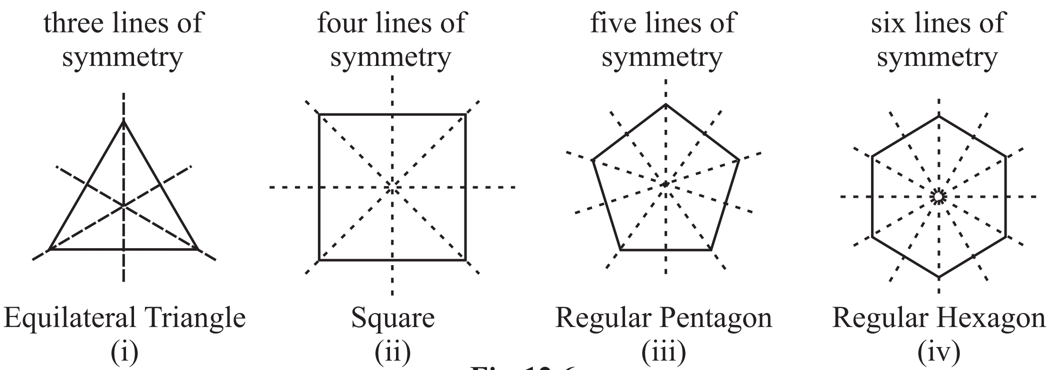


Fig 12.6

Perhaps, you might like to investigate this by paper folding. Go ahead!

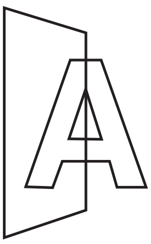
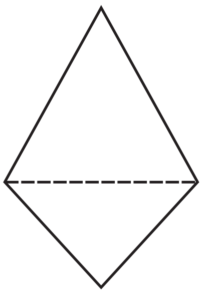
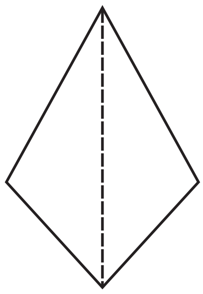


Fig 12.7

The concept of line symmetry is closely related to mirror reflection. A shape has line symmetry when one half of it is the mirror image of the other half (Fig 12.7). A mirror line, thus, helps to visualise a line of symmetry (Fig 12.8).



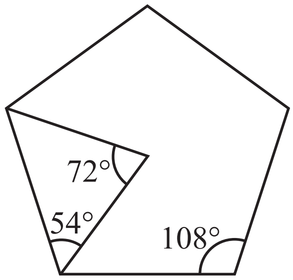
Is the dotted line a mirror line? No.



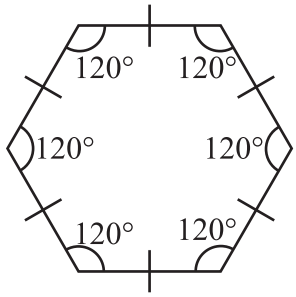
Is the dotted line a mirror line? Yes.

Fig 12.8

పంచభుజి ఒక బహుభుజి అయితే, సహజంగానే, దాని భుజాలు సమాన పొడవును కలిగి ఉండాలి. తరువాత, దాని ప్రతి కోణం కొలత 108° (పటం 12.4) అని మీరు నేర్చుకుంటారు.



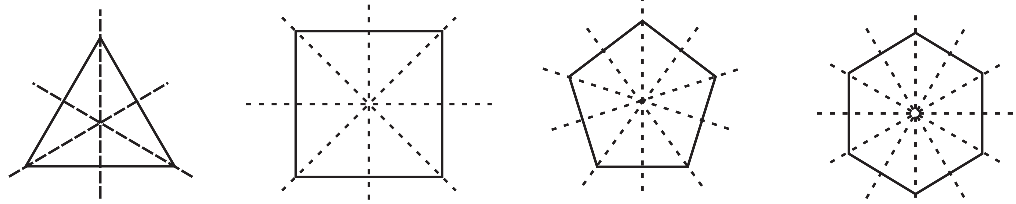
పటం 12.4



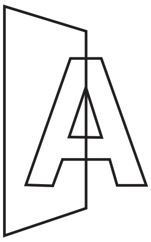
పటం 12.5

ఒక క్రమషడ్భుజి దాని యొక్క అన్ని భుజాలను సమానంగా కలిగి ఉంటుంది మరియు దాని యొక్క ప్రతి కోణం కొలత 120°. ఈ బహుభుజిల గురించి మీరు తరువాత మరింతగా నేర్చుకుంటారు. (పటం 12.5).

క్రమ బహుభుజులు సౌష్ఠవ ఆకారాలు, అందువల్ల వాటి సౌష్ఠవ రేఖలు చాలా ఆసక్తికరంగా ఉంటాయి, ప్రతి క్రమ బహుభుజి భుజాల సంఖ్యకు సమానంగా సౌష్ఠవ రేఖలను కలిగి ఉంటుంది. [పటం 12.6 (i) అవి చాలా సౌష్ఠవరేఖలను కలిగి ఉన్నాయని మనం చెబుతాము.



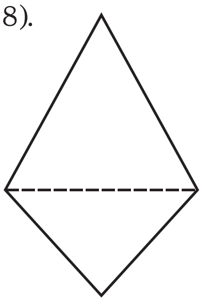
పటం 12.6

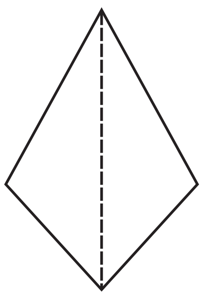


పటం 12.7

బహుశా, మీరు దీనిని కాగితం మడతపెట్టడం ద్వారా పరిశోధించవచ్చు. ముందుకు సాగండి!

రేఖ సౌష్ఠవం అనే భావన అద్దం పరావర్తనంతో దగ్గరి సంబంధం కలిగి ఉంటుంది. ఒక ఆకారంలో సగం మరొక సగం యొక్క అద్దం ప్రతిబింబం అయినప్పుడు ఒక ఆకారం రేఖ సౌష్ఠవాన్ని కలిగి ఉంటుంది. (పటం 12.7). అందువల్ల, ఒక ప్రతిబింబ రేఖ సౌష్ఠవ రేఖను దృశ్యరూపం చేయడానికి సహాయపడుతుంది (పటం 12.8).



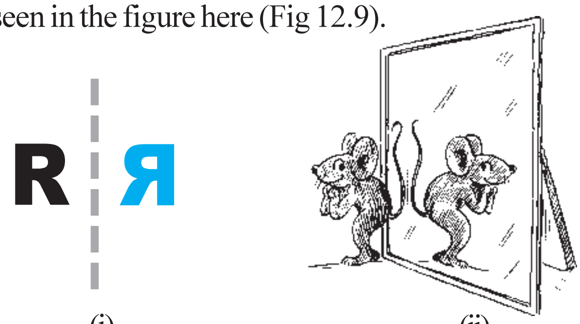


పటం 12.8

చుక్కల రేఖ ప్రతిబింబ రేఖ అవుతుందా? కాదు

చుక్కల రేఖ ప్రతిబింబ రేఖ అవుతుందా? అవును

While dealing with mirror reflection, care is needed to note down the left-right changes in the orientation, as seen in the figure here (Fig 12.9).

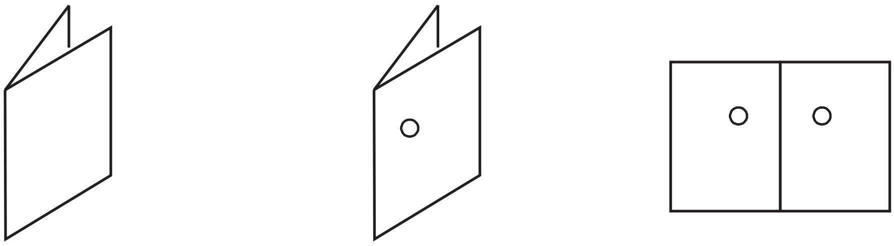


(i) (ii)

Fig 12.9

The shape is same, but the other way round!

Play this punching game!



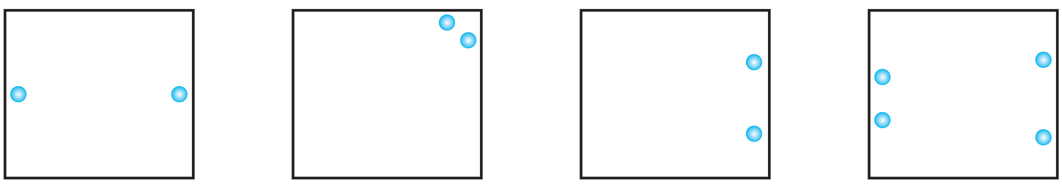
Fold a sheet into two halves   Punch a hole   two holes about the symmetric fold.

Fig 12.10

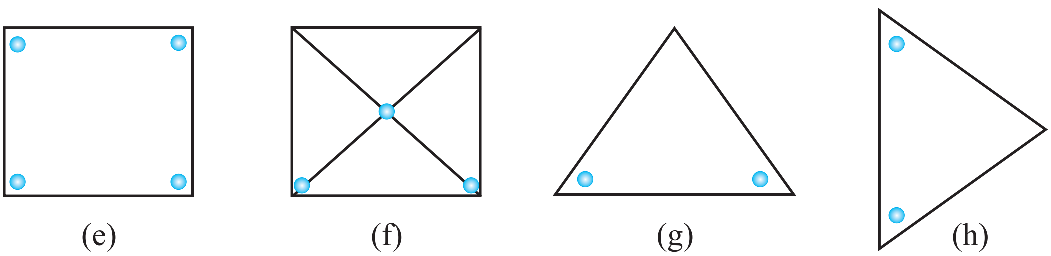
The fold is a line (or axis) of symmetry. Study about punches at different locations on the folded paper and the corresponding lines of symmetry (Fig 12.10).

Exercise 12.1

1. Copy the figures with punched holes and find the axes of symmetry for the following:

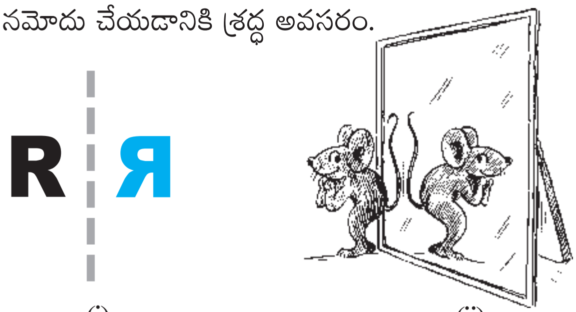


(a) (b) (c) (d)



(e) (f) (g) (h)

దర్పణ పరావర్తనంతో వ్యవహరించేటప్పుడు, ఇక్కడ పటంలో (పటం 12.9) చూసినట్లుగా దిశాక్రమంలో ఎడమ-కుడి మార్పులను నమోదు చేయడానికి శ్రద్ధ అవసరం.

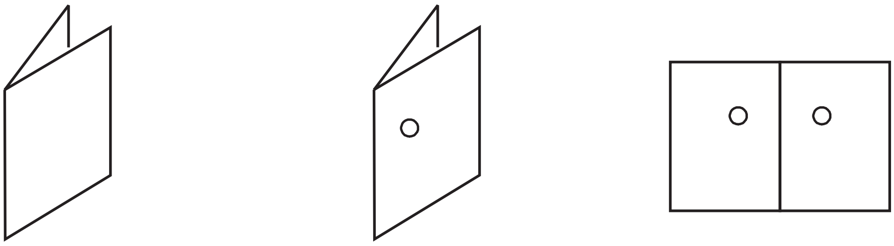


(i) (ii)

పటం 12.9

ఆకారం ఒకేలా ఉంటుంది, కానీ మరొక విధంగా ఇంకో వైపుకు తిరిగి ఉంది!

ఈ పంచింగ్ గేమ్‌ను ఆడండి.



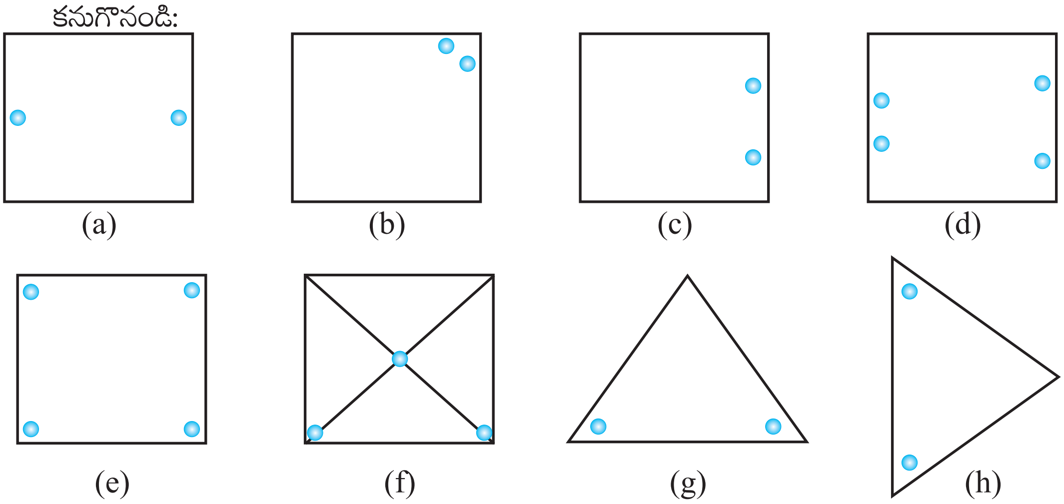
ఒక షీటును రెండు భాగాలుగా మడత పెట్టండి | ఒక రంధ్రం చేయండి | సౌష్ఠవ మడత చుట్టూ రెండు రంధ్రాలు ఏర్పడతాయి

Fig 12.10

మడత అనేది సౌష్ఠవం యొక్క రేఖ (లేదా అక్షం). మడత పెట్టిన కాగితంపై వివిధ ప్రదేశాలలో పంచ్ చేసిన రంధ్రాలు మరియు సంబంధిత సౌష్ఠవ రేఖల గురించి అధ్యయనం చేయండి (పటం 14.10).

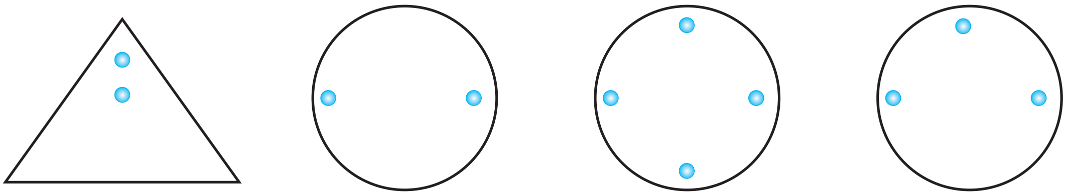
అభ్యాసం 12.1

1. పంచ్ చేసిన రంధ్రాలతో గల ఇదే బొమ్మలను మరల గీయండి. ఈ క్రింది వాటికి సౌష్ఠవాక్షాలను కనుగొనండి:



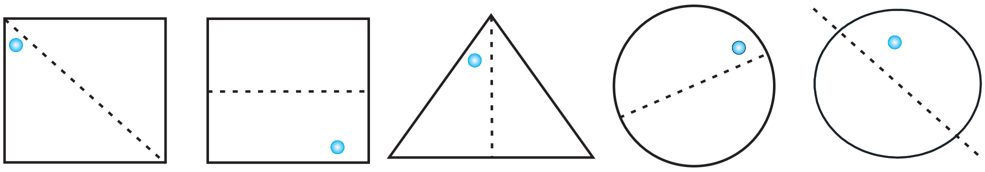
(a) (b) (c) (d)

(e) (f) (g) (h)



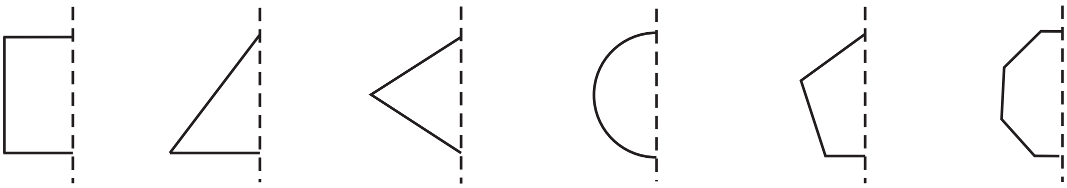
(i) (j) (k) (l)

2. Given the line(s) of symmetry, find the other hole(s):



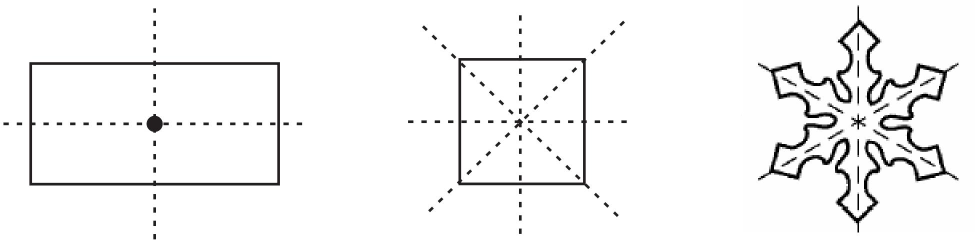
(a) (b) (c) (d) (e)

3. In the following figures, the mirror line (i.e., the line of symmetry) is given as a dotted line. Complete each figure performing reflection in the dotted (mirror) line. (You might perhaps place a mirror along the dotted line and look into the mirror for the image). Are you able to recall the name of the figure you complete?



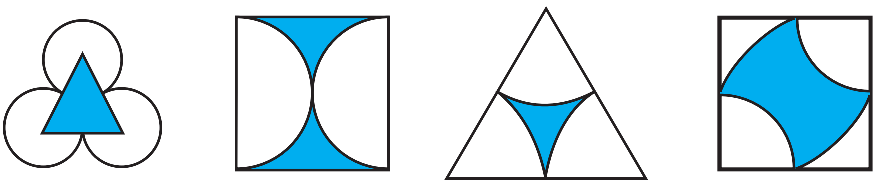
(a) (b) (c) (d) (e) (f)

4. The following figures have more than one line of symmetry. Such figures are said to have multiple lines of symmetry.

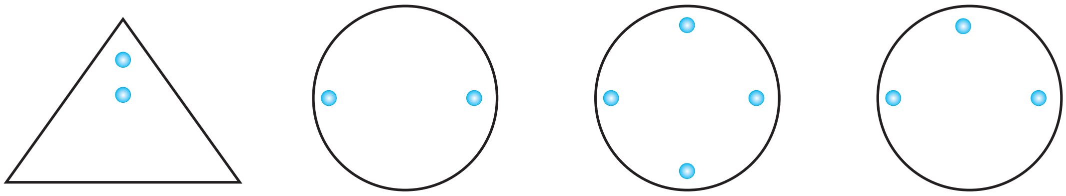


(a) (b) (c)

Identify multiple lines of symmetry, if any, in each of the following figures:

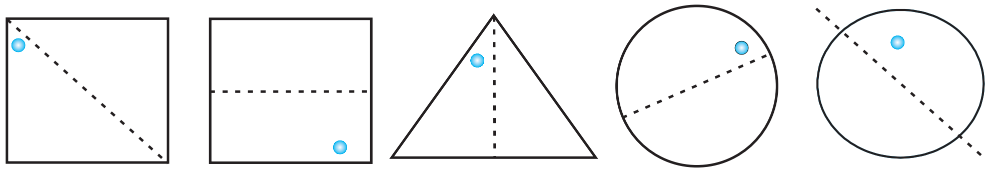


(a) (b) (c) (d)



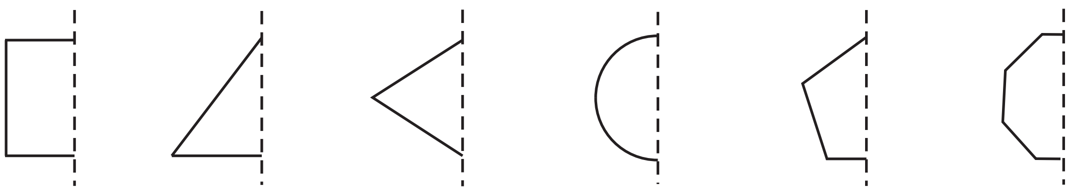
(i) (j) (k) (l)

2. సౌష్ఠవం యొక్క రేఖ(లు) ఇచ్చారు. మరొకరంధ్రాన్ని (రంధ్రాలను) కనుగొనండి:



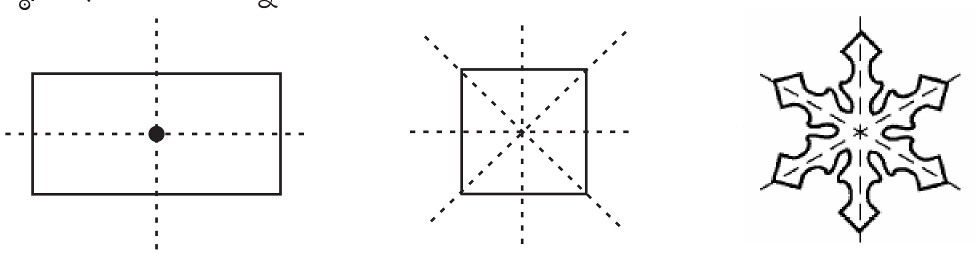
(a) (b) (c) (d) (e)

3. దిగువపటాల్లో, ప్రతిబింబరేఖ (అనగా, సౌష్ఠవ రేఖ) చుక్కల రేఖగా ఇవ్వబడింది. చుక్కల (ప్రతిబింబం) రేఖలో పరావర్తనం ప్రదర్శించే ప్రతి చిత్రాన్ని పూర్తి చేయండి. (మీకు చుక్కల రేఖ వెంట ఒక అద్దం ఉంచి మరియు చిత్రం కోసం అద్దంలోకి చూడవచ్చు).మీరు పూర్తి చేసిన పటం యొక్క పేరును గుర్తు తెచ్చుకోగలరా?



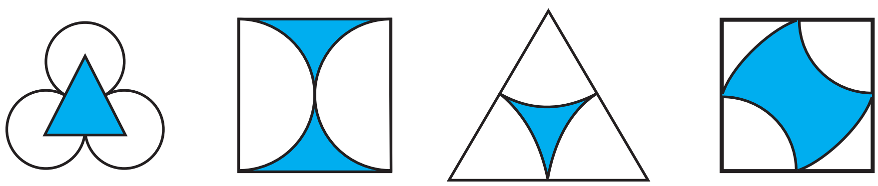
(a) (b) (c) (d) (e) (f)

4. క్రింది చిత్రాలు ఒకటి కంటే ఎక్కువ సౌష్ఠవ రేఖలను కలిగి ఉన్నాయి. ఇటువంటి చిత్రాలు బహుళ సౌష్ఠవ రేఖలను కలిగి ఉన్నాయని అంటారు.

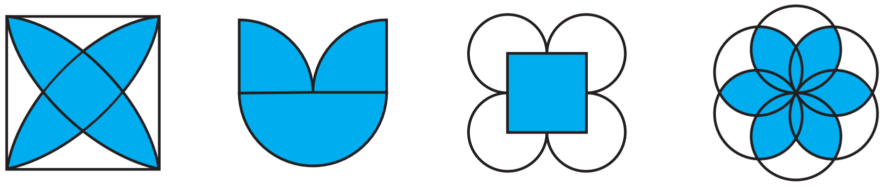


(a) (b) (c)

5. క్రింది ప్రతి పటంలో సౌష్ఠవం యొక్క బహుళ సౌష్ఠవరేఖలు ఏమైన వుంటే వాటిని గుర్తించండి.

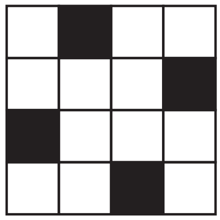


(a) (b) (c) (d)



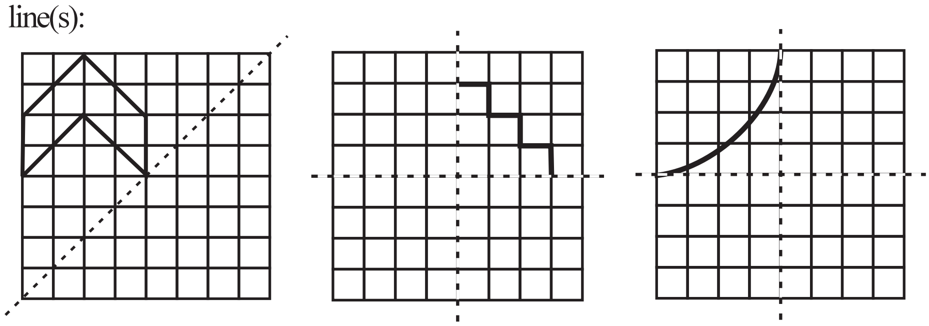
(e) (f) (g) (h)

5. Copy the figure given here.



Take any one diagonal as a line of symmetry and shade a few more squares to make the figure symmetric about a diagonal. Is there more than one way to do that? Will the figure be symmetric about both the diagonals?

6. Copy the diagram and complete each shape to be symmetric about the mirror line(s):



(a) (b) (c)

7. State the number of lines of symmetry for the following figures:
   (a) An equilateral triangle (b) An isosceles triangle (c) A scalene triangle
   (d) A square (e) A rectangle (f) A rhombus
   (g) A parallelogram (h) A quadrilateral (i) A regular hexagon
   (j) A circle

8. What letters of the English alphabet have reflectional symmetry (i.e., symmetry related to mirror reflection) about.
   (a) a vertical mirror (b) a horizontal mirror
   (c) both horizontal and vertical mirrors

9. Give three examples of shapes with no line of symmetry.

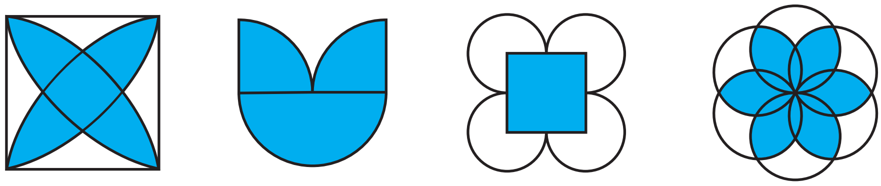
10. What other name can you give to the line of symmetry of
   (a) an isosceles triangle? (b) a circle?

12.3 Rotational Symmetry

What do you say when the hands of a clock go round?

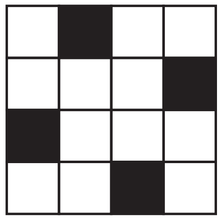
You say that they rotate. The hands of a clock rotate in only one direction, about a fixed point, the centre of the clock-face.

Rotation, like movement of the hands of a clock, is called a clockwise rotation; otherwise it is said to be anticlockwise.



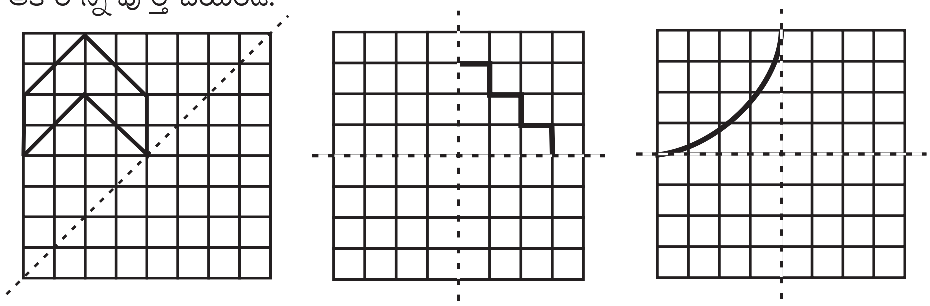
(e) (f) (g) (h)

5. ఇక్కడ ఇవ్వబడ్డ పటాన్ని మరలా గీయండి.



ఏదైనా ఒక కర్ణాన్ని సౌష్ఠవ రేఖగా తీసుకోండి మరియు పటం కర్ణం చుట్టూ సౌష్ఠవంగా ఉండటానికి మరికొన్ని చతురస్రాకారాలను షేడ్ చేయండి. ఇలా చేయడానికి ఒకటి కంటే ఎక్కువ మార్గాలు ఉన్నాయా? పటం రెండు కర్ణాల పరంగా సౌష్ఠవంగా ఉంటుందా?

6. ఇదే పటాన్ని మరలా గీయండి మరియు అద్దం రేఖ(లు) దృష్ట్యా సౌష్ఠవంగా ఉండేలా ప్రతి ఆకారాన్ని పూర్తి చేయండి.



(a) (b) (c)

7. క్రింది పటాల సౌష్ఠవ రేఖల సంఖ్యను పేర్కొనండి:

(a) ఒక సమబాహు త్రిభుజం (b) ఒక సమద్వి బాహు త్రిభుజం (c) ఒక విషమ బాహు త్రిభుజం

(d) ఒక చతురస్రం (e) ఒక దీర్ఘచతురస్త్రాకారం (f) ఒక రాంబస్

(g) ఒక సమాంతర చతుర్భుజం (h) ఒక చతుర్భుజం (i) ఒక క్రమ సాధారణ షడ్భుజి

(j) ఒక వృత్తం

8. ఆంగ్ల అక్షరమాల లోని ఏ అక్షరాలు పరావర్తన సౌష్టవాన్ని కలిగి ఉంటాయి (అనగా, ప్రతిబింబ పరావర్తనానికి సంబంధించిన సౌష్ఠవం).

(a) ఒక నిలువు అద్దం (b) ఒక సమాంతర అద్దం

(c) సమాంతర మరియు నిలువు అద్దాలు రెండూ

9. సౌష్ఠవ రేఖ లేని ఆకారాలకు మూడు ఉదాహరణలు ఇవ్వండి.

10. (a) ఒక సమద్విబాహు త్రిభుజం (b) ఒక వృత్తం

ల సౌష్ఠవ రేఖలకు మీరు వేరే ఏ పేరు పెట్టగలరు?

12.3 భ్రమణ సౌష్ఠవం

గడియారం యొక్క ముల్లు చుట్టూ తిరుగుతున్నప్పుడు మీరు ఏమి చెబుతారు?

అవి భ్రమణంలో వున్నాయని మీరుచెబుతారు. ఒక గడియారం యొక్క ముల్లుగడియారం కేంద్రం వద్ద ఒక స్థిర బిందువు ఆధారంగా ఒక దిశలో మాత్రమే తిరుగుతాయి.

భ్రమణం,గడియారం ముల్లు చలన దిశలో వలె ఉంటే దానిని సవ్య దిశలో భ్రమణం అని, అట్లా కాకపోతే అపసవ్య దిశలో భ్రమణం అని అంటారు.

What can you say about the rotation of the blades of a ceiling fan? Do they rotate clockwise or anticlockwise? Or do they rotate both ways?

If you spin the wheel of a bicycle, it rotates. It can rotate in either way: both clockwise and anticlockwise. Give three examples each for (i) a clockwise rotation and (ii) anticlockwise rotation.

When an object rotates, its shape and size do not change. The rotation turns an object about a fixed point. This fixed point is the **centre of rotation**. What is the centre of rotation of the hands of a clock? Think about it.

The angle of turning during rotation is called the **angle of rotation**. A full turn, you know, means a rotation of 360°. What is the degree measure of the angle of rotation for (i) a half-turn? (ii) a quarter-turn?

A half-turn means rotation by 180°; a quarter-turn is rotation by 90°.

When it is 12 O'clock, the hands of a clock are together. By 3 O'clock, the minute hand would have made three complete turns; but the hour hand would have made only a quarter-turn. What can you say about their positions at 6 O'clock?

Have you ever made a paper windmill? The Paper windmill in the picture looks symmetrical (Fig 12.11); but you do not find any line of symmetry. No folding can help you to have coincident halves. However if you rotate it by 90° about the fixed point, the windmill will look exactly the same. We say the windmill has a **rotational symmetry.**

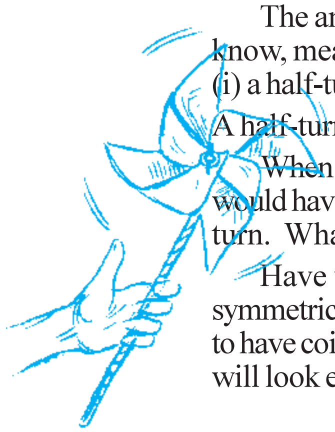


Fig 12.11

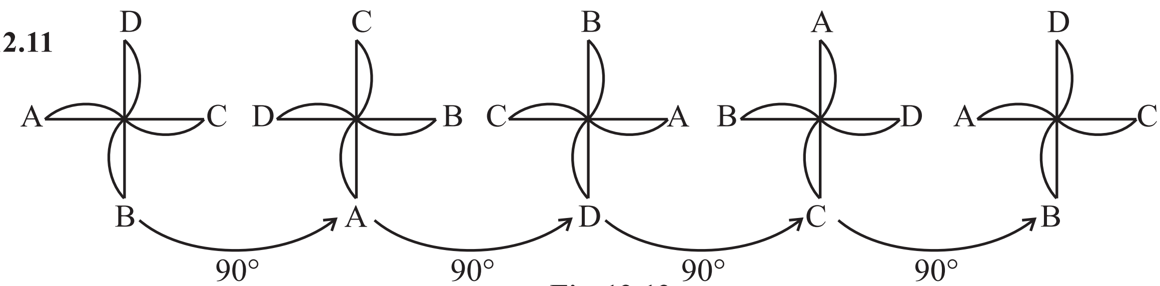


Fig 12.12

In a full turn, there are precisely **four positions** (on rotation through the angles 90°, 180°, 270° and 360°) when the windmill looks exactly the same. Because of this, we say it has a rotational symmetry of order 4.

Here is one more example for rotational symmetry.

Consider a square with P as one of its corners (Fig 12.13).

Let us perform quarter-turns about the centre of the square marked ×.

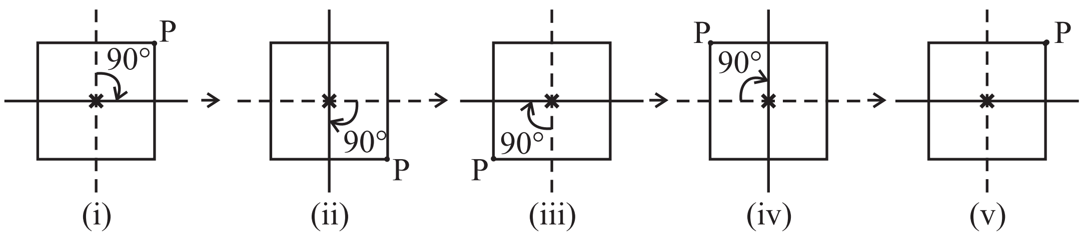


Fig 12.13

సీలింగ్ ఫ్యాన్ యొక్క రెక్కల భ్రమణం గురించి మీరు ఏమి చెబుతారు? అవి సవ్య దిశలో తిరుగుతాయా లేదా అపసవ్య దిశలోతిరుగుతాయా? లేదా అవి రెండు దిశలలో తిరుగుతాయా?

మీరు సైకిల్ యొక్క చక్రాన్ని తిప్పితే, అది భ్రమణం చెందుతుంది. ఇది రెండు విధాలుగా సవ్య దిశలో మరియు అపసవ్య దిశలోఏ విధంగానైనా తిరుగుతుంది. (i) సవ్య దిశలోభ్రమణం మరియు (ii) అపసవ్య దిశలోభ్రమణానికి మూడు ఉదాహరణలు ఇవ్వండి.

ఒక వస్తువు భ్రమణం చెందినప్పుడు, దాని ఆకారం మరియు పరిమాణం మారవు. భ్రమణం ఒక వస్తువును ఒక స్థిర బిందువు చుట్టూ తిప్పుతుంది. ఈ స్థిర బిందువు **భ్రమణం యొక్క కేంద్రం.** గడియారం యొక్క ముల్లు భ్రమణ కేంద్రం ఎది? దీని గురించి ఆలోచించండి.

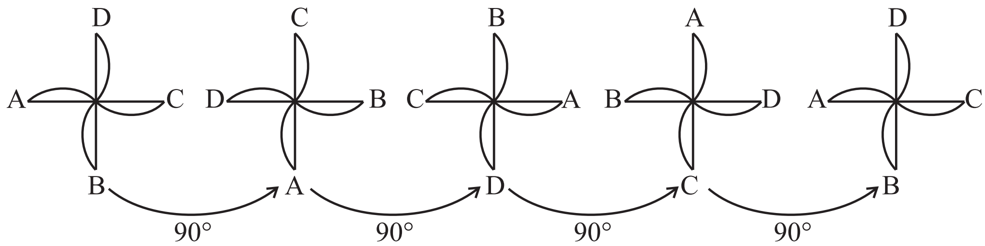
పటం 12.11

భ్రమణ సమయంలో తిరిగే కోణాన్ని **భ్రమణ కోణం** అంటారు. మీకు తెలుసా, పూర్తి భ్రమణం అంటే 360° భ్రమణం అని మీకు తెలుసు. (i) అర్ధ భ్రమణం (ii) ఒక పావు భ్రమణంల భ్రమణ కోణపు కొలత ఎంత?

అర్ధ భ్రమణం అంటే 180° భ్రమణం అని అర్థం; ఒక పావు భ్రమణం 90° భ్రమణాన్ని కలిగి ఉంటుంది.

12 గంటలు అయినప్పుడు, ఒక గడియారం యొక్క ముల్లు కలిసి ఉంటాయి. 3 గంటలప్పుడు, నిమిషం ముల్లు మూడు పూర్తి భ్రమణాలు తిరుగుతుంది; కానీ, గంటల ముల్లుపావు భ్రమణం మాత్రమే చేస్తుంది. 6 గంటలకు వాటి స్థానాల గురించి మీరు ఏమి చెప్పగలరు?

మీరు ఎప్పుడైనా కాగితం గాలిమరను తయారు చేశారా? చిత్రంలోని కాగితం గాలిమర సౌష్ఠవంగా కనిపిస్తుంది (పటం 12.11); కానీ మీరు ఏ సౌష్ఠవం రేఖను కనుగొనలేరు. ఏ విధంగా మడతపెట్టడం కూడా మీకు ఒకేరకమైన అర్ధ భాగాలను కలిగి ఉండటానికి సహాయపడదు. అయితే మీరు దానిని స్థిర బిందువు చుట్టూ 90° తిప్పినట్లయితే, గాలిమర సరిగ్గా ఒకే విధంగా కనిపిస్తుంది. గాలిమరకు **భ్రమణ సౌష్ఠవం** ఉందని మనం చెప్పవచ్చును.



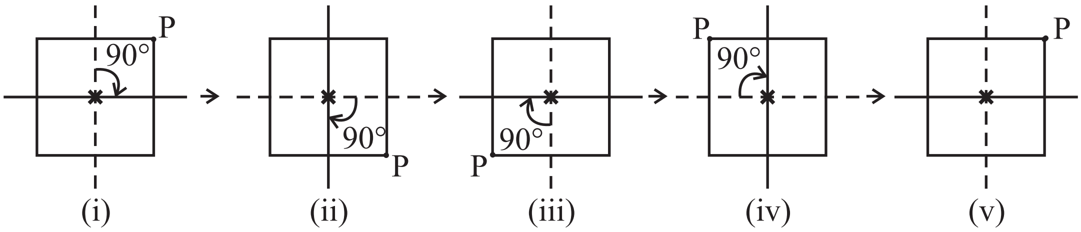
పటం 12.12

పూర్తి భ్రమణంలో, గాలిమర సరిగ్గా **నాలుగు స్థానాలు** (90°, 180°, 270° మరియు 360° కోణాల భ్రమణంలో) వద్ద ఖచ్చితంగా గాలిమర ఒకే విధంగా కనిపిస్తుంది. ఈ కారణంగా, ఇది 4వ పరిమాణ భ్రమణ సౌష్టవాన్ని కలిగి ఉందని మనం చెబుతాము.

భ్రమణ సౌష్టవానికి ఇక్కడ మరొక ఉదాహరణ ఉంది.

ఒక మూల P వున్న ఒక చతురస్రాన్ని తీసుకోండి (పటం 12.13).

× గుర్తు పెట్టిన చతురస్రం యొక్క కేంద్రం ఆధారంగా మనం ఇప్పుడు పావు – భ్రమణం చేద్దాం.



పటం 12.13

Fig 12.13 (i) is the initial position. Rotation by 90° about the centre leads to Fig 12.13 (ii). Note the position of P now. Rotate again through 90° and you get Fig 12.13 (iii). In this way, when you complete four quarter-turns, the square reaches its original position. It now looks the same as Fig12.13 (i). This can be seen with the help of the positions taken by P.

Thus a square has a **rotational symmetry of order 4** about its centre. Observe that in this case,

(i) The centre of rotation is the centre of the square.

(ii) The angle of rotation is 90°.

(iii) The direction of rotation is clockwise.

(iv) The order of rotational symmetry is 4.

TRY THESE

1. (a) Can you now tell the order of the rotational symmetry for an equilateral triangle? (Fig 12.14)

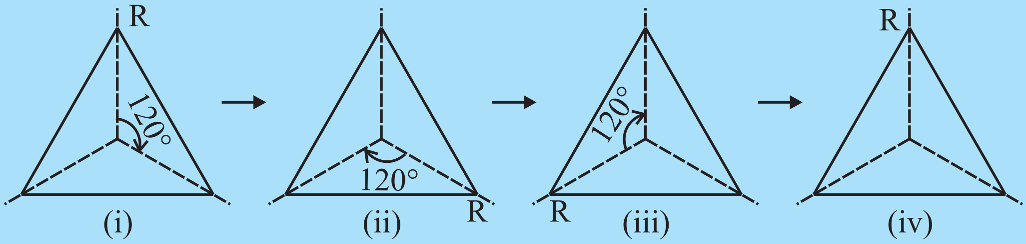


Fig 12.14

(b) How many positions are there at which the triangle looks exactly the same, when rotated about its centre by 120°?

2. Which of the following shapes (Fig 12.15) have rotational symmetry about the marked point.

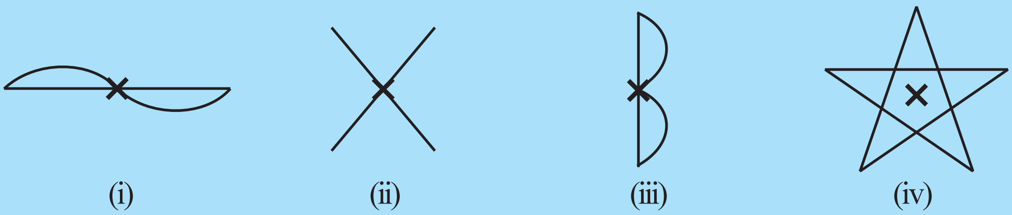


Fig 12.15

DO THIS

Draw two identical parallelograms, one-ABCD on a piece of paper and the other A' B' C' D' on a transparent sheet. Mark the points of intersection of their diagonals, O and O' respectively (Fig 12.16).

Place the parallelograms such that A' lies on A, B' lies on B and so on. O' then falls on O.

పటం 12.13 (i) అనేది ప్రథమ స్థానం. కేంద్రం చుట్టూ 90° భ్రమణం చేసినప్పుడు పటం 12.13 (ii)కు దారితీస్తుంది. ఇప్పుడు P యొక్క స్థానాన్ని గమనించండి. 90° గుండా తిరిగి తిప్పండి మరియు మీరు పటం 12.13 (iii)ను పొందుతారు. ఈ విధంగా, మీరు నాలుగు పావు భ్రమణాలను పూర్తి చేసినప్పుడు, చతురస్రం దాని అసలు స్థానానికి చేరుకుంటుంది. ఇది ఇప్పుడు పటం 12.13 (i)మాదిరిగానే కనిపిస్తుంది. దీనిని P స్థానాల సహాయంతో చూడవచ్చును.

అందువల్ల ఒక చతురస్రం దాని కేంద్రం చుట్టూ **4 వ పరిమాణ భ్రమణ సౌష్టవాన్ని** కలిగి ఉంటుంది. ఈ సందర్భంలో గమనించండి,

(i) భ్రమణం యొక్క కేంద్రం చతురస్రం యొక్క కేంద్రం అగును.

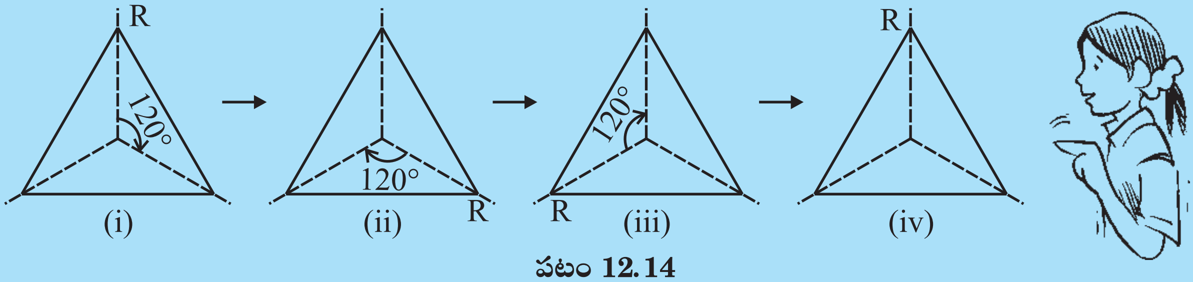
(ii) భ్రమణ కోణం 90°.

(iii) భ్రమణ దిశ సవ్యదిశ లో ఉంటుంది.

(iv) భ్రమణ సౌష్ఠవ పరిమాణం 4 అగును.

ప్రయత్నించండి

1. (a) సమబాహు త్రిభుజం యొక్క భ్రమణ సౌష్ఠవ పరిమాణాన్ని మీరు ఇప్పుడు చెప్పగలరా? (పటం 12.14)



పటం 12.14

(b) త్రిభుజంను దాని కేంద్రం చుట్టూ 120° త్రిప్పినప్పుడు, ఖచ్చితంగా ఒకే విధంగా కనిపించే స్థానాలు ఎన్ని ఉన్నాయి?

2. ఈ కింది ఆకారాలలో (పటం 12.15) ఏవి భ్రమణ సౌష్ఠవాన్ని గుర్తించిన బిందువు ఆధారంగా కలిగి ఉన్నాయి.

పటం 12.15

ఇవి చేయండి

ఒకేవిధమైన రెండు సమాంతర చతుర్భుజాలను గీయండి, వాటిలో ఒకటి ABCD ని ఒక కాగితం ముక్కపై మరియు మరొకటి A' B' C' D' ని పారదర్శక షీటు పై గీయండి. వాటి కర్ణాల యొక్క ఖండన బిందువులను వరుసగా O లేదా మరియు O' (పటం 12.16)లుగా గుర్తించండి.

A పై A' ఉండేటట్లు, B ను B' పై ఉండేటట్లు సమాంతర చతుర్భుజాలను ఉంచండి. అప్పుడు O పై O' మీద ఉంటుంది.

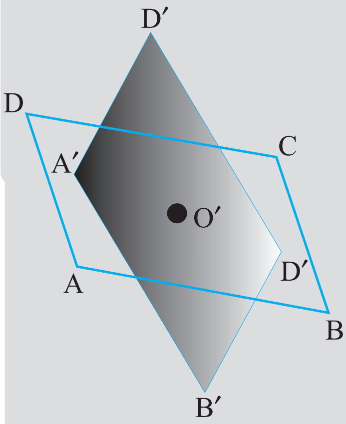


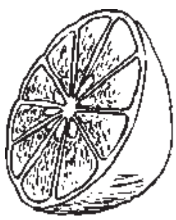
Fig 12.16

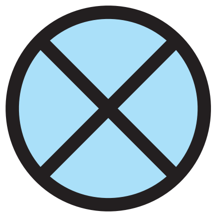
Stick a pin into the shapes at the point O.
Now turn the transparent shape in the clockwise direction.
How many times do the shapes coincide in one full round?
What is the order of rotational symmetry?

The point where we have the pin is the centre of rotation. It is the intersecting point of the diagonals in this case.

Every object has a rotational symmetry of order 1, as it occupies same position after a rotation of 360° (i.e., one complete revolution). Such cases have no interest for us.

You have around you many shapes, which possess rotational symmetry (Fig 12.17).


Fruit
(i)


Road sign
(ii)

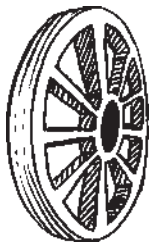

Wheel
(iii)

Fig 12.17

For example, when you slice certain fruits, the cross-sections are shapes with rotational symmetry. This might surprise you when you notice them [Fig 12.17(i)].

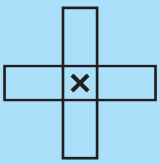
Then there are many road signs that exhibit rotational symmetry. Next time when you walk along a busy road, try to identify such road signs and find about the order of rotational symmetry [Fig 12.17(ii)].

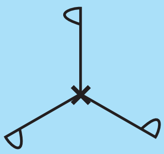
Think of some more examples for rotational symmetry. Discuss in each case:

(i) the centre of rotation (ii) the angle of rotation
(iii) the direction in which the rotation is affected and
(iv) the order of the rotational symmetry.

Try These

Give the order of the rotational symmetry of the given figures about the point marked × (Fig 12.17).


(i)


(ii)

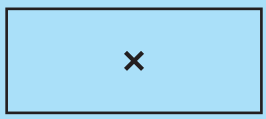
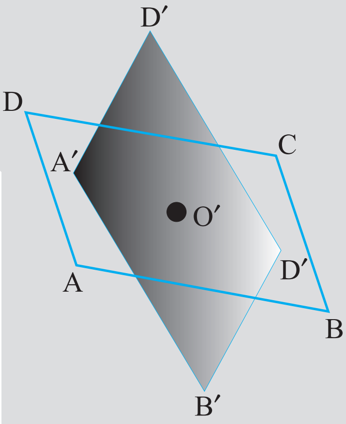

(iii)

Fig 12.18



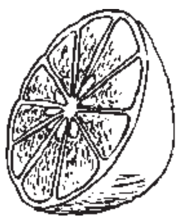
పటం 12.16

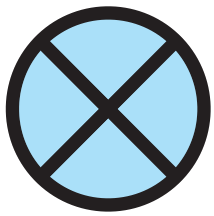
ఆకారాల్లో బిందువు O వద్ద పిన్‌ని గుచ్చండి.
ఇప్పుడు పారదర్శక ఆకారాన్ని సవ్య దిశలో తిప్పండి.
ఒక పూర్తి భ్రమణంలో ఆకారాలు ఎన్నిసార్లు ఏకీభవిస్తాయి?
భ్రమణ సౌష్ఠవం పరిమాణం ఎంత?

పిన్ ఉన్న బిందువు మనకు భ్రమణం యొక్క కేంద్రం అగును. ఈ సందర్భంలో ఇది కర్ణాల యొక్క ఖండన బిందువు అగును.

ప్రతి వస్తువు 360° (అంటే ఒక సంపూర్ణ భ్రమణం) తరువాత అదే స్థానాన్ని చేరును. కాబట్టి, ప్రతి వస్తువుకు భ్రమణ సౌష్ఠవం పరిమాణం 1 అగును. ఇలాంటి సందర్భాలు మనకు ఆసక్తి కలిగించవు.

మీ చుట్టూ అనేక ఆకారాలు ఉన్నాయి. ఇవి భ్రమణ సౌష్ఠవాన్ని కలిగి ఉన్నాయి (పటం 12.17).


పండు
(i)


రహదారి (చిహ్నం)
(ii)


చక్రము
(iii)

పటం 12.17

ఉదాహరణకు, మీరు కొన్ని పండ్లను ముక్కలుగా చేసినప్పుడు,ఆ ఆకారాల మధ్యచ్ఛేద భ్రమణ సౌష్ఠవం కలిగి ఉంటాయి. మీరు వాటిని గమనించినప్పుడు ఇది మీకు ఆశ్చర్యం కలగవచ్చు [పటం 12.17(i)].

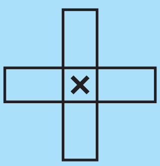
భ్రమణ సౌష్టవాన్ని ప్రదర్శించే అనేక రహదారి సంకేతాలు ఉన్నాయి. ఈసారి మీరు రద్దీగా ఉండే రహదారి వెంట నడుస్తున్నప్పుడు, అటువంటి రహదారి చిహ్నాలను గుర్తించడానికి ప్రయత్నించండి మరియు వాటి భ్రమణ సౌష్ఠవం యొక్క పరిమాణం గురించి తెలుసుకోండి [పటం 12.17(ii)].

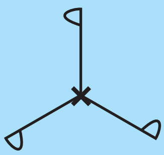
భ్రమణ సౌష్టవానికి మరికొన్ని ఉదాహరణల గురించి ఆలోచించండి. ప్రతి సందర్భంలో క్రింది వాటిని చర్చించండి:

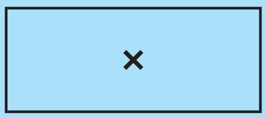
(i) భ్రమణ కేంద్రం (ii) భ్రమణ కోణం
(iii) భ్రమణం ప్రభావితమయ్యే దిశ మరియు (iv) భ్రమణ సౌష్ఠవ పరిమాణం.

ప్రయత్నించండి

ఇవ్వబడ్డ పటాల భ్రమణ సౌష్ఠవ పరిమాణం × గుర్తు చేయబడ్డ బిందువు ఆధారంగా రాయండి (పటం 12.17).


(i)

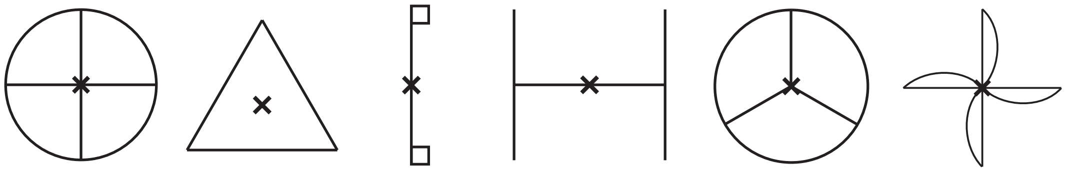

(ii)


(iii)

పటం 12.18

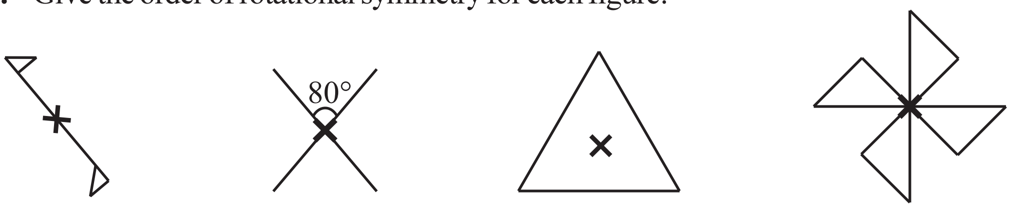
EXERCISE 12.2

1. Which of the following figures have rotational symmetry of order more than 1:

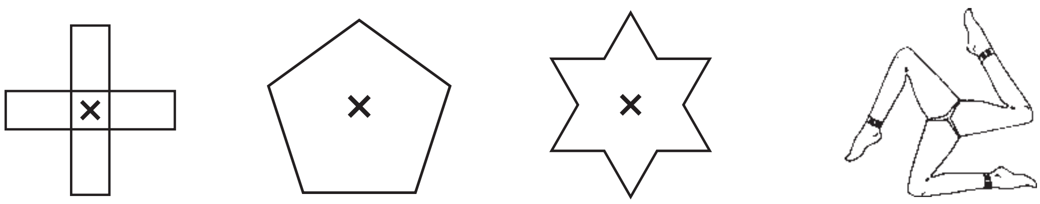


(a) (b) (c) (d) (e) (f)

2. Give the order of rotational symmetry for each figure:



(a) (b) (c) (d)



(e) (f) (g) (h)

12.4 LINE SYMMETRY AND ROTATIONAL SYMMETRY

You have been observing many shapes and their symmetries so far. By now you would have understood that some shapes have only line symmetry, some have only rotational symmetry and some have both line symmetry and rotational symmetry.

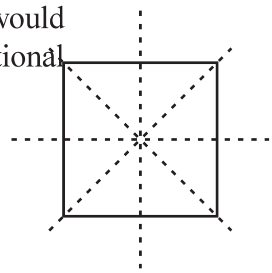


Fig 12.19

For example, consider the square shape (Fig 12.19).

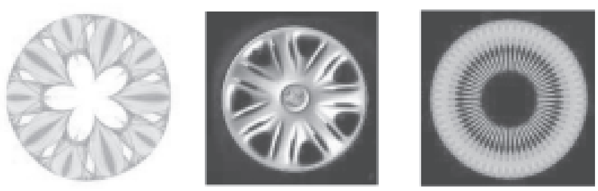
How many lines of symmetry does it have?

Does it have any rotational symmetry?

If 'yes', what is the order of the rotational symmetry?

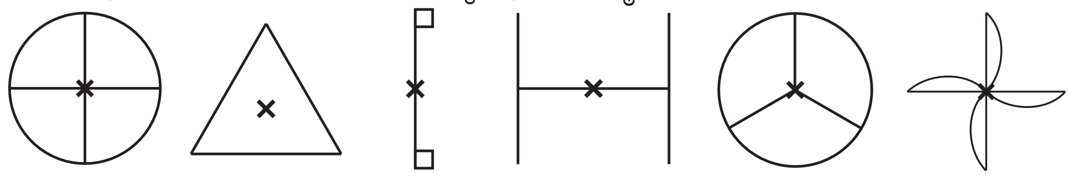
Think about it.

The circle is the most perfect symmetrical figure, because it can be rotated around its centre through any angle and at the same time it has unlimited number of lines of symmetry. Observe any circle pattern. Every line through the centre (that is every diameter) forms a line of (reflectional) symmetry and it has rotational symmetry around the centre for every angle.



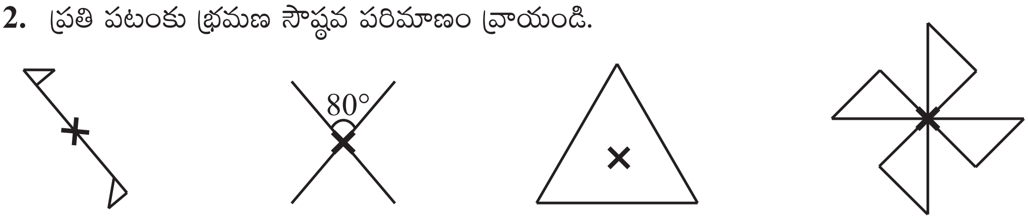
అభ్యాసం 12.2

1. ఈ క్రింది పటాలలో ఏది 1 కంటే ఎక్కువ భ్రమణ సౌష్ఠవ పరిమాణం కలిగి ఉంది:

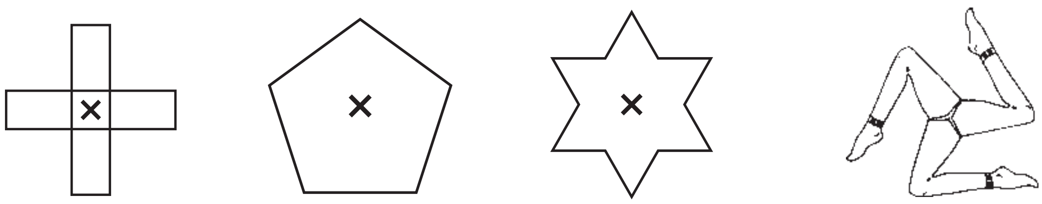


(a) (b) (c) (d) (e) (f)

2. ప్రతి పటంకు భ్రమణ సౌష్ఠవ పరిమాణం వ్రాయండి.



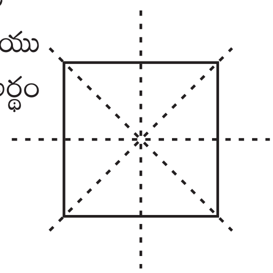
(a) (b) (c) (d)



(e) (f) (g) (h)

12.4 రేఖా సౌష్ఠవం మరియు భ్రమణ సౌష్ఠవం

మీరు ఇప్పటివరకు అనేక ఆకారాలను మరియు వాటి సౌష్టవాలను గమనిస్తున్నారు. కొన్ని ఆకారాలు రేఖ సౌష్టవాన్ని మాత్రమే కలిగి ఉన్నాయని, కొన్ని భ్రమణ సౌష్టవాన్ని మాత్రమే కలిగి ఉన్నాయని మరియు కొన్ని రేఖ సౌష్ఠవం మరియు భ్రమణ సౌష్ఠవం రెండింటినీ కలిగి ఉన్నాయని మీరు ఇప్పటికే అర్థం చేసుకున్నారు.



పటం 12.19

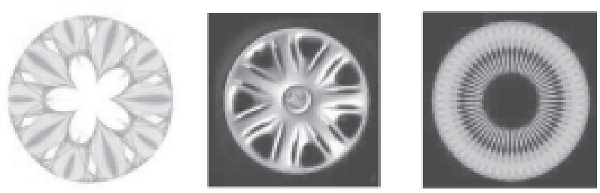
ఉదాహరణకు, చతురస్రాకార ఆకారాన్ని తీసుకోండి (పటం 12.19).

దీనిక ఎన్ని సౌష్ఠవ రేఖలు ఉన్నాయి?

దీనికి ఏదైనా భ్రమణ సౌష్ఠవం ఉందా?

ఒకవేళ 'అవును' అయితే, భ్రమణ సౌష్ఠవం పరిమాణం ఏమిటి? దీని గురించి ఆలోచించండి.

వృత్తం అత్యంత పరిపూర్ణమైన సౌష్ఠవ పటం, ఎందుకంటే ఇది ఏ కోణం ద్వారా అయినా దాని కేంద్రం చుట్టూ తిరగవచ్చు మరియు అదే సమయంలో దీనికి అపరిమిత సంఖ్యలో సౌష్ఠవరేఖలు ఉంటాయి. ఏదైనా వృత్తం నమూనాను గమనించండి. కేంద్రం గుండా వెళ్ళే ప్రతి రేఖ(అంటే ప్రతి వ్యాసం) రేఖా (పరావర్తన) సౌష్ఠవంను ఏర్పరుస్తుంది మరియు ఇది కేంద్రం చుట్టూ ప్రతి కోణం వద్ద భ్రమణ సౌష్టవాన్ని కలిగి ఉంటుంది.



Do This

Some of the English alphabets have fascinating symmetrical structures. Which capital letters have just one line of symmetry (like **E**)? Which capital letters have a rotational symmetry of order 2 (like **I**)?

By attempting to think on such lines, you will be able to fill in the following table:

Alphabet Letters	Line Symmetry	Number of Lines of Symmetry	Rotational Symmetry	Order of Rotational Symmetry
Z	No	0	Yes	2
S				
H	Yes		Yes	
O	Yes		Yes	
E	Yes			
N			Yes	
C				

Exercise 12.3

1. Name any two figures that have both line symmetry and rotational symmetry.
2. Draw, wherever possible, a rough sketch of
   (i) a triangle with both line and rotational symmetries of order more than 1.
   (ii) a triangle with only line symmetry and no rotational symmetry of order more than 1.
   (iii) a quadrilateral with a rotational symmetry of order more than 1 but not a line symmetry.
   (iv) a quadrilateral with line symmetry but not a rotational symmetry of order more than 1.
3. If a figure has two or more lines of symmetry, should it have rotational symmetry of order more than 1?
4. Fill in the blanks:

Shape	Centre of Rotation	Order of Rotation	Angle of Rotation
Square			
Rectangle			
Rhombus			
Equilateral Triangle			
Regular Hexagon			
Circle			
Semi-circle			

ఇవి చేయండి

కొన్ని ఆంగ్ల అక్షరాలు మనోహరమైన సౌష్ఠవ నిర్మాణాలను కలిగి ఉన్నాయి. ఏ ఆంగ్ల పెద్ద అక్షరాలు ఒకే ఒక రేఖా సౌష్ఠవంను కలిగి ఉంటాయి. (**E** వంటివి)? ఏ పెద్ద అక్షరాలు 2 పరిమాణం గల భ్రమణ సౌష్టవాన్ని కలిగి ఉంటాయి (**I** వంటివి)?

అటువంటి రేఖల గురించి ఆలోచించడానికి ప్రయత్నం చేయడం ద్వారా మీరు క్రింది పట్టికను నింపగలరు.

ఆంగ్ల పెద్ద అక్షరాలు	రేఖా సౌష్ఠవం	సౌష్ఠవ రేఖల సంఖ్య	భ్రమణ సౌష్ఠవం	భ్రమణ సౌష్ఠవ పరిమాణం
Z	కాదు	0	అవును	2
S				
H	అవును		అవును	
O	అవును		అవును	
E	అవును			
N			అవును	
C				

అభ్యాసం 12.3

1. రేఖ సౌష్ఠవం మరియు భ్రమణ సౌష్ఠవం రెండింటినీ కలిగి ఉన్న ఏవైనా రెండు పటాలను పేర్కొనండి.
2. సాధ్యమైనంత వరకు, వీటికి చిత్తు పటాలను గీయండి.
   (i) రేఖా సౌష్ఠవం మరియు భ్రమణ సౌష్ఠవ పరిమాణం1 కంటేఎక్కువుగా గల ఒక త్రిభుజం.
   (ii) ఒక సౌష్ఠవరేఖ మరియుభ్రమణ సౌష్ఠవ పరిమాణం1 కంటేఎక్కువుగా లేని ఒక త్రిభుజం.
   (iii) 1 కంటే ఎక్కువ పరిమాణం గల భ్రమణ సౌష్ఠవాన్ని కలిగి, రేఖ సౌష్ఠవం కలిగి ఉండని ఒక చతుర్భుజం.
   (iv) ఒక రేఖ సౌష్ఠవం కలిగి,1 కంటే ఎక్కువ పరిమాణం గల భ్రమణ సౌష్ఠవం లేని ఒక చతుర్భుజం
3. ఒకవేళ ఒక పటానికి రెండు లేదా అంతకంటే ఎక్కువ సౌష్ఠవ రేఖలు ఉన్నట్లయితే, దానికి 1 కంటే ఎక్కువ పరిమాణం గల భ్రమణ సౌష్ఠవం ఉంటుందా?
4. క్రింది ఖాళీలను పూరించండి:

ఆకారం	భ్రమణ కేంద్రం	భ్రమణ సౌష్ఠవ పరిమాణం	భ్రమణ కోణం
చతురస్రం			
దీర్ఘచతురస్రం			
రాంబస్			
సమబాహు త్రిభుజం			
క్రమ షడ్భుజి			
వృత్తం			
అర్ధ వృత్తం			

5. Name the quadrilaterals which have both line and rotational symmetry of order more than 1.

6. After rotating by 60° about a centre, a figure looks exactly the same as its original position. At what other angles will this happen for the figure?

7. Can we have a rotational symmetry of order more than 1 whose angle of rotation is

(i) 45°? (ii) 17°?

What have We Discussed?

1. A figure has **line symmetry**, if there is a line about which the figure may be folded so that the two parts of the figure will coincide.

2. Regular polygons have equal sides and equal angles. They have multiple (i.e., more than one) lines of symmetry.

3. Each regular polygon has as many lines of symmetry as it has sides.

Regular Polygon	Regular hexagon	Regular pentagon	Square	Equilateral triangle
Number of lines of symmetry	6	5	4	3

4. Mirror reflection leads to symmetry, under which the left-right orientation have to be taken care of.

5. Rotation turns an object about a fixed point.

This fixed point is the **centre of rotation**.

The angle by which the object rotates is the **angle of rotation**.

A half-turn means rotation by 180°; a quarter-turn means rotation by 90°. Rotation may be clockwise or anticlockwise.

6. If, after a rotation, an object looks exactly the same, we say that it has a **rotational symmetry**.

7. In a complete turn (of 360°), the number of times an object looks exactly the same is called the **order of rotational symmetry**. The order of symmetry of a square, for example, is 4 while, for an equilateral triangle, it is 3.

8. Some shapes have only one line of symmetry, like the letter E; some have only rotational symmetry, like the letter S; and some have both symmetries like the letter H.

The study of symmetry is important because of its frequent use in day-to-day life and more because of the beautiful designs it can provide us.

5. 1 కంటే ఎక్కువ రేఖ మరియు భ్రమణ సౌష్టవాన్ని కలిగి ఉన్న చతుర్భుజాల పేర్లు ఏమిటి?
6. ఒక కేంద్రం చుట్టూ 60° తిరిగిన తరువాత, ఒక పటం దాని అసలు స్థానం మాదిరిగానే కనిపిస్తుంది. ఏ ఇతర కోణాల్లో పటానికి ఇదేమాదిరిగా జరుగుతుంది?
7. భ్రమణ కోణం (i) 45° (ii) 17° గా కలిగి ఉన్న వాటికి మనం 1 కంటే ఎక్కువ భ్రమణ సౌష్టవాన్ని కనుగొనగలమా ?

మనం ఏం చర్చించాం?

1. ఒకవేళ పటం యొక్క రెండు భాగాలు ఏకీభవించే విధంగా ఆ బొమ్మను మడతపెట్టే రేఖ ఉన్నట్లయితే ఆ పటానికి రేఖా సౌష్ఠవం ఉంటుంది.
2. క్రమ బహుభుజులు సమాన భుజాలు మరియు సమాన కోణాలను కలిగి ఉంటాయి. అవి బహుళ (అనగా, ఒకటి కంటే ఎక్కువ) సౌష్ఠవ రేఖలను కలిగి ఉంటాయి.
3. ప్రతి క్రమ బహుభుజికి ఎన్ని భుజాలున్నాయో అన్ని సౌష్ఠవ రేఖలను కలిగి ఉంటుంది.

క్రమ బహుభుజి	క్రమ షడ్భుజి	క్రమ పంచభుజి	చతురస్రం	సమబాహు త్రిభుజం
సౌష్ఠవ రేఖల సంఖ్య	6	5	4	3

4. దర్పణ ప్రతిబింబం సౌష్టవానికి దారితీస్తుంది, దీని కింద ఎడమ–కుడి దిశను జాగ్రత్తగా చూసుకోవాలి.
5. భ్రమణం ఒక వస్తువును ఒక స్థిర బిందువు చుట్టూ త్రిప్పుతుంది. ఈ స్థిరబిందువు **భ్రమణం** యొక్క **కేంద్రం** అగును. వస్తువు తిరిగే కోణం **భ్రమణ కోణం.**

   అర్ధ భ్రమణం అంటే 180° భ్రమణం; పావు భ్రమణం అంటే 90° భ్రమణం. భ్రమణం సవ్య దిశలో లేదా అపసవ్య దిశలో ఉండవచ్చు.
6. ఒక వస్తువు భ్రమణం తర్వాత సరిగ్గా అదే విధంగా కనిపిస్తే, దానికి **భ్రమణ సౌష్ఠవం** ఉందని మనం చెబుతాం.
7. ఒక పూర్తిభ్రమణంలో (360°), ఒక వస్తువు సరిగ్గా అదే విధంగా ఎన్నిసార్లు కనిపిస్తుందో ఆ సంఖ్యను **భ్రమణ సౌష్ఠవ పరిమాణం** అంటారు. ఉదాహరణకు, ఒక చతురస్రం యొక్క సౌష్ఠవ పరిమాణం 4 కాగా, సమబాహు త్రిభుజానికి అది 3 అగును.
8. కొన్ని ఆకారాలు E అక్షరం వలె సౌష్ఠవం యొక్క ఒకే ఒకసౌష్ఠవ రేఖను కలిగి ఉంటాయి; కొన్నింటిలో S అనే అక్షరంకు వలె భ్రమణ సౌష్ఠవం మాత్రమే కలిగి ఉంటాయి; మరియు కొన్నింటిలో H అనే అక్షరం మాదిరిగా రెండు సౌష్టవాలు ఉంటాయి. ఇది రోజువారీ జీవితంలో తరచుగా ఉపయోగించబడుతుంది మరియు ఇది మనకు అందించే అందమైన డిజైన్ల కారణంగా సౌష్ఠవం యొక్క అధ్యయనం చాలా ముఖ్యమైనది.

Chapter 13

Visualising Solid Shapes

13.1 Introduction: Plane Figures and Solid Shapes

In this chapter, you will classify figures you have seen in terms of what is known as *dimension*.

In our day to day life, we see several objects like books, balls, ice-cream cones etc., around us which have different shapes. One thing common about most of these objects is that they all have some length, breadth and height or depth.

That is, they all occupy space and have three dimensions.

Hence, they are called three dimensional shapes.

Do you remember some of the three dimensional shapes (i.e., solid shapes) we have seen in earlier classes?

Try These

Match the shape with the name:

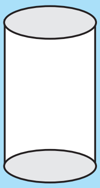
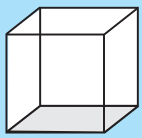
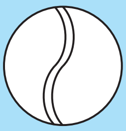
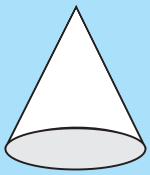
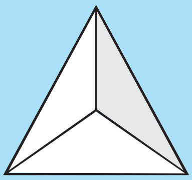
(i)		(a) Cuboid	(iv)		(d) Sphere
(ii)		(b) Cylinder	(v)		(e) Pyramid
(iii)		(c) Cube	(vi)		(f) Cone

Fig 13.1

అధ్యాయం 13

ఘనాకృతుల దృశ్యీకరణ

B3D6S6

15.1 పరిచయం: సమతల పటాలు మరియు ఘనాకృతులు

ఈ అధ్యాయంలో, మీరు చూసిన పటాలను వాని కొలత ఆధారంగా వర్గీకరిస్తారు.

మన దైనందిన జీవితంలో, పుస్తకాలు, బంతులు, ఐస్ క్రీమ్ కోన్‌ల వంటి అనేక వేర్వేరు ఆకారాల వస్తువులను మన పరిసరాలలో చూస్తూ ఉంటాము. చాలావరకు ఈ వస్తువులలో ఉన్న సాధారణ విషయం ఏమిటంటే ఇవన్నీ కొంత పొడవు, వెడల్పు మరియు ఎత్తు లేక లోతును కలిగి ఉంటాయి.

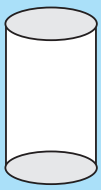
అనగా ఇవన్నీ కొంత స్థలాన్ని ఆక్రమిస్తాయి మరియు మూడు కొలతలను కలిగి ఉంటాయి.

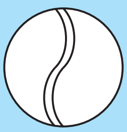
కాబట్టి వీటిని త్రిమితీయ ఆకారాలు అని అంటారు.

క్రింది తరగతిలో చూసిన లేక నేర్చుకున్న కొన్ని త్రిమితీయ ఆకారాలు (ఘనాకృతులు) మీకు గుర్తు ఉన్నాయా?

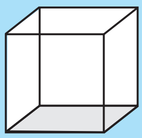
ప్రయత్నించండి

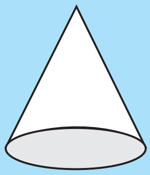
ఆకారాన్ని దాని పేరుతో జత చేయండి:

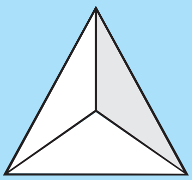
(i)  (a) దీర్ఘఘనం

(ii)  (b) స్థూపం

(iii)  (c) ఘనము

(iv)  (d) గోళం

(v)  (e) పిరమిడ్

(vi)  (f) శంకువు

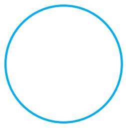
పటం 13.1

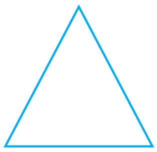
Try to identify some objects shaped like each of these.

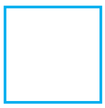
By a similar argument, we can say figures drawn on paper which have only length and breadth are called two dimensional (i.e., plane) figures. We have also seen some two dimensional figures in the earlier classes.

Match the 2 dimensional figures with the names (Fig 13.2):

(i)  (a) Circle

(ii)  (b) Rectangle

(iii)  (c) Square

(iv)  (d) Quadrilateral

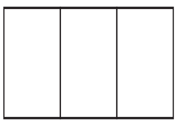
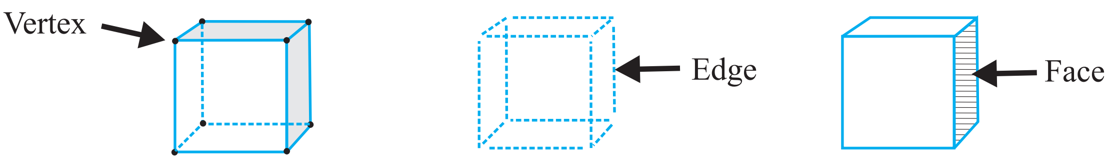
(v)  (e) Triangle

Fig 13.2

Note: We can write 2-D in short for 2-dimension and 3-D in short for 3-dimension.

13.2 Faces, Edges and Vertices

Do you remember the Faces, Vertices and Edges of solid shapes, which you studied earlier? Here you see them for a cube:



(i) (ii) (iii)

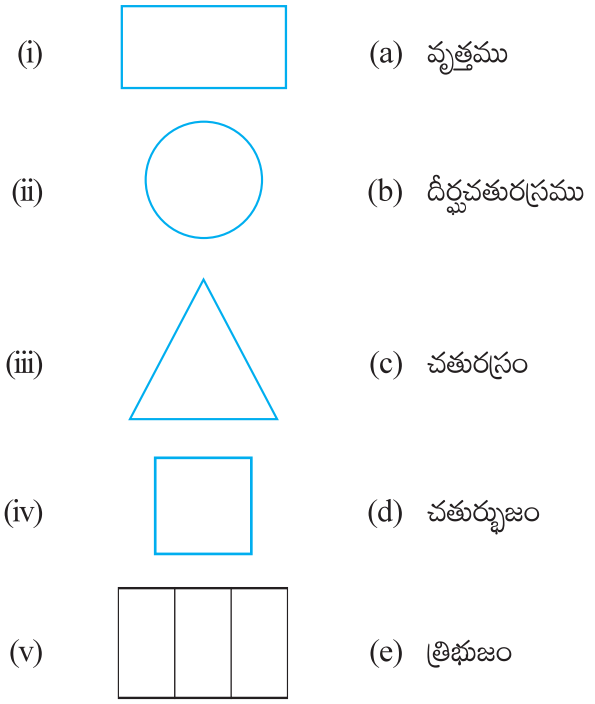
Fig 13.3

The 8 corners of the cube are its **vertices**. The 12 line segments that form the skeleton of the cube are its **edges**. The 6 flat square surfaces that are the skin of the cube are its **faces**.

ఇలాంటి ఆకారాలలో గల కొన్ని వస్తువులను గుర్తించడానికి ప్రయత్నించండి.

ఇదే విధమైన వాదన ద్వారా, పొడవు మరియు వెడల్పు మాత్రమే ఉన్న కాగితంపై గీచిన బొమ్మలను ద్విమితీయ (అనగా సమతల) పటాలు అని అంటారు. క్రింది తరగతిలో మనం కొన్ని రకాల ద్విమితీయ పటాలను చూశాము.

ద్విమితీయ పటాలను వాటి పేర్లతో జత చేయండి. (పటం13. 2):

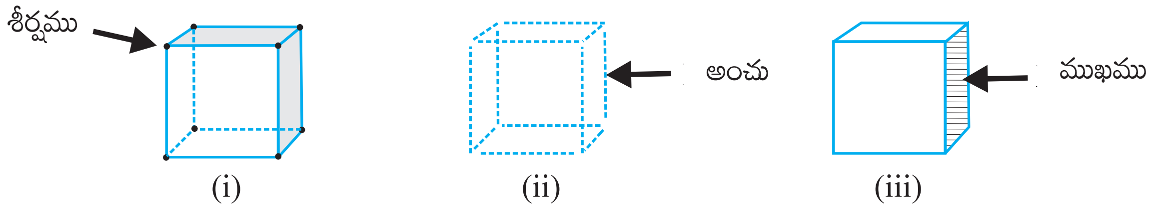


పటం 13.2

గమనిక: ద్విమితీయ ఆకారాలను 2-D అని త్రిమితీయ ఆకారాలను 3-D అని క్లుప్తంగా రాస్తాము.

15.2 ముఖాలు, అంచులు మరియు శీర్షాలు

మీరు క్రింది తరగతులలో నేర్చుకున్న ఘనాకారాల యొక్క ముఖాలు, శీర్షాలు మరియు అంచులు మీకు గుర్తున్నాయా? ఇక్కడ మీరు ఘనం యొక్క ముఖాలు, శీర్షాలు మరియు అంచులు చూస్తారు.



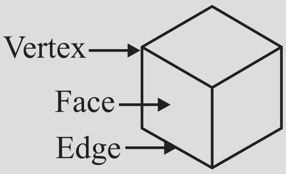
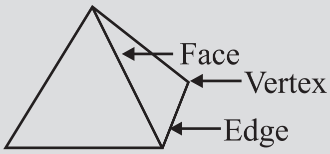
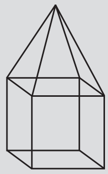
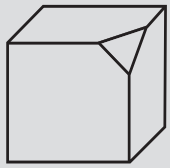
పటం 13.3

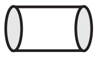
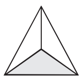
ఘనం యొక్క 8 మూలలను ఎనిమిది **శీర్షాలు** అని, ఘనం యొక్క ఆకారాన్ని ఏర్పరచు 12 రేఖాఖండాలను ఘనం యొక్క **అంచులు** అని అంటారు. ఘనానికి ఉపరితలంపై ఉండే ఆరు సమతల చతురస్రాలను ఘనం యొక్క **ముఖాలు** అంటారు.

Do This

Complete the following table:

Table 13.1

				
Faces **(F)**	6	4		
Edges **(E)**	12			
Vertices **(V)**	8	4		

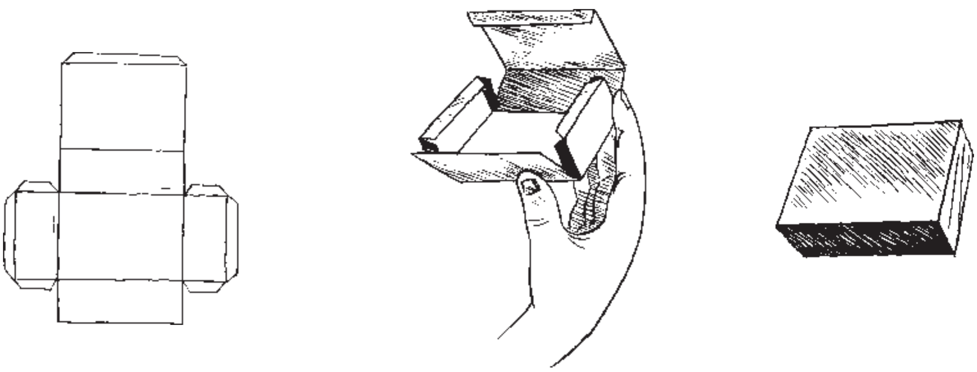
Can you see that, the two dimensional figures can be identified as the faces of the three dimensional shapes? For example a cylinder  has two faces which are circles, and a pyramid, shaped like this  has triangles as its faces.

We will now try to see how some of these 3-D shapes can be visualised on a 2-D surface, that is, on paper.

In order to do this, we would like to get familiar with three dimensional objects closely. Let us try forming these objects by making what are called nets.

13.3 Nets for Building 3-D Shapes

Take a cardboard box. Cut the edges to lay the box flat. You have now a **net** for that box. A net is a sort of skeleton-outline in 2-D [Fig13.4 (i)], which, when folded [Fig13.4 (ii)], results in a 3-D shape [Fig13.4 (iii)].



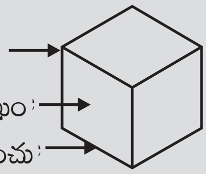
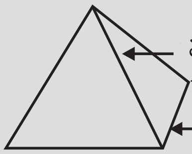
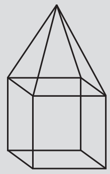
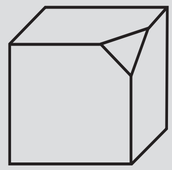
(i) (ii) (iii)

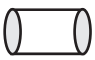
Fig 13.4

ఇది చేయండి

కింది పట్టికను పూరించండి.

పట్టిక 13.1

				
ముఖాలు **(F)**	6	4		
అంచులు **(E)**	12			
శీర్షాలు **(V)**	8	4		

ద్విమితీయ పటాలను త్రిమితీయ పటాల యొక్క ముఖాలుగా గుర్తించబడ్డాయని మీరు గమనించగలిగారా? ఉదాహరణకు స్థూపము  వృత్తాలను రెండు ముఖాలుగా కలిగిఉంది.

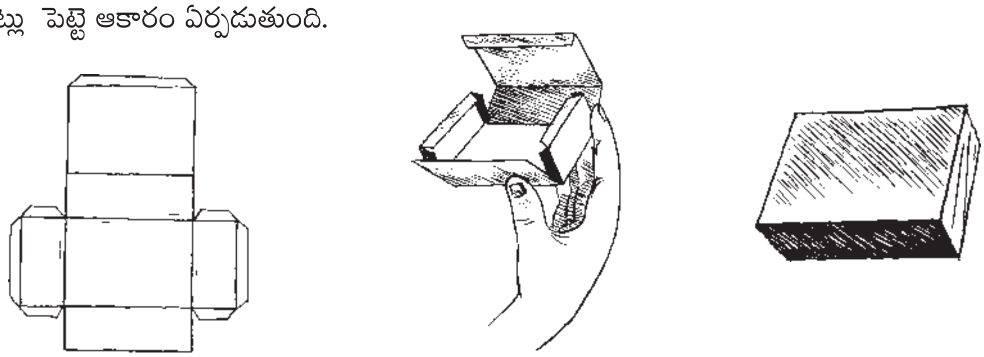
మరియు ఇలాంటి ఆకారంలో ఉన్న  ఒక పిరమిడ్ త్రిభుజములను దాని ముఖాలుగా కలిగి ఉంటుంది.

త్రిమితీయ ఆకారాలలో కొన్నింటిని ద్విమితీయ తలంపై (అనగా కాగితం) ఎలా చూపవచ్చునో చూడటానికి మనం ఇప్పుడు ప్రయత్నిద్దాం.

దీనిని చేయడానికి మనము త్రిమితీయ వస్తువుల గురించి నిశితంగా తెలుసుకోవాలి. వలలు అని పిలవబడే వాటిని చేయడం ద్వారా ఈ వస్తువులను రూపొందించటానికి ప్రయత్నిద్దాం.

13.3 త్రిమితీయ ఆకారాలను నిర్మించడానికి వలలు

ఒక దళసరి కాగితంతో చేసిన ఒక పెట్టెను తీసుకోండి. దాని అంచుల వెంబడి కత్తిరించి సమతల పటము ఏర్పడేటట్లు చేయండి. ఇలా ఏర్పడిన దానిని ఆ పెట్టె యొక్క **వల** అని అంటారు.పటం 13.4 (i) లో చూపినట్లు వల అనేది ద్విమితీయ తలంలో ఉన్న ఆకారం యొక్క అంచుల రూపము వంటిది. దానిని మడచినప్పుడు పటం 13.4 (ii) లో ఉన్నట్లు త్రిమితీయ ఆకారం వస్తుంది. చివరకు పటం 15.4 (iii)లో ఉన్నట్లు పెట్టె ఆకారం ఏర్పడుతుంది.



(i) (ii) (iii)

పటం 13.4

Here you got a **net** by suitably separating the edges. Is the reverse process possible?

Here is a net pattern for a box (Fig 13.5). Copy an enlarged version of the net and try to make the box by suitably folding and gluing together. (You may use suitable units). The box is a solid. It is a 3-D object with the shape of a cuboid.

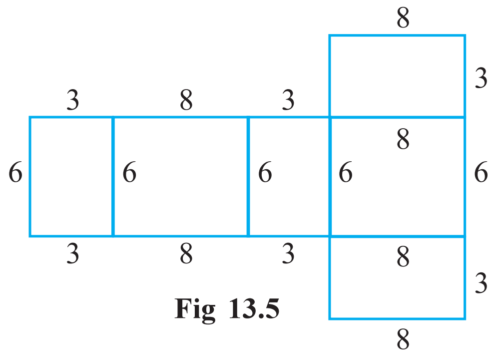
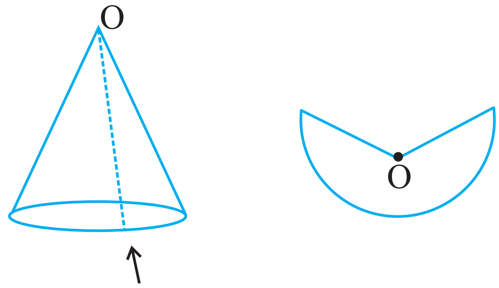


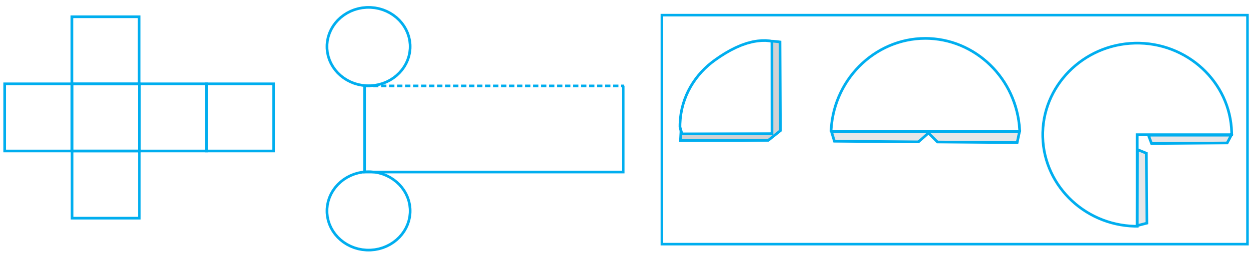
Fig 13.5

Similarly, you can get a net for a cone by cutting a slit along its slant surface (Fig 13.6).



Cut along here **Fig 13.6**

You have different nets for different shapes. Copy enlarged versions of the nets given (Fig 13.7) and try to make the 3-D shapes indicated. (You may also like to prepare skeleton models using strips of cardboard fastened with paper clips).



Cube (i) | Cylinder (ii) | Cone (iii)

Fig 13.7

We could also try to make a net for making a pyramid like the Great Pyramid in Giza (Egypt) (Fig 13.8). That pyramid has a square base and triangles on the four sides.

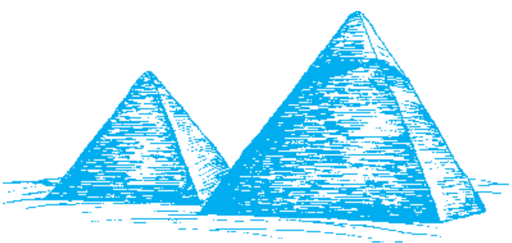


Fig 13.8

See if you can make it with the given net (Fig 13.9).

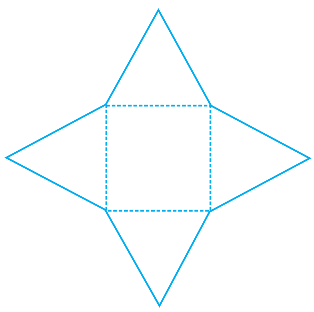
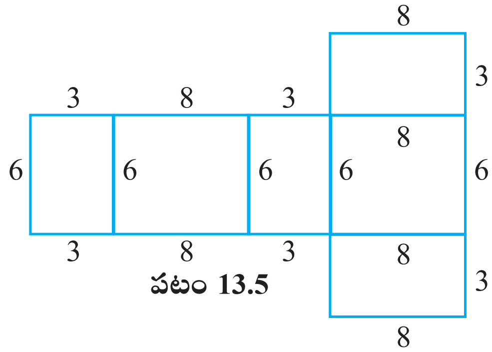


Fig 13.9

అంచులను వేరు చేయడం ద్వారా **వల**ను పొందవచ్చు దీని విపర్యయం సాధ్యమేనా?

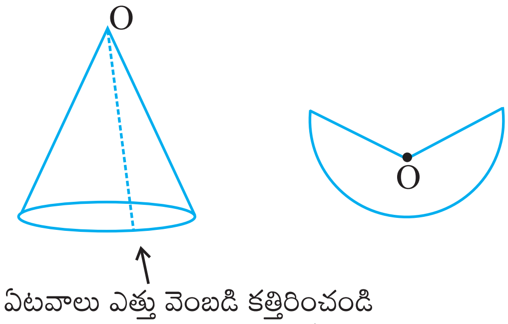
ఇక్కడ ఒక పెట్టె యొక్క వల రూపం ఇవ్వబడినది (పటం 13.5) దానిని కాగితంపై గీసి కత్తిరించి ఒక దళసరి కాగితంపై అంటించండి. అంచుల వెంబడి మడచి జిగురుతో అంటించి ఒక పెట్టెను తయారు చేయండి. మీరు తగిన యూనిట్ల కొలతను ఉపయోగించ వచ్చును.



పటం 13.5

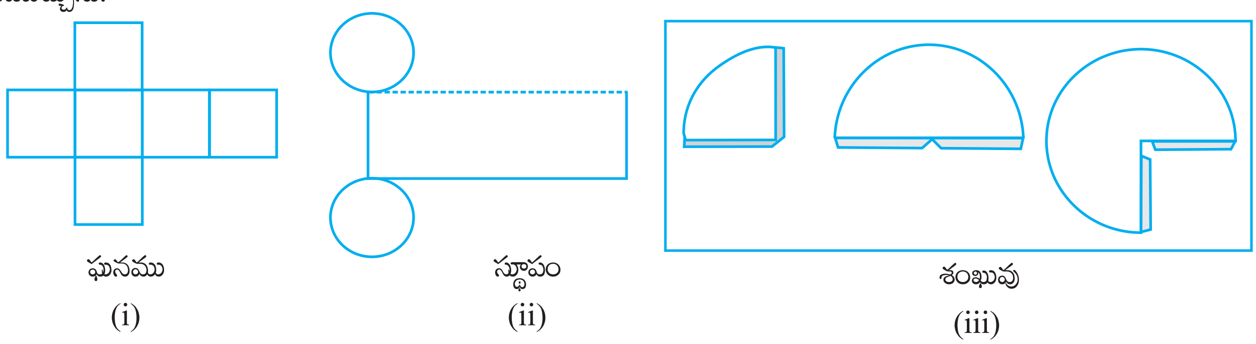
ఇలా ఏర్పడిన పెట్ట ఘన వస్తువు. ఇది దీర్ఘ ఘనాకారంలో ఉన్న ఒక త్రిమితీయ వస్తువు.

ఇదే విధంగా శంఖు ఆకృతిలో ఉన్న ఐస్ క్రీమ్ కాగితపు కప్పును తీసుకొని పటంలో చూపినట్లు దాని ఏటవాలు ఎత్తు వెంబడి జాగ్రత్తగా కత్తిరించండి. ఇలా చేయగా మీకు శంఖువు యొక్క వల, పటం 13.6లో చూపినట్లు ఏర్పడుతుంది.



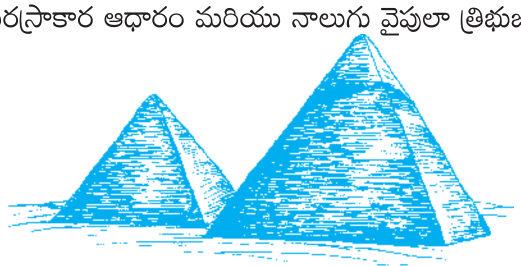
పటం 13.6

విభిన్న ఆకృతులకు విభిన్న వలలుఉంటాయి. పటం 13.7 లో ఇవ్వబడిన వల యొక్క నకలు తీసుకొని ఆకారాలను తయారు చేయడానికి ప్రయత్నించండి. కాగితపు క్లిప్పులతో బిగించిన దళసరి అట్టముక్కలను ఉపయోగించి ఇచ్చిన త్రిమితీయ రూపాలకు వలలను తయారు చేయుటకు కూడా మీరు సిద్ధ పడవచ్చును.

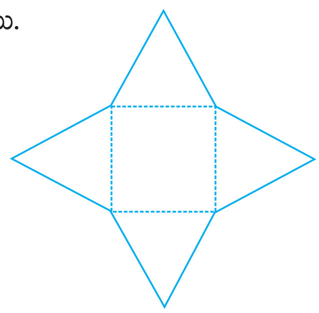


పటం 13.7

గిజా (ఈజిప్ట్) లో ఉన్న గొప్ప పిరమిడ్ ను తయారు చేయుటకు, వలను చేయడానికి మనం ప్రయత్నించవచ్చు. పిరమిడ్‌కు చతురస్రాకార ఆధారం మరియు నాలుగు వైపులా త్రిభుజాలు ఉన్నాయి.



పటం 13.8



పటం 13.9

ఇవ్వబడిన వలతో మీరు దీనిని తయారు చేయగలరో లేదో చూడండి. (పటం 13.9).

TRY THESE

Here you find four nets (Fig 13.10). There are two *correct* nets among them to make a tetrahedron. See if you can work out which nets will make a tetrahedron.

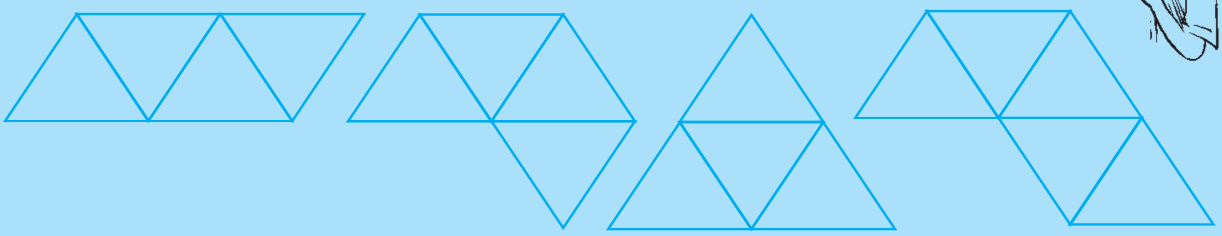
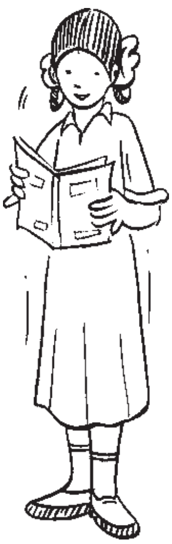
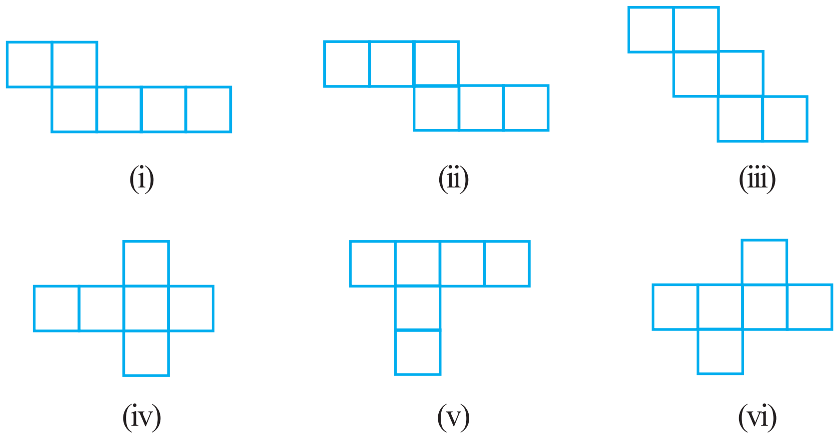


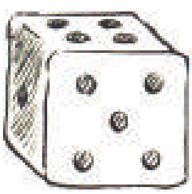
Fig 13.10



EXERCISE 13.1

1. Identify the nets which can be used to make cubes (cut out copies of the nets and try it):





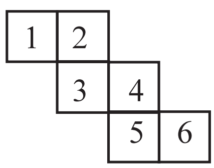
2. Dice are cubes with dots on each face. Opposite faces of a die always have a total of seven dots on them.

Here are two nets to make dice (cubes); the numbers inserted in each square indicate the number of dots in that box.

Insert suitable numbers in the blanks, remembering that the number on the opposite faces should total to 7.

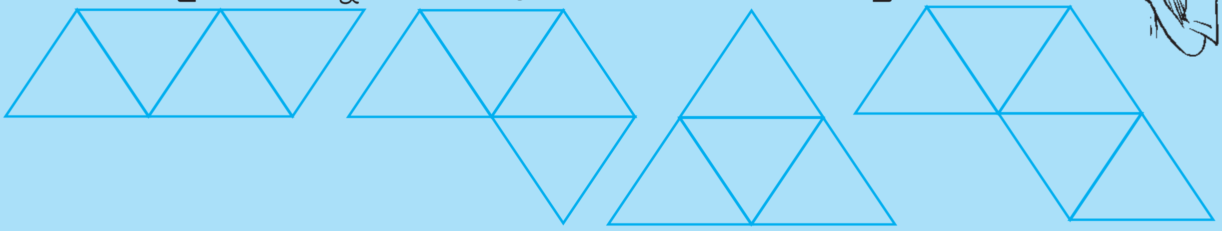
3. Can this be a net for a die?

Explain your answer.

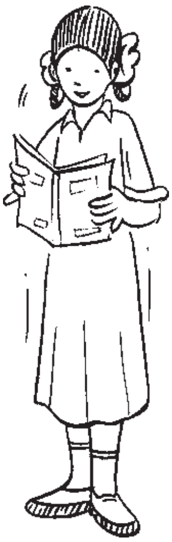


ప్రయత్నించండి

ఇక్కడ నాలుగు వలలు ఉన్నాయి. ఇందులో త్రిభుజాకార పిరమిడ్‌ను తయారుచేయడానికి కింది ఇచ్చిన వాటిలో రెండు సరైన వలలు ఉన్నాయి. ఏ వలలు త్రిభుజాకార పిరమిడ్‌ను తయారుచేస్తాయో చూడండి.

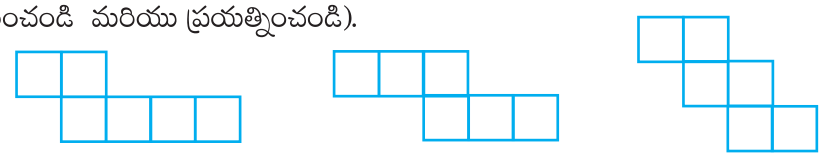


పటం 13.10

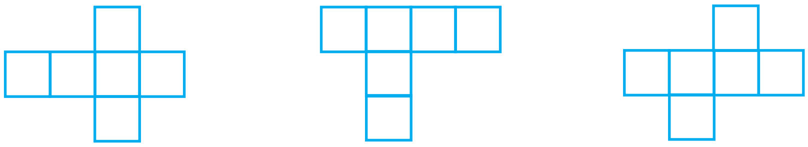


అభ్యాసం 13.1

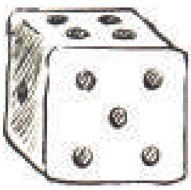
1. సమఘనములు తయారు చేయటానికి ఉపయోగించే వలలను గుర్తించండి (వలల నమూనాలను కత్తిరించండి మరియు ప్రయత్నించండి).



(i) (ii) (iii)

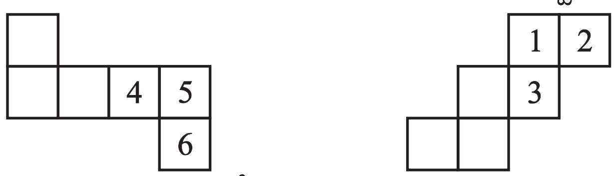


(iv) (v) (vi)



2. సమ ఘనాకార పాచికలు అనేవి ప్రతి తలంపై బిందువులను కలిగిన సమఘనం. ఒక పాచిక యొక్క ఎదురెదురు ముఖాలపై ఉన్న బిందువుల మొత్తం7 కు సమానంగా ఉంటుంది.

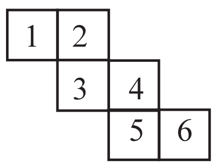
ప్రతీ చతురస్రంలో చొప్పించిన సంఖ్యలు ఆ పెట్టె లోని చుక్కల సంఖ్యను సూచిస్తాయి. ఇక్కడ సమఘనాకార పాచికలను తయారు చేయడానికి రెండు వలలు ఇవ్వబడినవి.



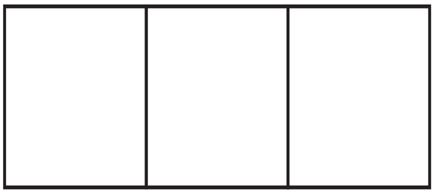
ప్రతీ చతురస్రంలో రాసిన సంఖ్యలు ఆ పెట్టె లోని చుక్కల సంఖ్యను సూచిస్తాయి . ఖాళీ గడులలో సరియైన సంఖ్యలో బిందువులను గుర్తించండి.

ఎదుటెదుటి ముఖాల సంఖ్యల మొత్తం 7 వచ్చేలా ఖాళీలలో సరియైన సంఖ్యలుంచండి.

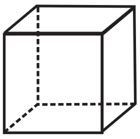
3. ఇచ్చిన పటం ఒక పాచికను తయారుచేయు వల అవుతుందా? మీ సమాధానాన్ని వివరించండి.

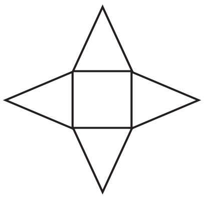


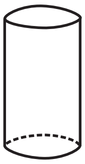
4. Here is an incomplete net for making a cube. Complete it in at least two different ways. Remember that a cube has six faces. How many are there in the net here? (Give two separate diagrams. If you like, you may use a squared sheet for easy manipulation.)

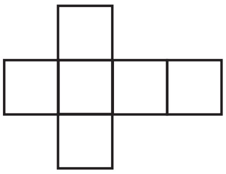


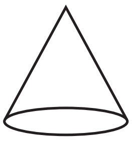
5. Match the nets with appropriate solids:

(a) 

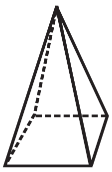
(i) 

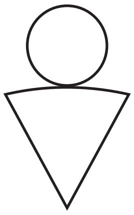
(b) 

(ii) 

(c) 

(iii) 

(d) 

(iv) 

Play this game

You and your friend sit back-to-back. One of you reads out a net to make a 3-D shape, while the other attempts to copy it and sketch or build the described 3-D object.

13.4 Drawing Solids on a Flat Surface

Your drawing surface is paper, which is flat. When you draw a solid shape, the images are somewhat distorted to make them appear three-dimensional. It is a visual illusion. You will find here two techniques to help you.

13.4.1 Oblique Sketches

Here is a picture of a cube (Fig 13.11). It gives a clear idea of how the cube looks like, when seen from the front. You do not see certain faces. In the drawn picture, the lengths

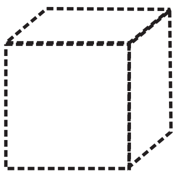
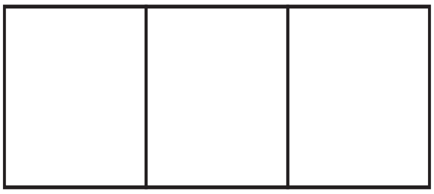
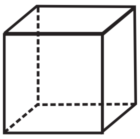


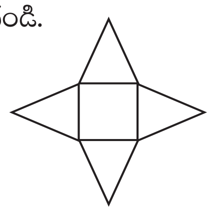
Fig 13.11

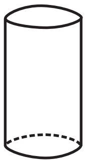
4. ఒక ఘనం తయారు చేయుటకు ఒక అసంపూర్ణ వల ఇవ్వబడింది.కనీసం రెండు పద్ధతులలో ఈ వలను పూర్తిచేయండి.ఘనానికి ఆరు ముఖాలుంటాయని గుర్తుకుతెచ్చుకొండి. ఈ వలలో ఎన్ని ముఖాలున్నాయి.? (రెండు వేర్వేరు పటాలు గీయండి మీకు నచ్చినట్లైతే,. చతురస్రాకార కాగితాన్ని ఉపయోగించవచ్చు.

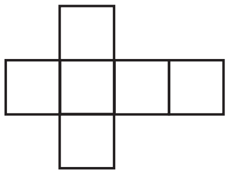


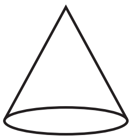
5. సంబంధిత వలలను ప్రక్కన ఇచ్చిన ఘనకృతులతో జతపరచండి.

(a) 

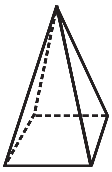
(i) 

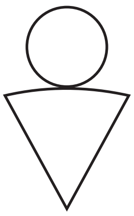
(b) 

(ii) 

(c) 

(iii) 

(d) 

(iv) 

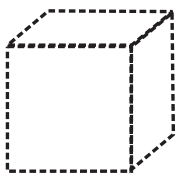
ఈ ఆట ఆడండి.

మీరు, మీమిత్రుడు వీపు భాగాలు ఆనేటట్లు కూర్చోండి.మీలో ఒకరు ఒక త్రిమితీయ ఆకారాన్ని తయారు చేయడానికి కావలసిన వల రూపాన్ని చదవండి.రెండవ వారు దాని నకలు చేసి మరియు గీసి ఇవ్వడం ద్వారా త్రిమితీయ ఆకారాన్ని నిర్మించాలి.

13.4 ఘనాకారాలను సమతలంపై గీయడం

మనం పటాలను గీసే కాగితం ఒక సమతలం. ఒక ఘనాకారాన్ని దీనిపై గీసినప్పుడు విరూపం చెంది త్రిమితీయ ఆకారాన్ని పొందినది. ఇది కేవలం దృశ్య భ్రాంతి మాత్రమే. ఇక్కడ మనం ఒక త్రిమితీయ ఆకారాన్ని ఒక సమతలంపై గీయడానికి రెండు పద్ధతులను ఉపయోగిస్తాము.

13.4.1 ఏటవాలు రేఖా చిత్రాలు



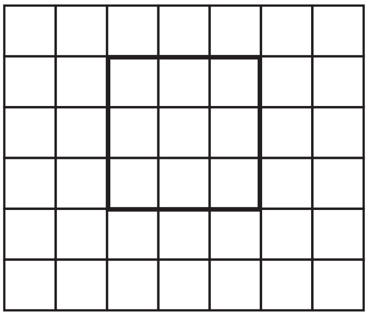
పటం 13.11

ఇక్కడ ఒక సమ ఘనం పటం ఇవ్వబడింది. (పటం 13.11). దీనిని ముందు నుండి చూస్తే ఎలా కన్పిస్తుందో ఈ పటం చూడగానే అర్థమవుతుంది. నిజానికి మనం ఘనం యొక్క అన్ని తలాలను పటంలో

are not equal, as they should be in a cube. Still, you are able to recognise it as a cube. Such a sketch of a solid is called an **oblique sketch**.

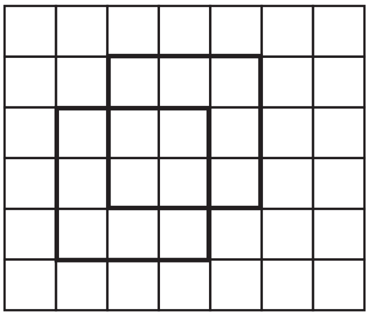
How can you draw such sketches? Let us attempt to learn the technique.

You need a squared (lines or dots) paper. Initially practising to draw on these sheets will later make it easy to sketch them on a plain sheet (without the aid of squared lines or dots!) Let us attempt to draw an oblique sketch of a $3 \times 3 \times 3$ (each edge is 3 units) cube (Fig 13.12).



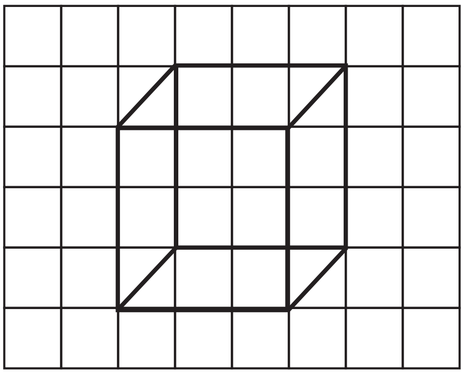
Step 1

Draw the **front** face.



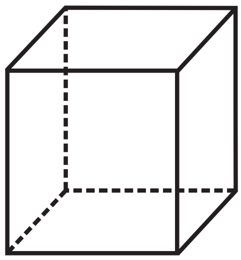
Step 2

Draw the **opposite** face. Sizes of the faces have to be same, but the sketch is somewhat off-set from step 1.



Step 3

Join the corresponding corners



Step 4

Redraw using dotted lines for hidden edges. (It is a convention) The sketch is ready now.

Fig 13.12

In the oblique sketch above, did you note the following?

(i) The sizes of the front faces and its opposite are same; and

(ii) The edges, which are all equal in a cube, appear so in the sketch, though the actual measures of edges are not taken so.

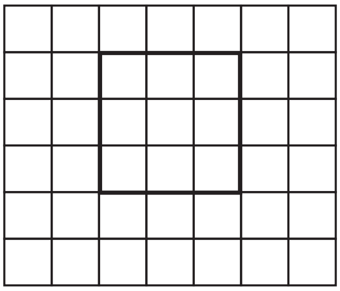
You could now try to make an oblique sketch of a cuboid (remember the faces in this case are rectangles)

Note: You can draw sketches in which measurements also agree with those of a given solid. To do this we need what is known as an **isometric sheet**. Let us try to

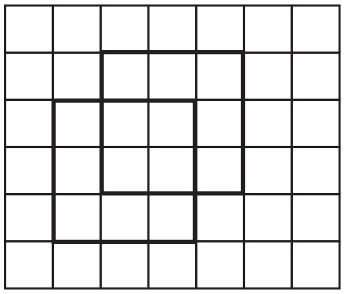
చూడలేము. ఒక ఘనంలో అన్ని అంచుల పొడవులు ఘనాకృతుల దృశ్యీకరణ సమానం కాదు. అయినా దీనిని చూడగానే మనం ఒక ఘనం అని గుర్తు పడతాము. ఇటువంటి పటాలనే **ఏటవాలు రేఖాచిత్రాలు** అంటారు.

మీరు ఇలాంటి చిత్రాలను ఎలా గీయగలరు? వీటిని గీసే పద్ధతిని నేర్చుకునేందుకు ప్రయత్నిద్దాం.

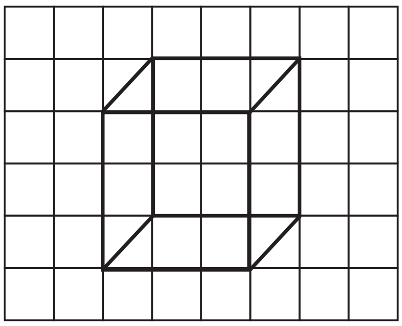
మొదట గళ్ళ కాగితాలపై వీటిని సాధన చేస్తే తర్వాత తెల్ల కాగితాలపై కూడా సులభంగా గీయవచ్చును. ఇప్పుడు మనం $3 \times 3 \times 3$ కొలతలు గల (అనగా ప్రతి అంచు 3 యూనిట్లు) ఒక ఘనానికి ఏటవాలు రేఖా చిత్రం గీద్దాం. (పటం 13.12)



ఎదురు ముఖాన్ని గీయండి

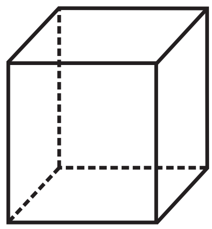


ఎదురు ముఖాన్ని గీయండి అదే కొలతలతో గీచిన ముఖానికి వెనుక ముఖాన్ని గీయండి. ముఖాల పరిమాణాలు ఒకే విధంగా ఉండాలి ఇది కొంచెం పక్కకు గీయండి.



దశ – 3

సంబంధిత మూలలను కలపండి



దశ – 4

ఈ పటాన్ని తిరిగి గీయండి. కనిపించని అంచులను చుక్కల రేఖలతో గీయండి. ఇదే మనకు కావలసిన చిత్రము.

పటం 13.12

ఈ ఏటవాలు చిత్రంలో మీరు ఈ క్రింది అంశాలను గమనించారా?

(i) ముందు మరియు దాని వెనుక ఉండే తలాలు ఒకే లాగా ఉంటాయి. మరియు

(ii) ఒక ఘనం లో అంచులు ఏ విధంగా ఒకే కొలతను కలిగి ఉంటాయో అదేవిధంగా ఈ చిత్రంలో కూడా కొలతలు తీసుకుని గీయకపోయినా అంచులన్నీ సమానంగా ఉన్నట్లు కనిపిస్తాయి.

ఇప్పుడు మీరు ఒక దీర్ఘఘనానికి ఏటవాలు చిత్రాన్ని గీయడానికి ప్రయత్నించండి. (ఇలా నిర్మించేటప్పుడు ఒక దీర్ఘఘనం ముఖాలన్నీ దీర్ఘ చతురస్రాలని గుర్తుకు తెచ్చుకోండి).

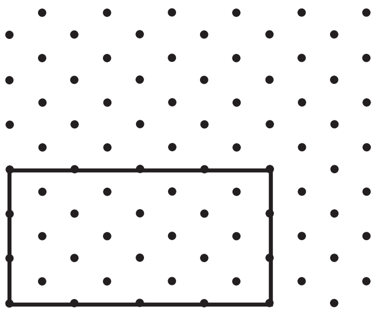
గమనిక: ఘనాలను ఇచ్చిన కొలతలతో ఉండేటట్లు కూడా మనం చిత్రాలను గీయవచ్చు. ఇలా గీయడానికి మనకు **తుల్య బిందు కాగితం** కావాలి. మనం దీనిని గీయడానికి ప్రయత్నిద్దాం.

make a cuboid with dimensions 4 cm length, 3 cm breadth and 3 cm height on given isometric sheet.

13.4.2 Isometric Sketches

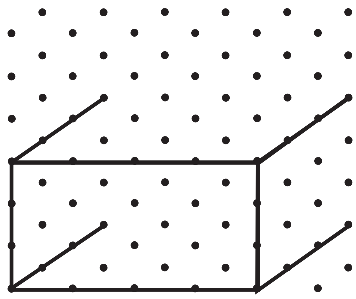
Have you seen an isometric dot sheet? (A sample is given at the end of the book). Such a sheet divides the paper into small equilateral triangles made up of dots or lines. *To draw sketches in which measurements also agree with those of the solid,* we can use isometric dot sheets. [Given on inside of the back cover (3rd cover page).]

Let us attempt to draw an isometric sketch of a cuboid of dimensions 4 × 3 × 3 (which means the edges forming length, breadth and height are 4, 3, 3 units respectively) (Fig 13.13).



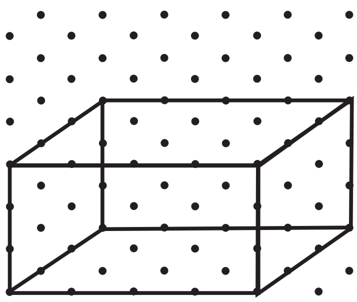
Step 1

Draw a rectangle to show the front face.



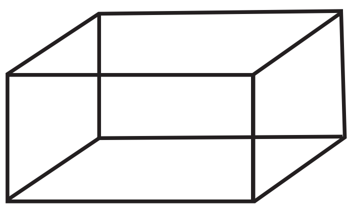
Step 2

Draw four parallel line segments of length 3 starting from the four corners of the rectangle.



Step 3

Connect the matching corners with appropriate line segments.



Step 4

This is an isometric sketch of the cuboid.

Fig 13.13

Note that the measurements are of exact size in an isometric sketch; this is not so in the case of an oblique sketch.

Example 1 Here is an oblique sketch of a cuboid [Fig 13.14(i)]. Draw an isometric sketch that matches this drawing.

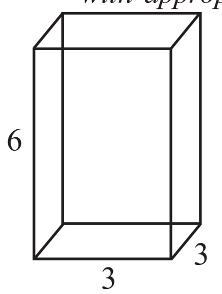


Fig 13.14 (i)

Solution Here is the solution [Fig 13.14(ii)]. Note how the measurements are taken care of.

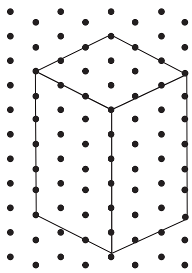


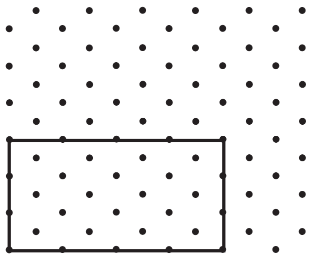
Fig 13.14 (ii)

ఇప్పుడు మనం పొడవు 4 సెం.మీ వెడల్పు 3 సెం.మీ మరియు ఎత్తు 3 సెం.మీ కొలతలు గల ఒక దీర్ఘ ఘనాన్ని తుల్య బిందు కాగితంపై గీయండి.

13.4.2 తుల్య రేఖా చిత్రాలు

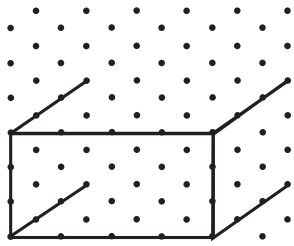
మీరు తుల్య బిందు కాగితాన్ని చూశారా?(ఈ పుస్తకం చివర ఒక నమూనా ఇవ్వబడింది). ఈ కాగితం అంతా చిన్న చిన్న సమబాహు త్రిభుజ ఆకారాలు ఉండేటట్లు బిందువులు లేదా గీతలు గీయబడి ఉంటుంది. *ఘనాలను ఇచ్చిన కొలతలతో ఉండేటట్లు కూడా మనం చిత్రాలను గీయవచ్చు.* ఇలా గీయడానికి మనం తుల్యబిందు కాగితాలను ఉపయోగించవచ్చు. (పుస్తకం చివర పేజీ లోపలి భాగంలో ఇవ్వబడింది. 3 వ కవర్ పేజీ)

ఇప్పుడు మనం ఇప్పుడు మనం $4 \times 3 \times 3$ కొలతలు గల (అనగా పొడవు, వెడల్పు, ఎత్తు వరుసగా 4 యూనిట్లు 3 యూనిట్లు మరియు 3 యూనిట్లు) దీర్ఘఘనాన్ని గీద్దాం. (పటం 13.13).



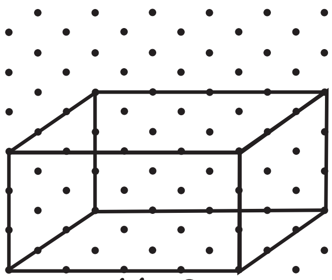
దశ – 1

ఎదురుగా ఉండే ముఖాన్ని సూచించే. ఒక దీర్ఘ చతురస్రాన్ని గీయండి



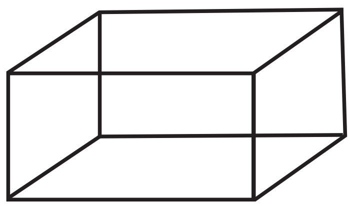
దశ – 2

దీర్ఘచతురస్రము నాలుగు శీర్షముల నుండి నాలుగు సమాంతర రేఖా ఖండాలను 3 యూనిట్ల కొలతతో గీయండి.



దశ – 3

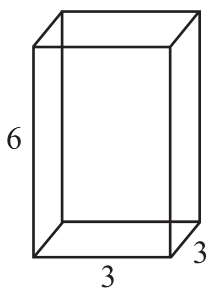
సంబంధిత శీర్షాలను రేఖా ఖండాలచే కలపండి



దశ – 4

ఇదే మనకు కావలసిన దీర్ఘ ఘనము యొక్క తుల్య రేఖా చిత్రం

పటం 13.13

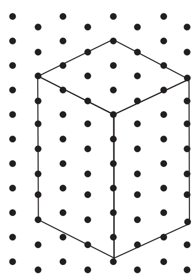


పటం 13.14 (i)

మీరు తుల్యారేఖా చిత్రాలలో ఇచ్చిన కొలతలతో ఖచ్చితంగా సమానంగా ఉండే కొలతలు గల ఘనాకార పటాలను గమనించవచ్చు. కానీ ఏటవాలు చిత్రంలో ఇలా ఉండదు.

ఉదాహరణ 7 ఒక దీర్ఘ ఘనానికి ఏటవాలు చిత్రం ఇక్కడ ఇవ్వబడినది [పటం 13.14(i)] దానికి సరిపడే ఒక తుల్యరేఖా చిత్రాన్ని గీయండి.

సాధన: సాధన ఇక్కడ సాధన ఉన్నది. (పటం15.14 కొలతలను జాగ్రత్తగా ఎలా తీసుకోవాలో గమనించండి. [పటం 13.14(ii)]

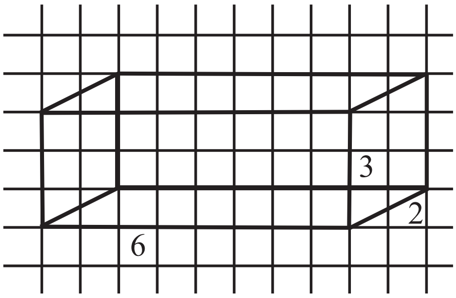


పటం 13.14 (ii)

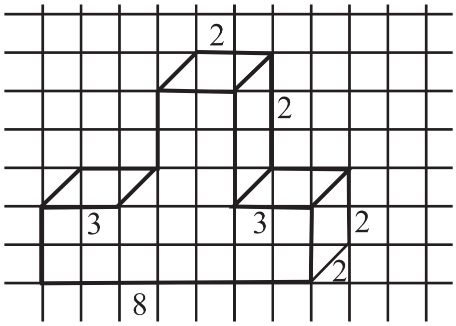
How many units have you taken along (i) ‘length’? (ii) ‘breadth’? (iii) ‘height’? Do they match with the units mentioned in the oblique sketch?

EXERCISE 13.2

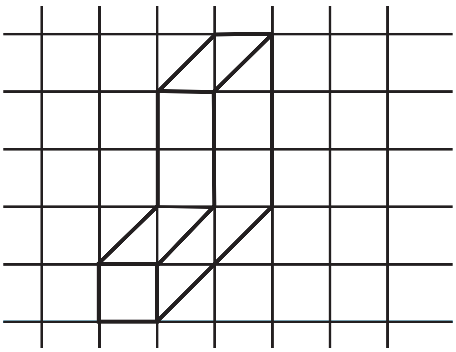
1. Use isometric dot paper and make an isometric sketch for each one of the given shapes:



(i)



(ii)



(iii)

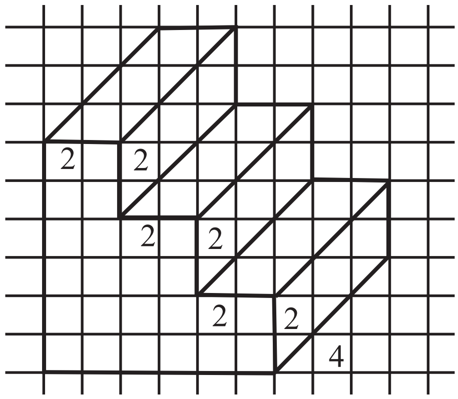
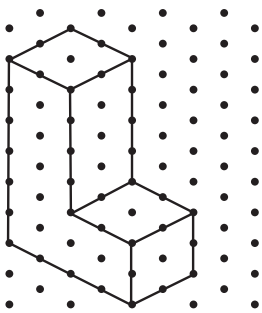
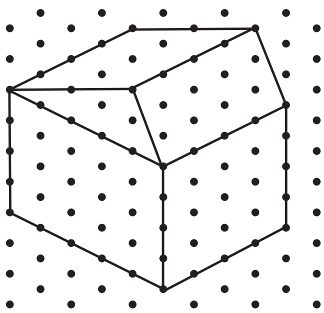


Fig 13.15

(iv)

2. The dimensions of a cuboid are 5 cm, 3 cm and 2 cm. Draw three different isometric sketches of this cuboid.
3. Three cubes each with 2 cm edge are placed side by side to form a cuboid. Sketch an oblique or isometric sketch of this cuboid.
4. Make an oblique sketch for each one of the given isometric shapes:

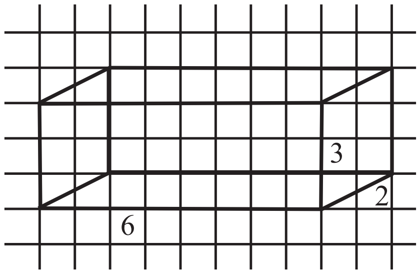




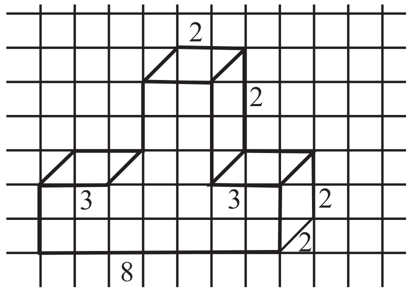
(i) 'పొడవు'? (ii) 'వెడల్పు'? (iii) 'ఎత్తు'? ఈ ప్రమాణాలు ఏటవాలు రేఖాచిత్రంలో పేర్కొనిన ప్రమాణాలతో సరిపోతాయా ?

అభ్యాసం 13.2

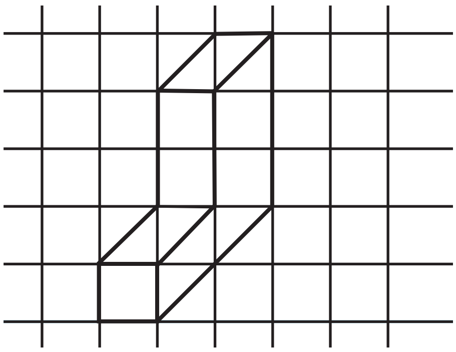
1. కింద ఇచ్చిన ఆకారాలకు తుల్య బిందు కాగితాన్ని ఉపయోగించి తుల్య రేఖా చిత్రాలను గీయండి.



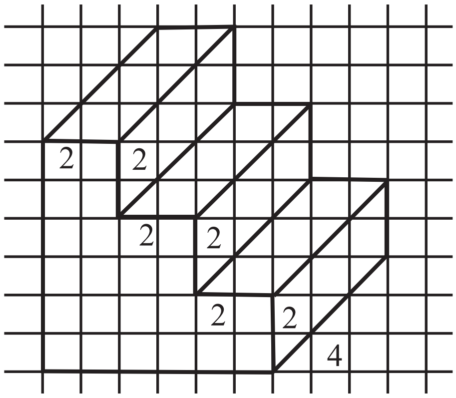
(i)



(ii)



(iii)



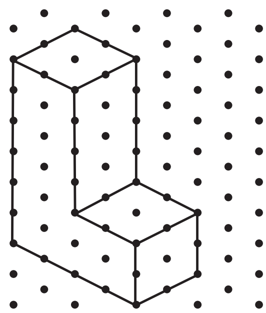
(iv)

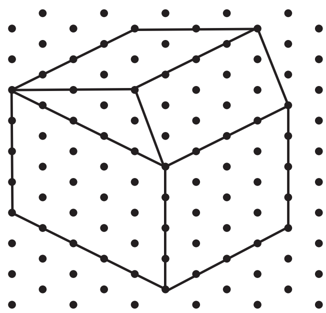
పటం 13.15

2. ఒక దీర్ఘ ఘనం కొలతలు 5.సెం.మీ., 3సెం. మీ. మరియు 2 సెం.మీ. దీనికి మూడు విభిన్న తుల్య రేఖా చిత్రాలను గీయండి.

3. 2 సెం.మీ అంచుగా గల మూడు ఘనములు వరుసగా ఒకదాని పక్కన ఒకటి ఉంచబడ్డాయి అప్పుడు ఏర్పడిన దీర్ఘఘనానికి ఏటవాలు రేఖా చిత్రము లేదా తుల్య రేఖా చిత్రాన్ని గీయండి.

4. కింద ఇవ్వబడిన తుల్యరేఖా చిత్రాలకు ఏటవాలు రేఖాచిత్రాలను గీయండి.





5. Give (i) an oblique sketch and (ii) an isometric sketch for each of the following:

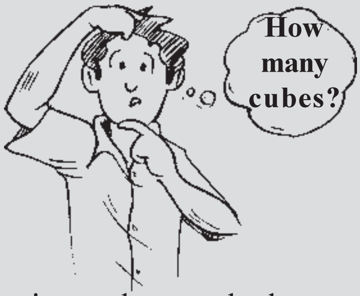
(a) A cuboid of dimensions 5 cm, 3 cm and 2 cm. (Is your sketch unique?)

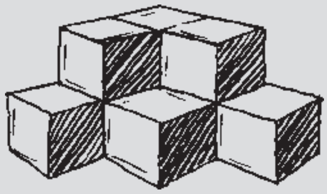
(b) A cube with an edge 4 cm long.

An isometric sheet is attached at the end of the book. You could try to make on it some cubes or cuboids of dimensions specified by your friend.

13.4.3 Visualising Solid Objects

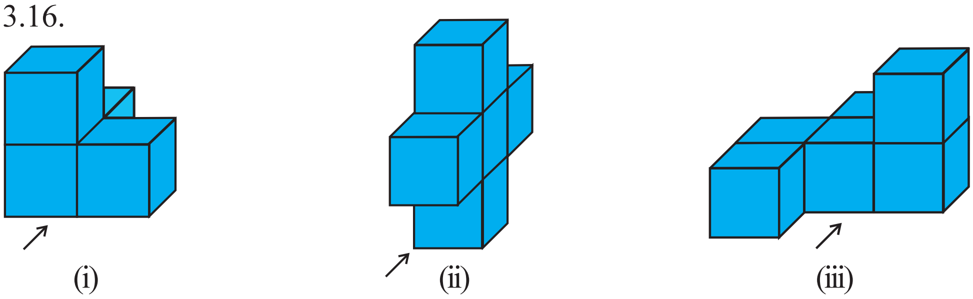
DO THIS





Sometimes when you look at combined shapes, some of them may be hidden from your view.

Here are some activities you could try in your free time to help you visualise some solid objects and how they look. Take some cubes and arrange them as shown in Fig 13.16.



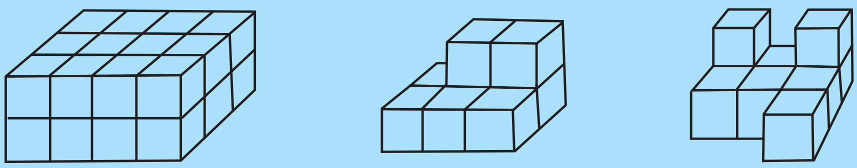
(i) (ii) (iii)

Fig 13.16

Now ask your friend to guess how many cubes there are when observed from the view shown by the arrow mark.

TRY THESE

Try to guess the number of cubes in the following arrangements (Fig 13.17).



(i) (ii) (iii)

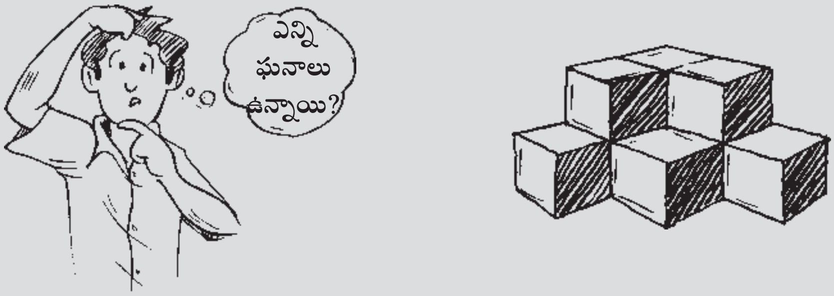
Fig 13.17

5. కింద ఇచ్చిన ఆకారాలకు ఏటవాలు రేఖా చిత్రం మరియు తుల్యా రేఖా చిత్రాలను గీయండి.
   (a) 5 సెం.మీ 3 సెం.మీ 2 సెం.మీ కొలతలు గల ఒక దీర్ఘ ఘనము (ఇలా మీకు ఒకటే చిత్రం ఏర్పడుతుందా? ఆలోచించండి)
   (b) అంచు 4 సెం.మీ కొలత గల ఘనం.

చివరలో తుల్య బిందు కాగితం ఇవ్వబడినది. మీ స్నేహితుడు పేర్కొన్న ఘనాలు లేక దీర్ఘఘనాలు యొక్క ఆకారాలను దానిపై తయారు చేయడానికి మీరు ప్రయత్నించవచ్చును.

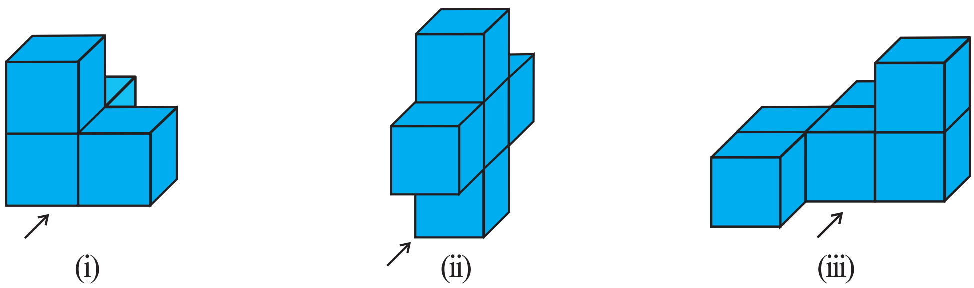
13.4.3 ఘన వస్తువుల దృశ్యీకరణ

ఇది చేయండి



కొన్ని సందర్భాలలో ఆకారాల కూర్పులను గమనిస్తే కొన్ని ఆకారాలు దాగి ఉండి మనకు కనపడకపోవచ్చు.

అటువంటి ఆకారాలను నిశితంగా పరిశీలించి అర్థం చేసుకోవడానికి ఇక్కడ కొన్ని కృత్యాలు ఇవ్వబడ్డాయి. కొన్ని ఘనాలను తీసుకొని కింది పటాలలో పటం 13.16.చూపినట్లు అమర్చండి.

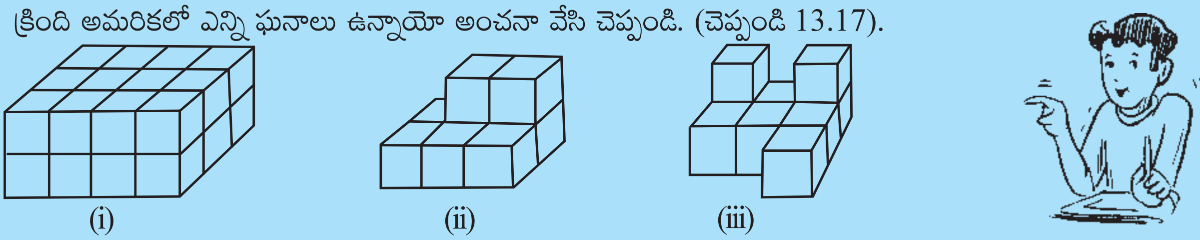


పటం 13.16

బాణం గుర్తు ద్వారా చూపించబడిన వైపు నిశితంగా పరిశీలించి ఎన్ని ఘనాలు ఉన్నాయో మీ స్నేహితుడిని ఊహించి చెప్పమనండి

ప్రయత్నించండి

క్రింది అమరికలో ఎన్ని ఘనాలు ఉన్నాయో అంచనా వేసి చెప్పండి. (చెప్పండి 13.17).



పటం 13.17

Such visualisation is very helpful. Suppose you form a cuboid by joining such cubes. You will be able to guess what the length, breadth and height of the cuboid would be.

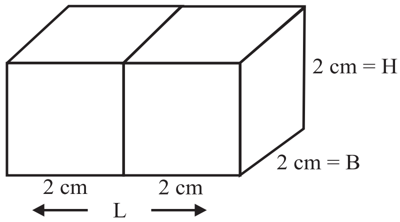


Fig 13.18

Example 2 If two cubes of dimensions 2 cm by 2cm by 2cm are placed side by side, what would the dimensions of the resulting cuboid be?

Solution As you can see (Fig 13.18) when kept side by side, the length is the only measurement which increases, it be comes 2 + 2 = 4 cm.

The breadth = 2 cm and the height = 2 cm.

Try These

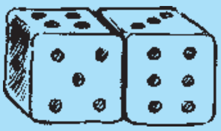


Fig 13.19

1. Two dice are placed side by side as shown: Can you say what the total would be on the face opposite to

   (a) 5 + 6 (b) 4 + 3

   (Remember that in a die sum of numbers on opposite faces is 7)
2. Three cubes each with 2 cm edge are placed side by side to form a cuboid. Try to make an oblique sketch and say what could be its length, breadth and height.

13.5 Viewing Different Sections of a Solid

Now let us see how an object which is in 3-D can be viewed in different ways.

13.5.1 One Way to View an Object is by Cutting or Slicing

Slicing game

Here is a loaf of bread (Fig 13.20). It is like a cuboid with a square face. You 'slice' it with a knife.

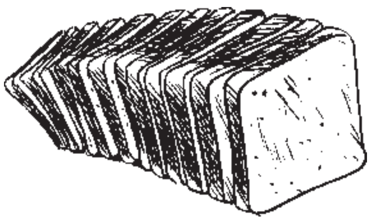


Fig 13.20

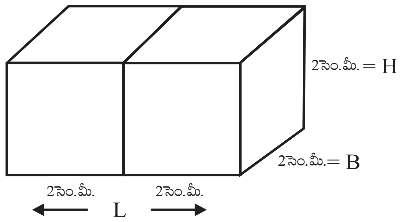
When you give a 'vertical' cut, you get several pieces, as shown in the Figure 13.20. Each face of the piece is a square! We call this face a **'cross-section'** of the whole bread. The cross section is nearly a square in this case.

Beware! If your cut is not 'vertical' you may get a different cross section! Think about it. The boundary of the cross-section you obtain is a plane curve. Do you notice it?

A kitchen play

Have you noticed cross-sections of some vegetables when they are cut for the purposes of cooking in the kitchen? Observe the various slices and get aware of the shapes that result as cross-sections.

ఇటువంటి దృశ్యీకరణ ఏర్పరచుకోవడం మనకు చాలా ఉపయోగకరం. ఉదాహరణకు మీరు కొన్ని ఘనాలను పక్కపక్కనే ఉంచి ఒక దీర్ఘ ఘనాన్ని తయారు చేసారనుకుందాం. ఆ దీర్ఘఘనానికి పొడవు, వెడల్పు, ఎత్తు ఎంత ఉంటాయో మీరు అంచనా వేయగలుగుతారు.



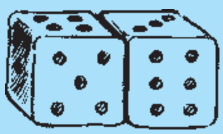
పటం 13.18

ఉదాహరణ 2: 2 సెం.మీ, 2 సెం.మీ, 2 సెం.మీ కొలతలు గల రెండు ఘనాలు పక్కపక్కనే ఉంచగా ఏర్పడిన దీర్ఘఘనము కొలతలు ఎంత ఉంటాయి?

సాధన: రెండు ఘనాలు ప్రక్క ప్రక్కన ఉంచినప్పుడు కేవలం పొడవు మాత్రమే పెరగడాన్ని మీరు గమనిస్తారు (పటం 13.18) పొడవు = 2 + 2 = 4 సెం.మీ.

వెడల్పు = 2 సెం.మీ. మరియు పొడవు = 2 సెం.మీ.

ప్రయత్నించండి


పటం 13.19

1. పటంలో చూపినట్లు రెండు సమఘనాకార పాచికలు పక్క పక్కన ఉంచబడ్డాయి. ఇవ్వబడిన ముఖాలకు వ్యతిరేక ముఖాలమీద ఉన్న అంకెల మొత్తం మీరు చెప్పగలరా?

   (a) 5 + 6 (b) 4 + 3

   (ఒక సమఘనాకార పాచికలో వ్యతిరేక ముఖాలపై ఉన్న అంకెల మొత్తం 7 అని గుర్తు చేసుకోండి.)

2. 2 సెం.మీ. అంచు గల మూడు సమ ఘనాకార పాచికలను ఒక దాని పక్కన ఒకటి అమర్చగా ఒక దీర్ఘ ఘనం ఏర్పడింది. దీనికి ఏటవాలు చిత్రం గీయడానికి ప్రయత్నించండి. దాని పొడవు, వెడల్పు, ఎత్తులను కనుగొనండి.

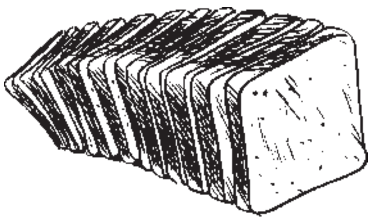
13.5 ఒక ఘనం యొక్క వివిధ భాగాలను చూచుట

ఇప్పుడు మనం ఒక త్రిమితీయ ఆకారంలో ఉన్న ఒక వస్తువును ఎన్ని రకాలుగా, ఎలా చూడవచ్చునో నేర్చుకుందాం.

13.5.1 ఇచ్చిన వస్తువును అడ్డంగా లేదా పలుచని ముక్కలుగా కోసం చూడటం ఒక పద్ధతి

పలుచని ముక్కలుగా కత్తిరించే ఆట

ఇక్కడ ఒక రొట్టెఉంది. (పటం 13.20) చూపిన విధంగా ఇది చతురస్రాకార ముఖం గల ఒక దీర్ఘఘనంలా ఉంది.దీనిని చాకుతో పలుచని ముక్కలుగా కోయండి. నిలువుగా కోసినప్పుడు పటంలో చూపినట్లు అనేక ముక్కలు ఏర్పడతాయి. ప్రతి ముక్కయొక్క ముఖం ఒక చతురస్రం. ఈ ముఖాన్ని మనం మొత్తం రొట్టె యొక్క ఒక అడ్డుకోత అంటాము. అడ్డుకోత ఇంచుమించుగా ఒక చతురస్రం.


పటం 13.20

మీరు చేసే ఈ కోత నిలువు కాకపోతే ఉంటే ఏర్పడే అడ్డుకోత వేరుగా ఏర్పడే ప్రమాదం ఉంది. దాని గురించి ఆలోచించండి. ఇలా ఏర్పడిన నిలువు కోత అంచు ఒక సమతల వక్రం అనే విషయాన్ని మీరు గమనించారా?

ఒక వంటింటి ఆట

కొన్ని కూరగాయలను వంటగదిలో వంట చేయడానికి తరిగినప్పుడు ఏర్పడే వాటి అడ్డుకోతను మీరు గమనించారా? వివిధ రకాల ముక్కలను పరిశీలించి ఏర్పడే అడ్డుకోతలను వాటి ఆకారాలను తెలుసుకోండి.

Play this

Make clay (or plasticine) models of the following solids and make vertical or horizontal cuts. Draw rough sketches of the cross-sections you obtain. Name them wherever you can.

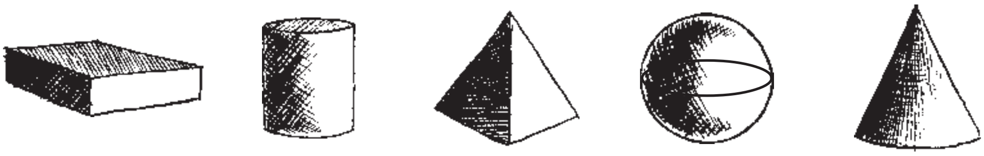


Fig 13.21

EXERCISE 13.3

1. What cross-sections do you get when you give a
   (i) vertical cut (ii) horizontal cut

   to the following solids?

   (a) A brick (b) A round apple (c) A die

   (d) A circular pipe (e) An ice cream cone

13.5.2 Another Way is by Shadow Play

A shadow play

Fig 13.22

Shadows are a good way to illustrate how three-dimensional objects can be viewed in two dimensions. Have you seen a **shadow play**? It is a form of entertainment using solid articulated figures in front of an illuminated back-drop to create the illusion of moving images. It makes some indirect use of ideas in Mathematics.

You will need a source of light and a few solid shapes for this activity. (If you have an overhead projector, place the solid under the lamp and do these investigations.)

Fig 13.23

Keep a torchlight, *right in front of* a Cone. What type of shadow does it cast on the screen? (Fig 13.23)

The solid is three-dimensional; what is the dimension of the shadow?

If, instead of a cone, you place a cube in the above game, what type of shadow will you get?

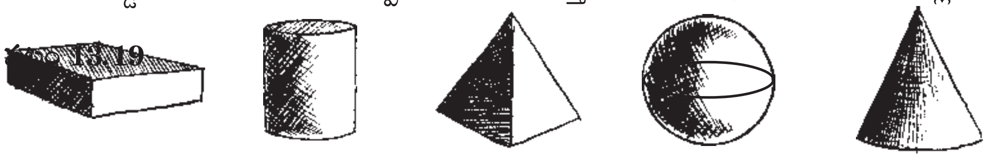
Experiment with different positions of the source of light and with different positions of the solid object. Study their effects on the shapes and sizes of the shadows you get.

Here is another funny experiment that you might have tried already: Place a circular plate in the open when the Sun at the noon time is just *right above* it as shown in Fig 13.24 (i). What is the shadow that you obtain?

(i)

ఆడండి

కింద ఇచ్చిన ఘనాలకు బంక మట్టితో (లేదా ప్లాస్టిసైన్) నమూనాలు తయారు చేయండి. వాటిని నిలువుగా మరియు అడ్డంగా కోయండి. ఇలా ఏర్పడిన కోతలకు చిత్తు పటాలను గీసి, తెలిసిన వాటికి పేర్లు రాయండి.



పటం 13.19

అభ్యాసం 13.3

1. కింద ఇచ్చిన ఘనాలకు

   (i) నిలువుకోత మరియు (ii) అడ్డుకోత చేయగా ఏమి ఏర్పడతాయి?

   (a) ఒక ఇటుక (b) ఒక గుండ్రని ఆపిల్ (c) ఒక పాచిక

   (d) ఒక స్థూపాకార గొట్టం (e) శంకు ఆకృతిలో ఉన్న ఐస్‌క్రీమ్ గొట్టం

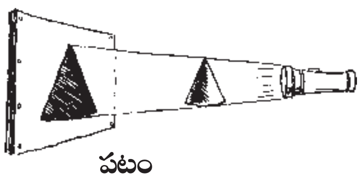
13.5.2 నీడలతో ఆడటం మరొక పద్ధతి

ఒక నీడతో ఆట

త్రిమితీయ ఆకారాలకు చెందిన వస్తువులను ద్విమితీయపటాలుగా చూడటానికి వాటి నీడలు చాలా ఉపయోగపడతాయి. మీరు ఎప్పుడైనా **నీడతో ఆట** చూసారా? కాంతి పుంజ మార్గంలో ఘనాకారాలను రకరకాలుగా కదుపుతూ నీడలు కదులుతున్నట్లు భ్రాంతి కలిగించే ఒక రకమైన వినోద సాధనము ఈ నీడ చిత్రాలతో ఆట. దీనిలో గణిత భావనల పరోక్ష వినియోగం ఉంటుంది.

పటం 13.22

ఈ కృత్యము చేయడానికి మీకు ఒక కాంతి జనకము మరియు ఘనాకార వస్తువులు కావాలి. (మీకు ఓవర్ హెడ్ ప్రొజెక్టర్ వుంటే, మన వస్తువులను దీపము క్రింద వుంచి ఈ పరిశోధనలు చేయుము.)



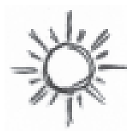
పటం 13.23

టార్చిలైటు *కాంతికి ఎదురుగా* ఒక శంకువును వుంచిన, తెరపై ఏ రకమైన నీడ ఏర్పడుతుంది? (పటం 13.23).

ఘనాకార వస్తువు త్రిమితీయమైనది. మరి నీడ సంగతి ఏమిటి?

శంకువుకు బదులుగా, ఒక సమఘనాన్ని వుంచితే ఏ విధమైన నీడ ఏర్పడుతుంది?

కాంతి జనక స్థానాన్ని ఘనాకార వస్తువు స్థానాన్ని మార్చుతూ ప్రయోగాలు చేయండి. ఏర్పడిన నీడలలోని వస్తువుల ఆకారాలు, పరిమాణాలపై ఈ స్థాన మార్పుల ప్రభావాన్ని అధ్యయనం చేయండి.



మీరు ఇప్పటికే ఈ వినోదాత్మక ప్రయోగాన్ని ప్రయత్నించి ఉంటారు. పటం 13.24 (i) లో చూపినట్లు, మధ్యాహ్న సమయంలో సూర్యుడు *దాని పైన* ఉన్నప్పుడు ఒక గుండ్రని ప్లేట్‌ను ఎండ సూర్యకిరణాల మార్గంలో ఉంచండి. ఏటువంటి నీడ ఏర్పడటం మీరు గమనించారు?

(i)

Will it be same during

(a) forenoons? (b) evenings?

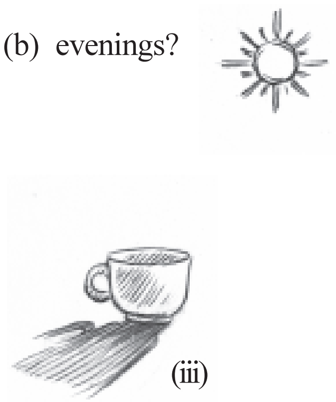
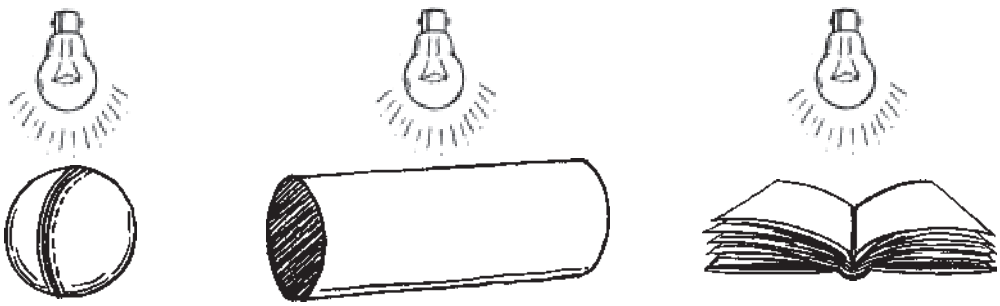


Fig 13.24 (i) - (iii)

Study the shadows in relation to the position of the Sun and the time of observation.

EXERCISE 13.4

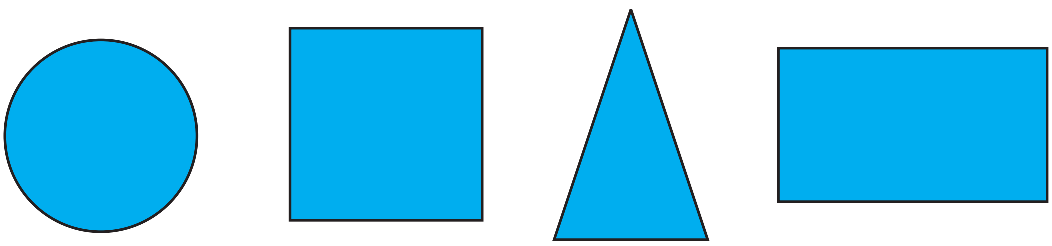
1. A bulb is kept burning just right above the following solids. Name the shape of the shadows obtained in each case. Attempt to give a rough sketch of the shadow. (You may try to experiment first and then answer these questions).



A ball (i) | A cylindrical pipe (ii) | A book (iii)

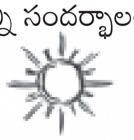
2. Here are the shadows of some 3-D objects, when seen under the lamp of an overhead projector. Identify the solid(s) that match each shadow. (There may be multiple answers for these!)

A circle | A square | A triangle | A rectangle

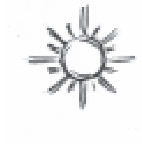


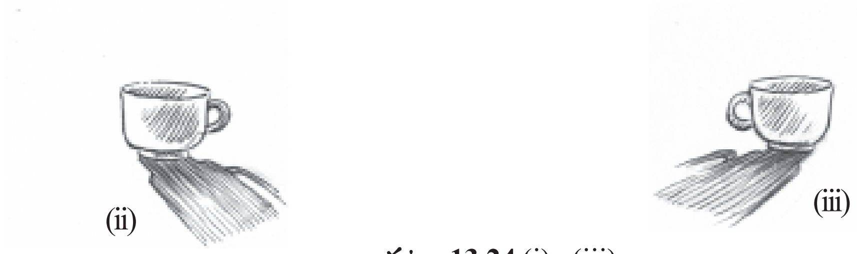
(i) | (ii) | (iii) | (iv)

అన్ని సందర్భాలలో సమానంగా ఉన్నాయా?



(a) ఉదయం? (b) సాయంత్రం?





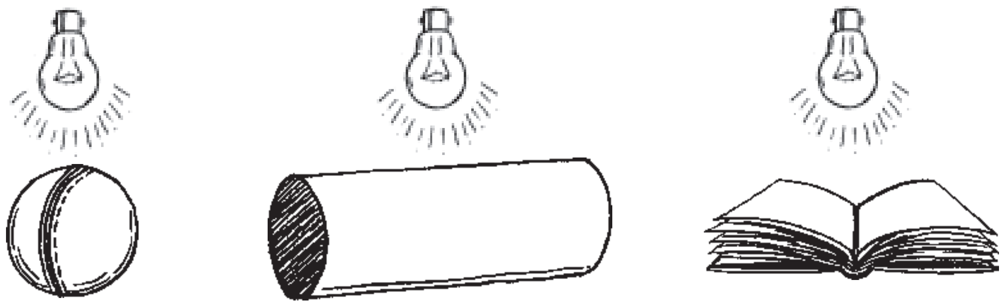
(ii) (iii)

పటం 13.24 (i) - (iii)

సూర్యుడు వున్న స్థానము, మనము పరిశీలనా కాలాలను దృష్టిలో వుంచుకొని నీడలను అధ్యయనం చేయండి.

అభ్యాసం 13.4

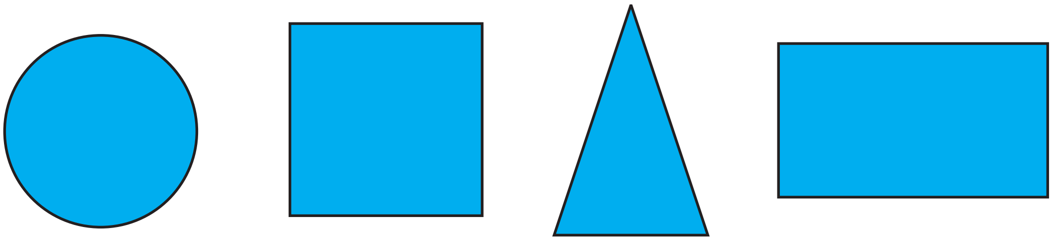
1. కింద యిచ్చిన ఘనాకార వస్తువుల పై ఒక విద్యుత్ బల్బు వెలుగుతూ వుంది. అపుడు ఏర్పడిన నీడల ఆకారాల పేర్లను తెలపండి. ఆ నీడ చిత్రాల చిత్తు పటాలను గీయడానికి ప్రయత్నించండి. (మొదట వీటిని ప్రయోగం చేయడానికి ప్రయత్నించి తరువాత క్రింది ప్రశ్నలకు సమాధానాలు వ్రాయండి).



బంతి (i) | ఒక స్థూపాకార గొట్టం (ii) | ఒక పుస్తకం (iii)

2. కింద కొన్ని త్రిమితీయ వస్తువులను ఓవర్ హెడ్ ప్రొజెక్టర్ దీపం క్రింద పెట్టగా ఏర్పడిన నీడలు యివ్వబడ్డాయి. ప్రతీ నీడ ఏర్పడటానికి కారణమయ్యే త్రిమితీయ వస్తువులను గుర్తుపట్టండి (వీటికి అనేక సమాధానాలు వుండవచ్చును)

ఒక వృత్తం | ఒక చతురస్రం | ఒక త్రిభుజం | ఒక దీర్ఘచతురస్రం



(i) (ii) (iii) (iv)

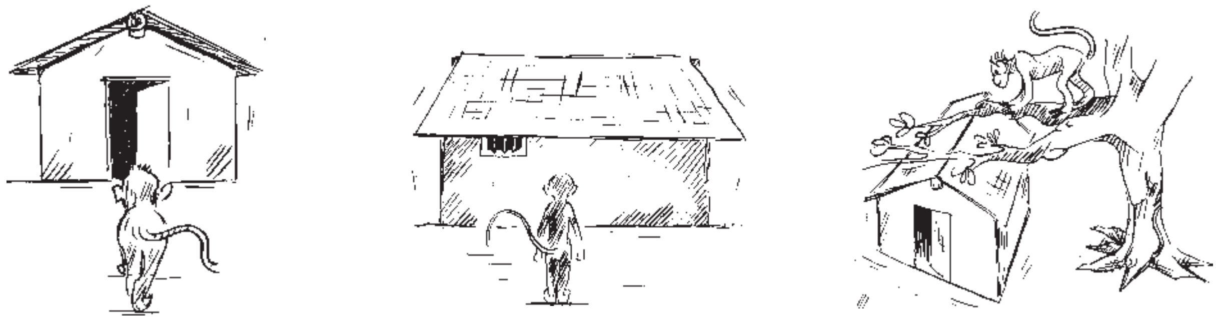
3. Examine if the following are true statements:

(i) The cube can cast a shadow in the shape of a rectangle.

(ii) The cube can cast a shadow in the shape of a hexagon.

13.5.3 A Third Way is by Looking at it from Certain Angles to Get Different Views

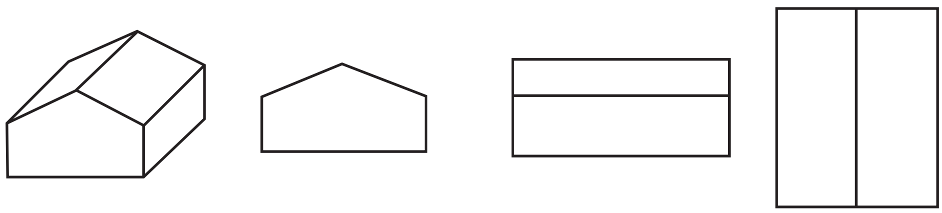
One can look at an object standing in front of it or by the side of it or from above. Each time one will get a different view (Fig 13.25).



Front view   Side view   Top view

Fig 13.25

Here is an example of how one gets different views of a given building. (Fig 13.26)



Building   Front view   Side view   Top view

Fig 13.26

You could do this for figures made by joining cubes.

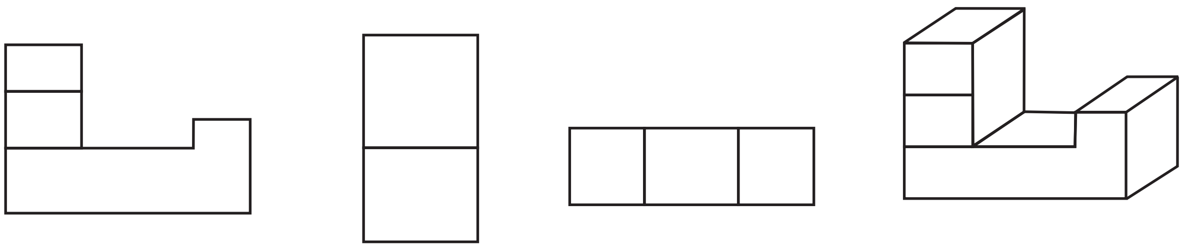


Fig 13.27

Try putting cubes together and then making such sketches from different sides.

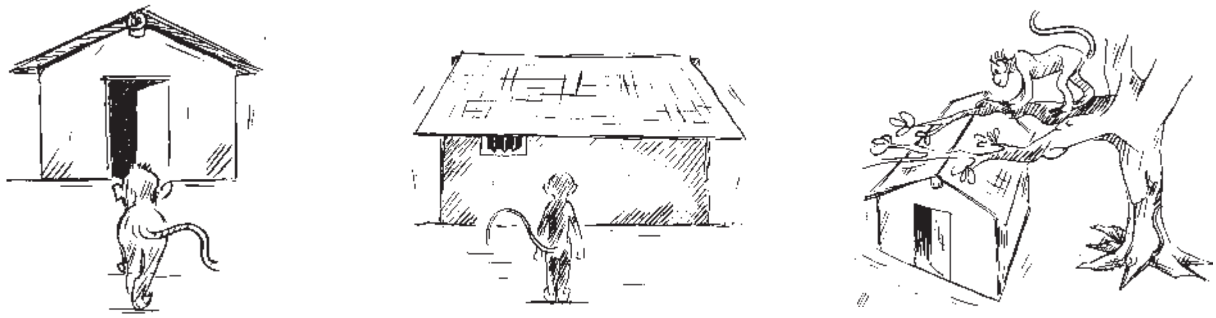
3. దిగువ పేర్కొన్న వాక్యాలు నిజమా కాదా అని పరిశీలించండి.

(i) ఘనము దీర్ఘచతురస్రాకార నీడను ఏర్పరచును.

(ii) ఘనము షడ్భుజాకార నీడను ఏర్పరచును.

13.5.3 మూడవ పద్ధతి ఆకారాన్ని వివిధ కోణాల నుండి చూసి వివిధ వీక్షణాలను పొందడం

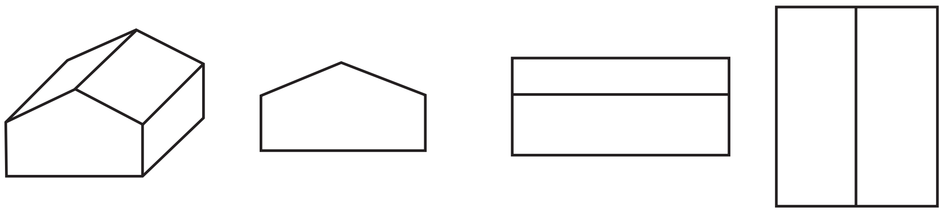
ఒక వస్తువు దాని ముందు లేదా దాని పక్కన లేదా పై నుండి చూడవచ్చు. ప్రతిసారి ఒక భిన్నమైన దృశ్యాన్ని పొందుతారు. (పటం 13.25)



ముందు నుండి చూసినప్పుడు   పక్క నుండి చూసినప్పుడు   పై నుండి చూసినప్పుడు

పటం 13.25

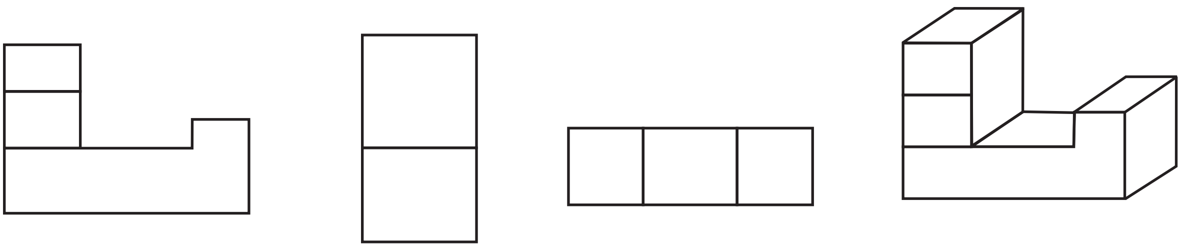
ఇచ్చిన భవనం యొక్క విభిన్న వీక్షణాలను పొందటానికి ఒక ఉదాహరణ. (పటం 13.26)



భవనం   ముందు నుండి చూసినప్పుడు   పక్క నుండి చూసినప్పుడు   పై నుండి చూసినప్పుడు

పటం 13.26

ఘనాలను కలపడం ద్వారా ఈ పటాలను పొందవచ్చును.



పటం 13.27

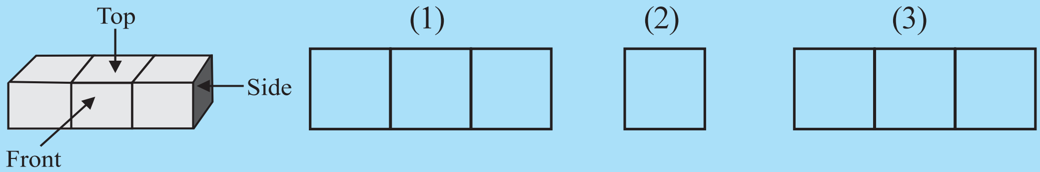
ఘనాలన్నింటిని కలిపి ఉంచి ఆ పై వివిధ వైపుల నుండి ఇటువంటి పటాలను తయారుచేయండి.

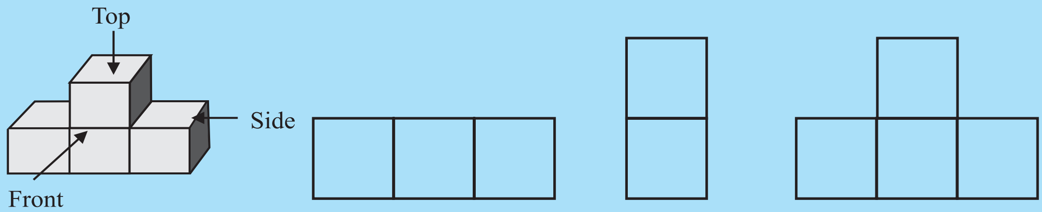
TRY THESE

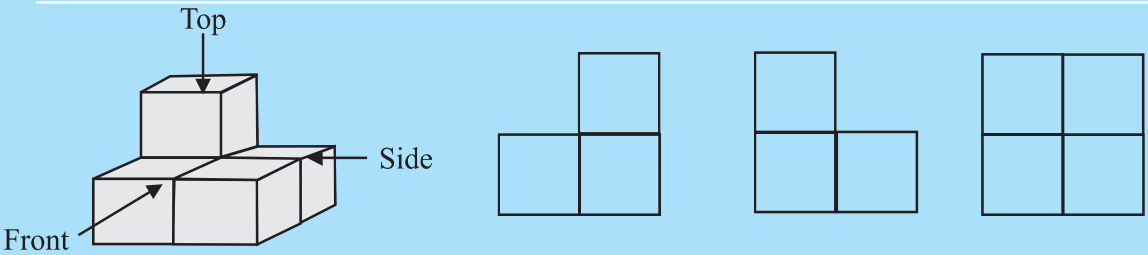
1. For each solid, the three views (1), (2), (3) are given. Identify for each solid the corresponding top, front and side views.

Solid **Its views**

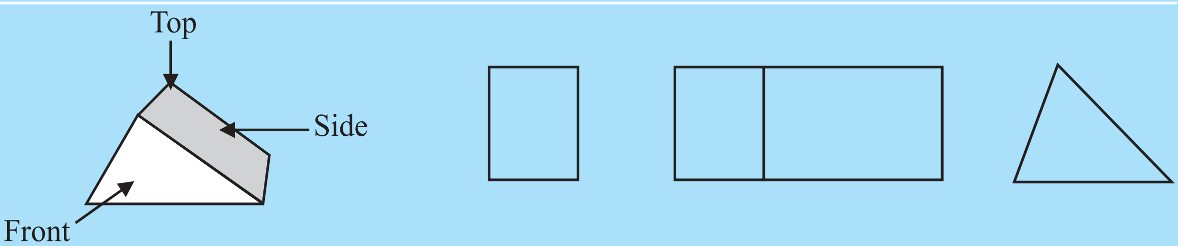
(1) (2) (3)



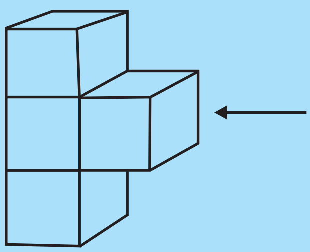




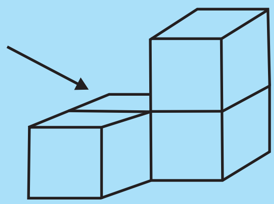
5 Cubes



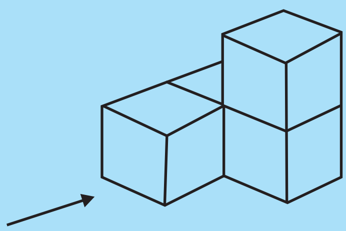
2. Draw a view of each solid as seen from the direction indicated by the arrow.



(i)



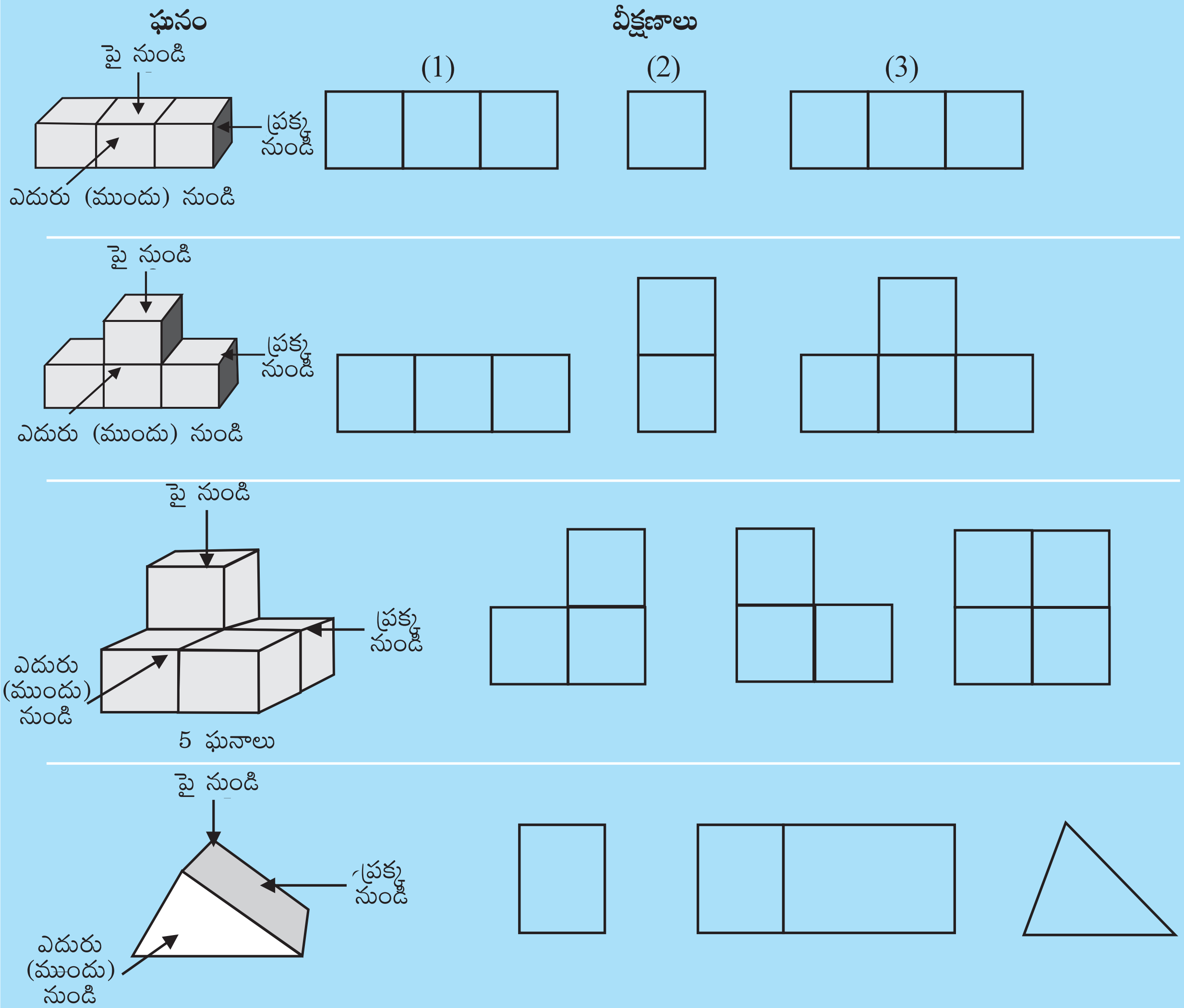
(ii)



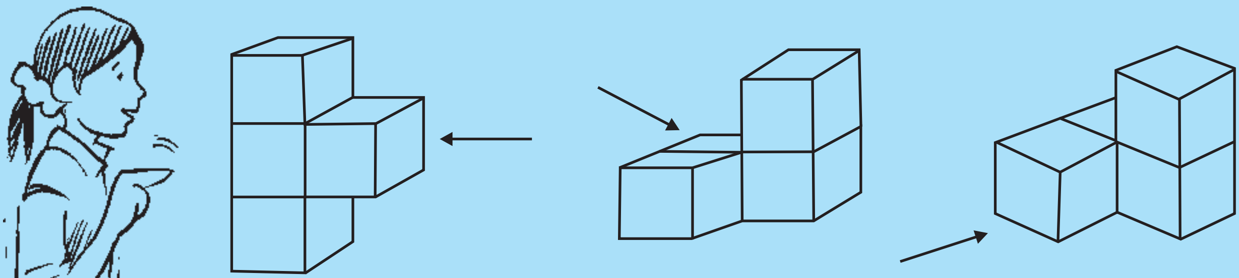
(iii)

ప్రయత్నించండి

1. ప్రతి ఘనానికి మూడు వీక్షణాలు (1), (2), (3) ఇవ్వబడ్డాయి. ప్రతి ఘనానికి సంబంధించిన పై నుండి, ఎదురు మరియు ప్రక్క వీక్షణాలను గుర్తించండి.



2. బాణం గుర్తు ద్వారా సూచించబడ్డ దిశ నుండి చూసి ప్రతి ఘనం యొక్క పటాన్ని గీయండి.



(i) (ii) (iii)

What have We Discussed?

1. The circle, the square, the rectangle, the quadrilateral and the triangle are examples of **plane figures**; the cube, the cuboid, the sphere, the cylinder, the cone and the pyramid are examples of **solid shapes**.
2. Plane figures are of **two-dimensions** (**2-D**) and the solid shapes are of three-dimensions (**3-D**).
3. The corners of a solid shape are called its **vertices**; the line segments of its skeleton are its **edges**; and its flat surfaces are its **faces**.
4. A **net** is a skeleton-outline of a solid that can be folded to make it. The same solid can have several types of nets.
5. Solid shapes can be drawn on a flat surface (like paper) realistically. We call this **2-D representation of a 3-D solid**.
6. Two types of sketches of a solid are possible:
   (a) An **oblique sketch** does not have proportional lengths. Still it conveys all important aspects of the appearance of the solid.
   (b) An **isometric sketch** is drawn on an isometric dot paper, a sample of which is given at the end of this book. In an isometric sketch of the solid the measurements kept proportional.
7. **Visualising solid shapes** is a very useful skill. You should be able to see 'hidden' parts of the solid shape.
8. Different sections of a solid can be viewed in many ways:
   (a) One way is to view by cutting or **slicing** the shape, which would result in the cross-section of the solid.
   (b) Another way is by observing a 2-D **shadow** of a 3-D shape.
   (c) A third way is to look at the shape from different angles; the **front-view**, the **side-view** and the **top-view** can provide a lot of information about the shape observed.

మనం ఏమి చర్చించాము?

1. వృత్తము, చతురస్రము, దీర్ఘచతురస్రము, చతుర్భుజము మరియు త్రిభుజము మొదలైనవి **సమతల పటాలు** ఉదాహరణలు. సమఘనం, దీర్ఘఘనం, గోళం, స్థూపం, శంకువు మరియు పిరమిడ్ అనేవి **ఘనాకృతులకు** ఉదాహరణలు.
2. సమతల పటాలు **ద్విమితీయం** (**2-D**)గానూ, ఘనాకృతులు త్రిమితీయం (**3-D**) గానూ ఉంటాయి.
3. ఘనాకృతుల మూలాలను **శీర్షాలు** అని, ఘనం యొక్క ఆకారాన్ని ఏర్పరచు రేఖా ఖండాలను **అంచులని**, సమతలాలను **ముఖాలని** అంటారు.
4. ఒక ఘనాన్ని దాని అంచులు వెంబడి మడవగా ఏర్పడిన దానిని వల రూపము అంటారు. ఒకే ఘనానికి అనేక రూపాల్లో వలలు ఉంటాయి.
5. ఘనాకృతులను సమతలాలు (కాగితం వంటివి) పైన వాస్తవికంగా గీయవచ్చు. దీనిని **త్రిమితీయ** (**3-D**) **ఆకారాల ద్విమితీయ** (**2-D**) **రూపాలు** అంటారు.
6. రెండు పద్ధతుల్లో ఘనాకారాలను గీయడం సాధ్యం.
   (a) **ఏటవాలు రేఖాచిత్రాలలో** పొడవులు అనుపాతంలో ఉండవు. కానీ ఇది ఘనరూపానికి సంబంధించి అనేక అంశాలను తెలియజేస్తుంది.
   (b) **తుల్య రేఖాచిత్రాలను** తుల్య బిందు కాగితం పైన గీస్తాము. (పుస్తకం చివర ఒక నమూనా ఇవ్వబడినది) ఘనాల తుల్య రేఖాచిత్రాలలో కొలతలు అనుపాతంలో ఉంటాయి.
7. **ఘన వస్తువులకు ఊహాచిత్రాల నేర్పరచడం** చాలా ఉపయోగకరమైన నైపుణ్యం. ఘనాకృతులలో దాగివున్న భాగాలను కూడా చూడవచ్చు.
8. ఒక ఘనము యొక్క వివిధ భాగాలను చూపుట
   (a) ఇచ్చిన వస్తువును అడ్డంగా **పలుచని ముక్కలుగా** కోసి చూడటం ఒక పద్ధతి. దానివలన ఘనం యొక్క అడ్డు కొలతను చూడవచ్చు.
   (b) త్రిమితీయ (**3-D**) ఆకారాల **నీడను** ద్విమితీయ (**2-D**) ఆకారంలో గమనించడం మరొక మార్గం.
   (c) వివిధ కోణాల నుండి ఆకారాన్ని చూడడం మూడో మార్గం. **ముందు వీక్షణం, పక్క నుండి వీక్షణం** మరియు **పై నుండి వీక్షణాలు** చాలా సమాచారాన్ని అందించగలవు.

ANSWERS

EXERCISE 8.1

1. (i) $\frac{-2}{3}, \frac{-1}{2}, \frac{-2}{5}, \frac{-1}{3}, \frac{-2}{7}$ (ii) $\frac{-3}{2}, \frac{-5}{3}, \frac{-8}{5}, \frac{-10}{7}, \frac{-9}{5}$

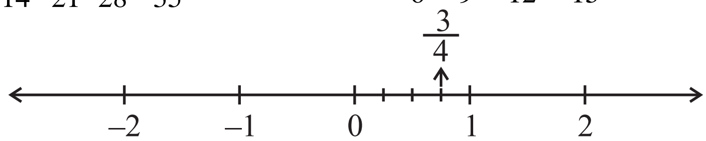
(iii) $\frac{-35}{45}\left(=\frac{-7}{9}\right), \frac{-34}{45}, \frac{-33}{45}\left(=\frac{-11}{15}\right), \frac{-32}{45}, \frac{-31}{45}$ (iv) $\frac{-1}{3}, \frac{-1}{4}, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$

2. (i) $\frac{-15}{25}, \frac{-18}{30}, \frac{-21}{35}, \frac{-24}{40}$ (ii) $\frac{-4}{16}, \frac{-5}{20}, \frac{-6}{24}, \frac{-7}{28}$

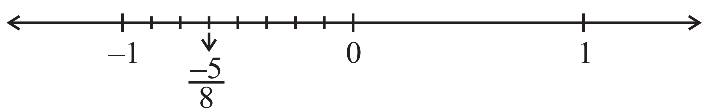
(iii) $\frac{5}{-30}, \frac{6}{-36}, \frac{7}{-42}, \frac{8}{-48}$ (iv) $\frac{8}{-12}, \frac{10}{-15}, \frac{12}{-18}, \frac{14}{-21}$

3. (i) $\frac{-4}{14}, \frac{-6}{21}, \frac{-8}{28}, \frac{-10}{35}$ (ii) $\frac{10}{-6}, \frac{15}{-9}, \frac{20}{-12}, \frac{25}{-15}$ (iii) $\frac{8}{18}, \frac{12}{27}, \frac{16}{36}, \frac{28}{63}$

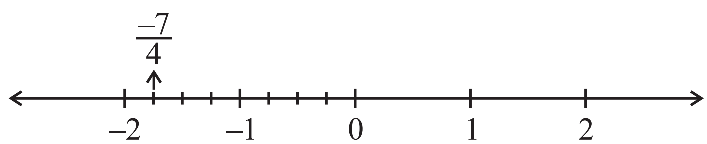
4. (i)



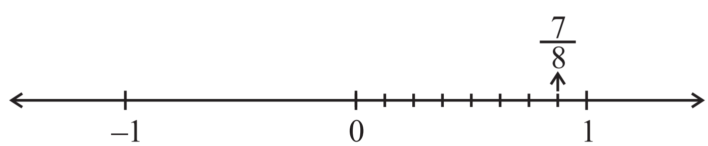
(ii)



(iii)



(iv)



5. P represents $\frac{7}{3}$ Q represents $\frac{8}{3}$ R represents $\frac{-4}{3}$ S represents $\frac{-5}{3}$

6. (ii), (iii), (iv), (v)

7. (i) $\frac{-4}{3}$ (ii) $\frac{5}{9}$ (iii) $\frac{-11}{18}$ (iv) $\frac{-4}{5}$

8. (i) $<$ (ii) $<$ (iii) $=$ (iv) $>$ (v) $<$ (vi) $=$ (vii) $>$

9. (i) $\frac{5}{2}$ (ii) $\frac{-5}{6}$ (iii) $\frac{2}{-3}$ (iv) $\frac{1}{4}$ (v) $-3\frac{2}{7}$

10. (i) $\frac{-3}{5}, \frac{-2}{5}, \frac{-1}{5}$ (ii) $\frac{-4}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{-2}{9}$ (iii) $\frac{-3}{2}, \frac{-3}{4}, \frac{-3}{7}$

జవాబులు

అభ్యాసం 8.1

1. (i) $\frac{-2}{3}, \frac{-1}{2}, \frac{-2}{5}, \frac{-1}{3}, \frac{-2}{7}$ (ii) $\frac{-3}{2}, \frac{-5}{3}, \frac{-8}{5}, \frac{-10}{7}, \frac{-9}{5}$

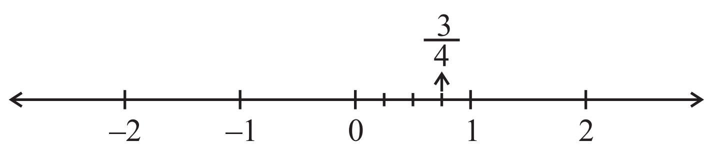
   (iii) $\frac{-35}{45}\left(=\frac{-7}{9}\right), \frac{-34}{45}, \frac{-33}{45}\left(=\frac{-11}{15}\right), \frac{-32}{45}, \frac{-31}{45}$ (iv) $\frac{-1}{3}, \frac{-1}{4}, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$

2. (i) $\frac{-15}{25}, \frac{-18}{30}, \frac{-21}{35}, \frac{-24}{40}$ (ii) $\frac{-4}{16}, \frac{-5}{20}, \frac{-6}{24}, \frac{-7}{28}$

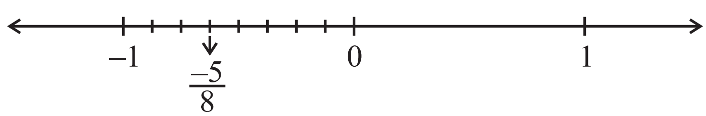
   (iii) $\frac{5}{-30}, \frac{6}{-36}, \frac{7}{-42}, \frac{8}{-48}$ (iv) $\frac{8}{-12}, \frac{10}{-15}, \frac{12}{-18}, \frac{14}{-21}$

3. (i) $\frac{-4}{14}, \frac{-6}{21}, \frac{-8}{28}, \frac{-10}{35}$ (ii) $\frac{10}{-6}, \frac{15}{-9}, \frac{20}{-12}, \frac{25}{-15}$ (iii) $\frac{8}{18}, \frac{12}{27}, \frac{16}{36}, \frac{28}{63}$

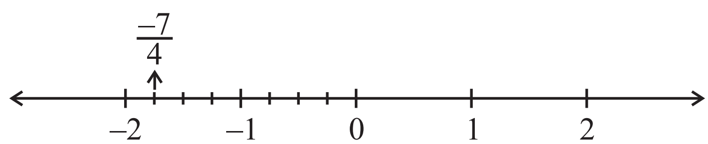
4. (i)



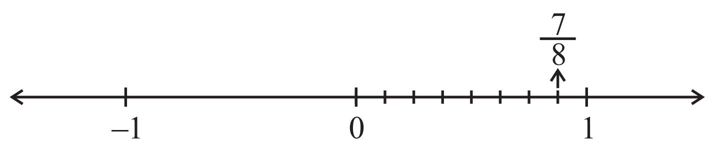
(ii)



(iii)



(iv)



5. P అనేది $\frac{7}{3}$ ను సూచిస్తుంది Q అనేది $\frac{8}{3}$ ను సూచిస్తుంది R అనేది $\frac{-4}{3}$ ను సూచిస్తుంది S అనేది $\frac{-5}{3}$ ను సూచిస్తుంది

6. (ii), (iii), (iv), (v)

7. (i) $\frac{-4}{3}$ (ii) $\frac{5}{9}$ (iii) $\frac{-11}{18}$ (iv) $\frac{-4}{5}$

8. (i) $<$ (ii) $<$ (iii) $=$ (iv) $>$ (v) $<$ (vi) $=$ (vii) $>$

9. (i) $\frac{5}{2}$ (ii) $\frac{-5}{6}$ (iii) $\frac{2}{-3}$ (iv) $\frac{1}{4}$ (v) $-3\frac{2}{7}$

10. (i) $\frac{-3}{5}, \frac{-2}{5}, \frac{-1}{5}$ (ii) $\frac{-4}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{-2}{9}$ (iii) $\frac{-3}{2}, \frac{-3}{4}, \frac{-3}{7}$

Exercise 8.2

1. (i) $\frac{-3}{2}$ (ii) $\frac{34}{15}$ (iii) $\frac{17}{30}$ (iv) $\frac{82}{99}$
   (v) $\frac{-26}{57}$ (vi) $\frac{-2}{3}$ (vii) $\frac{34}{15}$
2. (i) $\frac{-13}{72}$ (ii) $\frac{23}{63}$ (iii) $\frac{1}{195}$ (iv) $\frac{-89}{88}$ (v) $\frac{-73}{9}$
3. (i) $\frac{-63}{8}$ (ii) $\frac{-27}{10}$ (iii) $\frac{-54}{55}$ (iv) $\frac{-6}{35}$ (v) $\frac{6}{55}$
   (vi) 1
4. (i) – 6 (ii) $\frac{-3}{10}$ (iii) $\frac{4}{15}$ (iv) $\frac{-1}{6}$ (v) $\frac{-14}{13}$
   (vi) $\frac{91}{24}$ (vii) $\frac{-15}{4}$

Exercise 9.1

1. (a) 28 cm^2 (b) 15 cm^2 (c) 8.75 cm^2 (d) 24 cm^2 (e) 8.8 cm^2
2. (a) 6 cm^2 (b) 8 cm^2 (c) 6 cm^2 (d) 3 cm^2
3. (a) 12.3 cm (b) 10.3 cm (c) 5.8 cm (d) 1.05 cm
4. (a) 11.6 cm (b) 80 cm (c) 15.5 cm
5. (a 91.2 cm^2 (b) 11.4 cm
6. length of BM = 30cm; length of DL = 42 cm
7. Area of ΔABC = 30 cm^2; length of AD = $\frac{60}{13}$ cm
8. Area of ΔABC = 27 cm^2; length of CE = 7.2 cm

Exercise 9.2

1. (a) 88 cm (b) 176 mm (c) 132 cm
2. (a) 616 mm^2 (b) 1886.5 m^2 (c) $\frac{550}{7}$ cm^2
3. 24.5 m; 1886.5 m^2
4. 132 m; ₹ 528
5. 21.98 cm^2
6. 4.71 m; ₹ 70.65
7. 25.7 cm
8. ₹ 30.14 (approx.)
9. 7 cm; 154 cm^2; 11cm; circle.
10. 536 cm^2
11. 23.44 cm^2
12. 5 cm; 78.5 cm^2
13. 879.20 m^2
14. Yes
15. 119.32 m; 56.52m
16. 200 Times
17. 94.2 cm

అభ్యాసం 8.2

1. (i) $\frac{-3}{2}$ (ii) $\frac{34}{15}$ (iii) $\frac{17}{30}$ (iv) $\frac{82}{99}$

 (v) $\frac{-26}{57}$ (vi) $\frac{-2}{3}$ (vii) $\frac{34}{15}$

2. (i) $\frac{-13}{72}$ (ii) $\frac{23}{63}$ (iii) $\frac{1}{195}$ (iv) $\frac{-89}{88}$ (v) $\frac{-73}{9}$

3. (i) $\frac{-63}{8}$ (ii) $\frac{-27}{10}$ (iii) $\frac{-54}{55}$ (iv) $\frac{-6}{35}$ (v) $\frac{6}{55}$

 (vi) 1

4. (i) – 6 (ii) $\frac{-3}{10}$ (iii) $\frac{4}{15}$ (iv) $\frac{-1}{6}$ (v) $\frac{-14}{13}$

 (vi) $\frac{91}{24}$ (vii) $\frac{-15}{4}$

అభ్యాసం 9.1

1. (a) 28 సెం.మీ^{2} (b) 15 సెం.మీ^{2} (c) 8.75 సెం.మీ^{2} (d) 24 సెం.మీ^{2} (e) 8.8 సెం.మీ^{2}
2. (a) 6 సెం.మీ^{2} (b) 8 సెం.మీ^{2} (c) 6 సెం.మీ^{2} (d) 3 సెం.మీ^{2}
3. (a) 12.3 సెం.మీ (b) 10.3 సెం.మీ (c) 5.8 సెం.మీ (d) 1.05 సెం.మీ
4. (a) 11.6 సెం.మీ (b) 80 సెం.మీ (c) 15.5 సెం.మీ
5. (a 91.2 సెం.మీ (b) 11.4 సెం.మీ
6. BM పొడవు = 30 సెం.మీ; DL పొడవు = 42 సెం.మీ
7. ΔABC వైశాల్యము = 30 సెం.మీ^{2}; AD పొడవు = $\frac{60}{13}$ సెం.మీ
8. ΔABC వైశాల్యము = 27 సెం.మీ^{2}; CE పొడవు = 7.2 సెం.మీ

అభ్యాసం 9.2

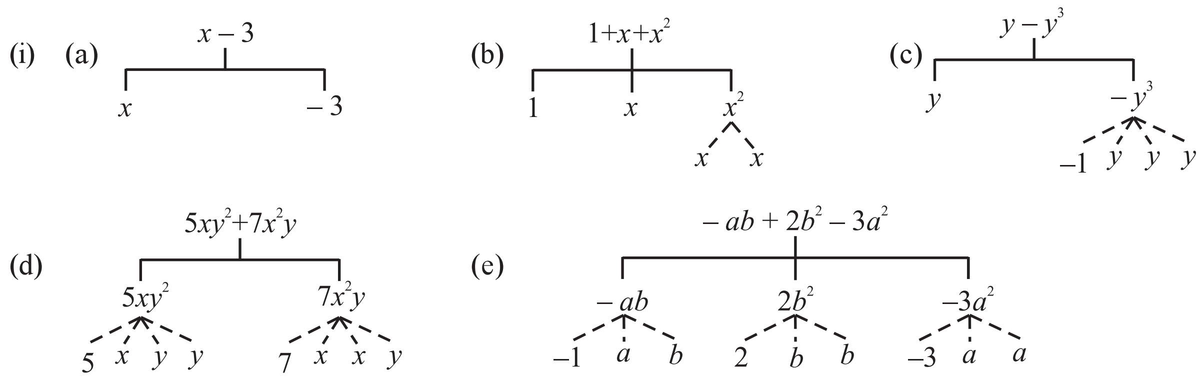
1. (a) 88 సెం.మీ^{2} (b) 176 మి.మీ (c) 132 సెం.మీ
2. (a) 616 మి.మీ^{2} (b) 1886.5 మీ^{2} (c) $\frac{550}{7}$ సెం.మీ^{2}
3. 24.5 మీ; 1886.5 మీ^{2} **4.** 132 మీ; ₹ 528 **5.** 21.98 సెం.మీ^{2}
6. 4.71 మీ; ₹ 70.65 **7.** 25.7 సెం.మీ **8.** ₹ 30.14 (సుమారుగా) **9.** 7 సెం.మీ; 154 సెం.మీ^{2}; 11సెం.మీ; వృత్తము
10. 536 సెం.మీ^{2} **11.** 23.44 సెం.మీ^{2} **12.** 5 సెం.మీ; 78.5 సెం.మీ^{2} **13.** 879.20 మీ^{2}
14. అవును **15.** 119.32 మీ; 56.52మీ **16.** 200 రెట్లు **17.** 94.2 సెం.మీ

Exercise 10.1

1. (i) $y - z$ (ii) $\frac{1}{2}(x+y)$ (iii) z^2 (iv) $\frac{1}{4}pq$ (v) $x^2 + y^2$ (vi) $5 + 3mn$

(vii) $10 - yz$ (viii) $ab - (a + b)$

2. (i)



(ii)

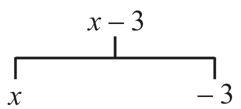
	Expression	Terms	Factors
(a)	$-4x + 5$	$-4x$ 5	$-4, x$ 5
(b)	$-4x + 5y$	$-4x$ $5y$	$-4, x$ $5, y$
(c)	$5y + 3y^2$	$5y$ $3y^2$	$5, y$ $3, y, y$
(d)	$xy + 2x^2y^2$	xy $2x^2y^2$	x, y $2, x, x, y, y$
(e)	$pq + q$	pq q	p, q q
(f)	$1.2ab - 2.4b + 3.6a$	$1.2ab$ $-2.4b$ $3.6a$	$1.2, a, b$ $-2.4, b$ $3.6, a$
(g)	$\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}x$ $\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}, x$ $\frac{1}{4}$
(h)	$0.1p^2 + 0.2q^2$	$0.1p^2$ $0.2q^2$	$0.1, p, p$ $0.2, q, q$

అభ్యాసం 10.1

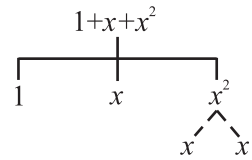
1. (i) $y - z$ (ii) $\frac{1}{2}(x + y)$ (iii) z^2 (iv) $\frac{1}{4}pq$ (v) $x^2 + y^2$ (vi) 5 + 3 మి.మీ.

(vii) $10 - yz$ (viii) ab – (a + b)

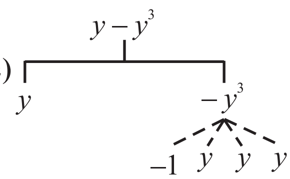
2. (i) (a)



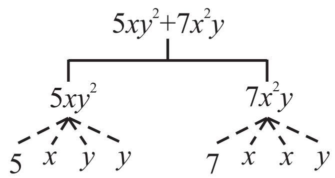
(b)



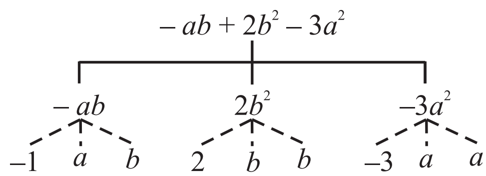
(c)



(d)



(e)



(ii)

	సమాసము	పదాలు	కారణాంకములు
(a)	$-4x + 5$	$-4x$ 5	$-4, x$ 5
(b)	$-4x + 5y$	$-4x$ $5y$	$-4,x$ $5,y$
(c)	$5y + 3y^2$	$5y$ $3y^2$	$5,y$ $3,y,y$
(d)	$xy+2x^2y^2$	xy $2x^2y^2$	x, y $2, x, x, y, y$
(e)	$pq + q$	pq q	p, q q
(f)	$1.2ab-2.4b+3.6a$	$1.2ab$ $-2.4b$ $3.6a$	$1.2,a,b$ $-2.4, b$ $3.6, a$
(g)	$\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}x$ $\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}, x$ $\frac{1}{4}$
(h)	$0.1p^2 + 0.2q^2$	$0.1p^2$ $0.2q^2$	$0.1, p, p$ $0.2, q, q$

3.

	Expression	Terms	Coefficients
(i)	$5 - 3t^2$	$-3t^2$	-3
(ii)	$1 + t + t^2 + t^3$	t t^2 t^3	1 1 1
(iii)	$x + 2xy + 3y$	x $2xy$ $3y$	1 2 3
(iv)	100m +1000n	100m 1000n	100 1000
(v)	$-p^2q^2 + 7pq$	$-p^2q^2$ $7pq$	-1 7
(vi)	$1.2a + 0.8b$	$1.2a$ $0.8b$	1.2 0.8
(vii)	$3.14r^2$	$3.14r^2$	3.14
(viii)	$2(l + b)$	$2l$ $2b$	2 2
(ix)	$0.1y + 0.01y^2$	$0.1y$ $0.01y^2$	0.1 0.01

4. (a)

	Expression	Terms with x	Coefficient of x
(i)	$y^2x + y$	y^2x	y^2
(ii)	$13y^2 - 8yx$	$-8yx$	$-8y$
(iii)	$x + y + 2$	x	1
(iv)	$5 + z + zx$	zx	z
(v)	$1 + x + xy$	x xy	1 y
(vi)	$12xy^2 + 25$	$12xy^2$	$12y^2$
(vii)	$7 + xy^2$	xy^2	y^2

(b)

	Expression	Terms with y^2	Coefficient of y^2
(i)	$8 - xy^2$	$-xy^2$	$-x$
(ii)	$5y^2 + 7x$	$5y^2$	5
(iii)	$2x^2y - 15xy^2 + 7y^2$	$-15xy^2$ $7y^2$	$-15x$ 7

3.

	సమాసము	పదాలు	గుణకాలు
(i)	$5-3t^2$	$-3\ t^2$	-3
(ii)	$1+t+t^2+t^3$	t t^2 t^3	1 1 1
(iii)	$x+2xy+3y$	x $2xy$ $3y$	1 2 3
(iv)	100m +1000n	100m 1000n	100 1000
(v)	$-p^2q^2+7pq$	$-p^2q^2$ $7pq$	-1 7
(vi)	$1.2a+0.8b$	$1.2\ a$ $0.8\ b$	1.2 0.8
(vii)	$3.14r^2$	$3.14r^2$	3.14
(viii)	$2(l+b)$	$2l$ $2b$	2 2
(ix)	$0.1y+0.01y^2$	$0.1y$ $0.01y^2$	0.1 0.01

4. (a)

	సమాసము	x కలిగి ఉన్న పదాలు	x యొక్క గుణకం
(i)	y^2x+y	y^2x	y^2
(ii)	$13y^2-8yx$	$-8yx$	$-8y$
(iii)	$x+y+2$	x	1
(iv)	$5+z+zx$	zx	z
(v)	$1+x+xy$	x xy	1 y
(vi)	$12xy^2+25$	$12xy^2$	$12y^2$
(vii)	$7+xy^2$	xy^2	y^2

(b)

	సమాసము	y^2 కలిగి ఉన్న పదాలు	y^2 యొక్క గుణకం
(i)	$8-xy^2$	$-xy^2$	$-x$
(ii)	$5y^2+7x$	$5y^2$	5
(iii)	$2x^2y-15xy^2+7y^2$	$-15xy^2$ $7y^2$	$-15x$ 7

5. (i) binomial (ii) monomial (iii) trinomial (iv) monomial
(v) trinomial (vi) binomial (vii) binomial (viii) monomial
(ix) trinomial (x) binomial (xi) binomial (xii) trinomial

6. (i) like (ii) like (iii) unlike (iv) like
(v) unlike (vi) unlike

7. (a) $-xy^2$, $2xy^2$; $-4yx^2$, $20x^2y$; $8x^2$, $-11x^2$, $-6x^2$; $7y$, y; $-100x$, $3x$; $-11yx$, $2xy$.
(b) $10pq$, $-7qp$, $78qp$; $7p$, $2405p$; $8q$, $-100q$; $-p^2q^2$, $12q^2p^2$; -23, 41; $-5p^2$, $701p^2$; $13p^2q$, qp^2

Exercise 10.2

1. (i) 0 (ii) 1 (iii) -1 (iv) 1 (v) 1

2. (i) -1 (ii) -13 (iii) 3 **3.** (i) -9 (ii) 3 (iii) 0 (iv) 1

4. (i) 8 (ii) 4 (iii) 0 **5.** (i) -2 (ii) 2 (iii) 0 (iv) 2

6. (i) $5x - 13$; -3 (ii) $8x - 1$; 15 (iii) $11x - 10$; 12 (iv) $11x + 7$; 29

7. (i) $2x+4$; 10 (ii) $-4x + 6$; -6 (iii) $-5a + 6$; 11 (iv) $-8b + 6$; 22 (v) $3a - 2b - 9$; -8

8. (i) 1000 (ii) 20 **9.** -5 **10.** $2a^2 + ab + 3$; 38

Exercise 11.1

1. (i) 64 (ii) 729 (iii) 121 (iv) 625

2. (i) 6^4 (ii) t^2 (iii) b^4 (iv) $5^2 \times 7^3$ (v) $2^2 \times a^2$ (vi) $a^3 \times c^4 \times d$

3. (i) 2^9 (ii) 7^3 (iii) 3^6 (iv) 5^5

4. (i) 3^4 (ii) 3^5 (iii) 2^8 (iv) 2^{100} (v) 2^{10}

5. (i) $2^3 \times 3^4$ (ii) 5×3^4 (iii) $2^2 \times 3^3 \times 5$ (iv) $2^4 \times 3^2 \times 5^2$

6. (i) 2000 (ii) 196 (iii) 40 (iv) 768 (v) 0
(vi) 675 (vii) 144 (viii) 90000

7. (i) -64 (ii) 24 (iii) 225 (iv) 8000

8. (i) $2.7 \times 10^{12} > 1.5 \times 10^8$ (ii) $4 \times 10^{14} < 3 \times 10^{17}$

Exercise 11.2

1. (i) 3^{14} (ii) 6^5 (iii) a^5 (iv) 7^{x+2} (v) 5^3 (vi) $(10)^5$
(vii) $(ab)^4$ (viii) 3^{12} (ix) 2^8 (x) 8^{t-2}

2. (i) 3^3 (ii) 5^3 (iii) 5^5 (iv) 7×11^5 (v) 3^0 or 1 (vi) 3
(vii) 1 (viii) 2 (ix) $(2a)^2$ (x) a^{10} (xi) a^3b (xii) 2^8

3. (i) False; $10 \times 10^{11} = 10^{12}$ and $(100)^{11} = 10^{22}$ (ii) False; $2^3 = 8$, $5^2 = 25$
(iii) False; $6^5 = 2^5 \times 3^5$ (iv) True; $3^0 = 1$, $(1000)^0 = 1$

4. (i) $2^8 \times 3^4$ (ii) $2 \times 3^3 \times 5$ (iii) $3^6 \times 2^6$ (iv) $2^8 \times 3$ **5.** (i) 98 (ii) $\frac{5t^4}{8}$ (iii) 1

5. (i) ద్విపది (ii) ఏకపది (iii) త్రిపది (iv) ఏకపది
(v) త్రిపది (vi) ద్విపది (vii) ద్విపది (viii) ఏకపది
(ix) త్రిపది (x) ద్విపది (xi) ద్విపది (xii) త్రిపది

6. (i) సజాతి (ii) సజాతి (iii) విజాతి (iv) సజాతి
(v) విజాతి (vi) విజాతి

7. (a) $-xy^2, 2xy^2; -4yx^2, 20x^2y; 8x^2, -11x^2, -6x^2; 7y, y; -100x, 3x; -11yx, 2xy.$
(b) $10pq, -7qp, 78qp; 7p, 2405p; 8q, -100q; -p^2q^2, 12q^2p^2; -23, 41; -5p^2, 701p^2; 13p^2q, qp^2$

అభ్యాసం 10.2

1. (i) 0 (ii) 1 (iii) -1 (iv) 1 (v) 1
2. (i) -1 (ii) -13 (iii) 3 **3.** (i) -9 (ii) 3 (iii) 0 (iv) 1
4. (i) 8 (ii) 4 (iii) 0 **5.** (i) -2 (ii) 2 (iii) 0 (iv) 2
6. (i) $5x-13; -3$ (ii) $8x-1; 15$ (iii) $11x-10; 12$ (iv) $11x+7; 29$
7. (i) $2x+4; 10$ (ii) $-4x+6; -6$ (iii) $-5a+6; 11$ (iv) $-8b+6; 22$ (v) $3a-2b-9; -8$
8. (i) 1000 (ii) 20 **9.** -5 **10.** $2a^2+ab+3; 38$

అభ్యాసం 11.1

1. (i) 64 (ii) 729 (iii) 121 (iv) 625
2. (i) 6^4 (ii) t^2 (iii) b^4 (iv) $5^2\times 7^3$ (v) $2^2\times a^2$ (vi) $a^3\times c^4\times d$
3. (i) 2^9 (ii) 7^3 (iii) 3^6 (iv) 5^5
4. (i) 3^4 (ii) 3^5 (iii) 2^8 (iv) 2^{100} (v) 2^{10}
5. (i) $2^3\times 3^4$ (ii) 5×3^4 (iii) $2^2\times 3^3\times 5$ (iv) $2^4\times 3^2\times 5^2$
6. (i) 2000 (ii) 196 (iii) 40 (iv) 768 (v) 0
(vi) 675 (vii) 144 (viii) 90000
7. (i) -64 (ii) 24 (iii) 225 (iv) 8000
8. (i) $2.7\times 10^{12} > 1.5\times 10^8$ (ii) $4\times 10^{14} < 3\times 10^{17}$

అభ్యాసం 11.2

1. (i) 3^{14} (ii) 6^5 (iii) a^5 (iv) 7^{x+2} (v) 5^3 (vi) $(10)^5$
(vii) $(ab)^4$ (viii) 3^{12} (ix) 2^8 (x) 8^{t-2}
2. (i) 3^3 (ii) 5^3 (iii) 5^5 (iv) 7×11^5 (v) 3^0 లేదా 1 (vi) 3
(vii) 1 (viii) 2 (ix) $(2a)^2$ (x) a^{10} (xi) a^3b (xii) 2^8
3. (i) అసత్యం; $10\times 10^{11}=10^{12}$ మరియు $(100)^{11}=10^{22}$ (ii) అసత్యం; $2^3=8, 5^2=25$
(iii) అసత్యం; $6^5=2^5\times 3^5$ (iv) సత్యం; $3^0=1, (1000)^0=1$
4. (i) $2^8\times 3^4$ (ii) $2\times 3^3\times 5$ (iii) $3^6\times 2^6$ (iv) $2^8\times 3$ **5.** (i) 98 (ii) $\frac{5t^4}{8}$ (iii) 1

Exercise 11.3

1. $279404 = 2 \times 10^5 + 7 \times 10^4 + 9 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 4 \times 10^0$

   $3006194 = 3 \times 10^6 + 0 \times 10^5 + 0 \times 10^4 + 6 \times 10^3 + 1 \times 10^2 + 9 \times 10^1 + 4 \times 10^0$

   $2806196 = 2 \times 10^6 + 8 \times 10^5 + 0 \times 10^4 + 6 \times 10^3 + 1 \times 10^2 + 9 \times 10^1 + 6 \times 10^0$

   $120719 = 1 \times 10^5 + 2 \times 10^4 + 0 \times 10^3 + 7 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 9 \times 10^0$

   $20068 = 2 \times 10^4 + 0 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 6 \times 10^1 + 8 \times 10^0$

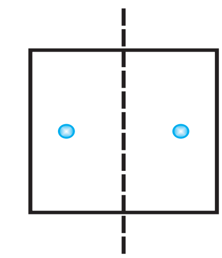
2. (a) 86045 (b) 405302 (c) 30705 (d) 900230

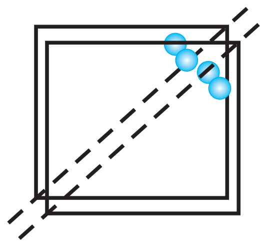
3. (i) 5×10^7 (ii) 7×10^6 (iii) 3.1865×10^9 (iv) 3.90878×10^5
   (v) 3.90878×10^4 (vi) 3.90878×10^3

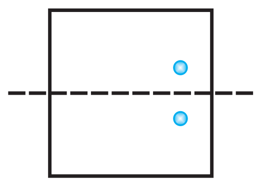
4. (a) 3.84×10^8m (b) 3×10^8 m/s (c) 1.2756×10^7m (d) 1.4×10^9 m
   (e) 1×10^{11} (f) 1.2×10^{10} years (g) 3×10^{20} m (h) 6.023×10^{22}
   (i) 1.353×10^9 km^3 (j) 1.027×10^9

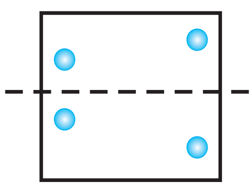
Exercise 12.1

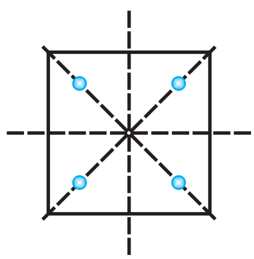
1.

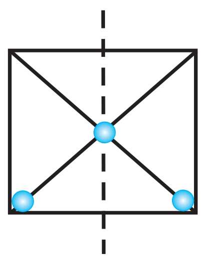

(a)

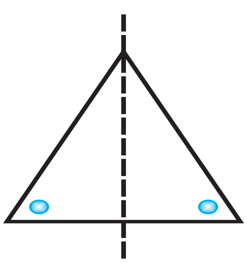

(b)

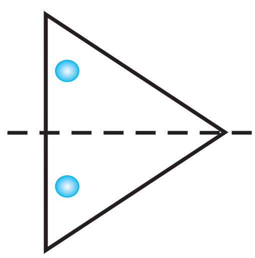

(c)

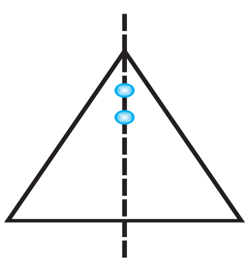

(d)


(e)


(f)


(g)


(h)


(i)

అభ్యాసం 11.3

1. 279404 $= 2 \times 10^5 + 7 \times 10^4 + 9 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 4 \times 10^0$

   3006194 $= 3 \times 10^6 + 0 \times 10^5 + 0 \times 10^4 + 6 \times 10^3 + 1 \times 10^2 + 9 \times 10^1 + 4 \times 10^0$

   2806196 $= 2 \times 10^6 + 8 \times 10^5 + 0 \times 10^4 + 6 \times 10^3 + 1 \times 10^2 + 9 \times 10^1 + 6 \times 10^0$

   120719 $= 1 \times 10^5 + 2 \times 10^4 + 0 \times 10^3 + 7 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 9 \times 10^0$

   20068 $= 2 \times 10^4 + 0 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 6 \times 10^1 + 8 \times 10^0$

2. (a) 86045 (b) 405302 (c) 30705 (d) 900230

3. (i) 5×10^7 (ii) 7×10^6 (iii) 3.1865×10^9 (iv) 3.90878×10^5

   (v) 3.90878×10^4 (vi) 3.90878×10^3

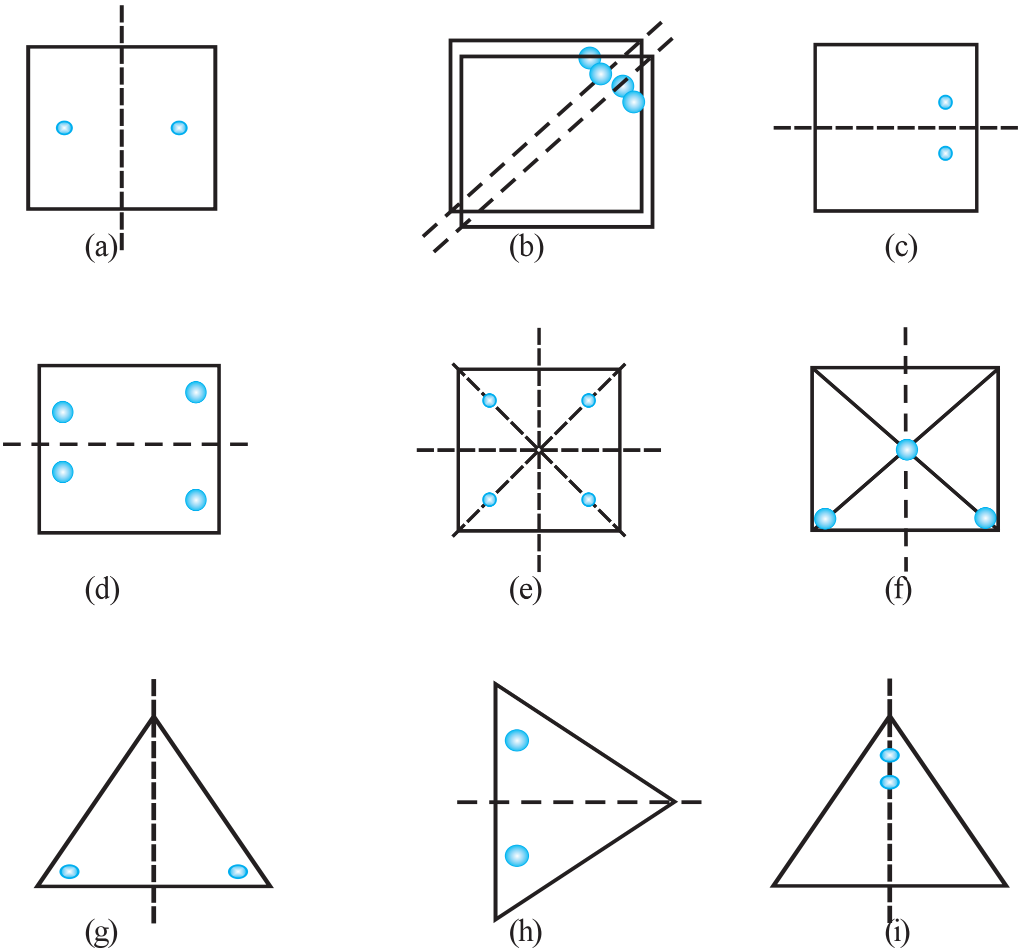
4. (a) 3.84×10^8మీ (b) 3×10^8 మీ/సె (c) 1.2756×10^7మీ (d) 1.4×10^9 మీ

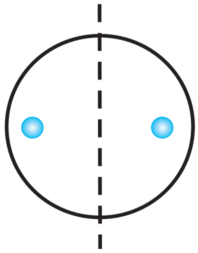
   (e) 1×10^{11} (f) 1.2×10^{10} సంవత్సరాలు (g) 3×10^{20} మీ (h) 6.023×10^{22}

   (i) 1.353×10^9 కి.మీ.^{3} (j) 1.027×10^9

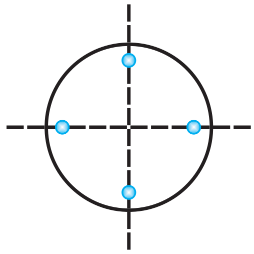
అభ్యాసం 12.1

1.

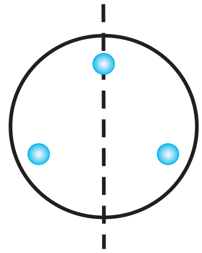




(j)

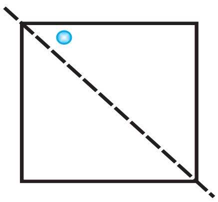


(k)

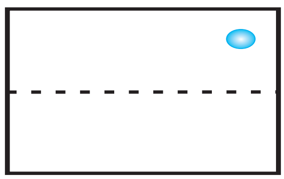


(l)

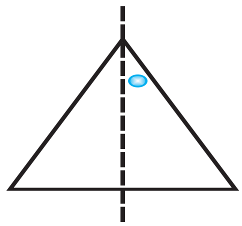
2.



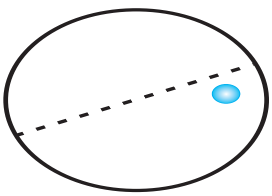
(a)



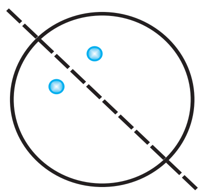
(b)



(c)

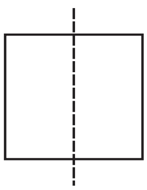


(d)

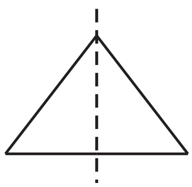


(e)

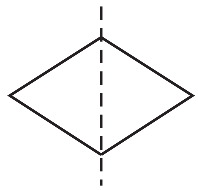
3.



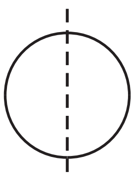
(a) Square



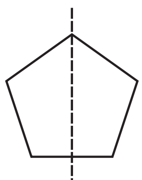
(b) Triangle



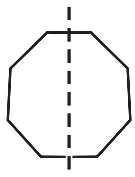
(c) Rhombus



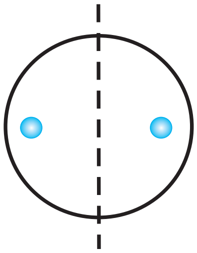
(d) Circle



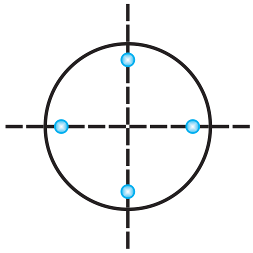
(e) Pentagon



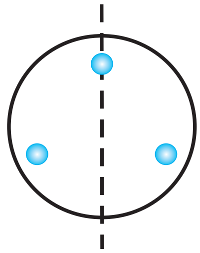
(f) Octagon



(j)

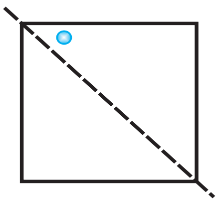


(k)

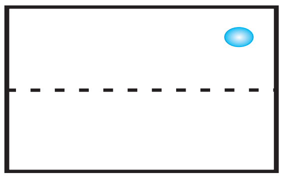


(l)

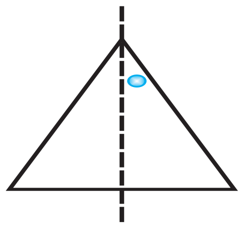
2.



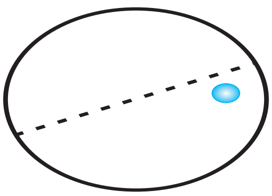
(a)



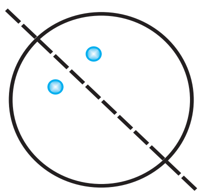
(b)



(c)

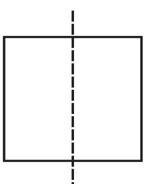


(d)

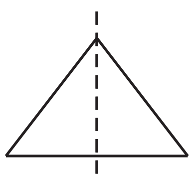


(e)

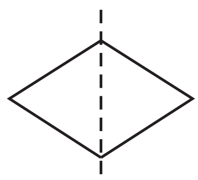
3.



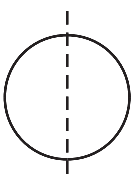
(a) చతురస్రము



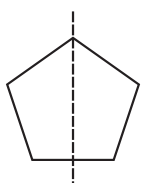
(b) త్రిభుజము



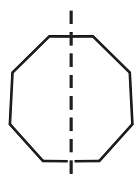
(c) రాంబస్



(d) వృత్తము

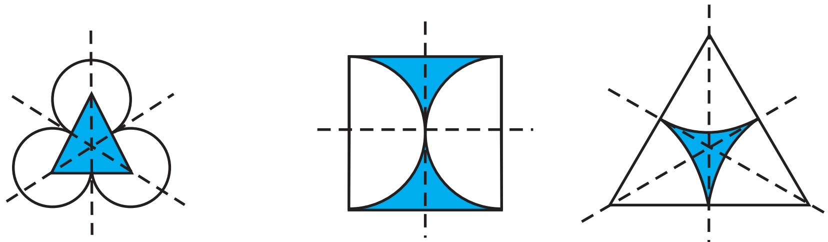


(e) పంచభుజి

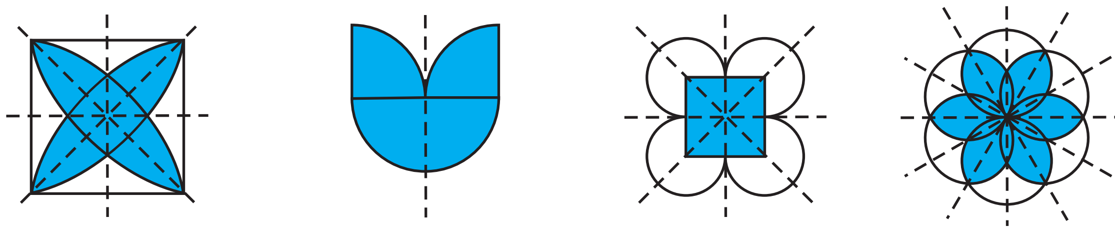


(f) అష్టభుజి

4.



(a) (b) (c) (d)



(e) (f) (g) (h)

7. (a) 3 (b) 1 (c) 0 (d) 4 (e) 2 (f) 2
(g) 0 (h) 0 (i) 6 (j) Infinitely many

8. (a) A, H, I, M, O, T, U, V, W, X, Y (b) B, C, D, E, H, I, O, X
(c) O, X, I, H

10. (a) Median (b) Diameter

Exercise 12.2

1. (a), (b), (d), (e), (f)

2. (a) 2 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) 4 (f) 5
(g) 6 (h) 3

Exercise 12.3

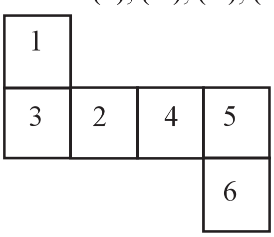
3. Yes **5.** Square **6.** 120°, 180°, 240°, 300°, 360°

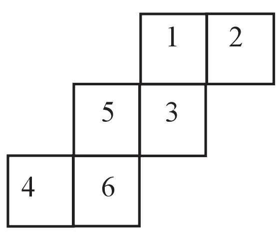
7. (i) Yes (ii) No

Exercise 13.1

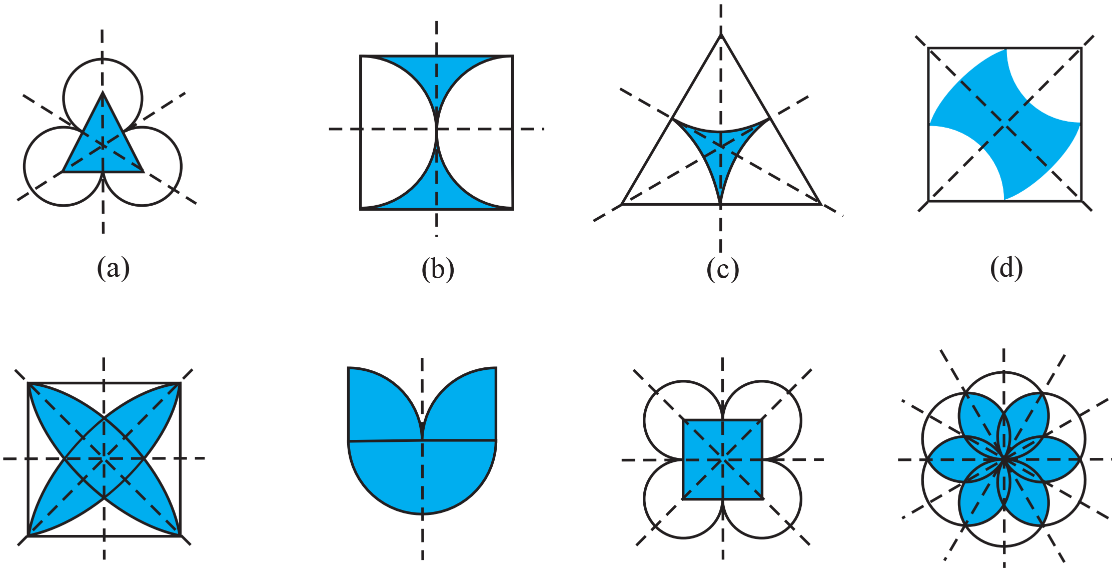
1. Nets in (ii), (iii), (iv), (vi) form cubes.

2.





4.



(a) (b) (c) (d) (e) (f) (g) (h)

7. (a) 3 (b) 1 (c) 0 (d) 4 (e) 2 (f) 2
(g) 0 (h) 0 (i) 6 (j) అనంతమైన

8. (a) A, H, I, M, O, T, U, V, W, X, Y (b) B, C, D, E, H, I, O, X
(c) O, X, I, H

10. (a) మధ్యగతం (b) వ్యాసము

అభ్యాసం 12.2

1. (a), (b), (d), (e), (f)

2. (a) 2 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) 4 (f) 5
(g) 6 (h) 3

అభ్యాసం 12.3

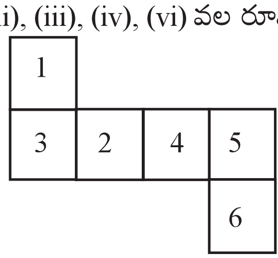
3. అవును 5. చతురస్రం 6. 120°, 180°, 240°, 300°, 360°

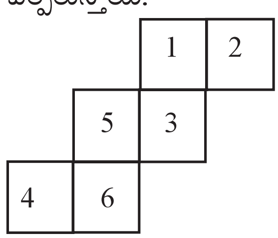
7. (i) అవును (ii) కాదు

అభ్యాసం 13.1

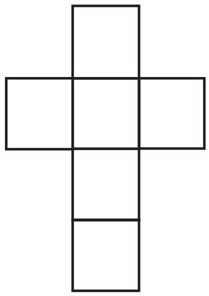
1. (ii), (iii), (iv), (vi) వల రూపాలు ఘనాలను ఏర్పరుస్తాయి.

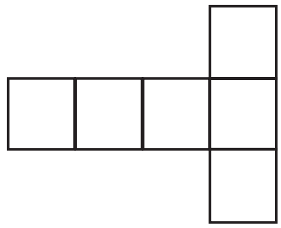
2.





3. No, because one pair of opposite faces will have 1 and 4 on them whose total is not 7, and another pair of opposite faces will have 3 and 6 on them whose total is also not 7.
4. Three faces





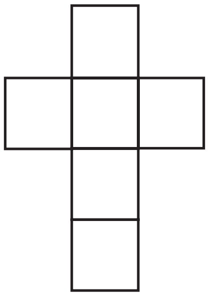
5. (a) (ii) (b) (iii) (c) (iv) (d) (i)

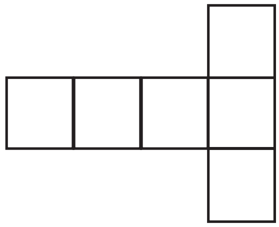
BRAIN-TEASERS

1. Solve the number riddles:
   (i) Tell me who I am! Who I am!
   Take away from me the number eight,
   Divide further by a dozen to come up with
   A full team for a game of cricket!
   (ii) Add four to six times a number,
   To get exactly sixty four!
   Perfect credit is yours to ask for
   If you instantly tell the score!
2. Solve the teasers:
   (i) There was in the forest an old Peepal tree
   The grand tree had branches ten and three
   On each branch there lived birds fourteen
   Sparrows brown, crows black and parrots green!
   Twice as many as the parrots were the crows
   And twice as many as the crows were the sparrows!
   We wonder how many birds of each kind
   Aren't you going to help us find?
   (ii) I have some five-rupee coins and some two-rupee coins. The number of two-rupee coins is twice the number of five-rupee coins. The total money I have is 108 rupees. So how many five-rupee coins do I have? And how many two-rupee coins?
3. I have 2 vats each containing 2 mats. 2 cats sat on each of the mats. Each cat wore 2 funny old hats. On each hat lay 2 thin rats. On each rat perched 2 black bats. How many things are in my vats?

3. లేదు, ఎందుకంటే ఒక జత ఎదురెదురు ముఖాలపై 1 మరియు 4 ఉంటాయి. వాటి మొత్తం 7 కాదు, మరొక జత ఎదురెదురు ముఖాలపై 3 మరియు 6 కలిగి ఉంటే వాటి మొత్తం కూడా 7 కాదు.

4. మూడు ముఖాలు





5. (a) (ii) (b) (iii) (c) (iv) (d) (i)

మెదడుకు మేత

1. పొడుపు కథలు విప్పండి:

   (i) నేనెవరో చెప్పు! నేను ఎవరు!
   నా నుండి ఎనిమిది సంఖ్యను తీసివేయండి,
   ముందుకు రావడానికి డజనుతో మరింత విభజించండి
   క్రికెట్ ఆట కోసం పూర్తి జట్టు!!

   (ii) సంఖ్యకు నాలుగు నుండి ఆరు సార్లు జోడించండి,
   సరిగ్గా అరవై నాలుగు పొందడానికి!
   అడగడానికి పర్‌ఫెక్ట్ క్రెడిట్ మీదే
   మీరు తక్షణమే స్కోర్ చెబితే!!

2. టీజర్‌లను పరిష్కరించండి:

   (i) అడవిలో పాత రావిచెట్టు ఉండేది
   పెద్ద చెట్టుకు పది మరియు మూడు కొమ్మలు ఉన్నాయి,
   ఒక్కో కొమ్మపై పద్నాలుగు పక్షులు ఉండేవి
   గోధుమ రంగు పిచ్చుకలు, నల్ల కాకులు మరియు ఆకుపచ్చ చిలుకలు!
   చిలుకల కంటే రెండింతలు కాకులు
   మరియు కాకుల కంటే రెండింతలు పిచ్చుకలు!
   ఒక్కో రకమైన పక్షులు ఎన్ని ఉన్నాయో మనం ఆశ్చర్యపోతున్నాం
   మీరు కనుగొనడంలో మాకు సహాయం చేయగలరా?

   (ii) నా దగ్గర కొన్ని ఐదు రూపాయల నాణేలు మరియు కొన్ని రెండు రూపాయల నాణేలు ఉన్నాయి. రెండు రూపాయల నాణేల సంఖ్య ఐదు రూపాయల నాణేల సంఖ్య కంటే రెండింతలు. నా దగ్గర ఉన్న మొత్తం డబ్బు 108 రూపాయలు. ఐతే నా దగ్గర ఎన్ని ఐదు రూపాయల నాణేలు ఉన్నాయి? మరి రెండు రూపాయల నాణేలు ఎన్ని?

3. నా దగ్గర 2 వాట్‌లు ఒక్కొక్కటి 2 మ్యాట్‌లు ఉన్నాయి. ఒక్కో చాప మీద 2 పిల్లులు కూర్చున్నాయి. ప్రతి పిల్లి 2 ఫన్నీ పాత టోపీలను ధరించింది. ప్రతి టోపీపై 2 సన్నని ఎలుకలు ఉంటాయి. ప్రతి ఎలుక మీద 2 నల్ల గబ్బిలాలు ఉన్నాయి. నా వాట్స్‌లో ఎన్ని వస్తువులు ఉన్నాయి?

4. Twenty-seven small cubes are glued together to make a big cube. The exterior of the big cube is painted yellow in colour. How many among each of the 27 small cubes would have been painted yellow on
   (i) only one of its faces?
   (ii) two of its faces?
   (iii) three of its faces?
5. Rahul wanted to find the height of a tree in his garden. He checked the ratio of his height to his shadow's length. It was 4:1. He then measured the shadow of the tree. It was 15 feet. So what was the height of the tree?
6. A woodcutter took 12 minutes to make 3 pieces of a block of wood. How much time would be needed to make 5 such pieces?
7. A cloth shrinks 0.5% when washed. What fraction is this?
8. Smita's mother is 34 years old. Two years from now mother's age will be 4 times Smita's present age. What is Smita's present age?
9. Maya, Madhura and Mohsina are friends studying in the same class. In a class test in geography, Maya got 16 out of 25. Madhura got 20. Their average score was 19. How much did Mohsina score?

Answers

1. (i) 140 (ii) 10

2. (i) Sparrows: 104, crows: 52, Parrots: 26
(ii) Number of ₹ 5 coins = 12, Number of ₹ 2 coins = 24

3. 124 **4.** (i) 6 (ii) 10 (iii) 8 **5.** 60 feet

6. 24 minutes **7.** $\frac{1}{200}$ **8.** 7 years **9.** 21

4. ఇరవై ఏడు చిన్న క్యూబ్‌లను అతికించి పెద్ద క్యూబ్‌ను తయారు చేస్తారు. పెద్ద క్యూబ్ యొక్క వెలుపలి భాగం పసుపు రంగులో పెయింట్ చేయబడింది. ప్రతి 27 చిన్న ఘనాలలో ఎన్ని
   (i) దాని ముఖాలలో ఒకటి మాత్రమే?
   (ii) దాని రెండు ముఖాలు?
   (iii) దాని మూడు ముఖాలు? పసుపు రంగులో పెయింట్ చేయబడి ఉంటాయి.
5. రాహుల్ తన తోటలోని చెట్టు ఎత్తును కనుగొనాలనుకున్నాడు. అతను తన ఎత్తు మరియు నీడ పొడవు నిష్పత్తిని సరిచూశాడు. ఇది 4:1. ఆ తర్వాత చెట్టు నీడను కొలిచాడు. 15 అడుగులు ఉండేది. కాబట్టి చెట్టు ఎత్తు ఎంత?
6. ఒక చెక్క కట్టర్ 3 చెక్క ముక్కలను తయారు చేయడానికి 12 నిమిషాలు పట్టింది. అలాంటి 5 ముక్కలు చేయడానికి ఎంత సమయం పడుతుంది?
7. ఒక గుడ్డ ఉతికినప్పుడు 0.5% తగ్గిపోతుంది. దీని భిన్నం ఎంత?
8. స్మిత తల్లి వయసు 34 ఏళ్లు. ఇప్పటి నుండి రెండు సంవత్సరాల తరువాత తల్లి వయస్సు స్మిత ప్రస్తుత వయస్సు కంటే 4 రెట్లు ఉంటుంది. స్మిత ప్రస్తుత వయస్సు ఎంత?
9. మాయ, మధుర, మొహసినా ఒకే తరగతి చదువుతున్న స్నేహితులు. భౌగోళిక శాస్త్రంలో తరగతి పరీక్షలో, మాయకు 25కి 16 వచ్చాయి. మధురకు 20 వచ్చాయి. వారి సగటు స్కోరు 19. మొహసినా ఎంత స్కోర్ చేసింది?

సమాధానాలు

1. (i) 140 (ii) 10
2. (i) పిచ్చుకలు: 104, కాకులు: 52, చిలుకలు: 26
   (ii) ₹ 5 నాణేల సంఖ్య = 12, ₹ 2 నాణేల సంఖ్య = 24
3. 124 **4.** (i) 6 (ii) 12 (iii) 8 **5.** 60 అడుగులు
6. 20 నిమిషాలు **7.** $\frac{1}{200}$ **8.** 9 సంవత్సరాలు **9.** 21

FUNDAMENTAL DUTIES

Fundamental duties: It shall be the duty of every citizen of India-

(a) to abide by the Constitution and respect its ideals and institutions, the National Flag and the National Anthem;
(b) to cherish and follow the noble ideals which inspired our national struggle for freedom;
(c) to uphold and protect the sovereignty, unity and integrity of India;
(d) to defend the country and render national service when called upon to do so;
(e) to promote harmony and the spirit of common brotherhood amongst all the people of India transcending religious, linguistic and regional or sectional diversities; to renounce practices derogatory to the dignity of women;
(f) to value and preserve the rich heritage of our composite culture;
(g) to protect and improve the natural environment including forests, lakes, rivers and wild life, and to have compassion for living creatures;
(h) to develop the scientific temper, humanism and the spirit of inquiry and reform;
(i) to safeguard public property and to abjure violence.
(j) to strive towards excellence in all spheres of individual and collective activity so that the nation constantly rises to higher levels of endeavour and achievement;
(k) who is a parent or guardian, to provide opportunities for education to his child or, as the case may be ward between the age of six and fourteen years;

- Constitution of India,
Part IV A (Article 51 A)

Right of Children to Free and Compulsory Education (RTE) Act, 2009

The RTE Act provides for the right of children to free and Compulsory Education to every child in the age group of 6 – 14 years which came into force from 1st April 2010 in Andhra Pradesh.

Important provisions of RTE Act

- Ensure availability of schools within the reach of the children.
- Improve School infrastructure facilities.
- Enroll children in the class appropriate to his / her age.
- Children have a right to receive special training in order to be at par with other children.
- Providing appropriate facilities for the education of children with special needs on par with other children.
- No child shall be liable to pay any kind of fee or charges or expenses which may prevent him or her from pursuing and completing the elementary education. No test for admitting the children in schools.
- No removal of name and repetition of the child in the same class.
- No child admitted in a school shall be held back in any class or expel from school till the completion of elementary education.
- No child shall be subjected to physical punishment or mental harassment.
- Admission shall not be denied or delayed on the ground that the transfer and other certificates have not been provided on time.
- Eligible candidates alone shall be appointed as teachers.
- The teaching learning process and evaluation procedures shall promote achievement of appropriate competencies.
- No board examinations shall be conducted to the children till the completion of elementary education.
- Children can continue in the schools even after 14 years until completion of elementary education.
- No discrimination and related practices towards children belonging to backward and marginalized communities.
- The curriculum and evaluation procedures must be in conformity with the values enshrined in the constitution and make the child free of fear and anxiety and help the child to express views freely.