ЛЕКЦИЯ № 4

Линейные подпространства. Решение задач.

Линейная зависимость и независимость непрерывных функций.

Задача 1. Проверить, является множество векторов L=$\{\overline{x}=(a,2a-7b,b+1)\}$ линейным подпространством в R^3.

Решение:

1 способ

Пусть $\bar{x}=\begin{pmatrix} a_1 \\ 2a_1-7b_1 \\ b_1+1 \end{pmatrix}\in L;\bar{y}=\begin{pmatrix} a_2 \\ 2a_2-7b_2 \\ b_2+1 \end{pmatrix}\in L.$

$$\bar{x}+\bar{y}=\begin{pmatrix} a_1+a_2 \\ 2a_1-7b_1+2a_2-7b_2 \\ b_1+1+b_2+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1+a_2 \\ 2(a_1+a_2)-7(b_1+b_2) \\ (b_1+b_2)+2 \end{pmatrix}.$$

Обозначим $a=a_1+a_2;b=b_1+b_2$. Тогда $\bar{x}+\bar{y}=\begin{pmatrix} a \\ 2a-7b \\ b+2 \end{pmatrix}\notin L$, так как имеет другой общий вид. Аксиома замкнутости относительно операции сложения не выполнена => L не является подпространством.

2 способ

Для того, чтобы доказать, что множество не является подпространством , достаточно доказать, что не содержит нулевой элемент.

$(a,2a-7b,b+1)$ = (0,0,0) $\Leftrightarrow\begin{cases} a=0 \\ 2a-7b=0 \\ b+1=0 \end{cases}$, данная система не имеет решений =>$\overline{0}\notin L$ => L не является подпространством.

Задача 2. Проверить, является множество векторов L=$\{\overline{x}=(a,2a-7b,a+b)\}$ линейным подпространством в R^3. Если да, то найти базис и размерность этого подпространства. Дополнить базис подпространства L до базиса всего пространства R^3. Выписать матрицу перехода от канонического базиса пространства R^3 к построенному базису.

Решение

1)Пусть $\bar{x}=\begin{pmatrix}a_1\\2a_1-7b_1\\a_1+b_1\end{pmatrix}\in L;\bar{y}=\begin{pmatrix}a_2\\2a_2-7b_2\\a_2+b_2\end{pmatrix}\in L.$

$\bar{x}+\bar{y}=\begin{pmatrix}a_1+a_2\\2(a_1+a_2)-7(b_1+b_2)\\(a_1+a_2)+(b_1+b_2)\end{pmatrix}$. Обозначим $a=a_1+a_2;b=b_1+b_2$.

Тогда $\bar{x}+\bar{y}=\begin{pmatrix}a\\2a-7b\\a+b\end{pmatrix}\in L$. Аксиома замкнутости относительно операции сложения выполнена.

Пусть $\lambda\in R$. Тогда $\lambda\bar{x}=\begin{pmatrix}\lambda a_1\\2\lambda a_1-7\lambda b_1\\\lambda a_1+\lambda b_1\end{pmatrix}$;

Обозначим $a=\lambda a_1;b=\lambda b_1$. Тогда $\lambda\bar{x}=\begin{pmatrix}a\\2a-7b\\a+b\end{pmatrix}\in L$.

Аксиома замкнутости относительно операции умножения на число выполнена.

Итак, L – линейное подпространство пространства R^3.

2) Найдем базис и размерность подпространства L:

Пусть $a=1;b=0\Rightarrow\bar{e}_1=(1,2,1)$

$a=0;b=1\Rightarrow\bar{e}_2=(0,-7,1)$

Докажем, что $\{\bar{e}_1,\bar{e}_2\}$ - базис подпространства L.

Линейная независимость.

Составим линейную комбинацию векторов $\bar{e}_1,\bar{e}_2$:

$\alpha\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\-7\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=0\\2\alpha-7\beta=0\\\alpha=0\end{cases}\Leftrightarrow\alpha=0;\beta=0 => \bar{e}_1,\bar{e}_2$ линейно независимая система векторов.

Другой способ доказать линейную-независимость:

Составим матрицу из координат векторов $\bar{e}_1,\bar{e}_2$ в каноническом базисе R^3 и найдем ее ранг: $\begin{pmatrix}1&2&1\\0&-7&1\end{pmatrix}$, $rang=2(\textit{количеству векторов})\Rightarrow\{\bar{e}_1,\bar{e}_2\}$ – линейно независимая система векторов.

Полнота.

$\forall\bar{x}\in L:\bar{x}=\begin{pmatrix}a\\2a-7b\\a+b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\2a\\a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-7b\\b\end{pmatrix}=a\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+b\cdot\begin{pmatrix}0\\-7\\1\end{pmatrix}=$

$a\cdot\bar{e}_1+b\cdot\bar{e}_2.\Rightarrow\{\bar{e}_1,\bar{e}_2\}$- полная система векторов.

Итак, $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ - базис подпространства L; *dim* L=2 (т.к. в базисе 2 вектора).

3) Дополним базис подпространства L до базиса всего пространства R^3. Т.к. $dim\ R^3$=3, то нужно добавить еще один вектор такой, чтобы он образовывал линейно независимую систему с $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$. Добавим $\bar{e}_3 = (0,0,1)$. Выпишем матрицу из координат $\{\overline{e}_1;\overline{e}_2;\overline{e}_3\}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

$rang = 3(\textit{количеству векторов})$, следовательно $\{\overline{e}_1;\overline{e}_2;\overline{e}_3\} -$ базис в R^3.

4) Выпишем матрицу перехода от канонического базиса пространства R^3к построенному базису: $P_{\{канонич.базис\}\to\{\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -7 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, записав координаты базисных векторов по столбцам.

Задача 3. Проверить, что множество многочленов L=$\{p(t) = (a + 2b)t^2 + at + b\}$ с вещественными коэффициентами образует линейное подпространство в линейном пространстве P_2 многочленов степени не выше 2. Найти размерность и базис L, дополнить его до базиса всего пространства P_2. Доказать, что многочлен h(t)=$t^2 + 3t - 1$ принадлежит подпространству L и найти его координаты в базисе подпространства L.

Решение.

1) Проверим, является ли L линейным подпространством в P_2. Для этого проверим выполнение аксиом замкнутости.

Пусть $x(t) = (a_1 + 2b_1)t^2 + a_1 t + b_1 \in L$;

$y(t) = (a_2 + 2b_2)t^2 + a_2 t + b_2 \in L$.

а) $x(t) + y(t) = (a_1 + 2b_1 + a_2 + 2b_2)t^2 + (a_1 + a_2)t + (b_1 + b_2)$.
Обозначим $a = a_1 + a_2$; $b = b_1 + b_2$.
Тогда $x(t) + y(t) = (a + 2b)t^2 + at + b \in L$.
Аксиома замкнутости относительно операции сложения выполнена.

б) Пусть $\lambda \in R$; $\lambda x(t) = (\lambda a_1 + 2\lambda b_1)t^2 + (\lambda a_1)t + (\lambda b_1)$.
Обозначим $a = \lambda a_1$, $b = \lambda b_1$. Тогда
$\lambda x(t) = (a + 2b)t^2 + at + b \in L$.

Аксиома замкнутости относительно операции умножения на число выполнена.

Итак, L – линейное подпространство пространства P_2.

2) Найдем базис и размерность подпространства L:

$a = 1, b = 0 \ \rightarrow \ e_1(t) = t + t^2$ =(0,1,1)

$a = 0, b = 1 \ \rightarrow \ e_2(t) = 1 + 2t^2$=(1,0,2)

Докажем, что $\{e_1(t), e_2(t)\}$ образуют базис в L.

Линейная независимость.

Составим линейную комбинацию многочленов $e_1(t), e_2(t)$:

$\alpha_1 e_1(t) + \alpha_2 e_2(t) = 0.$

$\alpha_1(t^2 + t) + \alpha_2(2t^2 + 1) = 0$

$(\alpha_1 + 2\alpha_2)t^2 + \alpha_1 t + \alpha_2 = 0 <=>$

$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \end{cases}$; $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.$

Следовательно, система многочленов $\{e_1(t), e_2(t)\}$ – линейно независима.

Другой способ доказательства линейной независимости векторов:

Составим матрицу из их координат в каноническом базисе:

$e_1(t) = t + t^2$ =(0,1,1)

$e_2(t) = 1 + 2t^2$=(1,0,2)

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $rang = 2(\textit{количеству векторов}) \Rightarrow \{e_1(t), e_2(t)\}$ – линейно независима.

Полнота. Для любого

$p(t) = (a + 2b)t^2 + at + b \in L$: $p(t) = a(t^2 + t) + b(2t^2 + 1)$

$p(t) = ae_1(t) + be_2(t)$ (раскладывается по базису). Следовательно, система многочленов $\{e_1(t), e_2(t)\}$ является полной.

Итак, $\{e_1(t), e_2(t)\}$ – базис подпространства L. $dim\ L$=2 (так как в базисе 2 многочлена).

3) Дополним базис подпространства L до базиса всего пространства P_2. Так как $dim\ P_2 = 3$, то нужно добавить еще один многочлен такой, чтобы он образовывал линейно независимую систему с многочленами $\{e_1(t), e_2(t)\}$.

Возьмём $e_3(t) = 1 = (1; 0; 0)$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; $rang$ =3, следовательно, система многочленов $\{e_1(t), e_2(t), e_3(t)\}$ линейно независима, следовательно является базисом P_2.

4) Найдем координаты многочлена $h(t) = t^2 + 3t - 1$ в базисе $\{e_1(t), e_2(t)\}$.
$h(t) = ae_1(t) + be_2(t)$; $a(t^2 + t) + b(2t^2 + 1) = t^2 + 3t - 1$;
$$\begin{cases} a + 2b = 1 \\ a = 3 \\ b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow h(t) = 3e_1(t) - e_2(t)$$

Проверка: $3e_1(t) - e_2(t) = 3(t^2 + t) - (2t^2 + 1) = t^2 + 3t - 1 = h(t)$.

Задача 4. Доказать, что множество многочленов степени не выше 3, удовлетворяющий условию p(t)⋮ $(t-1)^2$, является подпространством в P_3. Найти базис, размерность , дополнить до базиса всего пространства в P_3.

Решение. Для решения данной задачи необходимо найти общий вид элемента множества.

$$p(t) = (t-1)^2(at + b) = (t^2 - 2t + 1)(at + b)$$
$$= at^3 + (b - 2a)t^2 + (a - 2b)t + b$$

Далее задача решается по стандартному алгоритму. Не составит труда доказать, что данное множество является линейным подпространством в P_3. Проще всего это сделать, представив его в координатном виде

$p(t)$=(b, $a - 2b, b - 2a, a$)

Пусть $x = (b_1, a_1 - 2b_1, b_1 - 2a_1, a_1) \in L$;
$y = (b_2, a_2 - 2b_2, b_2 - 2a_2, a_2) \in L$

$x + y = (b_1 + b_2, a_1 + a_2 - 2(b_1 + b_2), (b_1 + b_2) - 2(a_1 + a_2, a_1 + a_2)$.
Обозначим $a = a_1 + a_2; b = b_1 + b_2$.
Тогда $x + y =$(b, $a - 2b, b - 2a, a$)$\in L$.
Аксиома замкнутости относительно операции сложения выполнена.

a) Пусть $\lambda \in R$; $\lambda x = (\lambda b_1, \lambda - 2\lambda b_1, \lambda b_1 - 2\lambda a_1, \lambda a_1)$
Обозначим $a = \lambda a_1$, $b = \lambda b_1$. Тогда
$\lambda x =$ (b, $a - 2b, b - 2a, a) \in L$.

Аксиома замкнутости относительно операции умножения на число выполнена.
Итак, L – линейное подпространство пространства P_3.

5) Найдем базис и размерность подпространства L:
$a = 1, b = 0 \rightarrow e_1 =(0,1,-2,1)= t - 2t^2+t^3$
$a = 0, b = 1 \rightarrow e_2 = (1,-2,1,0) = 1 - 2t + t^2$

Докажем, что $\{e_1, e_2\}$ образуют базис в L.
Линейная независимость.
$\begin{pmatrix} 0\ 1 -2\ 1 \\ 1 -2\ 1\ 0 \end{pmatrix}$; $rang = 2(\textit{количеству векторов}) \Rightarrow \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ – линейно независимая система векторов.
Полнота. Для любого
$p(t)$ ==(b, $a-2b, b-2a, a$)= $a(0,1,-2,1) + b(1,-2,1,0) = ae_1 + be_2$ =>
Следовательно, система многочленов $\{e_1, e_2\}$ является полной.
Итак, $\{e_1, e_2\}$ – базис подпространства L. *dim L*=2 (так как в базисе 2 многочлена).

6) Дополним базис подпространства L до базиса всего пространства P_3. Так как *dim* P_3 = 4, то нужно добавить еще два вектора таких, чтобы они образовывал линейно независимую систему с $\{e_1, e_2\}$.
Возьмём $e_3 = (0,0,1,0) = t^2$; $e_4 = (0,0,0,1) = t^3$;
Рассмотрим матрицу, составленную из координат векторов
$\begin{pmatrix} 0\ 1 -2\ 1 \\ 1 -2\ 1\ 0 \\ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 0 \\ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 1 \end{pmatrix}$; *rang* =4, следовательно, система многочленов $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ линейно независима, следовательно является базисом P_3.

Задача 5 Является ли линейным подпространством в P_3 множество

$$L = \{p(t) = at^3 + (a+b)t^2 + (b+1)t\}$$

Решение.

Проверим аксиому замкнутости.

Пусть $x(t) = a_1t^3 + (a_1 + b_1)t^2 + (b_1 + 1)t \ \in L$,

$y(t) = \ a_2t^3 + (a_2 + b_2)t^2 + (b_2 + 1)t \ \in L$,

$x(t) + \ y(t)$ = $(a_1 + a_2)\ t^3 + ((a_1 + a_2)$+$(b_1 + b_2))t^2 + ((b_1 + b_2) + 2)t \notin L$,

так как имеет другой общий вид => L не является линейным подпространством.

Задача 6. Доказать, что множество М=$\left\{\begin{pmatrix} a & a+2b \\ -b & 0 \end{pmatrix}\right\}$ матриц заданного вида является линейным подпространством в линейном пространстве квадратных матриц второго порядка M_{2x2}. Построить базис и найти размерность подпространства М. Доказать, что матрица $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ принадлежит подпространству и разложить ее до базиса всего пространства. Дополнить базис подпространства до базиса всего пространства.

Решение:

1) Проверим, является ли M линейным подпространством в M_{2x2}.

Пусть $X = \begin{pmatrix} a_1 & a_1+2b_1 \\ -b_1 & 0 \end{pmatrix} \in M,\ Y = \begin{pmatrix} a_2 & a_2+2b_2 \\ -b_2 & 0 \end{pmatrix} \in M$

a) $X + Y = \begin{pmatrix} a_1+a_2 & a_1+a_2+2b_1+2b_2 \\ -b_1 - b_2 & 0 \end{pmatrix}$.

Обозначим $a = a_1 + a_2, b = b_1 + b_2$

$X + Y = \begin{pmatrix} a & a+2b \\ -b & 0 \end{pmatrix} \in M$. Множество M замкнуто относительно операции сложения.

b) Пусть $\lambda \in R$; $\lambda X = \begin{pmatrix} \lambda a_1 & \lambda a_1 + 2\,\lambda b_1 \\ -\,\lambda b_1 & 0 \end{pmatrix}$.

Обозначим $a = \lambda a_1,\ b = \lambda b_1$,. Тогда $\lambda X = \begin{pmatrix} a & a+2b \\ -b & 0 \end{pmatrix} \in M$. Множество M замкнуто относительно операции умножения на число. Итак, M – линейное подпространство пространства M_{2x2}.

Найдем базис и размерность подпространства M:

$a = 1, b = 0 \rightarrow\ E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$a = 0, b = 1\ \rightarrow E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Докажем, что $\{E_1, E_2\}$ образуют базис в M.

Линейная независимость:

Составим линейную комбинацию матриц E_1, E_2, E_3: $\alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \alpha_3 E_3 =$

$$0\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ -\alpha_2 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\alpha_1 = \alpha_2 = 0.$

Следовательно, система матриц $\{E_1, E_2\}$ линейно независима.

Полнота:

Для любой матрицы $A \in M$:

$$A = \begin{pmatrix} a & a + 2b \\ -b & 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$A = aE_1 + bE_2 \Rightarrow$ матрицы $\{E_1, E_2\}$ образуют полную систему.

Итак, $\{E_1, E_2\}$ – базис подпространства $M_{2\text{x}2}$. Тогда $\dim\, M = 2$ (в базисе 2 матрицы).

c) Разложим заданную матрицу по базису.

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ 1 + 2b = -3 \\ -b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow a = 1; b = -2 \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$ принадлежит М.

d) Известно, что размерность пространства $dimM_{2\text{x}2}$=4. Следовательно, для получения базиса пространства необходимо добавить еще два линейно-независимых вектора. Для этого выпишем координаты базисных векторов подпространства. $E_1 = (1, 1, 0, 0)$; $E_1 = (0, 2, -1, 0)$. Для получения линейно-независимой системы векторов можно добавить векторы $E_3 =$

$(0,0,1,0)$; $E_1=(0,0,0,1)$. Действительно, составим матрицу из координат $E_1;E_2;E_3;E_4$. $P=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&2&-1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$. Rang P=4 => $\{E_1;E_2;E_3;E_4\}$ линейно-независимая=> образует базис в M.

Задача 7. Доказать, что множество геометрических векторов M, удовлетворяющих условию $(\overline{x},\overline{v})=0$, где $\overline{v}=(1,-3,-1)$ является линейным подпространством в V_3. Найти базис, размерность. Проверить , что вектор $\overline{x},=(1,2,-5)\in M$ и разложить его по найденному базису. Дополнить базис подпространства до базиса всего пространства.

Решение: Найдем общий вид вектора $\overline{x}\in M$; пусть $\overline{x}$=(a,b,c);

$(\overline{x},\overline{v})$ = a - 3b-c=0; => c= a-3b; Тогда $\overline{x}=$ (a,b, a-3b). Мы нашли общий вид вектора $\overline{x}\in M$.

Далее задача решается аналогично задаче 1.

Более интересно рассмотреть, как решается данная задача исходя из геометрического смысла.

Геометрически подпространство M является множеством векторов плоскости, перпендикулярной вектору $\overline{v}$. Выполнение аксиом замкнутости при этом очевидно, следовательно M является подпространством в V_3. dim M=2.

Любые два неколлинеарных вектора данной плоскости будут образовывать базис. Поэтому в качестве базиса можно взять любые два вектора, удовлетворяющие условиям: $\overline{e_1}\perp\overline{v}$; $\overline{e_2}\perp\overline{v}$ и $\overline{e_1}\nparallel\overline{e_2}$.

Например: $\overline{e_1}=(1,0,1)$; $\overline{e_2}$=$(0,1,-3)$;

Чтобы дополнить $\{\overline{e_1},\overline{e_2}\}$ до базиса V_3, надо добавить еще один вектор так, чтобы получилась тройка некомпланарных векторов. Можно выбрать в качестве $\overline{e_3}=\overline{v}$.

Линейная зависимость и независимость непрерывных функций.

Рассмотрим линейное пространство непрерывных функций.

Рассмотрим $C_{[a,b]}$ –пространство функций, непрерывных на отрезке $[a,b]$. Это бесконечномерное пространство.

Определение линейной зависимости функций: Система функций $S = \{f_1(t), \dots, f_n(t)\} \in C_{[a,b]}$ называется линейно зависимой, если найдутся такие числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in R$, не равные нулю одновременно, что

$\lambda_1 f_1(t) + \dots + \lambda_n f_n(t) = 0$ при любом значении t, то есть

$\lambda_1 f_1(t) + \dots + \lambda_n f_n(t) \equiv 0$

***Определение линейной независимости функций*:**

Если $\lambda_1 f_1(t) + \dots + \lambda_n f_n(t) \equiv 0$ возможно, только когда $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$, то система функций $S = \{f_1(t), \dots, f_n(t)\} \in C_{[a,b]}$ называется линейно независимой.

Пусть функции $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ определены на некотором интервале $x \in (a,b)$ и имеют производные до $(n-1)$-го порядка включительно.

Определение. *Определителем Вронского (вронскианом)* $W(x)$ системы функций $\{y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)\}$ называется определитель вида:

$$\boxed{W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}}$$

Теорема *(Необходимое условие линейной зависимости функций).*

Если система функций $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ линейна зависима на интервале (a,b), то ее определитель Вронского тождественно равен нулю на этом интервале ($W(x) = 0 \ \forall x \in (a,b)$).

Замечание. Обратное утверждение неверно. Определитель Вронского линейно *независимой* системы функций может быть тождественно равен нулю.

Теорема *(Достаточное условие линейной независимости функций).*

Если определитель Вронского $W(x)$ не равен тождественно нулю (не равен нулю хотя бы в одной точке интервала (a,b)), то функции $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ будут линейно независимыми.

Задача 8. Исследовать на линейную зависимость систему функций:

$\{x, \operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x\}, \ \ x \in (-\infty, +\infty)$

Решение. Формулы гиперболических функций:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$(\operatorname{ch} x)^2 - (\operatorname{sh} x)^2 = 1, \qquad \operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$$

Используем в этой задаче определитель Вронского.

Вычислим определитель Вронского для системы функций $\{x, \operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x\}$:

$$W(x) = \begin{vmatrix} x & \operatorname{sh} x & \operatorname{ch} x \\ 1 & \operatorname{ch} x & \operatorname{sh} x \\ 0 & \operatorname{sh} x & \operatorname{ch} x \end{vmatrix} = x(\operatorname{ch} x)^2 - x(\operatorname{sh} x)^2 =$$

$$= x \not\equiv 0$$

Следовательно, система функций $\{x, \operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x\}, \ \ x \in (-\infty, +\infty)$ линейно независимая.

Задача 9. Доказать линейную независимость системы функций:

$\{1, x, \sin x, \cos x\}, x \in \mathbb{R}$

Решение.

Вычислим определитель Вронского для системы функций $\{1, x, \sin x, \cos x\}$:

$$W(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & \sin x & \cos x \\ 0 & 1 & \cos x & -\sin x \\ 0 & 0 & -\sin x & -\cos x \\ 0 & 0 & -\cos x & \sin x \end{vmatrix} = -(\sin x)^2 - (\cos x)^2 = -1 \ \forall \ x \in \mathbb{R}$$

Следовательно, система функций $\{1, x, \sin x, \cos x\}$ – линейно

независимая.

Задача 10. Исследовать на линейную независимость функции:

1; cos2t; $\boldsymbol{sin^2 t}$***,*** t$\in (-\infty;+\infty)$.

Решение. Вычислим определитель Вронского для системы функций $\{1, cos2t, sin^2 t\}$:

$$W(x) = \begin{vmatrix} 1 & cos2t & sin^2 t \\ 0 & -2sin2t & sin2t \\ 0 & -4cos2t & 2cos2t \end{vmatrix} = -4sin2tcos2t + 4sin2tcost2 \equiv 0$$

На основании полученного результата мы не можем сделать никакого вывода. Тогда попробуем выразить одну из функций через другие.

$sin^2t = \frac{1-cos2t}{2}$ при t$\in(-\infty;+\infty)$. Таким образом существует нетривиальная линейная комбинация равная 0. А именно:

$$\frac{1}{2}\cdot 1-\frac{1}{2}\cdot cos2t - sin^2t = 0.$$

Теперь мы можем сделать вывод, что данные функции линейно зависимые.

Можно сказать, что линейная оболочка функций $\{1, cos2t, sin^2t\}$ образует линейное пространство размерностью 2. В качестве базиса можно выбрать, например, $\{1, cos2t\}$.

Задача 11

Найти какой-нибудь базис и определить размерность линейного пространства решений системы $\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3-5x_4=0\\ 2x_1+6x_2+9x_3-7x_4=0\\ x_1-2x_2+2x_3-11x_4=0\\ -x_1+4x_2-x_3+14x_4=0\end{cases}$

Решение. Выпишем основную матрицу и элементарными преобразованиями строк приведем ее к ступенчатому виду

$A =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -5\\ 2 & 6 & 9 & -7\\ 1 & -2 & 2 & -11\\ -1 & 4 & -1 & 14\end{pmatrix}\begin{matrix} \\ -2R1\\ -R1\\ +R1\end{matrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -5\\ 0 & 2 & 1 & 3\\ 0 & -4 & -2 & -6\\ 0 & 6 & 3 & 9\end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \\ +2R2\\ -3R2\end{matrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -5\\ 0 & 2 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Так как $rang(A) = 2 < n$, где n=4 – число переменных, то система имеет бесконечно много решений.

Выберем базисный минор

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 2\\ 0 & 2\end{matrix}} & \begin{matrix} 4 & -5\\ 1 & 3\end{matrix}\\ \begin{matrix} 0 & 0\\ 0 & 0\end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\end{pmatrix}$$

Пусть x_1, x_2– базисные переменные, а x_3, x_4 – свободные переменные.

Пусть $x_3 = C_1, x_4 = C_2$, $C_1, C_2 \in \boldsymbol{R}$

Полученная матрица соответствует системе двух уравнений

$$\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3-5x_4=0\\ 2x_2+x_3+3x_4=0\end{cases}$$

Обратный ход.

Из последнего уравнения выразим $2x_2 = -x_3 - 3x_4 = -C_1 - 3C_2$, тогда $x_2 = -\frac{1}{2}C_1 - \frac{3}{2}C_2$

Поднимаемся выше к первому уравнению. Подставляем полученные значения переменных x_2, x_3, x_4и выражаем x_1:

$$x_1 = -2x_2 - 4x_3 + 5x_4 = -2\left(-\frac{1}{2}C_1 - \frac{3}{2}C_2\right) - 4C_1 + 5C_2 = -3C_1 + 8C_2$$

Общее решение

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3C_1 + 8C_2 \\ -\frac{1}{2}C_1 - \frac{3}{2}C_2 \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} -3 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} 8 \\ -\frac{3}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, C_1, C_2 \in \boldsymbol{R}.$$

$$\text{ФСР}=\left\{\begin{pmatrix} -3 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 8 \\ -\frac{3}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

ФСР – это система линейно независимых решений; при этом любое решение системы можно представить в виде линейной комбинации ФСР. Таким образом совокупность решений данной системы представляет собой линейное пространство размерностью 2. В качестве базиса можно выбрать ФСР.