Лекция 3. Интегрирование тригонометрических, гиперболических и иррациональных функций.

Примеры на повторение материала второй лекции (интегрирование рациональных функций).

1.

$$\int \frac{dx}{x(x^{10}+1)^2} = \int \frac{x^9 dx}{x^{10}(x^{10}+1)^2} = \frac{1}{10}\int \frac{d(x^{10})}{x^{10}(x^{10}+1)^2} = [x^{10} = t] =$$

$$= \frac{1}{10}\int \frac{dt}{t(t+1)^2} = \left[\begin{array}{l} \frac{1}{t(t+1)^2} = \frac{1+t-t}{t(t+1)^2} = \frac{1}{t(t+1)} - \frac{1}{(t+1)^2} = \\ = \frac{1+t-t}{t(t+1)} - \frac{1}{(t+1)^2} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} - \frac{1}{(t+1)^2} \end{array}\right] =$$

$$= \frac{1}{10}\int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} - \frac{1}{(t+1)^2}\right) dt = \frac{1}{10}\left(\ln|t| - \ln|t+1| + \frac{1}{t+1}\right) + C =$$

$$= \frac{1}{10}\ln\left|\frac{t}{t+1}\right| + \frac{1}{10}\frac{1}{t+1} + C = \frac{1}{10}\ln\left(\frac{x^{10}}{x^{10}+1}\right) + \frac{1}{10(x^{10}+1)} + C$$

2.

$$\int \frac{2x^2-5x-23}{(x-2)(x+3)^2} dx =$$

$$\left[\begin{array}{c} \frac{2x^2-5x-23}{(x-2)(x+3)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{(x+3)^2} \\ 2x^2-5x-23 = A(x+3)^2 + B(x-2)(x+3) + C(x-2) \\ x=2:\ \ 8-10-23 = 25A => A = -1 \\ x=-3:\ \ 18+15-23 = -5C => C = -2 \\ x^2:\ \ 2 = A+B => B = 3 \end{array}\right] =$$

$$= \int (-\frac{1}{x-2} + \frac{3}{x+3} - \frac{2}{(x+3)^2}) dx = -\ln|x-2| + 3\ln|\mathrm{x}+3| + \frac{2}{x+3} + C$$

$$= \ln\left|\frac{(x+3)^3}{x-2}\right| + \frac{2}{x+3} + C$$

3.

$$\int \frac{x^3-4x^2-2x-8}{x^2+x+1}dx = \left[\frac{x^3-4x^2-2x-8}{x^2+x+1} = x-5+\frac{2x-3}{x^2+x+1}\right] =$$

$$= \int \left(x-5+\frac{2x-3}{x^2+x+1}\right)dx = \frac{1}{2}x^2-5x+\int \frac{2x+1-4}{x^2+x+1}dx =$$

$$= \frac{1}{2}x^2-5x+\int \frac{d(x^2+x+1)}{x^2+x+1} - 4\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} =$$

$$= \frac{1}{2}x^2-5x+\ln(x^2+x+1)-\frac{8}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$$

4.

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \int \frac{(1+x^2-x^2)dx}{(x^2+1)^2} = \int \frac{dx}{x^2+1} - \int x\frac{xdx}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \left[\begin{matrix} u = x, & du = dx \\ dv = \dfrac{xdx}{(x^2+1)^2}, & v = -\dfrac{1}{2(x^2+1)} \end{matrix}\right] =$$

$$= \operatorname{arctg}x + \frac{x}{2(x^2+1)} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}x + \frac{x}{2(x^2+1)} + C$$

Интегрирование тригонометрических функций.

Рассмотрим интегралы вида

$$\int R(sinx, cosx)dx$$

где подынтегральная функция $R(sinx, cosx)$ является рациональной функцией, зависящей от двух аргументов $sinx$ и $cosx$. Замена $t = tg\frac{x}{2}$, которая называется универсальной тригонометрической подстановкой, сводит данный интеграл к интегралу от рациональной дроби. Пользуясь тригонометрическими формулами, выразим $sinx$ и $cosx$ через переменную t:

$$sinx = \frac{2sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2}}{cos^2\frac{x}{2}+sin^2\frac{x}{2}} = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$cosx=\frac{cos^2\frac{x}{2}-sin^2\frac{x}{2}}{cos^2\frac{x}{2}+sin^2\frac{x}{2}}=\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Выразим x через переменную t:

$$x=2\mathrm{arctg}t,\qquad dx=\frac{2dt}{1+t^2}$$

Рассмотрим примеры.

Пример 1.

$$\int\frac{dx}{2-cosx}=\left[t=tg\frac{x}{2}\right]=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2-\frac{1-t^2}{1+t^2}}=$$

$$=\int\frac{2dt}{1+3t^2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\mathrm{arctg}\left(t\sqrt{3}\right)+C=\frac{2\sqrt{3}}{3}\mathrm{arctg}\left(\sqrt{3}tg\frac{x}{2}\right)+C$$

Пример 2.

$$\int\frac{dx}{3+5sinx}=\left[t=tg\frac{x}{2}\right]=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3+\frac{10t}{1+t^2}}=$$

$$=\int\frac{2dt}{3t^2+10t+3}=\int\frac{2dt}{(3t+1)(t+3)}=\frac{1}{4}\int\left(\frac{3}{3t+1}-\frac{1}{t+3}\right)dt=$$

$$=\frac{1}{4}(\ln|3t+1|-\ln|t+3|)+C=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{3tg\frac{x}{2}+1}{tg\frac{x}{2}+3}\right|+C$$

Универсальная тригонометрическая подстановка часто приводит к громоздким выражениям, поэтому в некоторых случаях применяются другие тригонометрические подстановки:

1. $\int R(sinx)cosxdx\,,\ t=sinx$

2. $\int R(cosx)sinxdx\,,\ t=cosx$

3. $\int R(tgx)dx\,,\ t=tgx$

4. $\int R(ctgx)dx\,,\ t=ctgx$

Рассмотрим примеры.

Пример 3.

$$\int \frac{sin2xdx}{1+sin^2x} = \int \frac{2sinxcosxdx}{1+sin^2x} = \begin{bmatrix} t = sinx \\ dt = cosxdx \end{bmatrix} = \int \frac{2tdt}{1+t^2} =$$

$$= \ln(1+t^2) + C = \ln(1+sin^2x) + C$$

Пример 4.

$$\int tg^3xdx = \begin{bmatrix} t = tgx \\ x = \mathrm{arctg}t \\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \end{bmatrix} = \int \frac{t^3dt}{1+t^2} = \int \frac{t^3+t-t}{1+t^2}dt =$$

$$= \int \left(t - \frac{t}{1+t^2}\right)dt = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}\ln(1+t^2) + C = \frac{1}{2}tg^2x - \frac{1}{2}\ln(1+tg^2x) + C$$

$$= \frac{1}{2}tg^2x + \ln|cosx| + C$$

В некоторых случаях при вычислении интегралов от тригонометрических функций следует применять основное тригонометрическое тождество:

$$cos^2x + sin^2x = 1,$$

формулы понижения степени:

$$cos^2x = \frac{1+cos2x}{2}, \qquad sin^2x = \frac{1-cos2x}{2},$$

а также тригонометрические формулы сложения

$$\sin\alpha x \cos\beta x = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)x + \sin(\alpha-\beta)x)$$

$$\sin\alpha x\ sin\beta x = \frac{1}{2}(cos(\alpha-\beta)x - \cos(\alpha+\beta)x)$$

$$\cos\alpha x \cos\beta x = \frac{1}{2}(cos(\alpha-\beta)x + \cos(\alpha+\beta)x)$$

Рассмотрим примеры:

Пример 5.

$$\int sin^4xcos^3xdx = \int sin^4x(1-sin^2x)cosxdx = \begin{bmatrix} t = sinx \\ dt = cosxdx \end{bmatrix} =$$

$$= \int t^4(1-t^2)dt = \int (t^4-t^6)dt = \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{7}t^7 + C = \frac{1}{5}sin^5x - \frac{1}{7}sin^7x + C$$

Пример 6.

$$\int cos^4xdx = \int \left(\frac{1+cos2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int (1+2cos2x+cos^2 2x)dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(1+2cos2x+\frac{1+cos4x}{2}\right)dx = \frac{1}{4}\int \left(\frac{3}{2}+2cos2x+\frac{1}{2}cos4x\right)dx =$$

$$= \frac{3}{8}x+\frac{1}{4}sin2x+\frac{1}{32}sin4x+C$$

Пример 7.

$$\int sin5xcos7xdx = \frac{1}{2}\int (sin12x - sin2x)dx = -\frac{1}{24}cos12x+\frac{1}{4}cos2x+C$$

Интегрирование гиперболических функций.

При интегрировании гиперболических функций применяют следующие определения и тождества:

$$shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad thx = \frac{shx}{chx}$$

$$ch^2x - sh^2x = 1, \qquad sh2x = 2shxchx, \qquad ch2x = ch^2x + sh^2x$$

$$ch^2x = \frac{ch2x+1}{2}, \qquad sh^2x = \frac{ch2x-1}{2}$$

Рассмотрим примеры:

Пример 8.

$$\int ch^3xdx = \int ch^2x\, chx\, dx = \int (1+sh^2x)chx\, dx = \begin{bmatrix} t = shx \\ dt = chxdx \end{bmatrix} =$$

$$= \int (1+t^2)dt = t+\frac{1}{3}t^3+C = shx+\frac{1}{3}sh^3x+C$$

Пример 9.

$$\int sh^2xdx = \int \frac{ch2x-1}{2}\, dx = \frac{1}{4}sh2x-\frac{1}{2}x+C$$

Пример 10.

$$\int \frac{dx}{sh^2x-4ch^2x} = \int \frac{1}{th^2x-4}\frac{dx}{ch^2x} = \begin{bmatrix} t = thx \\ dt = \dfrac{dx}{ch^2x} \end{bmatrix} =$$

$$= \int \frac{1}{t^2-4}dt = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right|+C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{thx-2}{thx+2}\right|+C$$

Интегрирование иррациональных функций.

Рассмотрим наиболее простые случаи интегрирования иррациональных функций. Если подынтегральная функция является рациональной функцией, зависящей от двух аргументов x и $\sqrt[n]{x},\ n=2,3,\ldots$, то подстановка $t=\sqrt[n]{x}$ сводит интеграл к интегралу от рациональной функции. Аналогично при вычислении интегралов вида $\int R\left(x,\sqrt[n]{ax+b}\right)dx$ и $\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$ применяются подстановки вида $t=\sqrt[n]{ax+b}$ и $t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ соответственно. Перейдем к примерам:

Пример 11.

$$\int\frac{dx}{x+\sqrt{x-1}}=\begin{bmatrix}t=\sqrt{x-1}\\ x=t^2+1\\ dx=2tdt\end{bmatrix}=\int\frac{2tdt}{t^2+1+t}=\int\frac{2t+1-1}{t^2+1+t}dt=$$

$$=\int\frac{d(t^2+t+1)}{t^2+t+1}-\int\frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\ln(t^2+t+1)-\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C=$$

$$=\ln\left(x+\sqrt{x-1}\right)-\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{2\sqrt{x-1}+1}{\sqrt{3}}+C$$

Пример 12.

$$\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx=\begin{bmatrix}t=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}},\ \ t^2=\frac{x-1}{x+1}\\ x=\frac{t^2+1}{1-t^2}\\ dx=\frac{4tdt}{(1-t^2)^2}\end{bmatrix}=\int\frac{1-t^2}{t^2+1}t\frac{4tdt}{(1-t^2)^2}=$$

$$=\int\frac{4t^2dt}{(t^2+1)(1-t^2)}=2\int\frac{(t^2+1)-(1-t^2)}{(t^2+1)(1-t^2)}dt=$$

$$=2\int\left(\frac{1}{1-t^2}-\frac{1}{1+t^2}\right)dt=\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|-2\mathrm{arctg}t+C=$$

$$=\ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}{1-\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}\right|-2\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+C$$

Рассмотрим на примерах вычисление интегралов вида

$$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+px+q}}dx$$

Пример 13.

$$\int \frac{4x+7}{\sqrt{x^2+4x+6}}dx = \int \frac{2(2x+4)-1}{\sqrt{x^2+4x+6}}dx = 2\int \frac{d(x^2+4x+6)}{\sqrt{x^2+4x+6}} -$$

$$-\int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2+2}} = 4\sqrt{x^2+4x+6} - \ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+6}\right| + C$$

Пример 14.

$$\int \frac{6x+11}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx = \int \frac{(-3)(-2x-2)+5}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx = -3\int \frac{d(3-2x-x^2)}{\sqrt{3-2x-x^2}} +$$

$$+5\int \frac{dx}{\sqrt{4-(x+1)^2}} = -6\sqrt{3-2x-x^2} + 5\arcsin\frac{x+1}{2} + C$$

При интегрировании выражений, содержащих квадратные корни из квадратных трехчленов, полезными оказываются тригонометрические и гиперболические подстановки:

Пример 15.

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}dx = \left[\begin{array}{c} x = 3sint, \qquad t = \arcsin\frac{x}{3} \\ \sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-9sin^2t} = 3cost \\ dx = 3costdt \end{array}\right] = \int \frac{9sin^2t}{3cost}3costdt =$$

$$= \frac{9}{2}\int (1-cos2t)dt = \frac{9}{2}t - \frac{9}{4}sin2t + C = \frac{9}{2}t - \frac{9}{2}sintcost + C =$$

$$= \frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3} - \frac{9}{2}\cdot\frac{x}{3}\cdot\frac{\sqrt{9-x^2}}{3} + C = \frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3} - \frac{x}{2}\sqrt{9-x^2} + C$$

Пример 16.

$$\int \sqrt{4+x^2}\,dx = \left[\begin{array}{c} x = 2sht, \qquad x = e^t - e^{-t}, \qquad e^{2t} - xe^t - 1 = 0 \\ e^t = \frac{1}{2}\left(x+\sqrt{4+x^2}\right), t = \ln\frac{x+\sqrt{4+x^2}}{2} \\ \sqrt{4+x^2} = \sqrt{4+4sh^2t} = 2cht \\ dx = 2chtdt \end{array}\right] =$$

$$= \int 2cht2chtdt = 2\int (ch2t+1)dt = sh2t + 2t + C = 2sht\cdot cht + 2t + C =$$

$$= 2 \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{\sqrt{4 + x^2}}{2} + 2 \ln\left(x + \sqrt{4 + x^2}\right) + C =$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{4 + x^2} + 2 \ln\left(x + \sqrt{4 + x^2}\right) + C$$