

ЛЕКЦИЯ № 12

Евклидовы пространства.

Определение евклидова пространства. Скалярное произведение векторов. Нормированные пространства. Угол между векторами. Неравенство Коши-Буняковского. Матрица Грама. Решение задач.

Определение. Линейное пространство E называется **евклидовым пространством**, если в нем задано скалярное произведение.

Определение. Скалярным произведением векторов $\bar{x}, \bar{y} \in E$ называется числовая функция (\bar{x}, \bar{y}) , если выполнены условия (аксиомы):

$$\forall \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

- 1) $(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{y}, \bar{x})$
- 2) $(\lambda \bar{x}, \bar{y}) = \lambda(\bar{x}, \bar{y})$
- 3) $(\bar{x} + \bar{z}, \bar{y}) = (\bar{x}, \bar{y}) + (\bar{z}, \bar{y})$;
- 4) $(\bar{x}, \bar{x}) \geq 0$, причем $(\bar{x}, \bar{x}) = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{0}$;

Другими словами, скалярное произведение – симметричная билинейная форма. Причем, соответствующая ей квадратичная форма-положительно определенная.

В произвольном линейном пространстве можно ввести скалярное произведение, причем различными способами.

Примеры:

$$\text{В } V_3 : (\bar{x}, \bar{y}) = |\bar{x}| |\bar{y}| \cos (\widehat{\bar{x}, \bar{y}})$$

$$\text{В } R^n : (\bar{x}, \bar{y}) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

В $C[0; 1]$ (линейное пространство функций, непрерывных на $[0; 1]$):

$$(f, g) = \int_0^1 f(x) g(x) dx$$

Можно легко убедиться, что определенные таким образом скалярные произведения удовлетворяют определению.

Свойства скалярного произведения:

- 1) $(\vec{x}, \lambda \vec{y}) = \lambda(\vec{x}, \vec{y})$
- 2) $(\vec{x}, \vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x}, \vec{y}) + (\vec{x}, \vec{z})$
- 3) $(\vec{x}, \vec{0}) = 0$
- 4) $\sum_{k=1}^m (a_k \vec{x}_k, \vec{y}) = \sum_{k=1}^m a_k (\vec{x}_k, \vec{y}); a_k \in R$
- 5) Если для любого \vec{z} , $(\vec{x}, \vec{z}) = (\vec{y}, \vec{z})$, то $\vec{x} = \vec{y}$

Теорема (неравенство Коши-Буняковского).

Для любых векторов \vec{x}, \vec{y} евклидова пространства справедливо неравенство Коши-Буняковского $(\vec{x}, \vec{y})^2 \leq (\vec{x}, \vec{x}) \cdot (\vec{y}, \vec{y})$



1. При $\vec{x} = \vec{0}$ обе части неравенства равны 0 => неравенство выполняется
2. Пусть $\vec{x} \neq \vec{0}$ $(\lambda \vec{x} - \vec{y}, \lambda \vec{x} - \vec{y}) \geq 0 \forall \lambda$ в силу аксиомы 4.
 $(\lambda \vec{x}, \lambda \vec{x} - \vec{y}) - (\vec{y}, \lambda \vec{x} - \vec{y}) = \lambda^2 (\vec{x}, \vec{x}) - \lambda (\vec{x}, \vec{y}) - \lambda (\vec{y}, \vec{x}) + (\vec{y}, \vec{y}) =$
 $\lambda^2 (\vec{x}, \vec{x}) - 2\lambda (\vec{x}, \vec{y}) + (\vec{y}, \vec{y}) \geq 0$

Это квадратный трехчлен относительно λ .

$(\vec{x}, \vec{x}) > 0 \Rightarrow$ трехчлен ≥ 0 , если $D \leq 0$

$$D = 4(\vec{x}, \vec{y})^2 - 4(\vec{x}, \vec{x})(\vec{y}, \vec{y}) \leq 0 \Rightarrow$$

$$(\vec{x}, \vec{y})^2 \leq (\vec{x}, \vec{x}) \cdot (\vec{y}, \vec{y}); \blacktriangleright$$

Примеры неравенства Коши - Буняковского:

В линейном пространстве R^n : $(a_1 b_1 + \dots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + \dots + b_n^2)$

В пространстве функций, непрерывных на отрезке $C[0;1]$:

$$\left(\int_0^1 f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \int_0^1 f(x)^2 dx \cdot \int_0^1 g(x)^2 dx$$

Определение. Функцию, заданную на линейном пространстве L , которая каждому вектору $\vec{x} \in L$ ставит в соответствие действительное число $\|\vec{x}\|$, называют **нормой**, если она удовлетворяет следующим аксиомам нормы:

- а) $\|\vec{x}\| \geq 0$, причем $\|\vec{x}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$;
- б) $\|\lambda \vec{x}\| = |\lambda| \|\vec{x}\|$; $\lambda \in R$.
- в) $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$ (неравенство треугольника)

Определение. Линейное пространство, в котором задана норма вектора, называется **нормированным**.

Теорема. Всякое скалярное произведение в евклидовом пространстве определяет норму вектора согласно формуле: $\|\vec{x}\| = \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})}$. Эта норма называется **евклидовой**.

◀ Согласно аксиоме скалярного произведения для $(\vec{x}, \vec{x}) \geq 0$; $\forall \vec{x} \Rightarrow$ функция $\|\vec{x}\| = \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})}$ определена $\forall \vec{x} \in E$ - евклидову пространству. Проверим выполнение всех аксиом нормы.

- а) следует из аксиомы 4 скалярного произведения;
- б) следует из аксиомы 2 скалярного произведения;

$$\|\lambda \vec{x}\| = \sqrt{(\lambda \vec{x}, \lambda \vec{x})} = \sqrt{\lambda^2 (\vec{x}, \vec{x})} = |\lambda| \|\vec{x}\|$$

в) запишем неравенство Коши-Буняковского в виде:

$$(\vec{x}, \vec{y}) \leq \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})} \sqrt{(\vec{y}, \vec{y})}, \text{ т.е. } (\vec{x}, \vec{y}) \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|;$$

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = (\vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y}) = (\vec{x}, \vec{x}) + 2(\vec{x}, \vec{y}) + (\vec{y}, \vec{y}) \leq$$

$$(\vec{x}, \vec{x}) + 2\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| + (\vec{y}, \vec{y}) = (\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|)^2 \Rightarrow$$

$$\|\bar{x} + \bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\| \blacktriangleright$$

Существуют также другие способы определения нормы, например:

$$\|\bar{x}\|_{\infty} = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}$$

Легко проверить, что $\|\bar{x}\|_{\infty}$ удовлетворяет аксиомам нормы.

Определение: Углом между ненулевыми векторами в евклидовом пространстве называют значение $\varphi \in [0, \pi]$, определяемое равенством

$$\cos \varphi = \frac{(\bar{x}, \bar{y})}{\|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\|}$$

Корректность формулы следует из *неравенства Коши-Буняковского*:

$$\forall \bar{x}, \bar{y} \in E \quad |(\bar{x}, \bar{y})| \leq \|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\|$$

Если один из векторов нулевой, то угол не определен.

Определение: Два ненулевых вектора называются *ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю. Обозначается $\bar{x} \perp \bar{y}$.

Пример. Доказать, что в евклидовом пространстве $C[0;1]$ векторы $f(x) \equiv 2$ и $g(x) = 2x - 1$ ортогональны.

$$(f, g) = \int_0^1 f g dx = \int_0^1 2(2x - 1) dx = 2(x^2 - x)|_0^1 = 0 \Rightarrow f \perp g.$$

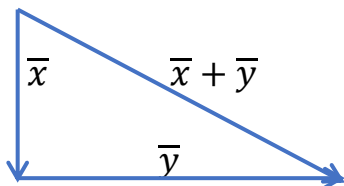
Утверждение. Нулевой вектор ортогонален любому вектору.

$$(\bar{x}, \bar{0}) = (\bar{x}, 0 \cdot \bar{0}) = 0(\bar{x}, \bar{0}) = 0.$$

Теорема. Если \bar{x} и $\bar{y} \in E$ ортогональны, то $\|\bar{x} + \bar{y}\|^2 = \|\bar{x}\|^2 + \|\bar{y}\|^2$

$$\begin{aligned} \blacktriangleleft \|\bar{x} + \bar{y}\|^2 &= (\bar{x} + \bar{y}, \bar{x} + \bar{y}) = (\bar{x}, \bar{x}) + 2(\bar{x}, \bar{y}) + (\bar{y}, \bar{y}) = \\ &= \|\bar{x}\|^2 + \|\bar{y}\|^2; \text{ так как } (\bar{x}, \bar{y}) = 0 \blacktriangleright \end{aligned}$$

Таким образом, теорема Пифагора распространяется на произвольное евклидово пространство.



Определение. Вектор называется *нормированным*, если $\|\bar{x}\|=1$

Определение. Система векторов $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$ называется *ортогональной*, если $(\bar{x}_i, \bar{x}_j)=0$, если $i \neq j$; $i, j=\overline{1, n}$

Определение. Система векторов $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$ называется ортонормированной, если $(\bar{x}_i, \bar{x}_j)=\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j \\ 0, & \text{если } i \neq j \end{cases}, i, j=\overline{1, n}$

(δ_{ij} – символ Кронекера).

Ортонормированная система ортогональна и $\|\bar{x}_i\|=1$ для $\forall i$.

Утверждение. Если векторы \bar{x} и \bar{y} ортогональны, то \bar{x} и $\lambda\bar{y}$ также ортогональны.

Теорема. Любая ортогональная система ненулевых векторов линейно независима.

◀ Рассмотрим произвольную ортогональную систему ненулевых векторов $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$. Предположим, что для некоторых действительных коэффициентов $\alpha_1 \dots \alpha_n$ выполняется $\alpha_1 \bar{e}_1 + \dots + \alpha_n \bar{e}_n = \bar{0}$. Умножим обе части равенства скалярно на \bar{e}_i .

$$(\alpha_1 \bar{e}_1 + \dots + \alpha_n \bar{e}_n, \bar{e}_i) = (\bar{0}, \bar{e}_i) = 0, \Rightarrow$$

$$\alpha_1 (\bar{e}_1, \bar{e}_i) + \dots + \alpha_i (\bar{e}_i, \bar{e}_i) + \dots + \alpha_n (\bar{e}_n, \bar{e}_i) = 0,$$

Векторы ортогональны \Rightarrow все слагаемые кроме одного обращаются в ноль $\Rightarrow \alpha_i (\vec{e}_i, \vec{e}_i) = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0$, так как $(\vec{e}_i, \vec{e}_i) \neq 0$ по аксиоме 4.

Таким образом доказывается, что $\alpha_i = 0$ для $\forall i \Rightarrow \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ л.н.з. ►

Теорема. Любая ортогональная система из n векторов в евклидовом пространстве размерности n образует базис.

◄ Ортогональная система из n векторов в евклидовом пространстве линейно-независима, а линейно-независимая система из n векторов в линейном пространстве размерности n образует базис. ►

Определение. Базис $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ называется **ортонормированным**, если векторы единичной длины и попарно ортогональны, то есть:

$$(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j, \\ 1 & \text{при } i = j. \end{cases}$$

Ортогональный базис легко превратить в ортонормированный, если каждый вектор разделить на его норму.

Координатная форма скалярного произведения в ортонормированном базисе: $(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$.

$$\text{Норма вектора } \|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

Матрица Грама

Определение. Матрица из попарных скалярных произведений векторов в фиксированном базисе B называется *матрицей Грама скалярного произведения в этом базисе*:

$$G_{\vec{B}} = \begin{pmatrix} (\vec{e}_1, \vec{e}_1) & (\vec{e}_1, \vec{e}_2) & \dots & (\vec{e}_1, \vec{e}_n) \\ (\vec{e}_2, \vec{e}_1) & (\vec{e}_2, \vec{e}_2) & \dots & (\vec{e}_2, \vec{e}_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\vec{e}_n, \vec{e}_1) & (\vec{e}_n, \vec{e}_2) & \dots & (\vec{e}_n, \vec{e}_n) \end{pmatrix}$$

Пусть в евклидовом пространстве в некотором базисе заданы два вектора

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad \bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix};$$

$$\text{тогда } (\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n g_{ij} x_i y_j = (x_1 \dots x_n) \cdot G \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = X^T \cdot G \cdot Y;$$

Критерий матрицы Грама скалярного произведения.

Теорема. Матрица G является матрицей Грама некоторого скалярного произведения в евклидовом пространстве тогда и только тогда, когда она

- 1) симметричная;
- 2) положительно определенная, т.е. все ее главные миноры положительные.

◀ Необходимость: $G = \{g_{ij}\}$ - матрица скалярного произведения \Rightarrow

$$(\bar{e}_i, \bar{e}_j) = (\bar{e}_j, \bar{e}_i) = g_{ij} \Rightarrow \text{матрица Грама симметричная};$$

$$(\bar{x}, \bar{x}) = X^T G X > 0, \text{ при } \bar{x} \neq \bar{0} \text{ по аксиоме 4 скалярного произведения};$$

$\Rightarrow G$ задает положительно определенную квадратичную форму, следовательно по критерию Сильвестра все ее главные миноры положительные;

Достаточность: Если G симметричная и положительно определенная, то она задает некий закон $(\bar{x}, \bar{y}) = X^T G Y$, удовлетворяющий свойствам скалярного произведения $\Rightarrow G$ - матрица Грама.

Скалярное произведение векторов не зависит от базиса пространства, но матрица Грама меняется при замене базиса. ►

Теорема. При замене базиса матрица Грама меняется по формуле

$$G_2 = P^T G_1 P; \text{ где } G_1 \text{ и } G_2 - \text{ матрицы Грама в базисах } B_1 \text{ и } B_2 \text{ соответственно, а } P - \text{ матрица перехода от базиса } B_1 \text{ к базису } B_2.$$

◀ Пусть X_{B_1} и Y_{B_1} – столбцы координат векторов \bar{x} и \bar{y} в базисе B_1 ; а X_{B_2} и Y_{B_2} – в базисе B_2 ;

$$(\bar{x}, \bar{y}) = X_{B_1}^T G_1 Y_{B_1} = (P X_{B_2})^T G_1 (P Y_{B_2}) = X_{B_2}^T (P^T G_1 P) Y_{B_2} = X_{B_2}^T G_2 Y_{B_2} \Rightarrow G_2 = P^T G_1 P \blacktriangleright$$

Матрица Грама в ортонормированном базисе является единичной матрицей. Для скалярного произведения в трёхмерном пространстве матрица Грама в ортонормированном базисе:

$$G_{\text{ортонормир. базис}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Решение задач

Задача 1. В евклидовом пространстве R^4 найти угол между векторами, заданными в каноническом базисе: $\bar{x} = (-1, 1, 0, 2)$; $\bar{y} = (2, -1, 1, 0)$

Решение.

Канонический базис ортонормированный \Rightarrow

$$\cos \varphi = \frac{-2-1}{\sqrt{1+1+4}\sqrt{4+1+1}} = -0.5$$

Задача 2

Базис задан своими координатами в ортонормированном базисе

$\{i, j, k\}$, $\bar{e}_1 = (1, 1, 1)$; $\bar{e}_2 = (2, 0, 1)$; $\bar{e}_3 = (1, 1, 0)$. Найти матрицу Грама в этом базисе.

Решение.

$$\begin{aligned} \underline{1 \text{ способ.}} \quad & (\vec{e}_1, \vec{e}_1) = 3; (\vec{e}_2, \vec{e}_2) = 5; (\vec{e}_1, \vec{e}_2) = 3; (\vec{e}_1, \vec{e}_3) = 2; \\ & (\vec{e}_3, \vec{e}_3) = 2; (\vec{e}_2, \vec{e}_3) = 2; \end{aligned}$$

$$G_2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

2 способ.

$$G_2 = P^T G_1 P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Пример 3. Дана матрица Грама скалярного произведения $G = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ в базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$.

Найти:

- длины базисных векторов $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$;
- угол между базисными векторами $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$;
- длины заданных векторов $\vec{x} = (1; 3)$ и $\vec{y} = (-2; 1)$;
- угол между векторами \vec{x} и \vec{y} ;

Решение.

Длины базисных векторов: $|\vec{e}_1| = \sqrt{(\vec{e}_1, \vec{e}_1)} = \sqrt{2}$, $|\vec{e}_2| = \sqrt{(\vec{e}_2, \vec{e}_2)} = \sqrt{5}$,

угол между базисными векторами $(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = \arccos \frac{(\vec{e}_1, \vec{e}_2)}{|\vec{e}_1||\vec{e}_2|} = \arccos \frac{-2}{\sqrt{10}} = \pi - \arccos \frac{2}{\sqrt{10}}$.

Вычислим длины данных векторов и угол между ними.

$$(\vec{x}, \vec{y}) = (x_1 \ x_2) G \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$(\vec{x}, \vec{x}) = (1 \ 3) \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 35,$$

$$(\vec{x}, \vec{y}) = (1 \ 3) \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 21,$$

$$(\vec{y}, \vec{y}) = (-2 \ 1) \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 17.$$

$$(\vec{x}, \vec{y}) = \arccos \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{|\vec{x}||\vec{y}|} = \arccos \frac{21}{\sqrt{35}\sqrt{17}}$$

Задача 4. Дана матрица $G = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -4 \\ 1 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ квадратичной формы $\varphi(\vec{x})$ в базисе

$$S = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\};$$

- Показать, что матрица G является матрицей Грама.
- Найти длины базисных векторов и углы между ними.
- Найти длины векторов $\vec{x}=(1,2,3)$ и $\vec{y}=(2,-1,2)$ и угол между ними.
- Найти матрицу Грама квадратичной формы $\varphi(\vec{x})$ в базисе $S_1 = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$,

$$\vec{f}_1 = \vec{e}_1$$

$$\vec{f}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$$

$$\vec{f}_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3.$$

Решение:

а)

- матрица симметрична относительно главной диагонали, то есть равны элементы $a_{ij} = a_{ji}$;

- все главные миноры строго положительны,

$$\Delta_1 = 1 > 0; \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 3 > 0; \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -4 \\ 1 & -4 & 5 \end{vmatrix} = 3 > 0.$$

Все условия критерия матрицы Грама выполнены, значит данная матрица G является матрицей Грама.

б) длины базисных векторов и углы между ними.

С помощью матрицы Грама

$$|\vec{e}_1| = \sqrt{(\vec{e}_1, \vec{e}_1)} = \sqrt{1} = 1; |\vec{e}_2| = \sqrt{(\vec{e}_2, \vec{e}_2)} = \sqrt{4} = 2; |\vec{e}_3| = \sqrt{(\vec{e}_3, \vec{e}_3)} = \sqrt{5}.$$

$$(\widehat{\vec{e}_1, \vec{e}_2}) = \arccos \frac{(\vec{e}_1, \vec{e}_2)}{|\vec{e}_1||\vec{e}_2|} = \arccos \frac{-1}{2} = \frac{2}{3}\pi$$

$$(\widehat{\vec{e}_1, \vec{e}_3}) = \arccos \frac{(\vec{e}_1, \vec{e}_3)}{|\vec{e}_1||\vec{e}_3|} = \arccos \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$(\widehat{\vec{e}_2, \vec{e}_3}) = \arccos \frac{(\vec{e}_2, \vec{e}_3)}{|\vec{e}_2||\vec{e}_3|} = \arccos \frac{-4}{2\sqrt{5}} = \pi - \arccos \frac{2}{\sqrt{5}}$$

с) длины векторов $\vec{x} = (1, 2, 3)$ и $\vec{y} = (2, -1, 2)$ и угол между ними.

Найдем попарные скалярные произведения данных векторов с помощью матрицы Грама:

$$(\vec{x}, \vec{x}) = (1 \ 2 \ 3) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -4 \\ 1 & -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = (2 \ -5 \ 8) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 16$$

$$(\vec{y}, \vec{y}) = (2 \ -1 \ 2) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -4 \\ 1 & -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = (5 \ -14 \ 16) \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 56$$

$$(\vec{x}, \vec{y}) = (1 \ 2 \ 3) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -4 \\ 1 & -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = (2 \ -5 \ 8) \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 25$$

Тогда длины данных векторов:

$$|\vec{x}| = \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})} = \sqrt{16} = 4; \quad |\vec{y}| = \sqrt{(\vec{y}, \vec{y})} = \sqrt{56},$$

угол между данными векторами

$$(\widehat{\vec{x}, \vec{y}}) = \arccos \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{|\vec{x}| |\vec{y}|} = \arccos \frac{25}{4 \cdot \sqrt{56}}$$

d) найдём матрицу Грама квадратичной формы $\varphi(\vec{x})$ в базисе

$S_1 = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ с помощью матрицы перехода:

$$G_{S_1} = P^T G P; \quad P_{S \rightarrow S_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} G_{S_1} &= P^T G P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -4 \\ 1 & -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ -1 & 7 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 6 \\ -1 & 6 & 14 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Убедимся, что полученная матрица является матрицей Грама:

- матрица симметрична относительно главной диагонали, то есть равны элементы

$$a_{ij} = a_{ji};$$

- все главные миноры строго положительны,

в полученной матрице это

$$\Delta_1 = 1 > 0; \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 > 0; \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 6 \\ -1 & 6 & 14 \end{vmatrix} = 3 > 0.$$

Все условия критерия матрицы Грама выполнены, значит полученная матрица G_{S_1} является матрицей Грама.