ЛЕКЦИЯ № 7
Собственные значения и собственные векторы линейного оператора. Линейные операторы простого типа.

Собственные значения и собственные векторы линейного оператора.

Пусть L - n-мерное линейное пространство.

$\hat{A}: L \to L$ – линейный оператор, действующий в L.

Определение. Ненулевой вектор $\vec{a}$ $(\vec{a} \neq \vec{0})$ в линейном пространстве L называют ***собственным вектором линейного оператора*** $\hat{\boldsymbol{A}}$**:** $L \to L$, отвечающим ***собственному значению*** $\boldsymbol{\lambda}$, $(\lambda \in R)$, если $\hat{A}\vec{a} = \lambda\vec{a}$.

Изучение собственных векторов и собственных значений занимает важное место в теории линейных операторов. Это связано с тем, что многие операции, содержащие линейный оператор, значительно упрощаются, если в качестве векторов базиса линейного пространства, в котором действует оператор, выбрать собственные векторы этого оператора.

Замечание 1. Каждому собственному значению (числу) соответствуют свои собственные векторы, причем таких бесконечно много.

Замечание 2. Каждому собственному вектору соответствует единственное собственное значение (число).

Замечание 3. В пространстве геометрических векторов собственные векторы линейного оператора, это векторы, которые под его воздействием переходят в себе коллинеарные.

Примеры:

Рассмотрим линейный операторы, действующие в линейном пространстве V_3 и найдем их собственные значения и собственные векторы.

1) Оператор проектирования на плоскость XOZ:

$$\hat{A}(\alpha\bar{i}) = \alpha\bar{i}; \qquad \hat{A}(\alpha\bar{j}) = \bar{0} = 0\bar{j}; \qquad \hat{A}(\alpha\bar{k}) = \alpha\bar{k}.$$

Векторы, параллельные координатным осям являются собственными с собственными значениями *1;0;1*.

2) Гомотетия с коэффициентом k.
   $\hat{A}(\overline{x}) = k\overline{x}$.; т.е. $\forall\overline{x} \in V_3$ является собственным с собственным значением $\lambda = k$.
3) $\hat{I}: L \to L$ – тождественный оператор: $\hat{I}\vec{x} = \vec{x} \Rightarrow \forall$ вектор $\vec{x} \in L$ является собственным с собственным значением $\lambda = 1$.

Определение. ***Характеристическим многочленом* матрицы** называется следующий многочлен $\boldsymbol{\chi(\lambda)}$ =**det** $(\mathrm{A} - \boldsymbol{\lambda E})$**.**

Определение. ***Характеристическим уравнением матрицы*** называется следующее уравнение : **det** $(\mathrm{A} - \boldsymbol{\lambda E}) = \mathbf{0}$. Его корни называются ***характеристическими числами*** матрицы.
Определение. Характеристическим многочленом и характеристическим уравнением линейного оператора называются соответственно характеристический многочлен и характеристическое уравнение его матрицы в каком-либо базисе.

Теорема 12. Характеристический многочлен линейного оператора не зависит от выбора базиса; корни характеристического уравнение также не зависят от выбора базиса.
►Пусть матрицы линейного оператора в первом базисе A; во втором A′; P-матрица перехода от первого базиса ко второму.
Тогда $\mathrm{A}' = P^{-1}AP$. Составим характеристическое уравнение:
$\det(\mathrm{A}' - \lambda E) = \det(P^{-1}AP - \lambda E) = \det(P^{-1}AP - \lambda P^{-1}EP) =$
$\det(P^{-1}(A - \lambda E)P) = \det(P^{-1})\, det(A - \lambda E) detP = \det(A - \lambda E)$ ◄

Теорема 13. Для того, чтобы действительное число λ являлось собственным значением линейного оператора, необходимо и достаточно, чтобы оно было корнем характеристического уравнения этого оператора.
►
<u>Необходимость:</u> Пусть λ – собственное значение л.о. $\hat{A}$;
$\overline{x}$ – собственный вектор, ему отвечающий. Тогда $\hat{A}\,\overline{x} = \lambda\overline{x}$; ; $\overline{x} \neq \overline{0}$;
$\hat{A}\,\overline{x} = \lambda\hat{I}\overline{x}$ => $(\hat{A} - \lambda\hat{I})\,\overline{x} = \overline{0}$; Запишем в матричном виде:
(A-λE)$\overline{x}$ =$\overline{0}$, где A- матрица $\hat{A}$ в каком либо базисе;
(A-λE)$\overline{x}$ =$\overline{0}$, однородная система линейных уравнений, которая имеет ненулевое решение $\overline{x} \neq \overline{0}$, так как $\overline{x}$ – собственный вектор $\hat{A}$ =>

λ удовлетворяет уравнению det $(A\text{-}\lambda E) = 0$

⇨ λ- корень характеристического уравнения.

Достаточность: Пусть λ −корень характерестического уравнения => det $(A\text{-}\lambda E) = 0$ => однородная система уравнений $(A\text{-}\lambda E)\overline{x} = \overline{0}$ имеет ненулевое решение $\overline{x}$ и для $\overline{x}$ выполняется $(\hat{A} - \lambda\hat{I})\,\overline{x} = \overline{0}$ => $\hat{A}\,\overline{x} = \lambda\overline{x}$ => λ − собственный вектор отвечающий собственному значению λ. ◄

Каждому собственному значению λ линейного оператора сопоставляют его ***кратность***, полагая ее кратности корня λ характеристического уравнения.

Алгоритм нахождения собственных значений и собственных векторов линейного оператора.

1) Выбрать базис в линейном пространстве L и составить в нем матрицу A линейного оператора $\hat{A}$;
2) Составить характеристическое уравнение det $(A - \lambda E) = 0$ и найти все его действительные корни $\lambda_к$;
3) Для каждого $\lambda_к$ найти фундаментальную систему решений для однородной системы $(A\text{-}\lambda_к E)\vec{x}=0$. Найденная ФСР состоит из искомых собственных векторов.

Задача 1. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора $\hat{A}$, заданного в некотором базисе двумерного пространства матрицей:

$$4)\ A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Решение. Составим характеристическое уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$:

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 3 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \ \Rightarrow$$

$\lambda^2 - 9\lambda + 14 = 0$, откуда получим $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 7$ – собственные значения.

Координаты собственного вектора $\vec{x} = (x_1;\ x_2)$, принадлежащего собственному значению λ, удовлетворяют матричному уравнению:

$$(A - \lambda E)X = O \Rightarrow \begin{pmatrix} 4-\lambda & 3 \\ 2 & 5-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Или, что тоже самое, системе:

$$\begin{cases}(4-\lambda)x_1+3x_2=0,\\ 2x_1+(5-\lambda)x_2=0.\end{cases}$$

При $\boldsymbol{\lambda_1}=\mathbf{2}$ решаем систему $(A-\ 2E)X\quad=O$:

$$\begin{pmatrix}4-2 & 3\\ 2 & 5-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}2x_1+3x_2=0,\\ 2x_1+3x_2=0.\end{cases}\Rightarrow x_1=-\frac{3}{2}x_2.$$

Выбирая в качестве свободной переменной x_2, т.е. $x_2=C$, получим общее решение системы:

$$X^1=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\text{C}\\ \text{C}\end{pmatrix}=\text{C}\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\ 1\end{pmatrix}, C\neq 0; C\in\mathbb{R}\ ;\ \Rightarrow$$

$\vec{\boldsymbol{x}}_\mathbf{1}=\left(-\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\text{C};\text{C}\right), C\in\mathbb{R}$ – все собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda_1=2$.

Полагая, например, $C=2$, получим собственный вектор $\vec{f_1}=(-3;2)$, который представляет собой фундаментальную систему решений данной системы.

При $\boldsymbol{\lambda_2}=\mathbf{7}$ решаем систему $(A-\ 7E)X\quad=O$:

$$\begin{pmatrix}4-7 & 3\\ 2 & 5-7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}-3x_1+3x_2=0,\\ 2x_1-2x_2=0.\end{cases}\Rightarrow x_1=x_2.$$

Выбирая в качестве свободной переменной x_2, т.е. $x_2=C$, получим общее решение системы:

$$X^2=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\text{C}\\ \text{C}\end{pmatrix}=\text{C}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}, C\neq 0;\ C\in\mathbb{R}\ \Rightarrow$$

Фундаментальная система решений состоит из одного вектора $\vec{f_2}=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$.

$\vec{\boldsymbol{x}}_\mathbf{2}=(\text{C};\text{C}), C\in\mathbb{R}$ – собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda_2=7$.

Задача 2. Определить собственные значения и собственные векторы линейного оператора $\hat{A}$, заданного матрицей А.

$$\text{A}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 4 & 0 & 1\\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

Решение. Найдем собственные значения. Для этого составим характеристическое уравнение $\det(\text{A}-\lambda E)=0$.

$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 2 \\ 4 & -\lambda & 1 \\ 3 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$=0. Вычислим определитель по правилу Саррюса.

$\lambda^2\,(1-\lambda)+3-8+6\lambda-4(1-\lambda)-\;\lambda=\lambda^2\,(1-\lambda)-5(1-\lambda)-4(1-\lambda)=$ (1- λ)$(\lambda^2-9)=0$; (1- λ)$(\lambda-3)(\lambda+3)$=0.

λ_1= 1; λ_2= 3; λ_3= -3 - собственные значения линейного оператора.

Найдем собственные векторы, соответствующие найденным собственным значениям.

$\boldsymbol{\lambda_1}$**= 1;**

Решим систему (A-1·E)$\overline{X}$=$\overline{O}$;

Найдем матрицу A-E =$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$;

Тогда система принимает вид:

$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, решим систему методом Гаусса.

$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $rang\ A=2;$

$\begin{cases} x_3=\text{c} \\ x_2+3x_3=0 \\ -x_1+x_2+2x_3=0 \end{cases}$ $x_3=\text{c};\ x_2=-3c;\ x_1=-\text{c}\ ,\ \text{c}\neq 0;\text{c}\in\mathbb{R}$

X^1=$\begin{pmatrix} -\text{c} \\ -3c \\ \text{c} \end{pmatrix}$=$c\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ - собственные векторы, соответствующие λ_1=1.

$\boldsymbol{\lambda_2}$**= 3**;

Решим систему (A-3E)$\overline{X}$=$\overline{O}$;

Найдем матрицу A-3E = $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}-3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, решим систему методом Гаусса.

$$\begin{pmatrix}-3 & 1 & 2\\ 4 & -3 & 1\\ 3 & -1 & -2\end{pmatrix} + I\text{строка} \sim \begin{pmatrix}-3 & 1 & 2\\ 1 & -2 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & -5 & 11\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$rang\ A = 2;$

$$\begin{cases} x_3 = \text{c}\\ -5x_2 + 11x_3 = 0\\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0\end{cases};\ x_3 = \text{c};\ x_2 = \frac{11}{5}c;\ x_1 = \frac{7}{5}\text{c};\ \text{c} \neq 0; \text{c} \in \mathbb{R}$$

$X^2 = \begin{pmatrix}\frac{7}{5}\\ \frac{c11}{5}\\ c\end{pmatrix} = c\begin{pmatrix}\frac{7}{5}\\ \frac{11}{5}\\ 1\end{pmatrix}$ - собственные векторы, соответствующие λ_2=3.

$\boldsymbol{\lambda_3}$**= -3;**

Решим систему (A+3E)$\overline{X}$=$\overline{O}$

$\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ 4 & 3 & 1\\ 3 & -1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$, решим систему методом Гаусса.

$$\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ 4 & 3 & 1\\ 3 & -1 & 4\end{pmatrix} - I\text{строка} \sim \begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ 1 & 2 & -1\\ 0 & -2 & 2\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & -5 & 5\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$rang\ A = 2;$

$$\begin{cases} x_3 = \text{c}\\ -x_2 + x_3 = 0\\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\end{cases};\ x_3 = c;\ x_2 = c;\ x_1 = -c;\ \ \text{c} \neq 0; \text{c} \in \mathbb{R}$$

$x_2 = 0;\ x_3 = c;\ x_1 = 2c.$

$X^3 = \begin{pmatrix}-c\\ c\\ c\end{pmatrix} = c\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$ - собственные векторы, соответствующие λ_3= - 3.

Линейные операторы простого типа.

Теорема 14. Собственные векторы линейного оператора $\hat{A}$, соответствующие попарно различным собственным значениям, линейно независимы.

► Докажем для 2х векторов.

Пусть $\hat{A}\overrightarrow{x_1} = \lambda_1\overrightarrow{x_1};\ \hat{A}\overrightarrow{x_2} = \lambda_2\overrightarrow{x_2};\ \lambda_1 \neq \lambda_2;$

Рассмотрим линейную комбинацию $\alpha_1\overrightarrow{x_1} + \alpha_2\overrightarrow{x_2}=\overline{0}$.
Подействуем $\hat{A}$ на эту линейную комбинацию.
$\hat{A}(\alpha_1\overrightarrow{x_1} + \alpha_2\overrightarrow{x_2}) = \hat{A}\overline{0} = \overline{0}$;
В то же время $\hat{A}(\alpha_1\overrightarrow{x_1} + \alpha_2\overrightarrow{x_2}) = \alpha_1\hat{A}\overrightarrow{x_1} + \alpha_2\hat{A}\overrightarrow{x_2} = \alpha_1\lambda_1\overrightarrow{x_1} + \alpha_2\lambda_2\overrightarrow{x_2}=\overline{0}$;
Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \alpha_1\overrightarrow{x_1} + \alpha_2\overrightarrow{x_2} = \overline{0} & (1) \\ \alpha_1\lambda_1\overrightarrow{x_1} + \alpha_2\lambda_2\overrightarrow{x_2} = \overline{0} & (2) \end{cases}$$

Вычтем из 2го уравнения 1-е , умноженное на λ_1: $\alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1)\overrightarrow{x_2}=\overline{0}$
$\lambda_1 \neq \lambda_2; \overrightarrow{x_2} \neq \overline{0} => \alpha_2 = 0$.
Вычтем из 2го уравнения 1-е , умноженное на λ_2: $\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_2)\overrightarrow{x_1}=\overline{0}$

$\lambda_1 \neq \lambda_2; \overrightarrow{x_1} \neq \overline{0} => \alpha_1 = 0 => \alpha_1 = \alpha_2 = 0 => \overrightarrow{x_1}$ и $\overrightarrow{x_2}$ линейно независимы. ◄

Для общего случая (n≥ 2 векторов) доказательство проводится методом математической индукции.

Следствие. Пусть $\hat{A}$- линейный оператор, действующий в линейном пространстве L, dim L=n, и имеет n различных собственных значений $\lambda_1 \dots \lambda_n$. Тогда отвечающие им собственные векторы $\overline{x}_1 \dots \overline{x}_n$ образуют базис в L.

►Система векторов $\{\overline{x}_1 \dots \overline{x}_n\}$ л.н.з., dim L=n =>
$\{\overline{x}_1 \dots \overline{x}_n\}$ образует базис в L. ◄

Определение. Линейный оператор $\hat{A}$: L⟶ L называется оператором простого типа (диагонализируемый), если существует базис линейного пространства L, состоящий из собственных векторов $\hat{A}$.

Теорема 15. (достаточное условие оператора простого типа) Пусть dim L=n. Если $\hat{A}: L \to L$ имеет n попарно различных собственных значений, то он является оператором простого типа.
►По теореме 14 собственные векторы имеющие различные собственные значения линейно-независимы , тогда в пространстве размерности n существует n линейно-независимых собственных векторов. Следовательно, они образуют базис. Тогда по определению линейный оператор $\hat{A}$ – простого типа. ◄

Замечание. Обратное утверждение не верно, например, тождественный оператор $\hat{I}$ является оператором простого типа и имеет единственное собственное значение $\lambda = 1$.

Теорема 16. Пусть линейный оператор $\hat{A}-$ простого типа. Тогда в собственном базисе действия линейного оператора сводятся к умножению координат вектора на соответствующие собственное число.

► $\widehat{A}(\overline{x}) = \hat{A}(x_1\overline{e}_1+\ldots+x_n\overline{e}_n) = x_1\hat{A}\overline{e}_1+\ldots+x_n\hat{A}\overline{e}_n=$

$= x_1\lambda_1\overline{e}_1+\ldots+x_n\lambda_n\overline{e}_n;$ ◄

Теорема 17. Пусть $\hat{A}$- оператор простого типа. Его матрица А в некотором базисе имеет диагональный вид тогда и только тогда, когда это базис из собственных векторов.

►

Необходимость. Пусть S={$\overline{e}_1 \ldots \overline{e}_n$}- это базис из собственных векторов;

$\overline{e}_i = (0 \ldots 1 \ldots 0)_s$; $\hat{A}(\overline{e}_i) = \lambda_i\overline{e}_i$=$(0 \ldots \lambda_i \ldots 0)$; => Матрица л.о.

$$A=\begin{pmatrix} \lambda_i & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \lambda_i & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix};$$

Достаточность. Пусть матрица линейного оператора имеет диагональный вид. Тогда $\hat{A}(\overline{e}_i)$=$(0 \ldots \lambda_i \ldots 0)$=$\lambda_i\overline{e}_i$ => S={$\overline{e}_1 \ldots \overline{e}_n$} это базис из собственных векторов. ◄

Пример:

Рассмотрим тождественный оператор $\hat{I}$ в V_3.

Матрица тождественного оператора в любом базисе является единичной матрицей $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ и имеет диагональный вид, следовательно $\hat{I}$ – линейный оператор простого типа.

Еще раз отметим, что данный линейный оператор имеет три одинаковых собственных значения, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ и, тем не менее, он является оператором простого типа.

Задача 3. Рассмотрим задачу 2 из лекции . Мы нашли собственные значения и собственные векторы линейного оператора $\hat{A}$, заданного матрицей А.

А=$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Давайте определим, будет ли $\hat{A}$ оператором простого типа.

Решение

Собственные значения данного линейного оператора:

λ_1= 1; λ_2= 3; λ_3= -3

Они различны. Тогда, по теореме 15, мы можем сразу сделать вывод о том, что это линейный оператор простого типа. Его матрица в базисе из собственных векторов будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

На главной диагонали стоят собственные значения.

Давайте найдем этот базис.

$\boldsymbol{\lambda_1}$**= 1** соответствуют собственные векторы X^1=$c\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$;

Выберем из этого множества один вектор. Возьмем с=1, Получим вектор $\overline{f}_1$=$\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{\lambda_2}$**= 3** соответствуют собственные векторы X^2 =$c\begin{pmatrix} \frac{7}{5} \\ \frac{11}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$;

Возьмем с=5, получим вектор $\overline{f}_1$=$\begin{pmatrix} 7 \\ 11 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{\lambda_3}$**= -3** соответствуют собственные векторы X^3=$c\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Возьмем с=1, получим вектор $\overline{f}_1$=$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Таким образом мы нашли три линейно-независимых собственных вектора. $\overline{f}_1$=$\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\overline{f}_2$=$\begin{pmatrix} 7 \\ 11 \\ 5 \end{pmatrix}$; $\overline{f}_3$=$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Они будут образовывать базис из собственных векторов, в котором матрица линейного оператора будет иметь вид:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{pmatrix}$$

Проверим выполнение формулы $A' = P^{-1} \cdot A \cdot P$;

Матрица перехода P = $\begin{pmatrix}-1 & 7 & -1\\ -3 & 11 & 1\\ 1 & 5 & 1\end{pmatrix}$; $P^{-1} = \frac{1}{48}\begin{pmatrix}6 & -12 & 18\\ 4 & 0 & 4\\ -26 & 12 & 10\end{pmatrix}$;

$$A' = \frac{1}{48}\begin{pmatrix}6 & -12 & 18\\ 4 & 0 & 4\\ -26 & 12 & 10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 4 & 0 & 1\\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 7 & -1\\ -3 & 11 & 1\\ 1 & 5 & 1\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{48}\begin{pmatrix}6 & -12 & 18\\ 12 & 0 & 12\\ 78 & -36 & -30\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 7 & -1\\ -3 & 11 & 1\\ 1 & 5 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{pmatrix}$$;верно.

Задача 3. Определить собственные значения и собственные векторы линейного оператора $\widehat{A}$, заданного матрицей А. Является ли линейный оператор $\hat{A}$ оператором простого типа? Если да, то выписать матрицу линейного оператора в базисе из собственных векторов.

$$A = \begin{pmatrix}6 & -5 & -3\\ 3 & -2 & -2\\ 2 & -2 & 0\end{pmatrix}$$

Решение.

Найдем собственные значения. Для этого составим характеристическое уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$

$$\begin{vmatrix}6-\lambda & -5 & -3\\ 3 & -2-\lambda & -2\\ 2 & -2 & -\lambda\end{vmatrix} = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 4\lambda + \lambda - 2 =$$

$$\lambda(\lambda-2)^2 + \lambda - 2 = (\lambda-2)(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = (\lambda-1)^2(\lambda-2) = 0$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$; $\lambda_3 = 2$ - собственные значения.

Так как $\lambda_1 = \lambda_2$, мы пока не можем сказать, будет ли линейный оператор простого типа.

Найдем собственные векторы, соответствующие собственным значениям.

$\boldsymbol{\lambda_1 = \lambda_2 = 1}$**;** Решим систему $(A-E)\overline{X} = \overline{O}$

$\begin{pmatrix} 5 & -5 & -3 \\ 3 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, решим систему методом Гаусса.

Из первой строки вычтем 2-ю и 3-ю, а затем из 2-й вычтем 3-ю

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$rang\ A = 2;$

$x_3 = 0;\ \ x_2 = c;\ x_1 - x_2 = 0;\ => x_1 = c$

$X^1 = \begin{pmatrix} c \\ c \\ 0 \end{pmatrix}$- собственные векторы, соответствующие $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$

$\boldsymbol{\lambda_3}$**= 2;** Решим систему (A-2E)$\overline{X} = \overline{O}$

$\begin{pmatrix} 4 & -5 & -3 \\ 3 & -4 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, решим систему методом Гаусса.

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 & -3 \\ 3 & -4 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -4 & -2 \\ 4 & -5 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$rang\ A = 2;\ x_3 = c;\ x_2 = c;\ x_1 - x_2 - x_3 = 0;\ x_1 = 2c.$

$X^2 = \begin{pmatrix} 2c \\ c \\ c \end{pmatrix}$ - собственные векторы, соответствующие $\lambda_3 = 2$.

Мы можем найти всего два линейно-независимых собственных вектора. Таким образом, не существует базиса из собственных векторов, значит данный линейный оператор **не является линейным оператором простого типа.**