Лекция №9

4. Двойной интеграл: *вычисление, приложения*

Замена переменных в двойном интеграле

Пусть на координатной плоскости переменных x, y задана некоторая область D, а на плоскости переменных u, v – область G. Функции $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ устанавливают взаимно однозначное соответствие между точками этих областей. Предположим, что эти функции непрерывны и имеют непрерывные частные производные первого порядка в области G, а функциональный определитель

$$I = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix},$$

который называется якобианом, не обращается в нуль в области G. Формула замены переменных в двойном интеграле имеет вид:

$$\iint\limits_D f(x,y)dx\,dy = \iint\limits_G f\left(x(u,v), y(u,v)\right)\cdot\left|I\right|\cdot du\,dv$$

Вычислим якобиан в случае перехода от декартовых координат x, y к полярным r, φ, связь между которыми устанавливается равенствами:

$$x = r\cos\varphi,\ \ y = r\sin\varphi$$

$$I = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r$$

Формула замены переменных в этом случае имеет вид:

$$\iint\limits_D f(x,y)dx\,dy = \iint\limits_G f\left(r\cos\varphi, r\sin\varphi\right)r\,dr\,d\varphi$$

Поясним геометрический смысл выражения $rdr\,d\varphi$. Если на плоскости переменных r, φ рассмотреть элементарный прямоугольник со сторонами $dr, d\varphi$, то на плоскости x, y ему будет соответствовать фигура, ограниченная дугами окружностей радиусов r и $r+dr$ и двумя лучами, исходящими из начала координат под углами φ и $\varphi+d\varphi$.

Принимая приближённо эту фигуру за прямоугольник, получим выражения для его площади: $rdr\,d\varphi$. Таким образом, при вычислении двойного интеграла в криволинейных координатах область интегрирования делится не на прямоугольные элементы, а на криволинейные с помощью сетки координатных линий.

Если область D на плоскости xOy ограничена полярными лучами $\varphi=\varphi_1$, $\varphi=\varphi_2$ и линиями $r=r_1(\varphi)$, $r=r_2(\varphi)$, заданными в полярных координатах (рис. 3),

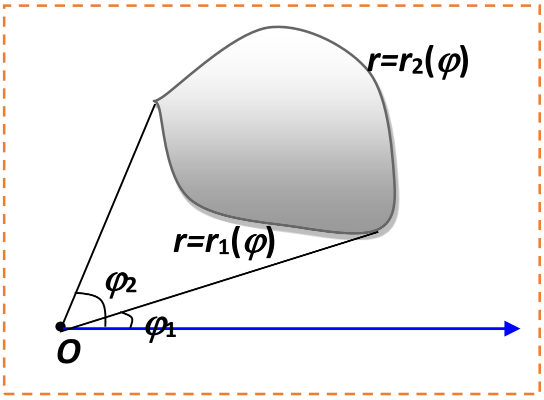


Рис. 3

то двойной интеграл по области D сводится к повторному по формуле:

$$\iint\limits_D f(x,y)dx\,dy=\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}d\varphi\int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)}f\left(r\cos\varphi,r\sin\varphi\right)rdr$$

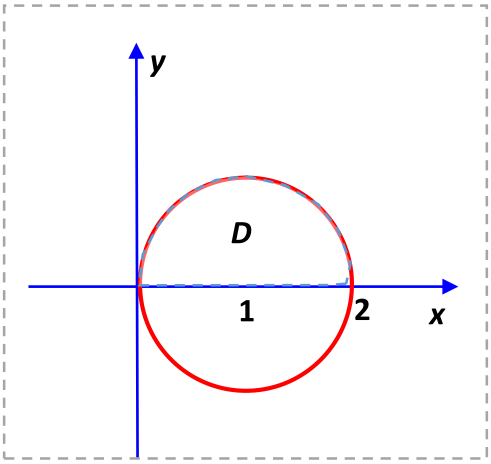
Рассмотрим примеры.

Пример 1. В качестве приложения двойного интеграла получим хорошо известную формулу для площади круга радиуса R с центром в начале координат.

Решение.

$$\iint\limits_D d\rho d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R \rho d\rho = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{\rho^2}{2} \Bigg|_0^R \right) = \frac{R^2}{2} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \frac{R^2}{2} 2\pi = \pi R^2.$$

<u>*Пример* 2</u>. Вычислить $\iint\limits_D (x^2+y^2)dx\,dy$ где область D ограничена окружностью радиуса *R*=1 с центром в точке (1;0): $(x-1)+y^2=1$.



<u>*Решение*</u>.

Перепишем уравнение окружности в виде

$$x^2+y^2=2x$$

и перейдём к полярным координатам:

$r=2\cos\varphi,\ \varphi\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

$$\iint\limits_D (x^2+y^2)dx\,dy = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} r^3 dr = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{4}r^4\right)\Bigg|_0^{2\cos\varphi} d\varphi = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^4\varphi d\varphi =$$

$$=4\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1\cos 2\varphi}{2}\right)^2 d\varphi = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+2\cos 2\varphi+\frac{1+4\cos 4\varphi}{2}\right)d\varphi = \left(\frac{3}{2}\varphi+\sin 2\varphi+\frac{1}{8}\sin 4\varphi\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2}\pi$$

<u>*Пример* 3</u>. Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями $z = x^2 + y^2$, $z = 4$.

<u>*Решение*</u>.

Тело заключено между двумя поверхностями, его объём равен

$$V = \iint\limits_D \left(4 - \left(x^2 + y^2\right)\right) dxdy,$$

где D – проекция тела на плоскость xOy и представляет собой круг с центром в начале координат и радиуса 2. Уравнение границы этого круга в полярных координатах имеет вид:

$$r = 2,\ \varphi \in [0, 2\pi]$$

Воспользуемся полярными координатами и получим ответ.

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \left(4 - r^2\right) r dr = 2\pi \int_0^2 \left(4r - r^3\right) dr = 2\pi \left(2r^2 - \frac{1}{4} r^4\right)\Bigg|_0^2 = 8\pi$$

Замечание: если область интегрирования ограничена дугой эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

то наиболее удобными для интегрирования в этом случае являются *обобщённые полярные* координаты r, φ, связь которых с декартовыми определяется по формулам:

$$\begin{cases} x = ar\cos\varphi, \\ y = br\sin\varphi \end{cases}$$

Уравнение эллипса в этих координатах имеет наиболее простой вид: $r = 1$, а якобиан:

$$I = \begin{vmatrix} a\cos\varphi & -ar\sin\varphi \\ b\sin\varphi & br\cos\varphi \end{vmatrix} = abr$$

Рассмотрим примеры.

<u>*Пример* 4</u>. Вычислить $\iint\limits_D y^2 dxdy$, где область D ограничена эллипсом $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

<u>*Решение*</u>.

Воспользуемся обобщёнными полярными координатами:

$x = 3r\cos\varphi$, $y = 2r\sin\varphi$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, $I = 6r$

$$\iint\limits_D y^2 dx\,dy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 4r^2 \sin^2\varphi \cdot 6r dr = 24\int\limits_0^{2\pi} \sin^2\varphi d\varphi \int\limits_0^1 r^3 dr = 24\int\limits_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2\varphi}{2} d\varphi \left(\frac{1}{4}r^4\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= 3\left(4 - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 6\pi$$. Получили ответ.

Приложения двойного интеграла

Рассмотрим некоторые приложения двойного интеграла. Двойной интеграл был определён как объём цилиндрического тела, но может быть использован для вычисления массы и координат центра масс плоских областей, для вычисления моментов инерции плоских областей и других физических величин.

Вычисления массы плоской фигуры

$M = \iint\limits_D \rho(x, y)dxdy$ – масса области D с заданной плотностью $\rho(x, y)$,

Координаты центра масс плоской области D вычисляются по формулам:

$$x_c = \frac{M_y}{M},\ y_c = \frac{M_x}{M},$$

где $M = \iint\limits_D \rho(x, y)dxdy$ – масса области с заданной плотностью $\rho(x, y)$,

$$M_x = \iint\limits_D y\rho(x, y)dxdy,\ M_y = \iint\limits_D x\rho(x, y)dxdy\ -$$

статические моменты области D *относительно осей* Ox *и* Oy соответственно.

Рассмотрим примеры:

Пример 5. Вычислить координаты центра масс однородной пластины, ограниченной линиями $y = 2x^2$, $y = 2$.

Решение.

В силу симметрии однородной пластины её центр масс находится на оси симметрии и $x_c = 0$. Полагая $\rho = 1$, вычислим массу

$$M = \iint_D dxdy = \int_{-1}^{1} dx \int_{2x^2}^{2} dy = \int_{-1}^{1} \left(y\Big|_{2x^2}^{2} \right) dx = \int_{-1}^{1} \left(2 - 2x^2\right) dx = \left(2x - \frac{2}{3}x^3 \right)\Bigg|_{-1}^{1} =$$

$$= 2\left(2 - \frac{2}{3}\right) = \frac{8}{3}.$$

Статический момент области D относительно оси Ox

$$M_x = \iint_D ydxdy = \int_{-1}^{1} dx \int_{2x^2}^{2} ydy = \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{2}y^2 \right)\Bigg|_{2x^2}^{2} dx = \int_{-1}^{1} \left(2 - 2x^4\right) dx = \left(2x - \frac{2}{5}x^5 \right)\Bigg|_{-1}^{1} =$$

$$= 2\left(2 - \frac{2}{5}\right) = \frac{16}{5}.$$

Координаты центра масс плоской области D

$$x_c = 0, \quad y_c = \frac{M_x}{M} = \frac{16}{5} : \frac{8}{3} = \frac{6}{5}, \text{ т.е. } C(0, \frac{6}{5})$$

<u>*Пример* 6</u>. Вычислить координаты центра масс однородной пластины, ограниченной кардиоидой.

<u>*Решение*</u>.

Уравнение кардиоиды в полярных кардинатах: $r = 1 - \cos\varphi$.

Т.к. кардиоида симметрична относительно оси Ox, то её центр масс находится на оси Ox и $y_c = 0$. Полагая $\rho = 1$, вычислим массу

$$M = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{1+\cos\varphi} rdr = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2}r^2 \right)\Bigg|_0^{1+\cos\varphi} d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(1 + 2\cos\varphi + \frac{1+\cos 2\varphi}{2} \right) d\varphi = \frac{3}{2}\pi.$$

Статический момент области D относительно оси Oy

$$M_y = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{1+\cos\varphi} r^2 \cos\varphi dr = \int_0^{2\pi} \cos\varphi \left(\frac{1}{3}r^3 \right)\Bigg|_0^{1+\cos\varphi} d\varphi = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} \cos\varphi \left(1+\cos\varphi\right)^3 d\varphi =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} \left(\cos\varphi + 3\cos^2\varphi + 3\cos^3\varphi + 4\cos^4\varphi \right) d\varphi = \frac{5}{4}\pi.$$

При вычислении последнего интеграла пропущены некоторые выкладки. Координаты центра масс однородной пластины, ограниченной кардиоидой.

$x_c = \dfrac{M_y}{M} = \dfrac{5\pi}{4} : \dfrac{3\pi}{2} = \dfrac{5}{6}$, $\quad y_c = 0$, т.е. $C(\dfrac{5}{6}, 0)$

Пример 7. Вычислить координаты центра масс однородной пластины, ограниченной дугой эллипса $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ и осями координат, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Решение.

Воспользуемся обобщёнными полярными координатами:

$x = 3r\cos\varphi$, $y = 2r\sin\varphi$, $\varphi \in [0, \dfrac{\pi}{2}]$, якобиан замены $I = 6r$.

Вычислим массу

$$M = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 6r dr = \frac{3\pi}{2}.$$

Статические моменты области D относительно осей Ox и Oy соответственно:

$$M_x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 2r\sin\varphi \cdot 6r\, dr = 4, \qquad M_y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 3r\cos\varphi \cdot 6r\, dr = 6.$$

Координаты центра масс однородной пластины

$$x_c = \frac{M_y}{M} = 6 : \frac{3\pi}{2} = \frac{4}{\pi}; \qquad y_c = \frac{M_x}{M} = 4 : \frac{3\pi}{2} = \frac{8}{3\pi}, \quad \text{т.е. } C(\frac{4}{\pi}, \frac{8}{3\pi}).$$