ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ
2 семестр
Лекции разработаны преподавателями кафедры ВМ-2 РТУ МИРЭА
Горшуновой Т.А., Морозовой Т.А.

Для изучения данного курса необходимы знания по следующим предметам: Линейная алгебра и аналитическая геометрия, 1 семестр; Математический анализ, 1 семестр.

ЛЕКЦИЯ №1

Линейные пространства

Линейные пространства. Определение и примеры. Определение линейной зависимости и независимости векторов.

1. *Линейные пространства.*

Определение. Непустое множество элементов L называется линейным пространством, а его элементы векторами, если выполняются следующие условия:

1) Задана операция сложения, т.е. любым двум элементам $\vec{x},\vec{y} \in L$ ставится в соответствие элемент $\vec{x}+\vec{y} \in L$, называемый их суммой.
2) Задана операция умножения вектора на число, т.е. любому элементу $\vec{x} \in L$ и числу $\alpha \in \mathbb{R}$ ставится в соответствие элемент $\alpha\,\vec{x} \in L$, называемый произведением элемента на число.
3) Для $\forall\ \vec{x},\vec{y},\vec{z} \in L$, и $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ выполняются следующие аксиомы:
   1. $\vec{x}+\vec{y}=\vec{y}+\vec{x}$ (коммутативность суммы)
   2. $(\vec{x}+\vec{y})+\vec{z}=\vec{x}+(\vec{y}+\vec{z})$ (ассоциативность суммы)
   3. $\exists\vec{0} \in L: \forall\ \vec{x} \in L,\ \vec{x}+\vec{0}=\vec{x}$ (существование нулевого вектора)
   4. $\forall\ \vec{x} \in L\ \exists(-\vec{x}) \in L:\ \vec{x}+(-\vec{x})=\vec{0}$ (существование противоположного вектора)
   5. $1\cdot\vec{x}=\vec{x}$
   6. $(\alpha\beta)\vec{x}=\alpha(\beta\,\vec{x})$ (ассоциативность умножения на число)

7. $\alpha(\vec{x}+\vec{y})= \alpha\vec{x}+\alpha\vec{y}$ (дистрибутивность относительно суммы элементов)
8. $(\alpha+\beta)\overline{x} = \alpha\vec{x}+\beta\vec{x}$ (дистрибутивность относительно суммы числовых множителей)

Замечание. Говорят, что *линейное пространство L замкнуто относительно операций сложения и умножения на число* , так как в результате выполнения этих операция мы получаем элементы того же пространства.

Замечание. Если задана операция умножения на вещественные числа, то *пространство называется вещественным*. Если задана операция умножения на комплексные числа, то *пространство называется комплексным.*

В нашем курсе будут изучаться только вещественные пространства.

Следствия из аксиом:

Следствие 1. В линейном пространстве может быть только один нулевой вектор.

◄ Предположим, что линейное пространство имеет *два различных* нулевых вектора $\vec{0}_1$ и $\vec{0}_2$. Тогда, полагая в третьей аксиоме сначала $\vec{x}=\vec{0}_1, \vec{0}=\vec{0}_2$, а затем $\vec{x}=\vec{0}_2, \vec{0}=\vec{0}_1$, получим два равенства: $\vec{0}_1+\vec{0}_2=\vec{0}_1$ и $\vec{0}_2+\vec{0}_1=\vec{0}_2$. В силу первой аксиомы линейного пространства левые части двух равенств совпадают, т.е. в левой части двух равенств мы имеем один и тот же вектор, поэтому $\vec{0}_1=\vec{0}_2$. ►

Следствие 2. Для любого вектора $\vec{x}$ линейного пространства существует *единственный* противоположный вектор.

◄_Пусть некоторый вектор $\vec{x}$ имеет *два различных* противоположных вектора — обозначим эти векторы $\vec{y}$ и $\vec{z}$. Тогда по четвертой аксиоме $\vec{x}+\vec{y}=\vec{0}$ и одновременно $\vec{x}+\vec{z}=\vec{0}$. Покажем теперь, что $\vec{y}$ и $\vec{z}$ совпадают: $\vec{y}=\vec{y}+\vec{0}=\vec{y}+(\vec{x}+\vec{z})=(\vec{y}+\vec{x})+\vec{z}=(\vec{x}+\vec{y})+\vec{z}=\vec{0}+\vec{z}=\vec{z}$. ►

Следствие 3. Введем обозначение: $\vec{x}$ -$\vec{y}$=$\vec{x} +$ (-$\vec{y}$), тогда для любых $\vec{a}$; $\vec{b} \in L$ существует единственное решение уравнения $\vec{a}$+$\vec{x} = \vec{b}$ в виде $\vec{x} = \vec{b}$-$\vec{a}$.

Следствие 4. $0 \cdot \vec{x} = \vec{0}$

Следствие 5. $\alpha \cdot \vec{0} = \vec{0}$

Следствие 6. $-\vec{x} = (-1)\vec{x}$

Следствие 7. α(-$\vec{x}$) $= -\alpha\vec{x}$

2. *Примеры линейных пространств.*

1) Множество $\mathbb{R}$ всех действительных чисел
2) Множество геометрических векторов на прямой (на плоскости или в пространстве) - V_1, V_2, V_3.
3) Множество всех многочленов степени не выше n $P_n = \{p(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n\}$.
4) Множество функций, определенных и непрерывных на отрезке $[a; b]$ - линейное пространство: $C_{[a;b]}$
5) Множество всех матриц $M_{m\times n}$ размерности $m \times n$ с действительными элементами.
6) Линейны пространством является множество арифметических векторов $\mathbb{R}^n$. Элементы множества $\mathbb{R}^n$ представляют собой упорядоченную совокупность n чисел: $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, где $x_i \in \mathbb{R}$.
7) $L = \{\vec{0}\}$ - линейное пространство.

3. *Примеры множеств, которые не являются линейными пространствами.*

1) Множество натуральных чисел $\mathbb{N}$
2) Множество радиус-векторов точек плоскости, расположенных в первой четверти в системе координат XOY.
3) Множество многочленов степени n

   Доказательство: (доказать, что все эти множества не являются замкнутыми)
4) Множество действительных положительных чисел $R_+ = \{x \in \mathbb{R}: x > 0\}$ - не является линейным пространством. Но если операции «+» и

«·» задать по-другому: сумму как $x \cdot y$, а произведение элемента на число как x^{α}, то R_+ становиться линейным пространством.

4. *Линейная зависимость и независимость векторов.*

Определение. ***Линейной комбинацией векторов*** $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \in L$ называется выражение вида $\lambda_1 \vec{x}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{x}_n$, где $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$.

Линейная комбинация называется ***тривиальной***, если все $\lambda_i = 0, i = \overline{1, n}$.

Определение линейной зависимости **(л.з.).** Система векторов

S= $\{\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n\} \in L$ называется ***линейно зависимой***, если найдутся такие числа $\lambda_1 \dots \lambda_n \in \mathbb{R}$, не равные одновременно нулю , что $\lambda_1 \bar{a}_1 + \cdots + \lambda_1 \bar{a}_n = \vec{0}$

Определение линейной независимости (л.н.з.). Если равенство $\lambda_1 \bar{a}_1 + \cdots + \lambda_n \bar{a}_n = \vec{0}$ возможно, только когда $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$, то система векторов S= $\{\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n\} \in L$ называется линейно независимой.

Теорема 1. Система из одного вектора линейно зависима тогда и только тогда, когда этот вектор нулевой.

Критерий линейной зависимости.

Теорема 2. Система векторов S= $\{\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n\} \in L$, n≥ 2, линейно зависимая тогда и только тогда, когда хотя бы один из ее векторов можно представить в виде линейной комбинации остальных.

◄ Необходимость : Пусть $\{\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n\}$- линейно зависимая, т.е.

$$\lambda_1 \bar{a}_1 + \cdots + \lambda_n \bar{a}_n = \vec{0} \text{ и } \exists \lambda_i \neq 0; \Rightarrow \bar{a}_i = -\frac{\lambda_1}{\lambda_i} \bar{a}_1 - \cdots - \frac{\lambda_n}{\lambda_i} \bar{a}_n;$$

Достаточность: Пусть $\bar{a}_i = -\beta_1 \bar{a}_1 - \cdots - \beta_n \bar{a}_n \Rightarrow$

$\beta_1 \bar{a}_1 + \cdots \bar{a}_i + \cdots + \beta_n \bar{a}_n = \vec{0} \Rightarrow \exists$ нетривиальная линейная комбинация векторов, равная нулевому вектору, следовательно они л.н.з. ►

Свойства системы векторов линейного пространства.

1) Всякая система векторов, содержащая $\vec{0}$ линейно зависима;

2) Если часть векторов системы линейно зависимая, то и вся система линейна зависима;
3) Система, содержащая два равных вектора линейно зависима;
4) Если система векторов л.н.з, то и любая ее подсистема л.н.з.

Геометрический смысл линейной зависимости.

Рассмотрим S- систему геометрических векторов.

1. Система, состоящая из одного ненулевого вектора S=$\{\vec{a}\}$, $\vec{a} \neq \vec{0}$; линейно независимая.
2. Система из двух векторов S=$\{\vec{a}; \vec{b}\}$ линейно зависимая $\Leftrightarrow$ $\vec{a} \parallel \vec{b}$ (векторы коллинеарны)
3. Система из трех векторов S=$\{\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}\}$ линейно зависимая $\Leftrightarrow$ $\vec{a}\,\vec{b}\vec{c}$=0 (векторы компланарны)
4. Система, состоящая более чем из трех векторов, линейно зависима

Примеры:

1. $C_{[0;2\pi]}$ – линейное пространство функций, определенных и непрерывных на отрезке $[0;2\pi]$. Доказать, что система функций $\{1, \sin^2 x\,, \cos 2x\} \in C_{[0;2\pi]}$ линейно зависима.

◀ $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$; следовательно по теореме 2 система линейно зависимая. ▶

2. V_3 - пространство геометрических векторов. Система векторов $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\} \in V_3$ – линейно независима.

3. $M_{2\times 2}$ - пространство матриц размера 2×2.
Проверить на линейную зависимость систему матриц $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\right\} \in M_{2\times 2}$

Пусть $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$,

тогда$E_1 + 2E_2 + E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

следовательно, система $\{E_1, E_2, E_3\}$ – линейно зависима.