ЛЕКЦИЯ № 11.

Знакоопределенные квадратичные формы.

Определение. Квадратичная форма называется ***положительно определенной,*** если $\forall \vec{x} \neq \vec{o} : \varphi(\vec{x}) > 0$

Определение. Квадратичная форма называется ***отрицательно определенной***, если $\forall \vec{x} \neq \vec{o} : \varphi(\vec{x}) < 0$

Если квадратичная форма не является положительно или отрицательно определенной, то говорят, что она ***общего вида*** или ***знакопеременная***.

Примеры.

1) $\varphi(\vec{x}) = x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2$- положительно определенная;
2) $\varphi(\vec{x}) = -x_1^2 - 3x_2^2 - 2x_3^2$- отрицательно определенная;
3) $\varphi(\vec{x}) = \varphi(\vec{x}) = x_1^2 + 2x_3^2$ – общего вида , так как $\varphi(0\,,1{,}0)$=0.

Исследование квадратичной формы на знакоопределенность:

1 способ- по каноничекому виду

Тип квадратичной формы зависит только от множества значений, которые она принимает, но не зависит от переменных, в которых она записана. Поэтому, представив квадратичную форму в каноническом виде, получаем следующие критерии оценки ее типа в зависимости от коэффициентов в ее каноническом виде .

Теорема 7.

1) Квадратичная форма ***положительно определена*** ⇔ она невырожденная и все коэффициенты в ее каноническом виде положительные: $(r = r_+ = dimV_n)$

2) Квадратичная форма ***отрицательно определена*** $\Leftrightarrow$ она невырожденная и все коэффициенты в ее каноническом виде отрицательные: ($r = r_{-} = \dim V_n$)

2 способ - по критерию Сильвестра

Теорема 8. Критерий Сильвестра. Квадратичная форма положительно определена $\Leftrightarrow$ все главные (угловые) миноры матрицы квадратичной формы положительные.

►

Необходимость: Если квадратичная форма $\varphi(\overline{x})$ положительно определена, то в ее каноническом виде все коэффициенты положительны, а матрица имеет вид $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \cdots 0 & 0 \\ \vdots & \lambda_i & \vdots \\ 0 & 0 \cdots 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$.

detA = $\lambda_1 \ldots\ldots \lambda_n > 0$;

При переходе к другим переменным

det $(P^T \mathrm{A}_1 P) = (detP)^2 det\mathrm{A}_1 > 0$

Рассмотрим квадратичную форму $\varphi_k(\overline{x}) =$ $\varphi_k(x_1, \ldots x_k)= \varphi(x_1, \ldots x_k, 0, \ldots 0)$ от k переменных, также положительно определенную, и следовательно определитель ее матрицы $\Delta_k > 0$ при k=$\overline{1,n}$. => все главные миноры матрицы положительны;

Достаточность: без доказательства. ◄

Следствие. Квадратичная форма отрицательно определена $\Leftrightarrow$ знаки главных миноров матрицы квадратичной формы чередуются, начиная с минуса ►

Если квадратичная форма $\varphi(\overline{x})$ отрицательно - определенная, тогда $-\varphi(\overline{x})$ – положительно определенная, и у нее матрица (-А). Для положительной определенности $-\varphi(\overline{x})$ необходимо и достаточно, чтобы, чтобы все угловые миноры были матрицы (–А) были положительны. Но при умножении матрицы на (-1), все ее элементы умножаются на (-1) и Δ'_r=$(-1)^r\Delta_r$; где Δ_r- угловой минор порядка r матрицы А. Таким образом, $-\varphi(\overline{x})$ положительно определена тогда и только тогда, когда Δ'_r=$(-1)^r\Delta_r > 0; r = \overline{1;n}$, т. е. Δ_r знакочередуются, начиная с “-“,а это условие эквивалентно тому, что квадратичная форма $\varphi(\overline{x})$ отрицательно определенная. ◄

Определим угловые миноры для матрицы.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix};\ \Delta_1=a_{11};\ \Delta_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix};\ \Delta_3=\det A.$$

Критерий Сильвестра для трехмерного пространства.

1) $$\begin{matrix} \Delta_1 > 0 \\ \Delta_2 > 0 \\ \Delta_3 > 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \text{квадратичная форма положительно определена}$$

2) $$\begin{matrix} \Delta_1 < 0 \\ \Delta_2 > 0 \\ \Delta_3 < 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \text{квадратичная форма отрицательно определена}$$

3) Во всех остальных случаях квадратичная форма знакопеременная, или общего вида.

Пример 1.

Привести квадратичную форму

$\varphi(\vec{x}) = -2x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3$ к каноническому виду методом Лагранжа, выписать преобразование координат.

Найти положительный и отрицательный индексы, ранг квадратичной формы $\varphi(\vec{x})$

Исследовать $\varphi(\vec{x})$ на знакоопределенность двумя способами: по каноническому виду и по критерию Сильвестра.

Решение:

Приведём квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа, то есть выделим полные квадраты:

$\varphi(\vec{x}) = -2x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3 =(x_3^2 + 8x_1x_3 + 16x_1^2) - 16x_1^2 -$
$-2x_1^2 - x_2^2 + 4x_1x_2 = (x_3 + 4x_1)^2 - (x_2 - 2x_1)^2 - 14x_1^2 =$
$= y_1^2 - y_2^2 - 14y_3^2,$

где соответствующее преобразование координат имеет вид:

$$\begin{cases} y_1 = 4x_1 + x_3 \\ y_2 = x_2 - 2x_1. \\ y_3 = x_1 \end{cases}$$

Определим положительный r_+ и отрицательный r_- индексы и ранг r квадратичной формы по её каноническому виду:

количество положительных коэффициентов $r_+ = 1$

количество отрицательных коэффициентов $r_- = 2$,

общее количество ненулевых коэффициентов в каноническом виде $r = 3$.

Исследуем на знакоопределенность

- по каноническому виду:

ранг $r = dimV_3$, но не совпадает ни с одним из индексов,

значит квадратичная форма знакопеременная или общего вида

- по критерию Сильвестра: выпишем матрицу данной квадратичной формы

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и вычислим главные миноры

$\Delta_1 = -2 < 0, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -2 < 0, \qquad \Rightarrow$

квадратичная форма общего вида.

Замечание. Можно другим способом привести данную квадратичную форму к каноническому виду и убедиться в выполнении закона инерции, например:

$\varphi(\vec{x}) = -2x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3 = -2(x_1^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3 +$

$+4x_2x_3 + x_2^2 + 4x_3^2) + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 8x_3^2 - x_2^2 + x_3^2 =$

$= -2(x_1 - x_2 - 2x_3)^2 + (x_2^2 + 8x_2x_3 + 16x_3^2) - 7x_3^2 =$

$= -2(x_1 - x_2 - 2x_3)^2 + (x_2 + 4x_3)^2 - 7x_3^2 = -2y_1^2 + y_2^2 - 7y_3^2$

$y_1 = x_1 - x_2 - 2x_3;$

$y_2 = x_2 + 4x_3;$

$y_3 = x_3$

$r_+ = 1; r_- = 2; r = 3.$

Мы видим, что закон инерции квадратичных форм выполняется.

Пример 2. Исследовать квадратичную форму $\varphi(\vec{x}) = x_1^2 + 5x_2^2 + 6x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$.

Решение:

Выделим полный квадрат по x_1. Для этого соберем все слагаемые, содержащие x_1, и дополним до полного квадрата:

$\varphi(\vec{x}) = ((x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3) + 4x_2^2 + x_3^2 - 4x_2x_3) - 4x_2^2 - x_3^2 + 4x_2x_3 + 5x_2^2 + 6x_3^2 - 6x_2x_3 = (x_1 - 2x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 2x_2x_3$

После приведения подобных членов аналогичным образом выделим полный квадрат по x_2.

$\varphi(\vec{x}) = (x_1 - 2x_2 + x_3)^2 + (x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2) - x_3^2 +$
$+5x_3^2 = (x_1 - 2x_2 + x_3)^2 + (x_2 - x_3)^2 + 4x_3^2$;

Введём новые переменные:

$y_1 = x_1 - 2x_2 + x_3, y_2 = x_2 + x_3, y_3 = x_3.$

И получаем квадратичную форму канонического вида:

$$\varphi(\vec{y}) = y_1^2 + y_2^2 + 4y_3^2$$

количество положительных коэффициентов $r_+ = 3,$

количество отрицательных коэффициентов $r_- = 0,$

общее количество ненулевых коэффициентов в каноническом виде

$r = 3.$

По каноническому виду определяем, что квадратичная форма является положительно определенной.

Пример 3. Исследовать квадратичную форму $\varphi(\vec{x}) = x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 +$
$+4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3.$

Решение:

$$\varphi(\vec{x}) = ((x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3) + 4x_2^2 + x_3^2 + 4x_2x_3) - 4x_2^2 - x_3^2 - 4x_2x_3 + 4x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_2x_3 = (x_1 + 2x_2 - x_3)^2 + x_3^2$$

$y_1 = x_1 + 2x_2 - x_3, y_2 = x_3.$

И получаем квадратичную форму канонического вида:

$$\varphi(\vec{y}) = y_1^2 + y_2^2$$

количество положительных коэффициентов $r_+ = 2,$

количество отрицательных коэффициентов $r_- = 0,$

общее количество ненулевых коэффициентов в каноническом виде

$r = 2.$

По каноническому виду определяем, что квадратичная форма общего вида.

По критерию Сильвестра:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Вычислим главные миноры

$$\Delta_1 = 1 > 0, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0, \qquad \Rightarrow$$

квадратичная форма общего вида.