Лекция №11

6. Криволинейные интегралы

Пусть на отрезке $[a,b]$ задана векторная функция

$$\bar{r}(t) = x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k}, \tag{1}$$

т.е. каждому $t \in [a,b]$ сопоставляется вектор с началом в точке $(0{,}0{,}0)$, имеющий координаты $\bar{r}(t) = (x(t); y(t); z(t))$ (рис.1).

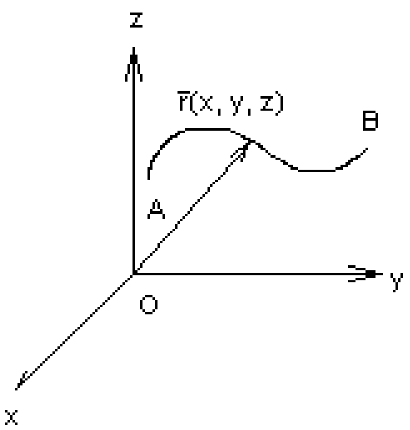

Рисунок 1

При изменении t от a до b конец вектора $\bar{r}(t)$ описывает некоторую линию (кривую) L от точки $A = (x(a), y(a), z(a))$ до точки $B = (x(b), y(b), z(b))$. Говорят, что такая пространственная линия L задана уравнением (1). В частности, при $z(t) = 0$ мы получим уравнение плоской кривой: $\bar{r}(t) = x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j}$. Задание кривой уравнением (1) определяет не только геометрическое место точек с координатами $(x(t), y(t), z(t))$, но и «порядок» точек на кривой: при возрастании t от a до b точка $(x(t), y(t), z(t))$ «пробегает» кривую от точки A до точки B.

Определение 1. Кривая L, на которой определен порядок «следования» точек, называется *ориентированной*, а выбранный порядок - *ориентацией*. У кривой может быть две ориентации.

Определение 2. *Касательной* к кривой L в точке M $\left(\vec{OM} = r(t)\right)$ называется предельное положение секущей $\overline{MM_1} = \bar{r}(t+\Delta t) - \bar{r}(t)$ при $\Delta t \to 0$, если оно существует (рис.2).

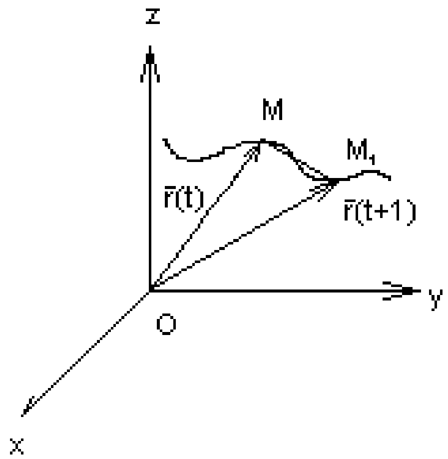

Рисунок 2

Производная от вектор-функции $\bar{r}(t)$ в точке t:

$$\vec{r}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\bar{r}(t+\Delta t) - \bar{r}(t)}{\Delta t}.$$

Легко показать, что $\bar{r}'(t) = x'(t)\bar{i} + y'(t)\bar{j} + z'(t)\bar{k}$.

Определение 3. Кривая L называется *гладкой*, если при любом $t \in [a,b]$ существуют и непрерывны производные $x'(t), y'(t), z'(t)$.

Определение 4. Кривая L называется *кусочно-гладкой*, если функции $x(t), y(t), z(t)$ непрерывны, и отрезок $[a,b]$ можно разбить на конечное число подотрезков, на каждом из которых эти функции имеют непрерывные производные.

В дальнейшем мы будем рассматривать только гладкие или кусочно-гладкие кривые. Наглядно говоря, кривая, заданная уравнением (1), является гладкой при $t \in [a,b]$, если в каждой её точке существует касательная, «непрерывно» меняющаяся вдоль L.

Криволинейный интеграл 1-го рода (по длине дуги)

Пусть на кривой L задана функция $f(M)$. Разобьем кривую L на части L_k, $1 \le k \le n$, в каждой части выберем произвольную точку M_k. Затем умножим $f(M_k)$ на ΔS_k - длину части L_k, и все такие произведения просуммируем:

$$f(M_1)\Delta s_1 + \ldots + f(M_n)\Delta s_n = \sum_{k=1}^{n} f(M_k)\Delta s_k \qquad (2)$$

Такая сумма называется <u>интегральной суммой</u>.

<u>*Определение*</u> *5*. Криволинейным интегралом 1-го рода *(по длине дуги)* от функции $f(M)$ называется предел её интегральных сумм (2) при $\max\limits_k \Delta s_k \to 0$ при условии, что этот предел существует и не зависит от способа разбиения кривой L на части L_k и выбора на них точек M_k:

$$\lim_{\max\limits_k \Delta S_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(M_k)\Delta s_k = \int_L f(M)ds \qquad (3)$$

<u>*Теорема существования*</u>. Пусть функция *f(M)* определена и непрерывна на кривой *L*. Тогда криволинейный интеграл 1-го рода *(по длине дуги)* от функции $f(M)$ существует.

Основные свойства криволинейного интеграла 1-го рода

1) Значение криволинейного интеграла 1-го рода не зависит от выбора ориентации на кривой L.

2) Линейность.

$$\int_L (c_1 f_1(M) + c_2 f_2(M))ds = c_1 \int_L f_1(M)ds + c_2 \int_L f_2(M)ds,$$

где c_1, c_2 – постоянные.

3) Аддитивность. Если кривая $L = AB$ разбита на две части $L_1 = AC$ и $L_2 = CB$, то

$$\int_L f(M)ds = \int_{L_1} f(M)ds + \int_{L_2} f(M)ds.$$

4) Если на L выполнено неравенство $m_1 \le f(M) \le m_2$ и l – длина линии L, то $m_1 l \le \int_L f(M)ds \le m_2 l$.

5) Если $f(M)$ непрерывна на L, то $\int_L f(M)ds = f(M_0)l$,

где M_0 – некоторая «средняя» точка на L (теорема о среднем).

Если $f(M) \equiv 1$, то $\int_L ds = l$.

Последнее соотношение позволяет использовать криволинейный интеграл 1-го рода для нахождения длины дуги кривой.

Если $f(M) \ge 0$, то $f(M)$ можно интерпретировать как плотность, а интеграл $\int_L f(M)ds$ как массу.

Отметим также, что с помощью интеграла 1-го рода можно вычислять статические моменты кривой относительно осей координат, а также координаты ее центра тяжести. Приведем соответствующие формулы для плоской кривой.

Пусть $f(M) = f(x, y)$ - линейная плотность плоской кривой L. Тогда

1) масса кривой L $m = \int\limits_L f(M)ds$.

2) координаты центра тяжести

$$x_0 = \frac{1}{m}\int\limits_L xf(x,y)ds\ ,\quad y_0 = \frac{1}{m}\int\limits_L yf(x,y)ds\,.$$

3) моменты инерции соответственно относительно осей Ox, Oy и начала координат

$$J_x = \int\limits_L y^2 f(x,y)ds\,,\quad J_y = \int\limits_L x^2 f(x,y)ds\,,\quad J_0 = \int\limits_L (x^2+y^2) f(x,y)ds\,.$$

Аналогичные формулы имеют место для случая пространственной кривой.

Вычисление криволинейного интеграла 1-го рода (по длине дуги)

1) Если кривая L задана параметрически: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t \in [a; b]$, то

$$\int\limits_L f(M)ds = \int\limits_a^b f\big(x(t), y(t), z(t)\big)\sqrt{[x_t'(t)]^2 + [y_t'(t)]^2 + [z_t'(t)]^2}\,dt \tag{4}$$

2) Если кривая L плоская и $y = y(x)$, $\alpha \le x \le \beta$, то

$$\int\limits_L f(M)ds = \int\limits_\alpha^\beta f\big(x, y(x)\big)\sqrt{1+[y_x'(x)]^2}\,dx \tag{5}$$

3) Если кривая L задана в полярных координатах уравнением $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$, то

$$\int\limits_L f(M)ds = \int\limits_\alpha^\beta f\big(\rho(\varphi)\cos\varphi, \rho(\varphi)\sin\varphi\big)\sqrt{\rho(\varphi)^2 + [\rho'(\varphi)]^2}\,d\varphi \tag{6}$$

Вычисление криволинейного интеграла, как мы видим, сводится к вычислению определенного интеграла.

Пример 1. Вычислить $I=\int\limits_L (x+y+z)ds$, если *L: x = cos t , y = sin t, z = t* при $0\le t\le \frac{\pi}{2}$.

Решение. Используем формулу (4):

$$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos t+\sin t+t)\sqrt{[-\sin t]^2+[\cos t]^2+[1]^2}\,dt=$$

$$=\sqrt{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos t+\sin t+t)dt=\sqrt{2}(2+\frac{\pi^2}{8}).$$

Пример 2. Вычислить $I=\int\limits_L x^2ds$, если *L: y =ln x* при $1\le x\le 2$.

Решение. Используем формулу (5):

$$I=\int\limits_1^2 x^2\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}dx=\frac{1}{2}\int\limits_1^2(1+x^2)^{\frac{1}{2}}d(1+x^2)=\frac{1}{3}\left(5^{\frac{3}{2}}-2^{\frac{3}{2}}\right).$$

Пример 3. Найти длину дуги кривой *L: x = cos t , y = sin t,* при $0\le t\le \frac{\pi}{2}$.

Решение. $$l=\int\limits_L ds=\int\limits_0^{\pi/2}\sqrt{(\cos t')^2+(\sin t')^2}\,dt=\int\limits_0^{\pi/2}\sqrt{\sin t^2+\cos t^2}\,dt=\int\limits_0^{\pi/2}dt=\frac{\pi}{2}$$