ЛЕКЦИЯ № 9

Билинейные и квадратичные формы.

Билинейные и квадратичные формы. Преобразование матрицы квадратичной формы при переходе к другому базису.

1. Билинейные формы

Определение. Билинейной формой $\boldsymbol{B}(\vec{\boldsymbol{x}},\vec{\boldsymbol{y}})$ на линейном пространстве V_n ($\dim V_n$=n), называется отображение пары векторов $\bar{x}$ и $\bar{y}$ в число, ($B: V_n \times V_n \to \mathbb{R}$), если оно линейно по каждому аргументу:

$$\forall \bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}}, \bar{\boldsymbol{z}} \in \boldsymbol{V_n};\ \forall \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}$$

1) $\boldsymbol{B}(\bar{\boldsymbol{x}}+\bar{\boldsymbol{z}},\bar{\boldsymbol{y}}) = \boldsymbol{B}(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}}) + \boldsymbol{B}(\bar{\boldsymbol{z}},\bar{\boldsymbol{y}})$
2) $\boldsymbol{B}(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}}+\bar{\boldsymbol{z}}) = \boldsymbol{B}(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}}) + \boldsymbol{B}(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{z}})$
3) $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\beta}\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}}) = \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{B}(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}}) = \boldsymbol{B}(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{\beta}\bar{\boldsymbol{y}})$

В базисе $\{\bar{e}_1; \bar{e}_2 \dots \bar{e}_n\}$ билинейная форма может быть задана матрицей B$\{b_{ij}\}$; $\boldsymbol{b_{ij}} = \boldsymbol{B}(\bar{\boldsymbol{e}}_i; \bar{\boldsymbol{e}}_j)$;

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}(\bar{\boldsymbol{e}}_1;\bar{\boldsymbol{e}}_1) & \dots & \boldsymbol{B}(\bar{\boldsymbol{e}}_1;\bar{\boldsymbol{e}}_n) \\ \dots & \boldsymbol{B}(\bar{\boldsymbol{e}}_i;\bar{\boldsymbol{e}}_j) & \dots \\ \boldsymbol{B}(\bar{\boldsymbol{e}}_n;\bar{\boldsymbol{e}}_1) & \dots & \boldsymbol{B}(\bar{\boldsymbol{e}}_n;\bar{\boldsymbol{e}}_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b_{11}} & \dots & \boldsymbol{b_{1n}} \\ \dots & \boldsymbol{b_{ij}} & \dots \\ \boldsymbol{b_{n1}} & \dots & \boldsymbol{b_{nn}} \end{pmatrix}$$

Обозначим X=$\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$; Y=$\begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$.

Теорема 1. Если $B(\vec{x},\vec{y})$ - билинейная форма, то

$$\boldsymbol{B}(\vec{\boldsymbol{x}},\vec{\boldsymbol{y}}) = (\boldsymbol{x_1} \dots\dots \boldsymbol{x_n}) \begin{pmatrix} \boldsymbol{b_{11}} & \dots & \boldsymbol{b_{1n}} \\ \dots & \boldsymbol{b_{ij}} & \dots \\ \boldsymbol{b_{n1}} & \dots & \boldsymbol{b_{nn}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{y_1} \\ \dots \\ \boldsymbol{y_n} \end{pmatrix} = \boldsymbol{X^T B Y} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{b_{ij}\, x_i y_j}$$

Пример 1: $B(\vec{x},\vec{y}) = 3x_1y_1 - 2x_1y_2 + 4x_2y_1 + x_2y_2 =$

$$(x_1\ x_2)\begin{pmatrix}3 & -2\\ 4 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix};$$

Теорема 2. При переходе к другому базису матрица билинейной формы меняется по следующему правилу:

$$\boldsymbol{B'}=\boldsymbol{P^T}\mathbf{BP}$$

где P-матрица перехода от базиса S к базису S', B- матрица в базисе S, B'- матрица в базисе S'.

►Рассмотрим преобразование координат при переходе к другому базису. Пусть X - координаты вектора в базисе S, а X$'$ -координаты вектора в базисе S'. Тогда

$$\mathbf{X=PX'};\ \mathbf{Y=PY'};$$

где P-матрица перехода от базиса S к базису S',

$$\boldsymbol{B(\vec{x},\vec{y})} = \boldsymbol{X^T B Y}=(\mathbf{P\,X'})^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{B}\big(\mathbf{P\,Y'}\big) = \mathbf{X'}^{\boldsymbol{T}}(\mathbf{P}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{BP})\mathbf{Y'} = \mathbf{X'}^{\boldsymbol{T}}\ \boldsymbol{B'}\mathbf{Y'} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{B'}=\boldsymbol{P^T}\mathbf{BP}.$$

Используется формула $(AB)^T = \boldsymbol{B^T}\mathrm{A}^{\boldsymbol{T}}$ ◄

Определение. Рангом билинейной формы называется ранг ее матрицы в любом базисе.

Следствие. Ранг билинейной формы не зависит от базиса.

Определение. Билинейная форма называется ***вырожденной***, если её ранг меньше размерности пространства, и ***невырожденной***, если её ранг равен размерности пространства.

Определение. Билинейная форма называется **симметричной**, если $\forall \boldsymbol{\overline{x}}, \boldsymbol{\overline{y}} \in \boldsymbol{V_n};\ \boldsymbol{B(\overline{x},\overline{y})}= \boldsymbol{B(\overline{y},\overline{x})}$

Теорема 3. Билинейная форма симметричная тогда и только тогда, когда ее матрица симметричная.

► Билинейная форма симметричная => $B\big(\overline{e}_i;\overline{e}_j\big) = B(\overline{e}_j;\overline{e}_i)$; => $b_{ij} = b_{ji}$ => матрица В-симметричная.

Матрица В-симметричная => $b_{ij} = b_{ji}$ =>

$B(\vec{x},\vec{y}) = X^T BY \;=\; (X^T BY)^T = \; Y^T B^T X \;=\; Y^T BX \;= \mathrm{B}(\overline{\mathrm{y}},\overline{\mathrm{x}})$
(так как это число) *(так как В-симметрическая и $B^T = B$)*

=> В симметричная билинейная форма. ◄

2. Квадратичные формы.

Определение. Функция $\boldsymbol{\varphi(\overline{x}) = \mathrm{A}(\overline{x},\overline{x})}$, где $\mathrm{A}(\overline{x},\overline{y})$ -симметричная билинейная форма, называется ***квадратичной формой.***

Матрица квадратичной формы в базисе $\{\overline{e}_1;\overline{e}_2 \ldots \overline{e}_n\}$:

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} \mathrm{A}(\overline{e}_1;\overline{e}_2) & \ldots & \mathrm{A}(\overline{e}_1;\overline{e}_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathrm{A}(\overline{e}_n;\overline{e}_1) & \ldots & \mathrm{A}(\overline{e}_n;\overline{e}_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

А – симметричная матрица, $a_{ij} = a_{ji}$

$$\boldsymbol{\varphi(\overline{x}) = (x_1 \ldots . x_n)\mathrm{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i\, x_j}$$

$(x_1 \ldots . x_n)\mathrm{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ – векторно-матричная форма записи квадратичной формы;

$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i\, x_j$ – координатная форма записи квадратичной формы

Для квадратичной формы в базисе $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$

$\varphi(\overline{x}) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2$

Пример 2 Квадратичная форма $\varphi(\overline{x}) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2^2 - 3x_2x_3 + 7x_3^2$

Имеет матрицу: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -1.5 \\ 0 & -1.5 & 7 \end{pmatrix}$.

В матричной записи квадратичная форма имеет вид:

$$x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2^2 - 3x_2x_3 + 7x_3^2 = (x_1x_2x_3)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -1.5 \\ 0 & -1.5 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Определение Ранг квадратичной формы $\varphi(\overline{x})$ – это ранг ее матрицы.

Определение Если rang $\varphi(\overline{x}) = n = \dim V_n$, то квадратичная форма называется ***невырожденной.*** Иначе, если rang $\varphi(\overline{x}) < n$, то ***вырожденной.***

Квадратичная форма из примера 2 невырожденная, т.к. rang A=3.

Пример 3

Квадратичная форма $\varphi(\overline{x}) = x_1^2 + 6x_1x_3$ имеет матрицу:

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; Так как rang A=2<3, данная квадратичная форма является вырожденной.

Пример 4

В некотором базисе задана квадратичная форма

$\varphi(\overline{x}) = x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 3x_2^2 - 6x_2x_3 - x_3^2$

Выписать ее матрицу и найти ее значение на векторе $\overline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -3 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$;

$$\varphi(\overline{a}) = (1\ 0\ 1)\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -3 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (0 \quad -1 \quad -2)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -2$$

3. *Преобразование матрицы квадратичной формы при переходе к другому базису:*

Теорема 4. Если A_1 – матрица квадратичной формы в базисе $Б_1$, A_2 – матрица квадратичной формы – матрица в базисе $Б_2$, Р – матрица перехода от $Б_1$ к $Б_2$, тогда $А_2 = P^T А_1 P$

► Является следствием теоремы 2.◄

Пример 5

Базис $Б_1$={$\overrightarrow{e_1}$; $\overrightarrow{e_2}$}; Базис $Б_2$={ $\overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2}$; $\overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_1}$};

$\varphi_{Б1}(\overline{x}) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2$;

Выписать квадратичную форму в базисе $Б_2$.

$А_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$;

$Р = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$А_2 = P^T А_1 P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

$\varphi_{Б2}(\overline{y}) = 5y_1^2 + 8x_1y_2 + 5y_2^2$;

Пример 6.

Квадратичную форму $\varphi(\overline{x}) = 7x_1^2 - 8x_1x_2 + 2x_1x_3 + 5x_2^2 - 6x_2x_3 + 2x_3^2$ преобразовать к новым переменным:

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 + y_3 \\ x_2 = y_1 + 2y_2 + 2y_3 \\ x_3 = y_1 + y_2 + 2y_3 \end{cases}$$

Запишем замену переменных в матричном виде: X=PY;

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}; => P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Тогда, согласно теореме 4 имеем

$$А_2 = P^T А_1 P$$

$$А_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & -4 & 1 \\ -4 & 5 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Тогда квадратичная форма принимает вид:

$$\varphi(y_1, y_2, y_3) = 2_1^2 + 3y_2^2 - y_3^2,$$

Как мы видим , все коэффициенты при попарных произведениях обнулились и остались только слагаемые с квадратами переменных.