ЛЕКЦИЯ № 13

Евклидовы пространства.

Алгоритм Грама-Шмидта ортогонализации базиса.

Процесс ортогонализации Грама-Шмидта

В каждом пространстве существует ортонормированный базис и построить его можно с помощью процесса ортогонализации Грама-Шмидта.

Пусть $\{\bar{e}_1; \bar{e}_2 \dots \bar{e}_n\}$ - некоторый базис в евклидовом пространстве E. Построим $\{\bar{h}_1; \bar{h}_2 \dots \bar{h}_n\}$ – ортонормированный базис.

1) $\boldsymbol{\bar{f}_1 = \bar{e}_1}$

2) $\boldsymbol{\bar{f}_2 = \bar{e}_2 - \lambda \bar{f}_1}$

λ выбираем из условия ортогональности вектора $\boldsymbol{\bar{f}_2}$ к $\boldsymbol{\bar{f}_1}$:

$(\bar{f}_1, \bar{f}_2) = 0; (\bar{f}_1, \bar{e}_2 - \lambda \bar{f}_1) = 0; \Rightarrow$

$(\bar{f}_1, \bar{e}_2) - \lambda\,(\bar{f}_1, \bar{f}_1) = 0; \Rightarrow \quad \boldsymbol{\lambda = \frac{(\bar{f}_1, \bar{e}_2)}{(\bar{f}_1, \bar{f}_1)} = \frac{(\bar{e}_1, \bar{e}_2)}{(\bar{e}_1, \bar{e}_1)}};$

3) $\boldsymbol{\bar{f}_3 = \bar{e}_3 - \lambda_1 \bar{f}_1 - \lambda_2 \bar{f}_2};$

λ_i выбираем из условий ортогональности вектора $\boldsymbol{\bar{f}_3}$ к $\boldsymbol{\bar{f}_1}$ и $\boldsymbol{\bar{f}_2}$:

$(\bar{f}_1, \bar{f}_3) = 0; \quad (\bar{f}_2, \bar{f}_3) = 0;$

а) $(\bar{f}_1, \bar{f}_3) = 0; \Rightarrow (\bar{f}_1, \ \bar{e}_3 - \lambda_1 \bar{f}_1 - \lambda_2 \bar{f}_2) = 0; \Rightarrow$

$(\bar{f}_1, \bar{e}_3) - \lambda_1 (\bar{f}_1, \bar{f}_1) - \lambda_2 (\bar{f}_1, \bar{f}_2) = 0; \ (\bar{f}_1, \bar{f}_2) = 0 \ \Rightarrow$

$$\boldsymbol{\lambda_1 = \frac{(\bar{f}_1, \bar{e}_3)}{(\bar{f}_1, \bar{f}_1)} = \frac{(\bar{e}_1, \bar{e}_3)}{(\bar{e}_1, \bar{e}_1)}};$$

б) $(\bar{f}_2, \bar{f}_3) = 0; \Rightarrow$

$(\bar{f}_2, \ \bar{e}_3 - \lambda_1 \bar{f}_1 - \lambda_2 \bar{f}_2) = (\bar{f}_2, \bar{e}_3) - \lambda_1 (\bar{f}_2, \bar{f}_1) - \lambda_2 (\bar{f}_2, \bar{f}_2) = 0;$

$(\bar{f}_2, \bar{f}_1) = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\lambda_2 = \frac{(\bar{f}_2, \bar{e}_3)}{(\bar{f}_2, \bar{f}_2)}};$

и.т.д. $\boldsymbol{\bar f_n = \bar e_n - \lambda_1 \bar f_1 - \cdots \lambda_{n-1}\bar f_{n-1}}$; => $\boldsymbol{\lambda_i = \frac{(\bar f_i, \bar e_n)}{(\bar f_i, \bar f_i)}}$

Базис $\{\bar f_1; \bar f_2 \ldots \bar f_n\}$- ортогональный.

Нормируя векторы $\{\bar f_1; \bar f_2 \ldots \bar f_n\}$ получаем ортонормированный базис $\{\vec h_1, \ldots, \vec h_n\}$, где $\vec h_i = \frac{\vec f_i}{|\vec f_i|}, i = 1 \ldots n$.

Пример1 Дана матрица Грама скалярного произведения $G = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ в базисе $\{\vec e_1, \vec e_2\}$._Ортогонализовать базис $\{\vec e_1, \vec e_2\}$. Сделать проверку с помощью матрицы перехода.

Решение.

1) $\vec f_1 = \vec e_1 = (1,0)$; - координаты в базисе $\{\bar e_1; \bar e_2\}$
2) $\vec f_2 = \vec e_2 - \alpha \vec f_1$

$$(\vec f_1, \vec f_2) = (\vec f_1, \vec e_2) - \alpha(\vec f_1, \vec f_1) \Rightarrow 0 = (\vec e_1, \vec e_2) - \alpha(\vec e_1, \vec e_1) \Rightarrow$$

$$\alpha = \frac{(\vec e_1, \vec e_2)}{(\vec e_1, \vec e_1)} = \frac{1}{2} \Rightarrow \quad \vec f_2 = -\frac{1}{2}\vec e_1 + \vec e_2 = \left(-\frac{1}{2}; \quad 1\right)$$

Получили ортогональный базис $F = \{\vec f_1, \vec f_2\}$.

Теперь нормируем его и получим ортонормированный базис $H = \{\vec h_1, \vec h_2\}$, где

$$\vec h_1 = \frac{\vec f_1}{|\vec f_1|}, \vec h_2 = \frac{\vec f_2}{|\vec f_2|}.$$

$$|\vec f_1| = \sqrt{(\vec f_1, \vec f_1)} = \sqrt{(\vec e_1, \vec e_1)} = \sqrt{2},$$

$$|\vec f_2| = \sqrt{(\vec f_2, \vec f_2)} = \sqrt{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}} = \sqrt{\frac{7}{2}}.$$

Тогда $\vec h_1 = \frac{\vec f_1}{|\vec f_1|} = \frac{\vec e_1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0)$,

$$\vec h_2 = \frac{\vec f_2}{|\vec f_2|} = \left(\frac{-1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}\right).$$

Проверим ортонормированность построенного базиса $H = \{\vec{h}_1, \vec{h}_2\}$ с помощью матрицы перехода:

$$G_H = P^T G_S P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \cdot \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \cdot \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E,$$

получилась единичная матрица, значит базис $H = \{\vec{h}_1, \vec{h}_2\}$ ортонормированный.

Пример 2

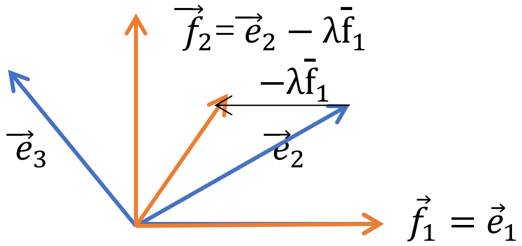
Ортогонализировать базис S=$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, заданный своими координатами в ортонормированном базисе $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$

$\vec{e}_1 = (1,1,1)$; $\vec{e}_2 = (1,1,2)$; $\vec{e}_3 = (2,1,1)$, матрица Грама которого имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 4 & 6 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Решение:

$\vec{f}_3 = \bar{e}_3 - \lambda_1 \bar{f}_1 - \lambda_2 \bar{f}_2$;



=

1) $\vec{f}_1 = \vec{e}_1 = (1,1,1)$;

2) $\vec{f}_2 = \bar{e}_2 - \lambda \bar{f}_1$; Найдем λ из условия $(\vec{f}_1, \vec{f}_2) = 0$;

Можно воспользоваться готовой формулой:

$$\lambda = \frac{(\vec{e}_1, \vec{e}_2)}{(\vec{e}_1, \vec{e}_1)} = \frac{4}{3} \Rightarrow$$

$$\vec{f}_2 = -\frac{4}{3}\vec{e}_1 + \vec{e}_2 = (1;1;2) - \frac{4}{3}(1;1;1) = (-\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{2}{3})$$

3) $\bar{f}_3 = \bar{e}_3 - \lambda_1 \bar{f}_1 - \lambda_2 \bar{f}_2$; Для нахождения λ_1 и λ_2 воспользуемся формулами:

$$\lambda_1 = \frac{(\bar{f}_1, \bar{e}_3)}{(\bar{f}_1, \bar{f}_1)} = \frac{(\bar{e}_1, \bar{e}_3)}{(\bar{e}_1, \bar{e}_1)} = \frac{4}{3};$$

$$\lambda_2 = \frac{(\bar{f}_2, \bar{e}_3)}{(\bar{f}_2, \bar{f}_2)} = \frac{-\frac{2}{3} - \frac{1}{3} + \frac{2}{3}}{\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9}} = -1/2 .$$ Находим $\bar{f}_3$.

$$\bar{f}_3 = \bar{e}_3 - \frac{4}{3}\bar{f}_1 + \frac{1}{2}\bar{f}_2 = (2,1,1) - \frac{4}{3}(1,1,1) + \frac{1}{2}(-1/3,-1/3,2/3) = (1/2,-1/2,0);$$

Получили ортогональный базис $\{\bar{f}_1; \bar{f}_2 \dots \bar{f}_n\}$.

Нормируем его.

$$|\vec{f}_1| = \sqrt{3};\ |\vec{f}_2| = \sqrt{6}/3;\ |\vec{f}_3| = \sqrt{2}/2;$$

$$\overline{h_1} = \frac{\vec{f}_1}{|\vec{f}_1|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right);\quad \overline{h_2} = \frac{\vec{f}_2}{|\vec{f}_2|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right);$$

$$\overline{h_3} = \frac{\vec{f}_3}{|\vec{f}_3|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

$\overline{h_1}, \overline{h_2}, \overline{h_3}$ – ортонормированный базис.

Проверим:

1 способ.

$$(\overline{h_1}, \overline{h_2}) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = 0;$$

$$(\overline{h_1}, \overline{h_3}) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = 0;$$

$$(\overline{h_2},\overline{h_3})=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}=0;$$

$$|\overline{h_1}|=\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}=1$$

$$|\overline{h_2}|=\sqrt{\left(\frac{-1}{\sqrt{6}}\right)^2+\left(\frac{-1}{\sqrt{6}}\right)^2+\left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^2}=1$$

$$|\overline{h_3}|=\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}1$$

Верно.

Сделаем проверку вторым способом- через матрицу перехода.

Для этого необходимо представить базис $\overline{h_1},\overline{h_2},\overline{h_3}$ в координатах базиса $S=\{\vec{e}_1,\vec{e}_{2,}\vec{e}_3\}$

$$\vec{f}_1=\vec{e}_1=(1{,}0{,}0)_S;$$

$$\vec{f}_2=-\frac{4}{3}\vec{e}_1+\vec{e}_2=(-\frac{4}{3},1{,}0)_S;$$

$$\bar{f}_3=\bar{e}_3-\frac{4}{3}\bar{f}_1+\frac{1}{2}\bar{f}_2=-\frac{4}{3}\bar{e}_1+\frac{1}{2}\left(-\frac{4}{3}\vec{e}_1+\vec{e}_2\right)+\bar{e}_3=-2\bar{e}_1+\frac{1}{2}\vec{e}_2+\bar{e}_3=$$

$$=(-2,\frac{1}{2},1)_S$$

Норма вектора не зависит от выбора базиса =>

$$\overline{h_1}=\frac{\vec{f}_1}{|\vec{f}_1|}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},0{,}0\right)_S;\quad \overline{h_2}=\frac{\vec{f}_2}{|\vec{f}_2|}=\left(-\frac{4}{\sqrt{6}},\frac{3}{\sqrt{6}},0\right)_S;$$

$$\overline{h_3}=\frac{\vec{f}_3}{|\vec{f}_3|}=\left(\frac{-4}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},\sqrt{2}\right)_S$$

$$G_H=P^TG_EP=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0\\ -\frac{4}{\sqrt{6}} & ,\frac{3}{\sqrt{6}} & 0\\ \frac{-4}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&4&4\\4&6&5\\4&5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{4}{\sqrt{6}} & \frac{-4}{\sqrt{2}}\\ 0 & \frac{3}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & 0 & \sqrt{2}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} \sqrt{3} & \frac{4}{\sqrt{3}} & \frac{4}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{4}{\sqrt{6}} & \frac{-4}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Верно. Проверка с помощью матрицы перехода показала, что построенный базис $\overline{h_1}, \overline{h_2}, \overline{h_3}$ является ортонормированным.

Можно также сделать проверку через матрицу Грама в базис S=$\{\vec{e}_1, \vec{e}_{2,}\vec{e}_3\}$

$$\overline{h_1}G\overline{h_2} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0{,}0\right)_S \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 4 & 6 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{4}{\sqrt{6}} \\ \frac{3}{\sqrt{6}} \\ 0 \end{pmatrix}_s =0;$$

Можно также убедиться, что

$$\overline{h_1}G\overline{h_2} = 0 \text{ и } \overline{h_2}G\overline{h_3} = 0.$$