ЛЕКЦИЯ № 15.

Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом ортогональных преобразований. Приведение кривой второго порядка к каноническому виду.

Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом ортогональных преобразований.

Рассмотрим метод приведения квадратичной формы к каноническому виду с помощью ортогональный преобразований.

Пусть $\mathbb{E}$ – n-мерное пространство. S=$\{\overline{e}_1; \dots \overline{e}_n\}$- ортонормированный базис; $\varphi(\overline{x})$-квадратичная форма, A-её матрица, симметричная. Рассмотрим линейный оператор $\hat{A}$ с этой матрицей. $\hat{A}$ будет самосопряженным согласно теореме 2 => существует ортонормированный базис S'=$\{\overline{f_1}; \dots \overline{f}_n\}$, в котором матрица оператора $\hat{A}$, A$'$ будет диагональной.

Матрица перехода $P_{s\to S'}$ переводит ортонормированный базис в ортонормированный, следовательно, матрица $P_{s\to S'}$ ортогональная, $P^{-1} = P^T$.

Тогда $$A' = P^{-1}\mathrm{A}P = P^T\mathrm{A}P,$$

то есть , приводя матрицу оператора A к диагональному виду мы и квадратичную форму $\varphi(\overline{x})$ приведем к диагональному виду.

Такое преобразование $A' = P^T\mathrm{A}P$, где P- ортогональная матрица, называют **ортогональным преобразованием**.

Теорема 13. Любая симметричная матрица ортогональным преобразованием приводится к диагональному виду.

Алгоритм приведения квадратичной формы к каноническому виду методом ортогональных преобразований.

1) Составляем матрицу квадратичной формы. Находим собственные значения, $\lambda_i \in$R (вещественные числа), так как матрица симметричная и является матрицей некоторого самосопряженного линейного оператора.

2) Находим собственные векторы.

- Если они попарно различны, то они образуют ортогональный базис, надо преобразовать его в ортонормированный базис.

- Если нет , то строим ортонормированный базис при помощи алгоритма ортогонализации Грама-Шмидта. В этом базисе матрица квадратичной формы будет иметь диагональный вид. На главной диагонали будут стоять собственные значения.

Задача 1 . Привести квадратичную форму к каноническому виду методом ортогональных преобразований.
$\varphi(\overline{x}) = 6{x_1}^2 + 5{x_2}^2 + 7{x_3}^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3$

Решение.

A=$\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$; det(A-$\lambda E$) $= \begin{vmatrix} 6-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 5-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 7-\lambda \end{vmatrix}$=0;

$-\lambda^3 + 18\lambda^2 - 99\lambda + 162 = 0.\quad \lambda_1 = 3; \lambda_2 = 6; \lambda_3 = 9;$

Находим собственные векторы, отвечающие собственным значениям.
$\overline{f}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}; \overline{f}_2 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};\ \overline{f}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$ – ортогональные, так как λ_i- попарно различны. Можно проверить.

Нормируем: $\overline{e}_1 = \frac{\overline{f}_1}{\|\overline{f}_1\|} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}; \overline{e}_2 = \frac{\overline{f}_2}{\|\overline{f}_2\|} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix};$
$\overline{e}_2 = \frac{\overline{f}_3}{\|\overline{f}_3\|} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$

A'=$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}; \varphi(\overline{x}) = 3{y_1}^2 + 6{y_2}^2 + 9{y_3}^2;$
Выпишем преобразование координат: X=PY;

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 & -1/3 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Приведение кривой второго порядка к каноническому виду.

Задача 2. Написать каноническое уравнение кривой второго порядка, определить ее тип и найти каноническую систему координат.
$9x^2 - 4xy + 6y^2 + 16x - 8y - 2 = 0$

Решение.

Выпишем матрицу квадратичной части. A=$\begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$;

Det (A-λE) $= (9-\lambda)(6-\lambda) - 4 = 0$

λ^2-$15\lambda + 50 = 0$; $\lambda_1 = 5$; $\lambda_2 = 10$;

Заметим, что $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Находим собственные векторы , соответствующие λ_1 и λ_2 , они будут ортогональны. Затем нормируем их.

$\lambda_1 = 5$

$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; X1=$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$;

$\overline{e_1}$=$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$;

$\lambda_2 = 10$

$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; X2=$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\overline{e_2}$=$\begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$;

$\{\overline{e_1}, \overline{e_2}\}$- ортонормированный базис из собственных векторов.

Матрица перехода $P_{i,j \to \overline{e_1}, \overline{e_2}}$ =$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$;

Выпишем преобразование координат:

x =$x'\frac{1}{\sqrt{5}} - y'\frac{2}{\sqrt{5}} = x'cos\alpha - y'sin\alpha$

y=$x'\frac{2}{\sqrt{5}} + y'\frac{1}{\sqrt{5}} = x'sin\alpha + y'cos\alpha$

Данное преобразование соответствуют повороту системы координат на угол α против часовой стрелки.

Перейдем к новым координатам:

Для квадратичной части справедливо :
$9x^2 - 4xy + 6y^2 = 5{x'}^2 + 10{y'}^2$

Тогда получаем:
$5{x'}^2 + 10{y'}^2 + 16\left(x'\frac{1}{\sqrt{5}} - y'\frac{2}{\sqrt{5}}\right) - 8\left(x'\frac{2}{\sqrt{5}} + y'\frac{1}{\sqrt{5}}\right) - 2 = 0$;

После раскрытия скобок и приведения подобных членов имеем:

$5{x'}^2 + 10{y'}^2 - \frac{40}{\sqrt{5}}y' - 2 = 0$;

Выделим полный квадрат.

$\frac{{x'}^2}{2} + \left(y' - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = 1$;

$y'' = y' - \frac{2}{\sqrt{5}}$; $x'' = x'$;

Данное преобразование соответствует сдвигу системы координат по оси OY'.

Получаем каноническое уравнение эллипса : $\boldsymbol{\frac{{x''}^2}{2} + {y''}^2 = 1}$**;**

Найдем окончательное преобразование координат:

x $= x'\frac{1}{\sqrt{5}} - y'\frac{2}{\sqrt{5}} = x''\frac{1}{\sqrt{5}} - \left(y'' + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)\frac{2}{\sqrt{5}}$

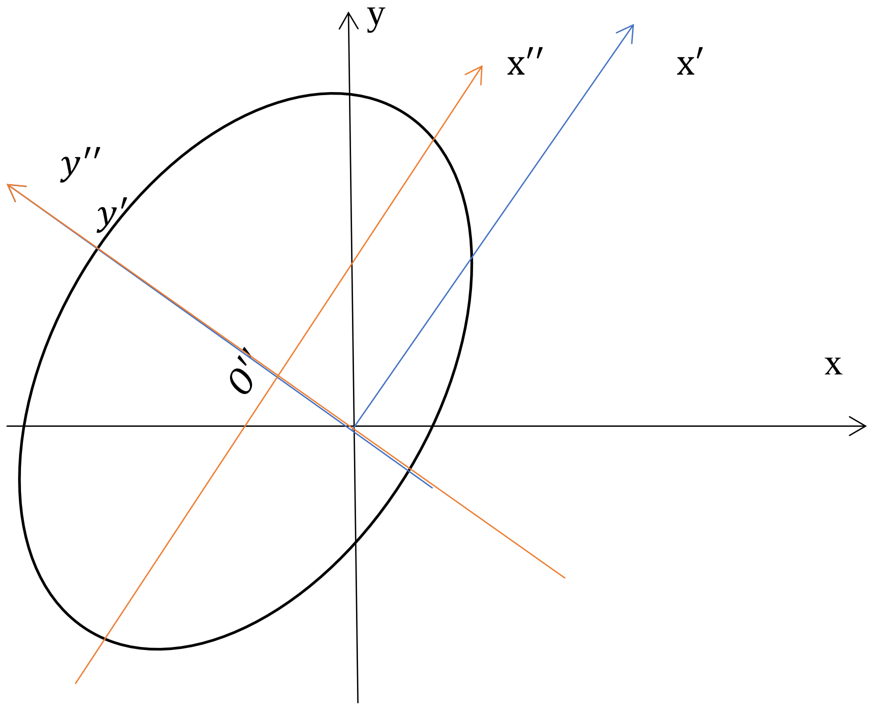
y$= x'\frac{2}{\sqrt{5}} + y'\frac{1}{\sqrt{5}} = x''\frac{2}{\sqrt{5}} + \left(y'' + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)\frac{1}{\sqrt{5}}$

Окончательное преобразование координат выглядит так:

x $\boldsymbol{= x''\frac{1}{\sqrt{5}} - y''\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{4}{5}}$**;**

y $\boldsymbol{= x''\frac{2}{\sqrt{5}} + y''\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{5}}$**;**

Новый центр системы координат $\boldsymbol{O''\left(\frac{-4}{5};\frac{2}{5}\right)}$**.**


y
x''
x'
y''
y'
O'
x