Лекция 4. Определенный интеграл.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$ и принимает на этом отрезке только положительные значения. Рассмотрим на плоскости xOy фигуру, ограниченную графиком этой функции, отрезком $[a, b]$ оси Ox и прямыми $x = a$ и $x = b$. Такую фигуру называют криволинейной трапецией (рис. 1).

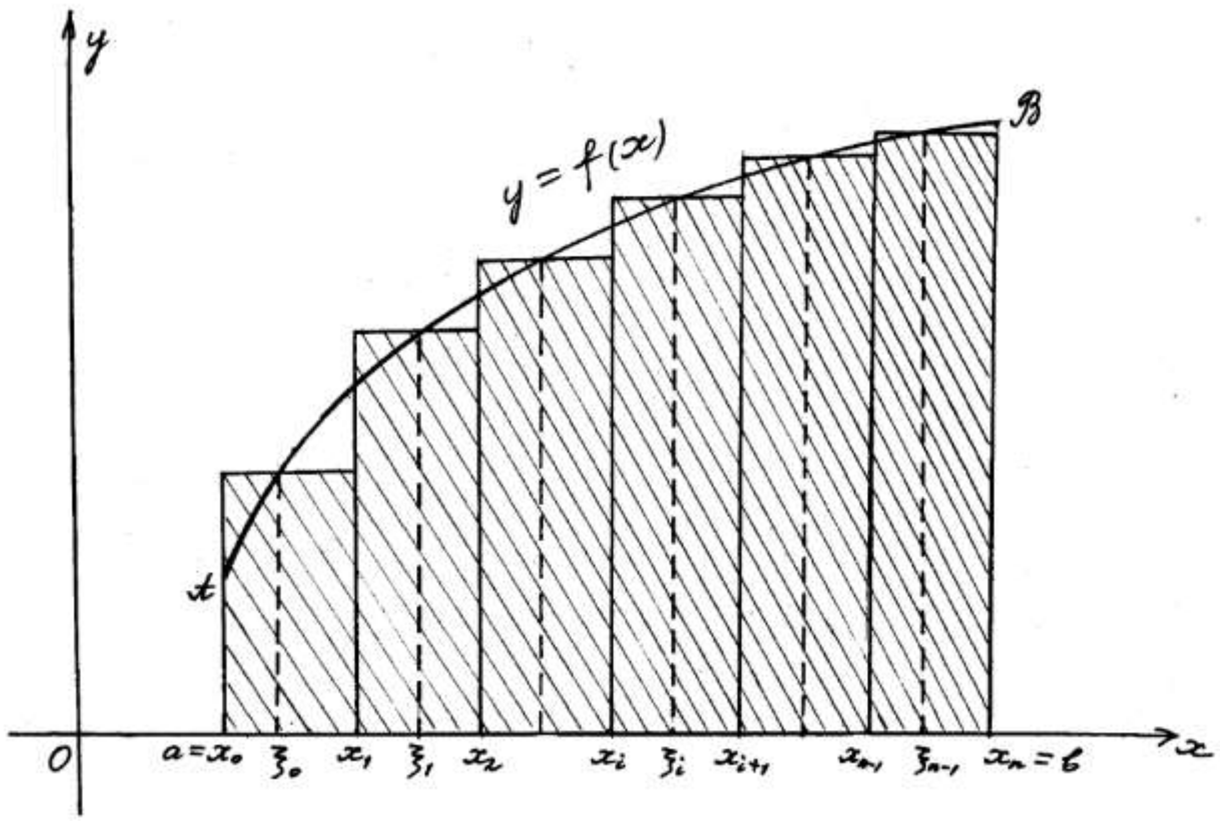

Рис. 1.

Разделим отрезок $[a, b]$ на n отрезков точками $a = x_0 < x_1 < x_2 \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. Длину отрезка $[x_i, x_{i+1}]$ обозначим $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i, i = 0,1,2, \ldots, n-1$, а максимальное значение Δx_i обозначим d. На каждом отрезке произвольно выберем точку $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ и построим прямоугольник с основанием Δx_i и высотой $f(\xi_i)$. Площадь такого прямоугольника равна $f(\xi_i)\Delta x_i$. Сумма площадей всех построенных прямоугольников приближенно равна площади криволинейной трапеции

$$S_{aABb} \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$$

Точное значение площади криволинейной трапеции по определению равно пределу сумм площадей построенных прямоугольников при условии, что $d = \max_i\{\Delta x_i\}$ стремится к нулю

$$S_{aABb} = \lim_{d \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$$

Рассмотрим теперь произвольную функцию $y = f(x)$, определенную на отрезке $[a,b]$. Также, как и при вычислении площади криволинейной трапеции разделим отрезок $[a,b]$ на n отрезков $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0,1,2,\dots,n-1$ и на каждом отрезке произвольно выберем точку ξ_i. Совокупность точек деления

$a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b$, а также промежуточных точек $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ называется разбиением отрезка, а $d = \max_i\{\Delta x_i\}$ – диаметром разбиения. Сумма

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$$

называется интегральной суммой для функции $f(x)$, соответствующей данному разбиению отрезка.

Определение 4.1. Определенным интегралом функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ называется предел интегральной суммы $\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$ при условии, что диаметр разбиения d стремится к нулю, если этот предел существует и не зависит от разбиения отрезка. Обозначается

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{d \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$$

Если определенный интеграл от функции $f(x)$ на отрезке существует, то функция называется интегрируемой по Риману (или, для краткости, просто интегрируемой) на этом отрезке.

Бернхард Риман (1826-1866)– немецкий математик и механик.

<u>Из интегрируемости функции необходимо следует ее ограниченность.</u>

<u>Функция, непрерывная на отрезке, интегрируема на этом отрезке.</u>

<u>Ограниченная функция, имеющая на отрезке конечное число точек разрыва, интегрируема на этом отрезке.</u>

В случае, когда $f(x) > 0$ на отрезке $[a, b]$, определенный интеграл этой функции на отрезке $[a, b]$ равен площади соответствующей криволинейной трапеции:

$$S_{aABb} = \int_a^b f(x)dx$$

Определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ введен в предположении $a < b$. Устраним это ограничение, полагая по определению

$$\int_a^a f(x)dx = 0, \qquad \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \text{, если } b < a$$

Свойства определенного интеграла.

1. $\int_a^b 1 \cdot dx = b - a$

2. Линейность:

$$\int_a^b \big(c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)\big)dx = c_1 \int_a^b f_1(x)dx + c_2 \int_a^b f_2(x)dx$$

3. Аддитивность:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

независимо от взаимного расположения точек a, b и c на числовой прямой.

4. Интегрирование неравенств: если $f(x) \le g(x)$ на отрезке $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$$

5. Оценка определенного интеграла: если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $M = \max_{[a,b]} f(x)$, $m = \min_{[a,b]} f(x)$, то

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

6. Теорема о среднем: если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то найдется точка $c \in [a, b]$ такая, что

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и $x \in [a,b]$. Введем функцию

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$$

которая называется интегралом с переменным верхним пределом. Покажем, что $\Phi(x)$ непрерывна и дифференцируема на $[a,b]$ и $\Phi'(x) = f(x)$. Действительно, пусть $x \in [a,b]$ и $(x+\Delta x) \in [a,b]$. Согласно свойству аддитивности:

$$\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$$

Применим ко второму слагаемому правой части равенства теорему о среднем:

$$\Phi(x+\Delta x) = \Phi(x) + f(c)\Delta x, \qquad c \in [x, x+\Delta x]$$

Тогда

$$\Delta\Phi(x) = \Phi(x+\Delta x) - \Phi(x) = f(c)\Delta x$$

Если $\Delta x \to 0$, то $\Delta\Phi(x) \to 0$, т.е. $\Phi(x)$ – непрерывна в любой точке отрезка $[a,b]$. Кроме того,

$$\frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x} = f(c), c \in [x, x+\Delta x]$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(c) = f(x)$$

в силу непрерывности функции $f(x)$. Следовательно, функция $\Phi(x)$ дифференцируема в каждой точке отрезка $[a,b]$ и $\Phi'(x) = f(x)$. Значит, $\Phi(x)$ – первообразная для функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$. Если $F(x)$ – произвольная первообразная для функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, то $\Phi(x) = F(x) + C$, где C – некоторая постоянная и

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + C$$

Полагая в этом равенстве $x = a$, получим

$$0 = F(a) + C, \qquad C = -F(a)$$

Полагая в этом равенстве $x = b$, получим

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

Значение определенного интеграла не зависит от обозначения переменной интегрирования, поэтому полученное равенство можно переписать в виде:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Мы получили формулу, которую называют формулой Ньютона-Лейбница. Исаак Ньютон (1643-1727) – английский математик, физик, астроном. Вильгельм Лейбниц (1646-1716) – немецкий математик.

Формула Ньютона-Лейбница является основной формулой интегрального исчисления. Она устанавливает связь между определенным интегралом и первообразной одной и той же функции. Правую часть формулы принято записывать $F(x)|_a^b$. Рассмотрим примеры

Пример 1.

$$\int_1^{64} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx = \int_1^{64} \left(x^{-\frac{1}{3}} - x^{-\frac{1}{2}}\right)dx = \left(\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{1}{2}}\right)\Big|_1^{64} =$$

$$= \left(\frac{3}{2}\cdot 64^{\frac{2}{3}} - 2\cdot 64^{\frac{1}{2}}\right) - \left(\frac{3}{2}\cdot 1^{\frac{2}{3}} - 2\cdot 1^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{3}{2}\left(64^{\frac{2}{3}} - 1\right) - 2\left(64^{\frac{1}{2}} - 1\right) = 8{,}5$$

Пример 2.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$$

Пример 3.

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{arctg} x|_1^{\sqrt{3}} = \operatorname{arctg}\sqrt{3} - \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$$

Пример 4.

$$\int_0^{3/2} \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \arcsin\frac{x}{3}\Big|_0^{3/2} = \arcsin\frac{1}{2} - \arcsin 0 = \frac{\pi}{6} - 0 = \frac{\pi}{6}$$

С помощью формулы Ньютона-Лейбница установим правило замены переменной в определенном интеграле. Пусть требуется вычислить $\int_a^b f(x)dx$, где $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. Полагаем, что функция $x = \varphi(t)$ удовлетворяет следующим условиям: $\varphi(t)$ определена, непрерывна и имеет непрерывную производную на некотором отрезке $[t_1, t_2]$, причем $\varphi(t_1) = a$, $\varphi(t_2) = b$ и значения $\varphi(t)$ на отрезке $[t_1, t_2]$ принадлежат отрезку $[a,b]$. Тогда справедлива формула:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{t_1}^{t_2} f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt$$

Действительно, пусть $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$, тогда $F(\varphi(t))$ – первообразная для функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$. Вычислим левую и правую часть равенства с помощью формулы Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt = F\big(\varphi(t_2)\big) - F\big(\varphi(t_1)\big) = F(b) - F(a)$$

Совпадение полученных значений доказывает справедливость формулы замены переменной в определенном интеграле. Заметим, что при вычислении определенного интеграла методом замены переменной не требуется возвращаться к исходной переменной. Рассмотрим примеры.

Пример 5.

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \begin{bmatrix} \ln x = t, \ t_1 = 0 \\ \dfrac{dx}{x} = dt, \ t_2 = 1 \end{bmatrix} = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}t^2\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

Пример 6.

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \begin{bmatrix} x=\sin t\,,t=\arcsin x \\ t_1=\arcsin 0=0,\ t_2=\arcsin 1=\dfrac{\pi}{2} \\ \sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2 t}=\cos t \\ dx=\cos t\ dt \end{bmatrix} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}dt = \left(\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

Пример 7.

$$\int_0^3 \frac{3x-2}{\sqrt{x+1}}dx = \begin{bmatrix} t=\sqrt{x+1}, & t_1=1,\ t_2=2 \\ x=t^2-1, & dx=2tdt \end{bmatrix} = \int_1^2 \frac{3(t^2-1)-2}{t}2tdt =$$

$$= 2\int_1^2 (3t^2-5)dt = 2(t^3-5t)|_1^2 = 2\big((8-1)-5(2-1)\big) = 4$$

Пример 8.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+2\cos^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\frac{1}{\cos^2 x}+2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dtgx}{3+\mathrm{tg}^2 x} = \begin{bmatrix} t=tgx \\ t_1=0 \\ t_2=1 \end{bmatrix} =$$

$$= \int_0^1 \frac{dt}{3+t^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{t}{\sqrt{3}}\Big|_0^1 = \frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$$

Формула интегрирования по частям для определенного интеграла приобретает вид:

$$\int_a^b udv = (uv)|_a^b - \int_a^b vdu$$

Рассмотрим примеры.

Пример 9.

$$\int_1^e \ln x\,dx = \begin{bmatrix} u=\ln x\,, & du=\dfrac{dx}{x} \\ dv=dx, & v=x \end{bmatrix} = x\ln x|_1^e - \int_1^e dx = e - x|_1^e =$$

$$= e - (e - 1) = 1$$

Пример 10.

$$\int_0^{\pi} x \sin x \, dx = \begin{bmatrix} u = x, & du = dx \\ dv = \sin x \, dx, & v = -\cos x \end{bmatrix} = -x \cos x|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x \, dx =$$

$$= \pi + \sin x|_0^{\pi} = \pi$$

Пример 11.

$$\int_0^1 x \, arctg \, x \, dx = \begin{bmatrix} u = arctg \, x \, , & du = \dfrac{dx}{1 + x^2} \\ & dv = xdx, v = \dfrac{1}{2} x^2 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \, arctg \, x \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(x^2 + 1 - 1)dx}{1 + x^2} dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} (x - arctg \, x) \Big|_0^1 =$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi - 2}{4}$$

Пример 12.

$$I = \int_0^{\pi} e^x sinxdx = \begin{bmatrix} u = e^x, & du = e^x dx \\ dv = sinxdx, & v = -cosx \end{bmatrix} = -e^x cosx|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} e^x cosxdx =$$

$$= \begin{bmatrix} u = e^x, & du = e^x dx \\ dv = cosxdx, & v = sinx \end{bmatrix} = e^{\pi} + 1 + e^x sinx|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x sinxdx =$$

$$= e^{\pi} + 1 - I$$

$$2I = e^{\pi} + 1 => I = \frac{1}{2}(e^{\pi} + 1)$$