Лекция 7. Двойной интеграл.

Задача о вычислении площади криволинейной трапеции приводит к понятию определенного интеграла. Аналогично задача о вычислении объема цилиндрического тела приводит к понятию двойного интеграла.

Рассмотрим тело, которое ограничено сверху поверхностью, заданной уравнением $z = f(x, y)$, снизу областью D координатной плоскости xOy, а боковая поверхность тела является цилиндрической с образующей, параллельной оси Oz (рис. 7.1).

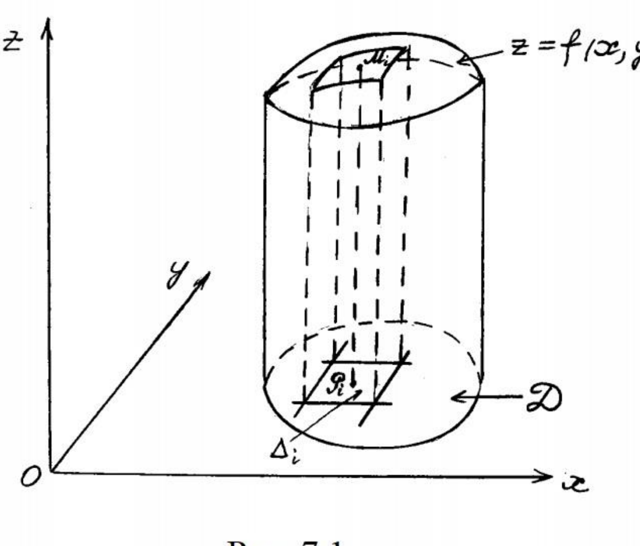

Рис. 7.1.

Для вычисления объема этого тела разделим его на элементарные части, просуммируем объемы этих частей и перейдем к пределу. Область D плоскости xOy разделим на n частей прямыми, параллельными координатным осям Ox и Oy. Каждый элемент разбиения области D будет представлять собой прямоугольник Δ_i со сторонами Δx_i и Δy_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, а его площадь будет равна $\Delta x_i \Delta y_i$. В каждом прямоугольнике произвольно выберем точку $P_i(\xi_i, \eta_i)$ и вычислим значение функции $z = f(x, y)$ в этой точке: $z_i = f(\xi_i, \eta_i)$ – аппликата точки M_i на поверхности $z = f(x, y)$. Через стороны каждого прямоугольника Δ_i проведем плоскости, параллельные оси Oz. Тело при этом разобьется на элементарные части, каждую из которых можно приближенно принять за прямоугольный параллелепипед с основанием Δ_i и высотой z_i, объем которого ΔV_i равен

$$\Delta V_i = f(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i \Delta y_i,$$

а объем всего тела приближенно выразится формулой

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i \Delta y_i$$

Диаметром разбиения d будем считать наибольшую из диагоналей всех прямоугольников Δ_i. За объем естественно принять предел полученного приближенного значения при условии $d \to 0$:

$$V = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i \Delta y_i$$

Правая часть этого равенства по определению и есть двойной интеграл от функции $f(x, y)$ по области D. Этот интеграл обозначается

$$\iint_D f(x, y)dxdy$$

Таким образом объем V цилиндрического тела равен:

$$V = \iint_D f(x, y)dxdy$$

При вычислении объема цилиндрического тела естественно предполагалось, что функция $z = f(x, y)$ принимает в области D положительные значения, т.к. поверхность $z = f(x, y)$ ограничивает тело сверху. В общем случае для определения двойного интеграла произвольной (по знаку) функции $f(x, y)$ область D делится на n частей, в каждой из которых произвольно выбирается точка $P_i(\xi_i, \eta_i)$, вычисляется значение $f(\xi_i, \eta_i)$ функции в этой точке и вычисляется интегральная сумма

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i \Delta y_i$$

Определение 7.1. Двойным интегралом функции $f(x, y)$ по области D называется предел интегральной суммы $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i \Delta y_i$ при условии, что диаметр d разбиения стремится к нулю, если этот предел существует и не зависит от разбиения области.

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i \Delta y_i$$

Функция, имеющая интеграл по области, называется интегрируемой в этой области. Без доказательства сформулируем следующее утверждение: <u>если</u>

функция $f(x, y)$ непрерывна в области D, а область D ограничена кусочно-гладкой кривой, то функция $f(x, y)$ интегрируема в области D.

Если подынтегральная функция больше нуля, то двойной интеграл равен объему цилиндрического тела. Если подынтегральную функцию интерпретировать как поверхностную плотность, то двойной интеграл равен массе плоской фигуры.

Двойной интеграл, также как и определенный интеграл, равен пределу интегральной суммы и, следовательно, обладает всеми свойствами определенного интеграла. Перечислим эти свойства:

1. **Линейность.**

$$\iint\limits_D (c_1 f_1(x, y) + c_2 f_2(x, y))dxdy = c_1 \iint\limits_D f_1(x, y)dxdy + c_2 \iint\limits_D f_2(x, y)dxdy$$

2. **Аддитивность.**

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x, y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x, y)dxdy$$

если $D = D_1 \cup D_2, \;\; D_1 \cap D_2 = \emptyset$.

3. **Интегрирование неравенств.** Если $f(x, y) \leq g(x, y)$ в области D, то

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy \leq \iint\limits_D g(x, y)dxdy$$

4. **Оценка двойного интеграла.** Если $m = \min\limits_D f(x, y)$, $M = \max\limits_D f(x, y)$, S – площадь области D, то

$$mS \leq \iint\limits_D f(x, y)dxdy \leq MS$$

5. **Теорема о среднем.** Если $f(x, y)$ непрерывна в области D, то найдется такая точка $P_0(x_0, y_0) \in D$, что

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = f(x_0, y_0)S$$

Перейдем к вопросу о вычислении двойного интеграла. Будем предполагать, что область *D* ограничена графиками функций $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$ и прямыми $x = a$ и $x = b$ (рис. 7.2).

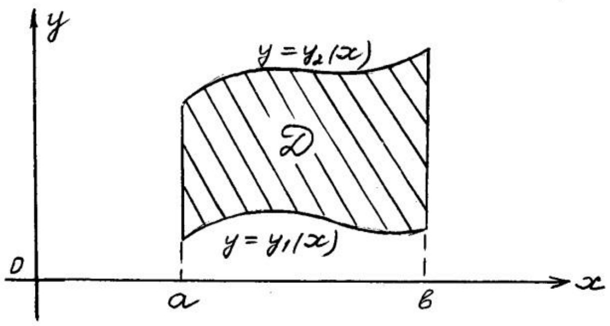

Рис. 7.2.

Если область *D* имеет более сложную форму, ее следует делить на части и пользоваться аддитивностью двойного интеграла. Двойной интеграл функции $f(x, y)$ по области *D* равен объему тела, сечения которого плоскостями, параллельными плоскости *yOz*, представляют собой криволинейные трапеции (рис. 7.3), площади которых вычисляются по формулам:

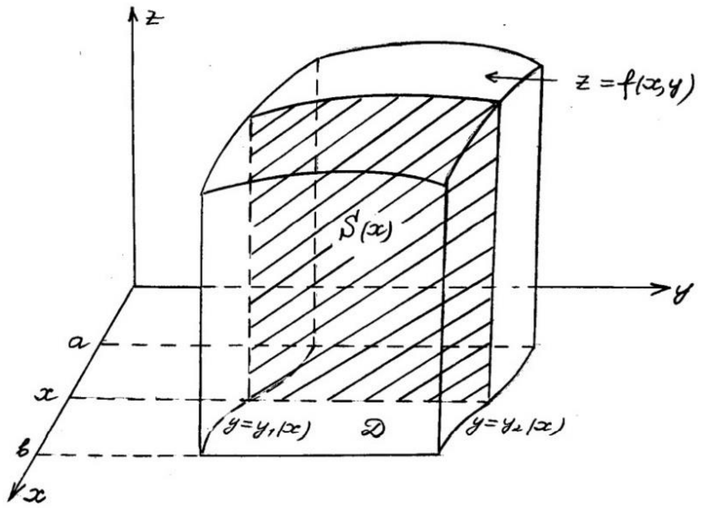

Рис. 7.3.

$$S(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)dy$$

Теперь воспользуемся формулой для вычисления объема тела с известными поперечными сечениями:

$$V = \int_a^b S(x)dx = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)dy \right) dx$$

Т.к. двойной интеграл функции $f(x, y)$ по области D равен объему цилиндрического тела, то для двойного интеграла получена формула:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \right) dx$$

Правую часть формулы называют повторным интегралом и обычно записывают в виде:

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$$

Итак, пользуясь геометрическим смыслом двойного интеграла, мы нашли способ его вычисления, состоящий в представлении двойного интеграла в виде повторного:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$$

Если область D ограничена графиками функций $x = x_1(y)$, $x = x_2(y)$ и прямыми $y = c$ и $y = d$ (рис. 7.4), то двойной интеграл можно представить в виде повторного другим способом:

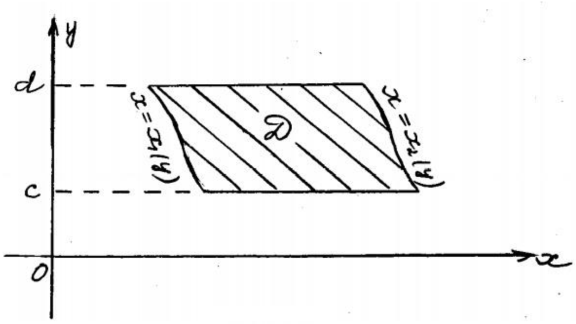

Рис. 7.4.

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx$$

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Вычислить двумя способами

$$\iint\limits_D xy^2dxdy$$

где область D ограничена графиками функций $y = x$ и $y = x^2$ (рис. 7.5).

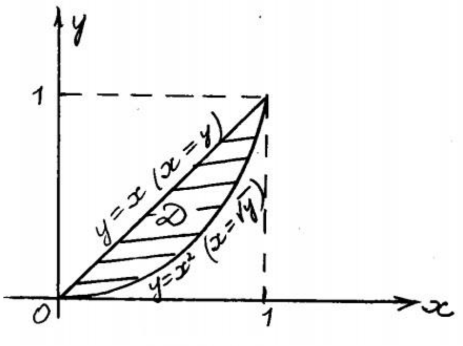

Рис. 7.5.

1 способ.

$$\iint\limits_D xy^2dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{x} xy^2dy =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(x\frac{y^3}{3}\Big|_{x^2}^{x} \right)dx = \frac{1}{3}\int\limits_0^1 x(x^3 - x^6)dx =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{x^5}{5} - \frac{x^8}{8}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{8}\right) = \frac{1}{40}$$

2 способ.

$$\iint\limits_D xy^2dxdy = \int\limits_0^1 dy\int\limits_y^{\sqrt{y}} xy^2dx = \int\limits_0^1 \left(y^2\frac{x^2}{2}\Big|_y^{\sqrt{y}} \right)dy = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 y^2(y - y^2)dy =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{y^4}{4} - \frac{y^5}{5}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{40}$$

Пример 2. Изменить порядок интегрирования

$$\int\limits_2^4 dx \int\limits_{\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{8x}} f(x,y)dy$$

Построим область интегрирования. Она ограничена графиками функций $y = \sqrt{4x - x^2}$, $y = \sqrt{8x}$ и прямыми $x = 2, x = 4$ (рис. 7.6). Обе части равенства $y = \sqrt{4x - x^2}$ возведем в квадрат, учитывая, что $y \geq 0$:

$$y^2 = 4x - x^2,$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 = 4,$$

$$(x-2)^2 + y^2 = 4, y \geq 0$$

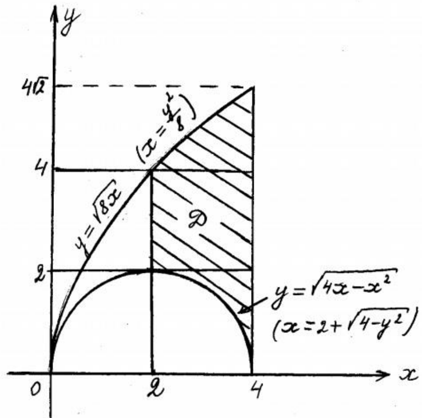

Рис. 7.6.

Мы получили уравнение верхней полуокружности с центром в точке $(2; 0)$, радиус которой равен 2. Выразим x из полученного уравнения: $x = 2 \pm \sqrt{4 - y^2}$.

Аналогично обе части уравнения $y = \sqrt{8x}$ возведем в квадрат, учитывая, что $y \geq 0$. Получим $x = \frac{y^2}{8}, y \geq 0$. Это уравнение дуги параболы, расположенной в первой четверти. Разбивая область D на три части, перепишем данный интеграл в виде:

$$\int_{2}^{4} dx \int_{\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{8x}} f(x,y)dy = \int_{0}^{2} dy \int_{2+\sqrt{4-y^2}}^{4} f(x,y)dx + \int_{2}^{4} dy \int_{2}^{4} f(x,y)dx +$$

$$+\int_{4}^{4\sqrt{2}} dy \int_{\frac{y^2}{8}}^{4} f(x,y)dx$$

Замена переменных в двойном интеграле.

Пусть на координатной плоскости переменных *x, y* задана некоторая область *D*, а на плоскости переменных *u, v* – область *G*. Функции $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ устанавливают взаимно однозначное соответствие между точками этих областей. Предположим, что эти функции непрерывны и имеют непрерывные частные производные первого порядка в области *G*. Матрица, элементами которой являются первые частные производные функций *x* и *y* по переменным *u* и *v* называется матрицей Якоби. Определитель этой матрицы:

$$I = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

называется якобианом.

Карл Якоби (1804 – 1851) – немецкий математик и механик.

Формула замены переменных в двойном интеграле имеет вид:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_G f\big(x(u,v), y(u,v)\big) \cdot |I| \cdot dudv$$

Якобиан играет для отображения, заданного функциями $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ такую же роль, что и производная для функции одной переменной. Выражение $|I|dudv$ представляет собой элемент площади в криволинейных координатах *u, v*.

Вычислим якобиан в случае перехода от декартовых координат *x, y* к полярным координатам r, φ, связь между которыми устанавливается равенствами:

$$x = r\cos\varphi\,, y = r\sin\varphi$$

$$I=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi}\\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi\\ \sin\varphi & r\cos\varphi\end{vmatrix}=r\cos^2\varphi+r\sin^2\varphi=r$$

Формула замены переменных в этом случае имеет вид:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_G f(r\cos\varphi\,,r\sin\varphi)\cdot r\cdot drd\varphi$$

Поясним геометрический смысл выражения $rdrd\varphi$. Если на плоскости переменных r,φ рассмотреть элементарный прямоугольник со сторонами dr и $d\varphi$, то на плоскости x,y ему будет соответствовать фигура, ограниченная дугами окружностей радиусов r и $r+dr$ и двумя лучами, исходящими из начала координат под углами φ и $\varphi+d\varphi$ (рис. 7.7).

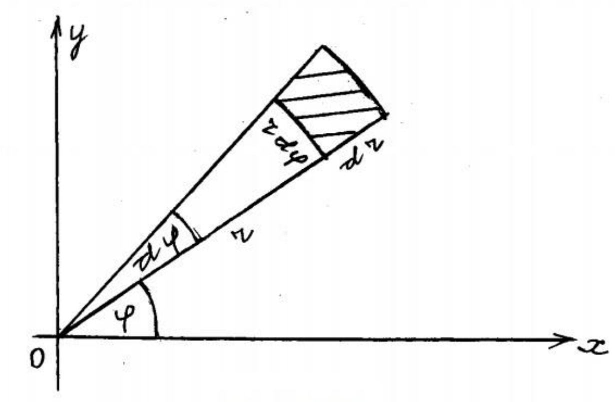

Рис. 7.7.

Площадь этой фигуры приближенно равна $rdrd\varphi$. Таким образом, при вычислении двойного интеграла в криволинейных координатах область интегрирования делится не на прямоугольные элементы, а на криволинейные с помощью сетки координатных линий.

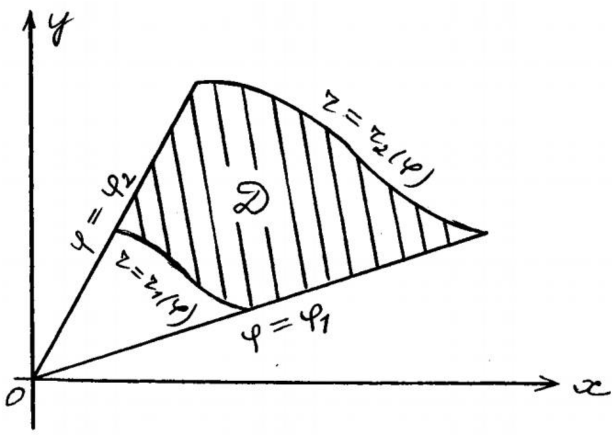

Рис. 7.8.

Если область D на плоскости xOy ограничена полярными лучами $\varphi=\varphi_1$, $\varphi=\varphi_2$ и линиями $r=r_1(\varphi)$, $r=r_2(\varphi)$, заданными в полярных координатах (рис. 7.8), то двойной интеграл по области D сводится к повторному по формуле:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}d\varphi\int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)}f(r\cos\varphi\,,r\sin\varphi)rdr$$

Рассмотрим примеры.

Пример 3. Вычислить

$$\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$$

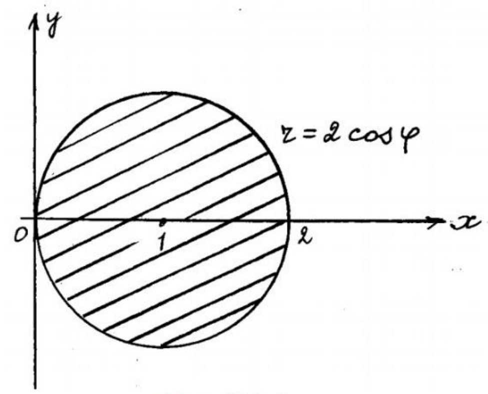

Рис. 7.9.

где область D ограничена окружностью (рис. 7.9) $(x-1)^2+y^2=1$

Перепишем уравнение окружности в виде $x^2+y^2=2x$ и перейдем к полярным координатам:

$$r = 2\cos\varphi\,, \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} r^3 dr =$$

$$= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^{2\cos\varphi} d\varphi = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^4\varphi d\varphi = 4\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)^2 d\varphi =$$

$$= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + 2\cos 2\varphi + \frac{1+\cos 4\varphi}{2}\right) d\varphi = \left(\frac{3}{2}\varphi + \sin 2\varphi + \frac{1}{8}\sin 4\varphi\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi}{2}$$

Пример 4. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z=x^2+y^2$, $z=4$ (рис. 7.10).

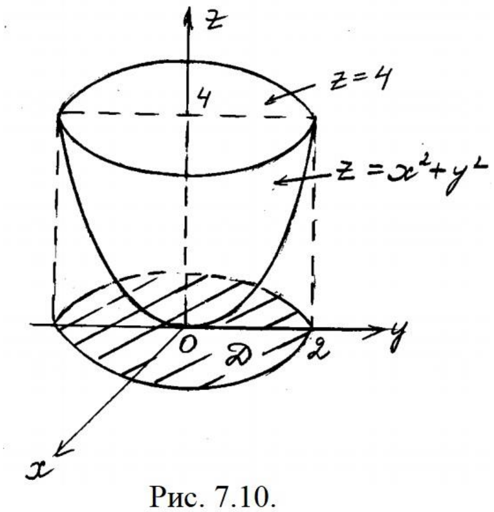

Рис. 7.10.

Т.к. тело заключено между двумя поверхностями, его объем равен

$$V = \iint\limits_D (4-(x^2+y^2))dxdy$$

где D – проекция тела на плоскость xOy и представляет собой круг с центром в начале координат и радиусом 2. Уравнение границы этого круга в полярных координатах имеет вид:

$$r = 2, \qquad \varphi \in [0,2\pi]$$

Воспользуемся полярными координатами:

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r(4 - r^2)dr = 2\pi \int_0^2 (4r - r^3)dr = 2\pi \left(2r^2 - \frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^2 = 8\pi$$

Если область интегрирования ограничена дугой эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

то наиболее удобными для интегрирования в этом случае являются обобщенные полярные координаты r, φ связь которых с декартовыми определяется по формулам:

$$\begin{cases} x = ar\cos\varphi \\ y = br\sin\varphi \end{cases}$$

Уравнение эллипса в этих координатах имеет наиболее простой вид:

$$r = 1, \qquad \varphi \in [0,2\pi],$$

а якобиан

$$I = \begin{vmatrix} a\cos\varphi & -ar\sin\varphi \\ b\sin\varphi & br\cos\varphi \end{vmatrix} = abr\cos^2\varphi + abr\sin^2\varphi = abr$$

Пример 5. Вычислить

$$\iint_D y^2 dxdy$$

где область D ограничена эллипсом

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

Воспользуемся обобщенными полярными координатами

$$x = 3r\cos\varphi\,, \qquad y = 2r\sin\varphi\,, \qquad \varphi \in [0,2\pi], \qquad I = 6r$$

$$\iint_D y^2 dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 4r^2\sin^2\varphi \cdot 6r dr = 24 \int_0^{2\pi} \sin^2\varphi d\varphi \int_0^1 r^3 dr =$$

$$= 24 \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} d\varphi \left(\frac{r^4}{4} \right) \Bigg|_0^1 = 3 \left(\varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) \Bigg|_0^{2\pi} = 6\pi$$