Лекция №10

5. Тройной интеграл

Пусть в некоторой области V трехмерного пространства $Oxyz$ задана функция $f(x,y,z)$. Введём понятие тройного интеграла функции $f(x,y,z)$ по области V. Разобьем эту область на конечное число областей $V_1, V_2, ... V_n$, объемы которых обозначим $\Delta V_1, \Delta V_2, ..., \Delta V_n$. Предполагается, что $V = V_1 \cup V_2 \cup ... \cup V_n$, $V_i \cup V_j = \varnothing$ при $i \neq j$. Набор $\{V_1, V_2, ..., V_n\}$ будем называть разбиением Ξ_n области V. В пределах каждого элемента V_i разбиения Ξ_n произвольно выберем точку $P_i = P_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$. Вычислим значение функции f в этой точке $f(P_i) = f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$.

Наибольшее расстояние между точками в каждой из этих частей $V_1, V_2, ... V_n$ обозначим $d1, d2, ..., dn$. Величина di называется диаметром подобласти V_i. Диаметром разбиения d называется максимум чисел $d1, d2, ..., dn$: $\quad d = \max\{d1, d2, ..., dn\}$

Сумма $\sigma(\Xi_n, P) = \sum f(P_i) \cdot \Delta V_i$ называется *интегральной* суммой, отвечающей разбиению Ξ_n области V с заданным набором точек $P = \{P_1, P_2, ..., P_n\}$.

<u>*Определение*</u>. Если существует конечный предел I интегральных сумм $\sigma(\Xi_n, P) = \sum f(P_i) \cdot \Delta V_i$ при условии, что диаметр разбиения d стремится к нулю, не зависящий от способа разбиения Ξ_n области V и выбора точек $P = \{P_1, P_2, ..., P_n\}$, то этот предел называется *тройным интегралом* функции f по области V.

Обозначается $$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta V_i.$$

Сформулируем без доказательства условия существования тройного интеграла.

<u>*Теорема*</u>. Если функция $f(x,y,z)$ непрерывна в области V, а область V ограничена кусочно-гладкой поверхностью, то тройной интеграл функции $f(x,y,z)$ по области V существует, т.е. функция интегрируется в области. Свойства тройного интеграла аналогичны свойствам двойного интеграла. Сформулируем, например, теорему о среднем для тройного интеграла.

<u>*Теорема*</u>. Если $f(x,y,z)$ непрерывна в области V, объём которой также обозначим V, то найдётся точка $P(x_0,y_0,z_0)\in V$:

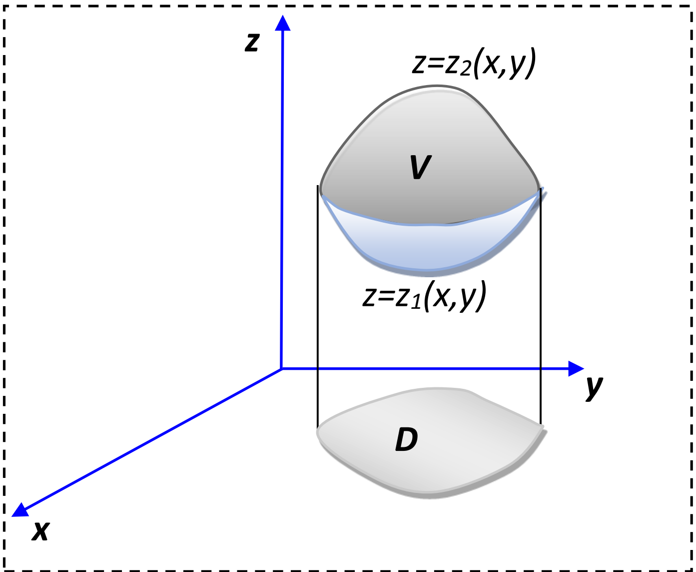
$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = f(x_0,y_0,z_0)\cdot V$$

Если подынтегральная функция равна 1, то тройной интеграл по области равен *объёму* области: $\boldsymbol{V} = \iiint dxdydz.$

Если подынтегральную функцию интерпретировать как плотность $\rho(x,y,z)$ области, то тройной интеграл по области равен её *массе*

$$M = \iiint\limits_V \rho(x,y,z)dxdydz$$

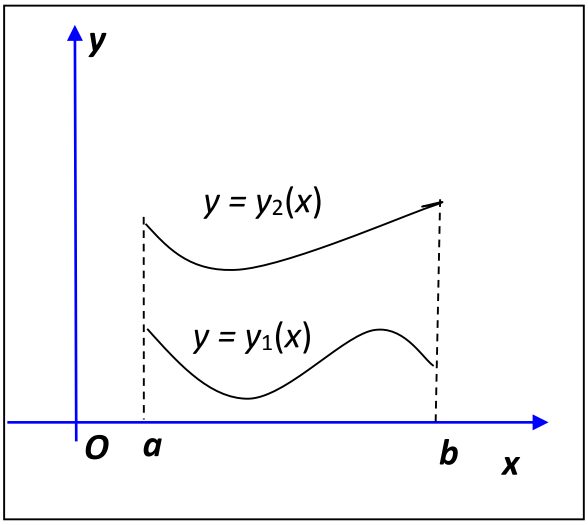
Пусть тело V ограничено снизу поверхностью $z=z_1(x,y)$, сверху – поверхностью $z=z_2(x,y)$, проекции которых на плоскость Oxy совпадают и представляют собой область D, а боковая поверхность тела является цилиндрической с образующей, параллельной оси Oz.



Тогда тройной интеграл по области D сводится к повторному:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz .$$

Если D представляет собой криволинейную трапецию, ограниченную графиками функций $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$ и прямыми $x = a$, $x = b$,



$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz .$$

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Вычислить $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^4}$, где область V ограничена плоскостями $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

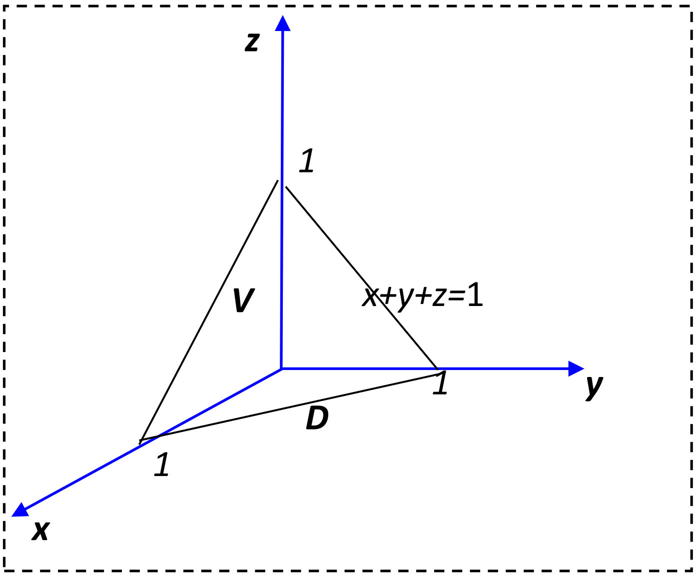
Решение.

Представим тройной интеграл в виде повторного:

$$\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^4} = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1+x+y+z)^4} = \int\limits_a^1 dx \int\limits_0^{1-x} \left(-\frac{1}{3(1+x+y+z)^3} \right) \Bigg|_0^{1-x-y} dy =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{(1+x+y)^3} - \frac{1}{8} \right) dy = \frac{1}{3} \int\limits_0^1 \left(-\frac{1}{2(1+x+y)^2} - \frac{y}{8} \right) \Bigg|_0^{1-x} dx = \frac{1}{6} \int\limits_0^1 \left(\frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{4} - \frac{1-x}{4} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{6} \int\limits_0^1 \left(\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{x-2}{4} \right) dx = \frac{1}{6} \left(-\frac{1}{1+x} + \frac{(x-2)^2}{8} \right) \Bigg|_0^1 = \frac{1}{6} \left(-\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{8} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{48}$$



Пример 2. Вычислить $\iiint\limits_V xyz\,dxdydz$, где V ограничена поверхностями $x^2+y^2+z^2=4$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ (I октант).

Решение.

Перейдём к повторному интегралу:

$$\iiint\limits_V xyz\,dxdydz=\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}}dy\int\limits_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}}xyz\,dz=\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}}xy\left(\frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}}dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}}xy\left(4-x^2-y^2\right)dy=\frac{1}{2}\int\limits_0^2 x\left(\left(4-x^2\right)\frac{y^2}{2}-\frac{y^2}{4}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{4-x^2}}dx=$$

$$=\frac{1}{4}\int\limits_0^2 x\left(\left(4-x^2\right)^2-\frac{\left(4-x^2\right)^2}{2}\right)dx=\frac{1}{8}\int\limits_0^2 x\left(4-x^2\right)^2dx=-\frac{1}{16}\int\limits_0^2\left(4-x^2\right)^2d\left(4-x^2\right)=$$

$$=-\frac{1}{16}\frac{\left(4-x^2\right)^3}{3}\Bigg|_0^2=\frac{1}{16}\cdot\frac{64}{3}=\frac{4}{3}.$$

Замена переменных в тройном интеграле

Рассмотрим вопрос о замене переменных в тройном интеграле. Пусть имеется область V в системе координат x,y,z и область V_1 в системе координат u,v,w. Предположим, что система функций $x=x(u,v,w)$, $y=y(u,v,w)$, $z=z(u,v,w)$

устанавливает взаимно однозначное соответствие между точками этих областей и якобиан

$$I=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w}\\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w}\end{vmatrix}$$

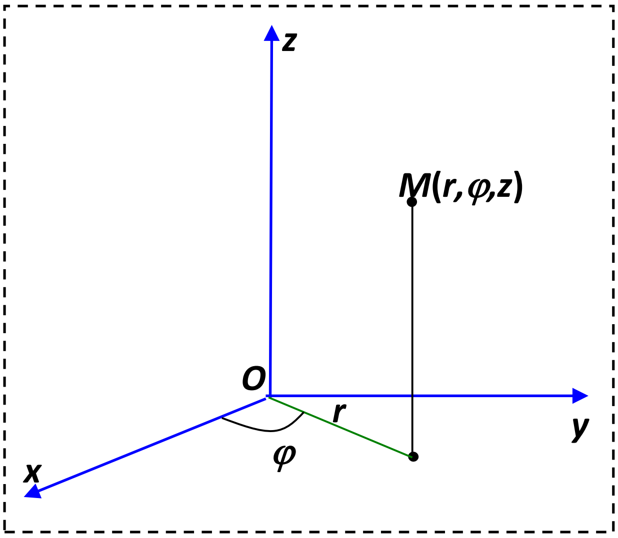
не обращается в нуль в области V_1.

Формула замены переменных в тройном интеграле имеет вид:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_{V_1} f\left(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)\right)|I|dudvdw$$

Наиболее часто на практике используются *цилиндрические* и *сферические* координаты.

Цилиндрические координаты r,φ,z представляют соединение полярных координат на плоскости Oxy с обычной декартовой координатой z.



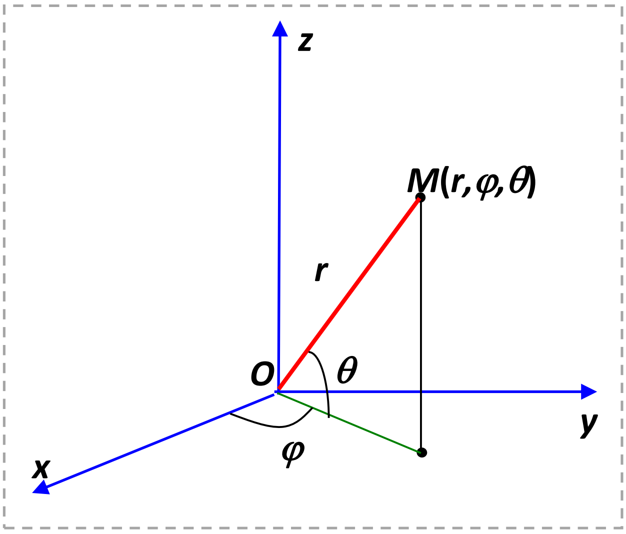
Формулы, связывающие декартовы и цилиндрические координаты имеют вид:

$x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, $z=z$; $0\le r<+\infty$, $0\le\varphi<2\pi$, $-\infty<z<+\infty$.

Якобиан преобразования

$$I=\begin{vmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=r$$

Сферические координаты r,φ,θ



связаны с декартовыми формулами:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta\cos\varphi \\ y = r\cos\theta\sin\varphi \\ z = r\sin 0 \end{cases} \qquad 0 \le r < +\infty,\ 0 \le \varphi < 2\pi,\ -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

Якобиан преобразования равен:

$$I = \begin{vmatrix} \cos\theta\cos\varphi & -r\cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin 0 & 0 & r\cos 0 \end{vmatrix}$$

Раскладывая определитель по 3-ей строке, получим:

$$I = \sin\theta\left(r^3\sin\theta\cos\theta\sin^2\varphi + r^2\sin\theta\cos\theta\cos^2\varphi\right) + r\cos\theta\left(r\cos^2\theta\cos^2\varphi + r\cos^2\theta\sin^2\varphi\right) =$$

$$= r^2\sin^2\theta\cos\theta + r^2\cos^3\theta = r^2\cos\theta.$$

Вернёмся к *примеру 2* и вычислим искомый интеграл, используя цилиндрические координаты:

$$\iiint\limits_V xyz\,dx\,dy\,dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^2 dr \int_0^{\sqrt{4-r^2}} r\cos\varphi\cdot r\sin\varphi\cdot z\cdot r\cdot dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\cos\varphi d\varphi\cdot\int_0^2 r^3\left(\frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{4-r^2}} dr =$$

$$= \frac{1}{2}\sin^2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{1}{2}\int_0^2 r^3\left(4-r^2\right)dr = \frac{1}{4}\int_0^2\left(4r^3-r^5\right)dr = \frac{1}{4}\left(r^4-\frac{r^6}{6}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{1}{4}\left(16-\frac{32}{3}\right) = \frac{4}{3}$$

Ещё проще вычислить этот интеграл, пользуясь сферическими координатами:

$$\iiint\limits_V xyz\,dx\,dy\,dz = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^2 r\cos\theta\cos\varphi \cdot r\cos\theta\sin\varphi \cdot r\sin\theta \cdot r^2\cos\theta dr =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta\sin\theta\,d\theta \cdot \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\sin\varphi d\varphi \cdot \int\limits_0^2 r^5 dr = \left(-\frac{1}{4}\cos^4\theta\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left(\frac{1}{2}\sin^2\varphi\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left(\frac{1}{6}r^6\right)\Bigg|_0^2 = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{32}{3} = \frac{4}{3}$$

Приложения тройного интеграла

Тройной интеграл может применяться для вычисления массы и координат центра масс трехмерного тела, а также для вычисления других физических величин.

Масса тела V с плотностью $\rho(x,y,z)$ вычисляются по формуле

$$M = \iiint\limits_V \rho(x,y,z)dxdydz$$

Координаты центра масс тела V с плотностью $\rho(x,y,z)$ вычисляются по формулам $x_c = \frac{M_{yz}}{M}$, $y_c = \frac{M_{xz}}{M}$, $z_c = \frac{M_{xy}}{M}$,

где $M = \iiint\limits_V \rho(x,y,z)dxdydz$ – масса тела, а $M_{yz} = \iiint\limits_V x\rho(x,y,z)dxdydz$,

$M_{xz} = \iiint\limits_V y\rho(x,y,z)dxdydz$, $M_{xy} = \iiint\limits_V z\rho(x,y,z)dxdydz$ – статические моменты тела относительно координатных плоскостей O_{yz}, O_{xz}, O_{xy} соответственно.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Вычислить координаты центра масс однородного тела, ограниченного поверхностями $2z = x^2 + y^2$, $z = 2$.

Решение.

Однородное тело симметрично относительно оси O_z, значит $x_c = y_c = 0$.

Уравнение параболоида перепишем в цилиндрических координатах: $z = \frac{r^2}{2}$.

Масса тела V с плотностью $\rho(x,y,z)$ вычисляются по формуле

$$M=\iiint\limits_V \rho(x,y,z)dxdydz$$

Полагая $\rho=1$ и пользуясь цилиндрическими координатами, вычислим:

$$M=\iiint\limits_V dxdydz=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^2 dr\int\limits_{\frac{r^2}{2}}^2 rdz=2\pi\cdot\int\limits_0^2 r\cdot z\Big|_{\frac{r^2}{2}}^2 dr=2\pi\int\limits_0^2 r\left(2-\frac{r^2}{2}\right)dr=$$

$$=2\pi\int\limits_0^2\left(2r-\frac{r^3}{2}\right)dr=2\pi\left(r^2-\frac{r^4}{8}\right)\Bigg|_0^2=4\pi.$$

Статический момент тела относительно координатной плоскости O_{xy}:

$$M_{xy}=\iiint\limits_V z\,dxdydz=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^2 dr\int\limits_{\frac{r^2}{2}}^2 z\cdot rdz=2\pi\cdot\int\limits_0^2 r\cdot z\left(\frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_{\frac{r^2}{2}}^2 dr=2\pi\int\limits_0^2 r\left(2-\frac{r^4}{8}\right)dr=\frac{16\pi}{3}$$

Координаты центра масс тела V :

$x_c=y_c=0$, $z_c=\dfrac{M_{xy}}{M}=\dfrac{16\pi}{3}:4\pi=\dfrac{4}{3}$, т.е. $C\left(0,0,\dfrac{4}{3}\right)$

Пример 2. Вычислить координаты центра масс однородного полушара:

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\ z\ge 0\end{cases}$$

Решение. Воспользуемся сферическими координатами. Уравнение сферы в этих координатах примет наиболее простой вид: $r=1$.

Центр масс находится на оси Oz. Полагая $\rho=1$, получим:

$$M=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int\limits_0^1 r^2\cos\theta dr=2\pi\cdot\sin\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot\left(\frac{1}{3}r^3\right)\Bigg|_0^1=\frac{2\pi}{3}$$

Статический момент тела относительно координатной плоскости O_{xy}:

$$M_{xy}=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int\limits_0^1 r\sin\theta\cdot r^2\cos\theta dr=2\pi\cdot\left(\frac{1}{2}\sin^2\theta\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot\left(\frac{1}{4}r^4\right)\Bigg|_0^1=\frac{\pi}{4}$$

$x_c=y_c=0$, $z_c=\dfrac{M_{xy}}{M}=\dfrac{\pi}{4}:\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{3}{8}$, т.е. $C\left(0,0,\dfrac{3}{8}\right)$.