Лекция 5. Приложения определенного интеграла.

Определенный интеграл применяется для вычисления площадей, длин и объемов различных геометрических фигур.

1. Площадь области на плоскости xOy, ограниченной графиками функций $y = f(x), y = g(x)$ $(g(x) < f(x))$ и прямыми $x = a$ и $x = b$ (рис. 5.1)

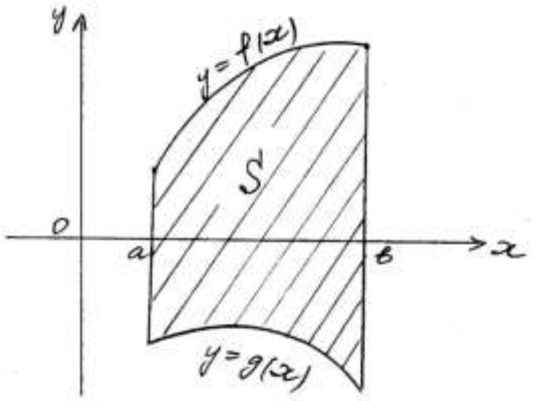

Рис. 5.1.

$$S = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx$$

2. Площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой, заданной параметрически, т.е. уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [t_1, t_2]$, $x(t_1) = a$, $x(t_2) = b$ (рис. 5.2).

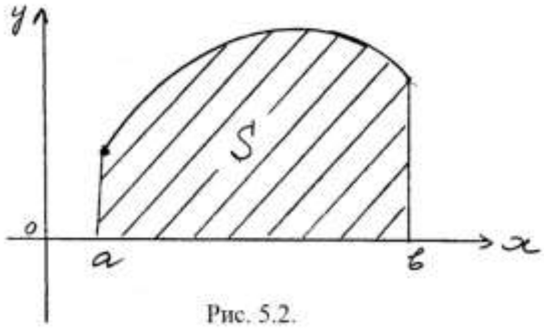

Рис. 5.2.

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt$$

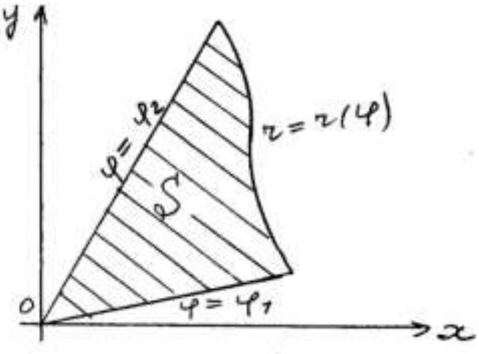

Рис. 5.3.

3. Площадь сектора, ограниченного линией, заданной в полярных координатах уравнением $r = r(\varphi)$, и двумя лучами $\varphi = \varphi_1$ и $\varphi = \varphi_2$ (рис. 5.3).

$$S = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (r(\varphi))^2 d\varphi$$

4. Длина дуги плокой кривой, заданной на координатной плоскости уравнением $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ (Рис. 5.4).

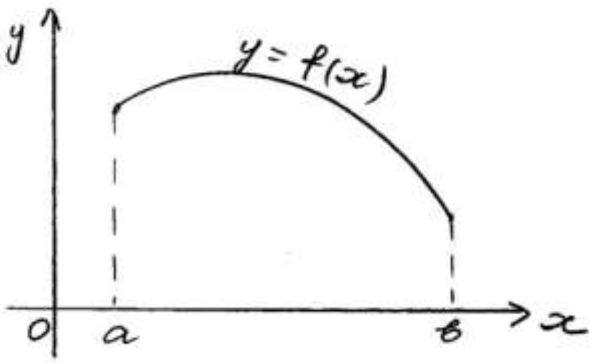

Рис. 5.4

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

5. Длина дуги плоской кривой, заданной на координатной плоскости параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [t_1, t_2]$, $x(t_1) = a$, $x(t_2) = b$.

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

6. Длина дуги пространственной кривой, заданной параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t \in [t_1, t_2]$

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt$$

7. Длина дуги плоской кривой, заданной уравнением в полярных координатах $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$ (рис. 5.3)

$$L = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2} d\varphi$$

8. Объем тела, площадь S сечения которого плоскостью, перпендикулярной оси Ox, известна как функция $S = S(x)$ переменной x (рис. 5.5).

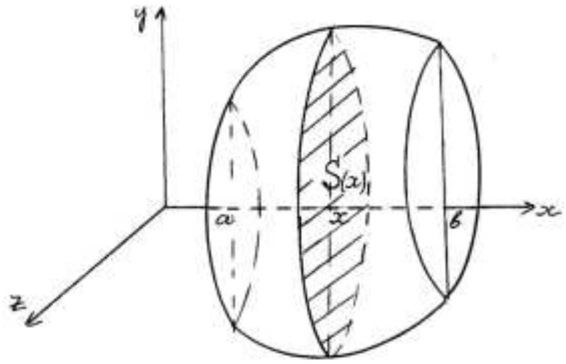

Рис. 5.5.

$$V = \int_a^b S(x)dx$$

9. Объем тела, образованного вращением криволинейной трапеции вокруг оси *Ox* (рис. 5.6).

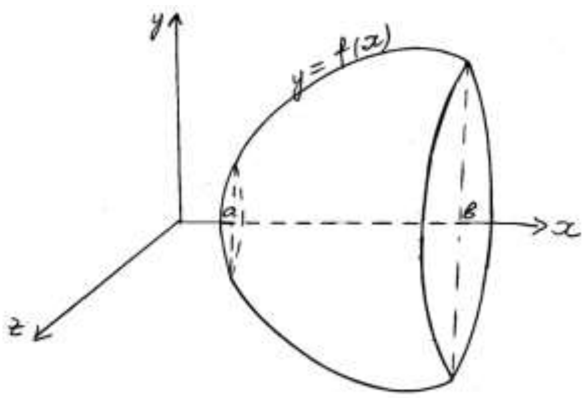

Рис. 5.6.

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

10. Объем тела, образованного вращением вокруг оси *Ox* дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [t_1, t_2]$.

$$V = \pi \int_{t_1}^{t_2} (y(t))^2 x'(t) dt$$

11. Площадь поверхности тела, образованного вращением вокруг оси *Ox* графика функции $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ (рис. 5.6).

$$S_{\text{вр}} = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

12. Площадь поверхности тела, образованного вращением вокруг оси *Ox* дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [t_1, t_2]$.

$$S_{\text{вр}} = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt$$

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Вычислить площадь области, ограниченной эллипсом (рис. 5.7.)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad a > 0, b > 0$$

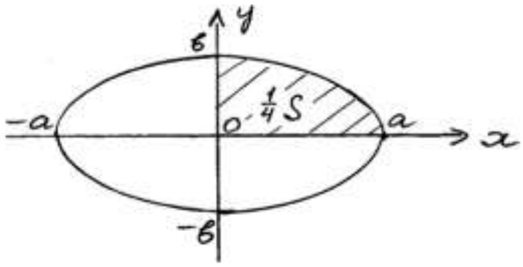

Рис. 5.7.

Выразим из уравнения эллипса $y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$ и воспользуемся симметрией области:

$$\frac{1}{4}S = \int_0^a y(x)dx = b\int_0^a \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}dx = \left[\begin{array}{c} x = asint, \qquad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \sqrt{1 - sin^2t} = cost \\ dx = acostdt \end{array}\right] =$$

$$= ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2tdt = \frac{1}{2}ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1 + cos2t)dt = \frac{1}{4}\pi ab$$

$$S = \pi ab$$

Пример 2. Вычислить объем тела, ограниченного эллипсоидом

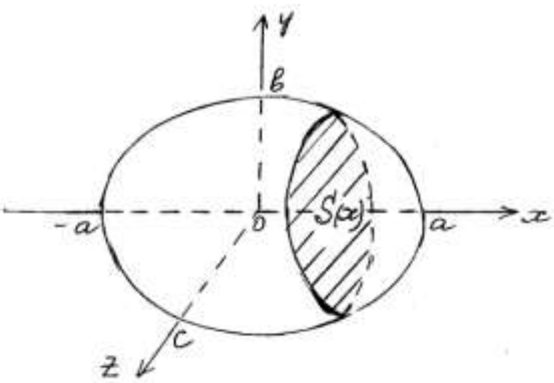

Рис. 5.8.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad a > 0, b > 0, c > 0$$

Сечением эллипсоида плоскостью, перпендикулярной оси *Ox*, является эллипс, уравнение которого имеет вид:

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{x^2}{a^2}$$

или

$$\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)^2}+\frac{z^2}{\left(c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)^2}=1$$

а площадь $S(x)=\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$. Искомый объем можно вычислить как объем тела с известной площадью сечения $S(x)$.

$$V=\int_{-a}^{a}S(x)dx=\pi bc\int_{-a}^{a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=\pi bc\left(x-\frac{x^3}{3a^2}\right)\Bigg|_{-a}^{a}=\frac{4}{3}\pi abc$$

Пример 3. Вычислить длину дуги плоской кривой $y=\frac{1}{3}(3-x)\sqrt{x}$, заключенной между точками $O(0;0)$ и $A(3;0)$ (рис.5.9).

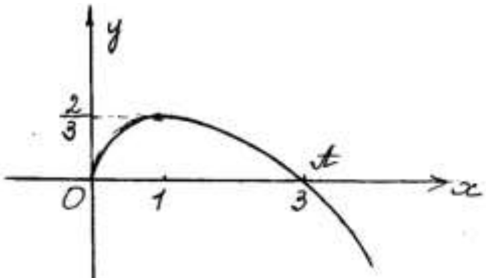

Рис. 5.9.

$$L=\int_0^3\sqrt{1+(y'(x))^2}dx$$

$$y'(x)=\frac{1}{3}\left(-\sqrt{x}+\frac{3-x}{2\sqrt{x}}\right)=\frac{1}{3}\frac{-2x+3-x}{2\sqrt{x}}=$$
$$=\frac{1-x}{2\sqrt{x}}$$

$$\sqrt{1+(y'(x))^2}=\sqrt{1+\left(\frac{1-x}{2\sqrt{x}}\right)^2}=\sqrt{\frac{4x+1-2x+x^2}{4x}}=\sqrt{\frac{(x+1)^2}{4x}}=$$
$$=\frac{x+1}{2\sqrt{x}}$$

$$L=\int_0^3\frac{x+1}{2\sqrt{x}}dx=\frac{1}{2}\int_0^3\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}\right)\Bigg|_0^3=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\cdot3\sqrt{3}+2\sqrt{3}\right)=2\sqrt{3}$$

Пример 4. Вычислить длину кардиоиды $r = a(1 + cos\varphi), a > 0$ и площадь области, ограниченной кардиоидой (рис. 5.10).

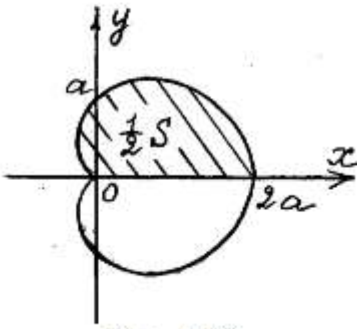

Рис. 5.10.

Для решения задачи воспользуемся симметрией линии относительно оси *Ox*.

$$r'(\varphi) = -asin\varphi,$$

$$\sqrt{\left(r(\varphi)\right)^2 + \left(r'(\varphi)\right)^2} =$$

$$= \sqrt{a^2(1 + cos\varphi)^2 + a^2sin^2\varphi} =$$

$$= a\sqrt{2 + 2cos\varphi} = a\sqrt{4cos^2\frac{\varphi}{2}} =$$

$$= 2acos\frac{\varphi}{2}, \varphi \in [0, \pi]$$

$$L = 2\int_0^{\pi} \sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2}d\varphi = 4a\int_0^{\pi} cos\frac{\varphi}{2}d\varphi = 8asin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi} = 8a$$

$$S = 2 \cdot \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(r(\varphi)\right)^2 d\varphi = a^2\int_0^{\pi}(1 + cos\varphi)^2 d\varphi =$$

$$= a^2\int_0^{\pi}\left(1 + 2cos\varphi + \frac{1 + cos2\varphi}{2}\right)d\varphi = a^2\int_0^{\pi}\left(\frac{3}{2} + 2cos\varphi + \frac{1}{2}cos2\varphi\right)d\varphi =$$

$$= a^2\left(\frac{3}{2}\varphi + 2sin\varphi + \frac{1}{4}sin2\varphi\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{3}{2}\pi a^2$$

Пример 5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды (рис. 5.11)

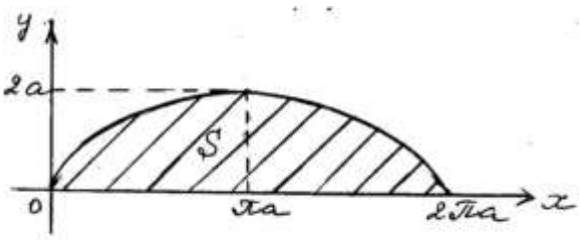

Рис. 5.11.

$$\begin{cases} x = a(t - sint) \\ y = a(1 - cost) \end{cases}, \ t \in [0, 2\pi], a > 0$$

Вычислить длину одной арки циклоиды, а также объем и площадь поверхности тела, образованного вращением одной арки циклоиды вокруг оси *Ox*.

$$x'(t) = a(1 - cost), \qquad y'(t) = asint$$

$$S=\int\limits_0^{2\pi} y(t)x'(t)dt=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi} a(1-cost)a(1-cost)dt=$$

$$=a^2\int\limits_0^{2\pi}\left(1-2cost+\frac{1+cos2t}{2}\right)dt=a^2\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2}-2cost+\frac{1}{2}cos2t\right)dt=$$

$$=a^2\left(\frac{3}{2}t-2sint+\frac{1}{4}sin2t\right)\Big|_0^{2\pi}=3\pi a^2$$

Для вычисления длины дуги предварительно упростим выражение:

$$\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}=\sqrt{a^2(1-cost)^2+a^2sin^2t}=a\sqrt{2-2cost}=$$

$$=a\sqrt{4sin^2\frac{t}{2}}=2asin\frac{t}{2},t\in[0,2\pi]$$

$$L=\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}dt=2a\int\limits_0^{2\pi} sin\frac{t}{2}dt=-4acos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi}=$$

$$=-4a(-1-1)=8a$$

Для вычисления объема и площади поверхности тела вращения применим соответствующие формулы:

$$V=\pi\int\limits_0^{2\pi}\left(y(t)\right)^2x'(t)dt=\pi a^3\int\limits_0^{2\pi}(1-cost)^3dt=$$

$$=\pi a^3\int\limits_0^{2\pi}(1-3cost+3cos^2t-cos^3t)dt=$$

$$=\pi a^3\int\limits_0^{2\pi}\left(1-3cost+\frac{3}{2}(1+cos2t)\right)dt-\pi a^3\int\limits_0^{2\pi}(1-sin^2t)d(sint)=$$

$$=\pi a^3\left(\frac{5}{2}t-3sint+\frac{3}{4}sin2t-sint+\frac{1}{3}sin^3t\right)\Big|_0^{2\pi}=\pi a^3\cdot\frac{5}{2}\cdot 2\pi=5\pi^2a^3$$

$$S_{\text{вр}} = 2\pi\int_0^{2\pi} y(t)\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}dt = 2\pi\int_0^{2\pi} a(1-cost)2asin\frac{t}{2}dt =$$

$$= 2\pi a^2\int_0^{2\pi}\left(2sin\frac{t}{2}-2sin\frac{t}{2}cost\right)dt = 2\pi a^2\int_0^{2\pi}\left(2sin\frac{t}{2}-sin\frac{3t}{2}+sin\frac{t}{2}\right)dt =$$

$$= 2\pi a^2\int_0^{2\pi}\left(3sin\frac{t}{2}-sin\frac{3t}{2}\right)dt = 2\pi a^2\left(-6cos\frac{t}{2}+\frac{2}{3}cos\frac{3t}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} =$$

$$= 2\pi a^2\cdot 2\cdot\left(6-\frac{2}{3}\right) = \frac{64}{3}\pi a^2$$

Приложения определенного интеграла для решения задач механики.

Пусть плоская кривая задана уравнением $y = f(x), x \in [a,b]$ и $\rho(x)$ – линейная плотность кривой. Тогда масса кривой вычисляется по формуле

$$m = \int_a^b \rho(x)\sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}dx$$

а статические моменты относительно координатных осей *Ox* и *Oy* вычисляются соответственно по формулам:

$$m_x = \int_a^b \rho(x)f(x)\sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}dx$$

$$m_y = \int_a^b \rho(x)x\sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}dx$$

Координаты точки С – центра масс кривой равны:

$$x_c = \frac{m_y}{m}, \qquad y_c = \frac{m_x}{m}$$

Моменты инерции плоской кривой относительно координатных осей *Ox* и *Oy* также вычисляются с помощью определенного интеграла:

$$I_x = \int_a^b f^2(x)\rho(x)\sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}dx$$

$$I_y = \int_a^b x^2\rho(x)\sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}dx$$

Если кривая однородна ($\rho(x) = const$), то формулы упрощаются.

Пример 6. Вычислить координаты центра масс и момент инерции относительно оси Ox однородной полуокружности $x^2 + y^2 = R^2, y \geq 0$, полагая $\rho(x) = 1$ (рис. 5.12)

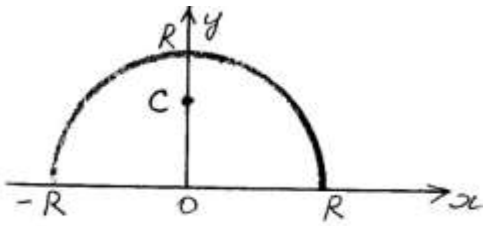

Рис. 5.12

$$y = \sqrt{R^2 - x^2},\ y' = -\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}},$$

$$\sqrt{1+(y')^2} = \sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}$$

$$m = L = \int_{-R}^{R} \sqrt{1+(y')^2}dx =$$

$$= \int_{-R}^{R} \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}dx = R\arcsin\frac{x}{R}\Big|_{-R}^{R} = R\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = \pi R$$

В силу симметрии относительно оси Oy и однородности кривой $x_c = 0$

$$m_x = \int_{-R}^{R} y\sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}dx = \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2-x^2}\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}dx = Rx\rfloor_{-R}^{R} = 2R^2$$

$$y_c = \frac{m_x}{m} = \frac{2R^2}{\pi R} = \frac{2R}{\pi}, \qquad C\left(0;\frac{2R}{\pi}\right)$$

$$I_x = \int_{-R}^{R} y^2\sqrt{1+(y')^2}dx = \int_{-R}^{R}(R^2-x^2)\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}dx = R\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}dx =$$

$$= \left[\begin{array}{c} x = Rsint, t \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \\ \sqrt{R^2-x^2} = Rcost, dx = Rcostdt \end{array}\right] = R\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R^2cos^2tdt =$$

$$= R^3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+cos2t}{2}dt = \frac{\pi R^3}{2}$$

Если плоская кривая задана параметрическими уравнениями

$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [t_1, t_2]$ и $\rho(t)$ – линейная плотность кривой, то справедливы следующие формулы:

$$m = \int_{t_1}^{t_2} \rho(t)\sqrt{(x'(t))^2 + \left(y'(t)\right)^2}dt$$

$$m_x = \int_{t_1}^{t_2} y(t)\rho(t)\sqrt{(x'(t))^2 + \left(y'(t)\right)^2}dt$$

$$m_y = \int_{t_1}^{t_2} x(t)\rho(t)\sqrt{(x'(t))^2 + \left(y'(t)\right)^2}dt$$

$$I_x = \int_{t_1}^{t_2} y^2(t)\rho(t)\sqrt{(x'(t))^2 + \left(y'(t)\right)^2}dt$$

$$I_y = \int_{t_1}^{t_2} x^2(t)\rho(t)\sqrt{(x'(t))^2 + \left(y'(t)\right)^2}dt$$

Пример 7. Вычислить координаты центра масс и момент инерции относительно оси *Ox* однородной арки циклоиды

$$x = a(t - sint), \qquad y = a(1 - cost), \qquad t \in [0; 2\pi], \qquad a > 0, \qquad \rho = 1$$

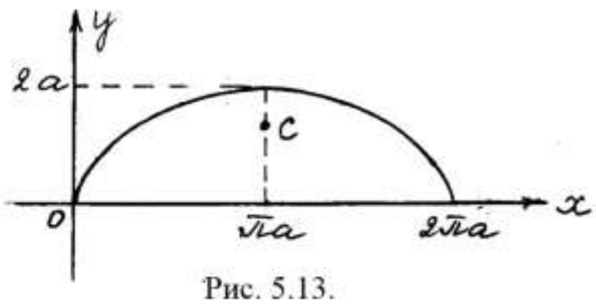

Рис. 5.13.

$$\sqrt{(x'(t))^2 + \left(y'(t)\right)^2} = 2asin\frac{t}{2}$$

$$m = L = 8a$$

В силу симметрии относительно прямой $x = \pi a$ и однородности линии

$$x_c = \pi a.$$

$$m_x = \int_0^{2\pi} y(t)\sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}dt = \int_0^{2\pi} a(1 - cost)2asin\frac{t}{2}dt =$$

$$= a^2\int_0^{2\pi} \left(2sin\frac{t}{2} - sin\frac{3t}{2} + sin\frac{t}{2}\right)dt = a^2\left(-6cos\frac{t}{2} + \frac{2}{3}cos\frac{3t}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} =$$

$$= a^2\left(12 - \frac{4}{3}\right) = \frac{32}{3}a^2$$

$$y_c = \frac{m_x}{m} = \frac{4}{3}a, \qquad C\left(\pi a; \frac{4}{3}a\right)$$

$$I_x = \int_0^{2\pi} y^2(t)\sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}dt = \int_0^{2\pi} a^2(1 - cost)^2 \cdot 2asin\frac{t}{2}dt =$$

$$= a^3\int_0^{2\pi}\left(1 - 2cost + \frac{1 + cos2t}{2}\right)2sin\frac{t}{2}dt =$$

$$= a^3\int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2} - 2cost + \frac{cos2t}{2}\right)2sin\frac{t}{2}dt =$$

$$= a^3\int_0^{2\pi}\left(3sin\frac{t}{2} - 2sin\frac{3t}{2} + 2sin\frac{t}{2} + \frac{1}{2}sin\frac{5t}{2} - \frac{1}{2}sin\frac{3t}{2}\right)dt =$$

$$= a^3\int_0^{2\pi}\left(5sin\frac{t}{2} - \frac{5}{2}sin\frac{3t}{2} + \frac{1}{2}sin\frac{5t}{2}\right)dt =$$

$$= a^3\left(-10cos\frac{t}{2} + \frac{5}{3}cos\frac{3t}{2} - \frac{1}{5}cos\frac{5t}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = a^3\left(20 - \frac{10}{3} + \frac{2}{5}\right) = \frac{256}{15}a^3$$