ЛЕКЦИЯ № 6

Действия над линейными операторами. Обратный оператор. Ядро и образ линейного оператора.

1. Действия над линейными операторами

Пусть L-линейное пространство. $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$ линейные операторы: $L \to L, \alpha \in \mathbb{R}$.

Определение.

- Суммой $\widehat{A} + \widehat{B}$ называется оператор, действующий по правилу:
  $(\widehat{A} + \widehat{B})\vec{x} = \widehat{A}\,\vec{x} + \widehat{B}\vec{x}$;
- Произведением $\widehat{A} \cdot \widehat{B}$ называется оператор, действующий по правилу:
  $(\widehat{A} \cdot \widehat{B})\,\vec{x} = \widehat{A}(\widehat{B}\,\vec{x})$;
- Произведением $\alpha\,\widehat{A}$ называется оператор, действующий по правилу:
  $(\alpha\,\widehat{A})\,\vec{x} = \alpha(\widehat{A}\,\vec{x})$.

Теорема 4. Определенные таким образом операторы $\widehat{A} + \widehat{B}$; $\widehat{A} \cdot \widehat{B}$, $\alpha\,\widehat{A}$ являются линейными операторами.

◄ Докажем для $\widehat{A} \cdot \widehat{B} = \widehat{C}$;

$\widehat{C}(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = \widehat{A} \cdot \widehat{B}(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = \widehat{A}\,(\widehat{B}(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y})) =$

$\widehat{A}\,(\alpha\,\widehat{B}\vec{x} + \beta\,\widehat{B}\vec{y}) = \alpha\,\widehat{A}\,\widehat{B}\vec{x} + \beta\,\widehat{A}\,\widehat{B}\vec{y}$;

$\widehat{A}\,(\alpha\,\widehat{B}\vec{x} + \beta\,\widehat{B}\vec{y}) = \alpha\,\widehat{A}\,\widehat{B}\vec{x} + \beta\,\widehat{A}\,\widehat{B}\vec{y} = \alpha\,\widehat{C}\,\vec{x} + \beta\,\widehat{C}\vec{y}$ =>

$\widehat{A} \cdot \widehat{B}$ – линейный оператор. ►

Теорема 5. Пусть линейные операторы $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$ в конечномерном линейном пространстве L в базисе S имеют матрицы A и B соответственно. Тогда линейные операторы $\widehat{A} + \widehat{B}$; $\widehat{A} \cdot \widehat{B}$, $\alpha\,\widehat{A}$ имеют матрицы A+B, AB, αA соответственно.

◄ Докажем для $\widehat{A} \cdot \widehat{B} = \widehat{C}$: Пусть $\overline{z} = \widehat{A} \cdot \widehat{B}\vec{x}$; $\overline{y} = \widehat{B}\vec{x}$; : $\overline{z} = \widehat{A}\,\overline{y}$; Тогда

$$\overline{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \cdots \\ z_n \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} y_1 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}; \text{где } \overline{y} = B\vec{x}; =>$$

$$\overline{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \cdots \\ z_n \end{pmatrix} = A \cdot \left(B\begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) = AB\begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} =>$$

линейный оператор $\widehat{A} \cdot \widehat{B}$ имеет матрицу AB. ►

Задача. Вычислить: $\begin{pmatrix} cos\varphi & -sin\varphi \\ sin\varphi & cos\varphi \end{pmatrix}^n$

Решение. Рассмотрим матрицу $\begin{pmatrix} cos\varphi & -sin\varphi \\ sin\varphi & cos\varphi \end{pmatrix}$ как матрицу линейного оператора – поворот на угол φ против часовой стрелки. Тогда $\begin{pmatrix} cos\varphi & -sin\varphi \\ sin\varphi & cos\varphi \end{pmatrix}^n$ - это матрица оператора поворота на угол φ против часовой стрелки n раз, то есть поворота на угол (nφ), а она равна $\begin{pmatrix} \cos(n\varphi) & -\sin(n\varphi) \\ \sin(n\varphi) & cos(n\varphi) \end{pmatrix}$ =>

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos(n\varphi) & -\sin(n\varphi) \\ \sin(n\varphi) & \cos(n\varphi) \end{pmatrix}$$

2. Обратный оператор.

Определение. Оператор $\widehat{\boldsymbol{A}}^{-1}$ ***называется обратным*** к линейному оператору $\hat{A}$, действующему в пространстве L, если $\widehat{\boldsymbol{A}}\widehat{\boldsymbol{A}}^{-1} = \widehat{\boldsymbol{A}}^{-1}\widehat{\boldsymbol{A}} = \vec{\boldsymbol{I}}$ **,**
где $\vec{I}$-тождественный оператор ($\vec{I}\vec{x} = \vec{x}$).
Таким образом, $\widehat{\boldsymbol{A}}(\widehat{\boldsymbol{A}}^{-1}\vec{\boldsymbol{x}}) = \widehat{\boldsymbol{A}}^{-1}(\widehat{\boldsymbol{A}}\vec{\boldsymbol{x}}) = \vec{\boldsymbol{I}}\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{x}}\ \ \forall\vec{x} \in L$

Если $\vec{y} = \widehat{\boldsymbol{A}}\vec{x} \Rightarrow \widehat{\boldsymbol{A}}^{-1}\vec{x} = \vec{y}$.

Теорема 6. Если $\widehat{\mathrm{A}}$ линейный оператор: $L\to L$ и $\widehat{\mathrm{A}}^{-1}$ существует, то $\widehat{\mathrm{A}}^{-1}$-линейный оператор и имеет матрицу A^{-1}.
◀
1. Пусть $\overline{y}_1 = \widehat{A}\overline{\mathrm{x}}_1; \overline{y}_2 = \widehat{A}\overline{\mathrm{x}}_2$;

и так как $\widehat{\mathrm{A}}^{-1}\exists$; $\overline{x_1} = \hat{A}^{-1}\overline{y}_1$; $\overline{x_2} = \hat{A}^{-1}\overline{y}_2$;
В силу линейности $\hat{A}$

$$\hat{A}(\alpha\overline{x}_1 + \beta\overline{x}_2) = \alpha\hat{A}(\overline{x}_1) + \beta\hat{A}(\overline{x}_2) = \alpha\overline{y}_1 + \beta\overline{y}_2;$$

Рассмотрим $\hat{A}^{-1}(\alpha\overline{y}_1 + \beta\overline{y}_2) = \alpha\overline{x}_1 + \beta\overline{x}_2 = \alpha\hat{A}^{-1}(\overline{y}_1) + \beta\hat{A}^{-1}(\overline{y}_2)$=> $\hat{A}^{-1}$-линейный оператор

2. $\hat{A}\hat{A}^{-1} = \overline{I}$ => $\mathrm{AA}' = \mathrm{E}$ – единичная матрица; где A'- матрица обратного оператора=> $\mathrm{A}' = A^{-1}$ ▶

Теорема *(о прообразе нулевого вектора).* Если линейный оператор $\widehat{\boldsymbol{A}}$ имеет обратный, то из равенства $\widehat{\boldsymbol{A}}\vec{x} = \vec{0}$ следует, что $\vec{x} = \vec{0}$.

◀Из $\boldsymbol{\hat{A}}\vec{x} = \vec{0}$ следует, что $\boldsymbol{\hat{A}^{-1}}(\boldsymbol{\hat{A}}\vec{x}) = \boldsymbol{\hat{A}^{-1}}\vec{0} = \vec{0}$.

Так как $\forall\vec{x} \in L \;\; \boldsymbol{\hat{A}^{-1}\hat{A}}\vec{x} = \boldsymbol{\hat{I}}\vec{x} = \vec{x} \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$. ▶

Определение. Линейный оператор $\boldsymbol{\hat{A}}: L \to L$ называется ***взаимно однозначным***, если он два различных вектора $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$ преобразует в различные векторы $\vec{y}_1 = \boldsymbol{\hat{A}}\vec{x}_1$ и $\vec{y}_2 = \boldsymbol{\hat{A}}\vec{x}_2$, . Другими словами, каждый вектор $\vec{y} \in L$ представляет собой образ единственного вектора $\vec{x} \in L$.

Определение. Оператор, у которого существует обратный, называется обратимым.

Теорема *(об обратном операторе).* Линейный оператор $\boldsymbol{\hat{A}}: L \to L$ обратим тогда и только тогда, когда он взаимно однозначный.

Теорема 7 (критерий существования обратного оператора).
Пусть $\hat{A}$ линейный оператор: $L \to L$, $\hat{A}^{-1}$ существует ⇔ det A≠ 0

Примеры :

1) Нулевой оператор $\boldsymbol{\hat{O}}: L \to L$ не имеет обратного.
2) Тождественный оператор $\boldsymbol{\hat{I}}: L \to L$ имеет обратный, причем $\boldsymbol{\hat{I}^{-1}} = \boldsymbol{\hat{I}}$
3) Оператор $\boldsymbol{\hat{A}}: V_3 \to V_3$ - гомотетия с коэффициентом k имеет обратный $\boldsymbol{\hat{A}^{-1}}$ - гомотетия с коэффициентом $\frac{1}{k}$.
4) Оператор $\boldsymbol{\hat{A}}: V_2 \to V_2$ - поворот на угол φ против часовой стрелки имеет обратный $\boldsymbol{\hat{A}}^{-1}: V_2 \to V_2$ - поворот на угол φ по часовой стрелки.
5) Оператор $\boldsymbol{\hat{A}}: V_3 \to V_3$ −проектирование на ось OX не имеет обратного.

3. Ядро и образ линейного оператора, их свойства.

Определение. ***Образом линейного оператора*** $\boldsymbol{\hat{A}}$ называется множество **Im** $\boldsymbol{\hat{A}}$ всех векторов L , таких что, для любого $\vec{y} \in \mathrm{Im}\,\hat{A}\ \exists\vec{x}$: $\hat{A}(\vec{x}) = \vec{y}$.

Определение . ***Ядром линейного оператора*** $\boldsymbol{\hat{A}}$ называется множество **Ker**$\boldsymbol{\hat{A}}$ всех векторов L , таких что, для любого $\vec{x} \in \mathrm{Ker}\hat{A}$, $\boldsymbol{\hat{A}(\vec{x}) = \vec{0}}$.

Пусть A - матрица линейного оператора $\hat{A}$ в некотором базисе. Тогда Ker $\widehat{A}$ является решением однородной системы $A\vec{x} = \vec{0}$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

или $AX = O$, где $O = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Теорема 8. Ядро и образ линейного оператора, действующего в L, являются линейными подпространствами пространства L.

◄ Пусть $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \operatorname{Ker} \widehat{\boldsymbol{A}} \Rightarrow \widehat{\boldsymbol{A}}\vec{x}_1 = \widehat{\boldsymbol{A}}\vec{x}_2 = \vec{0}$.

$\widehat{\boldsymbol{A}}(\alpha\vec{x}_1 + \beta\vec{x}_2) = \alpha\widehat{\boldsymbol{A}}\vec{x}_1 + \beta\widehat{\boldsymbol{A}}\vec{x}_2 = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0} \Rightarrow \alpha\vec{x}_1 + \beta\vec{x}_2 \in \operatorname{Ker} \widehat{\boldsymbol{A}}$.
Следовательно, Ker $\widehat{\boldsymbol{A}}$ - линейное подпространство в L.

Пусть $\vec{y}_1,\ \vec{y}_2 \in \operatorname{Im} \widehat{\boldsymbol{A}}$, тогда существуют прообразы этих векторов $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in L$, такие что $\vec{y}_1 = \widehat{\boldsymbol{A}}\vec{x}_1, \vec{y}_2 = \widehat{\boldsymbol{A}}\vec{x}_2$.

$\widehat{\boldsymbol{A}}(\alpha\vec{x}_1 + \beta\vec{x}_2) = \alpha\widehat{\boldsymbol{A}}\vec{x}_1 + \beta\widehat{\boldsymbol{A}}\vec{x}_2 = \alpha\vec{y}_1 + \beta\vec{y}_2 \in \operatorname{Im} \widehat{\boldsymbol{A}}$.
Следовательно, Im $\widehat{\boldsymbol{A}}$ - линейное подпространство в L ►

Определение. ***Рангом*** $Rang\,\widehat{\boldsymbol{A}}$ линейного оператора $\widehat{\boldsymbol{A}}$ называется размерность образа оператора:

$$Rang\,\widehat{\boldsymbol{A}} = \dim \operatorname{Im} \widehat{\boldsymbol{A}}.$$

Определение. ***Дефектом*** $Defect\,\widehat{\boldsymbol{A}}$ линейного оператора $\widehat{\boldsymbol{A}}$ называется размерность ядра оператора:

$$Defect\,\widehat{\boldsymbol{A}} = \dim \operatorname{Ker} \widehat{\boldsymbol{A}}.$$

Теорема 9. Ранг линейного оператора, действующего в линейном пространстве L совпадает с рангом его матрицы в каком либо базисе.

◄ Пусть в L задан базис S=$\{\overline{e}_1; \dots \overline{e}_n\}$; запишем образы базисных векторов в матрицу A. r=Rg A равен числу л.н.з. столбцов, которое равно числу л.н.з. векторов из $\{\hat{A}\overline{e}_1, \dots \hat{A}\overline{e}_n\}$, которые и образуют базис Im$\hat{A}$: $\{\hat{A}\overline{e}_1, \dots \hat{A}\overline{e}_r\}$=> $\dim(\operatorname{Im}\hat{A}) = \operatorname{Rang}(\hat{A}) = r$. ►

Утверждение. Ранг и дефект линейного оператора не зависят от выбора базиса.

Теорема 10. ***(о размерности ядра и образа оператора).*** Если $\widehat{\boldsymbol{A}}: L \to L$ - линейный оператор, то сумма размерностей образа и ядра оператора $\widehat{\boldsymbol{A}}$ равна размерности пространства L:

$$\boldsymbol{Rang}\,\widehat{\boldsymbol{A}} + \boldsymbol{Defect}\,\widehat{\boldsymbol{A}} = \mathbf{dim}\,\boldsymbol{L}.$$

Следствие. Если $\mathrm{Ker}\,\widehat{\boldsymbol{A}} = \{\vec{0}\}$, то $\mathrm{Im}\,\widehat{\boldsymbol{A}} = L$ и наоборот.

Теорема 11. ***(критерии обратимости линейного оператора)***

1) Линейный оператор $\hat{A}$, действующий в линейном пространстве L, обратим тогда и только тогда, когда его матрица в каком-либо базисе невырожденная (det A$\neq 0$).
2) Линейный оператор $\hat{A}$, действующий в линейном пространстве L, обратим тогда и только тогда, когда его образ совпадает со всем пространством L. $\mathrm{Im}\hat{A} = L$
3) Линейный оператор $\hat{A}$, действующий в линейном пространстве L, обратим тогда и только тогда, когда его ядро тривиально, т.е. $\mathrm{Ker}\hat{A} = \{\vec{0}\}$.

Следствие. Для того чтобы оператор $\widehat{\boldsymbol{A}}$ имел обратный $\widehat{\boldsymbol{A}}^{-1}$ необходимо и достаточно, чтобы $Rang\,\widehat{\boldsymbol{A}} = \dim L$.

Примеры:

1) $\widehat{A}$ в V_3 –поворот на угол φ: $\mathrm{Ker}\hat{A} = \{\vec{0}\}$; $\mathrm{Im}\hat{A} = L$; => обратим

2) $\widehat{A}$ в V_3 – оператор проектирование на ось OX:
$\mathrm{Ker}\hat{A} = \{\alpha\vec{j} + \beta\vec{k}\}$; $\mathrm{Im}\hat{A} = \{\gamma\vec{i}\}$; => нет обратного оператора.

3) $\widehat{\mathrm{A}}\vec{\mathrm{x}}=(\mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_2 - 3\mathrm{x}_3, 2\mathrm{x}_1 - \mathrm{x}_2 + \mathrm{x}_3, \mathrm{x}_2 + 5\mathrm{x}_3)$: $R^3 \to R^3$

матрица линейного оператора A: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

det A= -22$\neq 0$ => $\widehat{\mathrm{A}}^{-1}$ существует. Его матрицей будет матрица, обратная к матрице линейного оператора $\hat{A}$, т.е. $A^{-1} = \frac{-1}{22}\begin{pmatrix} -6 & -8 & -2 \\ -10 & 5 & -7 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$.

Найдем ядро линейного оператора $\hat{A}$. Решим систему $A\overline{x} = \overline{0}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 22 \end{pmatrix};$$

$x_3 = 0; x_2 = 0; x_1 = 0$. Ker $\hat{A}$={(0,0,0)}={ $\overline{0}$}. Подтверждается вывод о том, что оператор обратим.

4) $\hat{A}\,(p(t)) = (t+2)p''(t) + p'(t)$ в пространстве P_2 многочленов степени не выше 2.

Найдем матрицу $\hat{A}$ в каноническом базисе:

$\hat{A}\overline{e}_0 = (t+2)\cdot(1)'' + 0 = (0,0,0);$

$\hat{A}\overline{e}_1 = (t+2)\cdot(t)'' + t' = 1 = (1,0,0);$

$\hat{A}\overline{e}_2 = (t+2)\cdot(t^2)'' + (t^2)' = 2(t+2) + 2t = (4,4,0);$

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

det A= 0 => $\widehat{A}^{-1}$ не существует

Чтобы найти ядро $\hat{A}$, решим однородную систему уравнений:

AX=O; $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; rang A=2; c=b=0; a –любое; X=(a,0,0)= a;

=> Ker$\hat{A} = \{p(t) = a\}$

det A=0 => $\hat{A}^{-1}$ не существует.