ЛЕКЦИЯ № 2

Линейные пространства

Базис и размерность линейного пространства.

Пусть L- линейное пространство.

Определение. Система векторов $\{\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n\} \in L$ называется ***полной***, если любой вектор $\vec{x} \in L$ можно представить в виде линейной комбинации векторов системы: $\vec{x} = x_1\bar{e}_1 + \cdots + x_n\bar{e}_n$.

Определение. Упорядоченная система векторов $\{\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n\} \in L$ называется ***базисом*** линейного пространства L , если она ***линейно-независимая и полная***.

$\boldsymbol{\vec{x}} = x_1\boldsymbol{\bar{e}_1} + \cdots + x_n\boldsymbol{\bar{e}_n}$ – ***разложение вектора по базису;***

$(x_1 \dots x_n)$ – ***координаты вектора*** $\boldsymbol{\vec{x}}$ ***в базисе*** $\{\boldsymbol{\bar{e}_1} \dots \boldsymbol{\bar{e}_n}\}$.

Теорема 3. Координаты вектора $\vec{x}$ в базисе S определены однозначно.

◀Пусть $\vec{x} = a_1\vec{e}_1 + \cdots + a_n\vec{e}_n$ и $\vec{x} = b_1\vec{e}_1 + \cdots + b_n\vec{e}_n$. Так как $\vec{x} - \vec{x} = \vec{0}$, то

$$\vec{x} - \vec{x} = (a_1\vec{e}_1 + \cdots + a_n\vec{e}_n) - (b_1\vec{e}_1 + \cdots + b_n\vec{e}_n) =$$

$$= (a_1 - b_1)\vec{e}_1 + \cdots + (a_n - b_n)\vec{e}_n = \vec{0}$$

Так как $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ – базис, следовательно система линейно независима, то $a_i = b_i$ при $\forall\, i$. ▶

Теорема 4. Координаты суммы (разности) векторов равны сумме (разности) координат.

◀Пусть $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \cdots + x_n\vec{e}_n$ и $\vec{y} = y_1\vec{e}_1 + \cdots + y_n\vec{e}_n$. Тогда $\vec{x} \pm \vec{y} = (x_1\vec{e}_1 + \cdots + x_n\vec{e}_n) \pm (y_1\vec{e}_1 + \cdots + y_n\vec{e}_n) = (x_1 \pm y_1)\vec{e}_1 + \cdots + (x_n \pm y_n)\vec{e}_n$. ▶

Теорема 5. Координаты произведения вектора на число равны произведению координат на число.

◀Пусть $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \cdots + x_n\vec{e}_n$. Тогда $\alpha\vec{x} = \alpha(x_1\vec{e}_1 + \cdots + x_n\vec{e}_n) = \alpha x_1\vec{e}_1 + \cdots + \alpha x_n\vec{e}_n$. ▶

Следствие. Координаты линейной комбинации векторов есть линейная комбинация их координат.

Следствие. Векторы линейно-независимы ⇔линейно независимы вектор-столбцы их координат.

Определение. Максимальное число линейно-независимых векторов в данном линейном пространстве называется ***размерностью линейного пространства. Обозначается dim L=n.***

Если dim L=n, т.е. существует линейно-независимая система из n векторов, а любая система из (n+1) или более векторов линейно-зависима. Если $dim\ L=n$, то говорят, что линейное пространство n-мерно.

Существуют линейные пространства, в которых можно выбрать линейно независимую систему, содержащую сколько угодно векторов. Такие линейные пространства называются бесконечномерными. Пример : C[0;1] – линейное пространство функций, непрерывных на [0;1]. Мы будем рассматривать только конечномерные пространства.

Теорема 6. Если линейное пространство L n-мерно, то любая линейно независимая упорядоченная система из n векторов является его базисом.

◄ Пусть система векторов $\{\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n\} \in L$ линейно независима. Тогда для любого вектора $\overline{x}, \in L$ система векторов $\overline{x}, \bar{e}_1 \dots \bar{e}_n$ - линейно зависима, так как содержит n+1 вектор. Это значит, что существуют такие коэффициенты α_i, не равные нулю одновременно, что

$\alpha_0\overline{x},+\alpha_1\bar{e}_1+\dots+\alpha_n\bar{e}_n=\bar{0};$ при этом $\alpha_0 \neq 0$, так как в противном случае один из $\alpha_1 \dots . \alpha_n$ ненулевой, а это противоречит тому, что $\{\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n\}$ линейно-независимая.

Тогда $\overline{x}, = -\frac{\alpha_1}{\alpha_0}\bar{e}_1 - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_0}\bar{e}_n;$ Так как вектор $\overline{x}$ выбран произвольно, заключаем, что система $\{\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n\}$ полная. т.е. она является базисом. ►

Теорема 7. Если в линейном пространстве L существует базис из n векторов, то dim L=n.

◄Пусть $\{\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n\}$ - базис в линейном пространстве. Достаточно доказать, что любая система $\bar{x}_1 \dots \bar{x}_{n+1}$ из (n+1) вектора в L линейно-зависима.

Разложим каждый вектор по базису:

$\bar{x}_1 = a_{11}\bar{e}_1 + \dots + a_{n1}\bar{e}_n$

…….

$\bar{x}_{n+1} = a_{1,n+1}\bar{e}_1 + \dots + a_{n,n+1}\bar{e}_n$

Составим матрицу из столбцов координат:

$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n+1} \end{pmatrix}$; rang A$\leq n$, так как в матрице всего n строк, следовательно хотя бы один из столбцов матрицы не является базисным и по теореме о базисном миноре является линейной комбинацией базисных, следовательно столбцы координат и сами векторы линейно зависимы. ►

Следствие. Из теорем 6 и 7 следует, что ***различные базисы в линейном пространстве состоят из одинакового числа векторов***.

Теорема 8. В n-мерном линейном пространстве L любая полная упорядоченная система из n векторов образует базис. (без доказательства).

Теорема 9. В n-мерном линейном пространстве L каждую систему из k линейно-независимых векторов можно дополнить до базиса.

◄Добавим (k+1)й вектор л.н.з. с остальными. Это можно сделать, иначе k векторов были бы базисом. И.т.д., пока не добавим n-й вектор. ►

Построение базисов линейных пространств.

1) V_2-пространство геометрических векторов на плоскости. Канонический базис в V_2:$\{\bar{i}; \bar{j}\}$ (система линейно-независимая и полная); $\dim V_2 = 2$.

Координаты произвольного вектора $\vec{x} \in V_2$ в каноническом базисе:

$\vec{x} = x\bar{i}+y\bar{j}=(x,y)$. Координаты базисных векторов в этом же базисе:

$\bar{i} = 1\bar{i} + 0\bar{j}=(1,0)$; $\bar{j} = 0\bar{i} + 1\bar{j}=(0,1)$

2) V_3 - пространство геометрических векторов в пространстве. Канонический базис в V_3: $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$; $\dim V_3 = 3$; (линейно-независимая и полная). Координаты произвольного вектора $\vec{x} \in V_3$ в каноническом базисе:

$\vec{x} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k} = (x, y, z)$.

Координаты базисных векторов в этом же базисе:

$\vec{i} = 1 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} + 0 \cdot \vec{k} = (1,0,0)$; $\vec{j} = 0 \cdot \vec{i} + 1 \cdot \vec{j} + 0 \cdot \vec{k} = (0,1,0)$;

$\bar{k} = 0\bar{i} + 0\bar{j} + 1\bar{k}=(0,0,1)$.

3) $\mathbb{R}^n$- пространство арифметических векторов. $\dim\mathbb{R}^n = n$. Канонический базис:

$\bar{e}_1=(1,0,\dots,0)$; $\bar{e}_2=(0,1,\dots,0)$;…… $\bar{e}_n=(0,0,\dots,1)$;

Докажем, что эта система образует базис.

1. $\alpha_1\bar{e}_1 + \cdots + \alpha_n\bar{e}_n = \bar{0} \Leftrightarrow (\alpha_1; \dots \dots \alpha_n) = (0, \dots .0) \Leftrightarrow \alpha_i = 0\ \forall i;$ => $\{\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n\}$. л.н.з.

2. $\forall\bar{x} = (x_1; \dots \dots x_n) = x_1\bar{e}_1 + \cdots + x_n\bar{e}_n$ - система полная.

Система векторов $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots \bar{e}_n\}$ линейно-независимая и полная, следовательно она образует базис в $\mathbb{R}^n$ и $\dim\mathbb{R}^n = n$.

Координатами произвольного вектора $\vec{x} = x_1\bar{e}_1 + \dots + x_n\bar{e}_n$ будут $(x_1, \dots x_n)$

4) $P_n = \{p(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n\}$- пространство многочленов степени не выше n.

Канонический базис: $\vec{e}_0 = 1$, $\vec{e}_1 = t$, $\vec{e}_2 = t^2, \dots, \vec{e}_n = t^n \Rightarrow \dim P_n = n + 1$.

Докажем, что эта система векторов образует базис в P_n.

1. $\alpha_1\bar{e}_0 + \cdots + \alpha_n\bar{e}_n = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n = \bar{0} \Leftrightarrow a_0 = \cdots = a_n = 0$ => $\{\bar{e}_0, \bar{e}_1, \dots \bar{e}_n\}$ л.н.з.

2. $\forall\, p(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n = \ a_0\overline{e}_0 + \cdots + a_n\overline{e}_n$ => $\{\overline{e}_0, \overline{e}_1, \ldots \overline{e}_n\}$ полная => данная система образует базис в P_n и $\dim P_n = n + 1$.

Тогда координаты многочлена $p(t)$ в каноническом базисе:

$p(t) = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot t + \cdots a_n \cdot t^n = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$.

5) Пространство матриц размера mxn, M_{mxn};

Рассмотрим на примере $M_{23} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$.

Канонический базис:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, E_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Система векторов $\{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6\}$ линейно независимая и полная. (доказывается аналогично предыдущим примерам), следовательно образует базис в M_{23}

Тогда $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = a \cdot E_1 + b \cdot E_2 + c \cdot E_3 + d \cdot E_4 + e \cdot E_5 + f \cdot E_6 =$ (a, b, c, d, e, f) – координаты матрицы в каноническом базисе.

$\dim M_{23}$=2x3=6.

$\dim M_{\mathrm{mxn}} = m \cdot n$.