ЛЕКЦИЯ № 5.

Линейные операторы и их матрицы.

Понятие линейного оператора. Его свойства и примеры. Матрица линейного оператора. Преобразование матрицы линейного оператора при замене базиса.

1. *Понятие линейного оператора. Его свойства и примеры*

Пусть L-линейное пространство;

Определение. $\hat{A}: L \to L$ называется отображением в линейном пространстве L**,** если каждому вектору $\vec{x} \in L$ ставится в соответствие единственный вектор $\vec{y} \in L$;

Тогда $\vec{y} = \hat{A}(\vec{x})$; $\vec{y}$- образ вектора $\vec{x}$; $\vec{x}$- прообраз $\vec{y}$.

Определение. Отображение $\hat{A}$, действующее в L, называется ***линейным оператором***, если выполняются следующие условия:

1) $\hat{A}(\vec{x}+\vec{y}) = \hat{A}\vec{x} + \hat{A}\vec{y}$; $\forall\ \vec{x},\vec{y} \in L$
2) $\hat{A}(\alpha\vec{x}) = \alpha\hat{A}\vec{x}$; $\forall\ \vec{x} \in L, \forall\ \alpha \in \mathbb{R}$

Свойства линейного оператора .

$\forall\ \vec{x},\vec{y} \in L;\ \ \alpha;\beta \in \mathbb{R}.$

1) $\hat{A}(\vec{0}) = \vec{0}$
2) $\hat{A}(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}) = \alpha\hat{A}\vec{x} + \beta\hat{A}\vec{y}$
3) $\hat{A}(-\vec{x}) = -\hat{A}\vec{x}$
4) $\hat{A}(\alpha\vec{x}-\beta\vec{y}) = \alpha\hat{A}\vec{x} - \beta\hat{A}\vec{y}$
5) $\hat{A}$ переводит линейно-зависимые векторы в линейно-зависимые.

◄Пусть векторы $\overline{x}_1; \dots \overline{x}_n$ линейно зависимы, тогда существует их нетривиальная линейная комбинация $(\exists\alpha_i \neq 0)$, $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overline{x}_i = \overline{0}$; $\alpha_i \in \mathbb{R}$.

Подействуем линейным оператором: $\hat{A}\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overline{x}_i\right) = \hat{A}\left(\vec{0}\right) = \vec{0}$; с другой стороны $\hat{A}\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overline{x}_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\hat{A}\overline{x}_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\hat{A}\overline{x}_i = \vec{0} \Rightarrow$ получили нетривиальную линейную комбинацию образов векторов, равную нулевому вектору => образы линейно-зависимых векторов линейно -зависимы. ►

Линейный оператор будем сокращенно обозначать л.о.

Примеры линейных операторов:

1) Нулевой оператор $\widehat{\boldsymbol{O}}: L \to L$, отображающий любой вектор пространства L в нулевой вектор этого пространства: $\widehat{\boldsymbol{O}}\vec{x} = \vec{0}\ \forall\ \vec{x} \in L$.
   Действительно,
   $\widehat{\boldsymbol{O}}(\vec{x} + \vec{y}) = \vec{0} = \widehat{\boldsymbol{O}}\vec{x} + \widehat{\boldsymbol{O}}\vec{y}$
   $\widehat{\boldsymbol{O}}(\alpha\vec{x}) = \vec{0} = \alpha\widehat{\boldsymbol{O}}\vec{x}$
2) Тождественный оператор $\hat{\boldsymbol{I}}: L \to L$, отображающий любой вектор пространства L в себя: $\hat{\boldsymbol{I}}\vec{x} = \vec{x}\ \forall\ \vec{x} \in L$ является линейным оператором (доказать самостоятельно)
3) В V_2(пространстве свободных векторов на плоскости) - поворот вектора на заданный угол φ против часовой стрелки;

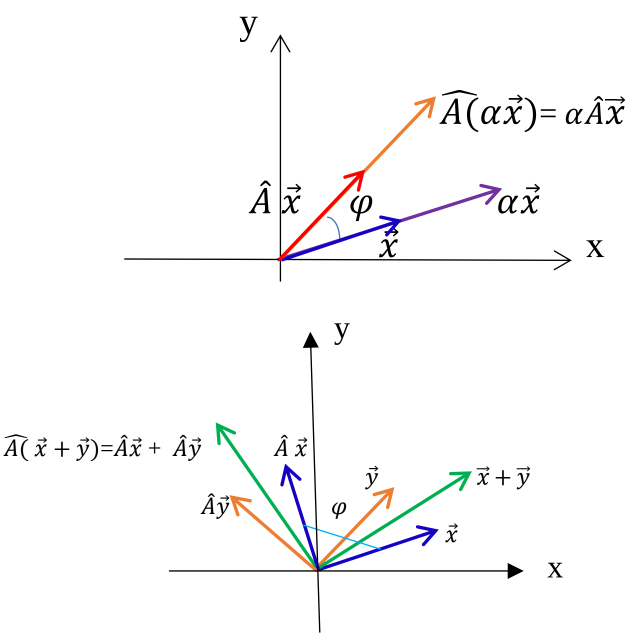


Рисунок 7

4) В P_n (линейном пространстве многочленов степени не выше n) – оператор дифференцирования : $\hat{A}\big(p(t)\big) = p'(t)$
   $$\hat{A}: P_n \to P_n;\ (p_1(t) + p_2(t))' = (p_1(t))' + (p_2(t))'$$

$$(\alpha p(t))'=\alpha(p(t))'$$

5) $\hat{A}: R^n \to R^n$ – гомотетия с коэффициентом k: $\hat{A}\vec{x} = k\vec{x}$

$$\hat{A}(\vec{x}+\vec{y}) = k(\vec{x}+\vec{y}) = k\vec{x} + k\vec{y} = \hat{A}\vec{x} + \hat{A}\vec{y};$$

$$\hat{A}(\alpha\vec{x}) = k(\alpha\vec{x}) = \alpha k\vec{x} = \alpha\hat{A}\vec{x};$$

Не является линейным оператором:

$\hat{A}: R^n \to R^n$, $\hat{A}\vec{x} = \vec{x} + \vec{a}$;

$\hat{A}(\vec{x}+\vec{y}) = \vec{x}+\vec{y}+\vec{a} \neq \hat{A}\,\vec{x} + \hat{A}\vec{y}$ – не выполняется свойство линейности;

2. *Матрица линейного оператора .*

Пусть L - конечномерное линейное пространство.

Определение. Матрицей линейного оператора $\widehat{\boldsymbol{A}} L \to L$, действующего в n-мерном линейном пространстве L с базисом $S = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ называется матрица, составленная из координат образов базисных векторов, записанных по <u>столбцам.</u>

Т.е., если в L существует некоторый базис S=$\{\overrightarrow{e_1}, \dots \overrightarrow{e_n}\}$, и

$\widehat{\boldsymbol{A}}\vec{e}_1 = a_{11}\vec{e}_1 + \dots + a_{n1}\vec{e}_n$,

$\widehat{\boldsymbol{A}}\vec{e}_2 = a_{12}\vec{e}_1 + \dots + a_{n2}\vec{e}_n$

……….

$\widehat{\boldsymbol{A}}\vec{e}_n = a_{1n}\vec{e}_1 + \dots + a_{nn}\vec{e}_n$.

то A=$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Примеры:

1. Нулевой оператор $\widehat{\boldsymbol{O}}: L \to L$, $\dim L = n \Rightarrow$

   $\widehat{\boldsymbol{O}}\vec{e}_1 = \vec{0} = (0, \dots, 0)$,

   ……….

   $\widehat{\boldsymbol{O}}\vec{e}_n = \vec{0} = (0, \dots, 0)$

   $A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$

2. Тождественный оператор $\hat{\boldsymbol{I}}: L \to L$, $\dim L = n \Rightarrow$

$$\hat{\boldsymbol{I}}\vec{e}_1 = \vec{e}_1 = (1,0,\dots,0),$$
$$\hat{\boldsymbol{I}}\vec{e}_2 = \vec{e}_2 = (0,1,\dots,0),$$
$$\dots\dots\dots$$
$$\hat{\boldsymbol{I}}\vec{e}_n = \vec{e}_n = (0,0,\dots,1).$$

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = E$$

3. Оператор $\widehat{\boldsymbol{A}}: V_3 \to V_3$ - гомотетия с коэффициентом k, $\dim V_3 = 3 \Rightarrow$

$$\widehat{\boldsymbol{A}}\vec{e}_1 = k\vec{e}_1 = (k,0,0),$$
$$\widehat{\boldsymbol{A}}\vec{e}_2 = k\vec{e}_2 = (0,k,0)$$
$$\widehat{\boldsymbol{A}}\vec{e}_3 = k\vec{e}_3 = (0,0,k)$$

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

4. Оператор $\widehat{\boldsymbol{A}}: P_2 \to P_2$ - оператор дифференцирования, $\dim P_2 = 3 \Rightarrow$

$$\widehat{\boldsymbol{A}}\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{1}} = \widehat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{1}) = (\boldsymbol{1})' = \boldsymbol{0} = (\boldsymbol{0},\boldsymbol{0},\boldsymbol{0})$$
$$\widehat{\boldsymbol{A}}\vec{e}_2 = \hat{A}(t) = (t)' = 1 = (1,0,0)$$
$$\widehat{\boldsymbol{A}}\vec{e}_3 = \hat{A}(t^2) = (t^2)' = 2t = (0,2,0)$$

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Теорема 1. Если $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ - матрица линейного оператора $\widehat{\boldsymbol{A}}: L \to L$ в базисе $S = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$, $\dim L = n$, то $\vec{y} = \widehat{\boldsymbol{A}}\vec{x}$ и координаты образа $\vec{y}$ произвольного вектора $\vec{x} \in L$ находятся по формуле:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

или

$$Y = AX,$$

где $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$ - вектор-столбец координат вектора $\vec{y}$ в базисе $S = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ - вектор-столбец координат вектора $\vec{x}$ в это же базисе. Таким образом, действие линейного оператора $\hat{A}$ на вектор $\vec{x}$

сводиться к умножению некоторой матрицы А $= \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ на вектор-столбец $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$, составленный из координат вектора $\vec{x}$ в базисе $S = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$.

◀ Т.к. $S = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ - базис в L, то $\forall$ вектор $\in L$ разложим по базису. Пусть $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \dots + x_n\vec{e}_n$ и $\vec{y} = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + \dots + y_n\vec{e}_n \Rightarrow$

$\vec{y} = \hat{\boldsymbol{A}}\vec{x} = \hat{A}(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \dots + x_n\vec{e}_n) = x_1\hat{\boldsymbol{A}}\vec{e}_1 + x_2\hat{\boldsymbol{A}}\vec{e}_2 + \dots + x_n\hat{\boldsymbol{A}}\vec{e}_n =$
$= x_1(a_{11}\vec{e}_1 + \dots + a_{n1}\vec{e}_n) + x_2(a_{12}\vec{e}_1 + \dots + a_{n2}\vec{e}_n) +$
$+ x_n(a_{1n}\vec{e}_1 + \dots + a_{nn}\vec{e}_n) = (x_1a_{11} + x_2a_{12} + \dots + x_na_{1n})\vec{e}_1 +$
$+(x_1a_{21} + x_2a_{22} + \dots + x_na_{2n})\vec{e}_2 + \dots + (x_1a_{n1} + x_2a_{n2} + \dots + x_na_{nn})\vec{e}_n =$

$$= y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + \dots + y_n\vec{e}_n \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1a_{11} + x_2a_{12} + \dots + x_na_{1n} \\ y_2 &= x_1a_{21} + x_2a_{22} + \dots + x_na_{2n} \\ &\dots \\ y_n &= x_1a_{n1} + x_2a_{n2} + \dots + x_na_{nn} \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1a_{11} + x_2a_{12} + \dots + x_na_{1n} \\ x_1a_{21} + x_2a_{22} + \dots + x_na_{2n} \\ \dots \\ x_1a_{n1} + x_2a_{n2} + \dots + x_na_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \Rightarrow$$

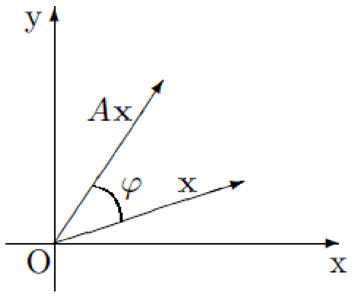
$Y = AX$. ▶

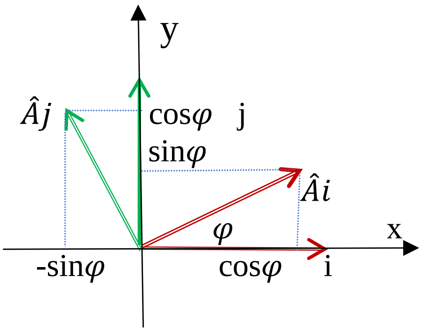
Замечание. Матрица линейного оператора полностью характеризует линейный оператор. Кроме того, любая квадратная матрица порядка n определяет линейный оператор n-мерного линейного пространства L.

Теорема 2. (без доказательства)

Пусть в л.п. L (dim L=n) отражение $\vec{y} = \hat{A}\vec{x}$ задается формулой $\begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \mathrm{A} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$, где $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ и $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$ - координаты векторов в базисе S, A – некоторая матрица размера nxn, Тогда $\hat{A}$ – линейный оператор и его матрица в базисе S совпадает с матрицей A.

Пример. Найти матрицу линейного оператора $\hat{\boldsymbol{A}}: V_2 \to V_2$ поворот на угол φ против часовой стрелки и образ вектора $\vec{x} = (1; -1)$ при повороте на угол $\varphi = \frac{\pi}{4}$.





$\widehat{\boldsymbol{A}}\vec{\imath} = \cos\varphi\,\vec{\imath} + \sin\varphi\,\vec{\jmath}$

$\widehat{\boldsymbol{A}}\vec{\jmath} = -\sin\varphi\,\vec{\imath} + \cos\varphi\,\vec{\jmath}$

A=$\begin{pmatrix} cos\varphi & -sin\varphi \\ sin\varphi & cos\varphi \end{pmatrix}$- матрица линейного оператора – поворот на угол угол φ против часовой стрелки.

При $\varphi = \frac{\pi}{4}$, A=$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$;

Координаты образа вектора $\vec{x} = (1; -1)$ найдем по формуле $Y = AX$:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} == \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\vec{y} = \widehat{\boldsymbol{A}}\vec{x} = (\sqrt{2}; 0)$$

Задача. Оператор $\hat{A}$ действует в пространстве R^3, $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)\in R^3$. Проверить, является ли оператор $\hat{A}$ линейным. В случае линейности записать матрицу оператора $\hat{A}$ в каноническом базисе пространства R^3.

а) $\hat{A}\vec{x}=(x_1+2x_2-3x_3, 2x_1+3x_2-x_3, -x_2+2x_3)$

б) $\hat{B}\vec{x}=(x_1+2x_2-3x_3, 2x_1+3x_2-x_3, -x_2+2)$

с) $C\vec{x}=(x_1+x_2-x_3^2;\ 4x_2;\ 2x_2-x_3^3)$

а) $\hat{A}: R^3\to R^3$, т.е $\hat{A}$ вектор из R^3 переводит в R^3.

Проверим линейность оператора

1. $\hat{A}(\vec{x}+\vec{y})=(x_1+y_1+2(x_2+y_2)-3(x_3+y_3), 2(x_1+y_1)+3(x_2+y_2)-(x_3+y_3), -(x_2+y_2)+2(x_3+y_3))=$
   $=(x_1+2x_2-3x_3, 2x_1+3x_2-x_3, -x_2+2x_3)+$
   $(y_1+2y_2-3y_3, 2y_1+3y_2-y_3, -y_2+2y_3)=\hat{A}\vec{x}+\hat{A}\vec{y};$

2. $\hat{A}(\alpha\vec{x})=(\alpha x_1+2\alpha x_2-3\alpha x_3, 2\alpha x_1+3\alpha x_2-\alpha x_3, -\alpha x_2+2\alpha x_3)=$
   $=\alpha(x_1+2x_2-3x_3, 2x_1+3x_2-x_3, -x_2+2x_3)=\alpha\hat{A}\vec{x}$

Условия линейности выполняются $\Rightarrow$ $\hat{A}$ – линейный оператор.

Найдем матрицу линейного оператора в каноническом базисе.

$\vec{e}_1=(1,0,0)$; $\vec{e}_2=(0,1,0)$; $\vec{e}_3=(0,0,1)$

$\hat{A}\vec{e}_1=(1,2,0)$

$\hat{A}\vec{e}_2=(2,3,-1)$

$\hat{A}\vec{e}_3=(-3,-1,2)$

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 2 & 3 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

б) $\hat{B}: R^3\to R^3$, т.е $\hat{B}$ вектор из R^3 переводит в R^3.

Проверим линейность оператора $\hat{B}$:

$\hat{B}(\vec{x}+\vec{y})=(x_1+y_1+2(x_2+y_2)-3(x_3+y_3), 2(x_1+y_1)+3(x_2+y_2)-(x_3+y_3), -(x_2+y_2)+2);$

$\hat{B}\vec{x}+\hat{B}\vec{y}=(x_1+2x_2-3x_3, 2x_1+3x_2-x_3, -x_2+2)+(y_1+2y_2-3y_3, 2y_1+3y_2-y_3, y_2+2)=(x_1+y_1+2(x_2+y_2)-3(x_3+y_3), 2(x_1+y_1)+3(x_2+y_2)-(x_3+y_3), -(x_2+y_2)+4)\neq\hat{B}(\vec{x}+\vec{y})$

Условие линейности оператора не выполняется, $\Rightarrow$ $\hat{B}$ не является линейным оператором.

c) $\hat{C}$: $R^3 \to R^3$, оператор $C\vec{x} = (x_1 + 7x_2 - x_3^2;\ 4x_2;\ 2x_2 - x_3^3)$ вектор из R^3 переводит в вектор из R^3.

Проверим линейность оператора $\hat{C}$:

$$\hat{C}(\vec{x} + \vec{y}) = ((x_1 + y_1) + 7(x_2 + y_2) - (x_3 + y_3)^2; 4(x_2 + y_2);\ 2(x_2 + y_2) - \\ -(x_3 + y_3)^3) = (x_1 + y_1 + 7x_2 + y7_2 - x_3^2 - 2x_3y_3 - y_3^2; 4x_2 + 4y_2; \\ 2x_2 + 2y_2 - x_3^3 - 3x_3^2y_3 - 3x_3y_3^2 - y_3^3)$$

С другой стороны:

$$\hat{C}\vec{x} + \hat{C}\vec{y} = (x_1 + 7x_2 - x_3^2;\ 4x_2; 2x_2 - x_3^3) + (y_1 + 7y_2 - y_3^2;\ 4y_2; 2y_2 - y_3^3) =$$

$$= (x_1 + 7y_1 + x_2 + 7y_2 - x_3^2 - y_3^2; 4x_2 + 4y_2; 2x_2 + 2y_2 - x_3^3 - y_3^3) \Rightarrow$$

$$\hat{C}(\vec{x} + \vec{y}) \neq \hat{C}(\vec{x}) + C(\vec{y}).$$

Условие линейности оператора не выполняется $\Rightarrow$ $\hat{C}$ не является линейным оператором.

3. Преобразование матрицы линейного оператора при замене базиса

Пусть в линейном пространстве L заданы два базиса $S_1 = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ и

$S_2 = \{\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n\}$ и $\hat{\boldsymbol{A}}: L \to L$ – линейный оператор. Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Матрицы A и A'линейного оператора $\hat{A}: L \to L$, записанные в базисах S_1(старый базис) и S_2(новый базис) соответственно, связаны формулой:

$$\boldsymbol{A' = P^{-1}AP},$$

где P - матрица перехода от старого базиса S_1 к новому базису S_2.

◀

Пусть $\vec{y} = \hat{A}\,\vec{x}$.

В координатах в базисе S_1: $\begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}_{s_1} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}_{s_1}$

В координатах в базисе S_2: $\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dots \\ \dot{y}_n \end{pmatrix}_{s_2} = A'\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix}_{s_2}$.

Координаты вектора в разных базисах связаны формулой: $X = PX'$ =>

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}_{s_1} = \mathrm{P}\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix}_{s_2}; \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}_{s_1} = \mathrm{P}\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dots \\ \dot{y}_n \end{pmatrix}_{s_2}$$

Тогда $\mathrm{P}\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dots \\ \dot{y}_n \end{pmatrix}_{s_2} = \mathrm{A}\cdot\mathrm{P}\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix}_{s_2}$ Умножим полученное равенство слева на матрицу P^{-1}:

$\mathrm{P}^{-1}\mathrm{P}\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dots \\ \dot{y}_n \end{pmatrix}_{s_2} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix}_{s_2} \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dots \\ \dot{y}_n \end{pmatrix}_{s_2} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix}_{s_2}$, так как $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{P}=\mathrm{E}$; => $A' = P^{-1}\cdot A\cdot P$; т.е.

$$\boldsymbol{A' = P^{-1}\cdot A\cdot P}$$

►

Утверждение. Определитель матрицы линейного оператора не зависит от выбора базиса.

◄ $\det(P^{-1}\cdot A\cdot P) = \det P^{-1}\cdot\det A\cdot\det P = \det A$, т.к. $\det P^{-1}\cdot\det P = 1$►

Задача. Линейный оператор $\widehat{\boldsymbol{A}}$ в базисе $S = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ имеет матрицу $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Найти матрицу оператора в базисе $S' = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$, если $\vec{f}_1 = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_3$, $\vec{f}_2 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{f}_3 = -2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$.

Решение: Выпишем матрицу перехода от старого базиса S к новому S', записав координаты нового базиса в старом $\vec{f}_1 = (1; 0; -2)$, $\vec{f}_2 = (-1; 1; 1)$, $\vec{f}_3 = (-2; 2; 3)$ в столбцы матрицы:

$$P_{S\to S'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Найдем обратную матрицу $P^{-1}_{S\to S'}$:

$$\Delta = |P_{S\to S'}| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 4 + 0 - 4 - 0 - 2 = 1 \neq 0 \Rightarrow$$

$$P^{-1}_{S\to S'} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0;$

$A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -4; \; A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -1; \; A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2;$

$A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$$P_{S\to S'}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

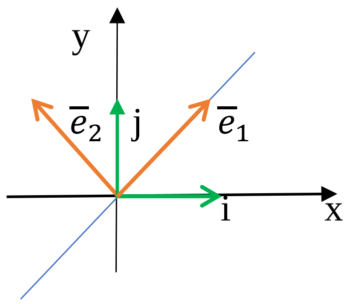
$$A' = P_{S\to S'}^{-1} A P_{S\to S'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ -7 & -2 & -3 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ – матрица оператора $\hat{\boldsymbol{A}}$ в базисе $S' = \{\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n\}$.

Задача. $\hat{A}$ в V_2- оператор проектирования на прямую y = x. Составить матрицу линейного оператора в удобном базисе и в базисе $\{i, j\}$.

Решение:



базис канонический S_2: {i, j}
удобный базис S_1: $\bar{e}_1 = i + j = (1,1)_{S_2}$; $\bar{e}_2 = -i + j = (-1,1)_{S_2}$

$$P_{S_2\to S_1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \; P_{S_1\to S_2} = P_{S_2\to S_1}{}^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}5, & 0{,}5 \\ -0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix};$$

$A_{S_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, так как $\hat{A}\bar{e}_1 = (1,0)_{S_1}$; $\hat{A}\bar{e}_2 = (0,0)_{S_1}$

$$A_{S_2} = (P_{S_1\to S_2})^{-1} A_{S_1} P_{S_1\to S_2} == P_{S_2\to S_1} A_{S_1} (P_{S_1\to S_2})^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0{,}5, & 0{,}5\\ -0{,}5 & 0{,}5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}5, & 0{,}5\\ 0{,}5 & 0{,}5\end{pmatrix}$$