Лекция 1. Первообразная, неопределенный интеграл. Методы интегрирования.

Задача интегрирования состоит в отыскании функции по ее производной.

Определение 1.1. Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на данном промежутке, если функция $F(x)$ дифференцируема на этом промежутке и $F'(x) = f(x)$.

Пример. Функция $F(x) = cosx$ является первообразной для функции $f(x) = -sinx$ на всей числовой оси.

Сформулируем следующее важное утверждение: функция, непрерывная на некотором промежутке, имеет на этом промежутке первообразную.

Если $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$, то функция $G(x) = F(x) + C$, где С – произвольная постоянная, также является первообразной для функции $f(x)$. Наоборот, если функции $F(x)$ и $G(x)$ являются первообразными для $f(x)$, то $G(x) = F(x) + C$. Таким образом, если $F(x)$ – одна из первообразных для функции $f(x)$, то выражение $F(x) + C$, где С – произвольная постоянная, представляет собой общий вид для всех ее первообразных.

Определение 1.2. Множество всех первообразных для функции $f(x)$ называется ее неопределенным интегралом и обозначается $\int f(x)dx$.

Функция $f(x)$ называется подынтегральной функцией, а выражение $f(x)dx$ – подынтегральным выражением. Если $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$, то

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Воспользуемся таблицей производных основных элементарных функций и составим таблицу неопределенных интегралов:

1. $\int 0dx = C$	11 $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C, a \neq 0$
2. $\int 1dx = x + C$	12. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = arcsin\frac{x}{a} + C, a > 0$

3. $\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$	13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left\|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\| + C, a \neq 0$
4. $\int \frac{dx}{x} = \ln\|x\| + C, x \neq 0$	14. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} ln \left\|\frac{x-a}{x+a}\right\| + C, a \neq 0$
5. $\int cosxdx = sinx + C$	15. $\int shxdx = chx + C$
6. $\int sinxdx = -cosx + C$	16. $\int chxdx = shx + C$
7. $\int \frac{dx}{cos^2x} = tgx + C$	17. $\int \frac{dx}{ch^2x} = thx + C$
8. $\int \frac{dx}{sin^2x} = -ctgx + C$	18. $\int \frac{dx}{sh^2x} = -cthx + C$
9. $\int a^x\, dx = \frac{a^x}{lna} + C, a > 0, a \neq 1$	19. $\int \frac{dx}{sinx} = ln\left\|tg\frac{x}{2}\right\| + C$
10. $\int e^x dx = e^x + C$	20. $\int \frac{dx}{cosx} = ln\left\|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\| + C$

Сделаем замечания относительно некоторых формул. Обоснуем формулу 4. Если $x > 0$, то согласно таблице производных $(lnx)' = \frac{1}{x}$. Если $x < 0$, то $(\ln|x|)' = (\ln(-x))' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$. Значит, формула 4 верна на любом промежутке, не содержащем нуля.

Правая часть формулы 13 называется «длинный» логарифм, а правая часть формулы 14 – «высокий» логарифм. Формулы 11-14, а также 19 и 20 могут быть проверены непосредственным дифференцированием.

Свойства неопределенного интеграла.

1. $(\int f(x)dx)' = f(x)$

2. $d(\int f(x)dx) = f(x)dx$

3. $\int F'(x)dx = F(x) + C$

4. $\int\big(af(x) + bg(x)\big)dx = a\int f(x)dx + b\int g(x)dx$, где a и b – произвольные постоянные

5. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a}F(ax + b) + C$, где a и b – произвольные постоянные и $a \neq 0$.

Примеры на применение таблицы и свойств неопределенного интеграла.

1. $\int(5cosx - 3sinx)dx = 5\int cosxdx - 3\int sinxdx = 5sinx + 3cosx + C$

2. $\int \frac{2x^2+7}{x}dx = \int\left(2x + \frac{7}{x}\right)dx = x^2 + 7\ln|x| + C$

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+9}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\frac{9}{4}}} = \frac{1}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 + \frac{9}{4}}\right| + C$

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{25-16x^2}} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{25}{16}-x^2}} = \frac{1}{4}arcsin\frac{4x}{5} + C$

5. $\int \frac{dx}{4x+3} = \frac{1}{4}\ln|4x + 3| + C$

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{5x-2}} = \int(5x-2)^{-\frac{1}{2}}dx = 2\cdot\frac{1}{5}\cdot(5x-2)^{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{5}\sqrt{5x-2} + C$

Основные приемы интегрирования.

Метод замены переменной основан на применении формулы для производной сложной функции. Пусть $F(t)$ – первообразная для функции $f(t)$, тогда $F\big(\varphi(x)\big)$ – первообразная для функции $f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)$, таким образом,

$$\int f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)dx = \begin{bmatrix} t = \varphi(x) \\ dt = \varphi'(x)dx \end{bmatrix} = \int f(t)dt = F(t) + C = F\big(\varphi(x)\big) + C$$

Примеры.

1. $\int xe^{-3x^2}dx = \begin{bmatrix} -3x^2 = t \\ -6xdx = dt \\ xdx = -\frac{1}{6}dt \end{bmatrix} = -\frac{1}{6}\int e^t dt = -\frac{1}{6}e^t + C = -\frac{1}{6}e^{-3x^2} + C$

2. $\int \frac{lnx}{x}dx = \begin{bmatrix} lnx = t \\ \frac{dx}{x} = dt \end{bmatrix} = \int tdt = \frac{1}{2}t^2 + C = \frac{1}{2}ln^2x + C$

3. $\int \frac{dx}{sinx} = \int \frac{dx}{2sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2}} = \int \frac{1}{tg\frac{x}{2}}\frac{dx}{2cos^2\frac{x}{2}} = \begin{bmatrix} tg\,\frac{x}{2} = t \\ \frac{dx}{2cos^2\frac{x}{2}} = dt \end{bmatrix} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C =$

$= \ln\left|tg\,\frac{x}{2}\right| + C$

Метод интегрирования по частям.

Этот метод основан на применении формулы производной произведения:

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$d(uv) = vdu + udv$$

Следовательно

$$uv = \int udv + \int vdu$$

Выражая из этого равенства одно из слагаемых правой части, получим формулу интегрирования по частям:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Примеры.

1. $\int x\, sinxdx = \begin{bmatrix} u = x, \;\; du = dx \\ dv = sinxdx, \;\; v = -cosx \end{bmatrix} = -xcosx + \int cosxdx =$
$= -xcosx + sinx + C$

2. $\int x\, lnxdx = \begin{bmatrix} u = lnx, \;\; du = \frac{dx}{x} \\ dv = xdx, \;\; v = \frac{1}{2}x^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}x^2 lnx - \frac{1}{2}\int x^2 \cdot \frac{1}{x}dx =$
$= \frac{1}{2}x^2 lnx - \frac{1}{4}x^2 + C$

3. Вычислить $\int e^{-2x} cos3xdx$. Обозначим искомый интеграл через I и применим формулу интегрирования по частям:

$I = \int e^{-2x} cos3xdx = \begin{bmatrix} u = e^{-2x}, \;\; du = -2e^{-2x}dx \\ dv = cos3xdx, \;\; v = \frac{1}{3}sin3x \end{bmatrix} = \frac{1}{3}e^{-2x}sin3x +$
$+\frac{2}{3}\int e^{-2x} sin3xdx$

К интегралу в правой части равенства снова применим формулу интегрирования по частям:

$\frac{2}{3}\int e^{-2x} sin3xdx = \begin{bmatrix} u = e^{-2x}, \;\; du = -2e^{-2x}dx \\ dv = sin3xdx, \;\; v = -\frac{1}{3}cos3x \end{bmatrix} =$
$= \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}e^{-2x}cos3x - \frac{2}{3}\int e^{-2x}cos3xdx\right)$

В правой части полученного равенства присутствует искомый интеграл I. Таким образом, мы приходим к равенству:

$I = \frac{1}{3}e^{-2x}sin3x + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}e^{-2x}cos3x - \frac{2}{3}I\right)$

Выражая отсюда *I*, находим:

$$I = \int e^{-2x}cos3xdx = \frac{1}{13}e^{-2x}(3sin3x - 2cos3x) + C$$

Приемы интегрирования можно комбинировать:

Пример 1.

$$\int \frac{x^2 arctgx}{1+x^2}dx = \int \frac{(x^2+1-1)arctgx}{1+x^2}dx = \int arctgxdx - \int \frac{arctgx}{1+x^2}dx$$

$\int arctgxdx = \begin{bmatrix} u = arctgx, \ du = \frac{dx}{1+x^2} \\ dv = dx, \ \ v = x \end{bmatrix} = x \cdot arctgx - \int \frac{xdx}{1+x^2} =$

$= x \cdot arctgx - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C_1$

$\int \frac{arctgx}{1+x^2}dx = \begin{bmatrix} t = arctgx \\ dt = \frac{dx}{1+x^2} \end{bmatrix} = \int tdt = \frac{1}{2}t^2 + C_2 = \frac{1}{2}arctg^2x + C_2$

Поскольку C_1 и C_2 – произвольные постоянные, то их сумма $C = C_1 + C_2$ тоже произвольная постоянная. Таким образом, получаем:

$\int \frac{x^2 arctgx}{1+x^2}dx = x \cdot arctgx - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}arctg^2x + \mathrm{C}$

Пример 2.

$\int e^{\sqrt{x}}dx = \begin{bmatrix} t = \sqrt{x} \\ t^2 = x \\ 2tdt = dx \end{bmatrix} = \int e^t 2tdt = 2(te^t - \int e^t\,dt) = 2(te^t - e^t) + C =$

$= 2e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x} - 1\right) + C$

Пример 3.

$$\int \frac{arcsinx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}dx = \begin{bmatrix} arcsinx = t \\ x = sint \\ dx = costdt \\ \sqrt{1-x^2} = cost \\ (1-x^2)^{\frac{3}{2}} = cos^3t \end{bmatrix} = \int \frac{tcostdt}{cos^3t} = \int \frac{tdt}{cos^2t} = \int td(tgt) =$$

$$= t \cdot tgt - \int tgtdt = t \cdot tgt - \int \frac{sint}{cost}dt = t \cdot tgt + \int \frac{d(cost)}{cost} =$$

$$= t \cdot tgt + \ln|cost| + C = arcsinx \cdot \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \ln\sqrt{1-x^2} + C$$

$$\int \frac{arcsinx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}dx = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}arcsinx + \frac{1}{2}\ln(1-x^2) + C$$