Лекция 6. Несобственные интегралы.

Понятие определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$ было введено в предположении, что промежуток интегрирования $[a, b]$ конечен и подынтегральная функция $f(x)$ ограничена на нем. Отказ от этих предположений приводит к понятию несобственного интеграла с бесконечными пределами или несобственного интеграла от неограниченной функции.

Введем понятие несобственного интеграла с бесконечным верхним пределом. Пусть функция $y = f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$ для любого $b > a$.

Определение 6.1. Несобственным интегралом с бесконечным верхним пределом называется $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$. Обозначается

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$$

Если этот предел существует и конечен, несобственный интеграл называется сходящимся. Если этот предел не существует или равен бесконечности, несобственный интеграл называется расходящимся. Если $f(x) > 0$ при $x \geq a$, то несобственный интеграл с бесконечным верхним пределом можно интерпретировать как площадь под бесконечной кривой, а сходимость интеграла означает конечность этой площади (рис. 6.1).

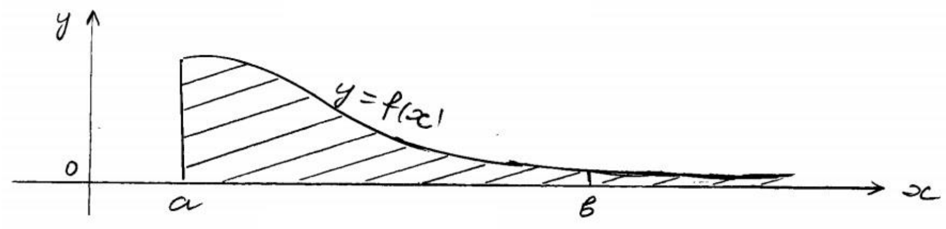

Рис. 6.1.

Если $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$ при $x \geq a$, то по формуле Ньютона-Лейбница

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(x)|_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a)$$

где $F(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$.

Аналогично определяется несобственный интеграл с бесконечным нижним пределом и с обоими бесконечными пределами:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{b} f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}} \int_{a}^{b} f(x)dx$$

Рассмотрим примеры.

Пример 1.

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctg}x|_0^{+\infty} = \mathrm{arctg}(+\infty) - \mathrm{arctg}0 = \frac{\pi}{2}$$

Пример 2.

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x} = \ln x|_1^{+\infty} = +\infty - \text{интеграл расходится}$$

Пример 3.

$$\int_{0}^{+\infty} \cos x dx = \sin x|_0^{+\infty}$$

Т.к. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sin x$ не существует, то данный интеграл также расходится.

Пример 4.

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+3x+2} = \int_{1}^{+\infty} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right) dx = \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)\Bigg|_1^{+\infty} =$$

$$= 0 - \ln\frac{2}{3} = \ln\frac{3}{2}$$

В последнем примере воспользовались следующим пределом:

$$\lim_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right) = \lim_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{1+{}^{1}/_{x}}{1+{}^{2}/_{x}}\right) = \ln 1 = 0$$

При вычислении несобственных интегралов можно применять метод замены переменной и метод интегрирования по частям.

Пример 5.

$$\int_{e}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x} = \begin{bmatrix} t = \ln x, t \in [1; +\infty] \\ dt = \dfrac{dx}{x} \end{bmatrix} = \int_{1}^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t}\Big|_{1}^{+\infty} = 1$$

Пример 6.

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{lnxdx}{x^2} = -\frac{1}{x}lnx\Big|_{1}^{+\infty} + \int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_{1}^{+\infty} = 1$$

В последнем примере применено правило Лопиталя для вычисления предела:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{1} = \lim_{x\to+\infty} 1/x = 0$$

Пример 7.

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-2x}cosxdx = -\frac{1}{2}e^{-2x}cosx\Big|_{0}^{+\infty} - \frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty} e^{-2x}sinxdx =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}sinx\Big|_{0}^{+\infty} + \frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty} e^{-2x}cosxdx\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\int_{0}^{+\infty} e^{-2x}cosxdx$$

Относительно искомого интеграла получено уравнение. Решение этого уравнения дает следующий результат:

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-2x}cosxdx = \frac{2}{5}$$

Кроме того, использованы пределы:

$$\lim_{x\to+\infty}(e^{-2x}sinx) = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty}(e^{-2x}cosx) = 0$$

В некоторых случаях исследовать несобственный интеграл на сходимость можно не вычисляя первообразную, а пользуясь признаками сходимости. Сформулируем эти признаки.

I. Если $0 \le f(x) \le g(x)$ для любого $x \ge a$, то из сходимости интеграла $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ следует сходимость интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, а из расходимости интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ следует расходимость интеграла $\int_a^{+\infty} g(x)dx$.

II. Если $f(x) \geq 0$ и $g(x) > 0$ для любого $x \geq a$ и существует конечный предел

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \neq 0$$

то интегралы $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ оба сходятся или оба расходятся.

Сформулированные теоремы позволяют при исследовании на сходимость несобственных интегралов заменять подынтегральные функции на более простые. Например, для исследования на сходимость часто используют $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$, который сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$. Рассмотрим примеры.

Пример 8.

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{3x+1}{5x^3+2} dx \text{ сходится, т. к.}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{3x+1}{5x^3+2} : \frac{1}{x^2}\right) = \frac{3}{5}$, а $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ сходится.

Пример 9.

$$\int\limits_1^{+\infty} e^{-x^2} dx \text{ сходится, т. к.}$$

$e^{-x^2} \leq e^{-x}$ для любого $x \geq 1$, а $\int_1^{+\infty} e^{-x} dx = -e^{-x}|_1^{+\infty} = \frac{1}{e}$ сходится.

Определение 5.2. Несобственный интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$$

называется абсолютно сходящимся, если сходится интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$$

Определение 5.3. Несобственный интеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

называется условно сходящимся, если сам интеграл сходится, а интеграл

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$$

расходится.

Верно следующее утверждение: если несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ сходится, то $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ также сходится, т.е. из абсолютной сходимости следует сходимость. Рассмотрим примеры.

Пример 10.

$$\int_1^{+\infty} \frac{cosxdx}{x^2} \text{ сходится абсолютно, т. к.} \left|\frac{cosx}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2} \text{ для любого } x \geq 1, \text{а}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \text{ сходится}$$

Пример 11.

$$\int_1^{+\infty} \frac{sinxdx}{x} = \frac{-cosx}{x}\Big|_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} \frac{cosxdx}{x^2}$$

Оба слагаемых в правой части конечны, следовательно, $\int_1^{+\infty} \frac{sinxdx}{x}$ сходится. Исследуем данный интеграл на абсолютную сходимость. Для этого воспользуемся неравенством $|sinx| \geq sin^2x$ для любого x.

$$\int_1^{+\infty} \left|\frac{sinx}{x}\right| dx = \int_1^{+\infty} \frac{|sinx|}{x} dx \geq \int_1^{+\infty} \frac{sin^2x}{x} dx = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{1-cos2x}{x} dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx - \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{cos2x}{x} dx$$

Первый из двух интегралов в правой части расходится, а второй сходится, в чем можно убедиться, применяя для его вычисления формулу интегрирования по частям. Разность двух интегралов, один из которых равен бесконечности, а другой имеет конечное значение, равна бесконечности, следовательно, $\int_1^{+\infty} \frac{|sinx|}{x} dx$ расходится, а $\int_1^{+\infty} \frac{sinxdx}{x}$ сходится условно.

Перейдем к интегралам от неограниченных функций. Пусть функция $y = f(x)$ интегрируема на любом отрезке $[a, b-\varepsilon]$, где $0 < \varepsilon < b - a$ и $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = \infty$ (рис. 6.2)

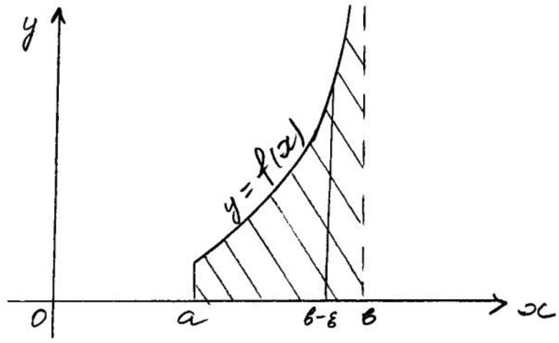

Рис. 6.2.

Тогда

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0+0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

называется несобственным интегралом от неограниченной функции. Если предел конечен, то несобственный интеграл называется сходящимся. Если предел не существует или равен бесконечности, то интеграл расходится.

Аналогично определяется несобственный интеграл, когда точкой разрыва является левый конец отрезка интегрирования или внутренняя точка $c \in (a, b)$ (рис. 6.3 и 6.4 соответственно).

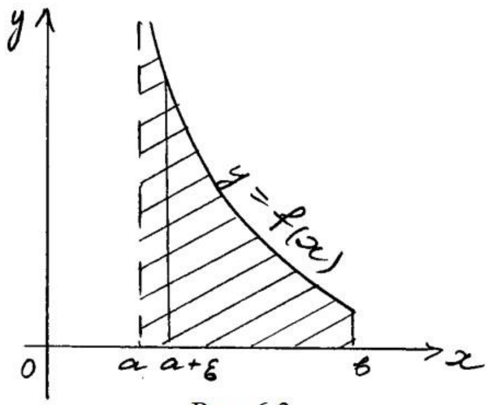

Рис. 6.3.

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0+0} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$$

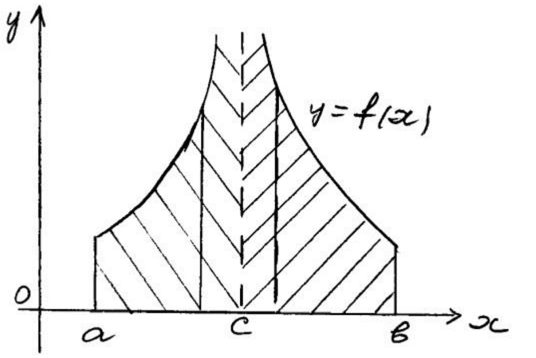

Рис. 6.4.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

В последнем случае сходимость интеграла предполагает сходимость обоих интегралов в правой части равенства.

При вычислении несобственных интегралов от неограниченных функций можно применять те же приемы, что и при вычислении определенных интегралов. Рассмотрим примеры.

Пример 12.

$$\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{x-1}} = 2\sqrt{x-1}\Big|_1^5 = 4$$

Пример 13.

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x}\ln x\Big|_0^1 - 2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = -4\sqrt{x}\Big|_0^1 = -4$$

Использован следующий предел, вычисленный по правилу Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0+0}\sqrt{x}\ln x = \lim_{x\to 0+0}\frac{\ln x}{1/\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0+0}\frac{1/x}{-1/2x\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0+0}(-2\sqrt{x}) = 0$$

Пример 14.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\arcsin x}} = \begin{bmatrix} t = \arcsin x, t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ dt = \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} \end{bmatrix} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2\pi}$$

При исследовании на сходимость интегралов от неограниченных функций применяются признаки сравнения, которые формулируются так же, как и для несобственных интегралов с бесконечными пределами. Для сравнения используют следующие интегралы:

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} \text{ и } \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$$

которые сходятся при $\alpha < 1$ и расходятся при $\alpha \geq 1$. Рассмотрим примеры.

Пример 15.

$$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^4}} dx \text{ сходится, т. к.} \lim_{x\to 1-0}\left(\frac{x^2}{\sqrt{1-x^4}} : \frac{1}{\sqrt{1-x}}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 1-0} \frac{x^2\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2}, \text{а } \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} \text{ сходится.}$$

Пример 16.

$$\int_0^2 \frac{xdx}{(x^2-1)^2} \text{ расходится, т. к. подынтегральная функция}$$

терпит разрыв во внутренней точке $x = 1$ отрезка интегрирования и, согласно определению,

$$\int_0^2 \frac{xdx}{(x^2-1)^2} = \int_0^1 \frac{xdx}{(x^2-1)^2} + \int_1^2 \frac{xdx}{(x^2-1)^2}$$

Оба интеграла в правой части являются расходящимися. Действительно, сравним подынтегральную функцию с функцией $g(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ при условии $x \to 1$.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{(x^2-1)^2} : \frac{1}{(x-1)^2}\right) = \lim_{x\to 1} \frac{x(x-1)^2}{(x+1)^2(x-1)^2} = \frac{1}{4}$$

и учтем, что $\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2}$ и $\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$ расходятся. Кроме того, в расходимости интегралов $\int_0^1 \frac{xdx}{(x^2-1)^2}$ и $\int_1^2 \frac{xdx}{(x^2-1)^2}$ можно убедиться непосредственно. Например,

$$\int_0^1 \frac{xdx}{(x^2-1)^2} = -\frac{1}{2(x^2-1)}\bigg|_0^1 = +\infty$$

Ошибочным является следующее решение:

$$\int_0^2 \frac{xdx}{(x^2-1)^2} = -\frac{1}{2(x^2-1)}\Big|_0^2 = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+1\right) = -\frac{2}{3}$$

т.к. при таком решении не учитывается, что подынтегральная функция терпит разрыв во внутренней точке отрезка [0,2].

Рассмотрим еще несколько интересных примеров на исследование и вычисление несобственных интегралов.

Пример 17. Вычислить

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+7x^2+1}dx = 2\int_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+7x^2+1}dx = 2\int_0^{+\infty} \frac{1+{}^1\!/_{x^2}}{x^2+7+{}^1\!/_{x^2}}dx =$$

$$= 2\int_0^{+\infty} \frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+9} = \begin{bmatrix} x-\dfrac{1}{x}=t \\ x\to 0+0, t\to -\infty \\ x\to +\infty, t\to +\infty \end{bmatrix} = 2\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^2+9} =$$

$$= \frac{2}{3}arctg\,\frac{t}{3}\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$$

Пример 18. Вычислить

$$\int_0^{+\infty} \frac{arctgx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx = \begin{bmatrix} arctgx = t, x=0, t=0, x\to +\infty, t\to \dfrac{\pi}{2} \\ x = tgt, dx = \dfrac{dt}{cos^2t} \\ (1+x^2)^{\frac{3}{2}} = (1+tg^2t)^{\frac{3}{2}} = \dfrac{1}{(cos^2t)^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{1}{cos^3t} \end{bmatrix} =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{\frac{1}{cos^3t}}\frac{dt}{cos^2t} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} tcostdt = tsint|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} sintdt = \frac{\pi}{2} + cost|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1$$

Пример 19. Вычислить

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{xlnx}{(1+x^2)^2}dx$$

Обозначим

$$I_1=\int\limits_0^1 \frac{xlnx}{(1+x^2)^2}dx\,, I_2=\int\limits_1^{+\infty} \frac{xlnx}{(1+x^2)^2}dx$$

$$I=I_1+I_2$$

Исследуем подынтегральную функцию при условии $x\to 0+0$.

$$\lim_{x\to 0+0}(x\ln x)=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to 0+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to 0+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0+0}(-x)=0$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}=0$$

Подынтегральная функция имеет конечный предел при $x\to 0+0$, интеграл I_1 является «собственным», значит имеет конечное значение.

$$I_2=\int\limits_1^{+\infty}\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx=\left[\begin{array}{c} x=\frac{1}{t}, x=1, t=1, x\to+\infty, t\to 0+0 \\ \ln x=\ln\frac{1}{t}=-\ln t, dx=-\frac{dt}{t^2}\end{array}\right]=$$

$$=\int\limits_1^0\frac{\frac{1}{t}(-\ln t)}{\left(1+\frac{1}{t^2}\right)^2}\left(-\frac{dt}{t^2}\right)=\int\limits_1^0\frac{\ln t}{\frac{(1+t^2)^2}{t^4}\cdot t\cdot t^2}dt=\int\limits_1^0\frac{t\ln t}{(1+t^2)^2}dt=$$

$$=-\int\limits_0^1\frac{t\ln t}{(1+t^2)^2}dt=-I_1$$

$$I=I_1+I_2=I_1-I_1=0$$

Вычислим дополнительно I_2.

$$I_2=\int\limits_1^{+\infty}\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx=\left[\begin{array}{c} u=\ln x,\qquad du=\frac{dx}{x} \\ dv=\frac{x}{(1+x^2)^2}dx, v=-\frac{1}{2(1+x^2)}\end{array}\right]=$$

$$=-\frac{\ln x}{2(1+x^2)}\Bigg|_1^{+\infty}+\frac{1}{2}\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x(1+x^2)}=\frac{1}{2}\int\limits_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{(1+x^2)}\right)dx=$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right)\Bigg|_1^{+\infty} = \frac{1}{4}(\ln x^2 - \ln(1+x^2))\Bigg|_1^{+\infty} =$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)\Bigg|_1^{+\infty} = -\frac{1}{4}\ln\frac{1}{2} = \frac{\ln 2}{4}$$

*Пример 20**. Доказать, что интегралы

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(sinx)\, dx \text{ и } I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(cosx)\, dx$$

сходятся и $I_1 = I_2$. Вычислить $I = I_1 = I_2$.

Указание: рассмотреть сумму $I_1 + I_2 = 2I$ и воспользоваться линейностью интеграла, а также свойствами логарифма.

Ответ: $I = -\frac{\pi}{2}\ln 2$