Лекция 2. Интегрирование рациональных функций.

Примеры на повторение материала первой лекции (метод подстановки и метод интегрирования по частям).

1.

$$\int x\cos x^2\,dx = \frac{1}{2}\int \cos x^2\,d(x^2) = \frac{1}{2}\sin x^2 + \mathrm{C}$$

2.

$$\int x\cos^2 x\,dx = \int x\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{2}\int (x + x\cos 2x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\int x\cdot\cos 2x\,dx = \begin{bmatrix} u = x, & du = dx \\ dv = \cos 2x\,dx, & v = \frac{1}{2}\sin 2x \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x\cdot\sin 2x - \frac{1}{2}\int \sin 2x\,dx\right) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x\sin 2x + \frac{1}{8}\cos 2x + C$$

3.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}} = \begin{bmatrix} \sqrt{1+e^x} = t, & x = \ln(t^2-1) \\ 1+e^x = t^2, & dx = \dfrac{2tdt}{t^2-1} \end{bmatrix} = \int \frac{2t\,dt}{t(t^2-1)} =$$

$$= -2\int \frac{dt}{1-t^2} = -\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C = \ln\left|\frac{1-\sqrt{1+e^x}}{1+\sqrt{1+e^x}}\right| + C =$$

$$= \ln\left(\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right) + C$$

4.

$$\int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x}dx = \begin{bmatrix} u = \ln(\sin x), & du = \dfrac{\cos x}{\sin x}dx \\ dv = \dfrac{dx}{\sin^2 x}, & v = -ctgx \end{bmatrix} =$$

$$= -\operatorname{ctg} x\ln(\sin x) + \int \operatorname{ctg} x\cdot\frac{\cos x}{\sin x}dx = -\operatorname{ctg} x\ln(\sin x) + \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}dx =$$

$$= -\operatorname{ctg} x \ln(\sin x) + \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right) dx = -\operatorname{ctg} x \ln(\sin x) - \operatorname{ctg} x - x + C$$

5.

$$I = \int \sqrt{1+x^2}\, dx = \begin{bmatrix} u = \sqrt{1+x^2}, \qquad du = \dfrac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} \\ dv = dx, \ \ v = x \end{bmatrix} =$$

$$= x\sqrt{1+x^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} dx = x\sqrt{1+x^2} - \int \frac{x^2+1-1}{\sqrt{1+x^2}} dx =$$

$$= x\sqrt{1+x^2} - \int \sqrt{1+x^2}\, dx + \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx =$$

$$= x\sqrt{1+x^2} + \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) - I$$

$$I = \int \sqrt{1+x^2}\, dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2} + \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\right) + C$$

6,

$$\int \operatorname{arctg} \sqrt{x}\, dx = \begin{bmatrix} \sqrt{x} = t, \qquad x = t^2 \\ dx = 2tdt \end{bmatrix} = 2\int t \operatorname{arctg} t\, dt =$$

$$= \begin{bmatrix} u = \operatorname{arctg} t\,, du = \dfrac{dt}{1+t^2} \\ dv = tdt, v = \dfrac{1}{2}t^2 \end{bmatrix} = 2\left(\frac{1}{2}t^2 \operatorname{arctg} t - \frac{1}{2}\int \frac{t^2}{1+t^2} dt\right) =$$

$$= t^2 \cdot \operatorname{arctg} t - \int \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right) dt = t^2 \operatorname{arctg} t - t + \operatorname{arctg} t + C =$$

$$= (x+1) \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \sqrt{x} + C$$

Интегрирование рациональных функций.

Рациональной функцией называется дробь, числитель и знаменатель которой представляют собой многочлены. Если степень многочлена, стоящего в числителе меньше степени многочлена, стоящего в знаменателе, то такая дробь называется правильной. В противном случае дробь называется неправильной. Неправильную дробь можно представить в виде суммы многочлена и правильной дроби, следовательно, интегрирование рациональных функций сводится к интегрированию правильных дробей. Любая правильная дробь может быть представлена, причем единственным образом, в виде суммы конечного числа простых дробей.

Простыми дробями называются дроби следующих четырех типов:

I $\frac{A}{x-a}$ II $\frac{A}{(x-a)^k}$ III $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$ IV $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$

где $k = 2,3,\ldots$ Здесь предполагается, что квадратный трехчлен $P_2(x) = x^2 + px + q$ не имеет действительных корней, т.е. $q - \frac{p^2}{4} > 0$.

Дроби типа I и II интегрируются следующим образом.

I.

$$\int \frac{A}{x-a}\,dx = A\ln|x-a| + C$$

II.

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}\,dx = A\int (x-a)^{-k}\,dx =$$

$$= -\frac{A}{k-1}\cdot(x-a)^{-k+1} + C = -\frac{A}{k-1}\cdot\frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C$$

При интегрировании дробей III и IV типов в знаменателе выделяется полный квадрат:

$$x^2 + px + q = x^2 + 2\cdot x\cdot\frac{p}{2} + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}$$

Поскольку $q - \frac{p^2}{4} > 0$, то обозначим $q - \frac{p^2}{4} = h^2$. Замена $t = x + \frac{p}{2}$ сводит дробь типа III к виду

$$\frac{At + M}{t^2 + h^2}$$

А дробь типа IV к виду

$$\frac{At + M}{(t^2 + h^2)^k}$$

где $M = B - \frac{Ap}{2}$. Тогда для дроби III типа имеем:

$$\int \frac{Ax + B}{x^2 + px + q}\,dx = \left[t = x + \frac{p}{2}\right] = \int \frac{At + M}{t^2 + h^2}\,dt =$$

$$= \frac{A}{2}\int \frac{d(t^2+h^2)}{t^2+h^2} + M\int \frac{dt}{t^2+h^2} = \frac{A}{2}\ln(t^2+h^2) + \frac{M}{h}\operatorname{arctg}\frac{t}{h} + C$$

$$= \frac{A}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{M}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{\mathrm{x}+\frac{\mathrm{p}}{2}}{\sqrt{\mathrm{q}-\frac{\mathrm{p}^2}{4}}} + C$$

А для дроби IV типа:

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}dx = \int \frac{At+M}{(t^2+h^2)^k}dt =$$

$$= \frac{A}{2}\int \frac{d(t^2+h^2)}{(t^2+h^2)^k} + M\int \frac{dt}{(t^2+h^2)^k} = -\frac{A}{2(k-1)}\frac{1}{(t^2+h^2)^{k-1}} + MI_k$$

Для вычисления интеграла

$$I_k = \int \frac{dt}{(t^2+h^2)^k} \quad, k = 2,3,\dots$$

воспользуемся методом интегрирования по частям и получим рекуррентную формулу:

$$I_k = \int \frac{dt}{(t^2+h^2)^k} = \frac{1}{h^2}\int \frac{t^2+h^2-t^2}{(t^2+h^2)^k}dt =$$

$$= \frac{1}{h^2}\int \frac{dt}{(t^2+h^2)^{k-1}} - \frac{1}{h^2}\int t\frac{tdt}{(t^2+h^2)^k} =$$

$$= \begin{bmatrix} u = t, \qquad du = dt \\ dv = \frac{tdt}{(t^2+h^2)^k}, \quad v = -\frac{1}{2(k-1)}\frac{1}{(t^2+h^2)^{k-1}} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{h^2}I_{k-1} - \frac{1}{h^2}\left(-\frac{1}{2(k-1)}\frac{t}{(t^2+h^2)^{k-1}} + \frac{1}{2(k-1)}\int \frac{dt}{(t^2+h^2)^{k-1}}\right) =$$

$$= \frac{1}{h^2}\left(1-\frac{1}{2(k-1)}\right)I_{k-1} + \frac{1}{2(k-1)h^2}\frac{t}{(t^2+h^2)^{k-1}}$$

Рассмотрим теперь вопрос о представлении правильной дроби в виде суммы простых дробей. Это разложение зависит от разложения знаменателя дроби на множители. Для простоты (но не теряя при этом общности) можно считать, что знаменатель является приведенным многочленом, т.е. его старший коэффициент равен 1. Тогда в его разложении могут присутствовать множители двух видов: $(x-a)^k$ и $(x^2+px+q)^k$, где $k = 1,2,\dots$, а квадратный трехчлен x^2+px+q не имеет действительных корней.

Множителям вида $(x-a)^k$ в разложении дроби будет соответствовать сумма простых дробей:

$$\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{A_k}{(x-a)^k}$$

а множителям вида $(x^2+px+q)^k$ будет соответствовать сумма простых дробей:

$$\frac{A_1x+B_1}{x^2+px+q}+\frac{A_2x+B_2}{(x^2+px+q)^2}+\cdots+\frac{A_kx+B_k}{(x^2+px+q)^k}$$

Способы определения коэффициентов этого разложения рассмотрим на примерах.

Пример 1. Вычислить

$$\int\frac{x+7}{x^2-x-2}dx$$

Разложим знаменатель правильной дроби $\frac{x+7}{x^2-x-2}$ на множители:

$$x^2-x-2=(x-2)(x+1)$$

а дробь на сумму простых дробей с неопределенными коэффициентами:

$$\frac{x+7}{x^2-x-2}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+1}$$

Для вычисления коэффициентов приведем правую часть к общему знаменателю:

$$\frac{x+7}{(x-2)(x+1)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+1}=\frac{A(x+1)+B(x-2)}{(x-2)(x+1)}$$

И приравняем числители левой и правой частей:

$$x+7=A(x+1)+B(x-2)$$

Полагая в этом тождестве $x=2$, получим $9=3A$, $A=3$. Полагая $x=-1$, получим $6=-3B$, $B=-2$. Разложение дроби на сумму простых дробей получено:

$$\frac{x+7}{(x-2)(x+1)}=\frac{3}{x-2}-\frac{2}{x+1}$$

$$\int\frac{x+7}{x^2-x-2}dx=\int\left(\frac{3}{x-2}-\frac{2}{x+1}\right)dx=3\,ln\,|x-2|-2\,ln\,|\,x+1|+C=$$

$$= ln\left|\frac{(x-2)^3}{(x+1)^2}\right| + C$$

Пример 2. Вычислить

$$\int \frac{7x-11}{(x-3)^2(x+2)}dx$$

Знаменатель дроби разложен на множители, запишем разложение дроби на сумму простых дробей с неопределенными коэффициентами:

$$\frac{7x-11}{(x-3)^2(x+2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2} + \frac{C}{x+2}$$

Как и в предыдущем примере, для вычисления коэффициентов получим равенство

$$7x - 11 = A(x-3)(x+2) + B(x+2) + C(x-3)^2,$$

которое перепишем в виде

$$7x - 11 = (A + C)x^2 + (-A + B - 6C)x + (-6A + 2B + 9C)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой части, для коэффициентов получим следующую систему уравнений:

$$x^2:\ A + C = 0$$

$$x^1:\ -A + B - 6C = 7$$

$$x^0:\ -6A + 2B + 9C = -11$$

Из которой следует, что $A = 1$, $B = 2$, $C = -1$. Вычисляем искомый интеграл:

$$\int \frac{7x-11}{(x-3)^2(x+2)}dx = \int \left(\frac{1}{x-3} + \frac{2}{(x-3)^2} - \frac{1}{x+2}\right)dx =$$

$$= \ln|x-3| - \frac{2}{x-3} - \ln|x+2| + C = \ln\left|\frac{x-3}{x+2}\right| - \frac{2}{x-2} + C$$

Пример 3. Вычислить интеграл:

$$\int \frac{x^2 - 16x - 4}{x^4 - 16}dx$$

Разложим дробь на сумму простых дробей:

$$\frac{x^2-16x-4}{x^4-16} = \frac{x^2-16x-4}{(x-2)(x+2)(x^2+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} + \frac{Cx+D}{x^2+4}$$

Коэффициенты определим из равенства:

$$x^2-16x-4=A(x+2)(x^2+4)+B(x-2)(x^2+4)+(Cx+D)(x^2-4)$$

Скомбинируем приемы, примененные в предыдущих примерах:

$$x=2:\quad 4-32-4=A\cdot 4\cdot 8\Rightarrow A=-1$$

$$x=-2:\ 4+32-4=B\cdot(-4)\cdot 8\Rightarrow B=-1$$

$$x^3:\quad A+B+C=0\Rightarrow -1-1+C=0\Rightarrow C=2$$

$$x^0:\quad 8A-8B-4D=-4\Rightarrow -4D=-4\Rightarrow D=1$$

Искомое разложение имеет вид:

$$\frac{x^2-16x-4}{x^4-16}=-\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}+\frac{2x+1}{x^2+4}$$

Вычислим интеграл:

$$\int\frac{x^2-16x-4}{x^4-16}dx=\int\left(-\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}+\frac{2x+1}{x^2+4}\right)dx=$$

$$=-\ln|x-2|-\ln|x+2|+\ln(x^2+4)+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C=$$

$$=\ln\left|\frac{x^2+4}{x^2-4}\right|+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C$$

В некоторых случаях при интегрировании рациональных дробей можно избежать разложения правильных дробей на простые. Рассмотрим примеры.

Пример 4.

$$\int\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}dx=\int\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+1+\frac{1}{x^2}}dx=\int\frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+3}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{3}}+C=\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{3}}+C$$

Пример 5.

$$\int\frac{x^4+1}{x^6+1}dx=\int\frac{x^4-x^2+1+x^2}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)}dx=\int\frac{dx}{x^2+1}+\int\frac{x^2dx}{x^6+1}=$$

$$=\operatorname{arctg}x+\frac{1}{3}\int\frac{d(x^3)}{x^6+1}=\operatorname{arctg}x+\frac{1}{3}\operatorname{arctg}(x^3)+C$$