

ЛЕКЦИЯ № 8.

Линейные операторы. Решение задач.

Задача

Определить собственные значения и собственные векторы линейного оператора \hat{A} , заданного матрицей A . Является ли линейный оператор \hat{A} оператором простого типа? Если да, то выписать матрицу линейного оператора в базисе из собственных векторов.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение:

Найдем собственные значения. Для этого составим характеристическое уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3 + 2 - 3(1-\lambda) = \lambda^2(3-\lambda) = 0$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$; $\lambda_3 = 3$ - собственные значения.

Так как $\lambda_1 = \lambda_2$, мы пока не можем сказать, будет ли линейный оператор простого типа.

Найдем собственные векторы, соответствующие собственным значениям.

$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$; Решим систему $(A - 0E)\vec{X} = \vec{0}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ решим систему методом Гаусса.}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \text{rang } A = 1;$$

$$x_2 = c_1; \quad x_3 = c_2; \quad x_1 + c_1 + c_2 = 0; \Rightarrow x_1 = -c_1 - c_2;$$

$$\vec{X}^1 = \begin{pmatrix} -c_1 - c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad - \quad \text{собственные векторы,}$$

соответствующие $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Выберем из этого множества векторов два линейно независимых вектора.

$$\vec{f}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ и } \vec{f}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\lambda_3 = 3$. Решим систему $(A - 3E)X = 0$.

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ решим систему методом Гаусса.}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\text{rang } A = 2; x_3 = c; x_2 = c; x_1 + c - 2c = 0 \Rightarrow x_1 = c.$

$X^2 = \begin{pmatrix} c \\ c \\ c \end{pmatrix}$ - собственные векторы, соответствующие $\lambda_3 = 3$. Выберем один $\vec{f}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Мы нашли три собственных вектора, однако характеристическое уравнение имеет кратные корни $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Проверим, будут ли собственные векторы образовывать базис.

Составим матрицу из координат собственных векторов

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{rang} = 3 \Rightarrow$$

собственные векторы линейно-независимы \Rightarrow они образуют базис в линейном пространстве L , так как $\dim L = 3$, следовательно \hat{A} является оператором простого типа и его матрица в базисе из собственных векторов

имеет вид: $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Линейные операторы в пространстве геометрических векторов

Пример 1. Рассмотрим линейный оператор \hat{A} в V_3 -поворот вокруг оси OZ на угол α против часовой стрелки.

Подействуем линейным оператором на базисные векторы $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

$$\hat{A}\vec{i} = \cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \cdot \vec{j} + 0 \cdot \vec{k}$$

$$\hat{A}\vec{j} = -\sin \alpha \vec{i} + \cos \alpha \vec{j} + 0 \cdot \vec{k}$$

$$\hat{A}\vec{k} = 0 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} + 1 \cdot \vec{k}$$

Координаты образов базисных векторов надо записать по столбцам:

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \text{матрица поворота вокруг оси } OZ \text{ на угол}$$

α против часовой стрелки

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

Из геометрических соображений видно, что под действием линейного оператора \hat{A} - поворот вокруг оси OZ на угол α , в нулевой элемент переходит только $\vec{0}$, следовательно, $\text{Ker } \hat{A} = \{\vec{0}\}$. Тогда образом \hat{A} является все пространство V_3 : $\text{Im } \hat{A} = V_3$. Данные выводы подтверждаются и тем фактом, что $\text{rang } A = 3$, и $\det A = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 \neq 0$.

Обратный оператор существует - поворот вокруг оси OZ на угол α по часовой стрелки.

Найдем собственные векторы и собственные значения.

1 случай Если $\alpha = \frac{\pi}{6}$, то $A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

При повороте на угол $\alpha = \frac{\pi}{6}$ вокруг оси OZ, из геометрических соображений можно сделать вывод, что под действием данного линейного оператора только векторы, параллельные оси OZ переходят в коллинеарные себе векторы, так как при данном повороте они остаются на месте и переходят сами в себя, то есть собственные векторы $\vec{a} = c\vec{k}$; $\hat{A}\vec{a} = \vec{a}$; $\lambda = 1$ - собственное значение, соответствующее собственному вектору \vec{k} . В данном случае \hat{A} не является оператором простого типа, так как не имеет базиса из собственных векторов.

Рассмотрим поворот на произвольный угол α вокруг оси OZ

Составим характеристическое уравнение:
$$\begin{vmatrix} \cos \alpha - \lambda & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1 - \lambda)((\cos \alpha - \lambda)^2 + (\sin \alpha)^2) = 0; (1 - \lambda)(\lambda^2 - 2\lambda \cos \alpha + 1) = 0$$

$\lambda_1 = 1$; Найдем остальные корни уравнения.

$D = 4(\cos \alpha)^2 - 4 \leq 0$; действительные корни будут только при $D = 0$;
 $\cos \alpha = \pm 1$; т.е. $\alpha = \pi k$; $k \in \mathbb{Z}$

При $\alpha = \pi$ $\lambda_{2,3} = -1$;

А при $\alpha = 2\pi$ $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$;

Найдем собственные векторы.

2 случай. $\alpha = \pi$;

Удобнее взять собственные значения в следующем порядке:

Пусть $\lambda_{1,2} = -1$; $\lambda_3 = 1$

При $\lambda_{1,2} = -1$; составим уравнение $(A + E)\bar{X} = \bar{0}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; X^1 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

При $\lambda_3 = 1$; составим уравнение $(A - E)\bar{X} = \bar{0}$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; X^2 = c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

Таким образом в качестве базиса из собственных векторов можно выбрать $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

Матрица оператора в базисе из собственных векторов: $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. В

данном случае \hat{A} - оператор простого типа, так как имеет базис из собственных векторов.

3 случай. $\alpha = 2\pi$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1;$$

Действие оператора поворота на угол 2π совпадает с действием тождественного оператора \hat{I} ; $\hat{I}\bar{x} = \bar{x}$. В качестве базиса из собственных векторов можно выбрать канонический базис $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$;

Аналитическое решение это подтверждает.

$$(A-E)\bar{X}=\bar{O}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad X^1 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

Матрица в базисе из собственных векторов: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. В данном случае \hat{A} -оператор простого типа.

Пример 2.

Оператор в пространстве V_3 : \hat{A} - поворот вокруг оси OX на угол α против часовой стрелки.

Подействуем линейным оператором на базисные векторы $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

$$\hat{A}\vec{i} = 1 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} + 0 \cdot \vec{k}$$

$$\hat{A}\vec{j} = 0 \cdot \vec{i} + \cos \alpha \vec{j} + \sin \alpha \vec{k}$$

$$\hat{A}\vec{k} = 0 \cdot \vec{i} - \sin \alpha \vec{j} + \cos \alpha \vec{k}$$

Координаты образов базисных векторов надо записать по столбцам:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} - \text{матрица поворота вокруг оси } Ox \text{ на угол}$$

α против часовой стрелки.

$\text{Ker } \hat{A} = \{\vec{0}\}$; $\text{Im } \hat{A} = V_3$. Обратный оператор существует - поворот вокруг оси OX на угол α по часовой стрелки.

При $\alpha = \pi k$ \hat{A} будет линейным оператором простого типа, собственный базис $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

Пример 3.

Вращение вокруг оси Oy :

Подействуем линейным оператором на базисные векторы $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

$$\hat{A}\vec{i} = \cos \alpha \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} - \sin \alpha \vec{k}$$

$$\hat{A}\vec{j} = 0 \cdot \vec{i} + 1 \cdot \vec{j} + 0 \cdot \vec{k}$$

$$\hat{A}\vec{k} = \sin \alpha \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} + \cos \alpha \cdot \vec{k}$$

Координаты образов базисных векторов надо записать по столбцам:

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix} - \text{матрица поворота вокруг оси } Oy \text{ на угол } \alpha \text{ против часовой стрелки}$$

$\text{Ker } \hat{A} = \{\vec{0}\}$; $\text{Im } \hat{A} = V_3$. Обратный оператор существует - поворот вокруг оси OY на угол α по часовой стрелки.

При $\alpha = \pi k$ \hat{A} будет линейным оператором простого типа, собственный базис $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

Пример 4.

Оператор в пространстве V_3 : \hat{A} - проекция на координатную ось Oy .

Подействуем линейным оператором на базисные векторы $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

$$\hat{A}\vec{i} = \vec{0} = (0,0,0),$$

$$\hat{A}\vec{j} = \vec{j} = (0,1,0),$$

$$\hat{A}\vec{k} = \vec{0} = (0,0,0).$$

Запишем матрицу оператора \hat{A} :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем образ вектора $\vec{a} = (-1, 5, 2)$:

$$\hat{A}\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Из геометрических соображений видно, что под действием линейного оператора в $\vec{0}$ переходят все векторы, параллельные плоскости Oxz , следовательно, $\text{Ker } \hat{A} = \{\alpha\vec{i} + \beta\vec{k}\}$.

Образом оператора \hat{A} является ось Oy : $\text{Im } \hat{A} = \{\gamma\vec{j}\}$, $\text{Defect } \hat{A} = 2$, $\text{Rang } \hat{A} = 1$.

По всем трем критериям линейный оператор необратим:

1) $\det A = 0$; 2) $\text{Im } \hat{A} \neq V_3$; 3) $\text{Ker } \hat{A} \neq \{\vec{0}\}$.

Матрица в каноническом базисе имеет диагональный вид, следовательно это линейный оператор простого типа. $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$; $\lambda_2 = 1$; , собственный базис $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

Пример 5.

Оператор в пространстве V_3 : \hat{A} – зеркальное отражение относительно плоскости XOY .

Подействуем линейным оператором на базисные векторы $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

$$\begin{aligned}\hat{A}\vec{i} &= \vec{i} = (1, 0, 0), \\ \hat{A}\vec{j} &= \vec{j} = (0, 1, 0), \\ \hat{A}\vec{k} &= -\vec{k} = (0, 0, -1).\end{aligned}$$

Запишем матрицу оператора \hat{A} :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Найдем образ вектора $\vec{a} = (2, -4, -3)$:

$$\hat{A}\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Из геометрических соображений видно, что под действием данного линейного оператора в нулевой элемент переходит только $\vec{0}$, следовательно, $\text{Ker } \hat{A} = \{\vec{0}\}$. Тогда образом \hat{A} является все пространство V_3 : $\text{Im } \hat{A} = V_3$. Данные выводы подтверждаются тем фактом, что $\text{rang } A = 3$.

Данный линейный оператор обратим:

$$1) \det A \neq 0; 2) \text{Im } \hat{A} = V_3; 3) \text{Ker } \hat{A} = \{\vec{0}\}.$$

Матрица в каноническом базисе имеет диагональный вид, следовательно это линейный оператор простого типа. $\lambda_1 = \lambda_2 = 1; \lambda_3 = -1$; , собственный базис $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

Пример 6.

В пространстве V_3 оператор \hat{A} задан формулой:

$$\hat{A}\vec{x} = [\vec{x}, \vec{a}] - \text{векторное произведение, где } \vec{a} = (1; -2; 3).$$

- Доказать, что \hat{A} - линейный оператор;
- Найти матрицу линейного оператора \hat{A} в базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.
- Найти образ вектора $\vec{c} = (1; 2; -1)$
- Найти ядро и образ оператора \hat{A} .
- Является ли оператор \hat{A} обратимым? Если да, описать его действие.
- Найти собственные значения и собственные векторы

Решение:

$$а) \hat{A}(\vec{x} + \vec{y}) = [\vec{x} + \vec{y}, \vec{a}] = [\vec{x}, \vec{a}] + [\vec{y}, \vec{a}] = \hat{A}(\vec{x}) + \hat{A}(\vec{y}),$$

$$\hat{A}(\alpha \vec{x}) = [\alpha \vec{x}, \vec{a}] = \alpha [\vec{x}, \vec{a}] = \alpha \hat{A}(\vec{x}).$$

Свойства линейности выполняется, следовательно \hat{A} – линейный оператор.

$$б) \hat{A}\vec{i} = [\vec{i}, \vec{a}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -3\vec{j} - 2\vec{k} = (0; -3; -2)$$

$$\hat{A}\vec{j} = [\vec{j}, \vec{a}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 3\vec{i} - \vec{k} = (3; 0; -1)$$

$$\hat{A}\vec{k} = [\vec{k}, \vec{a}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + \vec{j} = (2; 1; 0)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

с) Найдем образ вектора $\vec{c} = (1; 2; 3)$:

$$\vec{y} = \hat{A}\vec{x} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

д) $\text{Ker } \hat{A} = \{\beta \vec{a}\}$ – векторы, коллинеарные \vec{a} , (следует из свойств векторного произведения),

$\text{Im } \hat{A}$ – векторы, перпендикулярные \vec{a} (плоскость, для которой \vec{a} – нормаль)

$$\text{Defect } \hat{A} = 1, \text{Rang } \hat{A} = 2.$$

е) По всем трем критериям линейный оператор необратим:

1) $\det A = 0$; 2) $\text{Im } \hat{A} \neq V_3$; 3) $\text{Ker } \hat{A} \neq \{\vec{0}\}$.

Найдем собственные векторы и собственные значения.

Надо найти такие векторы \vec{b} , чтобы $[\vec{b}, \vec{a}] = \lambda \vec{b}$. Из свойств векторного произведения следует, что это возможно только в одном случае, когда $\vec{b} = \beta \vec{a}$; Тогда $[\vec{b}, \vec{a}] = [\beta \vec{a}, \vec{a}] = \vec{0} = 0\vec{b}$; и $\lambda = 0$.

Итак, собственные векторы: $\vec{b} = \beta \vec{a}$ с собственным значением $\lambda = 0$. Нет базиса из собственных векторов, следовательно данный линейный оператор не является оператором простого типа

Линейные операторы в пространстве многочленов

Пример 7.

В пространстве P_2 многочленов степени не выше 2 задан оператор:

$$\hat{A}p(t) = tp'(t) + 2p(t)$$

- a) Показать линейность оператора \hat{A} .
- b) Найти матрицу линейного оператора \hat{A} в каноническом базисе пространства P_2 .
- c) Найти образ многочлена $p(t) = 2t^2 - 3t + 1$.
- d) Найти ядро линейного оператора \hat{A} .
- e) Существует ли обратный оператор?
- f) Найти собственные векторы и собственные значения.

Решение:

- a) Проверим линейность оператора:

$$\begin{aligned}\hat{A}(p_1(t) + p_2(t)) &= t(p_1'(t) + p_2'(t)) + 2(p_1(t) + p_2(t)) = \\ &= (tp_1'(t) + 2p_1(t)) + (tp_2'(t) + 2p_2(t)) = \hat{A}(p_1(t)) + \hat{A}(p_2(t)). \\ \hat{A}(\alpha p(t)) &= t(\alpha p'(t)) + 2(\alpha p(t)) = \alpha(tp'(t) + 2p(t)) = \alpha\hat{A}(p(t)).\end{aligned}$$

Условие линейности выполняется.

- b) Найдем матрицу \hat{A} в каноническом базисе: $\vec{e}_0 = 1, \vec{e}_1 = t, \vec{e}_2 = t^2$.

$$\begin{aligned}\hat{A}\vec{e}_0 &= t \cdot (1)' + 2 = 2 = (2, 0, 0), \\ \hat{A}\vec{e}_1 &= t \cdot (t)' + 2 \cdot t = 3t = (0, 3, 0), \\ \hat{A}\vec{e}_2 &= t \cdot (t^2)' + 2 \cdot t^2 = 4t^2 = (0, 0, 4).\end{aligned}$$

Чтобы получить матрицу линейного оператора, записываем координаты образов базисных векторов по столбцам:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

- c) Чтобы найти образ многочлена $p(t)$, запишем его в координатной форме

$$\begin{aligned}p(t) &= 2t^2 - 3t + 1 = 1\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 = (1, -3, 2). \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 \\ -9 \\ 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \hat{A}p(t) = 2 - 9t + 8t^2.\end{aligned}$$

- d) Чтобы найти ядро \hat{A} , решим однородную систему уравнений: $AX = 0$:
- $$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{rang } A = 3 \Rightarrow \text{система имеет единственное}$$

тривиальное решение: $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x} = (0, 0, 0) \Rightarrow \text{Ker } \hat{A} = \{\vec{0}\}.$

е) $\text{Ker } \hat{A} = \{\vec{0}\} \Rightarrow$ существует \hat{A}^{-1} , оператор обратим.

Матрица данного линейного оператора имеет диагональный вид, следовательно это оператор простого типа, канонический базис $\vec{e}_0 = 1, \vec{e}_1 = t, \vec{e}_2 = t^2$ является собственным базисом. Собственные значения стоят на главной диагонали: 2, 3, 4.

Пример 8.

Оператор \hat{A} действует в пространстве P_2 многочленов степени не выше второй:

$$\hat{A}p(t) = p'(t-1) + 2p(t)$$

- Показать линейность оператора.
- Найти его матрицу в каноническом базисе пространства P_2 .
- Найти образ многочлена $p(t) = t^2 + 2t - 3$.
- Найти ядро линейного оператора \hat{A} .
- Существует ли обратный оператор?

Решение:

- Проверим линейность оператора:

$$\begin{aligned} \hat{A}(p_1(t) + p_2(t)) &= (p_1(t-1) + p_2(t-1))' + 2(p_1(t) + p_2(t)) = \\ &= p_1'(t-1) + 2p_1(t) + p_2'(t-1) + 2p_2(t) = \hat{A}p_1(t) + \hat{A}p_2(t). \end{aligned}$$

$$\hat{A}(\alpha p(t)) = \alpha p'(t-1) + 2\alpha p(t) = \alpha(p'(t-1) + 2p(t)) = \alpha \hat{A}(p(t)).$$

Условие линейности выполняется.

- Найдем матрицу оператора в каноническом базисе пространства P_2 :

$$\vec{e}_0 = 1, \vec{e}_1 = t, \vec{e}_2 = t^2.$$

$$\hat{A}\vec{e}_0 = 1' + 2 = 2 = (2, 0, 0)$$

$$\hat{A}\vec{e}_1 = (t-1)' + 2t = 1 + 2t = 0 = (1, 2, 0)$$

$$\hat{A}\vec{e}_2 = ((t-1)^2)' + 2t^2 = 2(t-1) + 2t^2 = 2t^2 + 2t - 2 = (-2, 2, 2).$$

Чтобы получить матрицу линейного оператора, записываем координаты образов базисных векторов в матрицу по столбцам.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Чтобы найти образ вектора запишем его в координатной форме.

$$p(t) = t^2 + 2t - 3 = -3\vec{e}_0 + 2\vec{e}_1 + 1\vec{e}_2 = (-3, 2, 1).$$

$$\hat{A}p(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} = 2t^2 + 6t - 6.$$

- Чтобы найти ядро \hat{A} , решим однородную систему линейных уравнений $AX = 0$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{rang } A = 3, \quad \text{система имеет только}$$

$$\text{тривиальное решение : } \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Ker } \hat{A} = \{\bar{0}\}.$$

$$\text{Im } \hat{A} = P_2.$$

е) Обратный оператор существует по всем трем критериям:

$$1) \det A \neq 0, 2) \text{Ker } \hat{A} = \{\bar{0}\}, 3) \text{Im } \hat{A} = P_2.$$

Найдем собственные значения и собственные векторы.

$$\det (A - \lambda E) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 & -2 \\ 0 & 2 - \lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)^3 = 0; \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2.$$

Решим систему $(A - 2E)X = 0$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \text{rang}=2. X = \begin{pmatrix} C \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = C;$$

Существует всего один линейно-независимый собственный вектор; нет базиса из собственных векторов. Данный линейный оператор не является оператором просто