Задание 4

Математика для ML. Теория

Упражнение 0:

Небольшой самолет разбился в районе побережья и необходимо организовать поиски. Ниже приведены вероятности падения самолета на сушу и в море, а также условные вероятности успешных поисков в каждом из случаев.

Априорная вероятность падения: Море – 0.6, Суша – 0.4
Вероятность обнаружения: Море – 0.6, Суша – 0.8

1. **Самолет искали в море и не нашли.** Какова вероятность, что он все же упал в море?

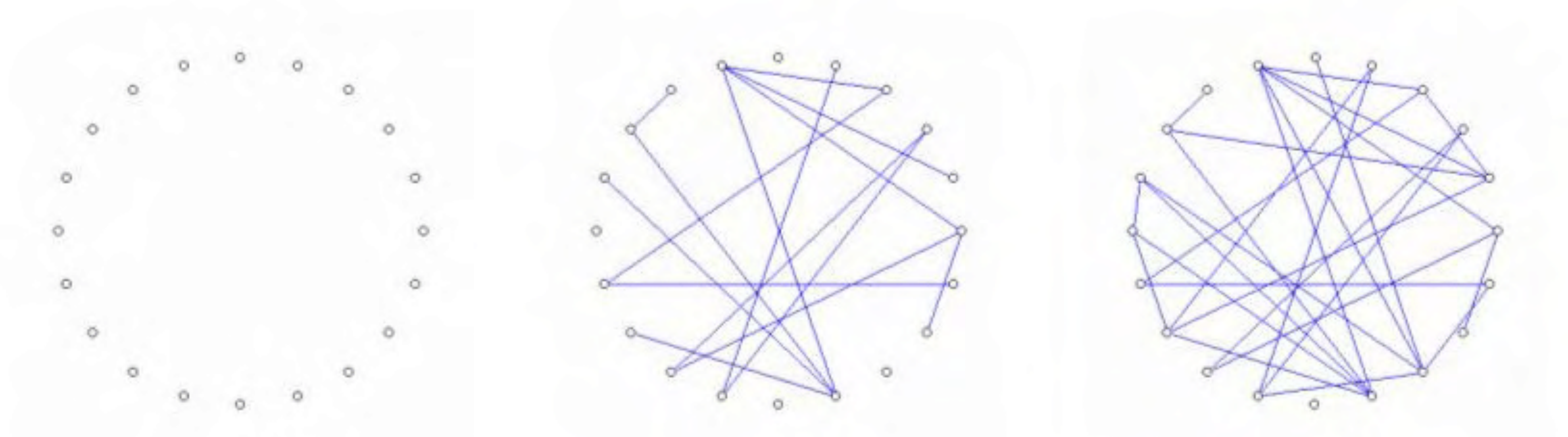
2. **Поиски продолжили на суше, но самолет так и не был найден.** Какова вероятность, что он все же упал в море?

Упражнение 1:

Как при помощи симметричной монеты сгенерировать равномерное распределение на 3 элементах?

Т.е. как из $\mathrm{Bern}(0.5)$ получить $\mathrm{Categ}(1/3,1/3,1/3)$?

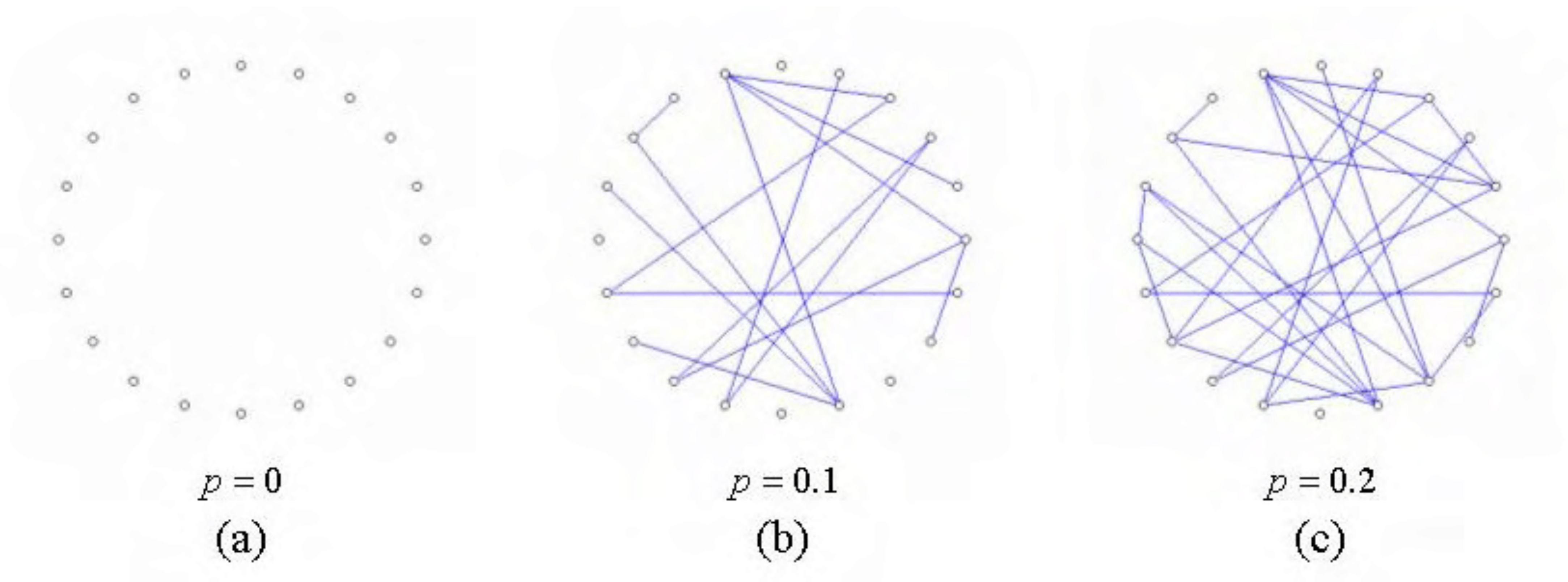
Упражнение 2: Как будет устроено вероятностное пространство случайных графов на n вершинах в модели Эрдеша–Рейни, где ребро проводится с вероятностью p?



$p = 0$ (a) $p = 0.1$ (b) $p = 0.2$ (c)

Упражнение 3:

Найдите матожидание числа треугольников в случайном графе в модели Эрдеша-Рейни (подсказка: воспользуйтесь линейностью матожидания)



Упражнение 4:

Обобщить известные вам свойства $\mathscr{U}[a, b]$ и найти плотность и функцию распределения для $\mathscr{U}[0,1]^2$ – равномерного распределения на единичном квадрате.

Упражнение 5:

Как будет распределена сумма двух независимых случайных величин из $\mathscr{U}[0,1]$? Выпишите плотность этого распределения.

Упражнение 6:

Пусть ξ — абсолютно непрерывная случайная величина, F_ξ — её строго монотонная функция распределения. Докажите, что $F_\xi(\xi) \sim \mathcal{U}[0,1]$

Упражнение 7: Дана выборка $X_1, \ldots, X_n$ из $\mathscr{U}[0, \theta]$. Найдите оценку максимального правдоподобия. Обоснуйте ваше решение.

Упражнение 8:

Дана выборка $X_1, \ldots, X_n$ из $\mathcal{N}(\mu, \boldsymbol{\Sigma})$ – многомерного нормального распределения с вектором средних μ и матрицей ковариаций Σ. Плотность такого распределения задаётся следующей формулой:

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}|\Sigma|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mu)^\top \Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\mu)}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

где $|\Sigma|$ — определитель матрицы Σ, а Σ^{-1} — матрица обратная к Σ

Выведите оценку максимального правдоподобия для каждого из параметров в отдельности, считая второй известным.

Упражнение 9:

Посчитайте матожидание статистики критерия Манна-Уитни при условии справедливости основной гипотезы (что распределения одинаковые) и в предположении, что $(X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m)$ попарно различны.

S_j — ранг Y_j в вариационном ряду по выборке $(X_1, .., X_n, Y_1, .., Y_m)$.

$V = S_1 + ... + S_m$ — статистика критерия.

Подсказка: Сгенерируйте много пар выборок (X, Y) из одного распределения, посмотрите на графики.