

تمرین :

1. حاصل $\iint_R \sin x + \sin y \, dA$ را نسبت اکوریه جابجایی R مستطیلی با رئوس $(0,0)$ ، $(\pi,0)$ ، (π,π) ، $(0,\pi)$ د

و (π,π) باشد .

2. حجم جسم سه بعدی محصور سطحی وار $z = 2 + x^2 + (y-2)^2$ و صفحات $z=1$ ، $x=1$ ،

$y=0$ ، $y=4$ ، $x=-1$ را نسبت اکوریه .

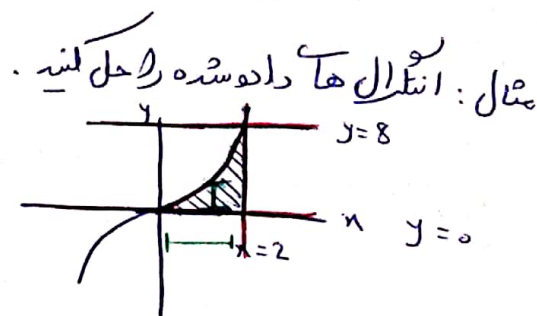
3. حاصل $\iint_R xy \, dA$ روی ناحیه $|x|+|y|=1$ (R) را نسبت اکوریه .

4. حجم جسم سه بعدی محدود $z=y+2x+1$ ، $z=0$ ، $y=0$ ، $x=0$ ، $3y+x-3=0$ را نسبت اکوریه .

5. حجم رویه های محدود $x^2+y^2=4$ ، $x^2+z^2=4$ را در $\frac{1}{8}$ اول نسبت اکوریه .

6. حجم جسم محصور $3x+8y+6z=22$ در ناحیه محدود $y^2=2x$ ، $2x+3y=10$ و

$y=0$ را در ربع اول نسبت اکوریه .



$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{y} \\ x &= 2 \\ y &= 0 \\ y &= 8 \end{aligned}$$

$$I = \int_0^8 \int_{\sqrt[3]{y}}^2 \sin x^4 \, dx \, dy$$

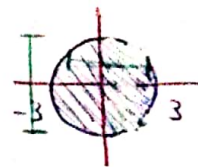
$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 \int_0^{x^3} \sin x^4 \, dy \, dx = \int_0^2 y \sin x^4 \Big|_0^{x^3} \, dx = \int_0^2 x^3 \sin x^4 \, dx = \frac{1}{4} \int \sin u \, du \\ &= -\frac{1}{4} \cos x^4 \Big|_0^2 \\ u &= x^4 \\ du &= 4x^3 \, dx \end{aligned}$$

$$I = \int_{-3}^3 \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} x^2 \sqrt{9-y^2} dy dx$$

$x =$ $y =$

$$\begin{aligned} x &= -3 \\ x &= 3 \\ y &= \sqrt{9-x^2} \\ y &= -\sqrt{9-x^2} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} x &= -3 \\ x &= 3 \\ y &= \sqrt{9-x^2} \\ y &= -\sqrt{9-x^2} \end{aligned}} \right\} y^2 + x^2 = 9$$

$$I = \int_{-3}^3 \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} x^2 \sqrt{9-y^2} dx dy$$



$$= \int_{-3}^3 \frac{x}{3} \sqrt{9-y^2} \Big|_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} dy = \int_{-3}^3 \frac{(9-y^2)^2}{3} + \frac{(9-y^2)^2}{3} dy$$

$$= \int_{-3}^3 \frac{2}{3} (9-y^2)^2 dy = 2 \int_0^3 \frac{2}{3} (9-y^2)^2 dy = \frac{4}{3} \int_0^3 (81 - 18y^2 + y^4) dy$$

تابع زوج

$$= \frac{4}{3} (81y - 6y^3 + \frac{1}{5}y^5) \Big|_0^3 = \dots$$

تمرین: انتگرال های زیر را حل کنید.

$$\int_0^1 \int_x^1 \sin y^2 dy dx$$

$$\int_0^1 \int_x^1 e^{\frac{x}{y}} dy dx$$

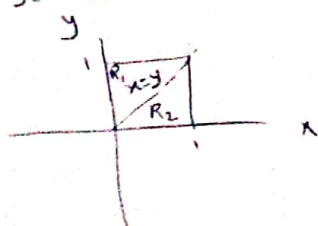
$$\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \frac{1}{y^3+1} dy dx$$

$$\int_1^2 \int_0^{\ln x} f(x,y) dy dx \quad (\text{عظرات را حتماً جایگزین کنید})$$

$$\int_0^1 \int_0^1 |x-y| dx dy = \iint_{R_1} |x-y| dA + \iint_{R_2} |x-y| dA$$

مثال:

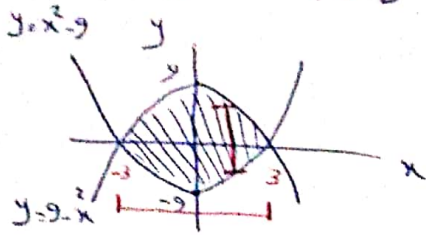
حل (تمرین)



$$\iint_R dA$$

تعریف: مساحت ناحیه R برابر است با

مثال: مساحت ناحیه محصوره
 $y = x^2 - 9$, $y = 9 - x^2$ را بیابید.



حل (ریاضی 1):

$$\begin{aligned} x^2 - 9 &= 9 - x^2 \\ 2x^2 &= 18 \\ x^2 &= 9 \rightarrow x = \pm 3 \end{aligned}$$

$$\int_{-3}^3 (9 - x^2) - (x^2 - 9) dx$$

$$\begin{aligned} \int_{-3}^3 \int_{x^2-9}^{9-x^2} dy dx &= \int_{-3}^3 y \Big|_{x^2-9}^{9-x^2} dx \\ x = \quad y = \quad &= \int_{-3}^3 (9 - x^2) - (x^2 - 9) dx \end{aligned}$$

حل (ریاضی 2):

حل انتگرال دوگانه با استفاده از مختصات قطبی:

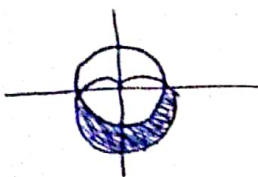
فرض کنید $\iint_R f(x, y) dA$ را داشته باشیم. با استفاده از متسادهای

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ x^2 + y^2 = r^2 \end{cases}$$

$$\iint_R f(x, y) = \iint_{S(r, \theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) \underbrace{r}_{\text{داریم}} dr d\theta$$

(اثبات متسادهای فوق را در کتاب مطالعه نمایید.)

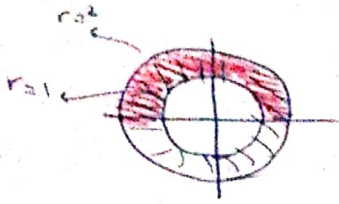
مثال: مطلوب است محاسبه مساحت ناحیه درون $r = 1 - \sin \theta$ و بیرون $r = 1$.



$$\begin{aligned} 1 - \sin \theta &= 1 \\ \sin \theta &= 0 \rightarrow \theta = 0, \pi, 2\pi \\ \int_{\pi}^{2\pi} \int_1^{1-\sin \theta} \frac{1}{r} r dr d\theta & \\ \theta = \quad r = \quad & \end{aligned}$$

مثال: مطلوب است $\iint_R (3x+4y^2) dA$ جائید R ناحیه بین دایره‌ها و $x^2+y^2=1$

$x^2+y^2=4$ در رسم صفحه بالای است.

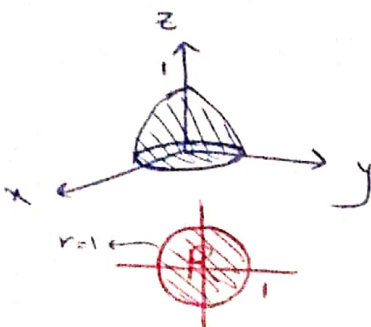


$$1 \leq r \leq 2$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$\int_0^{2\pi} \int_1^2 (3r\cos\theta + 4r^2\sin^2\theta) r dr d\theta$$

مثال: حجم جسم سه بعدی محصوره صفحه $z=0$ و رویه $z=1-x^2-y^2$ است.



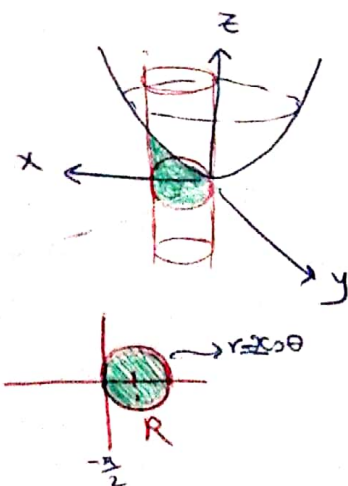
$$0 = 1 - x^2 - y^2 \rightarrow x^2 + y^2 = 1$$

$$0 \leq r \leq 1$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 (1-r^2) r dr d\theta$$

مثال: حجم جسم سه بعدی که زیر سطح وار $z=x^2+y^2$ بالار صفحه $z=4$ درون



استوانه $x^2+y^2=2x$ و دارد دایره است آوری.

مرکز (0,0)
شعاع 1

$$0 \leq r \leq 2\cos\theta$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$x^2+y^2=2x$$

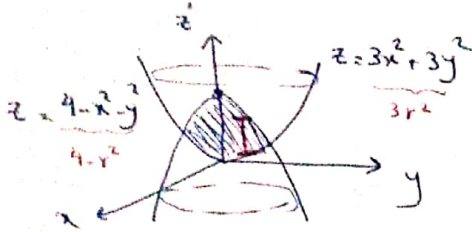
$$r^2=2r\cos\theta$$

$$r=0 \text{ یا } r=2\cos\theta$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\cos\theta} (r^2) r dr d\theta$$

می توان θ را بین $-\pi/2$ تا $\pi/2$ گرفت

مثال: حجم جسم محصوره رو به ها $z = 3x^2 + 3y^2$, $z = 4 - x^2 - y^2$ بدست آورید.



$$3x^2 + 3y^2 = 4 - x^2 - y^2$$

$$4x^2 + 4y^2 = 4$$

$$x^2 + y^2 = 1$$



$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$0 \leq r \leq 1$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 ((4-r^2) - (3r^2)) r \, dr \, d\theta$$

$\theta = 0$ $r = 0$

تمرین: حجم جسم سیمه بالا را محاسبه کنید $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ و زیر کره $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

بدست آورید.

تمرین: مطلوب است $\iint_R \sqrt{x^2 + y^2} \, dA$ جابجایی R نیم دایره ای به مرکز مبدأ و شعاع

a در ربع سوم و چهارم می باشد.

تمرین: مطلوب است $\iint_R \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \, dA$ جابجایی R ناحیه درون $x^2 + y^2 = 2x$

بیرون $x^2 + y^2 = 1$ است.

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} y \, dy \, dx$$

تمرین: انتگرال ها را به روش دیگر حل کنید.

$$\int_{-1}^1 \int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1+\sqrt{1-x^2}} x \, dy \, dx$$

$$\int_0^1 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (y^3 + x^2 y) \, dy \, dx$$