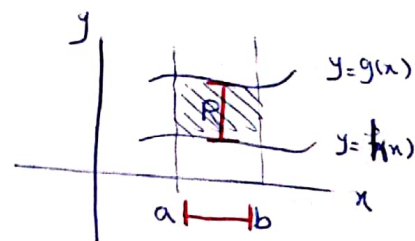


فرض کنید $z = f(x, y)$ روی ناحیه

$$R = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, h(x) \leq y \leq g(x)\}$$

پیوسته باشد. در این صورت:

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_{h(x)}^{g(x)} f(x, y) dy dx$$



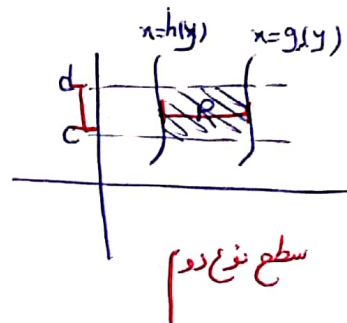
سطح نوع اول

فرض کنید $z = f(x, y)$ روی ناحیه

$$R = \{(x, y) \mid c \leq y \leq d, h(y) \leq x \leq g(y)\}$$

پیوسته باشد. در این صورت

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_c^d \int_{h(y)}^{g(y)} f(x, y) dx dy$$



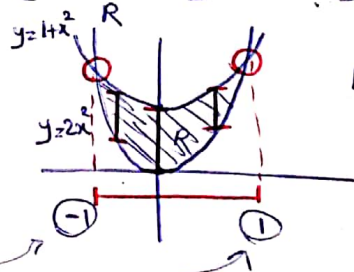
سطح نوع دوم

مثال: مطلوب است $\iint_R x+2y dA$ جایی که R محدود به منحنی‌ها $y=1+x^2$ و $y=2x^2$ باشد.

2. تشخیص نوع ناحیه

3. محل برخورد ها در صورت نیاز

$$1+x^2=2x^2 \rightarrow x^2=1 \rightarrow x=\pm 1$$



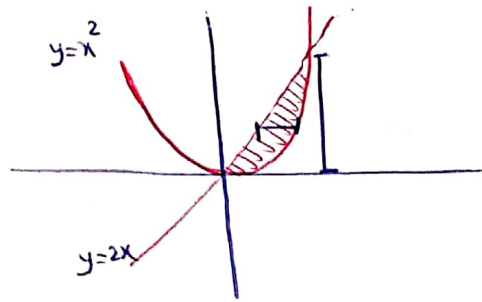
1. رسم ناحیه R

4. تشکیل انتگرال

$$\int_{x=-1}^1 \int_{y=2x^2}^{1+x^2} x+2y dy dx = \int_{-1}^1 \left. xy + y^2 \right|_{2x^2}^{1+x^2} dx$$

= - - -

مثال: حجم جسم سطح زیر $z = x^2 + y^2$ و بالار نامیه D در صفحه xy که محدود به $y = 2x$ و $y = x^2$



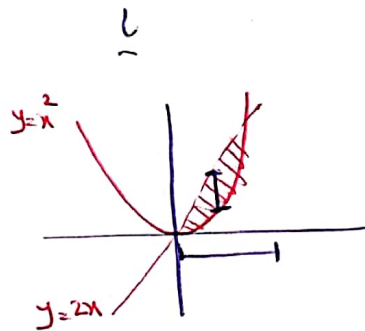
$y = x^2$ است بدلاکینه

$$2x = x^2 \rightarrow x = 0, 2$$

$$\rightarrow y = 0, 4$$

$$\int_0^4 \int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} x^2 + y^2 dx dy$$

$y =$ $x =$



$$\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} x^2 + y^2 dy dx$$

$x =$ $y =$

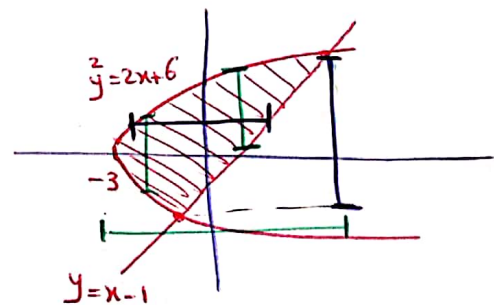
مثال: طول است $\iint_R xy dA$ جاییکه R محدود به $y^2 = 2x + 6$ و $y = x - 1$ است

$$(x-1)^2 = 2x + 6$$

$$x^2 - 2x + 1 = 2x + 6 \rightarrow x^2 - 4x - 5 = 0$$

$$(x-5)(x+1) = 0 \rightarrow x = 5, -1$$

$$y = 4, -2$$



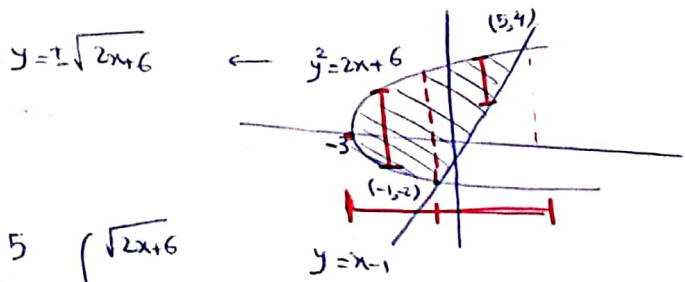
$$\int_{-2}^4 \int_{\frac{y^2-6}{2}}^{y+1} xy dx dy$$

$y =$ $x =$

مثال: انتگرال مثال لایه به ترتیب $dy dx$ بنویسید.

$$\int_{x=-3}^{-1} \int_{y=-\sqrt{2x+6}}^{\sqrt{2x+6}} xy \, dy \, dx + \int_{x=-1}^5 \int_{y=x-1}^{\sqrt{2x+6}} xy \, dy \, dx$$

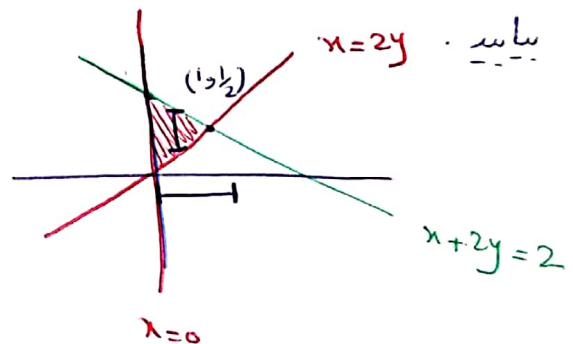
$x =$ $y =$



مثال: حجم چهاروجهی محصوره صفحات $z=0$ و $x=0$ ، $x=2y$ ، $x+2y+z=2$

$$x+2y+0=2 \rightarrow x+2y=2$$

$$\begin{cases} x=2y \\ x+2y=2 \end{cases} \Rightarrow 4y=2 \rightarrow y=\frac{1}{2} \quad x=1$$

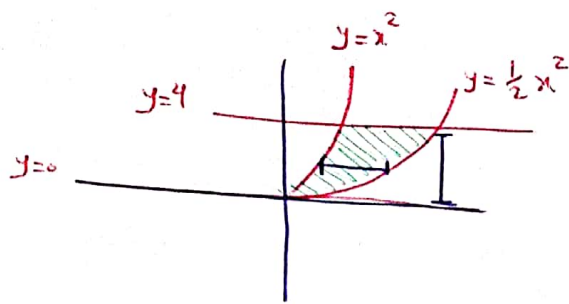


$$\int_{x=0}^1 \int_{y=\frac{x-2}{2}}^{\frac{x-2}{2}} (2-x-2y) \, dy \, dx$$

تعداد : 12570 : 26 ، 24 ، 21 ، 20 ، 19 ، 14 ، 11

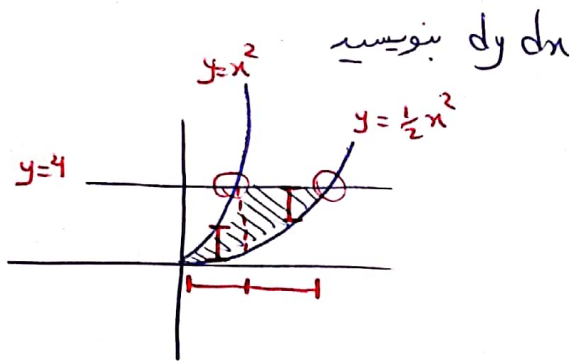
• 31 ، 17 ، 9 ، 1247

مثال: حجم ناحیه محصوره تابع مثبت $f(x,y)$ را در ناحیه محدود به $y=x^2$ و $y=\frac{1}{2}x^2$ محاسبه کنید.



$y=0$ و $y=4$ را مشخص کنید. $(x \geq 0)$

$$\int_{y=0}^4 \int_{x=\sqrt{y}}^{\sqrt{2y}} f(x,y) dx dy$$



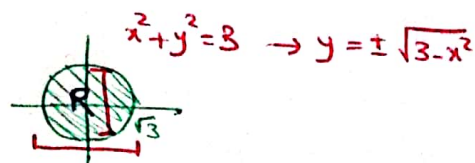
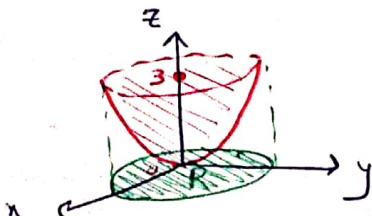
مثال: حجم مربوط به مثال قبل را با ترتیب $dy dx$ بنویسید

برخورد $y=x^2$ و $y=4$
 $x=2$

برخورد $y=\frac{1}{2}x^2$ و $y=4$
 $x=2\sqrt{2}$

$$\int_{x=0}^{\sqrt{2}} \int_{y=\frac{1}{2}x^2}^{x^2} f(x,y) dy dx + \int_{x=\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \int_{y=\frac{1}{2}x^2}^4 f(x,y) dy dx$$

مثال: حجم زیر رویه $z=x^2+y^2$ محدود به صفحات $z=0$ و $z=3$ را مشخص کنید (حل انتگرال لازم نیست)



$$V = \int_{x=-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \int_{y=-\sqrt{3-x^2}}^{\sqrt{3-x^2}} x^2+y^2 dy dx$$

تمرین :

1. حاصل $\iint_R \sin x + \sin y \, dA$ را نسبت اکوریه جابجایی R مستطیلی با رئوس $(0,0)$ ، $(\pi,0)$ ، (π,π) ، $(0,\pi)$ د

و (π,π) باشد .

2. حجم جسم سه بعدی محصور سطحی وار $z = 2 + x^2 + (y-2)^2$ و صفحات $z=1$ ، $x=1$ ،

$y=0$ ، $y=4$ ، $x=-1$ را نسبت اکوریه .

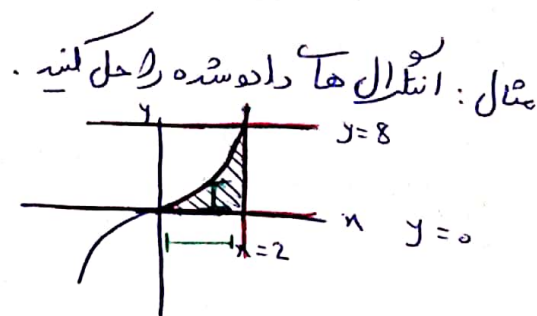
3. حاصل $\iint_R xy \, dA$ روی ناحیه $|x|+|y|=1$ (R) را نسبت اکوریه .

4. حجم جسم سه بعدی محدود $z=y+2x+1$ ، $z=0$ ، $y=0$ ، $x=0$ ، $3y+x-3=0$ را نسبت اکوریه .

5. حجم رویه های محدود $x^2+y^2=4$ ، $x^2+z^2=4$ را در $\frac{1}{8}$ اول نسبت اکوریه .

6. حجم جسم محصور $3x+8y+6z=22$ در ناحیه محدود $y^2=2x$ ، $2x+3y=10$ و

$y=0$ را در ربع اول نسبت اکوریه .



$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{y} \\ x &= 2 \\ y &= 0 \\ y &= 8 \end{aligned}$$

$$I = \int_0^8 \int_{\sqrt[3]{y}}^2 \sin x^4 \, dx \, dy$$

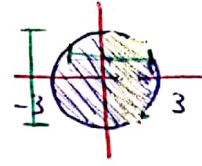
$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 \int_0^{\sqrt[3]{y}} \sin x^4 \, dy \, dx = \int_0^2 y \sin x^4 \Big|_0^{\sqrt[3]{y}} \, dx = \int_0^2 x^3 \sin x^4 \, dx = \frac{1}{4} \int \sin u \, du \\ &= -\frac{1}{4} \cos x^4 \Big|_0^2 \\ u &= x^4 \\ du &= 4x^3 \, dx \end{aligned}$$

$$I = \int_{-3}^3 \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} x^2 \sqrt{9-y^2} dy dx$$

$x =$ $y =$

$$\begin{aligned} x &= -3 \\ x &= 3 \\ y &= \sqrt{9-x^2} \\ y &= -\sqrt{9-x^2} \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} x &= -3 \\ x &= 3 \\ y &= \sqrt{9-x^2} \\ y &= -\sqrt{9-x^2} \end{aligned}} \right\} y^2 + x^2 = 9$$

$$I = \int_y \int_{x=-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} x^2 \sqrt{9-y^2} dx dy$$



$$= \int_{-3}^3 \frac{x^3}{3} \sqrt{9-y^2} \Big|_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} dy = \int_{-3}^3 \frac{(9-y^2)^2}{3} + \frac{(9-y^2)^2}{3} dy$$

$$= \int_{-3}^3 \underbrace{\frac{2}{3} (9-y^2)^2}_{\text{تابع زوج}} dy = 2 \int_0^3 \frac{2}{3} (9-y^2)^2 dy = \frac{4}{3} \int_0^3 (81 - 18y^2 + y^4) dy$$

$$= \frac{4}{3} \left(81y - 6y^3 + \frac{1}{5}y^5 \right) \Big|_0^3 = \dots$$

تمرین : انتگرال های زیر را حل کنید.

$$\int_0^1 \int_x^1 \sin y^2 dy dx$$

$$\int_0^1 \int_x^1 e^{\frac{x}{y}} dy dx$$

$$\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \frac{1}{y^3+1} dy dx$$