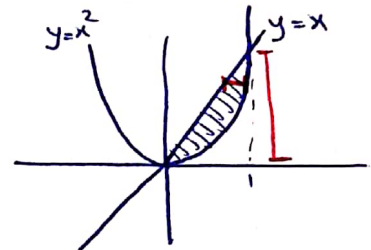


مسئله 16:

1. مطلوب است محاسبه $\iint_R (x-2y) dA$ جابجایی ناحیه محصوره $y=x$ و $y=x^2$ می باشد.

انتگرال حاصل را با ترتیب $dx dy$ ، $dy dx$ ، در مختصات قطبی بنویسید.

$$\int_{y=0}^1 \int_{x=y}^{\sqrt{y}} (x-2y) dx dy = \text{حل سوکر}$$



$$x^2 = x \rightarrow x=0, 1$$

$$y=0, 1$$

$$\int_{x=0}^1 \int_{y=x^2}^x (x-2y) dy dx$$

$$\text{قطب } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$$

$$0 \leq r \leq \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta}} (r \cos \theta - 2r \sin \theta) r dr d\theta$$

خط محدود کننده r ، نشان می دهه
(به صورت شعاع رسم شده)

$$y=x^2$$

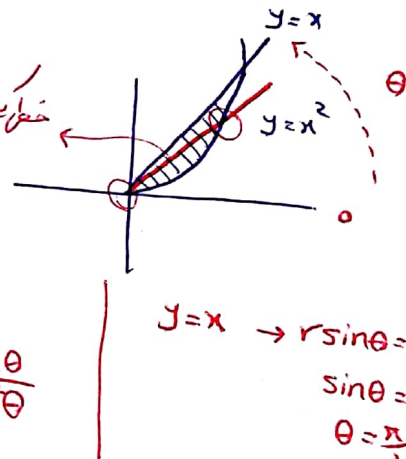
$$r \sin \theta = r^2 \cos^2 \theta$$

$$r=0 \text{ or } r = \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta}$$

$$y=x \rightarrow r \sin \theta = r \cos \theta$$

$$\sin \theta = \cos \theta$$

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$



$$x=0$$

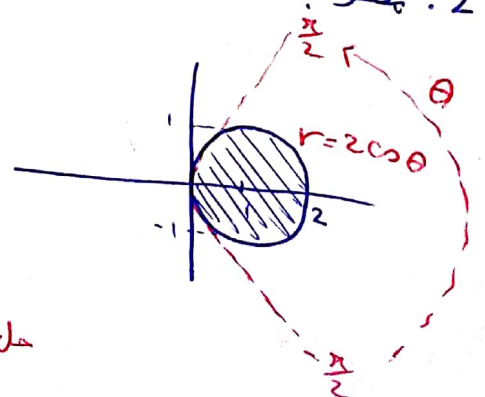
$$x=2$$

$$\left. \begin{array}{l} y = -\sqrt{2x-x^2} \\ y = \sqrt{2x-x^2} \end{array} \right\} y^2 + x^2 = 2x \rightarrow y^2 + (x-1)^2 = 1$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$0 \leq r \leq 2 \cos \theta$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2 \cos \theta} \sqrt{r^2} r dr d\theta = \text{حل سوکر}$$



$$(x-1)^2 = 1-y^2$$

$$x-1 = \pm \sqrt{1-y^2}$$

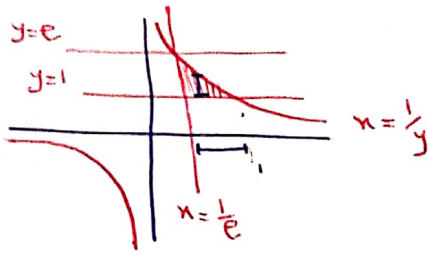
$$x = 1 \pm \sqrt{1-y^2}$$

$$y=1$$

$$y=e$$

$$x=\frac{1}{e}$$

$$x=\frac{1}{y}$$



3. مطلوب است $\int_1^e \int_{\frac{1}{e}}^{\frac{1}{y}} \cos(x - \ln x) dx dy$

$$\int_{x=\frac{1}{e}}^1 \int_{y=1}^{\frac{1}{x}} \cos(x - \ln x) dy dx = \int_{\frac{1}{e}}^1 y \cos(x - \ln x) \Big|_1^{\frac{1}{x}} dx$$

$$= \int_{\frac{1}{e}}^1 \left(\frac{1}{x} - 1 \right) \cos(x - \ln x) dx$$

$$u = x - \ln x$$

$$du = 1 - \frac{1}{x}$$

$$= - \int_{\frac{1}{e}}^1 \cos u du = - \sin u = - \sin(x - \ln x) \Big|_{\frac{1}{e}}^1$$

$$= -\sin(1 - \ln 1) + \sin\left(\frac{1}{e} - \ln \frac{1}{e}\right)$$

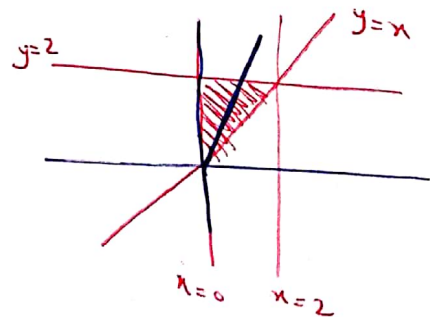
$$= -\sin 1 + \sin\left(\frac{1}{e} + 1\right)$$

$$\int_0^2 \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} xz + y dz dy dx$$

$$x= y= z=$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{2}{\sin \theta}} \int_0^{\sqrt{4-r^2}} ((r \cos \theta)z + r \sin \theta) r dz dr d\theta$$

4. انتگرال زیر را در مختصات استوانه‌ای و کروی بنویسید.



$$y=2 \rightarrow r \sin \theta = 2 \rightarrow r = \frac{2}{\sin \theta}$$

$$y=x \rightarrow r \sin \theta = r \cos \theta$$

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

$$x=0 \rightarrow r \cos \theta = 0 \rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$0 \leq z \leq \sqrt{4-x^2}$$

$$0 \leq r \leq \frac{2}{\sin \theta}$$

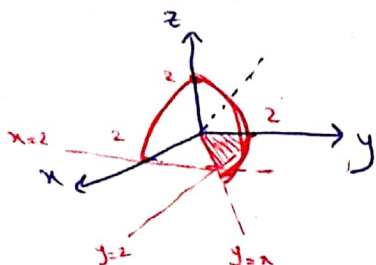
$$\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

استوانه‌ای

$$z \geq 0 \rightarrow 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

از قسمت فوقانی z ، $\varphi > \frac{\pi}{2}$ را

$$0 \leq z \leq \sqrt{4-x^2} \rightarrow z^2 + x^2 = 4$$



$$\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta = 4$$

$$\rho^2 = \frac{4}{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi \cos^2 \theta}$$

$$0 \leq \rho \leq \frac{2}{\sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi \cos^2 \theta}} \quad \text{کروی}$$

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad (\text{از قسمت چپ})$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{2}{\sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi \cos^2 \theta}}} ((\rho \sin \varphi \cos \theta)(\rho \cos \varphi) + \rho \sin \varphi \sin \theta) \rho^2 \sin \varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta$$

$$\int_0^2 \int_{x^2}^{\sqrt{4-y^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} \frac{dz \, dx \, dy}{x^2 + y^2 + z^2}$$

بخش از

5. مطلوب است

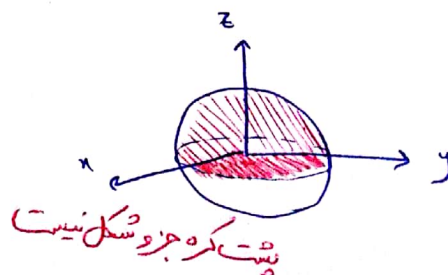
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 \frac{\rho^2 \sin \varphi}{\rho^2} \, d\rho \, d\varphi \, d\theta$$

حل شود.

$$0 \leq \rho \leq 2$$

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$



مثال: مطلوب است $\iiint_E x \, dV$ جابجایی E ناحیه محصوره کرده $x^2 + y^2 + z^2 = 25$

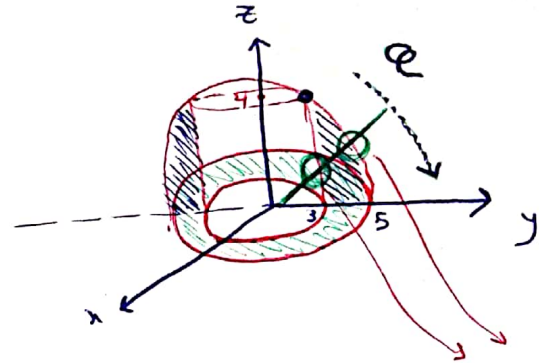
استوانه $x^2 + y^2 = 9$ بالای صفحه xy و زیر صفحه $z = 4$ باشد.

$$\frac{3}{\sin \phi} \leq \rho \leq 5$$

$$\cos^{-1} \frac{3}{5} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

✓ برش کامل است.



شاذ ρ به صورت شعاع در فضا رسم می شود.

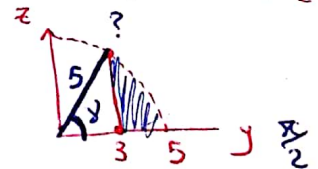
ناحیه مشخص شده بین پوسته استوانه و کره است. پس ρ را از کره و استوانه می بینیم

$$x^2 + y^2 = 9 \rightarrow r^2 = 9 \rightarrow \rho^2 \sin^2 \phi = 9$$

$$\rho = \frac{3}{\sin \phi}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 25 \rightarrow \rho = 5$$

زاویه ϕ از محل برخورد کره و استوانه تا محور z است



$$\cos \phi = \frac{3}{5}$$

$$\phi = \cos^{-1} \frac{3}{5}$$

$$\int_0^{2\pi} \int_{\cos^{-1} \frac{3}{5}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{3}{\sin \phi}}^5 (\rho \sin \phi \cos \theta) (\rho^2 \sin \phi) \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

$\theta =$ $\phi =$ $\rho =$

سوال: انتگرال $\iiint_E (x^2 + y^2) \, dV$ را در مختصات دکارتی، استوانه ای و کروی بنویسید، جابجایی

E ناحیه درون استوانه $x^2 + y^2 = 2x$ زیر $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ و بالای صفحه xy است.