Светуньков С.Г., Светуньков И.С.

Исследование свойств производственной функции комплексного аргумента: Препринт. – СПб.: Изд-во СПбГУЭФ, 2005. – 25 с.

1. Общие положения

Как известно, комплексные числа представляют собой числовые пары, состоящие из двух частей – вещественной и мнимой:

$$a_0 + ia_1, \quad (1)$$

где a_0 – вещественная часть комплексного числа, ia_1- мнимая часть комплексного числа, a_0 и a_1 – вещественные числа, i – мнимая единица, которая удовлетворяет равенству:

$$i = \sqrt{-1} \text{ или } i^2=-1. \quad (2)$$

С комплексными числами можно выполнять все те же действия, что и с вещественными, но с учётом специфики комплексных чисел эти действия имеют оригинальный характер [1]. Теория функции комплексного переменного позволяет использовать в исследованиях модели любой сложности. Комплексные числа нашли широкое применение в физике, механике, машиностроении и других науках. Без комплексных чисел, например, просто не мыслима современная электротехника [2], но в экономике комплексные числа пока не применяются.

Нами предлагается достаточно простой способ использования комплексных чисел в экономике применительно к модели производственной функции. Логика обоснования такой возможности заключается в следующем. Производственная функция представляет собой модель, связывающую ресурсы, используемые для производства продукции, и производственные результаты. Чаще всего из группы ресурсов выделяют затраты труда L_t и затраты капитала K_t (инвестиции либо основные производственные фонды), а в качестве производственного результата используют объём выпуска продукции в денежном выражении Q_t. В то же время результатом производства является не только выпуск продукции, но и ряд других показателей, важнейшим из которых выступают издержки производства C_t. Таким образом, можно поставить в функциональное соответствие друг другу два комплексных числа:

- ресурсы труда и капитала как одно комплексное число

$$L_t + iK_t. \quad (3)$$

- результаты производства как другое комплексное число:

$$Q_t + iC_t. \quad (4)$$

То есть следует рассматривать некоторую функцию одного комплексного числа от другого:

$$Q_t + iC_t = F\left(L_t + iK_t\right). \quad (5)$$

Здесь отнесение издержек производства и капитальных ресурсов в мнимую часть условно.

Из всего множества возможных моделей мы предлагаем использовать для моделей производственных функций модели в аддитивной форме, а именно:

$$Q_t + iC_t = \left(a_0 - ia_1\right)\sum_{j=1}^{N} a_{j+1}\left(L_t + iK_t\right)^j . \quad (6)$$

Здесь a_0, a_1, a_2, ... a_N – коэффициенты функции.

В самом простом случае при j=1 и a_2=1 модель имеет вид:

$$Q_t + iC_t = \left(L_t + iK_t\right)\left(a_0 - ia_1\right). \quad (7)$$

Осуществив перемножение двух комплексных чисел в правой части Равенства (7), найдём коэффициенты a_0 и a_1 этой формы производственной функции:

$$a_0 = \frac{Q_t L_t + C_t K_t}{L_t^{\,2} + K_t^{\,2}}, \quad (8)$$

$$a_1 = \frac{Q_t K_t - C_t L_t}{L_t^{\,2} + K_t^{\,2}}. \quad (9)$$

Очевидно, что все переменные рассматриваемых функций должны быть представлены в безразмерных величинах.

Найти эти коэффициенты достаточно просто, если имеются необходимые статистические данные.

Таблица 1

Деятельность Диатомового комбината за 1999 год

1999 г.	Выручка, тыс. руб.	Издержки, тыс. руб.	ФОТ, тыс. руб.	Трудозатраты, чел.-час	Численность, чел.	ОПФ, тыс. руб.
Февраль	2663	2604	213,5	52100	354	4263
Март	3250	3178	231,3	51347	357	4263
Апрель	1172	1146	289,1	57095	364	4263
Май	2106	2059	246,1	62898	401	4263
Июнь	918	897	266,6	62742	400	4263
Июль	3275	3202	294,1	57005	404	5684
Август	2092	2045	396,4	61662	437	5684
сентябрь	2201	2152	310,2	64484	457	5684
Октябрь	1845	1804	402,4	63071	454	5684
Ноябрь	2675	2615	511,9	64599	465	5684
Декабрь	4843	4736	439,4	63905	460	5684

Аспирантка СПбГУЭФ И.Е. Никифорова предоставила в наше распоряжение статистические данные о производственной деятельности одного из отечественных заводов, которые представлены в табл. 1.

Воспользовавшись значениями выручки, издержек производства, фондом оплаты труда и величиной основных производственных фондов, построим производственную функцию типа (7). Для этого приведём все значения к безразмерным относительным величинам. За основу возьмём данные по первому наблюдению за февраль 1999 года, которые будут равны единице. Все остальные значения исходных переменных приводятся к этим данным. Так как формулы (8) и (9) предоставляют возможность находить соответствующие коэффициенты для каждого момента наблюдений, получим на исходных данных два ряда коэффициентов, которые представлены в табл. 2.

Таблица 2. Коэффициенты производственной функции (7)

1999 г.	Коэффициент a_0	Коэффициент a_1
Февраль	1,000	0,000
Март	1,170	-0,047
Апрель	0,366	-0,055
Май	0,731	-0,052
Июнь	0,303	-0,033
Июль	0,907	-0,015
Август	0,480	-0,079
Сентябрь	0,592	-0,025
Октябрь	0,418	-0,072
Ноябрь	0,498	-0,142
Декабрь	1,026	-0,219

Легко убедиться в том, что коэффициенты функции меняются во времени и это изменение можно описать, например, моделями трендов.

Если менеджменту данного комбината необходимо определить условия роста производства, то можно произвести многовариантные расчёты, изменяя в полученной модели как величину фонда оплаты труда (а значит, и количества занятых в производстве), так и величину основных производственных фондов. При этом можно найти варианты минимальной себестоимости, максимальной прибыли, максимальной валовой продукции и т. п.

Отметим, что другие производственные функции, представленные только с помощью вещественных чисел, не позволяют провести комплексные расчёты такого уровня. Для этого следует построить модель производственной функции в виде системы как минимум из двух уравнений, решая которые можно получить искомые результаты.

Модель (7) имеет практическую ценность, но с её помощью сложно анализировать суть протекающих процессов. Это вызвано тем, что коэффициентам модели (8) и (9) сложно дать экономическую интерпретацию, в то время как в производственной функции Кобба-Дугласа, например, значения параметров имеют ясную экономическую интерпретацию, что даёт возможность использовать её в аналитических исследованиях.

Переменными в производственной функции Кобба-Дугласа выступают объём производства Q_t, затраты труда L_t и затраты капитала K_t. Если использовать эти переменные в предлагаемых нами моделях, то здесь возможно появления у них свойств, позволяющих осуществлять анализ моделируемых производственных процессов. Для этого воспользуемся моделью (7). С учётом того, что в эту модель не включаются издержки производства, то в левой части модели мнимая часть комплексного числа будет равна нулю. Тогда связать затраты труда L_t и капитала K_t с результатами Q_t можно следующим образом:

$$Q_t = \left(L_t + iK_t\right)\left(a_0 - ia_1\right). \qquad (10)$$

Здесь второй сомножитель, представляющий собой комплексное число

$$(a_0 - ia_1), \qquad (11)$$

не только помогает связать в одной модели производственные затраты и результаты, но и выступает в качестве объекта самостоятельного научного исследования.

Осуществляя перемножение двух сомножителей в правой части равенства (10) друг на друга и группируя вещественную и мнимую части, получим:

$$Q_t = (L_t a_0 + K_t a_1) + i(K_t a_0 - L_t a_1). \qquad (12)$$

В результате перемножения получено комплексное число, вещественная часть которого $(L_t a_0 + K_t a_1)$ равна Q_t, а мнимая часть $(K_t a_0 - L_t a_1)$ будет равна нулю в силу того, что в левой части равенства мнимой части нет, то есть она представлена произведением i0. То есть, производственная функция представляет собой аддитивную модель вида:

$$Q_t = L_t a_0 + K_t a_1, \quad (13)$$

где коэффициенты a_0 и a_1 представляют собой части одного комплексного числа.

Именно последнее обстоятельство предопределяет особенность свойств предложенной нами модели производственной функции комплексного аргумента. Использовать просто модель (13) в данном случае нельзя, поскольку должно выполняться ещё и условие

$$K_t a_0 - L_t a_1 = 0. \quad (14)$$

Решение уравнений (13) и (14) позволит найти искомые значения коэффициентов a_0 и a_1. Но тот же самый результат можно получить, непосредственно используя модель (10). Для этого выведем комплексное число коэффициентов через объёмы и ресурсы, после чего сделаем несколько элементарных преобразований:

$$a_0 - ia_1 = \frac{Q_t}{L_t + iK_t} = \frac{Q_t(L_t - iK_t)}{L_t^2 + K_t^2}, \quad (15)$$

Данное равенство, как это следует из свойств комплексных чисел, выполняется только в том случае, когда равны друг другу вещественные и мнимые части комплексных чисел в левой и правой частях равенства (15). Это свойство позволяет легко получить формулы для расчёта коэффициентов. Действительно, раскрывая скобки и группируя отдельно вещественную и мнимую части, получаем формулы для вычисления каждого из коэффициентов:

$$a_0 = \frac{Q_t L_t}{L_t^2 + K_t^2} \quad \text{и} \quad a_1 = \frac{Q_t K_t}{L_t^2 + K_t^2}. \quad (16)$$

Полученные формулы позволяют не только найти численные значения коэффициентов по известным значениям затрат и результатов, но и дать экономическую интерпретацию значений каждого из коэффициентов a_0 и a_1.

Если все исходные переменные равны единице, то легко увидеть, что в этом случае коэффициент a_0 и коэффициент a_1 равны друг другу и принимают значение 0,5. Если с течением времени экономическая система не развивается во времени, затраты ресурсов и результаты остаются неизменными, то и коэффициенты остаются неизменными и равными 0,5. Следует признать этот случай чрезвычайно редким.

Равенство между коэффициентами, как это легко увидеть из (16), возможно только в том случае, когда равны друг другу значения ресурсов: $L_t=K_t$.

Во всех остальных случаях будет наблюдаться неравенство между коэффициентами. Когда $L_t>K_t$, то $a_0 > a_1$, а когда $L_t<K_t$ то $a_0 < a_1$.

Как следует из (16) коэффициент a_0 отражает изменение интенсивности использования трудовых ресурсов, а коэффициент a_1 отражает изменение интенсивности использования капитальных ресурсов. Поэтому данные коэффициенты можно так и называть: коэффициенты использования ресурсов.

Из (16) следует ещё одно очевидное свойство коэффициентов, а именно:

$$\frac{L_t}{K_t} = \frac{a_0}{a_1}. \quad (17)$$

Рассмотрим возможные пределы изменения коэффициентов (16) в зависимости от изменения того ресурса, поведение которого он отражает, то есть:

$$a_0 = f(L_t) \text{ и } a_1 = f(K_t).$$

Как следует из (16), каждый из коэффициентов при стремлении одного из параметров к нулю сам стремится к нулю, а при стремлении одного из параметров к бесконечности, вновь устремляется к нулю. Поэтому очевидно, что рассматриваемые функции имеют экстремум, который следует найти.

С учётом симметричности коэффициентов, достаточно изучить только один из них, тогда поведение другого коэффициента также будет известно.

Рассмотрим для определённости коэффициент использования трудовых ресурсов a_0.

Что касается зависимости коэффициента a_0 от другого ресурса, а именно, капитальных затрат K_t при фиксированном значении L_t, то формула (16) показывает, что при $K_t =0$ коэффициент принимает своё максимальное значение. С ростом капитальных затрат и постоянстве трудовых затрат значения коэффициента a_0 начинают убывать по гиперболе и стремятся к нулю при стремлении капитальных затрат в бесконечность.

Аналогично ведёт себя и коэффициент a_1 при фиксированном значении K_t и изменении трудовых затрат L_t от нуля до бесконечности.

Зависимость значений коэффициентов от Q_t ещё более простая – с ростом Q_t значения каждого коэффициента использования ресурсов линейно возрастают.

Для уточнения характера изменения коэффициента a_0 от L_t который представляет собой в соответствии с (16) функцию от нескольких переменных, найдём частную производную коэффициента использования трудовых ресурсов по труду. Она будет равна:

$$\frac{\partial a_0}{\partial L_t} = \frac{Q_t\left(K_t^2 + L_t^2\right) - 2Q_t L_t^2}{K_t^4 + 2K_t^2 L_t^2 + L_t^4}. \quad (18)$$

Для нахождения экстремума функции приравняем к нулю эту производную. Получим:

$$Q_t(K_t^2 + L_t^2) - 2Q_t L_t^2 = 0. \quad (19)$$

Откуда легко найти условие, при котором коэффициент a_0 принимает максимальное значение, а именно:

$$L_t^2 = K_t^2. \quad (20)$$

С учётом неотрицательности переменных, получаем, что и коэффициент a_0, и коэффициент a_1 приобретают свои максимальные значения только в том случае, когда относительное значение затрат труда равно относительному значению затрат капитала:

$$L_t = K_t. \quad (21)$$

Подставив это значение в формулы для вычисления коэффициентов (16), легко найти эти максимальные значения коэффициентов:

$$a_0 = a_1 = \frac{Q_t}{2L_t} = \frac{Q_t}{2K_t}. \quad (22)$$

Итак, можно сделать вывод о том, как меняются значения коэффициентов использования ресурсов.

Коэффициент a_0 при фиксированном положительном значении ресурса K_t равен нулю при равенстве нулю ресурса L_t. Коэффициент a_1 при этом больше нуля. При возрастании трудовых затрат L_t от нуля до значения, определяемого равенством (21) коэффициент a_0 возрастает. При значениях ресурса L_t, равного ресурсу K_t, коэффициент a_0 достигает своего максимального значения, равного (22). При этом его значения равны коэффициенту a_1.

С дальнейшим ростом значений трудовых ресурсов коэффициент a_o уменьшает свои значения и стремится к нулю при стремлении значений L_t к бесконечности. На этом участке коэффициент a_o в силу (17) всегда больше коэффициента a_1, который также уменьшается с ростом L_t .

Таким же образом ведёт себя и другой коэффициент – коэффициент использования капитальных ресурсов в зависимости от капитальных ресурсов K_t.

На рис. 1 изображен график изменения коэффициента a_o в зависимости от изменения значений трудовых ресурсов при фиксированном положительном K_t.

Любая производственная единица, будь то отдельно взятое предприятие или хозяйство всей страны, развивается во времени. При этом меняются технологии производства, вызывая изменения производительности труда и производительности оборудования. Эти изменения отражаются в производственной функции изменением коэффициентов использования ресурсов.

С этих позиций коэффициент a_o можно рассмотреть как некоторую зависимость от времени: $a_o=f_o(t)$, а коэффициент a_1 как другую зависимость от времени: $a_1=f_1(t)$. Но так как указанные коэффициенты являются частями одного комплексного числа, то эти зависимости следует рассмотреть в комплексе. То есть, рассматривая коэффициенты в динамике, следует найти зависимость

$$(a_{ot} + ia_{1t}) = f(t)\,. \quad (23)$$

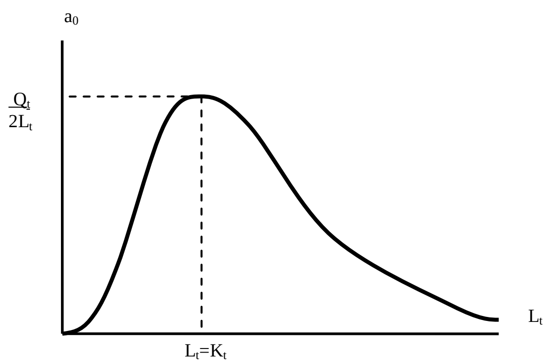

Рис. 1. Изменение коэффициента a_0 в зависимости от изменения значений трудовых ресурсов

Рассмотрим эту задачу с помощью графического метода, поскольку данное комплексное число может быть нанесено на плоскость (a_0; a_1), где коэффициенты использования ресурсов выступают в качестве осей координат данной плоскости. Динамика изменения комплексного числа во времени может иметь самый различный вид, но если эта динамика может быть описана в виде зависимости

$$a_{ot} = F(a_{1t}), \quad (24)$$

то она представляет особый интерес.

С учётом того, что в теории производственных функций за точку отсчёта принимаются начальные значения динамических рядов, их относительные значения будут равны единице, а это означает, что в начальной точке коэффициенты a_0 и a_1 будут равны друг другу и равны 0,5 (как это следует из (16)).

В теории производственных функций принята именно эта точка отсчёта, поэтому в дальнейшем будем считать, что все исходные переменные приведены к начальным значениям. Иные случаи будут оговорены отдельно.

Так как значения коэффициентов использования ресурсов лежат в пределах от нуля до бесконечности, возможны четыре варианта динамики коэффициентов из начальной точки (0,5; 0,5), а именно:

1) когда оба коэффициента возрастают и их значения превышают начальную величину в 0,5;

2) когда оба коэффициента уменьшаются и становятся меньше 0,5;

3) когда значения коэффициента a_0 возрастают и превышают 0,5, а значения коэффициента a_1 уменьшаются;

4) когда значения коэффициента a_0 уменьшаются, а значения коэффициента a_1 возрастают и остаются больше 0,5.

Эти четыре варианта динамики представлены на графике (рис. 2). Впрочем, возможны и более сложные варианты динамики, представляющие собой комбинацию четырёх исходных.

На рис. 2 изображена плоскость возможных значений изменения коэффициентов использования ресурсов a_0 и a_1. На плоскость нанесены две перпендикулярные прямые, показанные пунктирными линиями, проходящие через отрезки на осях, равные 0,5. Пересечением этих двух прямых является точка, в которой каждый из коэффициентов равен 0,5. Именно эта точка и является начальной. Эти две прямые также делят плоскость значений коэффициентов на четыре области, которые на рисунке пронумерованы так, чтобы каждая область соответствовала указанным выше четырём вариантам динамики коэффициентов.

С учётом того, что каждый из коэффициентов представляет собой сложную зависимость от трёх факторов – объёма Q_t, трудовых L_t и капитальных затрат K_t, точно определить условия для каждого типа динамики достаточно сложно, и это должно быть предметом особого научного исследования. Тем не менее, можно, исходя из (16) и рисунка 1, наметить некие общие условия, характерные для каждого из четырёх вариантов динамики.

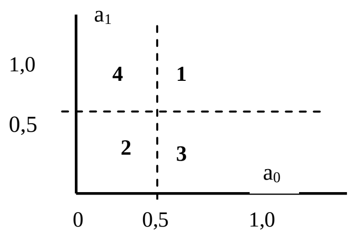

Рис. 2. Варианты динамики коэффициентов

Дадим интерпретацию каждого из типов совместной динамики коэффициентов использования ресурсов (табл.3).

Первый вариант предусматривает превышение значений двух коэффициентов начальной точки в 0,5. Это возможно в том случае, когда трудовые и капитальные ресурсы сбалансированы, а отдача их увеличивается. Такой вариант развития событий характерен для сбалансированной экономики как с устойчивым ростом производительности труда, так и фондоотдачи.

Второй вариант характерен снижением величин обоих коэффициентов использования ресурсов относительно их начальной точки в 0,5. Как следует из рис. 1, это возможно в условиях дисбаланса, структурной перестройки производства, когда один из ресурсов используется в большей степени, чем другой, а отдача ресурсов не увеличивается. Эта зона – зона кризисной динамики.

Третья зона предполагает рост коэффициента использования трудовых значений выше начального значения, и снижение величин коэффициента использования капитальных ресурсов. Увеличение значений a_0 по сравнению с a_1 возможно только в ситуации, когда трудовые ресурсы привлекаются в большей степени, чем капитальные. В то же время, рост самого значения коэффициента a_0 свидетельствует о том, что растут и объёмы производства. Следовательно, процесс трудоинтенсивный с повышающейся фондоотдачей.

Таблица 3. Интерпретация вариантов динамики коэффициентов рисунка 2

Номер варианта динамики	Характеристика варианта	Суть происходящих процессов
1	Оба коэффициента возрастают и их значения превышают начальную величину в 0,5	Сбалансированная экономика с устойчивым ростом производительности труда и фондоотдачи
2	Оба коэффициента уменьшаются и становятся меньше 0,5	Дисбаланс, структурная перестройка производства, когда один из ресурсов используется в большей степени, чем другой, а отдача ресурсов не увеличивается. Зона кризисной динамики
3	Значения коэффициента a_0 возрастают и остаются больше 0,5, а значения коэффициента a_1 уменьшаются	Процесс трудоинтенсивный с повышающейся фондоотдачей. Уменьшение производительности труда
4	Значения коэффициента a_0 уменьшаются, а значения коэффициента a_1 возрастают и остаются больше 0,5	Фондоотдача уменьшается, а производительность труда растёт. Капиталоинтенсивный процесс

Четвёртая зона предполагает снижение коэффициента использования трудовых значений относительно начального значения, и повышение величин коэффициента использования капитальных ресурсов. Увеличение значений a_1 по сравнению с a_0 возможно только в ситуации, когда капитальные ресурсы привлекаются в большей степени, чем трудовые. При этом наблюдается и рост производства. Значит, фондоотдача уменьшается, а производительность труда растёт.

Для того чтобы показать применимость предлагаемого нами метода построения производственной функции комплексного аргумента воспользуемся конкретными экономическими данными по произведённому национальному доходу, по величине основных производственных фондов и по среднегодовой численности промышленно-производственного персонала бывшего СССР с 1972 по 1989 год [3, с.74-75]. Эти данные, приведённые к относительным величинам, а также рассчитанные в соответствии с (16) значения коэффициентов использования ресурсов приведены в табл. 4.

Таблица 4. Расчёт коэффициентов использования ресурсов

Год	Национальный доход	Основные производственные фонды	Среднегодовая численность промышленно-производственного персонала	Коэффициенты использования ресурсов	
				a_0	a_1
1972	1,000	1,000	1,000	0,500	0,500
1973	1,079	1,091	1,013	0,493	0,531
1974	1,130	1,193	1,029	0,468	0,543
1975	1,159	1,292	1,049	0,439	0,541
1976	1,232	1,393	1,073	0,428	0,555
1977	1,295	1,496	1,091	0,412	0,565
1978	1,361	1,612	1,109	0,394	0,573
1979	1,399	1,724	1,124	0,371	0,569
1980	1,476	1,846	1,136	0,357	0,580
1981	1,554	1,973	1,147	0,342	0,589
1982	1,671	2,107	1,159	0,335	0,609
1983	1,750	2,247	1,165	0,318	0,614
1984	1,819	2,390	1,169	0,300	0,614
1985	1,847	2,518	1,174	0,281	0,603
1986	1,875	2,649	1,178	0,263	0,591
1987	1,914	2,778	1,175	0,247	0,584
1988	2,014	2,904	1,151	0,238	0,599
1989	2,097	3,024	1,122	0,226	0,610

Из анализа полученных значений коэффициентов использования ресурсов (последние два столбца таблицы) легко убедиться, что коэффициент a_0 в среднем уменьшается, а коэффициент a_1 – увеличивается, что соответствует четвёртому варианту динамики из табл. 3 и рис. 2. Этот случай свидетельствует о том, что рост производства характеризуется уменьшением фондоотдачи и повышением производительности труда. В целом процесс капиталоинтенсивный.

Продемонстрируем теперь возможность использования наших предложений на примере экономики России в последние годы. В табл. 5 приведены исходные статистические данные по экономике России с 1998 по 2004 год. В качестве результата производственной функции Q_t нами используется валовый внутренний продукт, в качестве трудовых затрат L_t – численность занятого в экономике населения, в качестве капитала K_t - инвестиции в основной капитал. В двух последних столбцах этой же таблицы приведены результаты расчёта двух коэффициентов использования ресурсов, которые выполнены в соответствии с формулами (16).

Таблица 5. Исходные данные для построения производственных функций и расчётные значения коэффициентов использования ресурсов[1]

Год	Валовой внутренний продукт, Q_t		Инвестиции в основной капитал, K_t		Численность занятого в экономике населения, L_t		Коэффициенты использования ресурсов	
	Абсолютные значения, млрд руб.	Относительные значения	Абсолютные значения, млрд руб.	Относительные значения	Абсолютные значения, млн чел.	Относительные значения	a_0	a_1
1998	2630	1,000	407,1	1,000	63,6	1,000	0,500	0,500
1999	4823	1,834	670,4	1,651	62,7	0,986	0,491	0,820
2000	7306	2,778	1165,2	2,860	64,2	1,009	0,304	0,863
2001	8944	3,401	1504,7	3,702	64,5	1,014	0,235	0,856
2002	10834	4,119	1762,4	4,331	66,2	1,041	0,216	0,900
2003	13285	5,051	2186,2	5,371	65,8	1,035	0,175	0,907

Коэффициент использования трудовых ресурсов a_0 за рассматриваемый период уменьшается, причём значительно, а коэффициент использования капитальных ресурсов a_1 увеличивается. Это означает в соответствии с выводами, сделанными в нашей статье ранее (табл. 3 и рис. 2), что рост производства в России с 1998 года также можно охарактеризовать как капиталоинтенсивный. При этом фондоотдача уменьшается, но растёт производительность труда.

Аналогичный, но менее резкий характер был и у динамики экономики бывшего СССР с 1972 по 1989 годы. На рис.3 показана динамика изменений коэффициентов использования ресурсов для экономики России за эти годы.

---

[1] Краткосрочные экономические показатели Российской Федерации/Госкомстат России. - Октябрь 2004 (http://www.cir.ru).

Ситуация в рассматриваемые годы характеризовалась тем, что ОПФ многих приватизированных предприятий России использовались до 1998 года не на полную мощность. Кризис 1998 года, приведший к снижению курса рубля, сделал продукцию отечественной промышленности конкурентоспособной по цене. Небольшие инвестиции в модернизацию ОПФ привели к возможности роста производства без дополнительного привлечения занятых в промышленности. Именно поэтому рост инвестиций приводит к росту объёмов производства.

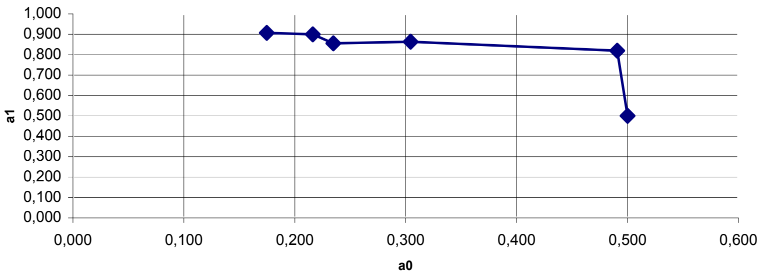

Рисунок 3. Коэффициенты использования ресурсов для экономики России с 1998 г. по2003 г.

Приведённый материал позволяет использовать предлагаемую функцию для целей анализа сути происходящих производственных процессов. Вполне возможно, что, применяя данную функцию на статистических данных более длинных рядов, удастся использовать её и для целей анализа производственных циклов. Однако проверка данной гипотезы не входит в задачу данной работы.

В теории производственных функций и экономическом анализе активно используются графические интерпретации производственной функции Кобба-Дугласа, а именно – линии под названием "изокванты" и "изоклинали". Можно ли провести аналоги с этими линиями в функции, предложенной нами?

Изокванты, как известно, показывают, как может меняться структура использования ресурсов – труда и основного капитала, - если объём производства сохраняется неизменным Q_t=Q=const. По сути, изокванты характеризуют изменение издержек производства при различных сочетаниях труда и основного капитала, если объёмы производства остаются неизменными. Графически изоклиналь представляет собой линию на плоскости ресурсов, все точки лежащие на которой характеризуют один и тот же объём производства. Чисто математически изокванты представляют собой зависимость затрат труда от затрат капитала при постоянстве объёмов производства. Найдём эту зависимость для производственной функции комплексного аргумента. Как следует из (12), уравнение изокванты будет представлено в виде:

$$L_t = \frac{Q}{a_0 - ia_1} - iK_t \quad (25)$$

Или, после небольших преобразований:

$$L_t = \frac{a_0 Q}{a_0^2 + a_1^2} + i\,\frac{a_1 Q \ -(a_0^2 + a_1^2)K_t}{a_0^2 + a_1^2}\,. \quad (26)$$

Поскольку в левой части равенства мнимая часть равна нулю, то и в правой части равенства мнимая составляющая должна быть равна нулю. С учётом того, что $\frac{L_t}{K_t} = \frac{a_0}{a_1}$, выразив из него a_0 и подставив полученное выражение в вещественную часть равенства (26), получим искомое уравнение изокванты:

$$L_t = \sqrt{\frac{K_t}{a_1}\left(Q - a_1 K_t\right)} \quad (27)$$

Легко убедиться в том, что уравнения изоквант носят более сложный характер, чем они получаются для функции Кобба-Дугласа. При Kt=0 и L_t=0. При K_t= Q/a_1 значение вновь становится равным нулю. Очевидно, что между этими двумя точками есть точка максимума. Определить эту точку достаточно просто – следует взять первую производную функции по капитальным ресурсам (поскольку объёмы производства остаются величиной постоянной) и приравнять её нулю. В результате получим точку, в которой изокванта достигает своего максимума:

$$K_t = \frac{Q_t}{2a_1 - 1} \quad (28)$$

С ростом значений Q будет получено семейство изоквант, каждая из которых выходит из нулевой точки, постепенно возрастая до максимальной точки, определяемой условием (28), а затем уменьшаясь до нулевых значений трудовых ресурсов в точке $K_t = Q/a_1$. Более тщательный анализ свойств изоквант не входит в нашу задачу.

Теперь выведем уравнение изоклинали для производственной функции комплексного аргумента. Изоклинали, как известно, строятся для ситуации, когда при выбранной технологии производства неизменной остаётся себестоимость произведённой продукции, а её объём увеличивается с увеличением затрат ресурсов. Графически изоклиналь представляет собой линию на плоскости ресурсов, все точки на которой характеризуют такие объёмы производства (результаты) которые достигаются при одном и том же способе производстве, одной и той же пропорции между ресурсами, но разных величинах капитальных и трудовых ресурсов. Математическим условием для построения изоклинали выступает условие сохранения одной и той же пропорции между трудовыми и капитальными затратами, то есть:

$$\frac{L_t}{K_t} = \frac{a_0}{a_1} = const. \qquad (29)$$

Подставляя это значение в (10), получим для изоклиналей:

$$Q_t = L_t(1 + i\frac{a_1}{a_0})(a_0 - ia_1) \cdot \qquad (30)$$

Раскрывая скобки и группируя вещественную и мнимую части комплексного числа, получим:

$$Q_t = L_t(\frac{a_1^2}{a_0} + a_0) + i(a_1 L_t - a_1 L_t),$$

откуда со всей очевидностью следует искомое уравнение изоклинали:

$$Q_t = (\frac{a_1^2}{a_0} + a_0)L_t. \qquad (31)$$

Это уравнение представляет собой прямую линию, выходящую из нулевой точки на плоскости ресурсов, тангенс угла наклона которой равен сомножителю перед ресурсом L_t.

Поскольку график изоквант и изоклиналей обычно располагается на плоскости ресурсов, то с учётом (27), по вертикальной оси откладываются значения трудовых ресурсов, а по горизонтальной – значения капитальных ресурсов. Поэтому уравнение изоклинали следует представить как зависимость величины трудовых ресурсов от капитальных ресурсов при росте объёма производства, но сохранении пропорции (29). В этом случае уравнение изоклинали примет элементарный вид:

$$L_t = \frac{a_0}{a_1} K_t . \quad (32)$$

Экономическая суть изоквант и изоклиналей, свойства и вид этих функций в данной работе на рассматривается из-за ограниченного объёма работы.

2. Методы оценки параметров производственных функций комплексного аргумента и прогнозирование производственных систем

В первой части нашей работы показано, как находить коэффициенты производственной функции комплексного аргумента по имеющимся статистическим данным, и как можно интерпретировать их значения. Часто перед экономистами стоит задача иного порядка – по имеющимся статистическим данным оценить параметры выбранной модели на всей имеющейся выборке. Эта задача применительно к производственной функции комплексного аргумента может быть решена двумя способами.

Первый способ заключается в нахождении коэффициентов a_0 и a_1 с помощью формул (8) и (9) или для более простого случая производственной функции с помощью формул(16) по каждому из наблюдений, а затем по данным рядам значений коэффициентов построении трендов их изменения во времени.

Так, например, по данным таблицы 4, где приведены значения производства для бывшего СССР и соответствующие расчётные значения коэффициентов, можно с помощью метода наименьших квадратов (МНК) построить трендовые модели изменения коэффициентов.

Для коэффициента использования трудовых ресурсов тренд имеет вид: $\hat{a}_{ot} = 0,5121 - 0,0164t$, где t=T-1971, T- текущий год от Р.Х., а для коэффициента использования капитальных ресурсов тренд имеет вид: $\hat{a}_{1t} = 0,5263 + 0,0052t$. Эти значения можно использовать и в прогнозировании, подставляя их в функцию (10):

$$\hat{Q}_t = (L_t + iK_t)\left(\left(0,5121 - 0,0164t\right) - i(0,5263 + 0,0052t)\right),$$

и используя в многовариантных прогнозах, изменяя значения капитальных и трудовых ресурсов по годам.

Точно также и по данным таблицы 5 для современной России были найдены тренды коэффициентов использования ресурсов:

$\hat{a}_0 = 1,0746t^{-0,9808}$; $\hat{a}_1 = 6,7528 - 0,1278t$.

Здесь t=T-1997, T – текущий год.

Для целей многовариантных прогнозных расчётов экономики России можно, с учётом полученных значений, использовать модель производственной функции в виде комплексного числа такого вида:

$$\hat{Q}_t = (L_t + iK_t)(1,0746t^{-0,9808} - i(6,7528 - 0,1278t)).$$

Этот первый способ оценивания параметров производственной функции комплексного аргумента может быть модифицирован различными способами. Например, можно рассматривать ряды значений коэффициентов данной функции как динамические ряды и обрабатывать их с помощью модели Брауна, которую, как известно, используют для краткосрочного прогнозирования. То есть можно осуществлять краткосрочный прогноз изменения параметров производственной функции и использовать саму модель для краткосрочного прогнозирования производственных результатов. Ограниченные рамки данной работы не позволяют осуществить более детальный анализ этого подхода.

Отмечая высокую продуктивность первого подхода – анализа динамики изменения коэффициентов модели и моделирование этой динамики, следует указать и на то, что возможен и другой подход.

Именно он, кстати, и используется в экономике при прогнозировании производственных процессов с помощью производственной функции Кобба-Дугласа [4]. По статистическим данным с помощью метода наименьших квадратов находят значения постоянных а и α функции Кобба-Дугласа, после чего полученные расчётные значения можно использовать и для анализа сути происходящих процессов, и для их прогнозирования.

МНК чаще всего используют следующим образом. Функцию Кобба-Дугласа линеаризуют с помощью логарифмирования по какому-либо основанию, а уже параметры такой линеаризированной функции оценивают с помощью МНК. После этого определяют уже и параметры исходной функции Кобба-Дугласа. Легко показать, что эти параметры являются смещёнными, а значит, и точность как аппроксимации, так и интерполяции с помощью такой функции окажется очень невысокой [3]. Вот, например, к чему привела попытка построения функции Кобба-Дугласа на данных таблицы 5 с помощью метода наименьших квадратов:

$$Q_t = 0.3303 L_t^{-0.954} K_t^{1.954} .$$

Отрицательность одного из коэффициентов противоречит условиям существования самой функции Кобба-Дугласа, что говорит о том, что на данной базе строить функцию Кобба-Дугласа нельзя. Следовательно, использовать аналитические свойства функции в данной ситуации не удаётся.

Для повышения как аппроксимирующих, так и интерполирующих свойств функции Кобба-Дугласа следует использовать нелинейный МНК, что под силу далеко не всем экономистам.

Рассмотрим возможность применения МНК таким именно образом для предлагаемой нами производственной функции комплексного аргумента (7). Непосредственное применение МНК к модели (7) очень затруднительно. Действительно, критерий МНК в данном случае будет сформулирован так. Найти коэффициенты модели (7) так, чтобы минимизировать сумму квадратов отклонений:

$$F(a_0;a_1) = \sum_t ((Q_t + iC_t) - (L_t + iK_t)(a_0 - ia_0))^2 . \quad (33)$$

Сами отклонения будут представлять собой комплексные числа, поэтому минимизировать необходимо функцию комплексного переменного:

$$F(a_0;a_1) = \sum_t (\varepsilon_t + i\phi_t)^2 \to \min . \quad (34)$$

Эта задача имеет соответствующее решение, но для этого необходимо использовать аппарат теории функции комплексного переменного [1], что выходит за рамки поставленной в настоящей работе задачи.

Проще использовать МНК для случая элементарной производственной функции комплексного аргумента (10). Как следует из результатов раскрытия скобок функции и её группировки на вещественную и мнимую части (12), решение заключается в минимизации отклонений функции (13) от фактических значений при соблюдении условия (14). Эта задача достаточно просто формулируется, поскольку именно при соблюдении этих условий определены параметры использования ресурсов (16).

Из первой формулы, когда вычисляется коэффициент использования трудовых ресурсов, легко получается следующий вид производственной функции:

$$\hat{Q}_t = a_0 \frac{L_t^2 + K_t^2}{L_t}. \quad (35)$$

Тогда задача нахождения оценки параметра a_0 с помощью МНК сводится к нахождению условия минимизации суммы квадратов отклонений:

$$\sum_t \left(Q_t - a_0 \frac{L_t^2 + K_t^2}{L_t} \right)^2. \quad (36)$$

Эта задача имеет элементарное решение в виде:

$$\hat{a}_0 = \frac{\sum_t Q_t L_t \left(L_t^2 + K_t^2 \right)}{\sum_t \left(L_t^2 + K_t^2 \right)^2}, \quad (37)$$

Аналогично через коэффициент использования капитальных ресурсов выводится другая форма производственной функции, а именно:

$$\hat{Q}_t = a_1 \frac{L_t^2 + K_t^2}{K_t}. \quad (38)$$

Теперь легко найти формулу для оценки МНК коэффициента использования капитальных ресурсов:

$$\hat{a}_1 = \frac{\sum_t Q_t K_t \left(L_t^2 + K_t^2 \right)}{\sum_t \left(L_t^2 + K_t^2 \right)^2}, \quad (39)$$

Полученные коэффициенты можно использовать для самых разных целей, в том числе и для прогнозирования.

Так, по исходным статистическим данным таблицы 5 для экономики современной России были найдены оценки коэффициентов производственной функции (10) с помощью МНК (37) и (38). Она имеет вид:

$$\hat{Q}_t = (L_t + iK_t)(0,631 - i0,106). \quad (40)$$

Полученная функция может использоваться как для многовариантных прогнозов, так и для некоторых аналитических выводов относительно происходивших за 1998 – 2003 гг. в России процессов.

Литература

1. Морозова В.Д. Теория функций комплексного переменного: Учеб./Под ред.В.С.Зарубина, А.П.Крищенко.- 2-е изд., стер. - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2002.- 520 с.
2. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники: Электрические цепи. Учеб. для студентов электротехнических, энергетических и приборостроительных специальностей вузов. – М.: Высш. шк., 1978. – 528 с.
3. Светуньков С.Г. Эконометрические методы прогнозирования спроса. – М.: Изд-во МГУ, 1993. – 127 с.
4. Плакунов М.К., Раяцкас Р.Л. Производственные функции в экономическом анализе. – Вильнюс: Минтис, 1984. – 308 с.

Svetunkov S.G., Svetunkov I.S. Production function with a complex argument properties research: Preprint. – Spb.: SPbSUEF publishing house, 2005.

In this work we suggest a production function with a complex argument. The pair of numbers (1), where imaginary unit i satisfy conditions (2), stands as a complex argument. We include labor costs L and capital costs K (investments or basic production assets) as inputs and quantity of output Q_t and costs of production C_t as a production result in a production function. We suggest connecting them by representing them as a couple of complex numbers (3) and (4). In general production function of complex variable is suggested by us in an additive function (6). Two simplest models (7) and (10) are overviewed in a publication. Coefficients of these functions can be easily found by using formulas (8), (9) or (16). Calculations of these coefficients are cited in tables 2 and 4 – calculations for the function (7) are in table 2, for the function (10) – are table 4.

Coefficients (16) have clear economic interpretation. That's why coefficient a0 is called coefficient of labor resources usage and coefficient a1 is a coefficient of capital resources usage. The character of coefficient of labor resources usage changes is figured on a picture 1. It is obvious that the coefficient of capital resources usage will have the same character of changes.

Researches have shown that when calculating the function from the start point of observations when t=1 value of coefficients are equal to 0,5. For other points of observations in general they can be situated in zones marked on a picture 2. Zone marked with a number 1 on that picture characterizes balanced economics with a stable growth of labor productivity and yield of capital investments. Zone marked with a number 2 is typical for misbalanced, crisis processes, for a structural production reconstruction when one resource is used to a greater extent than another and resources return doesn't increase. Zone number 3 is characterized with a labor intensive process with increasing yield of capital investments and labor productivity decreasing at the same time. The last zone 4 characterizes the situation when yield of capital investments decreases and labor productivity increases. This process is capital intensive.

The change of production function (10) coefficients for the Russian economy from 1998 till 2003 is shown on a picture 3. This dynamics is capital intensive, yield of capital investments increases and labor productivity decreases.

We deduced isoquants equations (27) which reaches its maximum in a point (28) and isoclinals equations (31) or in an easier variant (32) from the production function equation.

Resource usage coefficients estimation with a least-squares method of a function (10) are deduced using (34) – (36) and represented as equations (37) and (39). Thus the production function coefficients are found for the Russian economics from 1998 till 2003 years. Basic data can be found in a table (5). The general view of the production function with a complex argument model for this time interval is represented with a formula (40).