Гранево симметричные пространства введены и исследованы в [6] и [7] как геометрический модель квановой механики. Они обеспечивают соответствующую структуру, где изучается проблема харектеризации единичного шара предсопряженного пространство (см.[5]), описывая важные свойства выпуклого множества в геометрических и физических терминах. В этой статье мы ограничемся атомическими пространствами (Определение 2.5). В случае ранга-1 с условием (*симметричность переходных вероятностей,* Определение 2.8) как мы покажем в параграфе 2 (Следствие 2.11), приведет к Гильбертовом пространству. Следующий важный случай, когда ранга 2, мы детально рассмотрим в параграфах 3 и 4. Этот случай имел место уже как модель для пространство состоянии спин-1/2 часитиц. Более общо, этот модель может иметь место для произвольной физической системе в котором всякие результаты измерении не перевосходить двух различных результатов.

Стандартный алгебрический модель в этом контексте являетя (действительный или комплексный) спин фактор. Поскольку это Йорданова алгебра (JB-алгебра в действительном случае и JB\*-алгебра в комплексном случае), его пространство состояния широко изучена. Меньше знаем о структуре единичного шара сопряженного пространства. В действительном случае как мы покажем ниже (см.Предложение 1.8), а именно пересечение двух цилиндров на базе действительного Гильбертового шара. Эти два шары имеют либо одинаковые размерности или их размерности отличается на 1. В комплексном случае геометрия спин фактора имеет более богатую структуру, анализ который осуществляется в этой статье.

Основной результат в этой статье это геометрическая характеризация еденичного шара предсопряженного пространства комплексного спин фактора. Это одно и тоже как единичный шар сопряженного пространства, поскольку спин фактор это рефлексивный Банахово пространства. Мы покажем (Теорема 4.16), что любое гранево симметричное пространство типа (Определение 3.10) удовлетворяющие физически значимые геометрические аксиомы (STP) и (FE) (Определение 3.3) является линейно изометричными предсопряженному пространству комплексного спин фактора. Этот результат является важным шагом в проекте, основной целью которой является показать, что сопряженная пространства всякого гарнево симметричного пространства, удовлетворяющий некоторым естественным геометрическим аксиомам, снабжена структурой JB\*-тройки. Обратное, известно что предсопряженное пространство каждой JBW\*-тройки является нейтральным сильно гранево симметричным пространством [8, Теорема 3.1], который удовлетворяет (STP) [5, Лемма 2.2] и (FE) [4, Следствие 4.5].

Структура этой статьи состоит в следующем. В параграфе 1 мы описываем граневую структуру единичного шара сопряженного пространства конкретного спин фактора, используя на основу так называемый спиновой решетки в [3] и [10]. Граневоя структура раскрываемый из исследования гранево симметричных пространств типа I2 рассматривается в параграфах 3 и 4. Авторы хотелы бы поблагодарит Профессора Итамара Питоуский из Еврейского университета за обсуждения о связи этих грановых структур с моделем квантовой механики. Это обсуждения стало инструментом в формулировке материалов в первом параграфе. Хотя результаты в параграфе 1 представляет здесь в основном как иллюстрация конкретных абстракт результатов из параграфах 3 и 4, тем не менее, некоторые эти результаты используется в упрощении доказательства основного нашего результата. Более того, (граневое) разложение введенное здесь (Предложение 1.11) можем представит новым способом для работы с спин фактором.

В параграфе 2 дается определения, напоминается некоторые свойства гранево симметричных пространств и доказывается некоторые вспомогательные результаты из общей теории гранево симметричных пространств. Определяется и некоторые свойства атомического пространства и вводится основные геометрические аксиомы. Будет доказано, что атомическое гранево симметричное пространство удовлетворяющий эти аксиомы допускает симметричную полулинейную форму, который приводит к структуре Гильбертового пространства в случае ранга-1.

В 3-параграфе мы покажем, что ранга-2 грань в атомическом нейтральном сильно гранево симметричном пространстве удовлетворяющий условия (FE) и (STP) является афинно изометрически изоморфным единичному шару действительного гильбертового пространства, более того единичный шар действительной линейной оболочки этой грани является цилиндром основания которой является Гильбертовой шар. Это обеспечивает фундаментальный вычислительный способ для основного результата в параграфе 4.

В параграфе 4 мы исследуем комплексную оболочку граня ранга-2, которое по определению плотно в гранево симметричном пространстве типа I2. Начиная с произвольного ортонормального базиса в действительном Гильбертовом пространстве, единичный шар которого является афинно изоморфным данной грани ранга-2, мы построим полное подмножество (называется сопряженное спиновое решеткой), которое напоминает «сопряженное» спиновой решетки в конкретном спин факторе. В этой конструкции воображаемая единица получается из естественных геометрических соображении. После уменьшение до конечной размерности, будеть доказано по индукцции утверждение о том, что линейное продолжение естественного отабражение между двумя сопряженными спиновыми решетками (абстрактый и конкретный) является изометрическим и поэтому продолжается на изометрию сопряженного спин фактора и по норме замкнуто в комплексной оболочке грани ранга-2. По индукции продолжаем от двух размерностей последовательно, следовательно необходимо подробно проанализировать случаи в котором Гильбертово пространства пораждаются из ранга-2 и ранга-3. Это приводит к характеризации спин факторов размерности 3 и 4, именно, JBW\*-тройки симметричных комплексных 2 на 2 матриц S2(C) и 2 на 2 комплексных матриц M2(C).

В этой статье будем использовать следующие символы: замкнутый единичный шар нормированного пространства X обозначим через X1, R обозночает множество всех действительных чисел, C обозначает множество всех комплексных чисел и T обозначает единичный окружность в C.

Двойственность между нормированными пространствами и его сопряженного будем обозначать как или для . Действительную и мнимую часть комплексного числа обазначим как и .

Для выпуклого множество в нормированном пространстве через обозначаем множество экстремальных точек . Элемент называется по норме выставленной в если для соответственного гиперплоскости . Множество по норме выставленных точек будем обозначать через . Более обще, называется по норме выставленной гранью если . В общем случае , выполняется равенства, например в случае когда является единичным шаром предсопряженного пространства [5, Предложение 4]. Равенство для нормированного пространства является физически значимым предположением и является аналогом одного из свойств чистого состояние Альфсена и Шульца [1] (см. Определение 2.8 внизу).

1. ***Граневая структура единичного шара сопряженного пространства спин фактора.***

Спин фактор, или «спиниоры», встречается естественным образом в различных областях математики и физики. Существуют и используются несколько (эквивалентных) определении. В этой статье спин фактор определяется на основе алгебраических свойств естественного базиса так называемый спиновой решетки, который как покажем в [3] и [10] порождает спин фактора линейно и топологически. Известно (см. для примера [9]), что комплексный спин фактор может быть представлен как по норме замкнутое подпространство ограниченных операторов на комплексном Гильбертовом пространстве, который является замкнутым над операцией и который порождает Клиффорд алгебру () будучи . Спин фактор имеет структуру комплексного Банахового Йорданово () и таким образом является примером (см. [5]). Это является комплексифика́цией действительного спин фактора, который является .

В начале мы напомним недавние описание (см. [3]) алгебраическую структуру спин фактора или так называемого Картон фактора типа 4, которого мы будем называть конкретным спин фактором. Хотя, конкретный спин фактор может быть реализован как по норме замкнутое подпространство , наш подход будет через спиновую решетку. Этот подход упрощает наше вычисления позволяет элементарно описать граневую структуру единичного шара сопряженного пространства.

Определение 1.1. Банаховое пространство над называется если оно снабжена троичным произведением отображающий на , такая что

1. линейно относительно и , сопряжено линейно относительно ;
2. симметрично относительно крайным переменным, т.е. ;
3. для всякого оператор из на определенный как , , является эрмитовым ( т.е., является изометрией для всех действительных ) с неотрицательным спектором;
4. тройочное производение удовлетворяет следующое тождество, называемый “главным тождеством”:

(1)

1. имеет место следующее равенство:

. (2)

Не нулевой элемент из называется ***трипотентом*** если **.** Элементы и называются взаимно ортогональными, если для всякого . Мы называем ***минимальным*** ***трипотентом*** если его невозможно представит как сумму двух взаимно ортогональных трипотентов. Например, вышеупомянутом представлении спин фактора как ограниченные операторы Гилберьтово пространство , тройочное произведение определяется как для , следовательно, трипотентом является частичная изометрия, ортогональности трипотентов соответствует ортогональность операторов. Мы не будем использовать это представление нигде в этой статье.

Теперь мы построим троечное произведение и норму в конкретном спин факторе с элементарном путем используя свойства спиновой решетки. Предположение, которое мы делаем в следующем определении справедливо для спиновой решетки в спин факторе.

Определение 1.2. Пусть множество индексов произвольной мошности. ***Базисом*** или ***спиновой решеткой*** является совокупность линейно независимых элементов или . Определим троичное произведение для элементов базиса следующим образом:

1. **для всех (базис состоит из трипотентов);**
2. Для различных не нулевых и вытекает, что

, ,

,

**(** будет коллинеарным и , будет коллинеарным ) и

,

(четверка будет вершинами четырехугольника);

1. случай, когда существует, для каждого

, ,

**(** определяети **)** и

, ;

1. для всех ;
2. Все остальные умножения , где из базиса, равно нулю; в частности, для

( ортогональны).

Из этих свойств вытекает, что множества всех скалярных чисел элементов базиса является замкнутым над троичным произведением . Следовательно, троичное произведение может расширятся в действительных и комплексных оболочках элементов базиса, линейным относительно по крайним переменным и (в комплексном случае) сопряжено линейным относительно по среднему переменному.

Определим на внутреннее произведение

, **(3)**

где и два элемента **.**

***Определение 1.3***. Совокупность с нормой **,** определенным внутренним произведением (3) называется (***конкретным*** ) ***спин фактором*** и обозначается через **.**

Если конечно и состоит из элементов, то размерность равно или **.** В ином случае является бесконечномерным и суммы в (3) сходятся. Норма спин фактора которая превратит его не является нормой Гильбертово пространства используемой в определении, поскольку это норма не удовлетворяет (2). Для того что бы определит правильную норму, которая будет эквивалентно Гильбертовой норме мы вводим следующие понятия.

Определим сопряженность элементов базиса как , , и расширим это в линейной оболочке в сопряжено линейным путем.

Связь между троичным произведением, внутренним произведением и сопряжением дается в следующем равенстве:

. (4)

Для каждого элемента из определим понятие ***детерминант*** следующем образом:

*.* (5)

Предложение 1.4 [3, Предложение 3.3, Лемма 3.4]. Пусть спин фактор.

1. Если , тогда является скалярным произведением минимального трипотента тогда и только тогда, когда , в этом случае из (2) и (4) норма должена определятся как для каждого .
2. Элементы и из с являются скалярными произведениями ортогональных трипотентов тогда и только тогда, когда существует такая, что .

Предложение 1.5 [3, Предложение 3.6]. Для каждого элемента спин фактора , для которого существует множество не отрицательных чисел , определяемый как

*, .* (6)

Также, если , то два взаимно ортогональные минимальные трипотенты определяет единственную такую, что

. (7)

Пусть . Координаты трипотентов и с учетом спиновой решетки даётся как

*,*

***, (8)***

***,***

и

***,***

***, (9)***

***.***

Следствие 1.6 [3, Следствие 3.7]. Если имеет место разложение (7), то из (2) и [5, Лемма 1.3(а)], должен определятся как . Из (6) вытекает, что это норма является эквивалентной Гильбертовой норме , поэтому является полной и рефлексивной по этой норме.

Следовательно, каждый элемент имеет единственную координату с

, (10)

где сходимость по ( может не существовать).

Пространство теперь будем обозначать через . Банахово пространство (которое является и предсопряженным пространством, поскольку является рефлексивным) может определятся с через линейное (Рисс) отображение , где

**. (11)**

В дальнейшем в этом параграфе, путем использование условных обозначений, иногда мы используем одну и ту же запись и . Таким образом, для , . Если дано по (10), то

,

и внутреннее произведение (3) трансформированный в удовлетворяет равенство

. (12)

Поскольку, спин фактор является , мы имеем [5, Предложение 4 и 8] взаимно-однозначное отображение между трипотентами и по норме выставленными гранями единичного шара предсопряженного пространства , где минимальный трипотент соответствует минимальной грани, т.е., экстремальной точке единичног шара.

**Следствие 1.7. [8, Теорема 3.1; 3, Следствие 3.8].** Пространство является нейтральным сильно гранево симметричным пространством с нормой для каждого с как в разложении (7)

*.* (13)

Теперь мы используем (13) для описания единичного шара предсопряженного пространства действительного спин фактора.

**Предложение 1.8.** Если является спин фактором над , то единичный шар предсопряженного пространства является пересечением двух цилиндров с основанием действительного Гильбертового шара. Размерности этих Гильбертовых пространств различаются не более чем на один. Более точно, является этих двух Гильбертовых пространств.

**Доказательство.** Из (13) и (5) вытекает, что

*.*

Таким образом, если имеет (действительные) координаты и возможно , то из (3) мы имеем, что тогда и только тогда, когда

,

Или эквивалентно, когда и , то

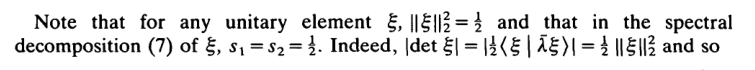
.

Поскольку по **Предложение 1.5** каждый трипотент из является либо минимальным либо суммой двух взаимно ортогональных трипотентов, то каждый не тривиальный по норме выставленный грань единичного шара является либо одной точкой (экстремальной точкой , соответствующему минимальному трипотенту) либо (так называемой) гранью ранга-2. Для любой грани ранга-2

определяемый трипотентом , определяется элемент из называемый ***центром*** как . Заметим, что по нашей конвенции мы могли бы написать , при этом понимая и . Мы обычно будем писать для , поскольку тоже определяет этот грань. Далее в этом параграфе мы покажем, что является афинно изоморфным единичному шару действительного Гильбертового пространства таким образом, что центр соответствует началу координат. Это следует теперь сравнит с **Теоремой 3.8.**

**Определение 1.9.** Пусть предсопряженное пространства конкретного спин фактора. Элемент называется ***унитарным***, если и для некоторой . Для определим фазу следующим образом:

Заметим, что для каждого унитарного элемента имеем и спектральном разложении (7) для получим .

****