

**Interférence de deux faisceaux électromagnétiques incidents
séparée par un angle**

Dans le cadre du cours de photonique
PHYS6803

Shane Gervais

Remis à
Dr Alain Haché

Département de physique et astronomie
Faculté des sciences
Université de moncton
Février 2023

1 Le problème en contexte

Nous allons considérer deux ondes planes qui arrivent sur un écran orienté dans l'axe des xy et l'origine de l'axe des z dans la figure 1, soit \vec{k}_1 et \vec{k}_2 la direction des deux ondes, Γ l'espacement entre les franges et θ est l'angle entre les ondes incidentes. Nous avons les assumptions suivantes:

- Les amplitudes \vec{E}_{01} et \vec{E}_{02} sont orientées selon y
- Les vecteurs d'ondes \vec{k}_1 et \vec{k}_2 sont orientées dans le plan xz
- Les fréquences sont identiques: $\omega_1 = \omega_2 = \omega$

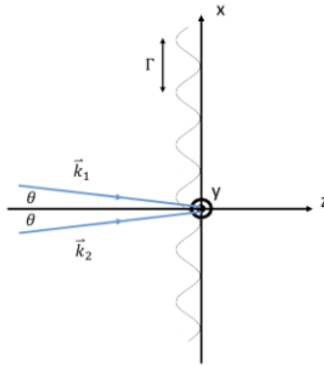


Figure 1: Patron d'interférence

Les questions que nous allons répondre sont les suivantes:

- À partir de l'équation (3.24) des notes de cours, trouver l'expression mathématique pour l'intensité d'interaction $I(x, y, z = 0)$ ainsi que celle pour Γ .
- Trouver la valeur de θ qui donne un espacement de $\Gamma = 1mm$ entre les franges avec un laser HeNe rouge.
- Qu'arrive-t-il au patron d'interférence lorsque la phase relative $\Delta\phi$ entre les ondes change?

2 Solution analytique

2.1 L'expression mathématique pour l'intensité d'interaction $I(x, y, z = 0)$

Commençons par écrire nos équations de chaque onde incidente sur forme complexe.

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (1)$$

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (2)$$

Avec l'assomption des deux faisceaux ont la même grandeur d'amplitude, nous allons trouver l'expression mathématique pour l'intensité du patron d'interférence défini par

$$I = \frac{\langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle}{2\mu_0 c} \quad (3)$$

Trouvons la valeur moyenne du champ électromagnétique des deux faisceaux en partie,

$$\langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle = \vec{E}_1 \vec{E}_1^* + \vec{E}_2 \vec{E}_2^* + \vec{E}_1 \vec{E}_2^* + \vec{E}_2 \vec{E}_1^* \quad (4)$$

Pour l'intensité du premier faisceau,

$$\begin{aligned} \vec{E}_1 \vec{E}_1^* &= (\vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0) e^{i(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega t)} e^{-i(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega t)} \\ &= E_0^2 \end{aligned} \quad (5)$$

Pour l'intensité du deuxième,

$$\begin{aligned} \vec{E}_2 \vec{E}_2^* &= (\vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0) e^{i(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega t)} e^{-i(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega t)} \\ &= E_0^2 \end{aligned} \quad (6)$$

Pour le premier faisceau avec le complexe conjugué du deuxième, vu que l'écran du patron d'interférence est dans le plan xy et les faisceaux propagent dans le plan xz , $k_{1y} = k_{2y} = 0$ et $k_{1z} - k_{2z} = 0$.

$$\begin{aligned}
\vec{E}_1 \vec{E}_2^* &= (\vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0) e^{i(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega t)} e^{-i(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega t)} \\
&= E_0^2 (e^{i\omega t - i\omega t} e^{i(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \vec{k}_2 \cdot \vec{r})}) \\
&= E_0^2 e^{i(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \vec{k}_2 \cdot \vec{r})} \\
&= E_0^2 e^{i(k_{1x}x + k_{1y}y + k_{1z}z - k_{2x}x + k_{2y}y + k_{2z}z)} \\
&= E_0^2 e^{i(x(k_{1x} - k_{2x}) + z(k_{1z} - k_{2z}))} \\
&= E_0^2 e^{i(x(k_{1x} - k_{2x}))}
\end{aligned} \tag{7}$$

Par la figure 2, nous pouvons remplacer $k_{1x} = k \sin(\theta)$ et $k_{2x} = -k \sin(\theta)$, soit k est la magnitude du nombre d'onde pour les deux faisceaux. Écrivons cette dernière équation avec ce changement pour enfin l'écrire sur forme sinusoïdale.

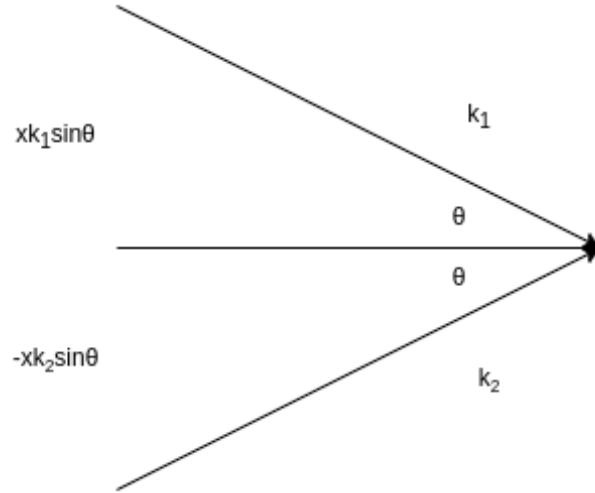


Figure 2: Trigonométrie du problème

$$\begin{aligned}
\vec{E}_1 \vec{E}_2^* &= E_0^2 e^{i(x(k_{1x} - k_{2x}))} \\
&= E_0^2 e^{i(2xk \sin(\theta))} \\
&= E_0^2 (\cos(2xk \sin(\theta)) + i \sin(2xk \sin(\theta)))
\end{aligned} \tag{8}$$

Répète ces dernières étapes pour le deuxième faisceau avec le complexe conjugué du premier,

$$\begin{aligned}
\vec{E}_2 \vec{E}_1^* &= (\vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0) e^{i(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega t)} e^{-i(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega t)} \\
&= E_0^2 (\cos(2xk \sin(\theta)) - i \sin(2xk \sin(\theta)))
\end{aligned} \tag{9}$$

Nous avons donc chaque partie de l'intensité totale du patron d'interférence,

$$I_1 = E_0^2 \tag{10}$$

$$I_2 = E_0^2 \tag{11}$$

$$I_3 = E_0^2 (\cos(2xk \sin(\theta)) + i \sin(2xk \sin(\theta))) \tag{12}$$

$$I_4 = E_0^2 (\cos(2xk \sin(\theta)) - i \sin(2xk \sin(\theta))) \tag{13}$$

Enfin nous pouvons trouver l'expression de l'intensité totale,

$$\begin{aligned}
I &= \frac{I_1 + I_2 + I_3 + I_4}{2\mu_0 c} \\
&= \frac{E_0^2 (\cos(2xk \sin(\theta)) + 1)}{\mu_0 c}
\end{aligned} \tag{14}$$

2.2 L'expression mathématique de l'espacement des franges

Nous allons donc trouver l'expression mathématique de l'espacement entre les franges du patron d'interférence. Considérons la partie suivante de l'expression de l'intensité totale que nous avons trouvée dans la dernière section,

$$kx \sin(\theta) = \pi n + \frac{\pi}{2} \tag{15}$$

Où $n \in \mathbb{Z}$ soit un index d'une telle frange sur le patron, nous pouvons définir des positions x_1 et x_2 qui représentent la distance entre les franges du patron d'interférence et les écrire sous les formes suivantes,

$$kx_1 \sin(\theta) = \pi n + \frac{\pi}{2} \tag{16}$$

$$kx_2 \sin(\theta) = \pi(n + 1) + \frac{\pi}{2} \tag{17}$$

Nous pouvons soustraire ces équations pour trouver l'espacement entre les franges

$$\begin{aligned}\Delta x = x_2 - x_1 &= \frac{\pi(n+1-n)}{k\sin(\theta)} \\ &= \frac{\pi}{k\sin(\theta)}\end{aligned}\tag{18}$$

Le nombre d'onde est défini par $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, donc, nous pouvons le remplacer dans notre expression et enfin nous avons l'expression de l'espacement des franges

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2\sin(\theta)}\tag{19}$$

Pour un laser HeNe qui possède une longueur d'onde de $\lambda = 633nm$, nous pouvons trouver l'angle θ par rapport aux axes des z des faisceaux nécessaires pour que l'espacement des franges soit $\Gamma = 1mm$,

$$\begin{aligned}\theta &= \arcsin\left(\frac{\lambda}{2\Gamma}\right) \\ &= \arcsin\left(\frac{633 \cdot 10^{-9}m}{2(0.001m)}\right) \\ &= 0.018^\circ\end{aligned}\tag{20}$$

2.3 La phase relative

Introduisons un déphasage ϕ_1 et ϕ_2 associé sur les deux faisceau

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_1)}\tag{21}$$

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_2)}\tag{22}$$

Nous pouvons répéter les mêmes étapes que la dernière section et trouver l'intensité en partie,

$$\langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle = \vec{E}_1 \vec{E}_1^* + \vec{E}_2 \vec{E}_2^* + \vec{E}_1 \vec{E}_2^* + \vec{E}_2 \vec{E}_1^*\tag{23}$$

Pour le premier faisceau avec son complexe conjugué,

$$\begin{aligned}\vec{E}_1 \vec{E}_1^* &= (\vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0) e^{i(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_1)} e^{-i(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_1)} \\ &= E_0^2\end{aligned}\tag{24}$$

Pour le deuxième faisceau avec son complexe conjugué,

$$\begin{aligned}\vec{E}_2 \vec{E}_2^* &= (\vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0) e^{i(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_2)} e^{-i(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_2)} \\ &= E_0^2\end{aligned}\tag{25}$$

Pour le premier faisceau avec le complexe conjugué du deuxième, nous pouvons répéter les mêmes étapes en gardant le déphasage des deux faisceaux,

$$\begin{aligned}\vec{E}_1 \vec{E}_2^* &= (\vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0) e^{i(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_1)} e^{-i(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_2)} \\ &= E_0^2 (e^{i\omega t - i\omega t} e^{i(\phi_1 - \phi_2)} e^{i(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \vec{k}_2 \cdot \vec{r})}) \\ &= E_0^2 e^{i(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \vec{k}_2 \cdot \vec{r})} e^{i(\phi_1 - \phi_2)} \\ &= E_0^2 e^{i(k_{1x}x + k_{1y}y + k_{1z}z - k_{2x}x - k_{2y}y - k_{2z}z)} e^{i(\phi_1 - \phi_2)} \\ &= E_0^2 e^{i(x(k_{1x} - k_{2x}) + y(k_{1y} - k_{2y}) + z(k_{1z} - k_{2z}))} e^{i(\phi_1 - \phi_2)} \\ &= E_0^2 e^{i(x(k_{1x} - k_{2x}))} e^{i(\phi_1 - \phi_2)}\end{aligned}\tag{26}$$

Utilisons la figure 2 et récrire ce dernier sur forme sinusoïdale,

$$\begin{aligned}\vec{E}_1 \vec{E}_2^* &= E_0^2 e^{i(x(k_{1x} - k_{2x}))} e^{i(\phi_1 - \phi_2)} \\ &= E_0^2 (\sin(\phi_1 - kx \sin(\theta)) \sin(\phi_2 + kx \sin(\theta)) \\ &\quad + \cos(\phi_1 - kx \sin(\theta)) \cos(\phi_2 + kx \sin(\theta)))\end{aligned}\tag{27}$$

Répète ces dernières étapes pour le deuxième faisceau avec le complexe conjugué du premier,

$$\begin{aligned}\vec{E}_2 \vec{E}_1^* &= (\vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0) e^{i(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega t)} e^{-i(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega t)} \\ &= E_0^2 (\sin(\phi_1 - kx \sin(\theta)) \sin(\phi_2 + kx \sin(\theta)) \\ &\quad + \cos(\phi_1 - kx \sin(\theta)) \cos(\phi_2 + kx \sin(\theta)))\end{aligned}\tag{28}$$

Nous avons donc chaque partie de l'intensité totale du patron d'interférence avec un déphasage sur chaque faisceau.

$$I = E_0^2(\cos(-\phi_1 + \phi_2 + 2xk\sin(\theta)) + 1) \quad (29)$$

Nous pouvons appeler cette différence de déphasage des deux faisceaux $\Delta\phi \equiv \phi_2 - \phi_1$ et récrire l'expression,

$$I = E_0^2(\cos(2xk\sin(\theta) + \Delta\phi) + 1) \quad (30)$$

3 Solution numérique

Pour cette section nous avons utilisé un calepin IPython, qui effectue une vérification des calculs symbolique de la dernière section et aussi de réaliser des solutions numériques de nos expressions de l'intensité du patron d'interférence sur forme visuelle pour faire de meilleures analyses physiques de ces expressions. Avec un laser HeNe qui possède une longueur d'onde de $\lambda = 633nm$, avec un angle incident de $\theta = 0.018^\circ$ par rapport a l'axe des z pour chaque faisceau et un espacement des franges de $\Gamma = 1mm$, nous pouvons effectuer un calcul numérique qui crée un graphique qui reprennent la forme du profile d'intensité du patron d'interférence dans la figure suivante,

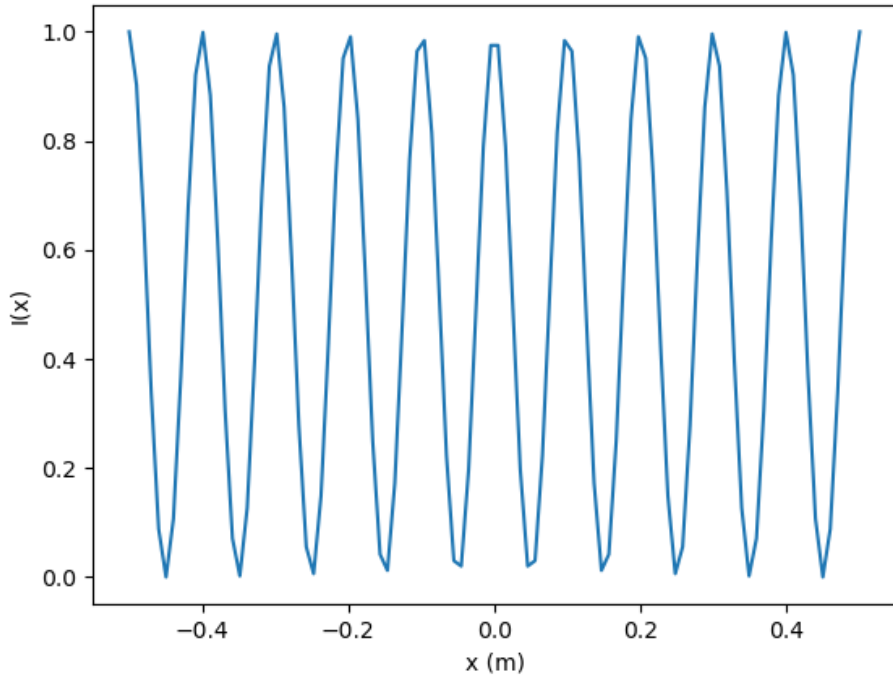


Figure 3: Solution numérique du patron d'interférence

Nous pouvons effectuer le même calcul numérique, mais pour la section 2.3 d'où nous introduisons le déphasage ϕ_1 et ϕ_2 pour chaque faisceau représenter la figure suivante,

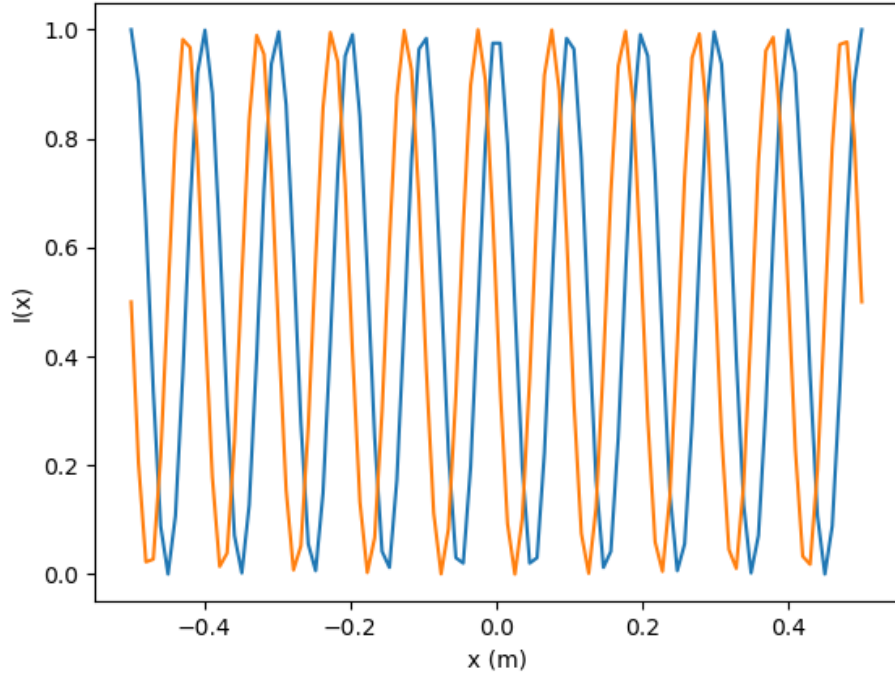


Figure 4: Solution numérique du patron d'interférence avec un déphase $\Delta\phi = \pi/2$

4 Remarque finale

Enfin, nous avons démontré une dérivation des expressions mathématiques pour l'intensité du patron d'interférence et l'espacement entre les franges. Nous avons considéré un laser HeNe et bien trouvé l'angle nécessaire pour avoir un espacement entre les franges de 1mm. Aussi avec cet exemple, nous avons même démontré numériquement qu'arriverait-il si nous introduisons un déphasage sur chaque faisceau incident et remarque dont la différence de déphasage ne change pas la forme de notre patron d'interférence, mais change seulement le placement de notre spectre d'intensité sur l'écran.