devoir_2_photonique

February 8, 2023

Devoir 2 pour le cours de photonique par Shane Gervais

Le but de ce devoir est résourde les équations differentielle du modèle de Drude-Lorentz

C'est problèmes sont résolue dans une facon symbolique avec Sympy

[ ]:
```
import sympy as smp
from IPython.display import display, Math, Latex
```

[ ]:
```
q = smp.symbols('q', real=True)
t = smp.symbols('t', real=True)
E = smp.symbols('E(t)', complex=True)
x = smp.Function('x')(t)
dxdt = smp.Derivative(x, t)
d2xdt2 = smp.Derivative(x, t, t)
m = smp.symbols('m', real=True, postive=True)
k = smp.symbols('k', real=True, positive=True)
alpha = smp.symbols(r'\alpha', real=True)
```

Partie a) Écrivon la 2ième loi de Newton agissent sur un seul dipole

[ ]:
```
eq = q*E - k*x - alpha*dxdt - m*d2xdt2
display(Math(smp.latex(eq)+' = 0'))
```

$$E(t)q - \alpha\frac{d}{dt}x(t) - kx(t) - m\frac{d^2}{dt^2}x(t) = 0$$

Remplace alpha = 0 avec l'absence d'un champ externe.

[ ]:
```
eq_a = eq.subs(alpha, 0).subs(q, 0)
display(Math(smp.latex(eq_a)+' = 0'))
```

$$-kx(t) - m\frac{d^2}{dt^2}x(t) = 0$$

Retrouvon la solution générale de cette équation

[ ]:
```
w_0 = smp.symbols(r'\omega_0', real=True, positive=True)
x_0 = smp.symbols('x_0', real=True)
#w = smp.sqrt(k/m)
sol = smp.dsolve(eq_a, x)
display(Math(smp.latex((sol.subs(smp.sqrt(k)*smp.sqrt(-(1/m)), smp.I*w_0)))))
```

```
display(Math(smp.latex((sol.subs(smp.sqrt(k)*smp.sqrt(-(1/m)), smp.I*w_0)).
  ↪rewrite(smp.sin).rewrite(smp.cos))))
```

$$x(t) = C_1 e^{-i\omega_0 t} + C_2 e^{i\omega_0 t}$$

$$x(t) = C_1 \left(\cos\left(\omega_0 t\right) - i\cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right)\right) + C_2 \left(\cos\left(\omega_0 t\right) + i\cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

[ ]:
```
xt = smp.symbols('x(t)', complex = True)
phi = smp.symbols(r'\phi', real=True)
xt = x_0*smp.exp(smp.I*(-w_0*t + phi))
display(Math('x(t) = '+smp.latex(xt)))
re_xt = smp.re(xt)
display(Math('Re(x(t)) = '+smp.latex(re_xt)))
```

$$x(t) = x_0 e^{i(-\omega_0 t + \phi)}$$

$$Re(x(t)) = x_0 \cos\left(\omega_0 t - \phi\right)$$

On voit que cette équation générale respect la partie réel de cet dernière fonction défini par (xt)

Partie b) retourne à notre équation en définissant gamma = alpha/m

[ ]:
```
eq2 = eq*(1/m)
gamma = smp.symbols(r'\gamma', real=True, positive=True, nonzero = True)
eq_b = eq2.expand().subs(k/m,w_0**2).subs(alpha/m, gamma)
display(Math(smp.latex(eq_b)+' = 0'))
```

$$\frac{E(t)q}{m} - \gamma\frac{d}{dt}x(t) - \omega_0^2 x(t) - \frac{d^2}{dt^2}x(t) = 0$$

partie c) Trouvons la solution générale

[ ]:
```
E_0 = smp.symbols('E_0', real=True)
w = smp.symbols(r'\omega', real=True) #different que w_0
E_c = E_0*smp.exp(-smp.I*w*t)
display(Math('E(t) = '+smp.latex(E_c)))
eq_c = eq_b.subs(E, E_c)
display(Math(smp.latex(eq_c)))
sol2 = smp.dsolve(eq_c, x)
display(Math(smp.latex((sol2))))
```

$$E(t) = E_0 e^{-i\omega t}$$

$$\frac{E_0 q e^{-i\omega t}}{m} - \gamma\frac{d}{dt}x(t) - \omega_0^2 x(t) - \frac{d^2}{dt^2}x(t)$$

$$x(t) = C_1 e^{\frac{t\left(-\gamma + \sqrt{\gamma - 2\omega_0}\sqrt{\gamma + 2\omega_0}\right)}{2}} + C_2 e^{-\frac{t\left(\gamma + \sqrt{\gamma - 2\omega_0}\sqrt{\gamma + 2\omega_0}\right)}{2}} + \frac{iE_0 q e^{-i\omega t}}{m\left(\gamma\omega - i\omega^2 + i\omega_0^2\right)}$$

On voi que cet équation aurait une solution suivante

[ ]:
```
xt = ((q/m)/(w_0**2 - w**2 - gamma*smp.I*w))*E_c
display(Math('x(t) = '+smp.latex(xt)))
```

$$x(t) = \frac{E_0 q e^{-i\omega t}}{m\left(-i\gamma\omega - \omega^2 + \omega_0^2\right)}$$

partie d) Trouvon la susceptibilité électrique par la polarisation

[ ]:
```
N = smp.symbols('N', real=True, positive=True)
epsi = smp.symbols(r'\epsilon', real=True)
chi = smp.symbols(r'\chi', complex=True)

P_lhs = N*q*xt
P_rhs = epsi*chi*E_c

eq_d = smp.Eq(P_lhs, P_rhs)
display(Math(smp.latex(eq_d)))
sol_d = smp.solve(eq_d, chi)
display(Math(r'\chi_e = '+smp.latex(sol_d)))
```

$$\frac{E_0 N q^2 e^{-i\omega t}}{m\left(-i\gamma\omega - \omega^2 + \omega_0^2\right)} = E_0 \chi \epsilon e^{-i\omega t}$$

$$\chi_e = \left[-\frac{N q^2}{\epsilon m\left(i\gamma\omega + \omega^2 - \omega_0^2\right)}\right]$$

Écrivon sa partie réel et imaginaire

[ ]:
```
chi_e = (-N*q**2)/(epsi*m*(smp.I*gamma*w + w**2 - w_0**2))
real_chi = smp.re(chi_e)
imag_chi = smp.im(chi_e)
display(Math(r'\chi_{e}^{\prime} = '+smp.latex(real_chi)))
display(Math(r'\chi_{e}^{\prime\prime} = '+smp.latex(imag_chi)))
```

$$\chi_e^{\prime} = -\frac{N q^2\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)}{\epsilon m\left(\gamma^2\omega^2 + \left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2\right)}$$

$$\chi_e^{\prime\prime} = \frac{N\gamma\omega q^2}{\epsilon m\left(\gamma^2\omega^2 + \left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2\right)}$$