

**Caractérisation directe d'un état de polarisation à l'aide des mesures
faibles temporelles**

Thèse présentée à la faculté des sciences de l'université de Moncton
pour l'obtention du grade de
maîtrise ès sciences et spécialisation physique (M. Sc.)

Shane Gervais
A00198792

Département de physique et d'astronomie
Université de Moncton

DATE

Composition du jury

Président du jury : **noms**
Professeur,
Université de Moncton

Examineur interne : **noms**
Professeur,
Université de Moncton

Examineur externe : **noms**
Professeur,
Université de **noms de l'uni**

Directeur de thèse : Lambert Giner
Professeur,
Université de Moncton

Remerciements

Sommaire

Abstract

Table des matières

Page titre	i
Composition du jury	ii
Remerciements	iii
Sommaire	iv
Abstract	v
Liste des tableaux	viii
Liste des figures	ix
Liste des symboles	x
1 INTRODUCTION DES PROCÉDURES DIRECTES POUR LES MESURES QUANTIQUES	1
1.1 La notion des mesures quantiques	1
1.2 Les procédures des mesures directes via mesure faible	2
1.2.1 La valeur faible	2
1.3 Motivation de la thèse	7
2 LES MESURES FAIBLES TEMPORELLES ET FRÉQUENCIELLES D'UN SYSTÈME QUANTIQUE	8
2.1 Proposition d'une procédure directe avec des mesures temporelles faibles	8
2.2 Relation d'un délai temporel et la valeur faible de l'état de polarisation	9
2.2.1 La partie réelle du système	9
2.2.2 La relation d'une mesure temporelle et un décalage de fréquence	9
2.2.3 La partie imaginaire du système	9
2.3 Proposition expérimentale pour la caractérisation de la valeur faible .	10
3 MESURE EXPÉRIMENTALE DIRECTE D'UN ÉTAT DE POLARISATION EN UTILISANT UNE MESURE FAIBLE TEMPORELLE	11
3.1 Acquisition de donnée et mesure d'un délai en utilisant un oscilloscope	11
3.1.1 Fonctionnement d'un oscilloscope	11
3.1.2 Acquisition du délai temporel	11
3.1.3 Note physique sur la réalité de l'acquisition	11
3.2 Caractérisation de la partie réelle de la valeur faible	12
3.2.1 Montage expérimental	12
3.2.2 Résultats expérimentaux sur la partie réelle	12
3.3 Caractérisation de la partie imaginaire de la valeur faible	13
3.3.1 **SECTION SUR LA MÉTHODE DE MESURE SUR LES DÉCALAGES DE FRÉQUENCE	13

3.3.2	**SECTION SUR LE MONTAGE DE LA PARTIE IMAGI- NAIRE	13
3.3.3	**SECTION SUR LES RÉSULTATS	13
4	CONCLUSION	14
4.1	Discussion des résultats expérimentaux	14
4.2	Conclusion sur la thèse	15
4.3	Applications et projet de future	16

Liste des tableaux

Table des figures

1	Un voltmètre analogique pour une représentation visuelle d'un pointeur. Ce voltmètre «pointe» à $10V$ après avoir été décalé de ça en position initiale.	3
2	Représentation visuelle du concept des mesures faibles en comparaison des mesures fortes. a) Lorsque la force d'interaction est forte, le changement entre la position initiale du pointeur et sa position finale est supérieur à l'écart du profil du pointeur, la mesure est considérée comme forte et nous ne pouvons pas récupérer aucune information sur l'état initial. b) Lorsque la force d'interaction est faible, le changement entre la position initiale et finale du pointeur est très faible par rapport à l'écart du profil du pointeur, la mesure est considérée comme faible. Nous pouvons alors tenter de récupérer des informations sur l'état initial du système puisque nous n'avons pas complètement réduit l'état à une de ses valeurs.	5

Liste des symboles

1 INTRODUCTION DES PROCÉDURES DIRECTES POUR LES MESURES QUANTIQUES

1.1 La notion des mesures quantiques

Les mesures en mécanique quantique ont troublé les physiciens et les philosophes depuis la naissance de la théorie quantique elle-même. Même John S. Bell a écrit un article contre les mesures en 1990 [1]. Certains considèrent les mesures en mécanique quantique comme un problème et ceux qui les pratiquent comme des instrumentalistes. Andrew N. Jordans et Irfan A. Siddiqi décrit ce sujet dans son livre, où il aborde les implications historiques des mesures quantiques et certains points de vue philosophiques [2]. Il poursuit en disant que les mesures sont un raccourci de la façon dont nous interagissons avec le monde. Nous pouvons obtenir de l'information sur notre monde seulement par des observations. Je suis d'accord avec cela, car si nous pensons aux sciences humaines par exemple, et plus particulièrement à l'être de soi-même, nous ne pouvons comprendre qu'une partie d'une personne par l'observation et pas la totalité de la personne. Nous pouvons supposer que si une personne regarde le hockey et semble à participer à des nombreuses d'activités du hockey, nous pouvons peut-être conclure par observation que cette personne aime le hockey. Mais le pourquoi et le comment ne sont pas clairs. Par exemple, nous pouvons approximer qu'un photon se propage comme une onde plane, mais nous ne pouvons qu'observer leur intensité. La mécanique quantique est un peu comme ça aussi, nous pouvons obtenir des observables des mesures, mais nous ne pouvons jamais savoir complètement toute l'information du système surtout avec une seule mesure. Nous devrions prendre de nombreuses mesures projectives et ensuite reconstruire la fonction d'onde à partir de ces résultats. Cela m'amène au sujet de cette thèse, au moins une partie importante de celui-ci, les mesures faibles. La meilleure façon de décrire l'utilité des mesures faibles et leur intérêt pour notre travail est de les décrire comme une manière d'obtenir approximativement toutes les informations sur l'état original de la fonction d'onde que nous voulons mesurer. Considérez l'analogie suivante, décrite pour la première fois par Yuval Gefen [3] : vous êtes dans votre appartement et vous entendez un bruit venant du couloir. Mais chaque fois que vous ouvrez votre porte, le bruit disparaît et il n'y a rien à voir. Vous fermez la porte et le bruit revient. On dirait que des enfants s'amuse autour de la porte de votre appartement, mais à chaque fois que vous rouvrez la porte, ils arrêtent et se cachent. En mécanique quantique, l'action d'ouvrir la porte est une interaction avec le système ou une mesure, et chaque fois que vous mesurez, vous effondrez la

fonction d'onde et modifiez le résultat de ce qui se passe réellement, les enfants se comportent différemment, se cachent et ne font pas de bruit. Cependant, les mesures faibles sont comme une sorte de judas dans la porte qui permet d'observer ce que font les enfants, sans effondrer complètement la fonction d'onde [4]. Bien sûr, les enfants savent probablement que vous êtes légèrement conscient de ce qui se passe, et ils ne se comporteront donc pas de manière totalement naturelle, mais on peut au moins savoir ce qui se passe. Les mesures faibles sont donc censées être judas de la mécanique quantique [3]. Cependant, comment peut-on obtenir l'information sur la fonction d'onde après une mesure faible et comment peut-on le faire directement ?

1.2 Les procédures des mesures directes via mesure faible

Les mesures quantiques sont généralement décrites par l'expérience de Stern-Gerlach. Une expérience que toute personne ayant suivi un cours de mécanique quantique de base connaît bien. Cette expérience est connue pour l'avoir découvert l'effet du spin d'une particule quantique. En 1987, Aharonov et al. ont montré que le résultat de la mesure du spin d'une particule dans un Stern-Gerlach peut être évalué à 100 [5]. Pour beaucoup, cela ne devrait pas avoir de sens puisque nous savons que le spin d'une particule peut être soit $\pm 1/2$. L'article décrit comment la fonction d'onde est proportionnelle à ce que l'on appelle la valeur faible. La section suivante servira à décrire la valeur faible ainsi que les schémas de mesure de cette valeur.

1.2.1 La valeur faible

Les mesures faibles sont généralement décrites dans le cadre du modèle d'interaction de von Neumann, présenté pour la première fois dans son livre *Mathematical Foundation of Quantum Mechanics* (publié à l'origine en 1932 et traduit en 1955) [6]. Le postulat décrit le système et l'appareil de mesure (nommé le «pointeur», car il ressemble à réagir comme une aiguille sur un appareil de mesure analogique telle qu'un voltmètre analogique) comme des états quantiques.

Le système à mesurer se trouve initialement dans une superposition arbitraire.

$$|\psi\rangle_{0,1} = \sum_i^N c_i |s_i\rangle \quad (1)$$

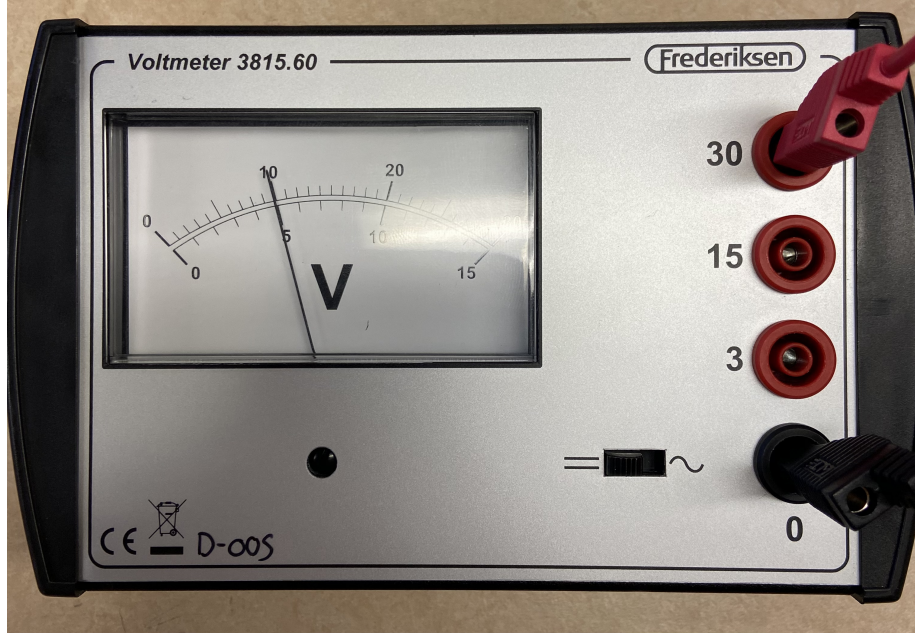


FIGURE 1 – Un voltmètre analogique pour une représentation visuelle d'un pointeur. Ce voltmètre «pointe» à 10V après avoir été décalé de ça en position initiale.

Soit $|\psi\rangle_{0,1}$ l'état du système qui subira une mesure où $|\psi\rangle_{0,1} \in \mathcal{H}_{0,1}$ (l'Hamiltonien du système) dans la base $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ soit $|0\rangle$ et $|1\rangle$ sont des bases orthogonales, $|s_i\rangle$ les vecteur propres d'un observable \hat{S} possédant des valeurs propres s_i une fois mesuré et des coefficients c_i avec dimensions N . L'appareil de mesure ou pointeur est décrit avec un état $|\zeta\rangle_q$ dans une bases d'une variable q où $|\zeta\rangle_q \in \mathcal{H}_q$ (l'Hamiltonien du pointeur), initialement dans sa position moyenne

$$|\zeta\rangle_q = |\tilde{q} = 0\rangle_q \quad (2)$$

Soit \tilde{q} la position moyenne d'une variable q du pointeur possédant une écart type σ_q . Souvant décrit avec un profil gaussien centré à 0 [2, 7, 8],

$$\langle q|\zeta\rangle_q \equiv \zeta(q) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^{1/2}} e^{-\frac{q^2}{4\sigma_q^2}} \quad (3)$$

Ensemble le postulat décrit que le système et le pointeur sont couplé,

$$|\Psi_i\rangle_{tot} \equiv |\psi\rangle_{0,1} \otimes |\zeta\rangle_q = |\psi\rangle_{0,1} \otimes |\tilde{q} = 0\rangle_q \quad (4)$$

Dont $|\Psi_i\rangle_{tot}$ l'état total incluent le système et le pointeur dont $\mathcal{H}_{tot} = \mathcal{H}_{0,1} \otimes \mathcal{H}_q$. Donc pour performer la mesure faut utiliser l'opérateur d'interaction de von Neumann

$$\hat{U} = e^{\frac{-i\mathcal{H}t}{\hbar}} \quad (5)$$

Soit t le temps d'interaction supposé d'être constant et \mathcal{H} l'Hamiltonien décrivant le système et le pointeur couplé

$$\mathcal{H} = g(\hat{S} \otimes \hat{k}) \quad (6)$$

Soit g la force de couplage entre l'observable du système \hat{S} et sa variable conjugué du pointeur \hat{k} . Nous définissons le décalage induit par l'interaction sur le système avec $\delta \equiv \frac{gt}{\hbar}$. L'opérateur est unitaire dont quand on l'applique, l'état final après la mesure (interaction) sera :

$$|\Psi_f\rangle_{tot} = \sum_i^n c_i |s_i\rangle \otimes |q = \delta s_i\rangle_q \quad (7)$$

Le pointeur est donc décalé de 0 à δs_i ($\Delta q = \delta s_i$). Ce qui rend la mesure faible c'est quand $\sigma \gg \delta$ soit l'inverse est une mesure «forte».

Cependant, nous ne pouvons pas obtenir aucune information sur l'état initial du système après avoir été faiblement mesurés sans effectuer une mesure projective par après. Cette procédure a été baptisée par Jeff Lundeen et Charles Bamber « procédure directe de mesure d'un état quantique par des mesures faibles » [9]. Ils nomment la procédure «directe» parce qu'il y a une valeur soit proportionnelle à la fonction d'onde, ce que nous allons voir plustard. Dans leur article, ils décrivent deux schémas de mesures quantiques directes. Soit le premier, une mesure standard (forte) utilisant deux mesures projectives observables indépendantes et l'autre utilisant une mesure faible suivie d'une mesure projective dans le cadre du postulat de von Neumann. Suivons cette dernière schématique en commençant par un rappel de notre état total initial (ces étapes sont inspiré par un article par J.S. Lundeen et K.J. Resch [10]) :

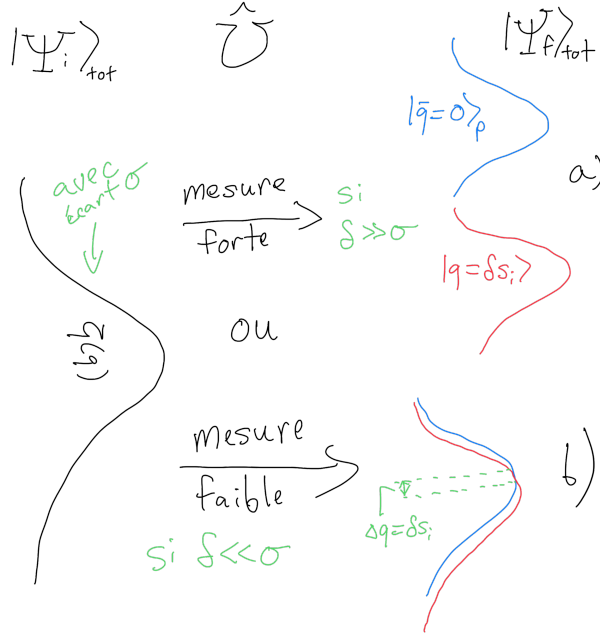


FIGURE 2 – Représentation visuelle du concept des mesures faibles en comparaison des mesures fortes. a) Lorsque la force d'interaction est forte, le changement entre la position initiale du pointeur et sa position finale est supérieur à l'écart du profil du pointeur, la mesure est considérée comme forte et nous ne pouvons pas récupérer aucune information sur l'état initial. b) Lorsque la force d'interaction est faible, le changement entre la position initiale et finale du pointeur est très faible par rapport à l'écart du profil du pointeur, la mesure est considérée comme faible. Nous pouvons alors tenter de récupérer des informations sur l'état initial du système puisque nous n'avons pas complètement réduit l'état à une de ses valeurs.

$$|\Psi_i\rangle_{tot} = |\psi\rangle_{0,1} \otimes |\zeta\rangle_q \quad (8)$$

Dont le pointeur est encore dans sa position initial $|\zeta\rangle_q = |\tilde{q} = 0\rangle_q$. Appliquons l'opérateur d'interaction de von Neumann sur cela

$$\hat{U} |\Psi_i\rangle_{tot} = e^{-i\delta\mathcal{H}} (|\psi\rangle_{0,1} \otimes |\zeta\rangle_q) \quad (9)$$

Écrivons l'opérateur d'interaction en série de Taylor,

$$\hat{U} |\Psi_i\rangle_{tot} = (1 - i\delta(\hat{S} \otimes \hat{k}) - \dots)(|\psi\rangle_{0,1} \otimes |\zeta\rangle_q) \quad (10)$$

$$= |\psi\rangle_{0,1} \otimes |\zeta\rangle_q - \delta \hat{S} |\psi\rangle_{0,1} \otimes \hat{k} |\zeta\rangle_q - \dots \quad (11)$$

Nous regardons seulement la plus petite ordre proportionnelle à δ vue que ce dernier sera une mesure faible idéal [10]. Ensuite, effectuons une mesure projective avec un état $|\varsigma\rangle_{0,1} \equiv |\varsigma\rangle$ possédant les mêmes bases $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ que l'état du système $|\psi\rangle_{0,1}$.

$$|\varsigma\rangle \langle \varsigma| \hat{U} |\Psi_i\rangle_{tot} = \left[\langle \varsigma | \psi \rangle_{0,1} \otimes |\zeta\rangle_q - \delta \langle \varsigma | \hat{S} | \psi \rangle_{0,1} \otimes \hat{k} |\zeta\rangle_q - \dots \right] \otimes |\varsigma\rangle \quad (12)$$

Ensuite renormalisons l'état,

$$\frac{\langle \varsigma | \hat{U} |\Psi_i\rangle_{tot}}{\langle \varsigma | \psi \rangle_{0,1}} \otimes |\varsigma\rangle = \left[\frac{\langle \varsigma | \psi \rangle_{0,1}}{\langle \varsigma | \psi \rangle_{0,1}} \otimes |\zeta\rangle_q - \delta \frac{\langle \varsigma | \hat{S} | \psi \rangle_{0,1}}{\langle \varsigma | \psi \rangle_{0,1}} \otimes \hat{k} |\zeta\rangle_q - \dots \right] \otimes |\varsigma\rangle \quad (13)$$

$$= \left[|\zeta\rangle_q - \delta \frac{\langle \varsigma | \hat{S} | \psi \rangle_{0,1}}{\langle \varsigma | \psi \rangle_{0,1}} \otimes \hat{k} |\zeta\rangle_q - \dots \right] \otimes |\varsigma\rangle \quad (14)$$

La partie suivante est la position finale du pointeur après la mesure,

$$|\zeta_f\rangle \equiv |\zeta\rangle_q - \delta \frac{\langle \varsigma | \hat{S} | \psi \rangle_{0,1}}{\langle \varsigma | \psi \rangle_{0,1}} \otimes \hat{k} |\zeta\rangle_q - \dots \quad (15)$$

La valeur suivante c'est qu'Aharonov et al. surnomme la valeur faible [5] :

$$\langle \hat{S}_W \rangle = \frac{\langle \varsigma | \hat{S} | \psi \rangle_{0,1}}{\langle \varsigma | \psi \rangle_{0,1}} \quad (16)$$

Démontré d'être proportionnelle à l'état final si qu'on récrit l'expansion de Taylor dans sa forme d'Euler,

$$|\Psi_f\rangle_{tot} \equiv \left[\langle \varsigma | \psi \rangle_{0,1} e^{-i\delta \frac{\langle \varsigma | \hat{S} | \psi \rangle_{0,1}}{\langle \varsigma | \psi \rangle_{0,1}}} \right] \otimes |\varsigma\rangle \quad (17)$$

$$= \left[\langle \varsigma | \psi \rangle_{0,1} e^{-i\delta \langle \hat{S}_W \rangle} \right] \otimes |\varsigma\rangle_{0,1} \quad (18)$$

Donc on voit bien que la fonction d'onde est proportionnelle à la valeur faible. Jeff Lundeen a même décrit que la fonction d'onde basé sur les procédure direct est le résultat moyen d'une mesure faible et une mesure projective, cet-à-dire la valeur faible [5, 9]. La valeur faible est partie des éléments des complexes $\langle \hat{S} \rangle \in \mathcal{C}$ dont c'est partie réel et imaginiare correspond à les observables de la variable du pointeur $\langle \hat{q} \rangle$ et sa variable conjugué $\langle \hat{k} \rangle$ dans la façon suivante [8, 9, 10] :

$$\langle \hat{S}_W \rangle = \frac{1}{\delta} \left(\langle \hat{q} \rangle + i4\sigma_q^2 \langle \hat{k} \rangle \right) \quad (19)$$

Les propriétés de la valeur faible sont bien décrit dans la thèse doctorale à Jeff Lundeen [11].

1.3 Motivation de la thèse

2 LES MESURES FAIBLES TEMPORELLES ET FRÉQUENCIAELLES D'UN SYSTÈME QUANTIQUE

2.1 Proposition d'une procédure directe avec des mesures temporelles faibles

2.2 Relation d'un délai temporel et la valeur faible de l'état de polarisation

2.2.1 La partie réelle du système

2.2.2 La relation d'une mesure temporelle et un décalage de fréquence

2.2.3 La partie imaginaire du système

2.3 Proposition expérimentale pour la caractérisation de la valeur faible

3 MESURE EXPÉRIMENTALE DIRECTE D'UN ÉTAT DE POLARISATION EN UTILISANT UNE MESURE FAIBLE TEMPORELLE

3.1 Acquisition de donnée et mesure d'un délai en utilisant un oscilloscope

3.1.1 Fonctionnement d'un oscilloscope

3.1.2 Acquisition du délai temporel

3.1.3 Note physique sur la réalité de l'acquisition

3.2 Caractérisation de la partie réelle de la valeur faible

3.2.1 Montage expérimental

3.2.2 Résultats expérimentaux sur la partie réelle

3.3 Caractérisation de la partie imaginaire de la valeur faible

3.3.1 **SECTION SUR LA MÉTHODE DE MESURE SUR LES DÉ- CALAGES DE FRÉQUENCE

3.3.2 **SECTION SUR LE MONTAGE DE LA PARTIE IMAGINAIRE

3.3.3 **SECTION SUR LES RÉSULTATS

4 CONCLUSION

4.1 Discussion des résultats expérimentaux

4.2 Conclusion sur la thèse

4.3 Applications et projet de future

Références

- [1] John BELL. “Against ‘measurement’”. In : *Physics World* 3.8 (1990), p. 33. DOI : 10.1088/2058-7058/3/8/26. URL : <https://dx.doi.org/10.1088/2058-7058/3/8/26>.
- [2] Andrew N. JORDAN et Irfan A. SIDDIQI. *Quantum Measurement: Theory and Practice*. Sous la dir. de I. Cambridge University Press, 2024.
- [3] Yuval GEFEN. “Weak Measurement: A Peephole into the Quantum World”. In : *ICTP Colloquium Series*. Sous la dir. de Weizmann Institute of SCIENCE. 2017.
- [4] Jeff S. LUNDEEN et al. “Direct measurement of the quantum wavefunction”. In : *Nature* 474 (2011), p. 188-191. URL : <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:4405067>.
- [5] Yakir AHARONOV, David Z. ALBERT et Lev VAIDMAN. “How the result of a measurement of a component of the spin of a spin-1/2 particle can turn out to be 100”. In : *Phys. Rev. Lett.* 60 (14 1988), p. 1351-1354. DOI : 10.1103/PhysRevLett.60.1351. URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.60.1351>.
- [6] John von NEUMANN et Robert T. BEYER. *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics: New Edition*. Princeton University Press, fév. 2018. ISBN : 9780691178561. DOI : 10.23943/princeton/9780691178561.001.0001. URL : <https://doi.org/10.23943/princeton/9780691178561.001.0001>.
- [7] Nicolas BRUNNER et al. “Optical Telecom Networks as Weak Quantum Measurements with Postselection”. In : *Phys. Rev. Lett.* 91 (18 2003), p. 180402. DOI : 10.1103/PhysRevLett.91.180402. URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.91.180402>.
- [8] A. HARIRI et al. “Experimental simultaneous readout of the real and imaginary parts of the weak value”. In : *Phys. Rev. A* 100 (3 2019), p. 032119. DOI : 10.1103/PhysRevA.100.032119. URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.100.032119>.
- [9] Jeff S. LUNDEEN et Charles BAMBER. “Procedure for Direct Measurement of General Quantum States Using Weak Measurement”. In : *Phys. Rev. Lett.* 108 (7 2012), p. 070402. DOI : 10.1103/PhysRevLett.108.070402. URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.108.070402>.

- [10] J.S. LUNDEEN et K.J. RESCH. “Practical measurement of joint weak values and their connection to the annihilation operator”. In : *Physics Letters A* 334.5 (2005), p. 337-344. ISSN : 0375-9601. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2004.11.037>. URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0375960104016342>.
- [11] Jeff LUNDEEN. “Generalized Measurement and Post-selection in Optical Quantum Information”. Thèse de doct. University of Toronto, 2006.

ANNEXE A

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} x dx = 0 \quad (\text{A.1})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\delta)^2}{2\sigma^2}} x dx = \delta \quad (\text{A.2})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = 1 \quad (\text{A.3})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x^2+(x-\delta)^2)}{4\sigma^2}} x dx = \frac{\delta}{2} e^{-\frac{\delta^2}{8\sigma^2}} \quad (\text{A.4})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\delta)^2}{2\sigma^2}} dx = 1 \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{4\sigma^2}} e^{-ikx} dx = \frac{\sqrt{2\sigma}}{(\sqrt{2\pi})^{1/2}} e^{-k^2\sigma^2} \quad (\text{A.6})$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\delta)^2}{4\sigma^2}} e^{-ikx} dx = \frac{\sqrt{2\sigma}}{(\sqrt{2\pi})^{1/2}} e^{-k^2\sigma^2} e^{ik\delta} \quad (\text{A.7})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-2k^2\sigma^2} k dk = 0 \quad (\text{A.8})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-2k^2\sigma^2} e^{ik\delta} k dk = i \frac{\delta}{4\sigma^2} e^{-\frac{\delta^2}{8\sigma^2}} \quad (\text{A.9})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-2k^2\sigma^2} e^{-ik\delta} k dk = -i \frac{\delta}{4\sigma^2} e^{-\frac{\delta^2}{8\sigma^2}} \quad (\text{A.10})$$

ANNEXE B