

基于耳切法的复杂结构衍射研究

路尚润¹, 简彬洋¹, 黄维政¹, 鲁方锐¹, 赵 宁¹, 谭 创¹, 庞晓宁^{1,2}

(中山大学 1. 物理学院; 2. 物理学国家级实验教学示范中心 (中山大学), 广东 广州 510275)

摘要: 光的衍射现象是光的基本现象之一. 对于复杂结构的衍射, 一般难以直接推导出解析解. 为得到复杂结构的夫琅和费衍射, 本文采用耳切法将复杂结构近似分割为多个三角形, 则复杂结构的衍射场可以分解为多个三角形衍射场的叠加. 而每个任意三角形的傅里叶变换的计算, 则可以通过坐标变换操作, 转换为基础直角三角形的傅里叶变换的计算. 进一步搭建夫琅和费衍射实验光路, 得到了不同孔径的衍射场分布, 并且分析计算了正多边形结构衍射场角分布的不确定度, 验证了解析算法的可行性及准确性. 最后, 计算了复杂分形结构的衍射场, 验证算法在复杂结构衍射场计算的有效性.

关键词: 三角剖分; 耳切法; 复杂结构衍射; 夫琅和费衍射

中图分类号: O43 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-0712 XXXXXX

【DOI】 10.16854/j.cnki.1000-0712. XXXXXX

光的衍射是光的波动性的基本现象之一. 对光的波动性的研究有着重要意义, 为光谱仪、全息三维显示等方向提供了重要的理论依据^[1]. 光在传播过程中遇到尺寸接近于光波长的障碍物时, 会发生偏离直线传播的现象而进入按直线传播划定的阴影区内, 这种现象称为光的衍射. 根据不同的衍射距离, 光的衍射可以分为两类, 菲涅耳衍射和夫琅和费衍射. 经典光学教材对规则障碍物, 如单孔、双孔、单缝、双缝或者周期性多缝等的衍射有深入的分析^[2-4]. 但日常中常常更多遇到的是复杂结构的衍射现象, 而复杂结构的衍射场分布往往不能直接解析得到. 为得到复杂结构衍射场的解析解, 我们需要将复杂结构孔径分解为基础三角孔, 则复杂结构的衍射场可以通过对每个基础三角孔衍射场的相干叠加得到.

通过计算几何方法可以快速准确地将复杂结构, 如多边形孔径等分割为三角形. 常用的多边形三角剖分方法可以分为基于对角线插入算法、基于 Delaunay 三角剖分算法以及基于 Steiner 点的三角

剖分算法^[5]. 其中基于对角线插入算法包括耳切法 (Ear Clipping Method)^[6, 7]、扫描线法 (Sweep line algorithm)^[8] 和赛德尔随机增量算法 (Seidel's Algorithm)^[9]等. 耳切法通过不断剪除由三角形构成的“耳朵”, 将原多边形分割为一系列三角形^[10]. 扫描线法使用一条从左到右穿过多边形的扫描线, 随着扫描线的移动, 与多边形相交形成开始或结束的事件点, 并根据事件点构建多边形的三角剖分. 赛德尔随机增量算法通过随机选择多边形的边构建梯形剖分, 并寻找单调链, 利用连接链的端点和内部顶点来构建三角形^[11].

本文首先从标量衍射理论出发推导基础三角形的夫琅和费衍射的解析解; 其次采用轮廓追踪法识别任意复杂结构的轮廓形状; 通过耳切法将复杂结构分割为多个三角形; 则复杂结构的衍射场分布可以通过这些三角形衍射场的相干叠加获得. 最后, 实验观察孔径的夫琅和费衍射, 并计算了衍射角分布的不确定度, 验证算法的有效性及准确性.

收稿日期: 2024-06-xx; **修回日期:** 2024-xx-xx

基金项目: 广东省 2022 年教育信息化教学应用实践共同体项目—粤疆藏区域联合光学虚拟教研共同体建设项目 (GDSGGT2022003); 2022 年度广东省高校教学质量与教学改革工程项目—光学虚拟教研室 (粤教高函[2023]4 号) 资助.

作者简介: 路尚润, (2002-), 男, 山东省淄博市临淄区人, 中山大学物理学院本科生.

通信作者: 庞晓宁, Email: pangxn3@mail.sysu.edu.cn

1 实验原理

1.1 三角孔的夫琅和费衍射

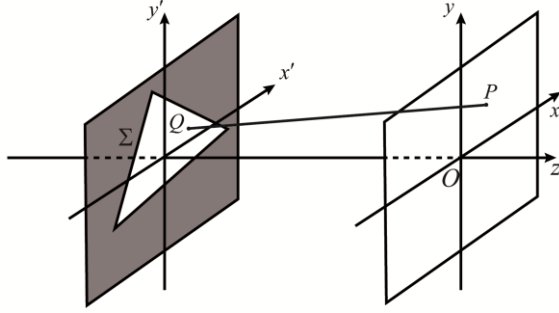


图 1 三角形孔径衍射示意图

如图 1 所示，考虑平面 $x'y'$ 内的任意直角三角形孔径 Σ ，波长为 λ 的平面波垂直入射到该孔径，在与平面 $x'y'$ 平行且距离为 z 的 xy 平面上的衍射场分布为 $U(x, y)$ 。当衍射距离 z 远远大于三角孔尺寸，即满足夫琅和费衍射近似条件 $z \gg k(x'^2 + y'^2)_{\max}/2$ 时，衍射场复振幅分布可由夫琅和费衍射公式得到^[1]，

$$U(x, y) = \frac{e^{i\lambda z} e^{i\frac{k}{2z}(x^2 + y^2)}}{i\lambda z} \iint_{\Sigma} U(x', y') e^{-i\frac{2\pi}{\lambda z}(xx' + yy')} dx' dy'. \quad (1)$$

其中， (x', y') 为三角形孔径 Σ 上的任意一点坐标， (x, y) 为衍射场平面上任意一点坐标， z 为两平面之间距离。为解析地得到任意直角三角形孔径 Σ 的夫琅和费衍射，可以通过平移和旋转操作将平面内任意直角三角形 Σ 变换为基础直角三角形 Δ ，如图 2 所示，其中三角形 Σ 的顶点坐标分别为 (x'_1, y'_1) 、 (x'_2, y'_2) 、 (x'_3, y'_3) ，三角形 Δ 的顶点坐标分别为 $(0, b)$ 、 $(0, 0)$ 、 $(a, 0)$ ，两个三角形顶点之间的对应关系为 $(x'_1, y'_1) \mapsto (0, b)$ 、 $(x'_2, y'_2) \mapsto (0, 0)$ 、 $(x'_3, y'_3) \mapsto (a, 0)$ ，其中 (x'_2, y'_2) 为三角形 Σ 的直角顶点坐标， a 、 b 分别为三角形 Σ 两条直角边长度，则三角形 Δ 可以由三角形 Σ 通过平移 (x'_2, y'_2) 并逆时针旋转 θ 得到，即

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' - x'_2 \\ y' - y'_2 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

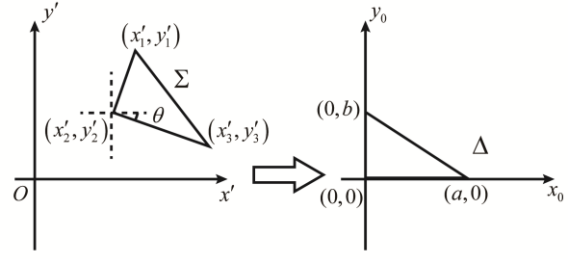


图 2 任意直角三角形 Σ 与基础直角三角形 Δ 的变换关系

对于基础三角形 Δ ，其透过率函数可以表示为，

$$f_{\Delta}(x_0, y_0) = \begin{cases} 1, & (x_0, y_0) \in \Delta \\ 0, & (x_0, y_0) \notin \Delta \end{cases} \quad (3)$$

对应的傅里叶变换可以表示为^[12]，

$$F_{\Delta}(u, v) = \begin{cases} \frac{ab}{2}, & u = v = 0 \\ \frac{a(1 - e^{-i2\pi bv})}{4\pi^2 bv^2} - \frac{ia}{2\pi v}, & u = 0, v \neq 0 \\ \frac{b(e^{-i2\pi au} - 1)}{4\pi^2 au^2} + \frac{ibe^{-i2\pi au}}{2\pi u}, & u = \frac{b}{a}v, v \neq 0 \\ \frac{b(1 - e^{-i2\pi au})}{4\pi^2 au^2} - \frac{ib}{2\pi u}, & u \neq 0, v = 0 \\ \frac{a(1 - e^{-i2\pi bv})}{4\pi^2 v(bv - au)} + \frac{b(e^{-i2\pi au} - 1)}{4\pi^2 u(bv - au)}, & \text{else} \end{cases} \quad (4)$$

根据式(2)的变换关系，以及傅里叶变换性质，可以得到平面内任意直角三角形 Σ 的傅里叶变换为，

$$F_{\Sigma}(u, v) = \iint_{\Sigma} f_{\Sigma}(x', y') e^{-i2\pi(x'u + y'v)} dx' dy' = e^{-i2\pi(ux'_2 + vy'_2)} F_{\Delta}(u \cos \theta - v \sin \theta, u \sin \theta + v \cos \theta). \quad (5)$$

将上式(5)代入式(1)即可得到平面内任意直角三角形的夫琅和费衍射场分布。

一般情况下，复杂结构孔径并不规则，其衍射积分求解十分复杂，难以给出解析解。通常可以将积分区域，即衍射孔径分割为若干简单三角形，并进一步分割为若干直角三角形。根据光波的相干叠加原理，复杂结构孔径的衍射场分布 $U(x, y)$ 可以近似由这些直角三角形孔径衍射场分布相干叠加得到，即 $U(x, y) = \sum_i U_i(x, y)$ 。

1.2 轮廓追踪法

在计算图形学中，轮廓追踪方法 (Boundary

Following) 常被用来检测和提取图像中对象的边界和轮廓^[13]。为解析计算复杂二维孔径的衍射场分布, 本文引入轮廓追踪法从二维图片中获取复杂二维孔径的边界轮廓。轮廓追踪方法常以二值图像为输入, 因此首先需要对原始输入图像进行预处理, 包括图像增强及二值化。对于输入图片 $I(x,y)$, 首先对图像进行灰度处理, 突出目标图像, 并利用自适应阈值方法进行二值化, 将图像分成目标与背景两部分, 获得二值图像 $B(x,y)$ 。在二值图像 $B(x,y)$ 中任取一边界点作为起始点, 然后按照设定方向, 如顺时针或者逆时针方向遍历其邻域像素, 寻找所遇到值为 1 的第一个邻点, 将其作为下一个边界点, 同时将其记录为新的中心点。重复上述操作, 直到回到起始点或无新边界点为止。整个过程记录的一系列边界点构成了一条闭合的边界线, 此即为二维孔径的轮廓。根据孔径结构的复杂程度, 可以对孔径轮廓抽样, 可以得到合适的边界点集合。图 3 为轮廓追踪法的效果示意图, 右侧图中绿色点为轮廓追踪法获取到的边界点, 红色线段为边界点连线, 即为复杂二维结构的轮廓。

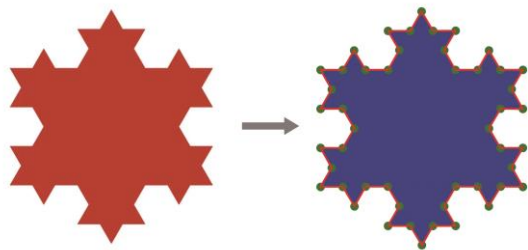


图 3 轮廓追踪法示意图

1.3 耳切法

在计算几何和图形学领域, 多边形的三角剖分是基本问题。为了实现高效准确的三角剖分, 一种较为常见的方法是采用所谓的“耳切法”^[6, 7, 10]。

对于一个简单二维多边形, 其存在若干个凸顶点, 选取一个凸顶点及其相邻的两个顶点组成的三角形构成所谓的“耳朵”。通过剪除这些“耳

朵”, 可以将多边形剖分为一系列三角形。重复这一流程直到多边形被分解为一系列的三角形。

如图 4 所示, 耳切法算法实现步骤具体如下: 首先, 初始化一个空的结果数组和一个包含多边形所有顶点的数组。然后, 遍历顶点数组, 创建一个由该顶点及其相邻的两个顶点组成的三角形, 并检查该三角形是否包含任何其他顶点。如果不包含其他顶点, 则确认该三角形为一个“耳朵”。当找到一个“耳朵”后, 将其剪切掉, 即将其添加到结果数组中, 并从原始数组中移除。重复以上步骤, 直到顶点数组为空, 多边形被完全剖分为三角形。代码对于多边形顶点的处理严格按照逆时针或顺时针方向, 这一点是很有必要的, 因为处理方向的不同可能会影响到顶点凹凸性质的判断以及最终的三角形分解结果。

由于“尖锐”的三角形在某些情况下可能会引起计算错误或不稳定性, 选取让每个三角形的最小角尽可能大的分解结果。若两个三角形有公共部分, 尝试将它们合并为一个四边形, 然后使用尝试将这个四边形划分为两个新的三角形并计算两种方式的最小角的弧度值, 然后选择元最小角最大的一种方式进行切割。在优化过程中, 需要确保新生成的两个三角形不会与优化列表中的其他三角形有重叠。这是通过遍历剩余的其他三角形, 检查新生成的两个三角形的面积的大小来验证的。只有当所有其他三角形都不与新生成的两个三角形有重叠时, 才会用这两个新的三角形分割方式替换原来的三角形分割方式。

最后, 整个优化过程结束后, 最终得到每个四边形的最优划分方式, 从而使得整个剖分系统的最小角最大。



图 4 耳切法示意图

为了将多边形分解成直角三角形，需要在耳切法的结果上进行操作。首先，判断分解出来的每个三角形是否为直角三角形。如果不是直角三角形，选择其中最长的边，构造该边所对应的高，则该底边的高将三角形分解成两个直角三角形。

对于含有弧形边界的复杂孔径，可以采用多边形细分来近似表示。如图 5 所示，以圆形孔径为例，以圆弧的起点、二等分点和末点构建初始三角形，并对二等分点两侧的子圆弧重复迭代，通过调整迭代次数，控制分割三角形的数量，实现对近似精度的调节。

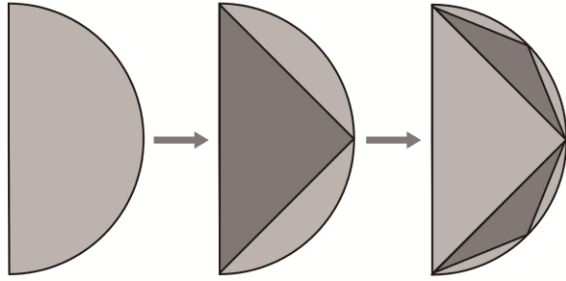


图 5 圆弧的多边形近似示意图

2 实验方案

根据上述理论推导公式，搭建如图 6 所示的夫琅和费衍射实验验证光路。激光器（天津港东 GY-10）发出的激光波长为 $\lambda = 632.8\text{nm}$ ，经过扩束镜扩束准直后，垂直入射到目标孔径薄板上。孔径薄板位于凸透镜的物方焦点处，且凸透镜的焦距 $f = 150\text{mm}$ 。在凸透镜的像方焦点处放置 CCD 相机（大恒图像 MER-310-12UC，分辨率为 2064×1536 ，像素大小为 $3.2\mu\text{m}$ ）用以观察并记录孔径夫琅和费衍射场分布的总体情况。实验时需保证所有光学元件等高同轴。孔径薄板垂直于光轴放置以确保衍射光场的准确性。为能够更好地观察衍射场的整体情况，在光路中加入合适的衰减片，调节 CCD 相机曝光情况，使得凸透镜傅里叶平面的高频分量能够被清晰记录。



图 6 夫琅和费衍射实验光路示意图。

3 实验结果及分析

3.1 夫琅和费衍射实验结果

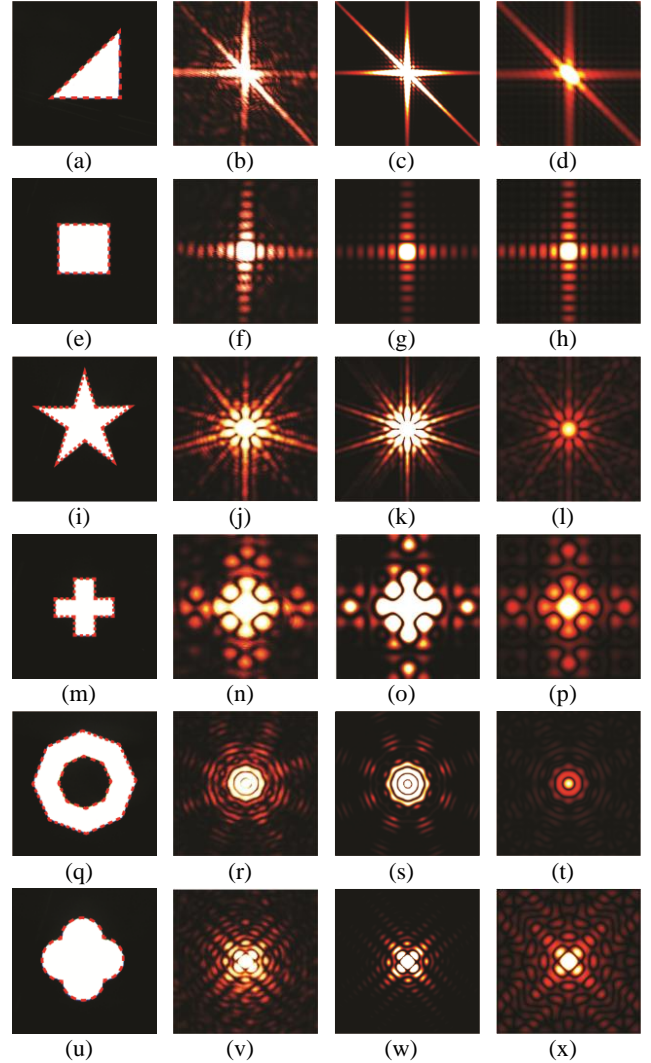


图 7 不同结构孔径的夫琅和费衍射结果，第一列为孔径显微镜观察图；第二列为实验所测的衍射光斑；第三列为本文算法计算结果；第四列为快速傅里叶变换计算结果。

为了验证上述算法可行性，本文设计并制备了多种不同孔径的薄板，包括矩形孔、十字孔（孔径尺寸约为 $300\mu\text{m}$ ）以及简单三角形孔、星形孔、八边形环、海棠窗孔（孔径尺寸约为 $500\mu\text{m}$ ）等。根据图 6 所示搭建实验光路，并观察不同孔径

的夫琅和费衍射场分布。实验结果如图 7 所示，其中第一列为各种孔径的显微镜成像，红色虚线框为孔径的边界；第二列为对应孔径的夫琅和费衍射实验结果，第三列为本文理论计算结果；第四列为快速傅里叶变换计算结果。对比分析可知，本文提出的基于耳切法的夫琅和费衍射解析算法能够很好地得到孔径的夫琅和费衍射结果，而且解析算法的计算结果与快速傅里叶变换算法结果及实验结果均能符合得很好。对于不同的孔径，解析算法均能适用。特别地，对于图 7(u)所示包含弧形边界的孔径，其计算结果亦符合得很好。需要注意的是，图 7 第二列所示的孔径衍射场分布实验结果存在一定的杂散光。这是因为实验所用样品采用透明塑料薄片镀膜制备得到，而孔径透射部分并非真正镂空，其衬底存在少量杂质，影响衍射光质量。

3.2 复杂孔径衍射场角分布

为分析前文所述的基于耳切法的夫琅和费衍射解析算法的准确性，考虑正多边形的夫琅和费衍射场分布的对称性，实验测量正多边形孔径的衍射场分布，确定“星芒”的角向分布，即光强极大值之间的夹角 θ_i ，求得平均值 $\bar{\theta}$ ，并将实验值标准差作为 A 类不确定度 u_A ；同时，对于 B 类不确定度，认为其服从标准分布，考虑实验所用的 CCD 相机分辨率为 2064×1536 ，像素大小为 $3.2 \mu\text{m}$ ，衍射场分布的中心与 CCD 相机的中心重合，则测量光强极大值角分布的最小分辨角度 $\Delta\theta$ 满足 $\sin \Delta\theta = 1/768$ ，可得 $\Delta\theta = 0.07^\circ$ ，则 B 类不确定度为 $u_B = \Delta\theta / \sqrt{3} = 0.04^\circ$ ；合成不确定度可以由 A 类不确定度和 B 类不确定度计算得到，即 $u_c = \sqrt{u_A^2 + u_B^2}$ ；取包含概率为 95%，则以包含因子 $k = 2$ 计算扩展不确定度 $U = ku_c$ 。各类正多边形的夫琅和费衍射实验结果的不确定度分析结果如表 1 所示。由此可见，根据耳切法计算得到的夫琅和费衍射结果与实验测量所得结果一致，本文提出的算

法是有有效的、准确的。

表 1 正多边形夫琅和费衍射角分布不确定度分析结果

孔形状	边长 / μm	$\bar{\theta}/^\circ$	不确定度/ $^\circ$			
			u_A	u_B	u_c	U
八边形	250	45.00	0.99	0.42	1.08	2.2
	300	45.00	0.37	0.42	0.56	1.1
六边形	200	60.00	1.86	0.42	1.91	3.8
	250	60.00	1.13	0.42	1.21	2.4
三角形	300	60.00	1.88	0.42	1.92	3.8
	500	60.00	2.83	0.42	2.87	5.7
正方形	550	60.00	1.84	0.42	1.89	3.8
	250	90.00	0.24	0.42	0.49	1.0
	300	90.00	0.31	0.42	0.52	1.0

3.3 算法应用

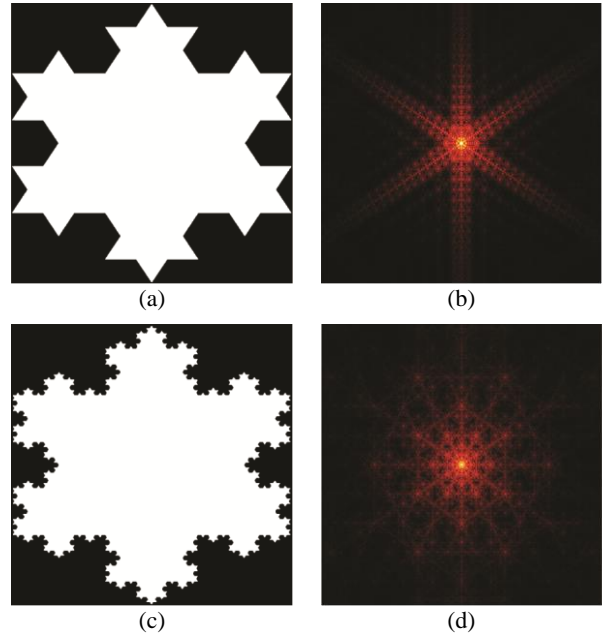


图 8 复杂分形结构及其夫琅和费衍射。

为了进一步验证基于耳切法的夫琅和费衍射解析算法的有效性，以复杂分形结构为例，计算复杂分形结构的衍射场分布，结果如图 8 所示。图 8(a)、(c)分别为第二次、第四次迭代生成的科赫（Koch）雪花图形。科赫雪花是一种典型的分形结构，其每一边由科赫曲线构成，即将一边三等分，取中间线段向外作等边三角形，移除中间线段，即可得到新的科赫曲线。图 8(b)、(d)分别为图 8(a)、(c)对应科赫雪花图形的夫琅和费衍射解析

计算结果。从结果不难看出，本文算法能够有效地处理较为复杂的二维结构，得到复杂结构的解析夫琅和费衍射结果。

此外，基于耳切法的夫琅和费衍射解析算法还能够有效处理非周期光栅的衍射场，如缺刻光栅^[14]、啁啾光栅、弧形光栅等，并且能够结合遗传算法、模拟退火算法、深度学习等各种优化算法，进一步优化设计非周期光栅各级衍射峰的衍射效率。相关研究不在本文讨论范围，将在后续研究作进一步探讨。

4 结论

本文提出了一种基于耳切法的复杂结构夫琅和费衍射解析算法。采用耳切法与弧形近似的方法将复杂结构剖分为若干直角三角形，通过平移和旋转等坐标变换操作将任意直接三角形的傅里叶变换转换为直角三角形傅里叶变换的计算，对每个三角形的衍射光场的相干叠加，最终可以导出复杂结构的夫琅和费衍射解析解。搭建夫琅和费衍射实验光路，研究了多种复杂结构的衍射结果，通过对比实验结果、本文解析算法结果以及快速傅里叶变换结果，并进一步计算了衍射角分布不确定度，证实了基于耳切法的夫琅和费衍射解析算法的可行性及其准确性。

本文提出的解析算法为求解复杂结构衍射提供了一种可行方法。在后续的研究工作中，一方面，在此基础上可以结合各种优化算法可以进一步研究光栅衍射级次优化、衍射孔径逆向设计等问题；另一方面，可以通过引入局域坐标变换，推广到非平行平面的衍射场分布的计算，也即能够计算三维空间物体的衍射场，可用于全息三维显示等应用场景。此外，由于轮廓追踪算法中对参数依赖性高，后续的研究工作将探索参数的自动化调节方法，便于得到最优化参数，提高算法效率。

参考文献：

- [1] GOODMAN J W. Introduction to Fourier Optics, 3rd edition [M]. Roberts & Company Publishers, 2005.
- [2] PEDROTTI F L, PEDROTTI L M, PEDROTTI L S. Introduction to Optics [M]. Cambridge University Press, 2017.
- [3] HECHT E. Optics, Global Edition [M]. Pearson Education Limited, 2016.
- [4] 陈敏, 赵福利, 董建文. 光学 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2018.
- [5] LAMOT M, ZALIK B. A contribution to triangulation algorithms for simple polygons [J]. Journal of Computing and Information Technology - CIT, 2000, 8 (4): 319-31.
- [6] MEISTERS G H. Polygons Have Ears [J]. The American Mathematical Monthly, 1975, 82 (6): 648-51.
- [7] ELGINDY H, EVERETT H, TOUSSAINT G. Slicing an ear using prune-and-search [J]. Pattern Recognition Letters, 1993, 14 (9): 719-22.
- [8] HERTEL S, MEHLHORN K. Fast triangulation of simple polygons, Berlin, Heidelberg, F, 1983 [C]. Springer Berlin Heidelberg.
- [9] SEIDEL R. A simple and fast incremental randomized algorithm for computing trapezoidal decompositions and for triangulating polygons [J]. Computational Geometry, 1991, 1 (1): 51-64.
- [10] EBERLY D H. Triangulation by Ear Clipping [J/OL] May 2024. <https://www.geometrictools.com>.
- [11] NARKHEDE A, MANOCHA D. VII.5 - Fast Polygon Triangulation Based on Seidel's Algorithm [M]//PAETH A W. Graphics Gems V. Boston; Academic Press. 1995: 394-7.
- [12] AHRENBERG L, BENZIE P, MAGNOR M, et al. Computer generated holograms from three dimensional meshes using an analytic light transport model [J]. Appl Opt, 2008, 47 (10): 1567-74.
- [13] 冈萨雷斯 拉, 伍兹 理, 埃丁斯 史. 数字图像处理 (MATLAB 版) [M]. 第二版. 北京: 电子工业出版社, 2020.
- [14] 刘云啸, 田瑞琳, 王立豪. 缺刻光栅: 一种特殊不均匀光栅的研究 [J]. 科技创新导报, 2013, (20): 2-5.

Algorithm for Diffraction of Complex Apertures Based on Ear-Clipping Method

LU Shang-run¹, JIAN Bin-yang¹, HUANG Wei-zheng¹, LU Fang-rui¹, ZHAO Ning¹,
TAN Chuang¹, PANG Xiao-ning^{1,2}

(1. School of Physics; 2. National Demonstration Center for Experimental Physics Education,
Sun Yat-sen University, Guangzhou, 510275, China)

Abstract: Diffraction is a fundamental phenomenon in optics. Deriving an analytical solution for the diffraction of complex apertures is generally challenging. To obtain the Fraunhofer diffraction patterns of complex apertures, the ear-clipping method is employed to approximate the aperture by dividing it into multiple triangles. Consequently, the total diffraction field of the aperture can be expressed as a superposition of the diffraction fields of these triangles. The Fourier transform of each arbitrary triangle is computed by converting it, through coordinate transformation, into the Fourier transform of a basic right triangle. Subsequently, an experimental setup for Fraunhofer diffraction was constructed to measure the diffraction field distribution for different apertures. The angular distribution uncertainty was calculated to analyze the diffraction field of regular polygonal apertures, verifying the feasibility and accuracy of the proposed analytical algorithm. Finally, the diffraction field of complex fractal apertures was computed, demonstrating the algorithm's effectiveness in calculating diffraction fields of complex apertures.

Keywords: Triangulation; Ear-Clipping Method; Complex Aperture; Fraunhofer Diffraction