中山大學
SUN YAT-SEN UNIVERSITY

经 典 与 量 子 信 息 论

路尚润 [1,2]
何子宇 [1,2]
[1] 物理学院
[2] 中山大学, 广州, 中国

2023.12.18

CONTENTS

Part.01

经典信息论

· 自信息

信息是用来消除不确定性的东西，事件发生的概率越大，那么事件的信息量就越小。

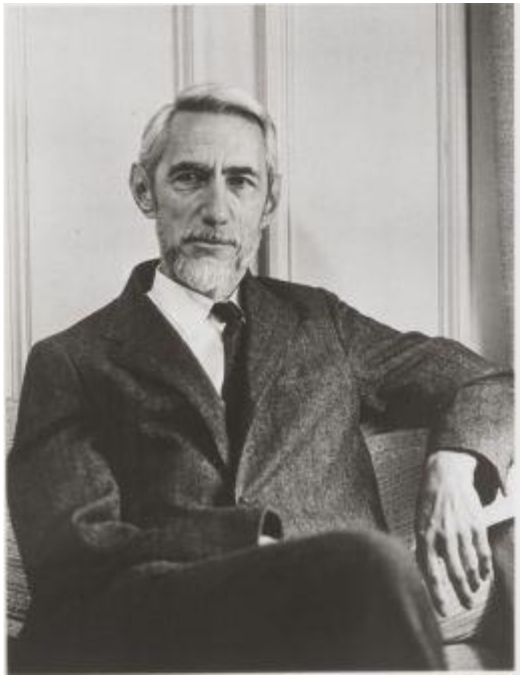
自信息应当满足以下性质：

- 连续性：信息I随着p的变化而连续变化；
- 单调递减性：事件发生的概率越小，确定其发生的信息量越大；
- 当 $p \to 0$ 时，$I \to \infty$。即确定不可能事件发生的信息量为无穷大；
- 当 $p \to 1$ 时，$I \to 0$。即确定一定发生的事件信息量为0；
- 独立随机事件的自信息之和等于各自信息的代数和。

满足以上要求的表达式

$$I(X = x_i) = \log\frac{1}{p(X = x_i)},$$

其中X为随机变量，x_i为其某个取值。



克劳德·艾尔伍德·香农

· 联合自信息

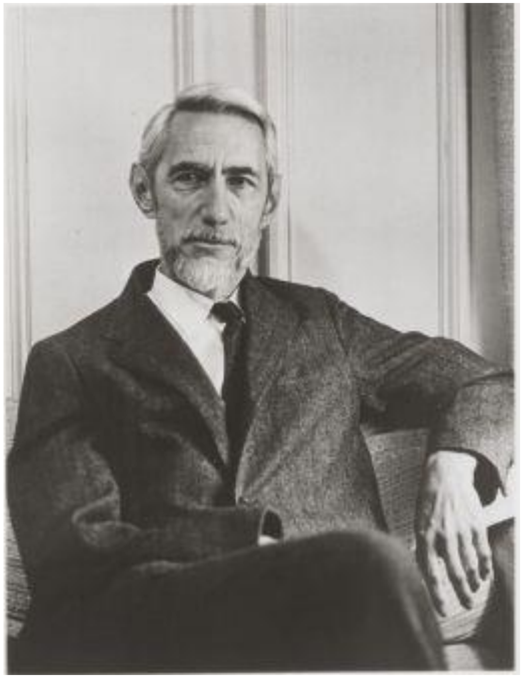
定义两个事件的联合自信息

$$I(X=x_i,Y=y_i)=\log\frac{1}{p(X=x_i,Y=y_i)}.$$

若两事件独立，则

$$\begin{aligned}I(X=x_i,Y=y_i)&=\log\frac{1}{p(X=x_i,Y=y_i)}\\&=\log\frac{1}{p(X=x_i)\cdot p(Y=y_i)}\\&=\log\frac{1}{p(X=x_i)}+\log\frac{1}{p(Y=y_i)}\\&=I(X=x_i)+I(Y=y_i).\end{aligned}$$

满足第五条性质。



克劳德·艾尔伍德·香农

· 信息熵(1)

为量化一个随机变量的不确定性大小，引入信息熵的概念。

Shannon规定了其性质：

- 熵是连续的：$f(p_1, p_2, \cdots, p_n)$对于p_i连续变化；
- 熵在等概率时，为单调函数：即

$$H(N) = f\left(\frac{1}{N}, \frac{1}{N}, \cdots, \frac{1}{N}\right).$$

若$M > N$，则$H(M) > H(N)$。

- 熵具有可加性(递推性)：即

$$f(p_1, p_2, \cdots, p_n) = f(p_1 + p_2 + \cdots + p_m, p_{m+1}, \cdots, p_n) + (p_1 + p_2 + \cdots + p_m) f(p_1', p_2', \cdots, p_m'),$$

其中$p_i' = \frac{p_i}{p_1 + p_2 + \cdots + p_m}$。

含义：独立观察n个事件的不确定性等价于先对m个事件合并观察的不确定性再加上m个事件按概率出现时的不确定性。

· 信息熵(2)

根据熵的性质，可以唯一地导出其表达式

$$H(X) = E\big(I(X = x_i)\big) = \sum_{i=1}^{n} p(X = x_i) \log \frac{1}{p(X = x_i)}.$$

称为经典信息熵，一般以2为底。

· 一些例子

熵越大，不确定性越大，该随机变量包含的信息量越大。

- 抛硬币X：$H(X) = 1$
- 投骰子Y：$H(Y) = \log 6$
- 一个人收到由1bit发出的一段信号，0的概率为p，1的概率为$(1-p)$，N足够大时，所有的排列组合数为

$\frac{N!}{(pN)!((1-p)N)!} \approx \frac{N!}{p^{pN}(1-p)^{(1-p)N}} = 2^{NH}$，其中单bit的信息熵$H = -p\log p - (1-p)\log(1-p)$。

意味需要1个、log6个和NH个bit编码表示事件发生的结果，即熵是平均意义上对随机变量的最小编码长度。

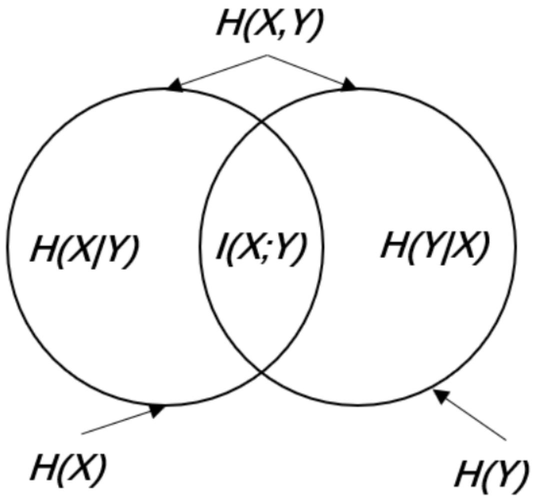
· 联合熵与条件熵

对服从联合分布的 $p(x,y)$的一对离散变量 (X,Y)，其联合熵为

$$H(X,Y)=\sum p(X=x_i,Y=y_i)\log\frac{1}{p(X=x_i,Y=y_i)}.$$

如果X与Y独立，应当有$H(X,Y)=H(X)+H(Y)$。
同时也可以定义一个随机变量在另一个随机变量给定时的条件熵，为

$$H(X|Y)=\sum p(X=x_i,Y=y_i)\log\frac{1}{p(X=x_i|Y=y_i)}.$$



熵的文氏图

两者有着一定的联系：可以从条件信息 (condition information) 去考虑，条件熵$H(X|Y)$的意义是：在已知Y的条件下，获得X对于整体信息量的增加，即

$$H(X,Y)=H(X)+H(Y|X)=H(Y)+H(X|Y).$$

也可以称为链式法则 (chian rule of entropy)。

· 互信息

互信息 (mutual information) 是一个随机变量包含另一个随机变量程度的度量，为

$$I(X;Y) = H(X) + H(Y) - H(X,Y) = H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X).$$

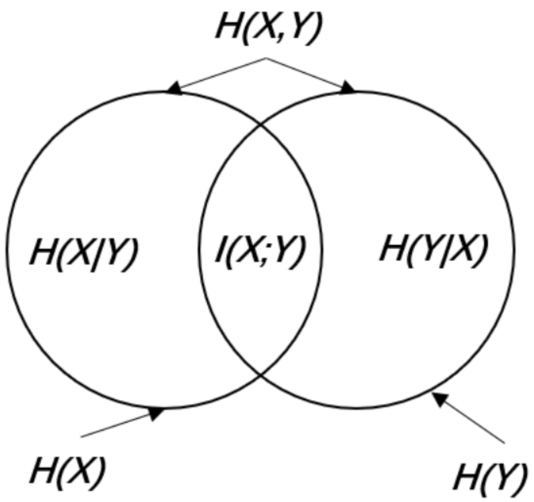
表示在已知 Y 条件发生的条件下，对 X 的结果了解的信息的增加程度。

一些性质：

- $I(X;Y) = I(Y;X)$，即 X 包含 Y 的信息与 Y 包含 X 的信息一致；
- 若 X 与 Y 一一对应，如$Y = 2X$，则 $H(X|Y) = H(Y|X)$，且$I(X;Y) = H(X) = H(Y)$；
- 如果 X 与 Y 独立，由熵的可加性可知，互信息 $I(X;Y) = 0$。

根据定义式可以写出：

$$I(X;Y) = \sum_{x,y} p(X = x_i, Y = y_i) \log \frac{p(X = x_i, Y = y_i)}{p(X = x_i)p(Y = y_i)}.$$



熵的文氏图

· **相对熵**(Kullback-Leibler**散度**)

相对熵指的是不同的概率分布之间信息的差距。也可以说是两种概率分布之间的“距离”。
对于两个分布密度函数 $p(x)$ 与 $q(x)$，相对熵的定义为

$$D(p||q) = \sum_{x} p(X=x) \log \frac{p(x)}{q(x)}.$$

可以得到，相对熵满足

$$H_p(X) = H_u(X) - D(p||u) = \log|\chi| - D(p||u).$$

其中 u 为均匀分布，χ为变量 X 的分布范围。
上式可以简单地理解为，当我们对分布完全未知时，可以认为其是均匀分布，当我们知道分布后，即可利用相对熵进行修正，其公式类似于“距离”的可加性，因此也可称其为两种分布之间的“距离”。
从而互信息可以表示为

$$I(X;Y) = \sum_{x,y} p(X=x_i, Y=y_i) \log \frac{p(X=x_i, Y=y_i)}{p(X=x_i)p(Y=y_i)} = D(p(X=x_i, Y=y_i)||p(X=x_i)p(Y=y_i))$$

$$H(X,Y) = H(X) + H(Y) - D(p(X=x_i, Y=y_i)||p(X=x_i)p(Y=y_i))$$

Part.02

纯态与混态

· 纯态与混态

- 纯态

纯态是指能用单一波函数描述的态，对于两体系统 A+B来说，即Hilbert空间 $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$中的任意相干叠加态，即

$$|\Psi\rangle_{AB} = \sum_{nm} C_{nm} |\Psi_m\rangle_A \otimes |\psi_n\rangle_B ,$$

其中$|\Psi_m\rangle_A \otimes |\psi_n\rangle_B$为正交归一的基矢，纯态一般可分为直积态(可分离态)与纠缠态(不可分离态)。

- 混态

混态是若干个纯态 $\left|\Psi^i\right\rangle_{AB}$的非相干混合，各个纯态$\left|\Psi^i\right\rangle_{AB}$之间的相位并不固定，因此并不存在相干叠加的干涉问题，且态之间也未必一定要正交。

确切描述非相干混合的不同纯态的方法是利用纯态系综的概念：

$$\{|\lambda_i\rangle, p_i, i = 1, 2, \cdots, \sum_i p_i = 1\}.$$

即某个系综内态$|\lambda_i\rangle$出现的概率为p_i。

· 直积态与纠缠态

- 对于两量子体系纯态

分别用Hilbert空间$\mathcal{H}_A$和$\mathcal{H}_B$中的矢量$|\psi\rangle_A$和$|\phi\rangle_B$描述，若$|\Psi\rangle_{AB}$可表示为二者的直积，即

$$|\Psi\rangle_{AB} = |\psi\rangle_A \otimes |\phi\rangle_B,$$

则称$|\Psi\rangle_{AB}$为直积态，否则称其为纠缠态。

- 对于N 体量子系统的纯态

若 N 体量子体系的量子态可表示为

$$|\Psi\rangle_{ABC\cdots} = |\psi\rangle_A \otimes |\phi\rangle_B \otimes |\chi\rangle_C \otimes \cdots,$$

其中

$$|\Psi\rangle_{ABC\cdots} \in \mathcal{H}_{ABC\cdots}, \mathcal{H}_{ABC\cdots} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_C \otimes \cdots,$$

$$|\psi\rangle_A \in \mathcal{H}_A, |\phi\rangle_B \in \mathcal{H}_B, |\chi\rangle_C \in \mathcal{H}_C, \cdots.$$

则称$|\Psi\rangle_{ABC\cdots}$为直积态，否则称为纠缠态。

Part.03

密度矩阵

· 纯态的密度矩阵

对于Fock态，有投影算符$|n\rangle\langle n|$，其可以将某个态$|\psi\rangle$投影到$|n\rangle$上，并得到其对应的相位与大小。

将上述概念进行推广，考虑在薛定谔绘景下，态矢随着时间演化，设量子态为 $|\psi(t)\rangle$，且其满足归一化条件 ($\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle = 1$)，则可定义其相应的密度算符 (Density Operator)

$$\rho(t) = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|\,.$$

显然其满足

$$\rho^\dagger = \rho, \rho^2 = \rho.$$

采用Fock表象，其为离散的，可表示为矩阵形式，称为密度矩阵(Density Matrix)，其矩阵元为

$$\rho'_{nn}(t) = \langle n|\rho(t)|n'\rangle = \langle n|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|n'\rangle = C_n(t)C^*_{n'}(t),$$

其中$C_n(t) = \langle n|\psi(t)\rangle$描述态 $|\psi(t)\rangle$在$|n\rangle$上的分量大小与相位。其对角元为

$$\rho_{nn}(t) = |C_n(t)|^2 = |\langle n|\psi(t)\rangle|^2 \geq 0,$$

描述的是测量粒子数算符$\hat{n}$得到n的概率，且满足

$$Tr\rho = \sum_n |C_n(t)|^2 = 1.$$

· 纯态的密度矩阵描述

密度矩阵是不同于态的一种描述体系的方法。

引入密度矩阵后，有

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \langle \psi | \mathcal{O} | \psi \rangle = \sum_{nn'} \langle \psi | n \rangle \langle n | \mathcal{O} | n' \rangle \langle n' | \psi \rangle = \sum_{nn'} C_n^* \mathcal{O}_{nn'} C_{n'} = \sum_{nn'} \rho_{n'n} \mathcal{O}_{nn'}$$

$$= \sum_{n'} (\rho \mathcal{O})_{n'n'} = \sum_{n} (\mathcal{O} \rho)_{nn} = Tr(\mathcal{O}\rho) = Tr(\rho\mathcal{O}).$$

密度矩阵是薛定谔表象下的一个含时算符，利用Schrödinger方程

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = \frac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t} \langle \psi(t)| + |\psi(t)\rangle \frac{\partial \langle \psi(t)|}{\partial t} = \frac{H|\psi(t)\rangle}{i\hbar} \langle \psi(t)| + |\psi(t)\rangle \frac{\langle \psi(t)| H}{i\hbar} = \frac{1}{i\hbar}[H, \rho(t)].$$

称为刘维尔方程，即密度算符随时间的演化方程。

· 混态的密度矩阵

混态并不能单纯的用某个态矢描述，因此难以得到体系的信息，密度矩阵在此即可以发挥重要的作用。
根据正规算符的谱分解，总可以有体系中正交完备的态矢为 $|\psi_i\rangle(i=1,2,3,\cdots)$，此时需要用混态系综的概念去描述，假设时间 t 时系统位于态$|\psi_i\rangle$的概率为 p_i，有$0\le p_i\le 1,\sum_i p_i=1$，即一种纯态的混态统计表述。此时密度算符可以定义为

$$\rho=\sum_i p_i|\psi_i\rangle\langle\psi_i|=\sum_i p_i\rho_i\,,$$

其中$\rho_i=|\psi_i\rangle\langle\psi_i|$为与纯态$|\psi_i\rangle$对应的密度算符。可以证明，其此时仍然保持纯态密度算符的某些性质，即

$$(1)\rho^\dagger=\rho,(2)Tr\rho=\sum_i p_i Tr\rho_i=\sum_i p_i=1,(3)\frac{d}{dt}\rho=\sum_i p_i\frac{d\rho_i}{dt}=\frac{1}{i\hbar}\sum_i p_i[H,\rho_i]=\frac{1}{i\hbar}[H,\rho].$$

$$(4)\langle\mathcal{O}\rangle=\sum_i p_i\langle\psi_i|\mathcal{O}|\psi_i\rangle=\sum_i p_i Tr(\rho_i\mathcal{O})=Tr(\sum_i p_i\rho_i\mathcal{O})=Tr(\rho\mathcal{O}).$$

但

$$\rho^2=\sum_i p_i^2|\psi_i\rangle\langle\psi_i|\le\sum_i p_i|\psi_i\rangle\langle\psi_i|=\rho\ (p_i^2\le p_i).$$

不同于态的描述，密度矩阵对混态也有着基本与纯态一致的量子体系描述方式。

· 混态的密度矩阵

混态密度算符

$$\rho = \sum_i p_i|\psi_i\rangle\langle\psi_i| = \sum_i p_i\rho_i\,,$$

其中$\rho_i = |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$为与纯态$|\psi_i\rangle$对应的密度算符。
简单讨论下Fock表象下的混态密度矩阵所代表的意义，此时有

$$\rho_{nn'} = \sum_i p_i\langle n|\psi_i\rangle\langle\psi_i|n'\rangle = \sum_i p_i C_{in}C_{in'}^*\,.$$

其中$C_{in} = \langle n|\psi_i\rangle$，其**对角元**为

$$\rho_{nn} = \sum_i p_i|C_{in}|^2 \geq 0.$$

$|C_{in}|^2$描述的是在纯态$|\psi_i\rangle$中算符$\hat{n}$得到本征值n的概率，而ρ_{nn}描述的即为在混态中测量到本征值n的概率，可以称其为混合态下的量子态$|n\rangle$ 的布居 (population)，即混合态下体系处于$|n\rangle$的概率。
对于**非对角元** $\rho_{nn'}$，其描述的是$|n\rangle$与$|n'\rangle$的相干 (coherence)，若其为 0 则说明二者在此混态下并不相干。
倘若此时Fock表象的基矢即为之前所设的 $|\psi_i\rangle$，则此时ρ即为对角矩阵，对角元$\rho_{nn} = p_n$。

· 约化密度矩阵(1)

对于一个两体复合体系 A+B，假设$|\psi_i\rangle_A \otimes |\varphi_u\rangle_B = |\psi_i\rangle_A|\varphi_u\rangle_B$(直积)构成复合体系的一组完备基，称为非耦合表象。复合体系的任何一个量子态可以表示为其线性组合，即

$$|\Psi\rangle_{AB} = \sum_{iu} a_{iu}|\psi_i\rangle_A|\varphi_u\rangle_B ,$$

其中 $\sum_{i\mu}|a_{i\mu}|^2 = 1$。密度矩阵为

$$\rho_{AB} = |\Psi\rangle_{AB\,AB}\langle\Psi| = \sum_{iujv} a_{jv}^* a_{iu}|\psi_i\rangle_A|\varphi_u\rangle_{BB}\langle\varphi_v|_A\langle\psi_i| .$$

为一个纯态密度矩阵。设$\mathcal{O}_A$为一个可观测量，且其仅仅对 A 系统产生依赖，则在复合体系下，算符可以表示为

$$\mathcal{O} = \mathcal{O}_A \otimes I_B ,$$

其中I_B为B体系内的一个单位算符，作用于B空间，在复合体系下，可以利用纯态密度矩阵计算$\mathcal{O}$的期望值，即

$$\langle\mathcal{O}\rangle = Tr_{AB}(\rho_{AB}\mathcal{O}).$$

· 约化密度矩阵(2)

带入$\rho_{AB} = |\Psi\rangle_{AB\,AB}\langle\Psi| = \sum_{iujv} a_{jv}^* a_{iu} |\psi_i\rangle_A |\varphi_u\rangle_{BB}\langle\varphi_v|_A\langle\psi_i|$，显然有

$$\langle\mathcal{O}\rangle = {}_{AB}\langle\Psi|\mathcal{O}_A \otimes I_B|\Psi\rangle = \sum_{ij\mu} a_{j\mu}^* a_{i\mu}\, {}_A\langle\psi_j|\mathcal{O}_A|\psi_i\rangle_A = Tr_A(\rho_A \mathcal{O}_A).$$

其中

$$\rho_A = \sum_{ij\mu} a_{i\mu} a_{j\mu}^* |\psi_i\rangle_{AA}\langle\psi_j| = Tr_B(\rho_{AB}).$$

称为约化密度矩阵 (reduced density matrix)，其有以下性质

$$(1)\rho_A^\dagger = \rho_A, (2)\rho_A\text{非负}, (3)Tr_A(\rho_A) = 1, (4)\langle\mathcal{O}\rangle = Tr_A(\rho_A \mathcal{O}_A).$$

倘若 $|\Psi\rangle_{AB}$ 为一个直积态，此时子系中的描述也为纯态，则 $\rho_A^2 = \rho_A$ 成立；而更一般的来讲，对较大体系的纯态，其一般是纠缠态，而子体系中的描述则对应混态，此时应当用混态密度矩阵进行描述。

从而我们也可以从约化密度矩阵的角度定义纯态中的直积态与纠缠态，对于一个 N 体复合体系，倘若

$$\rho_{ABC\cdots} = \rho_A \otimes \rho_B \otimes \rho_C \cdots,$$

则可称$|\Psi\rangle_{ABC\cdots}$为一个直积态，否则称为纠缠态。

· 两体Schmidt分解

对于两体的纠缠特性，可以利用Schmidt分解进行研究，对于一个两体复合体系 A+B的任何一个纯态可以表示为

$$|\Psi\rangle_{AB} = \sum_{n\nu} c_{n\nu} |\psi_n\rangle_A \otimes |\varphi_\nu\rangle_B \,,$$

可以利用局域幺正变换得到

$$|\Psi\rangle_{AB} = \sum_{n} \sqrt{p_n} |\psi_n\rangle_A |f_n\rangle_B \,,$$

其中$\sum_\nu c_{n\nu}^* c_{n\nu} = p_n$，令$\lambda_n = \sqrt{p_n}, n = 1, 2, \cdots, M$。其中$\lambda_n$称为 Schmidt 系数，而$M$称为Schmidt数。密度矩阵为

$$\rho_{AB} = |\psi\rangle_{AB\,AB}\langle\psi| = \sum_{nm} \sqrt{p_n p_m} |\psi_n\rangle_A |f_n\rangle_{B\,B}\langle f_m|_A\langle\psi_m| \,,$$

$$\rho_A = Tr_B(\rho_{AB}) = \sum_n p_n |\psi_n\rangle_{A\,A}\langle\psi_n|, \rho_B = Tr_A(\rho_{AB}) = \sum_n p_n |f_n\rangle_{A\,A}\langle f_n| \,.$$

M的数量越大，此时两体系统纠缠的态越多，说明其在一定程度上可以衡量两体纠缠，而Schmidt系数可以用于构造熵，即Von Neumann纠缠熵。利用约化密度矩阵非零对角元相同的性质，定义一个两体纠缠度(纠缠熵)，即

$$S(\rho_A) = S(\rho_B) = -Tr(\rho_A \log \rho_A) = -Tr(\rho_B \log \rho_B) = -\sum_{n=1}^{M} \lambda_n \log \lambda_n \,.$$

Part.04

量子信息论

why量子信息论

量子信息熵
量子纠缠熵/度

1.经典信息熵->定域/可分辨的经典系统的热力学熵

2.热力学熵描述了经典系统在热力学极限下的行为，作为热力学特性函数描述了物质的全部性质

3.需要一个量子系统的熵来描述我们对一个量子系统的**不可知(ignorance)程度/混乱(disorder)程度**，从而描述**量子物态的热力学性质**

4.此外，由于量子纠缠的存在，我们描述两个量子系统关联的程度，尤其是纠缠导致**量子的关联**的程度需要一个度量

5.By the way 纠缠作为一种量子计算与通信的**资源**，从资源论的角度也需要度量(就像有用的功和无用的热一样要区分量子的纠缠以及度量纠缠的大小)

量子信息熵(how to define?)

1.能够退化到经典信息熵

2.满足我们对经典信息熵的所有要求

3.不依赖于表示量子态的表象

4.在幺正演化下应是不变的(在经典里对应哈密顿正则方程演化下不改变经典系统的熵)

纯态的信息熵？ $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$

(1)有概率分布，但不“真实”的概率，测量的意义下的“概率”，本质上是分量。

(2)概率幅是表象依赖的

(3)选取恰当的测量basis可以直接得到确定状态

冯诺依曼熵 $$\mathrm{S}(\rho) = -\mathrm{Tr}(\rho log\rho) = -\sum_i p_i log(p_i)$$

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$$ 正规算子的谱分解

其他的熵同理

Comment

冯诺依曼熵

$$\rho = \sum_i p_i|\psi_i\rangle\langle\psi_i|$$

$$\mathrm{S}(\rho) = -\mathrm{Tr}(\rho log\rho) = -\sum_i p_i log(p_i)$$

冯诺依曼熵不是一个可以测量得到的量

冯诺依曼熵代表一种最小不确定度

量子条件熵

$$S_{A|B} = S_{AB} - S_B$$

条件熵失去了经典信息论的含义

条件熵不是非负的

量子相对熵

$$D(\rho||\sigma) = Tr(\rho log\rho - \rho log\sigma)$$

相对熵度量了两个密度矩阵的“距离”

量子互信息

$$I(A,B) = S_A + S_B - S_{AB}$$

$$I(A,B) = D(\rho_{AB}||\rho_A \otimes \rho_B)$$

互信息为0时，两个系统可分

互信息度量了两个系统包括经典关联的所有关联

冯诺依曼熵的不可测性

对于冯诺依曼熵

$$S(\rho) = -\mathrm{Tr}(\rho log \rho) \quad \rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$$

测量得到冯诺依曼熵的p_n上必须在密度矩阵对角化的basis上进行测量

但你并不知道密度矩阵的对角化basis $|\psi_i\rangle$ 长什么样，所以你也不知道该怎么施加测量。

Btw，你也没有办法通过测量得到一个密度矩阵的basis

最小不确定度

von Neumann在1932年提出了**观测熵(observable entropy)**的概念：

$$S(\rho_A)_M = -\sum_m p_m log p_m$$

即熵衡量了对系统的**不可知(ignorance)程度**，p_m为观测到M为本征值m的概率。

原先的冯诺依曼熵实际上是一种**least uncertainty**，可以证明任意态的冯诺依曼熵都小于等于观测熵(纯态例)。

为观测熵定义线性映射算子：

$$P(*) := \sum_i Tr[M_i *]|i\rangle\langle i|$$

其作用为在基M_i上测量并将概率赋予到新密度矩阵的第i个对角元上

可以由相对熵的定义证明：

$$S(\rho)_M - S(\rho) = D(\rho||u) - D(P(\rho)||P(u))$$

由于相对熵的单调性(monotonicity)上式大于0

观测熵的熵增定律

假设系统初态刚被创造出来是完全可知的(fully observable)

$$S(\rho(t_0)) = S(\rho(t_0))_M \qquad \rho(t_1) = U\rho(t_0)U^\dagger$$

孤立系统的演化熵增，但幺正演化不改变系统的冯诺依曼熵(trace内的算符可以交换)

即使是幺正演化，演化后的观测熵：

$$S(\rho(t_1))_M = -\sum_i Tr(M_i U\rho(t_0)U^\dagger) log \frac{Tr(M_i U\rho(t_0)U^\dagger)}{Tr(M_i)}$$

由于取迹内的算子可交换顺序：

$$S(\rho(t_1))_M = -\sum_i Tr((U^\dagger M_i U)\rho(t_0)) log \frac{Tr((U^\dagger M_i U)\rho(t_0))}{Tr(U^\dagger M_i U)} = S(\rho(t_0))_{U^\dagger MU}$$

又因为系统关于 $U^\dagger MU$ 不是完全可知的，所以幺正演化后的熵非0。

更普适的证明见

Riera-Campeny, A., Sanpera, A., & Strasberg, P. (2021). Quantum systems correlated with a finite bath: nonequilibrium dynamics and thermodynamics. *PRX Quantum*, *2*(1), 010340.

纠缠的度量

量子互信息

$$I(A,B)=S_A+S_B-S_{AB}$$

$$I(A,B)=D(\rho_{AB}||\rho_A\otimes\rho_B)$$

非纠缠态的互信息不为0，不是一个好的纠缠度量

$$\rho_{AB}=p_0\rho_{A0}\otimes\rho_{B0}+p_1\rho_{A1}\otimes\rho_{B1}$$
$$\rho_A=p_0\rho_{A0}+p_1\rho_{A1}$$
$$\rho_B=p_0\rho_{B0}+p_1\rho_{B1}$$

好的纠缠度量应该是什么形式?

纠缠度应非负

在LOCC下纠缠度不能增加

对于可分态 $\sum_i p_i\rho_{Ai}\otimes\rho_{Bi}$ 纠缠度应当为0

纠缠度应当具有连续性

纠缠熵与形成纠缠度

两体纯态纠缠熵

$$E(|\psi\rangle\langle\psi|) = S(tr_A|\psi\rangle\langle\psi|)$$

如果是混态？形成纠缠度(Eof)：

$$E(\rho) = inf\sum_i p_i E(|\psi_i\rangle\langle\psi_i|)$$

为什么叫做形成纠缠度：
它描述了我们可以用几个最大纠缠态(对于两体就是Bell state)和LOCC来构造所需的态。

Wootters, W. K. (1998). Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits. *Physical Review Letters*, *80*(10), 2245.

Part.05

数值实例

纠缠态的制备

构造哈密顿量：

$$H = \hbar\omega_a\sigma_{az} + \hbar\omega_b\sigma_{bz} + \hbar g(\sigma_{a+}\sigma_{b-} + \sigma_{b+}\sigma_{a-})$$

在 $H_a \otimes H_b$ 空间的本征basis中表示

$$\begin{pmatrix} \omega_a+\omega_b & & & \\ & \omega_a-\omega_b & g & \\ & g & -\omega_a+\omega_b & \\ & & & -\omega_a-\omega_b \end{pmatrix}$$

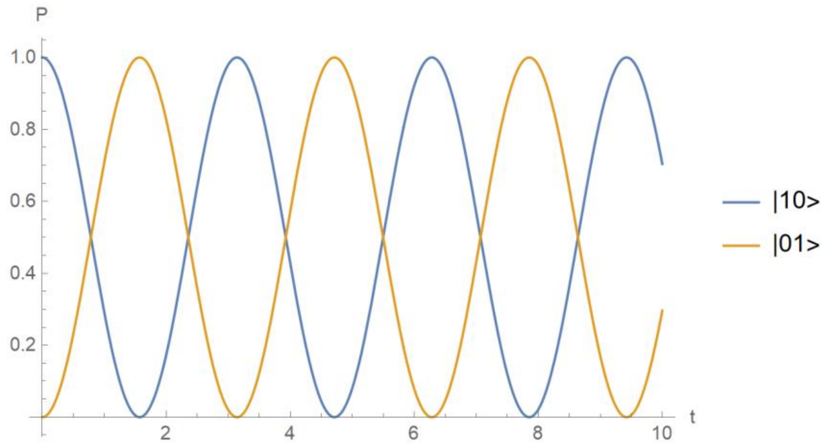
消除对角元

$$\omega_a = \omega_b$$

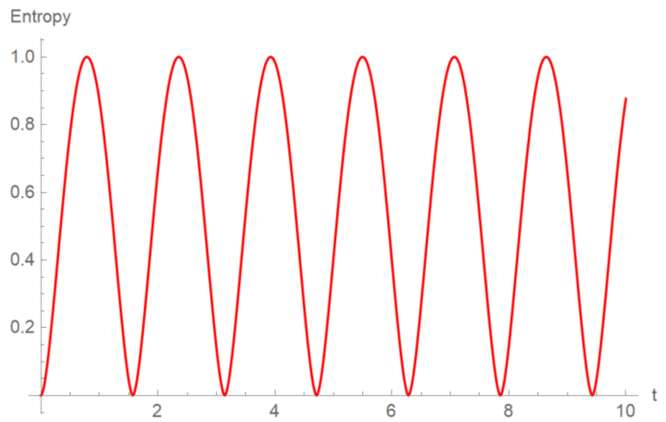
给定初始条件

$$|\psi_a\rangle = |1\rangle \quad |\psi_b\rangle = |0\rangle$$

量子态演化



纠缠熵演化



系统的热化

开放系统演化满足主方程(master equation)，如果是与玻色热库接触，演化满足：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\rho_S(t) = -\frac{\Gamma}{2}\bar{n}(\omega_0)[ss^+\rho_S(t) - s^+\rho_S(t)s] - \frac{\Gamma}{2}[\bar{n}(\omega_0)+1][s^+s\rho_S(t) - s\rho_S(t)s^+] + \mathrm{H.c.}$$

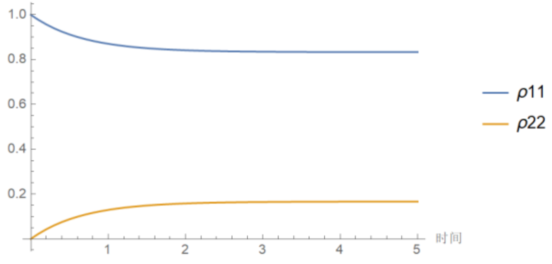
热库的平均光子数为：

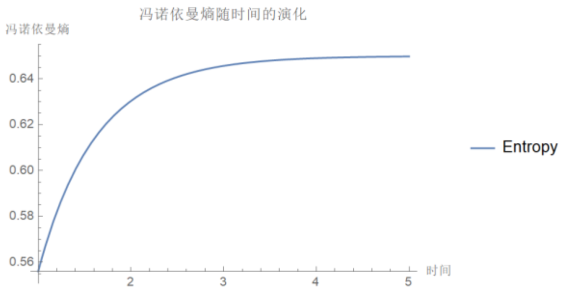
$$\bar{n}(\omega_0) = \frac{1}{\exp\left(\frac{\hbar\omega_0}{k_B T}\right) - 1}$$

Γ 为系统与热库的耦合强度

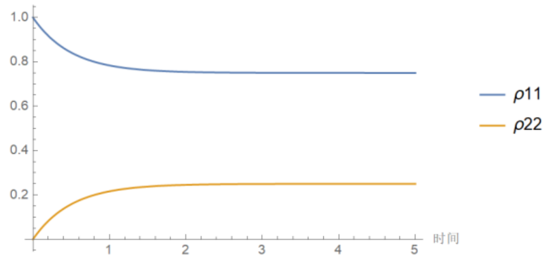
量子态演化

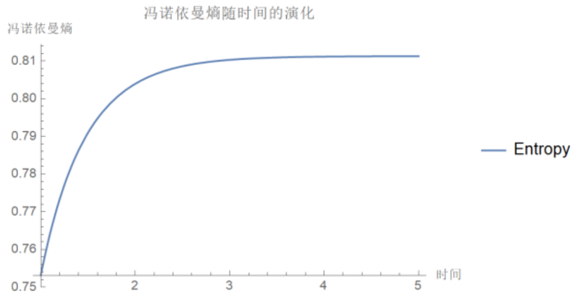
初态 $|\psi\rangle = |0\rangle$



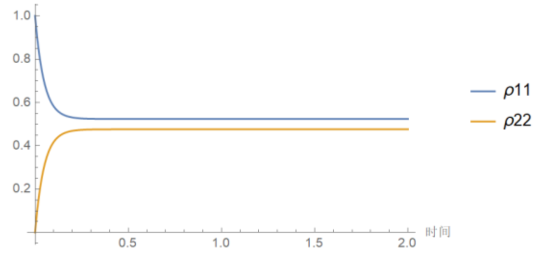


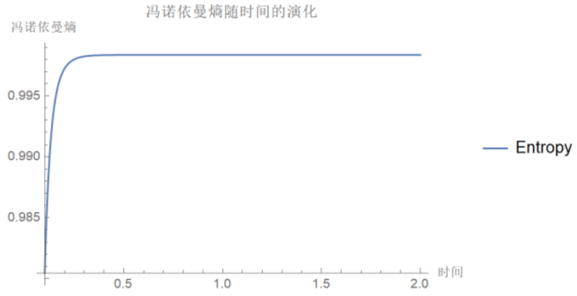
n=0.25





n=0.5





n=10

Part.00

Appendix

·References

[1] 曾谨言. 量子力学. 卷II 5版[M]. 北京：科学出版社, 2013.

[2] Witten, E. (2020). A mini-introduction to information theory. La Rivista del Nuovo Cimento, 43(4), 187–227.

[3] H. Harodecki, et al. Quantum entanglement[J/OL]. Rev. Mod. Phys., 2009, 81: 865-942. https :

[4] Schmidt, E. Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. Math. Ann. 63, 433–476 (1907).

[5] Riera-Campeny, A., Sanpera, A., & Strasberg, P. (2021). Quantum systems correlated with a finite bath: nonequilibrium dynamics and thermodynamics. PRX Quantum, 2(1), 010340.

[6] Wootters, W. K. (1998). Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits. Physical Review Letters, 80(10), 2245.