SIFT. Week 2.

~~一、尺度空间生成~~

1. 尺度空间生成. 2. 检测尺度空间极值点 3. 精确定位极值点 4. 每关键点指定方向参数.
5. 关键点描述子生成

一、尺度空间生成:
(高斯核是实现尺度变换的唯一线性核).

⇒定义: $L(x,y,\boxed{\sigma}) = G(x,y,\sigma) * I(x,y)$. $G(x,y,\sigma) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$

尺度空间因子, 决定平滑程度, 小σ精细.

$DoG = D(x,y,\sigma) = [G(x,y,\boxed{k}\sigma) - G(x,y,\sigma)] * I(x,y)$ → 相邻两个尺度空间的比例因子.

>> 目的: 构建出在不同尺度下都存在的特征点.

$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ ⇐ laplacian

$\nabla^2 G$ 好, 但计算量太大.
用DoG.

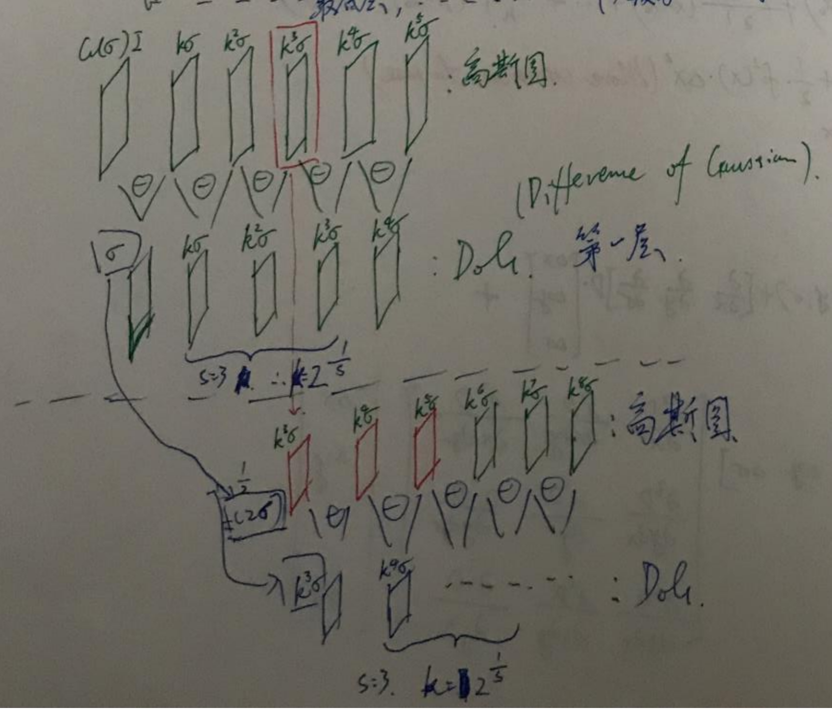
$= L(x,y,k\sigma) - L(x,y,\sigma)$.

$\sigma = 1.6$ 通常

尺度空间: 图像金字塔 downsample + Gaussian filtering 得到.

⇒ 有多组, 每组有 s层 (DoG), 每层之间尺度不同 ($\sigma$不同), 每层尺度差了 $\boxed{k}$, $k = 2^{\frac{1}{s}}$

降采样时 {上一组图像的 1st 张是由其下一组图像的倒数 3rd 张降采样得到的 / ----最高层, ......中尺度为 $2\sigma$ 的图像进行↓.} 隔点.



2.

组数：$O=[\log_2 \min(m,n)]-a$，

$a$ ⇓ 倍数，在$[0,\log_2\min(m,n)]$之间的值.

∴尺度空间通项公式：$\sigma(o,s)=\sigma_0\cdot 2^{\frac{o+s}{S}}$

$o$ ← 第n组，$s$ ← 第n层，

$\sigma_0$ ⇓ 初始值：1.6 — 常数

$S$ ⇓ 每组层数. — 常数

原论文中：$\sigma_0=1.6$.

$S=3$

$o_{min}=-1$（将原图利用双线性插值，扩大1倍，保证能用到原始信息）.

e.g. $512\times 512$,

$O: \log_2(512)-3=6.$

$\therefore S=O-3=3.$

二、检测尺度空间的极值点：

DoG中，与周围26点比较，达到在$x, y, \sigma$域下$\begin{cases}\min\\ \max\end{cases}$的点.

三、精确定位.

Taylor Expansion: ~~$f(x)=f(x_0)+\frac{f(x_0)}{0!}+\frac{f'(x-x_0)}{1!}+\frac{f^2(x-x_0)}{2!}$~~

$$f(x)=\frac{f(x_0)}{0!}+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f^2(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x).$$

$\therefore f(x+\Delta x)=f(x)+f'(x)\cdot\Delta x+\frac{1}{2}\cdot f^2(x)\cdot\Delta x^2$ (More common to use)

∴ real new position $= x+\Delta x$

其中 $x=(x, y, \sigma)$.

∴

$$D(x_{new}, y_{new}, \sigma_{new})=D(x,y,\sigma)+\left[\frac{\partial}{\partial x}\ \frac{\partial}{\partial y}\ \frac{\partial}{\partial \sigma}\right]D\cdot\begin{bmatrix}\Delta x\\ \Delta y\\ \Delta\sigma\end{bmatrix}+$$

$$\frac{1}{2}[\Delta x\ \Delta y\ \Delta\sigma]\begin{bmatrix}\frac{\partial^2 D}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 D}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 D}{\partial x\partial \sigma}\\ \frac{\partial^2 D}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 D}{\partial y\partial \sigma}\\ \frac{\partial^2 D}{\partial \sigma\partial x} & \frac{\partial^2 D}{\partial \sigma\partial y} & \frac{\partial^2 D}{\partial \sigma^2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta x\\ \Delta y\\ \Delta\sigma\end{bmatrix}.$$

Week 2. SIFT.

三、精确定位

∵ 求极值：

∴ 直对 $D(x_{new}, y_{new}, \sigma_{new})$ 求导

并令 $D'(\cdot)=0$.

$$\Rightarrow \Delta X = -\frac{\partial^2 D^{-1}}{\partial X^2} \cdot \frac{\partial D}{\partial X}$$

代入

$$\Rightarrow D(x_{new}) = D + \frac{1}{2}\frac{\partial D^T}{\partial x} x_{new}$$

$$x_{new} = x + \Delta X.$$

3.1 去除低对比度特征点.

∴ if $|D(x_{new})| < T$, 去除、(0.03).

3.2 去除不稳定边缘点.

$$H = \begin{bmatrix} D_{xx} & D_{yx} \\ D_{xy} & D_{yy} \end{bmatrix}$$ Hessian Matrix

Differential Geometry 中.

最大 eigenvaluen 对应最大曲率（在边缘垂直）说明

· 小 · · · · · · · 小 · ·（沿着）

∴ $\alpha$ $\beta$

∴ 若 $\alpha >> \beta$，说明，非常陡 sharp.

若 $\alpha = \beta$，· · · · 平缓.

有了理论基础：

$$Tr(H) = D_{xx} + D_{yy} = \alpha + \beta$$

$$Det(H) = D_{xx}D_{yy} - D_{xy}^2 = \alpha \cdot \beta.$$

$$\frac{Tr(H)^2}{Det(H)} = \frac{(\alpha+\beta)^2}{\alpha \cdot \beta} = \frac{(\gamma\beta+\beta)^2}{\gamma\beta^2} = \frac{(\gamma+1)^2}{\gamma}$$

$\gamma = 10$，若 > ，则太 sharp，不要.

四、指定方向参数（for 旋转不变）

$L(x,y) = G(x,y,\sigma) * I(x,y)$

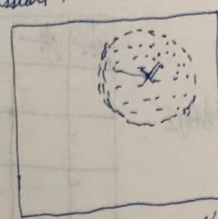
以特征点为中心，$3 \times 1.5\sigma$ 为半径，找区域内幅角幅值

$$m(x,y) = \sqrt{[L(x+1,y) - L(x-1,y)]^2 + [L(x,y+1) - L(x,y-1)]^2}$$

magnitude of gradient.

$$\theta(x,y) = \arctan \frac{L(x,y+1) - L(x,y-1)}{L(x+1,y) - L(x-1,y)}.$$

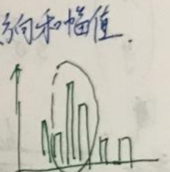
Gaussian:



~~根据 $\theta(x,y)$，统计方向直方图.~~

~~(0-360°) → 分 36 bin，每 bin / 10°.~~

利用 histogram 统计邻域像素对应的梯度方向和幅值.



横轴：根据 $\theta(x,y)$，0-360° → 分 36 bin

纵轴：相应方向内 $\sum m(x,y)$.

直方图的峰值，就是特征点主方向.

（先对直方图做高斯平滑，再对直方图进行插值）.

（主峰值与最近的三个柱插值）

注意：当存在有柱值 ≥ 80% 主峰值时，

可以认为是该特征点的辅助方向

所以：一个特征点有可以有多个方向（大约 15% 的有）

∴ 特征点：$(x, y, \sigma, \theta)$.

位置 尺度 方向.

五、生成描述子

a. 校正旋转主方向，确保旋转不变性

b. 生成 128 维描述子

c. 归一化特征向量，去除光照影响.

~~a 邻域内：$\begin{bmatrix} x_{new} \\ y_{new} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$~~

∴ lowe 建议 $\overset{d}{4} \times 4 \times 8$（关键点在尺度空间内，4×4 的区域，每个区域找 8 个方向梯度信息，用 4×4×8 维表示特征点的描述）

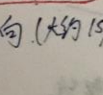
其中，每区域可以做一个种子点

每个子区域：$3*\sigma$

∴ 每个邻域：$3*\sigma \times d \, (d=4)$

∵ 要插值：$3*\sigma*(d+1)$

∵ 要旋转 $\overset{\text{和}}{}$：$r = \frac{3*\sigma*\sqrt{2}(d+1)}{2}$



（∵ 我们是半径，∴ 圆的半径

4. Week2. SIFT.

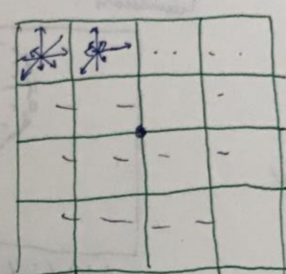
五、生成 descriptor

将区域内所有元素旋转.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$(x, y \in [-r, r])$.

共128维



将r内点分配到子区域内，并分配到8个方向上.

$\left( \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \frac{1}{3\sigma} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \frac{d}{2} \right)$ 别讲了.

最后, ~~$h_i = \frac{h_i}{\sqrt{\sum_{j=1} h_j}}$~~

$$f_i' = \frac{f_i}{\sqrt{\sum_{j=1}^{128} f_j}}$$ (只是归一化处理, 去除光照影响).

---

临时加个作业:

用特征点匹配作跟踪.