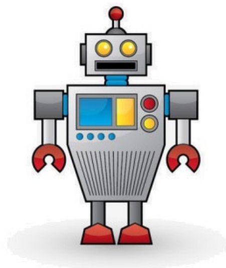
Cinemática Directa del Robot

CI-2657 Robótica
Prof. Kryscia Ramírez Benavides

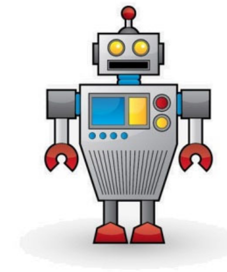


Introducción

- Consiste en determinar cual es la posición y orientación del extremo final del robot, con respecto a un sistema de coordenadas que se toma como referencia, conocidos los valores de las articulaciones y los parámetros geométricos de los elementos del robot.

Introducción (cont.)

	Cinemática	
	Cinemática directa →→	
Valor de las coordenadas articulares $(q_0, q_1, \ldots, q_n)$		Posición y orientación del extremo del robot $(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$
	←← Cinemática inversa	



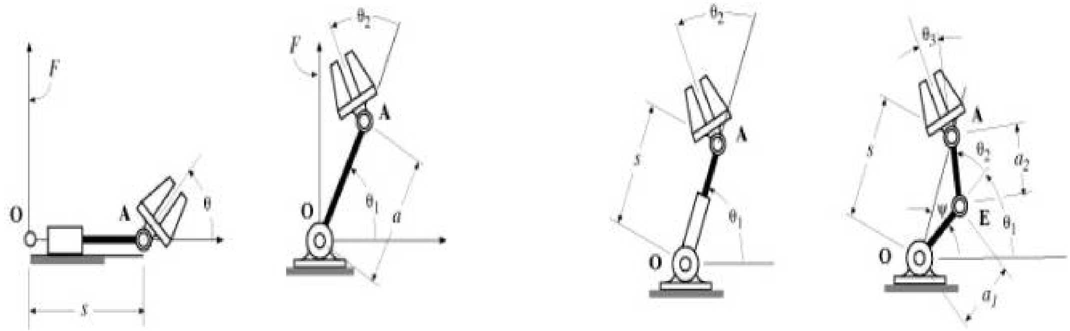
Cinemática Directa

Cinemática Directa

- Se utiliza fundamentalmente el álgebra vectorial y matricial para representar y describir la localización de un objeto en el espacio tridimensional con respecto a un sistema de referencia fijo.
- Dado que un robot puede considerar como una cadena cinemática formada por objetos rígidos o eslabones unidos entre sí mediante articulaciones, se puede establecer un sistema de referencia fijo situado en la base del robot y describir la localización de cada uno de los eslabones con respecto a dicho sistema de referencia.

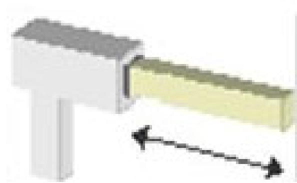
Cinemática Directa (cont.)

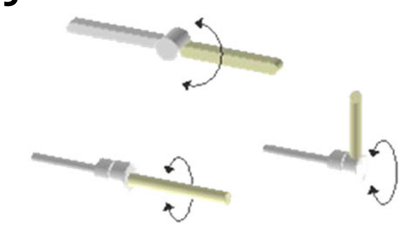
- De esta forma, el problema cinemático directo se reduce a encontrar una matriz homogénea de transformación *T* que relacione la posición y orientación del extremo del robot respecto del sistema de referencia fijo situado en la base del mismo.
- Esta matriz *T* será función de las coordenadas articulares.



Términos enlace/articulación

- Articulación. Conexión de dos cuerpos rígidos caracterizados por el movimiento de un sólido sobre otro.
  - **Grado de libertad.** Rotacional o prismático.
    - **Rotacional.** Rotación alrededor de un eje fijo
    - **Prismática (lineal, traslacional, deslizante).** Movimiento lineal sobre un eje fijo

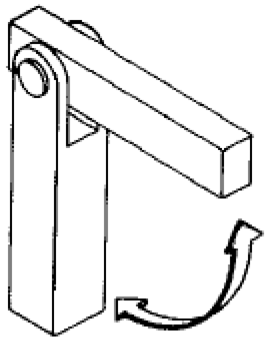
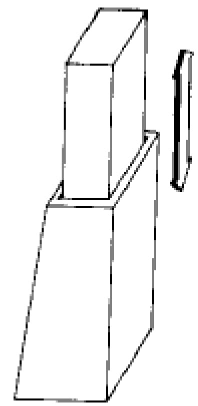
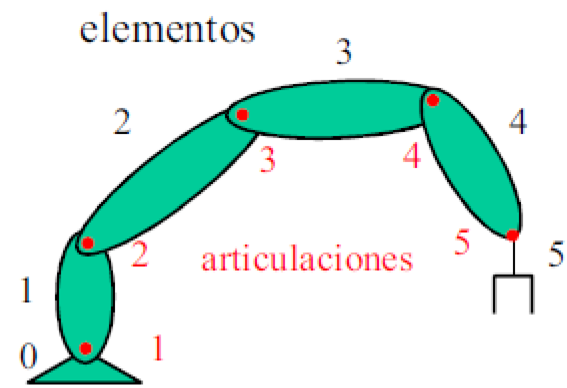




- **Enlace.** Cuerpo rígido que une dos ejes articulares adyacentes del manipulador.
  - Posee muchos atributos. Peso, material, inercia, etc.

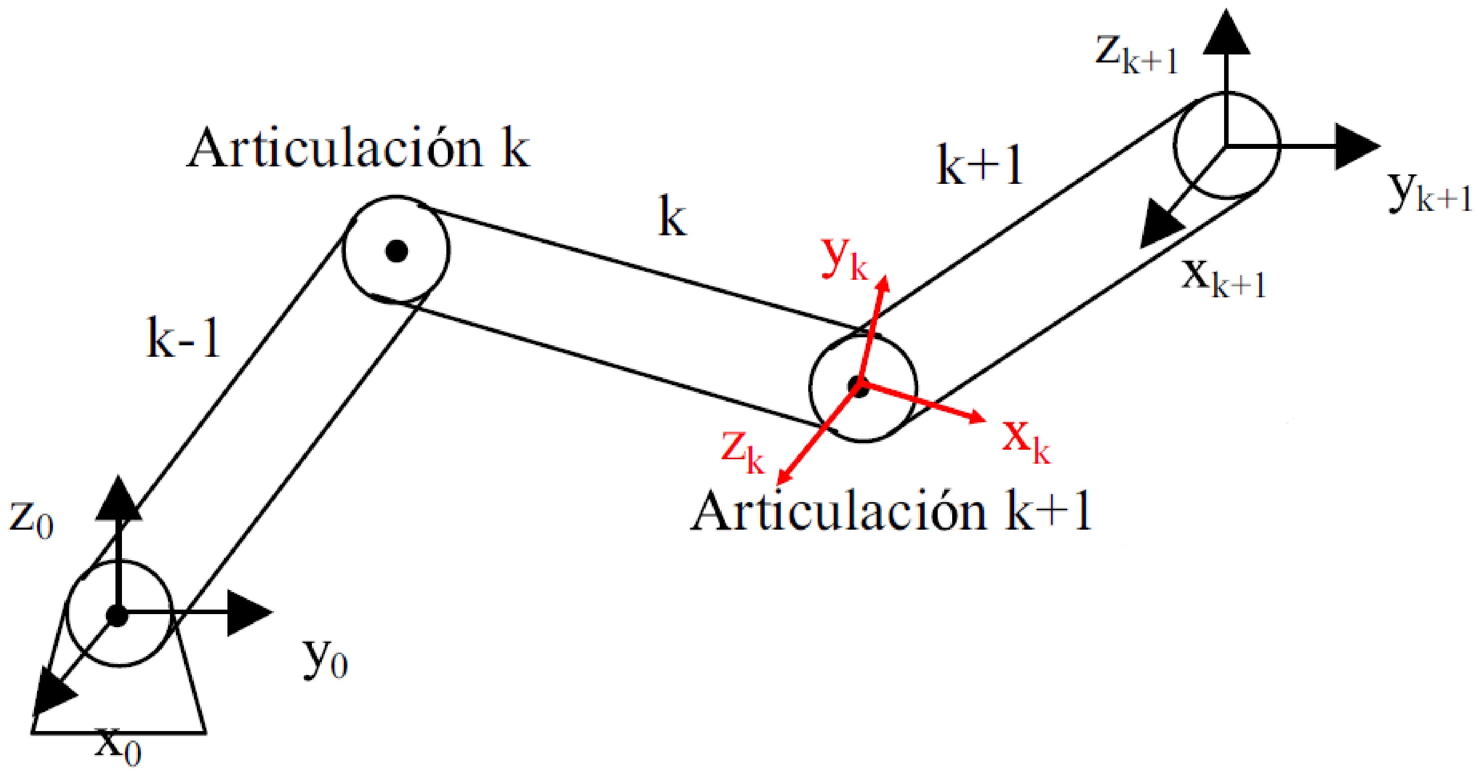
Elementos y Articulaciones

- **Cadena cinemática.** Conjunto de elementos rígidos unidos por articulaciones.

- Numeración de elementos (enlaces) y articulaciones:
  - **Elementos.** Desde 0 hasta *n*, empezando en la base (elemento 0).
  - **Articulaciones.** Desde 1 hasta *n*.

Convenios de Numeración



Parámetros Cinemáticos

Parámetros Cinemáticos

Articulación

(θ_k, d_k)

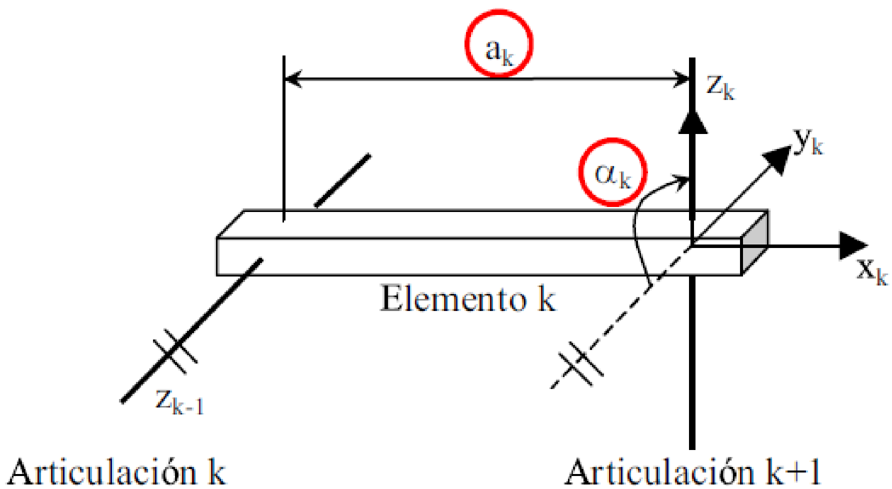
Posición/orientación relativa de elementos adyacentes

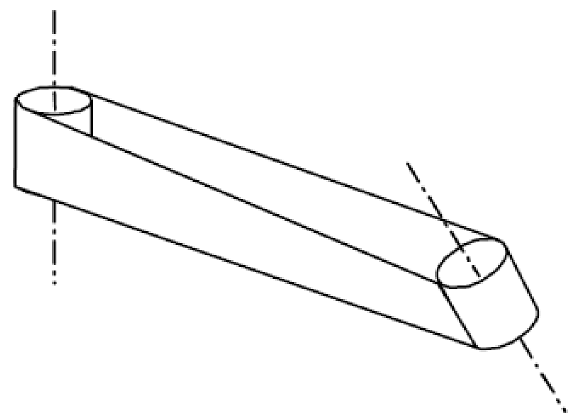
Elemento

(α_k, a_k)

Estructura mecánica del elemento

Parámetros de Elemento (Enlace)



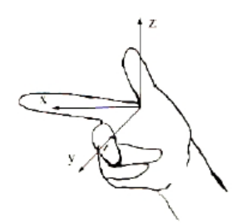


a_k: Longitud del elemento

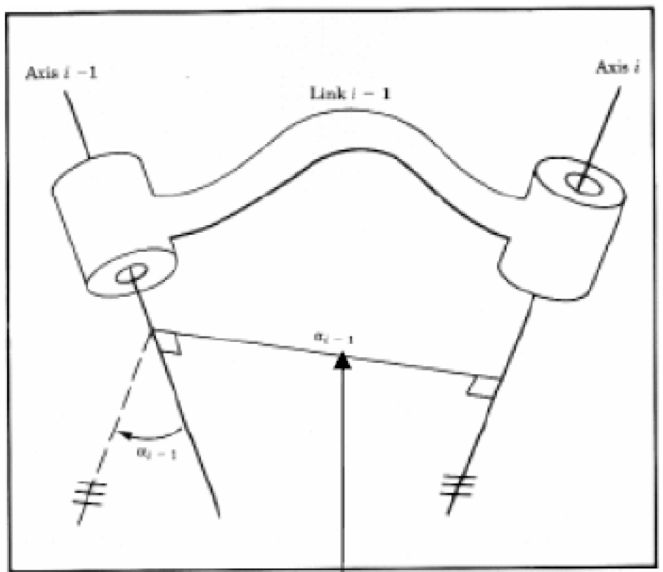
α_k: Torsión del elemento

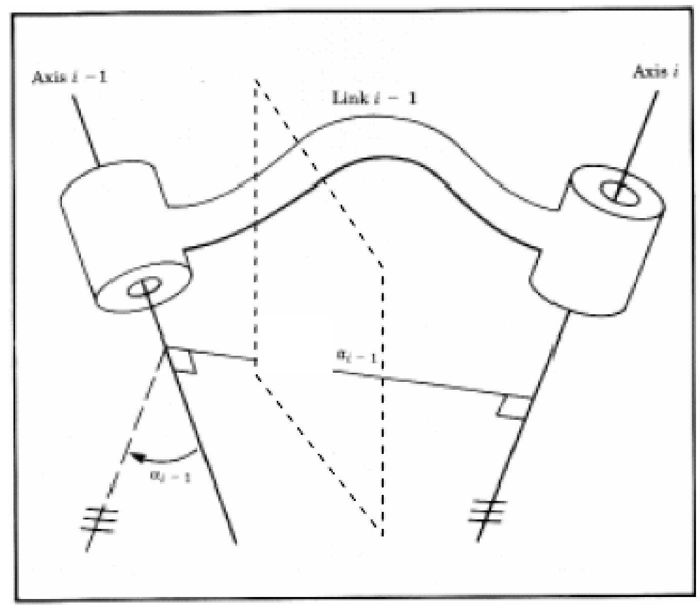
Parámetros de Elemento (Enlace) (cont.)

- **Eje articular.** Línea en el espacio alrededor de la cual el enlace *i* rota referido al enlace *i*-1.
- **Longitud del enlace (a_{i-1}).** Distancia entre los ejes articulares *i* e *i*-1. Número de líneas que definen la longitud:
  - Ejes paralelos: ∞
  - Ejes no paralelos: 1
  - Signo: positivo
- **Ángulo del enlace (α_{i-1}).** Ángulo medido entre los ejes articulares *i* e *i*-1. Proyección sobre plano.
  - Signo: Regla de la mano derecha



Parámetros de Elemento (Enlace) (cont.)



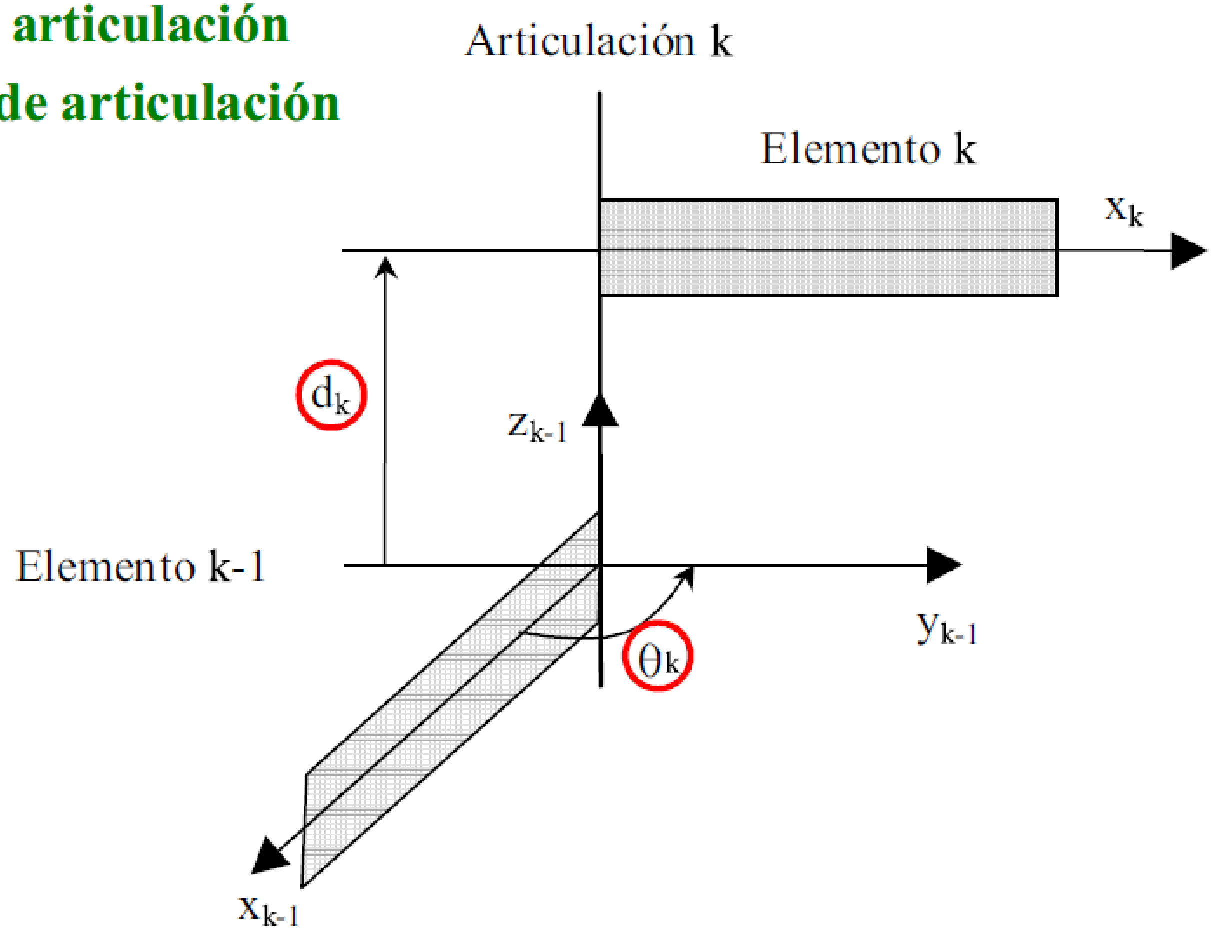


perpendicular común

Parámetros de Articulación

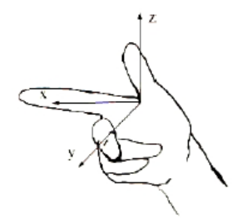
θ_k = Ángulo de articulación

d_k = Distancia de articulación

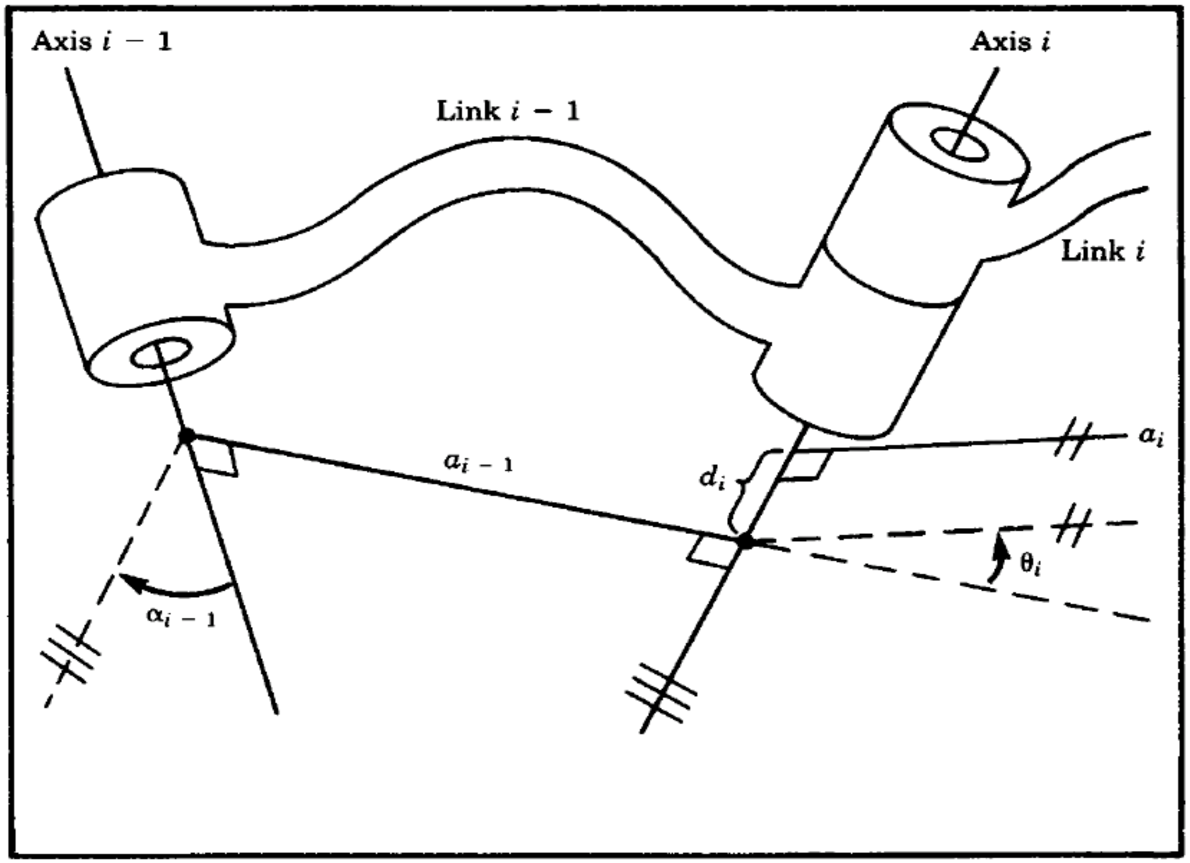


Variables Articulares

- **Desplazamiento del enlace (d_i).** Distancia medida a lo largo del eje de la articulación *i* desde el punto donde a_{i-1} intersecta el eje hasta el punto donde a_i intersecta el eje.
  - d_i es variable si la articulación es prismática
  - d_i posee signo
- **Ángulo de la articulación (θ_i).** Ángulo entre las perpendiculares comunes a_{i-1} y a_i medido sobre el eje del enlace *i*.
  - θ_i es variable si la articulación es de rotación
  - θ_i posee signo definido por la regla de la mano derecha

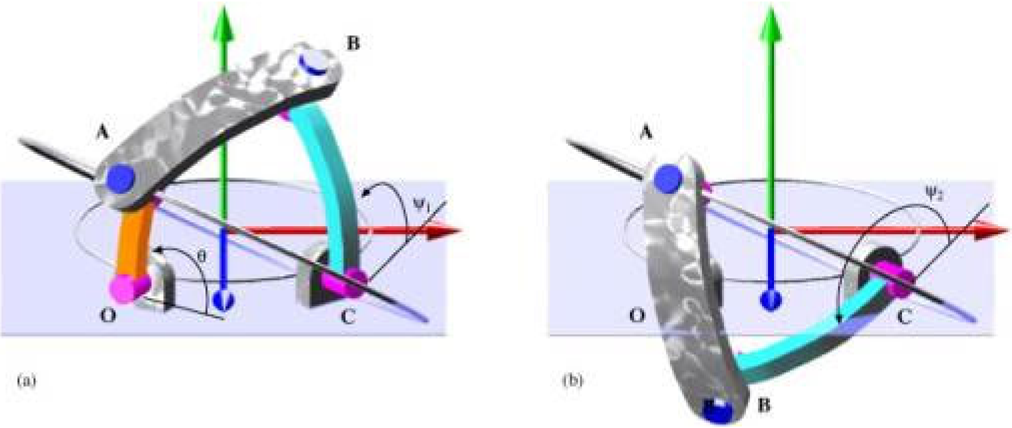


Variables Articulares (cont.)



Matrices de Transformación Homogénea

- La resolución del problema cinemático directo consiste en encontrar las relaciones que permiten conocer la localización espacial del extremo del robot a partir de los valores de sus coordenadas articulares.



Matrices de Transformación Homogénea

- Útil en transformaciones matriciales que incluyan:
  - Rotación, traslación, escalado y transformación de perspectiva.
- Vectores expresados en coordenadas homogéneas:
  - $p = (wp_x, wp_y, wp_z, w)^T$. En robótica $w = 1$.

Rotación

Traslación

$$A_j^k = \left(\begin{array}{ccc|c} r_{11} & r_{12} & r_{13} & d_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & d_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & d_z \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Perspectiva

Escalado global

Matrices de Transformación Homogénea (cont.)

- Así, si se han escogido coordenadas cartesianas y ángulos de Euler para representar la posición y orientación del extremo de un robot de seis grados de libertad, la solución al problema cinemático directo vendrá dada por las relaciones:
  - $x = Fx\,(q_1,q_2,q_3,q_4,q_5,q_6)$
  - $y = Fy\,(q_1,q_2,q_3,q_4,q_5,q_6)$
  - $z = Fz\,(q_1,q_2,q_3,q_4,q_5,q_6)$
  - $\alpha = F\alpha\,(q_1,q_2,q_3,q_4,q_5,q_6)$
  - $\beta = F\beta\,(q_1,q_2,q_3,q_4,q_5,q_6)$
  - $\gamma = F\gamma\,(q_1,q_2,q_3,q_4,q_5,q_6)$

Matrices de Transformación Homogénea (cont.)

- La obtención de estas relaciones no es en general complicada, siendo incluso en ciertos casos (robots de pocos grados de libertad) fácil de encontrar mediante simples consideraciones geométricas.
  - Por ejemplo, para el caso de un robot con 2 grados de libertad es fácil comprobar que:
    - $x = I_1 \cos q_1 + I_2 \cos(q_1 + q_2)$
    - $y = I_1 \cos q_1 + I_2 \cos(q_1 + q_2)$
- Para robots de más grados de libertad puede plantearse un método sistemático basado en la utilización de las matrices de transformación homogénea.

Matrices de Transformación Homogénea (cont.)

- En general, un robot de *n* grados de libertad está formado por *n* enlaces unidos por *n* articulaciones, de forma que cada par articulación-enlace constituye un grado de libertad.
- A cada enlace se le puede asociar un sistema de referencia solidario a él y, utilizando las transformaciones homogéneas, es posible representar las rotaciones y traslaciones relativas entre los distintos enlaces que componen el robot.

Matrices de Transformación Homogénea (cont.)

- Normalmente, la matriz de transformación homogénea que representa la posición y orientación relativa entre los sistemas asociados a dos enlaces consecutivos del robot se le suele denominar $(i\text{-}1)A_i$.
- Así pues, $0A_i$ describe la posición y orientación del sistema de referencia al primer enlace con respecto al sistema de referencia a la base, $1A2$ describe la posición y orientación del segundo enlace respecto del primero, etc.

Matrices de Transformación Homogénea (cont.)

- Del mismo modo, denominando 0A*k* a las matrices resultantes del producto de las matrices (*i*-1)*Ai* con *i* desde 1 hasta *k*, se puede representar de forma total o parcial la cadena cinemática que forma el robot.
  - La posición y orientación del sistema con el segundo enlace del robot con respecto al sistema de coordenadas de la base se puede expresar mediante la matriz 0*A*2:
    - 0*A*2 = 0*A*1(1*A*2)
  - De manera análoga, la matriz 0*A*3 representa la localización del sistema de referencia del tercer enlace:
    - 0*A*3 = 0*A*1(1*A*2)(2*A*3)

Matrices de Transformación Homogénea (cont.)

- Cuando se consideran todos los grados de libertad, a la matriz $0An$ se le suele denominar T.
- Así, dado un robot de seis grados de libertad, se tiene que la posición y orientación del enlace final vendrá dada por la matriz T:
  - $T = 0A6 = 0A1(1A2)(2A3)(3A4)(4A5)(5A6)$

Matrices de Transformación Homogénea (cont.)

- Se utiliza en robótica la representación de Denavit-Hartenberg.
  - Denavit-Hartenberg propusieron en 1955 un método matricial que permite establecer de manera sistemática un sistema de coordenadas (S_i) ligado a cada enlace *i* de una cadena articulada, determinando las ecuaciones cinemáticas de la cadena completa.

Matrices de Transformación Homogénea (cont.)

- Según la representación D-H, escogiendo adecuadamente los sistemas de coordenadas asociados para cada enlace, será posible pasar de uno al siguiente mediante 4 transformaciones básicas que dependen exclusivamente de las características geométricas del enlace.
- Estas transformaciones básicas consisten en una sucesión de rotaciones y traslaciones que permitan relacionar el sistema de referencia del elemento *i* con el sistema del elemento *i*-1.

Matrices de Transformación Homogénea (cont.)

$$\mathbf{T} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{R}_{3\times 3} & \mathbf{p}_{3\times 1} \\ \hline \mathbf{f}_{1\times 3} & 1\times 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \text{rotation matrix} & \text{position vector} \\ \hline \text{perspective transformation} & \text{scaling} \end{array}\right]$$

$$\mathbf{T}_{x,\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{T}_{y,\phi} = \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & \sin\phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_{z,\theta} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrices de Transformación Homogénea (cont.)

- Las transformaciones en cuestión son las siguientes:
  - Rotación alrededor del eje Z_i-1, con un ángulo θ_i.
  - Traslación a lo largo de Z_i-1 a una distancia d_i; vector d_i $(0,0,d_i)$.
  - Traslación a lo largo de X_i a una distancia a_i; vector a_i $(a_i,0,0)$.
  - Rotación alrededor del eje X_i, con un ángulo α_i.
- De este modo se tiene que:
  - $i\text{-}1Ai = T(z,\theta_i)\,T(0,0,d_i)\,T(a_i\text{-}1,0,0)\,T(x,\alpha_i\text{-}1)$

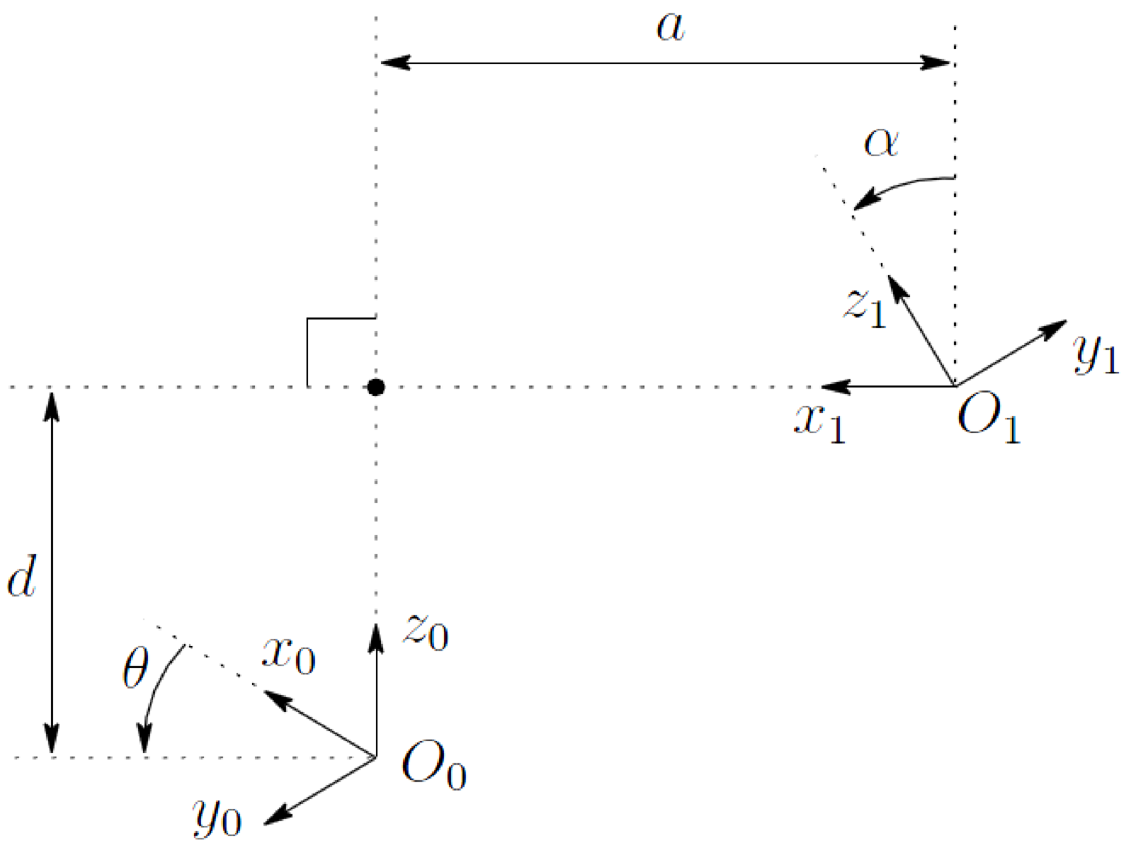
Matrices de Transformación Homogénea (cont.)

- Y realizando el producto de matrices:

$$
\begin{aligned}
A_i &= R_{z,\theta_i}\mathrm{Trans}_{z,d_i}\mathrm{Trans}_{x,a_i}R_{x,\alpha_i} \qquad (3.10)\\
&= \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i} & 0 & 0 \\ s_{\theta_i} & c_{\theta_i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{\alpha_i} & -s_{\alpha_i} & 0 \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i}c_{\alpha_i} & s_{\theta_i}s_{\alpha_i} & a_i c_{\theta_i} \\ s_{\theta_i} & c_{\theta_i}c_{\alpha_i} & -c_{\theta_i}s_{\alpha_i} & a_i s_{\theta_i} \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

donde α_i, a_i, d_i, θ_i, son los parámetros D-H del enlace *i*, asociados con el enlace *i* y la articulación *i*.

Matrices de Transformación Homogénea (cont.)



Matrices de Transformación Homogénea (cont.)

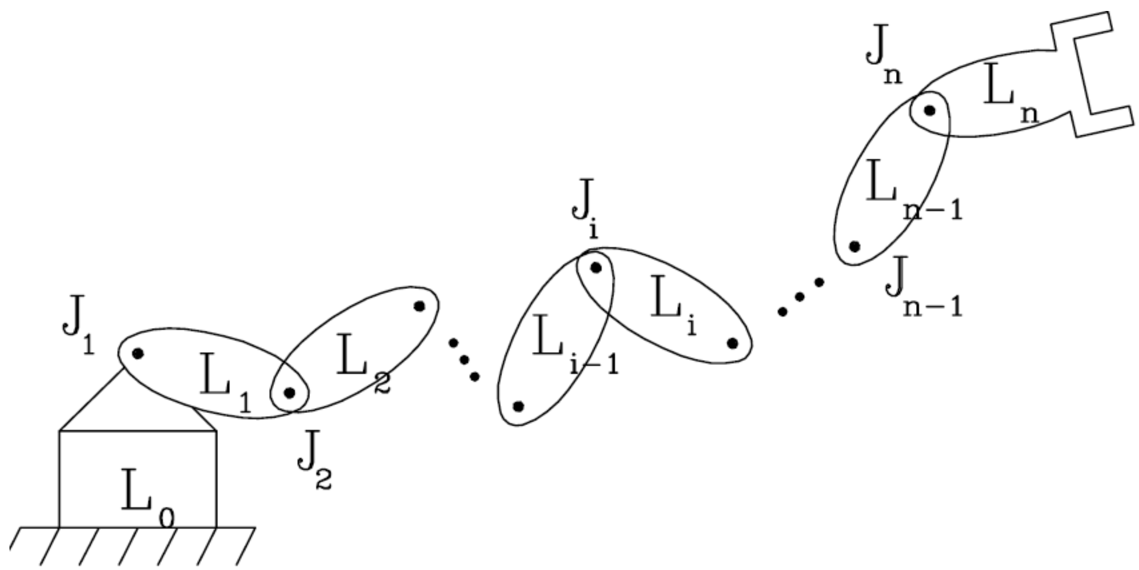
- Los cuatro parámetros α_i, a_i, d_i, θ_i en (3.10) son torsión del enlace, longitud del enlace, distancia de articulación y ángulo de articulación, respectivamente.
  - Estos nombres se derivan de aspectos específicos de la relación geométrica entre dos marcos de coordenadas.
- Dado que la matriz A_i es una función de una sola variable, resulta que tres de los cuatro parámetros son constantes para un enlace dado, mientras que el cuarto parámetro, θ_i es variable para una articulación de rotación y d_i e variable para una articulación prismática.

Matrices de Transformación Homogénea (cont.)

- De este modo, basta con identificar los parámetros α_i, a_i, d_i, θ_i para obtener las matrices A y relacionar así todos y cada uno de los enlaces del robot.
- Como se ha indicado, para que la matriz i-1Ai, relacione los sistemas (S_i) y (S_i-1), es necesario que los sistemas se hayan escogido de acuerdo a unas determinadas normas.
- Estas, junto con la definición de los 4 parámetros de Denavit-Hartenberg, conforman el siguiente algoritmo para la resolución del problema cinemático directo.

Asignación Sistemas de Referencia

- **Objetivo.** Encontrar una transformación homogénea (función de los parámetros vistos) que describa la posición y orientación del extremo del robot respecto a la base.

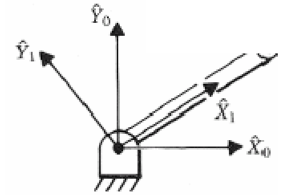


Asignación Sistemas de Referencia (cont.)

- **Método.** Definir *SR* asociado a cada enlace, realizar la transformación entre dos consecutivos con solo 2 giros y 2 traslaciones.
- La asignación de *SR* no es única:
  - Notación Paul y notación Craig
    - [Paul]: SR_i en el eje que le enlaza con el siguiente eslabón (al final del eslabón)
    - [Craig]: SR_i en el eje que le enlaza con el eslabón precedente (al inicio del eslabón)
  - Las matrices de transformación intermedias varían, pero el resultado final es el mismo.

Asignación Sistemas de Referencia (cont.)

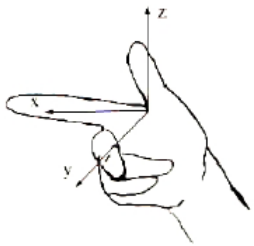
- **Enlaces primero y último.**
  - Sistema de referencia {0}. Sistema que se adjunta a la base del robot. No se mueve.
  - Sistema de referencia {1}. Coincide con la base.



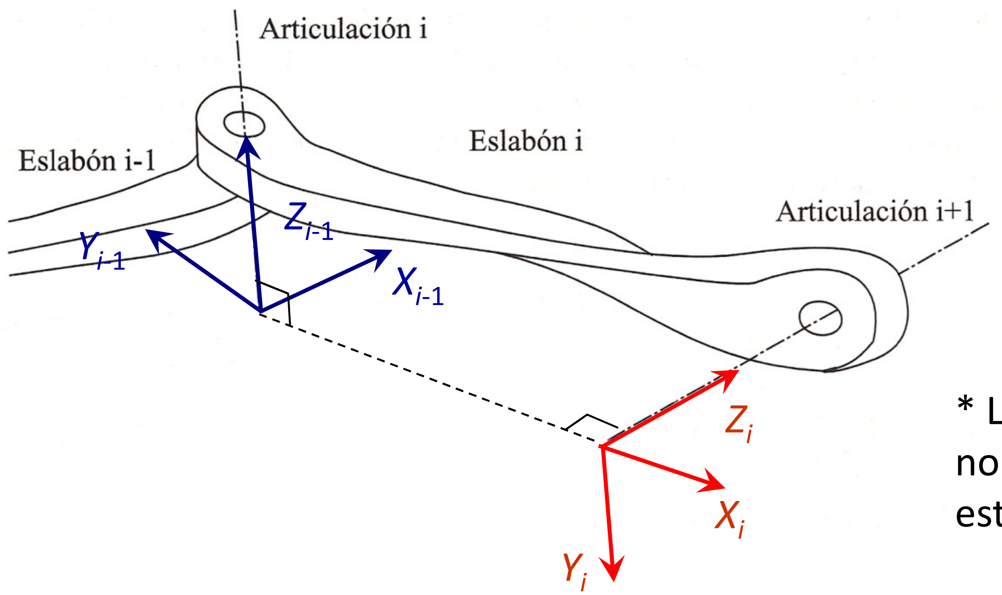
Enlace(*i*)	a_0 y a_n	α_0 y α_n	d_i	θ_i
1 *y* ***n***	0	0	Prismática (d_i)	0
			Rotacional (0)	θ_n

Asignación Sistemas de Referencia (cont.)

- **Enlaces intermedios.**
  - Origen del sistema de referencia $\{i\}$. Se ubica en el punto creado por la perpendicular de a_i y el eje articular i.
  - Eje Z. El eje Z_i del sistema de referencia $\{i\}$ se hará coincidir con el eje articular i.
  - Eje X. El eje X_i se hace coincidir con la distancia a_i desde la articulación i hacia i+1.
  - Eje Y. El eje Y_i se define a partir del eje X_i, tomando como referencia la regla de la mano derecha.



Asignación Sistemas de Referencia (cont.)



* La normal común puede no ser única, necesitamos establecer convenciones

Asignación Sistemas de Referencia (cont.)

- Identificar los ejes articulares. De los pasos 2 a 5 utilice dos ejes consecutivos *i* e *i*-1.
- Identifique la perpendicular común. Identifique la línea que se interseca, perpendicularmente, al eje articular *i*. Defina el sistema de referencia sobre el punto de intersección.
- Asigne el eje Z_i al eje articular *i*.
- Asigne el eje X_i a la perpendicular común que definió el origen del sistema de referencia *i*.
- Termine de asignar el sistema de referencia, definiendo el eje Y_i según la ley de la mano derecha.
- Haga coincidir los *SR*{0} y {1} cuando la primera variable articular sea cero.

Algoritmo de Denavit-Hartenberg Significado de los Parámetros

- Los parámetros de DH tienen el siguiente significado:
  - El parámetro a_i es la distancia entre Z_i y Z_{i-1} medida a lo largo de X_i.
  - El parámetro α_i es el ángulo entre Z_i y Z_{i-1} referido a X_i.
  - El parámetro d_i es la distancia entre X_{i-1} y X_i medida a lo largo de Z_i.
  - El parámetro θ_i es el ángulo entre X_{i-1} y X_i referido a Z_i.
- Nota: a_i es la única magnitud positiva, las demás tienen signo.

Algoritmo de Denavit-Hartenberg

- **DH1.** Numerar los enlaces comenzando con 1 (primer enlace móvil de la cadena) y acabando con *n* (último enlace móvil). Se numerara como enlace 0 a la base fija del robot.
- **DH2.** Numerar cada articulación comenzando por 1 (la correspondiente al primer grado de libertad y acabando en *n*).
- **DH3.** Localizar el eje de cada articulación. Si es rotativa, el eje será su propio eje de giro. Si es prismática, será el eje a lo largo del cual se produce el desplazamiento.
- **DH4.** Para i de 0 a n-1, situar el eje Z_i, sobre el eje de la articulación i+1.

Algoritmo de Denavit-Hartenberg (cont.)

- **DH5.** Situar el origen del sistema de la base (*S0*) en cualquier punto del eje Z_0. Los ejes X_0 e Y_0 se situarán de modo que formen un sistema dextrógiro (sentido a las agujas del reloj) con Z_0.
- **DH6.** Para i de 1 a n-1, situar el sistema (*Si*) (solidario al eslabón i) en la intersección del eje Z_i con la línea normal común a Z_i-1 y Z_i. Si ambos ejes se cortasen se situaría (*Si*) en el punto de corte. Si fuesen paralelos (*Si*) se situaría en la articulación i+1.
- **DH7.** Situar X_i en la línea normal común a Z_{i-1} y Z_i.
- **DH8.** Situar Y_i de modo que forme un sistema dextrógiro con X_i y Z_i.

Algoritmo de Denavit-Hartenberg (cont.)

- **DH9.** Situar el sistema (*Sn*) en el extremo del robot de modo que Z_n coincida con la dirección de Z_{n-1} y X_n sea normal a Z_{n-1} y Z_n.
- **DH10.** Obtener θ_i como el ángulo que hay que girar en torno a Z_{i-1} para que X_{i-1} y X_i queden paralelos.
- **DH11.** Obtener d_i como la distancia, medida a lo largo de Z_{i-1}, que habría que desplazar (*Si*-1) para que X_i y X_{i-1} quedasen alineados.
- **DH12.** Obtener a_i como la distancia medida a lo largo de X_i (que ahora coincidiría con X_{i-1}) que habría que desplazar el nuevo (*Si*-1) para que su origen coincidiese con (*Si*).

Algoritmo de Denavit-Hartenberg (cont.)

- **DH13.** Obtener α_i como el ángulo que habría que girar entorno a X_i (que ahora coincidiría con X_{i-1}), para que el nuevo (*Si*-1) coincidiese totalmente con (*Si*).
- **DH14.** Obtener las matrices de transformación *i*-1*Ai*.
- **DH15.** Obtener la matriz de transformación que relaciona el sistema de la base con el del extremo del robot *T* = 0*A*1, 1*A*2, ..., *n*-1*An*.
- **DH16.** La matriz *T* define la orientación (submatriz de rotación) y posición (submatriz de traslación) del extremo referido a la base en función de las *n* coordenadas articulares.

Algoritmo de Denavit-Hartenberg (cont.)

- Los cuatro parámetros de DH (θ_i, d_i, a_i, α_i) dependen únicamente de las características geométricas de cada enlace y de las articulaciones que le unen con el anterior y siguiente.
  - θ_i es el ángulo que forman los ejes X_{i-1} y X_i medido en un plano perpendicular al eje Z_{i-1}, utilizando la regla de la mano derecha. Se trata de un parámetro variable en articulaciones giratorias.
  - d_i es la distancia a lo largo del eje Z_{i-1} desde el origen del sistema de coordenadas (i-1)ésimo hasta la intersección del eje Z_{i-1} con el eje X_i. Se trata de un parámetro variable en articulaciones prismáticas.

Algoritmo de Denavit-Hartenberg (cont.)

- Una vez obtenidos los parámetros DH, el cálculo de las relaciones entre los enlaces consecutivos del robot es inmediato, ya que vienen dadas por las matrices *A*, que se calcula según la expresión general.
- Las relaciones entre enlaces no consecutivos vienen dadas por las matrices *T* que se obtienen como producto de un conjunto de matrices *A*.
- Obtenida la matriz *T*, esta expresará la orientación (submatriz (3x3) de rotación) y posición (submatriz (3x1) de traslación) del extremo del robot en función de sus coordenadas articulares, con lo que quedara resuelto el problema cinemático directo.

Algoritmo de Denavit-Hartenberg Resumen

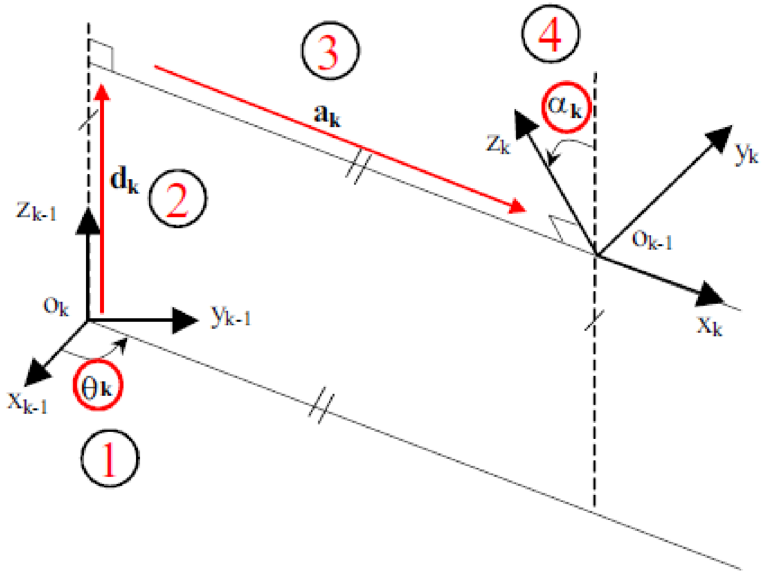
Pasos del algoritmo

- 1 $\Rightarrow$ Establecer el sistema de coordenadas de la base (x0, y0, z0)
- 2 $\Rightarrow$ Hacer $k=1$
- 3 $\Rightarrow$ Alinear el eje z_k con eje de movimiento de la articulación k+1
- 4 $\Rightarrow$ Establecer el origen o_k
- 5 $\Rightarrow$ Establecer el eje x_k
- 6 $\Rightarrow$ Establecer el eje y_k
- 7 $\Rightarrow$ $k = k + 1$; si $k < n$ ir a *3*
- 8 $\Rightarrow$ Establecer el sistema de coordenadas de la mano x_n, y_n, z_n
- 9 $\Rightarrow$ Hacer $k=1$
- 10 $\Rightarrow$ Encontrar los parámetros D-H: θ_k, d_k, α_k y a_k
- 11 $\Rightarrow$ $k = k + 1$; si $k \leq n$ ir a *10*

Algoritmo de Denavit-Hartenberg Resumen

Relaciona los sistemas de coordenadas *k-ésimo* y *(k-1)-ésimo*

Cuatro transformaciones para pasar de un sistema a otro



1. Rotación θ_k respecto z_{k-1}

2. Traslación d_k respecto z_{k-1}

3. Traslación a_k respecto x_k

4. Rotación α_k respecto x_k

Algoritmo de Denavit-Hartenberg Resumen

Cada transformación aplicada al sistema *(k-1)-ésimo* se representa por una matriz de transformación homogénea de 4x4

$$T_{z,\Theta_k} = \begin{pmatrix} c\theta_k & -s\theta_k & 0 & 0 \\ s\theta_k & c\theta_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad T_{z,d_k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{x,a_k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_k \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad T_{x,\alpha_k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha_k & -s\alpha_k & 0 \\ 0 & s\alpha_k & c\alpha_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Algoritmo de Denavit-Hartenberg Resumen

Cálculo de la matriz A^{k}_{k-1} a partir de $T_{z,\theta}$, $T_{z,d}$, $T_{x,a}$, $T_{x,\alpha}$

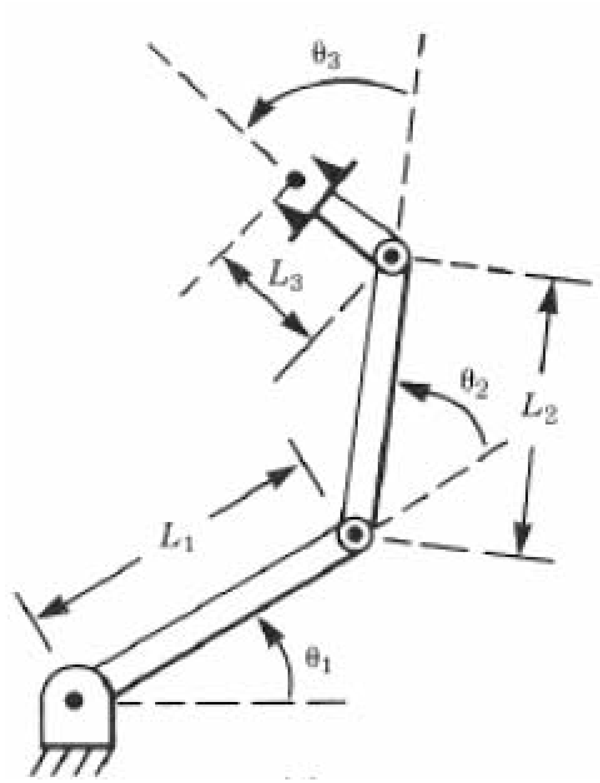
- **¿Cuál será el orden de multiplicación de las matrices?**

$$A^{k}_{k-1} = T_{z,\theta_k} T_{z,d_k} T_{x,a_k} T_{x,\alpha_k}$$

Expresión completa de la matriz de transformación D-H

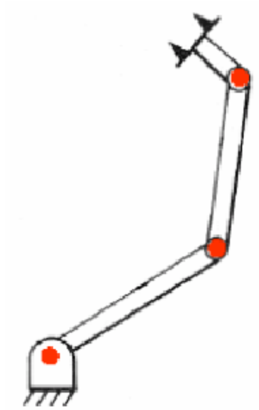
$$A^{k}_{k-1} = \begin{pmatrix} c\theta_k & -s\theta_k c\alpha_k & s\theta_k s\alpha_k & a_k c\theta_k \\ s\theta_k & c\theta_k c\alpha_k & -c\theta_k s\alpha_k & a_k s\theta_k \\ 0 & s\alpha_k & c\alpha_k & d_k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Algoritmo de Denavit-Hartenberg Ejemplo 1

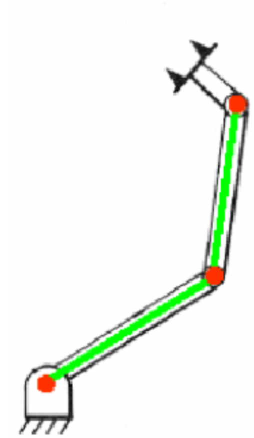


Algoritmo de Denavit-Hartenberg Ejemplo 1 (cont.)

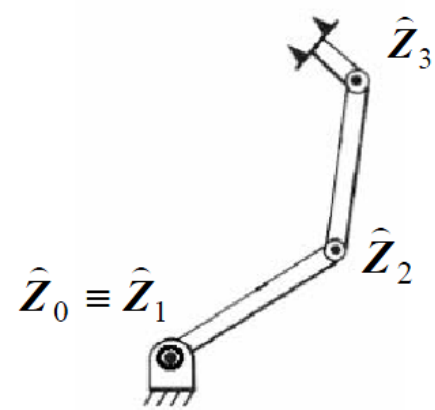
- Identificar el eje de las articulaciones



- Identificar la perpendicular común entre los ejes de las articulaciones

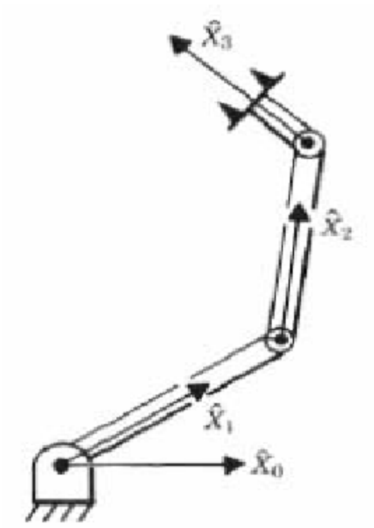


- Asignar el eje $\hat{Z}_i$ en los ejes articulares

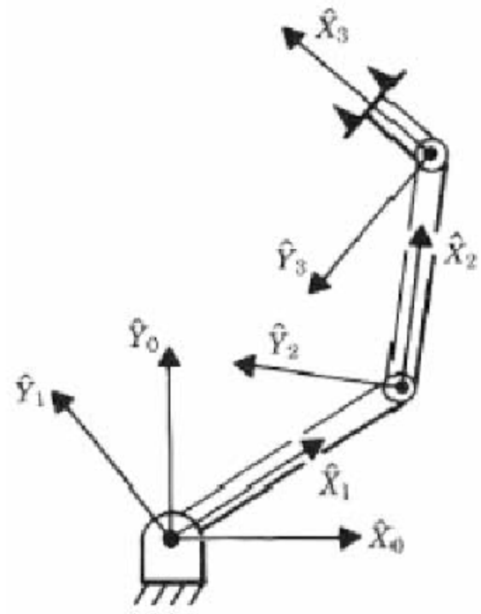


Algoritmo de Denavit-Hartenberg Ejemplo 1 (cont.)

- Asignar el eje $\hat{X}_i$ en la perpendicular común.

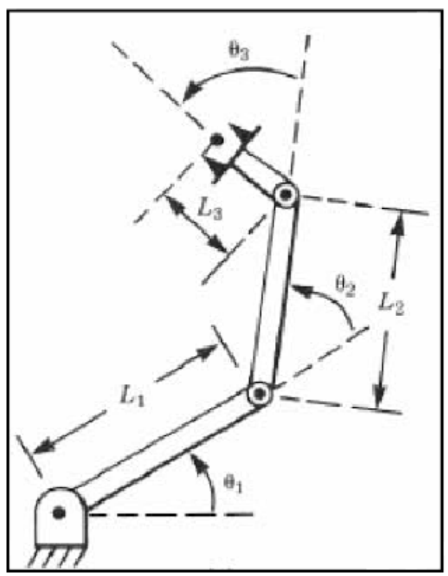


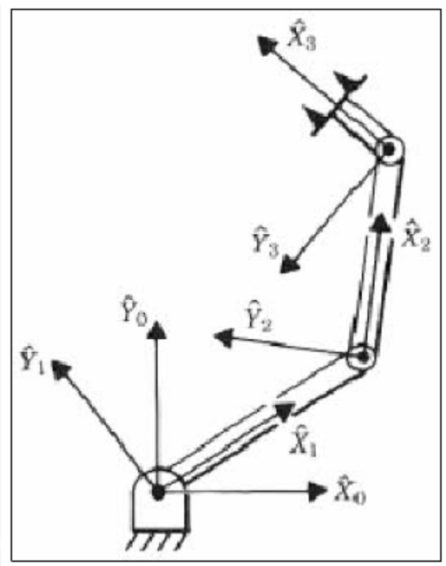
- Utilizando la regla de la mano derecha, asignar el eje $\hat{Y}_i$.



Algoritmo de Denavit-Hartenberg Ejemplo 1 (cont.)

Parámetros DH para el Robot				
Articulación	θ	d	a	α
1	θ_1	0	l_1	0
2	θ_2	0	l_2	0
3	θ_3	0	l_3	0





Algoritmo de Denavit-Hartenberg Ejemplo 1 (cont.)

- Una vez calculados los parámetros de cada eslabón, se calculan las matrices A:
  - $$0A1 = \begin{pmatrix} \cos\theta 1 & -\sin\theta 1 & 0 & l1\cos\theta 1 \\ \sin\theta 1 & \cos\theta 1 & 0 & l1\sin\theta 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
  - $$1A2 = \begin{pmatrix} \cos\theta 2 & -\sin\theta 2 & 0 & l2\cos\theta 2 \\ \sin\theta 2 & \cos\theta 2 & 0 & l2\sin\theta 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Algoritmo de Denavit-Hartenberg Ejemplo 1 (cont.)

- Una vez calculados los parámetros de cada eslabón, se calculan las matrices A:

  - $$2A3 = \begin{pmatrix} \cos\theta 3 & -\sin\theta 3 & 0 & l3\cos\theta 3 \\ \sin\theta 3 & \cos\theta 3 & 0 & l3\sin\theta 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Algoritmo de Denavit-Hartenberg Ejemplo 1 (cont.)

- Así pues, se puede calcular la matriz T que indica la localización del sistema final con respecto al sistema de referencia de la base del robot:
  - $T = 0A1(1A2)(2A3) =$
    $$\begin{pmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 & l_3 c_{123} + l_2 c_{12} + l_1 c_1 \\ s_{123} & c_{123} & 0 & l_3 s_{123} + l_2 s_{12} + l_1 s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
  - Donde: $c_{123} = c_{12}cos\theta_3 - s_{12}sen\theta_3$, $s_{123} = s_{12}cos\theta_3 - c_{12}sen\theta_3$, $c_{12} = cos\theta_1 cos\theta_2 - sen\theta_1 sen\theta_2$, $s_{12} = cos\theta_1 sen\theta_2 + sen\theta_1 cos\theta_2$

Algoritmo de Denavit-Hartenberg Ejemplo 2

Parámetros DH para el Robot				
Articulación	θ	d	a	α
1	θ_1	l_1	0	0
2	90°	d_2	0	90°
3	0	d_3	0	0
4	θ_4	l_4	0	0

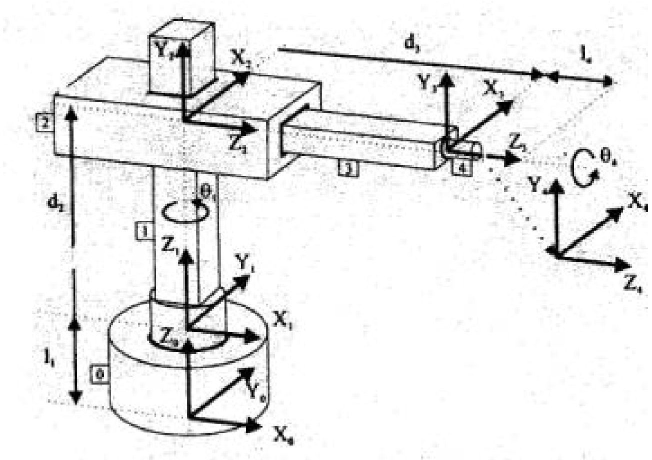


Figura 4.4. Robot cilíndrico del Ejemplo 4.1.

Algoritmo de Denavit-Hartenberg Ejemplo 2 (cont.)

- Una vez calculados los parámetros de cada eslabón, se calculan las matrices A:
  - $$0A1 = \begin{pmatrix} \cos\theta 1 & -\sin\theta 1 & 0 & 0 \\ \sin\theta 1 & \cos\theta 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
  - $$1A2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Algoritmo de Denavit-Hartenberg Ejemplo 2 (cont.)

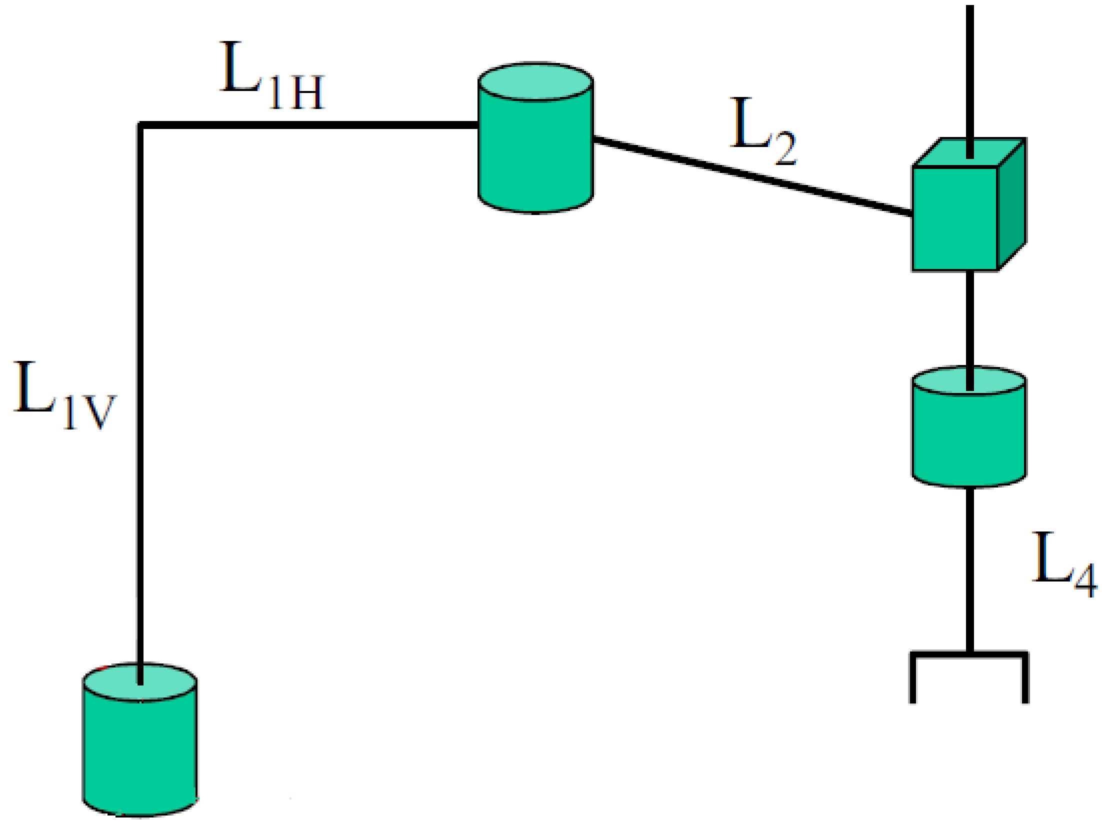
- Una vez calculados los parámetros de cada eslabón, se calculan las matrices A:
  - $$2A3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
  - $$3A4 = \begin{pmatrix} \cos\theta 4 & -\sin\theta 4 & 0 & 0 \\ \sin\theta 4 & \cos\theta 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Algoritmo de Denavit-Hartenberg Ejemplo 2 (cont.)

- Así pues, se puede calcular la matriz T que indica la localización del sistema final con respecto al sistema de referencia de la base del robot:
  - $T = 0A1(1A2)(2A3)(3A4) =$

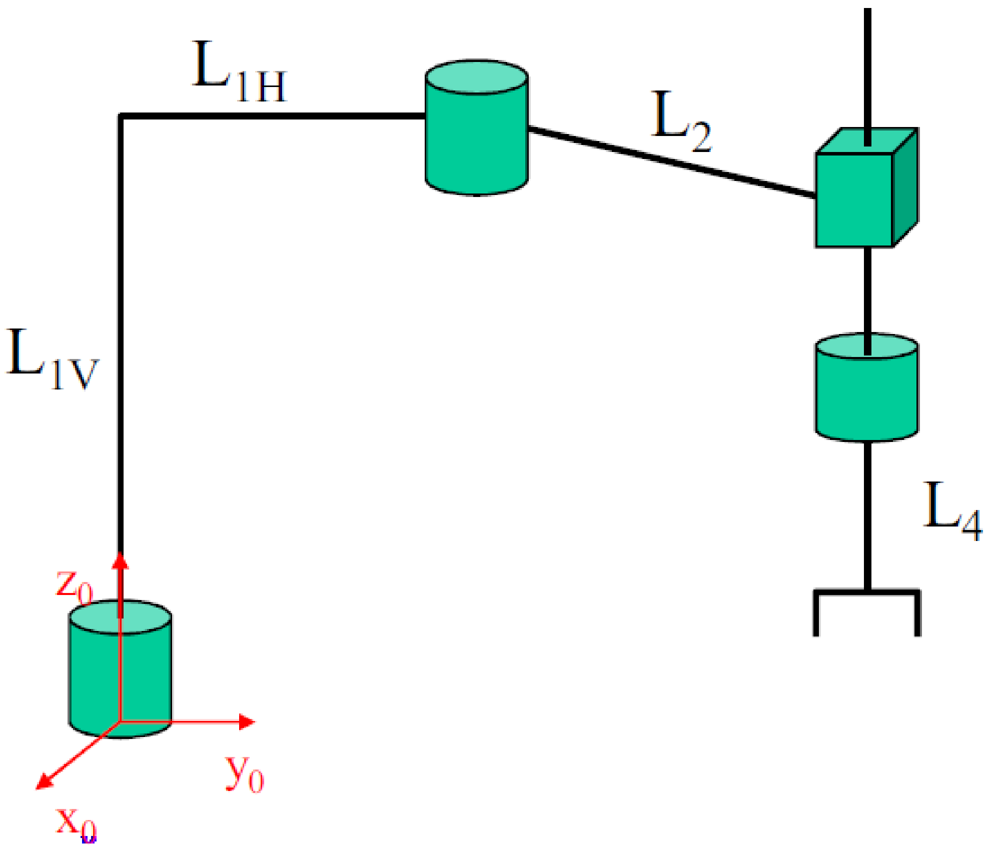
$$\begin{pmatrix} -\sin\theta 1 \cos\theta 4 & \sin\theta 1 \sin\theta 4 & \cos\theta 1 & \cos\theta 1\,(d3 + l4) \\ \cos\theta 1 \cos\theta 4 & \cos\theta 1 \sin\theta 4 & \sin\theta 1 & \sin\theta 1\,(d3 + l4) \\ \sin\theta 4 & \cos\theta 4 & 0 & d2 + l1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Algoritmo de Denavit-Hartenberg
Ejemplo 3



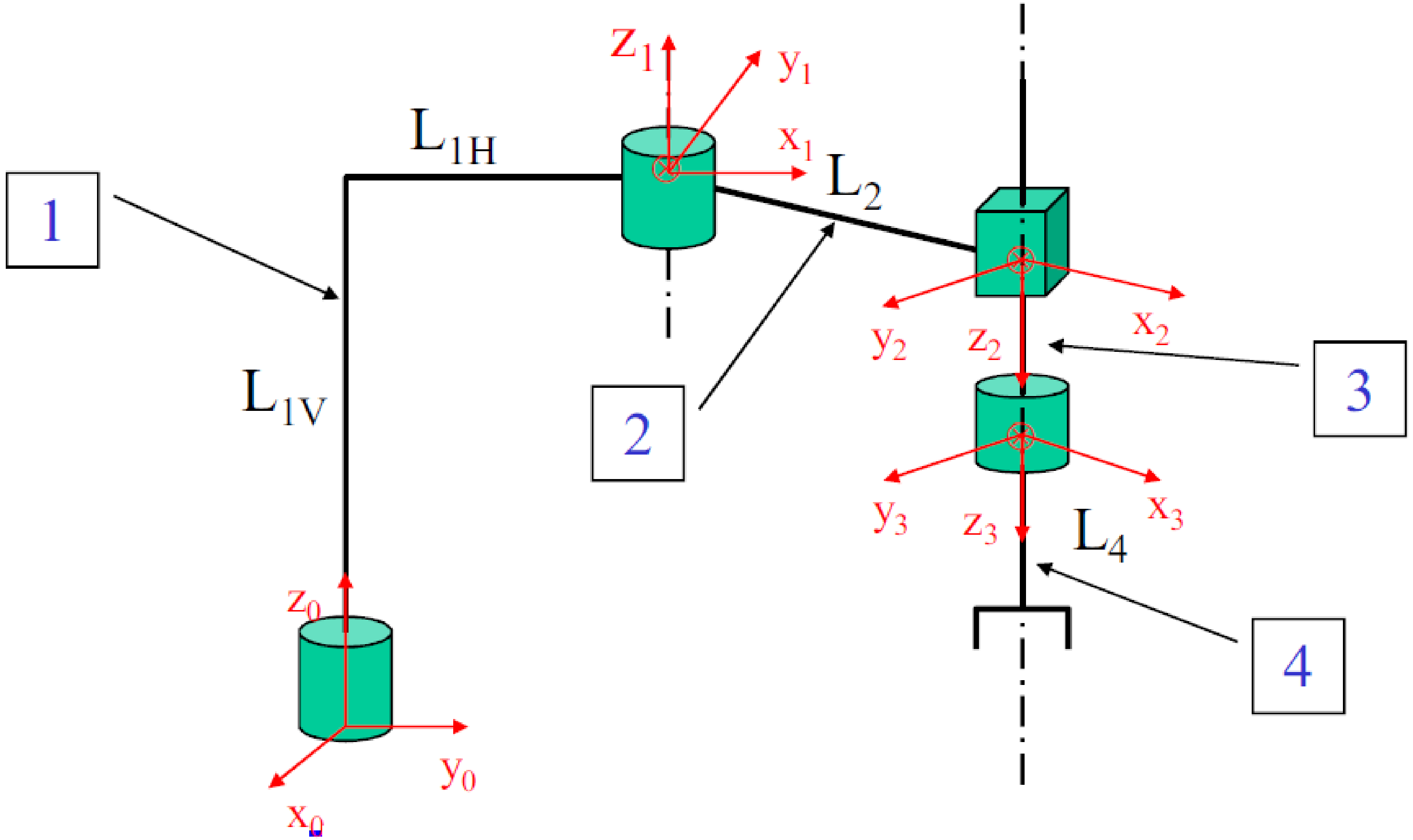
Algoritmo de Denavit-Hartenberg Ejemplo 3 (cont.)

Paso 1: Establecer el sistema de referencia x_0, y_0, z_0



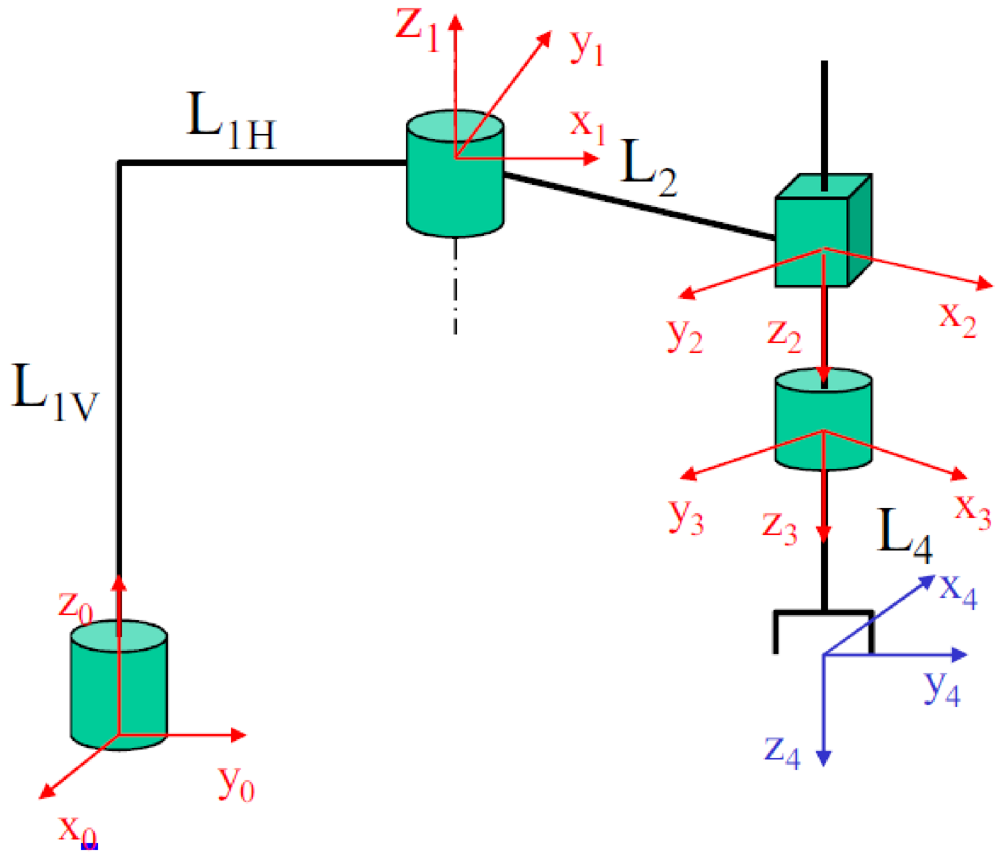
Algoritmo de Denavit-Hartenberg Ejemplo 3 (cont.)

Pasos 3-6: Fijar los sistemas de coordenadas x_k, y_k, z_k para k=1,2,3



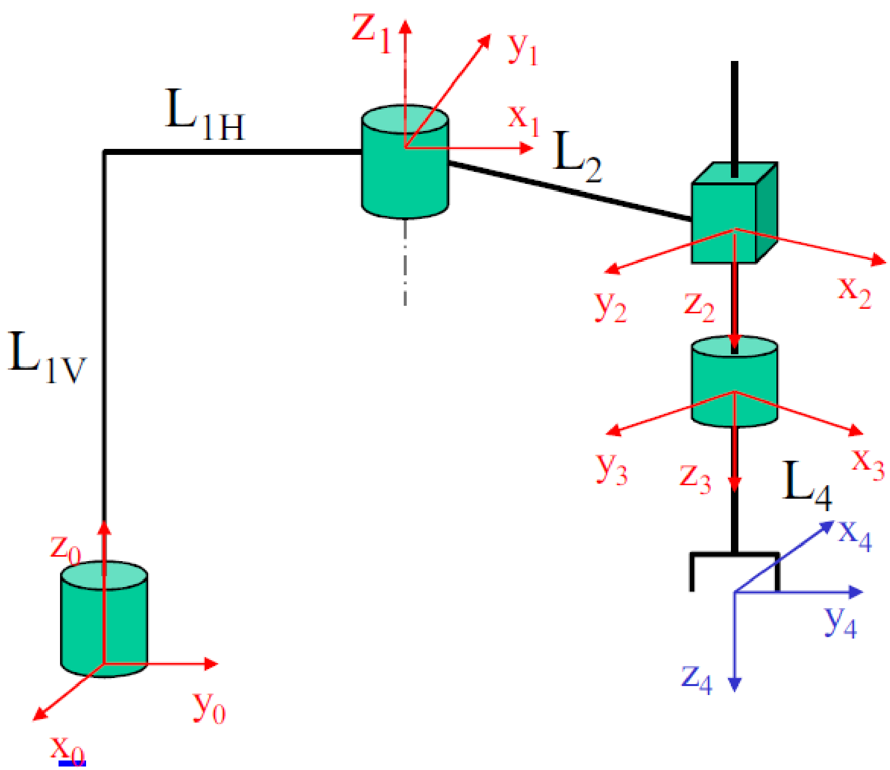
Algoritmo de Denavit-Hartenberg Ejemplo 3 (cont.)

Pasos 8: Fijar el sistema de coordenadas de la mano x_n,y_n,z_n, n=4



Algoritmo de Denavit-Hartenberg Ejemplo 3 (cont.)

Pasos 10: Cálculo de la tabla de parámetros D-H



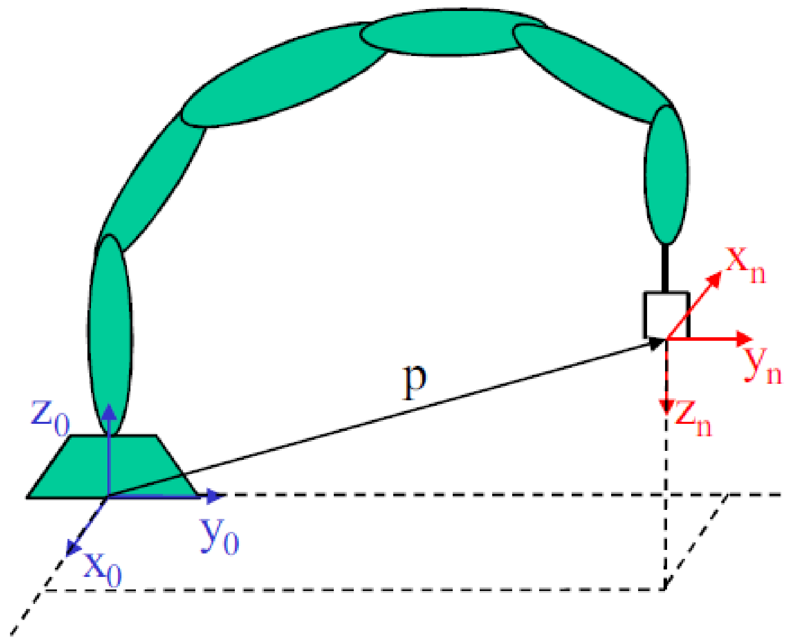
Articulación	a_k	α_k	d_k	θ_k
1	L_{1H}	0°	L_{1V}	θ^*_1
2	L_2	180°	0	θ^*_2
3	0	0°	d^*_3	0°
4	0°	0°	L_4	θ^*_4

Objetivo Final de la Cinemática Directa

- Obtener la expresión analítica de la posición y orientación del efector final del robot en función del valor de las variables de articulación.
- A esa expresión se le conoce con el nombre de **matriz de brazo** o **ecuación cinemática del robot**.

$$T_{Base}^{Mano} = A_0^n = A_0^1 A_1^2 \ldots\ldots A_{n-1}^n = \prod_{j=1}^{n} A_{j-1}^j$$

Interpretación Geométrica



$$T_{Base}^{Mano}(q_1, q_2, \ldots q_n) = \begin{pmatrix} n_x & s_x & a_x & p_x \\ n_y & s_y & a_y & p_y \\ n_z & s_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_0^n & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Referencias Bibliográficas

- Fu, K.S.; González, R.C. y Lee, C.S.G. Robotics: Control, Sensing, Vision, and Intelligence. McGraw-Hill. 1987.
- Cinemática. URL: http://proton.ucting.udg.mx/materias/robotica/r166/r78/r78.htm
- Martínez A. G. M.; Jáquez O. S. A.; Rivera M. J. y Sandoval R. R. "Diseño propio y Construcción de un Brazo Robótico de 5 GDL". URL: http://antiguo.itson.mx/rieeandc/vol4p1_archivos/Art2Junio08.pdf


¿Preguntas?

¡Gracias!

Dra. Kryscia Daviana Ramírez Benavides
Profesora e Investigadora
Universidad de Costa Rica
Escuela de Ciencias de la Computación e Informática

Sitio Web: http://www.kramirez.net/
E-Mail: kryscia.ramirez@ucr.ac.cr
kryscia.ramirez@ecci.ucr.ac.cr
Redes Sociales: