Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas
Laboratorio de Simulación
Segundo Examen Parcial
27/04/2020
Shannon Nazareth Cap Morales

Resumen

Se realizo dos programas en lenguaje C. El primer programa permite determinar la recta de aproximacion por minimos cuadrados de un conjunto de datos de tension en Newtons y longitud de onda en metros de una cuerda vibrante. De lo cual se obtuvo que la recta que correlaciona los datos de la longitud de onda en funcion de la tension es $y = (0.510875 \pm 0.653140)x + (0.000265 \pm 0.000447)$ con un coeficiente de corelacion de 0.990511. La recta obtenida se grafico con los datos mostrando que la misma corresponde a la dependencia lineal entre ellos. Con este programa se calculo tambien el valor de la longitud de onda cuando la tension es de 6N, obteniendo un valor de longitud de onda de 3.718991 ± 0.001433(m).
El segundo programa permite determinar la raiz de una funcion mediante el medoto de Biseccion, el cual se realizo para la funcion $f(x) = cos(x)/sin(x)$ en un intervalo [1,2] con tolerancia de 0.001. De lo cual se obtuvo un valor aproximado para la raiz de la funcion de 1.571289, que coincidio con lo que se esperado al observar la grafica de la funcion.

1. Objetivos

1. Realizar un programa en C que determine la aproximacion de minimos cuadrados para un experimeinto de ondas estacionarias con una cuerda, para la longitud de onda en funcion de la tension.
2. Comparar la recta aproximada por minimos cuadrados con los valores mediante una grafica.
3. Estimar la longitud de onda cuando la tension tiene un valor de 6N.
4. Realizar un programa en C que encuentre la raiz de la funcion $f(x) = cos(x)/sin(x)$ en un intervalo establecido.
5. Mostrar la funcion en una grafica para comparar con el valor obtenido en el programa.

2. Planteamiento del problema

2.1. Problema 1

Se realizo un experimento de eondas estacionarias donde se obtuvo los resultados mostradoe n la tabla, para lo cual se debe realizar la aproximacion de minimos cuadrados comparando la recta obtenida por el metodo con los valores experimentales. Asi mismo, se pide estimar el valor de la densidad lineal de la cuerda y la longitud de onda cuando la tension sea de 6N.

Tensión ($N \pm 0.001N$)	Longitud de onda (m)
4.694	3
1.264	1.5
0.578	1
0.284	0.75
0.196	0.6

Figura 1: Datos de tension y longitud de onda

2.2. Problema 2

Utilizando el metodo de biseccion encontrar la raiz de la funcion

$$f(x) = \frac{cos(x)}{sin(x)}$$

Realizar una grafica de la funcion y comparar con el resultado obtenido con el programa.

3. Marco Teórico

3.1. Minimos Cuadrados

En el metodo de minimos cuadrados se busca la mejor aproximacion lineal cuando el error es la suma de los cuadrados de las diferencia entre los valores y en la linea de aproximacion. El metodo de minimos cuadrados coloca mayor peso en un punto que esta fue de la linea con el resto de los datos, pero no permite que ese punto determine totalmente la aproximacion.[1]

La recta de la aproximacion lineal esta dada por:

$$y = mx + b \tag{1}$$

Donde: La pendiente es:

$$m = \frac{(n\sum_{k=1}^{n} x_k y_k) - (\sum_{k=1}^{n} x_k * \sum_{k=1}^{n} y_k)}{(n\sum_{k=1}^{n} x_k^2) - (\sum_{k=1}^{n} x_k)^2} \tag{2}$$

El intercepto de la recta:

$$b = \frac{\sum_{k=1}^{n} y_k - (m\sum_{k=1}^{n} x_k)}{n} \tag{3}$$

Utilizando el error de la variable x: ϵ, el error en la pendiente es:

$$\Delta m = \frac{\sqrt{n}\epsilon}{\sqrt{(n\sum_{k=1}^{n} x_k^2) - (\sum_{k=1}^{n} x_k)^2}} \tag{4}$$

El error del intercepto:

$$\Delta b = \frac{\epsilon}{\sqrt{n}} \tag{5}$$

El coeficiente de correlacion es:

$$r = \frac{(n\sum_{k=1}^{n} x_k y_k) - (\sum_{k=1}^{n} x_k * \sum_{k=1}^{n} y_k)}{\sqrt{\left((n\sum_{k=1}^{n} x_k^2) - (\sum_{k=1}^{n} x_k)^2\right) * \left((n\sum_{k=1}^{n} y_k^2) - (\sum_{k=1}^{n} y_k)^2\right)}} \tag{6}$$

3.2. Metodo de Biseccion

El metodo de biseccion tome una funcion continua defina en un intervalo $[a, b]$, con $f(a)$ y $f(b)$ de signos opuestos. Se utiliza el teorema de valor intermedio en el cual existe un numero p en el intervalo (a, b) donde $f(p) = 0$ y se asume que solamente hay una raiz en el intervalo. En el metodo se realizan varias veces la division de subintervalos $[a, b]$ donde en cada paso se localiza la mmitad conteniendo p. [1]

El procedimietno del metodo inicia con dos vaores a_1 y b_1 y se calcula el punto medio con la ecuacion, el cual es la aproximacion a la raiz:

$$p_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} \tag{7}$$

Se valuan los valores de a y b en la funcion y entonces se verifican las condiciones:

- Si $f(a) * f(b) > 0$ entonces se tiene $[p, b]$ para la siguiente iteracion.
- Si $f(a) * f(b) < 0$ entonces se tiene $[a, p]$ para la siguiente iteracion.
- Si $f(a) * f(b) = 0$ entonces se ha encontrado la raiz.

El error del metodo se calcula a partir de:

$$\epsilon = \frac{p_n - p_{n-1}}{p_n} \tag{8}$$

El metodo acaba cuando el valor del error es menor que el valor de la tolerancia establecido.

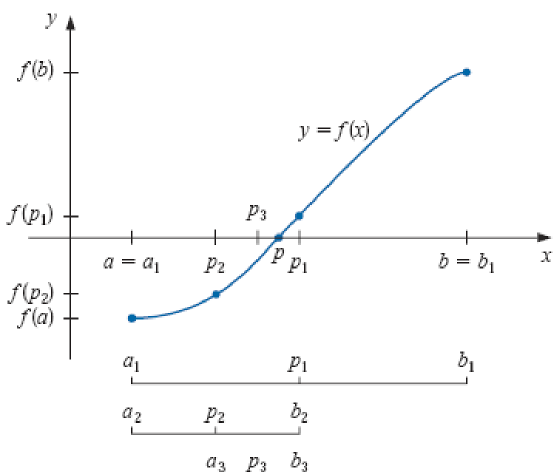

Figura 2: Representacion del metodo de Biseccion. [1, p.49]

4. Metodología

4.1. Problema1

Algoritmo:

1. Definir las variables

$$\text{float } x[5] = [4.694, 1.264, 0.578, 0.284, 0.196]$$

$$\text{float } y[5] = [3, 1.5, 1, 0.75, 0.6]$$

$$\text{float } error = 0.001$$

$$\text{float } sumx = 0, sumy = 0, sumx2 = 0, sumxy = 0, sumy2 = 0, m, b, deltam, deltab, r$$

$$\text{int } i, intn = 5,$$

2. Realizar las sumatorias utilizando un ciclo for desde $i = 0$ hasta $i \leq 5$. Cada suma esta definida por:

$$\sum x = sumx = sumx + x[i]$$

$$\sum y = sumy = sumy + y[i]$$

$$\sum x^2 = sumx2 = sumx2 + (x[i] * x[i])$$

$$\sum y^2 = sumy2 = sumy2 + (y[i] * y[i])$$

$$\sum xy = sumxy = sumxy + (x[i] * y[i])$$

3. Calcular el valor de la pendiente y el intercepto con sus errores (Marco teorico, Ecuaciones 2, 3, 4 y 5):

$$m = ((n * sumxy) - (sumx * sumy))/((n * sumx2) - (sumx * sumx))$$

$$b = (sumy - (m * sumx))/n$$

$$deltam = (sqrt(n) * error)/sqrt((n * sumx2) - (sumx * sumx))$$

$$deltab = error/sqrt(n);$$

4. Calcular el coeficiente de correlacion (Marco teorico, Ecuacion 6)

$$r = \frac{((n * sumxy) - (sumx * sumy))}{sqrt(((n * sumx2) - (sumx * sumx)) * ((n * sumy2) - (sumy * sumy)))}$$

5. Presentar el resultado de la forma $y = mx + b$.

6. Calcular el valor de la longitud de onda evaluando el valor de 6N en la ecuacion $y = mx + b$ obtenida.

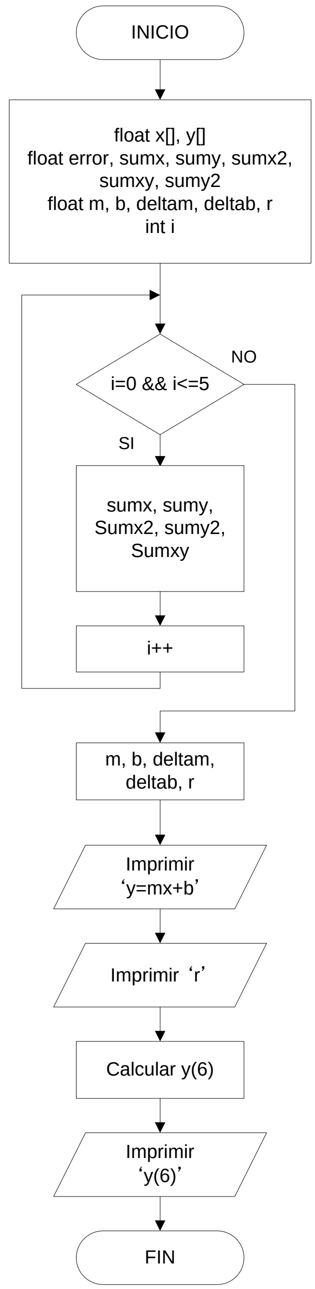

Figura 3: Diagrama de Flujo del Problema 1

4.2. Problema2

1. Colocar los prototipos de las funciones

   La funcion a evaluar float $f(\text{float } x)$

   La funcion del metodo de biseccion

   $$\text{void } Biseccion(\text{float } xa, \text{float } xb, \text{float } tol, \text{int } itmax, \text{int } iter, \text{float } xp)$$

2. Definir las funciones

   Funcion a evaluar

   $$cos(x)/sin(x)$$

   Metodo de Biseccion

   Definir las variables locales: float $xpant, error, prod, iter = 0, xa = 0$

   Verifica si hay cambio de signo en el intervalo, esto nos indica si existe raiz dentro del intervalo ingressado.

   [*] Si $f(xa) * f(xb) > 0$ entonces no hay raiz en el intervalo

   [*] Si no cumple entonces se realizan las iteraciones:

   a) Calcular la raiz aproximada (Marco teorico, Ecuacion 7)

   $$xp = (xa + xb)/2$$

   b) Calcular el error (Marco teorico, Ecuacion 8)

   $$error = fabs((xp - xpant)/xp)$$

   c) Calcular el producto de la funcion valuada en el limite inferior y la raiz aproximada

   $$prod = f(xa) * f(xp)$$

   d) Evaluar el producto para realizar cambio en el limite del intervalo. Si $prod < 0$ entonces hay cambio de $xb = xp$, si $prod > 0$ hay cambio de $xa = xp$, si el producto es cero entonces se ha encontrado la raiz.

   Presentar los datos obtenidos en las iteraciones.

3. En la funcion main definir las variables

   $$\text{float } a, b, tolerancia, raiz$$

   $$\text{int } miteraciones, iteraciones$$

4. Solicitar al usuario ingrese los valores del intervalo de la raiz, numero maximo de iteraciones y la tolerancia.

5. Llamar a la funcion del metodo de Biseccion.

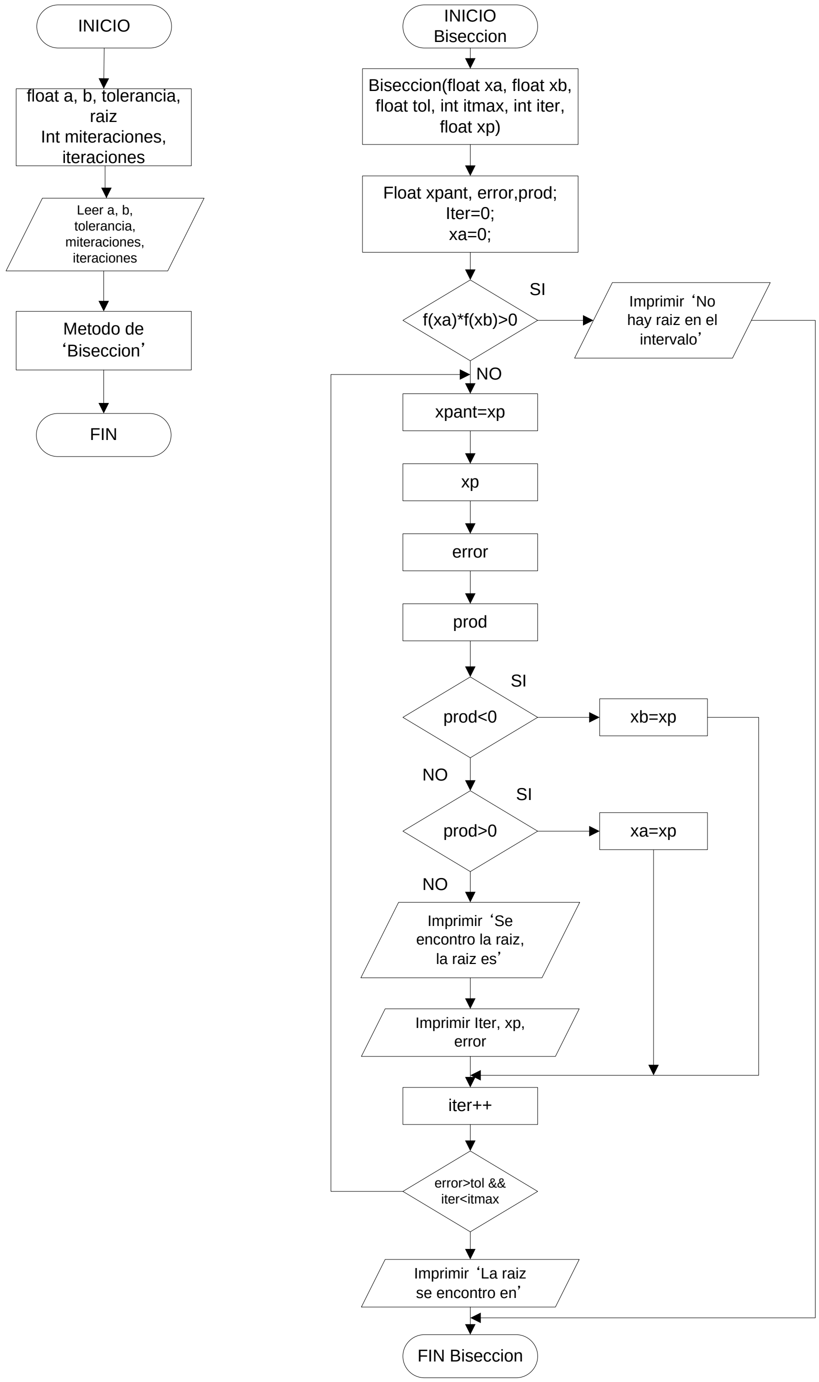

Figura 4: Diagrama de Flujo del Problema 1

5. Resultados

Correlacion por el metodo de minimos cuadrados:

$$y = (0.510875 \pm 0.653140)x + (0.000265 \pm 0.000447)$$

Coeficiente de correlacion:

$$r = 0.990511$$

Comparacion grafica de los datos con la recta aproximada por minimos cuadrados

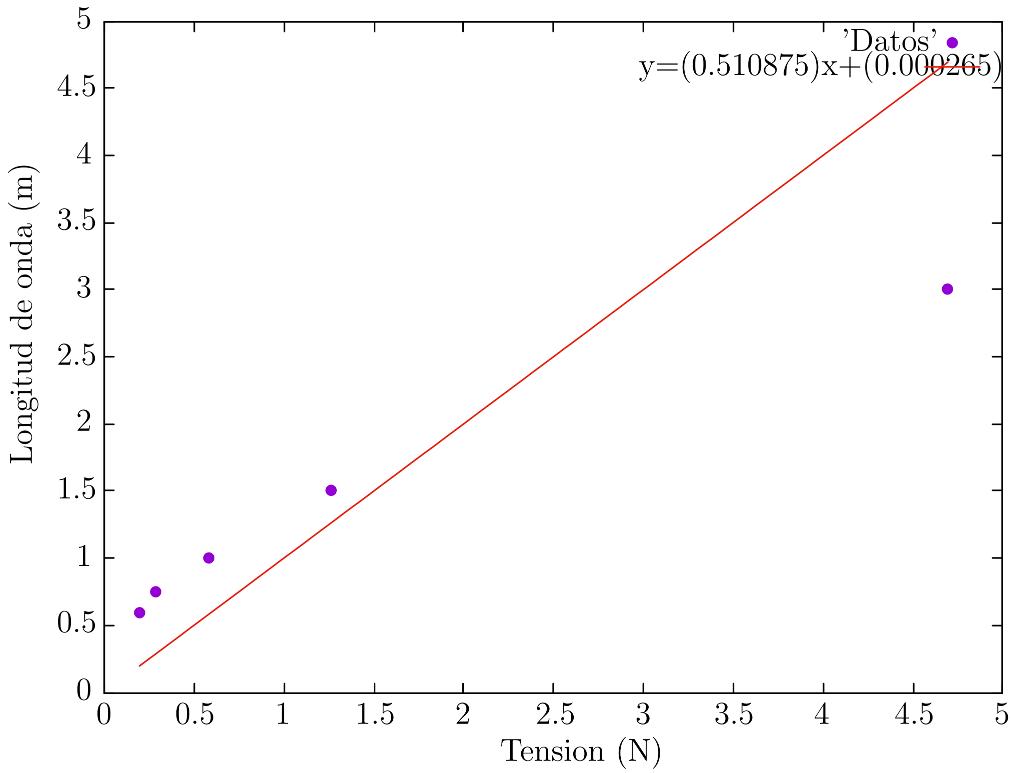

Figura 5: Correlacion por minimos cuadrados para el Problema 1

Longitud de onda a una tension de 6N:

$$\lambda = 3.718991 \pm 0.001433$$

Raiz de la funcion $f(x) = cos(x)/sin(x)$ para el intervalo $[1, 2]$, con tolerancia 0.001:

$$p = 1.571289$$

Grafica de la funcion $f(x) = cos(x)/sin(x)$:

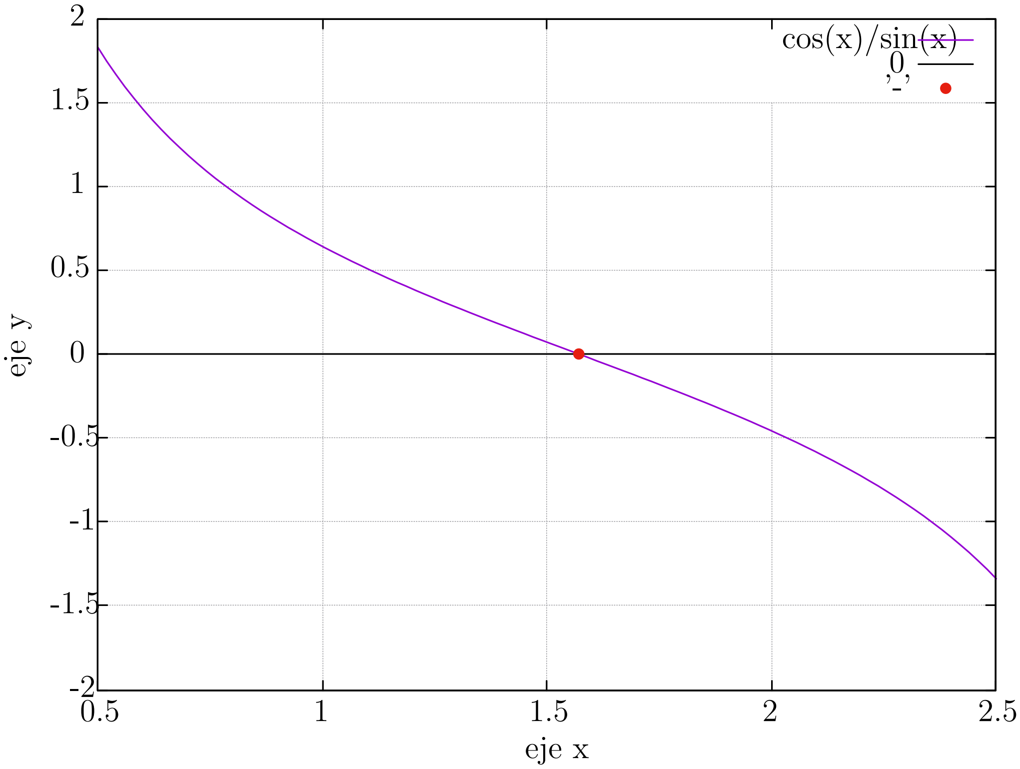

Figura 6: Grafica de la funcion cerca del intervalo [1,2]

6. Conclusiones

1. Utilizando el metodo de minimos cuadrados se detrmino que la recta que aproxima los datos de longitud de onda en funcion de la tension esta dada por:

$$y = (0.510875 \pm 0.653140)x + (0.000265 \pm 0.000447)$$

   con un coeficiente de correlacion de 0.990511.

2. La recta obtenida por minimos cuadrados describe el comportamiento de la longitud de onda en funcion de la tension, mostrando que tienen dependencia lineal entre ellos, el metodo permite que la correlacion sea alta aunque exista un punto bastante alejado debido a que no da tanto peso a ese valor.

3. La longitud de onda estimada para una tension de 6N es 3.718991 ± 0.001433m.

4. Se encontro la raiz de la funcion $(x) = cos(x)/sin(x)$ en un intervalo [1,2] con tolerancia de 0.001 en la onceava iteracion con un valor de 1.571289.

5. El valor obtenido a partir del metodo se encuentra cercano al valor esperado observado en la grafica.

Referencias

[1]R. Burden y D. Faires, *Numerical Analysis,* 9^a (CENGAGE Learning, USA, 2011).