# Digitale Bildverarbeitung - Lösung Blatt 3 (Fourier-Transf., Splines, DFT)

Thomas Waldecker Stefan Giggenbach

 $May\ 10,\ 2012$ 

## Aufgabe 1: Fourier-Beziehungen

#### 1a) Verschiebung im Ortsbereich

$$\mathcal{F}\{f(x-\alpha,y-\beta)\} = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x-\alpha,y-\beta) \cdot e^{-j2\pi(xu+yv)} dx dy$$

Mit den Substitutionen  $\xi = x - \alpha \ (x = \xi + \alpha)$  und  $\eta = y - \beta \ (y = \eta + \beta)$  ergibt sich

$$= \int\!\!\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi,\eta) \cdot e^{-j2\pi((\xi+\alpha)u+(\eta+\beta)v)} d\xi d\eta$$

Durch Ausklammern der konstanten Faktoren erhält man

$$= e^{-j2\pi(\alpha u + \beta v)} \iint_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta) \cdot e^{-j2\pi(\xi u + \eta v)} d\xi d\eta$$

Da das Integral der Fouriertransformation  $\mathcal{F}\{f(\xi,\eta)\}=F(u,v)$  entspricht folgt

$$\mathcal{F}\{f(x-\alpha,y-\beta)\} = F(u,v) \cdot e^{-j2\pi(\alpha u + \beta v)}$$

#### 1b) Faltungssatz

$$\mathcal{F}\{h(x,y)*f(x,y)\} = \iint_{-\infty}^{\infty} [\iint_{-\infty}^{\infty} h(\chi,\psi) \cdot f(x-\chi,y-\psi) d\chi d\psi] \cdot e^{-j2\pi(xu+yv)} dx dy$$

Durch Ausklammern und Umstellen der konstanten Faktoren erhält man

$$= \iint_{-\infty}^{\infty} h(\chi, \psi) \cdot \left[ \iint_{-\infty}^{\infty} f(x - \chi, y - \psi) \cdot e^{-j2\pi(xu + yv)} dxdy \right] d\chi d\psi$$

Da das innere Integral mit der Beziehung aus Teilaufgabe 1a) der Fouriertransformation  $\mathcal{F}\{f(x-\chi,y-\psi)\}=F(u,v)\cdot e^{-j2\pi(\chi u+\psi v)}$  entspricht folgt

$$= \iint_{-\infty}^{\infty} h(\chi, \psi) \cdot F(u, v) \cdot e^{-j2\pi(\chi u + \psi v)} d\chi d\psi$$

Durch Ausklammern des konstanten Faktor erhält man

$$=F(u,v)\int\!\!\int_{-\infty}^{\infty}h(\chi,\psi)\cdot e^{-j2\pi(\chi u+\psi v)}d\chi d\psi$$

Da das Integral der Fouriertransformation  $\mathcal{F}\{h(\chi,\psi)\}=H(u,v)$  entspricht folgt

$$\mathcal{F}\{h(x,y)*f(x,y)\} = F(u,v)\cdot H(u,v)$$

## Aufgabe 2: Approximation von sinc(x) durch kubischen Spline

Ansatz und Ableitungen:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) = a_1 x^3 + b_1 x^2 + c_1 x + d_1 \\ f_2(x) = a_2 x^3 + b_2 x^2 + c_2 x + d_2 \\ f_3(x) = 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} f'_1(x) = 3a_1 x^2 + 2b_1 x + c_1 \\ f'_2(x) = 3a_2 x^2 + 2b_2 x + c_2 \\ f'_3(x) = 0 \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} f''_1(x) = 6a_1 x + 2b_1 \\ f''_2(x) = 6a_2 x + 2b_2 \\ f''_3(x) = 0 \end{cases}$$

Einsetzen der bekannten Werte der Funktion und der Ableitung an der Stelle 0 ergibt direkt Lösungen für  $c_1$  und  $d_1$ :

$$f_1(0) = 1 = a_1 \cdot 0 + b_1 \cdot 0 + c_1 \cdot 0 + d_1 \Rightarrow \underline{d_1 = 1}$$
  
 $f'_1(0) = 0 = 3a_1 \cdot 0 + 2b_1 \cdot 0 + c_1 \Rightarrow \underline{c_1 = 0}$ 

Durch das Einsetzen der übrigen Funktions- und Ableitungswerte an den jeweiligen Grenzen der Splines ergeben sich fünf Gleichungen:

$$f_1(1) = 0 = a_1 + b_1 + 1 \tag{1}$$

$$f_2(1) = 0 = a_2 + b_2 + c_2 + d_2 \tag{2}$$

$$f_2(2) = 0 = 8a_2 + 4b_2 + 2c_2 + d_2 \tag{3}$$

$$f_1'(1) = f_2'(1) : 3a_1 + 2b_1 = 3a_2 + 2b_2 + c_2$$

$$\tag{4}$$

$$f_2'(2) = 0 = 12a_2 + 4b_2 + c_2 \tag{5}$$

Zuerst wird  $c_2$  mit Gleichung (5) aus  $a_2$  und  $b_2$  ausgedrückt:

$$12a_2 + 4b_2 + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = -12a_2 - 4b_2$$

Dann wird  $d_2$  mit Gleichung (2) und dem Ausdruck von  $c_2$  aus Gleichung (5) auch durch  $a_2$  und  $b_2$  ausgedrückt:

$$a_2 + b_2 + c_2 + d_2 = 0$$

$$d_2 = -a_2 - b_2 - c_2$$

$$d_2 = -a_2 - b_2 + 12a_2 + 4b_2$$

$$d_2 = 11a_2 + 3b_2$$

Mit Gleichung (3) und den vorherigen Ausdrücken von  $c_2$  und  $d_2$  können wir  $b_2$  als Funktion von  $a_2$  darstellen:

$$8a_2 + 4b_2 + 2c_2 + d_2 = 0$$

$$8a_2 + 4b_2 + 2(-12a_2 - 4b_2) + 11a_2 + 3b_2 = 0$$

$$a_2(8 - 24 + 11) + b_2(4 - 8 + 3) = 0$$

$$b_2 = -5a_2$$

Durch Einsetzen dieses Ergebnisses in die aufgelösten Gleichungen (2) und (5) können wir dort das  $b_2$  eliminieren:

$$c_2 = -12a_2 - 4b_2$$

$$c_2 = -12a_2 - 4(-5a_2) = -12a_2 + 20a_2$$

$$c_2 = 8a_2$$

$$d_2 = 11a_2 + 3b_2 = 11a_2 + 3(-5a_2)$$

$$d_2 = -4a_2$$

Mit Gleichung (1) wird nun  $b_1$  aus  $a_1$  ausgedrückt:

$$a_1 + b_1 = -1 \Rightarrow b_1 = -1 - a_1$$

Dies und die Ergebnisse für  $b_2$ ,  $c_2$  und  $d_2$  werden nun in Gleichung (4) eingesetzt:

$$3a_1 + 2b_1 = 3a_2 + 2b_2 + c_2$$

$$3a_1 + 2(-1 - a_1) = 3a_2 + 2(-5a_2) + 8a_2$$

$$a_1 - 2 = 3a_2 - 10a_2 + 8a_2$$

$$a_1 = a_2 + 2$$

Das Ergebins in (1) eingesetzt ergibt den Ausdruck für  $b_1$ :

$$b_1 = -1 - a_1$$
  

$$b_1 = -1 - (a_2 + 2)$$
  

$$b_1 = -a_2 - 3$$

# Aufgabe 3: DFT/Abtastung/Abtasttheorem

a)

$$\Delta x = \frac{L}{N} = \frac{10 \, mm}{256} = 0.0391 \, mm$$

b)

$$u_a = \frac{N}{L} = \frac{256}{10 \, mm} = 25.6 \, \frac{1}{mm}$$

c)

$$\Delta u = \frac{1}{N\Delta x} = \frac{1}{256 \cdot 0.0391 \, mm} = 0.1 \, \frac{1}{mm}$$

d)

Die Schwingung  $\sin(16\pi k)$  besitzt eine Kreisfrequenz von  $\omega=16\pi\,\frac{1}{mm}$  mit  $\omega=2\pi f$  also eine Frequenz von  $f=\frac{16\pi}{2\pi}\,\frac{1}{mm}=8\,\frac{1}{mm}$ . Zusammen mit dem Intervall  $\Delta u$  aus Tailaufgabe c) ergeben sich

$$l_1 = \frac{f}{\Delta u} = \frac{8\frac{1}{mm}}{0.1\frac{1}{mm}} = 80 \text{ und } l_2 = 256 - 80 = 176$$

e)

$$f_{max} = \frac{u_a}{2} = 12.8 \, \frac{1}{mm}$$