

Digitale Bildverarbeitung - Lösung Blatt 3 (Fourier-Transf., Splines, DFT)

Thomas Waldecker
Stefan Giggenbach

May 10, 2012

Aufgabe 1: Fourier-Beziehungen

1a) Verschiebung im Ortsbereich

$$\mathcal{F}\{f(x - \alpha, y - \beta)\} = \int \int_{-\infty}^{\infty} f(x - \alpha, y - \beta) \cdot e^{-j2\pi(xu + yv)} dx dy$$

Mit den Substitutionen $\xi = x - \alpha$ ($x = \xi + \alpha$) und $\eta = y - \beta$ ($y = \eta + \beta$) ergibt sich

$$= \int \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta) \cdot e^{-j2\pi((\xi + \alpha)u + (\eta + \beta)v)} d\xi d\eta$$

Durch Ausklammern der konstanten Faktoren erhält man

$$= e^{-j2\pi(\alpha u + \beta v)} \int \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta) \cdot e^{-j2\pi(\xi u + \eta v)} d\xi d\eta$$

Da das Integral der Fouriertransformation $\mathcal{F}\{f(\xi, \eta)\} = F(u, v)$ entspricht folgt

$$\mathcal{F}\{f(x - \alpha, y - \beta)\} = F(u, v) \cdot e^{-j2\pi(\alpha u + \beta v)}$$

1b) Faltungssatz

$$\mathcal{F}\{h(x, y) * f(x, y)\} = \int \int_{-\infty}^{\infty} [\int \int_{-\infty}^{\infty} h(\chi, \psi) \cdot f(x - \chi, y - \psi) d\chi d\psi] \cdot e^{-j2\pi(xu + yv)} dx dy$$

Durch Ausklammern und Umstellen der konstanten Faktoren erhält man

$$= \int \int_{-\infty}^{\infty} h(\chi, \psi) \cdot [\int \int_{-\infty}^{\infty} f(x - \chi, y - \psi) \cdot e^{-j2\pi(xu + yv)} dx dy] d\chi d\psi$$

Da das innere Integral mit der Beziehung aus Teilaufgabe 1a) der Fouriertransformation $\mathcal{F}\{f(x - \chi, y - \psi)\} = F(u, v) \cdot e^{-j2\pi(\chi u + \psi v)}$ entspricht folgt

$$= \int \int_{-\infty}^{\infty} h(\chi, \psi) \cdot F(u, v) \cdot e^{-j2\pi(\chi u + \psi v)} d\chi d\psi$$

Durch Ausklammern des konstanten Faktor erhält man

$$= F(u, v) \int \int_{-\infty}^{\infty} h(\chi, \psi) \cdot e^{-j2\pi(\chi u + \psi v)} d\chi d\psi$$

Da das Integral der Fouriertransformation $\mathcal{F}\{h(\chi, \psi)\} = H(u, v)$ entspricht folgt

$$\mathcal{F}\{h(x, y) * f(x, y)\} = F(u, v) \cdot H(u, v)$$

Aufgabe 2: Approximation von $\text{sinc}(x)$ durch kubischen Spline

Ansatz und Ableitungen:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) = a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1 \\ f_2(x) = a_2x^3 + b_2x^2 + c_2x + d_2 \\ f_3(x) = 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} f'_1(x) = 3a_1x^2 + 2b_1x + c_1 \\ f'_2(x) = 3a_2x^2 + 2b_2x + c_2 \\ f'_3(x) = 0 \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} f''_1(x) = 6a_1x + 2b_1 \\ f''_2(x) = 6a_2x + 2b_2 \\ f''_3(x) = 0 \end{cases}$$

$$f_1(0) = 1 = a_1 \cdot 0 + b_1 \cdot 0 + c_1 \cdot 0 + d_1 \Rightarrow d_1 = 1$$

$$f'_1(0) = 0 = 3a_1 \cdot 0 + 2b_1 \cdot 0 + c_1 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$\text{I } f_1(1) = 0 = a_1 + b_1 + 1$$

$$\text{II } f_2(1) = 0 = a_2 + b_2 + c_2 + d_2$$

$$\text{III } f_2(2) = 0 = 8a_2 + 4b_2 + 2c_2 + d_2$$

$$\text{IV } f'_1(1) = f'_2(1) : 3a_1 + 2b_1 = 3a_2 + 2b_2 + c_2$$

$$\text{V } f'_2(2) = 0 = 12a_2 + 4b_2 + c_2$$

$$\text{I: } a_1 + b_1 = -1 \Rightarrow b_1 = -1 - a_1$$

$$\text{V: } 12a_2 + 4b_2 + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = -12a_2 - 4b_2$$

$$\text{II: } a_2 + b_2 + c_2 + d_2 = 0 \Rightarrow d_2 = -a_2 - b_2 - c_2 \Rightarrow -a_2 - b_2 + 12a_2 + 4b_2 = 11a_2 + 3b_2 = d_2$$

$$\text{III: } 8a_2 + 4b_2 + 2c_2 + d_2 = 0$$

$$8a_2 + 4b_2 + 2(-12a_2 - 4b_2) + 11a_2 + 3b_2 = 0$$

$$a_2(8 - 24 + 11) + b_2(4 - 8 + 3) = 0$$

$$b_2 = -5a_2$$

$$\text{V: } c_2 = -12a_2 - 4b_2$$

$$c_2 = -12a_2 - 4(-5a_2) = -12a_2 + 20a_2$$

$$c_2 = 8a_2$$

$$\text{II: } d_2 = 11a_2 + 3b_2 = 11a_2 + 3(-5a_2)$$

$$d_2 = -4a_2$$

$$\text{IV: } 3a_1 + 2b_1 = 3a_2 + 2b_2 + c_2$$

$$3a_1 + 2(-1 - a_1) = 3a_2 + 2b_2 + c_2$$

$$a_1 - 2 = 3a_2 + 2b_2 + c_2$$

$$\text{I: } b_1 = -1 - a_1$$

$$b_1 = -1 - (a_2 + 2)$$

$$b_1 = -a_2 - 3$$

Aufgabe 3: DFT/Abtastung/Abtasttheorem

a)

$$\Delta x = \frac{L}{N} = \frac{10 \text{ mm}}{256} = 0.0391 \text{ mm}$$

b)

$$u_a = \frac{N}{L} = \frac{256}{10 \text{ mm}} = 25.6 \frac{1}{\text{mm}}$$

c)

$$\Delta u = \frac{1}{N\Delta x} = \frac{1}{256 \cdot 0.0391 \text{ mm}} = 0.1 \frac{1}{\text{mm}}$$

d)

Die Schwingung $\sin(16\pi k)$ besitzt eine Kreisfrequenz von $\omega = 16\pi \frac{1}{\text{mm}}$ mit $\omega = 2\pi f$ also eine Frequenz von $f = \frac{16\pi}{2\pi} \frac{1}{\text{mm}} = 8 \frac{1}{\text{mm}}$. Zusammen mit dem Intervall Δu aus Teilaufgabe c) ergeben sich

$$l_1 = \frac{f}{\Delta u} = \frac{8 \frac{1}{\text{mm}}}{0.1 \frac{1}{\text{mm}}} = 80 \text{ und } l_2 = 256 - 80 = 176$$

e)

$$f_{\max} = \frac{u_a}{2} = 12.8 \frac{1}{\text{mm}}$$