

Digitale Bildverarbeitung - Lösung Blatt 3

(Fourier-Transf., Splines, DFT)

Thomas Waldecker
Stefan Giggenbach

11. Mai 2012

Aufgabe 1: Fourier-Beziehungen

1a) Verschiebung im Ortsbereich

$$\mathcal{F}\{f(x - \alpha, y - \beta)\} = \int \int_{-\infty}^{\infty} f(x - \alpha, y - \beta) \cdot e^{-j2\pi(xu + yv)} dx dy$$

Mit den Substitutionen $\xi = x - \alpha$ ($x = \xi + \alpha$) und $\eta = y - \beta$ ($y = \eta + \beta$) ergibt sich

$$= \int \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta) \cdot e^{-j2\pi((\xi + \alpha)u + (\eta + \beta)v)} d\xi d\eta$$

Durch Ausklammern der konstanten Faktoren erhält man

$$= e^{-j2\pi(\alpha u + \beta v)} \int \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta) \cdot e^{-j2\pi(\xi u + \eta v)} d\xi d\eta$$

Da das Integral der Fouriertransformation $\mathcal{F}\{f(\xi, \eta)\} = F(u, v)$ entspricht folgt

$$\mathcal{F}\{f(x - \alpha, y - \beta)\} = F(u, v) \cdot e^{-j2\pi(\alpha u + \beta v)}$$

1b) Faltungssatz

$$\mathcal{F}\{h(x, y) * f(x, y)\} = \int \int_{-\infty}^{\infty} [\int \int_{-\infty}^{\infty} h(\chi, \psi) \cdot f(x - \chi, y - \psi) d\chi d\psi] \cdot e^{-j2\pi(xu + yv)} dx dy$$

Durch Ausklammern und Umstellen der konstanten Faktoren erhält man

$$= \int \int_{-\infty}^{\infty} h(\chi, \psi) \cdot [\int \int_{-\infty}^{\infty} f(x - \chi, y - \psi) \cdot e^{-j2\pi(xu + yv)} dx dy] d\chi d\psi$$

Da das innere Integral mit der Beziehung aus Teilaufgabe 1a) der Fouriertransformation $\mathcal{F}\{f(x - \chi, y - \psi)\} = F(u, v) \cdot e^{-j2\pi(\chi u + \psi v)}$ entspricht folgt

$$= \int \int_{-\infty}^{\infty} h(\chi, \psi) \cdot F(u, v) \cdot e^{-j2\pi(\chi u + \psi v)} d\chi d\psi$$

Durch Ausklammern des konstanten Faktor erhält man

$$= F(u, v) \int \int_{-\infty}^{\infty} h(\chi, \psi) \cdot e^{-j2\pi(\chi u + \psi v)} d\chi d\psi$$

Da das Integral der Fouriertransformation $\mathcal{F}\{h(\chi, \psi)\} = H(u, v)$ entspricht folgt

$$\mathcal{F}\{h(x, y) * f(x, y)\} = F(u, v) \cdot H(u, v)$$

Aufgabe 2: Approximation von $\text{sinc}(x)$ durch kubischen Spline

2a) allgemeine Herleitung

Ansatz und Ableitungen:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) = a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1 & \text{für } 0 < x < 1 \\ f_2(x) = a_2x^3 + b_2x^2 + c_2x + d_2 & \text{für } 1 < x < 2 \\ f_3(x) = 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} f'_1(x) = 3a_1x^2 + 2b_1x + c_1 & \text{für } 0 < x < 1 \\ f'_2(x) = 3a_2x^2 + 2b_2x + c_2 & \text{für } 1 < x < 2 \\ f'_3(x) = 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} f''_1(x) = 6a_1x + 2b_1 & \text{für } 0 < x < 1 \\ f''_2(x) = 6a_2x + 2b_2 & \text{für } 1 < x < 2 \\ f''_3(x) = 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Einsetzen der bekannten Werte der Funktion und der Ableitung an der Stelle 0 ergibt direkt Lösungen für c_1 und d_1 :

$$\begin{aligned} f_1(0) = 1 &= a_1 \cdot 0 + b_1 \cdot 0 + c_1 \cdot 0 + d_1 \Rightarrow \underline{d_1 = 1} \\ f'_1(0) = 0 &= 3a_1 \cdot 0 + 2b_1 \cdot 0 + c_1 \Rightarrow \underline{c_1 = 0} \end{aligned}$$

Durch das Einsetzen der übrigen Funktions- und Ableitungswerte an den jeweiligen Grenzen der Splines ergeben sich fünf Gleichungen:

$$f_1(1) = 0 = a_1 + b_1 + 1 \quad (1)$$

$$f_2(1) = 0 = a_2 + b_2 + c_2 + d_2 \quad (2)$$

$$f_2(2) = 0 = 8a_2 + 4b_2 + 2c_2 + d_2 \quad (3)$$

$$f'_1(1) = f'_2(1) : 3a_1 + 2b_1 = 3a_2 + 2b_2 + c_2 \quad (4)$$

$$f'_2(2) = 0 = 12a_2 + 4b_2 + c_2 \quad (5)$$

Zuerst wird c_2 mit Gleichung (5) aus a_2 und b_2 ausgedrückt:

$$12a_2 + 4b_2 + c_2 = 0 \Rightarrow \underline{c_2 = -12a_2 - 4b_2}$$

Dann wird d_2 mit Gleichung (2) und dem Ausdruck von c_2 aus Gleichung (5) auch durch a_2 und b_2 ausgedrückt:

$$a_2 + b_2 + c_2 + d_2 = 0$$

$$d_2 = -a_2 - b_2 - c_2$$

$$d_2 = -a_2 - b_2 + 12a_2 + 4b_2$$

$$\underline{d_2 = 11a_2 + 3b_2}$$

Mit Gleichung (3) und den vorherigen Ausdrücken von c_2 und d_2 können wir b_2 als Funktion von a_2 darstellen:

$$\begin{aligned}8a_2 + 4b_2 + 2c_2 + d_2 &= 0 \\8a_2 + 4b_2 + 2(-12a_2 - 4b_2) + 11a_2 + 3b_2 &= 0 \\a_2(8 - 24 + 11) + b_2(4 - 8 + 3) &= 0 \\\underline{b_2 = -5a_2}\end{aligned}$$

Durch Einsetzen dieses Ergebnisses in die aufgelösten Gleichungen (2) und (5) können wir dort das b_2 eliminieren:

$$\begin{aligned}c_2 &= -12a_2 - 4b_2 \\c_2 &= -12a_2 - 4(-5a_2) = -12a_2 + 20a_2 \\\underline{c_2 = 8a_2} \\d_2 &= 11a_2 + 3b_2 = 11a_2 + 3(-5a_2) \\\underline{d_2 = -4a_2}\end{aligned}$$

Mit Gleichung (1) wird nun b_1 aus a_1 ausgedrückt:

$$a_1 + b_1 = -1 \Rightarrow \underline{b_1 = -1 - a_1}$$

Dies und die Ergebnisse für b_2 , c_2 und d_2 werden nun in Gleichung (4) eingesetzt:

$$\begin{aligned}3a_1 + 2b_1 &= 3a_2 + 2b_2 + c_2 \\3a_1 + 2(-1 - a_1) &= 3a_2 + 2(-5a_2) + 8a_2 \\a_1 - 2 &= 3a_2 - 10a_2 + 8a_2 \\\underline{a_1 = a_2 + 2}\end{aligned}$$

Das Ergebnis in (1) eingesetzt ergibt den Ausdruck für b_1 :

$$\begin{aligned}b_1 &= -1 - a_1 \\b_1 &= -1 - (a_2 + 2) \\\underline{b_1 = -a_2 - 3}\end{aligned}$$

2b) Lösung im Skript

$$s3(t) = \begin{cases} |t^3| - 2t^2 + 1 & \text{für } 0 \leq t < 1 \\ -|t^3| + 5t^2 - 8|t| + 4 & \text{für } 1 \leq |t| < 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Für diese Lösung gilt: $a_2 = -1$. Setzt man dieses a_2 in die in 2a berechneten allgemeinen Ausdrücke ein erhält man:

$$\begin{aligned}a_1 &= a_2 + 2 = -1 + 2 = 1 \\b_1 &= -a_2 - 3 = 1 - 3 = -2 \\c_1 &= 0 \\d_1 &= 1 \\a_2 &= -1 \\b_2 &= -5a_2 = -5(-1) = 5 \\c_2 &= 8a_2 = 8(-1) = -8 \\d_2 &= -4a_2 = -4(-1) = 4\end{aligned}$$

Diese Lösung stimmt mit der Angabe im Skript überein.

2c) Lösung falls $f_1''(1) = f_2''(1)$

$$\begin{aligned}f_1''(1) &= f_2''(1) \\6a_1 + 2b_1 &= 6a_2 + 2b_2 \\6(a_2 + 2) + 2(-a_2 - 3) &= 6a_2 + 2(-5a_2) \\6a_2 + 12 - 2a_2 - 6 &= 6a_2 - 10a_2 \\6 &= 8a_2 \\a_2 &= \frac{3}{4}\end{aligned}$$

Die anderen Parameter ergeben sich dann:

$$\begin{aligned}a_1 &= a_2 + 2 = \frac{3}{4} + 2 = \frac{11}{4} \\b_1 &= -a_2 - 3 = -\frac{3}{4} - 3 = -\frac{15}{4} \\c_1 &= 0 \\d_1 &= 1 \\a_2 &= \frac{3}{4} \\b_2 &= -5a_2 = -5\left(\frac{3}{4}\right) = -\frac{15}{4} \\c_2 &= 8a_2 = 8 \cdot \frac{3}{4} = 12 \\d_2 &= -4a_2 = -4 \cdot \frac{3}{4} = -3\end{aligned}$$

Interpretation:

Wenn die Funktion gezeichnet wird ergibt sich eine Funktion die kein kubischer Spline

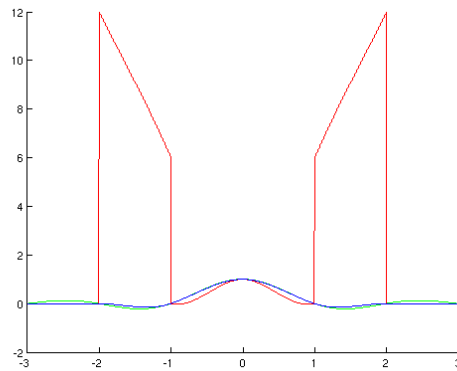


Abbildung 1: Die Funktion mit $f_1''(1) = f_2''(1)$ (rot)

ist. Es sieht aus als ob bei den Stellen -1 und +1 ein Sprung zwischen den Funktionen vorhanden ist. Dies darf bei Spline-Approximation nicht vorkommen.

Rechnerische Überprüfung:

$$\begin{aligned}
 f_1(1) &= f_2(1) \\
 \frac{11}{4}t^3 - \frac{15}{4}t^2 + 1 &= \frac{3}{4}t^3 - \frac{15}{4}t^2 + 12t - 3 \\
 \frac{11}{4} - \frac{15}{4} + 1 &= \frac{3}{4} - \frac{15}{4} + 12 - 3 \\
 \frac{11}{4} + 1 - \frac{3}{4} - 12 + 3 &= 0 \\
 2 + 1 - 12 + 3 &= 0 \\
 -6 &= 0 \quad \text{!}
 \end{aligned}$$

Die rechnerische Überprüfung ergibt das die Lösung" gar keine richtige Lösung des Gleichungssystems ist.

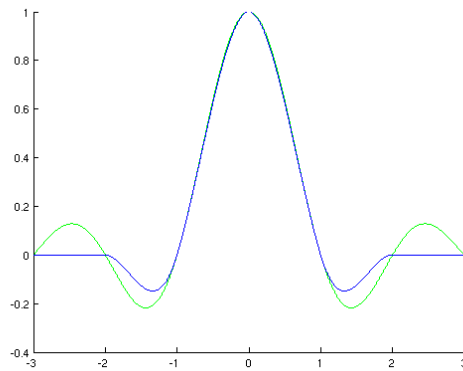


Abbildung 2: Der kubische Spline (blau) und die sinc(x) Funktion (grün)

Aufgabe 3: DFT/Abtastung/Abtasttheorem

a)

$$\Delta x = \frac{L}{N} = \frac{10 \text{ mm}}{256} = 0.0391 \text{ mm}$$

b)

$$u_a = \frac{N}{L} = \frac{256}{10 \text{ mm}} = 25.6 \frac{1}{\text{mm}}$$

c)

$$\Delta u = \frac{1}{N \Delta x} = \frac{1}{256 \cdot 0.0391 \text{ mm}} = 0.1 \frac{1}{\text{mm}}$$

d)

Die Schwingung $\sin(16\pi k)$ besitzt eine Kreisfrequenz von $\omega = 16\pi \frac{1}{\text{mm}}$ mit $\omega = 2\pi f$ also eine Frequenz von $f = \frac{16\pi}{2\pi} \frac{1}{\text{mm}} = 8 \frac{1}{\text{mm}}$. Zusammen mit dem Intervall Δu aus Teilaufgabe c) ergeben sich

$$l_1 = \frac{f}{\Delta u} = \frac{8 \frac{1}{\text{mm}}}{0.1 \frac{1}{\text{mm}}} = 80 \text{ und } l_2 = 256 - 80 = 176$$

e)

$$f_{\max} = \frac{u_a}{2} = 12.8 \frac{1}{\text{mm}}$$