

# **Digitale Bildverarbeitung - Lösung Blatt 3 (Fourier-Transf., Splines, DFT)**

Thomas Waldecker  
Stefan Giggenbach

May 10, 2012

## Aufgabe 1: Fourier-Beziehungen

### 1a) Verschiebung im Ortsbereich

$$\mathcal{F}\{f(x - \alpha, y - \beta)\} = \int \int_{-\infty}^{\infty} f(x - \alpha, y - \beta) \cdot e^{-j2\pi(xu + yv)} dx dy$$

Mit den Substitutionen  $\xi = x - \alpha$  ( $x = \xi + \alpha$ ) und  $\eta = y - \beta$  ( $y = \eta + \beta$ ) ergibt sich

$$= \int \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta) \cdot e^{-j2\pi((\xi + \alpha)u + (\eta + \beta)v)} d\xi d\eta$$

Durch Ausklammern der konstanten Faktoren erhält man

$$= e^{-j2\pi(\alpha u + \beta v)} \int \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta) \cdot e^{-j2\pi(\xi u + \eta v)} d\xi d\eta$$

Da das Integral der Fouriertransformation  $\mathcal{F}\{f(\xi, \eta)\} = F(u, v)$  entspricht folgt

$$\mathcal{F}\{f(x - \alpha, y - \beta)\} = F(u, v) \cdot e^{-j2\pi(\alpha u + \beta v)}$$

### 1b) Faltungssatz

$$\mathcal{F}\{h(x, y) * f(x, y)\} = \int \int_{-\infty}^{\infty} [\int \int_{-\infty}^{\infty} h(\chi, \psi) \cdot f(x - \chi, y - \psi) d\chi d\psi] \cdot e^{-j2\pi(xu + yv)} dx dy$$

Durch Ausklammern und Umstellen der konstanten Faktoren erhält man

$$= \int \int_{-\infty}^{\infty} h(\chi, \psi) \cdot [\int \int_{-\infty}^{\infty} f(x - \chi, y - \psi) \cdot e^{-j2\pi(xu + yv)} dx dy] d\chi d\psi$$

Da das innere Integral mit der Beziehung aus Teilaufgabe 1a) der Fouriertransformation  $\mathcal{F}\{f(x - \chi, y - \psi)\} = F(u, v) \cdot e^{-j2\pi(\chi u + \psi v)}$  entspricht folgt

$$= \int \int_{-\infty}^{\infty} h(\chi, \psi) \cdot F(u, v) \cdot e^{-j2\pi(\chi u + \psi v)} d\chi d\psi$$

Durch Ausklammern des konstanten Faktor erhält man

$$= F(u, v) \int \int_{-\infty}^{\infty} h(\chi, \psi) \cdot e^{-j2\pi(\chi u + \psi v)} d\chi d\psi$$

Da das Integral der Fouriertransformation  $\mathcal{F}\{h(\chi, \psi)\} = H(u, v)$  entspricht folgt

$$\mathcal{F}\{h(x, y) * f(x, y)\} = F(u, v) \cdot H(u, v)$$

## Aufgabe 2: Approximation von $\text{sinc}(x)$ durch kubischen Spline

### 2a) allgemeine Herleitung

Ansatz und Ableitungen:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) = a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1 & \text{für } 0 < x < 1 \\ f_2(x) = a_2x^3 + b_2x^2 + c_2x + d_2 & \text{für } 1 < x < 2 \\ f_3(x) = 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} f'_1(x) = 3a_1x^2 + 2b_1x + c_1 & \text{für } 0 < x < 1 \\ f'_2(x) = 3a_2x^2 + 2b_2x + c_2 & \text{für } 1 < x < 2 \\ f'_3(x) = 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} f''_1(x) = 6a_1x + 2b_1 & \text{für } 0 < x < 1 \\ f''_2(x) = 6a_2x + 2b_2 & \text{für } 1 < x < 2 \\ f''_3(x) = 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Einsetzen der bekannten Werte der Funktion und der Ableitung an der Stelle 0 ergibt direkt Lösungen für  $c_1$  und  $d_1$ :

$$\begin{aligned} f_1(0) = 1 &= a_1 \cdot 0 + b_1 \cdot 0 + c_1 \cdot 0 + d_1 \Rightarrow \underline{d_1 = 1} \\ f'_1(0) = 0 &= 3a_1 \cdot 0 + 2b_1 \cdot 0 + c_1 \Rightarrow \underline{c_1 = 0} \end{aligned}$$

Durch das Einsetzen der übrigen Funktions- und Ableitungswerte an den jeweiligen Grenzen der Splines ergeben sich fünf Gleichungen:

$$f_1(1) = 0 = a_1 + b_1 + 1 \quad (1)$$

$$f_2(1) = 0 = a_2 + b_2 + c_2 + d_2 \quad (2)$$

$$f_2(2) = 0 = 8a_2 + 4b_2 + 2c_2 + d_2 \quad (3)$$

$$f'_1(1) = f'_2(1) : 3a_1 + 2b_1 = 3a_2 + 2b_2 + c_2 \quad (4)$$

$$f'_2(2) = 0 = 12a_2 + 4b_2 + c_2 \quad (5)$$

Zuerst wird  $c_2$  mit Gleichung (5) aus  $a_2$  und  $b_2$  ausgedrückt:

$$12a_2 + 4b_2 + c_2 = 0 \Rightarrow \underline{c_2 = -12a_2 - 4b_2}$$

Dann wird  $d_2$  mit Gleichung (2) und dem Ausdruck von  $c_2$  aus Gleichung (5) auch durch  $a_2$  und  $b_2$  ausgedrückt:

$$a_2 + b_2 + c_2 + d_2 = 0$$

$$d_2 = -a_2 - b_2 - c_2$$

$$d_2 = -a_2 - b_2 + 12a_2 + 4b_2$$

$$\underline{d_2 = 11a_2 + 3b_2}$$

Mit Gleichung (3) und den vorherigen Ausdrücken von  $c_2$  und  $d_2$  können wir  $b_2$  als Funktion von  $a_2$  darstellen:

$$\begin{aligned}8a_2 + 4b_2 + 2c_2 + d_2 &= 0 \\8a_2 + 4b_2 + 2(-12a_2 - 4b_2) + 11a_2 + 3b_2 &= 0 \\a_2(8 - 24 + 11) + b_2(4 - 8 + 3) &= 0 \\\underline{b_2 = -5a_2}\end{aligned}$$

Durch Einsetzen dieses Ergebnisses in die aufgelösten Gleichungen (2) und (5) können wir dort das  $b_2$  eliminieren:

$$\begin{aligned}c_2 &= -12a_2 - 4b_2 \\c_2 &= -12a_2 - 4(-5a_2) = -12a_2 + 20a_2 \\\underline{c_2 = 8a_2} \\d_2 &= 11a_2 + 3b_2 = 11a_2 + 3(-5a_2) \\\underline{d_2 = -4a_2}\end{aligned}$$

Mit Gleichung (1) wird nun  $b_1$  aus  $a_1$  ausgedrückt:

$$a_1 + b_1 = -1 \Rightarrow \underline{b_1 = -1 - a_1}$$

Dies und die Ergebnisse für  $b_2$ ,  $c_2$  und  $d_2$  werden nun in Gleichung (4) eingesetzt:

$$\begin{aligned}3a_1 + 2b_1 &= 3a_2 + 2b_2 + c_2 \\3a_1 + 2(-1 - a_1) &= 3a_2 + 2(-5a_2) + 8a_2 \\a_1 - 2 &= 3a_2 - 10a_2 + 8a_2 \\\underline{a_1 = a_2 + 2}\end{aligned}$$

Das Ergebnis in (1) eingesetzt ergibt den Ausdruck für  $b_1$ :

$$\begin{aligned}b_1 &= -1 - a_1 \\b_1 &= -1 - (a_2 + 2) \\\underline{b_1 = -a_2 - 3}\end{aligned}$$

## 2b) Lösung im Skript

$$s3(t) = \begin{cases} |t^3| - 2t^2 + 1 & \text{für } 0 \leq t < 1 \\ -|t^3| + 5t^2 - 8|t| + 4 & \text{für } 1 \leq |t| < 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Für diese Lösung gilt:  $a_2 = -1$ . Setzt man dieses  $a_2$  in die in 2a berechneten allgemeinen Ausdrücke ein erhält man:

$$\begin{aligned}a_1 &= a_2 + 2 = -1 + 2 = 1 \\b_1 &= -a_2 - 3 = 1 - 3 = -2 \\c_1 &= 0 \\d_1 &= 1 \\a_2 &= -1 \\b_2 &= -5a_2 = -5(-1) = 5 \\c_2 &= 8a_2 = 8(-1) = -8 \\d_2 &= -4a_2 = -4(-1) = 4\end{aligned}$$

Diese Lösung stimmt mit der Angabe im Skript überein.

**2c) Lösung falls  $f_1''(1) = f_2''(1)$**

$$\begin{aligned}f_1''(1) &= f_2''(1) \\6a_1 + 2b_1 &= 6a_2 + 2b_2 \\6(a_2 + 2) + 2(-a_2 - 3) &= 6a_2 + 2(-5a_2) \\6a_2 + 12 - 2a_2 - 6 &= 6a_2 - 10a_2 \\6 &= 8a_2 \\a_2 &= \frac{3}{4}\end{aligned}$$

Die anderen Parameter ergeben sich dann:

$$\begin{aligned}a_1 &= a_2 + 2 = \frac{3}{4} + 2 = \frac{11}{4} \\b_1 &= -a_2 - 3 = -\frac{3}{4} - 3 = -\frac{15}{4} \\c_1 &= 0 \\d_1 &= 1 \\a_2 &= \frac{3}{4} \\b_2 &= -5a_2 = -5\left(\frac{3}{4}\right) = -\frac{15}{4} \\c_2 &= 8a_2 = 8 \cdot \frac{3}{4} = 12 \\d_2 &= -4a_2 = -4 \cdot \frac{3}{4} = -3\end{aligned}$$

### Aufgabe 3: DFT/Abtastung/Abtasttheorem

a)

$$\Delta x = \frac{L}{N} = \frac{10 \text{ mm}}{256} = 0.0391 \text{ mm}$$

b)

$$u_a = \frac{N}{L} = \frac{256}{10 \text{ mm}} = 25.6 \frac{1}{\text{mm}}$$

c)

$$\Delta u = \frac{1}{N\Delta x} = \frac{1}{256 \cdot 0.0391 \text{ mm}} = 0.1 \frac{1}{\text{mm}}$$

d)

Die Schwingung  $\sin(16\pi k)$  besitzt eine Kreisfrequenz von  $\omega = 16\pi \frac{1}{\text{mm}}$  mit  $\omega = 2\pi f$  also eine Frequenz von  $f = \frac{16\pi}{2\pi} \frac{1}{\text{mm}} = 8 \frac{1}{\text{mm}}$ . Zusammen mit dem Intervall  $\Delta u$  aus Teilaufgabe c) ergeben sich

$$l_1 = \frac{f}{\Delta u} = \frac{8 \frac{1}{\text{mm}}}{0.1 \frac{1}{\text{mm}}} = 80 \text{ und } l_2 = 256 - 80 = 176$$

e)

$$f_{\max} = \frac{u_a}{2} = 12.8 \frac{1}{\text{mm}}$$