Digitale Bildverarbeitung - Lösung Blatt 3 (Fourier-Transf., Splines, DFT)

Thomas Waldecker
Stefan Giggenbach

May 10, 2012

Aufgabe 1: Fourier-Beziehungen

1a) Verschiebung im Ortsbereich

$\mathcal{F}\{f(x-\alpha, y-\beta)\} = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x-\alpha, y-\beta) \cdot e^{-j2\pi(xu+yv)} dxdy$

Mit den Substitutionen $\xi = x - \alpha$ $(x = \xi + \alpha)$ und $\eta = y - \beta$ $(y = \eta + \beta)$ ergibt sich

$= \iint_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta) \cdot e^{-j2\pi((\xi+\alpha)u+(\eta+\beta)v)} d\xi d\eta$

Durch Ausklammern der konstanten Faktoren erhält man

$= e^{-j2\pi(\alpha u+\beta v)} \iint_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta) \cdot e^{-j2\pi(\xi u+\eta v)} d\xi d\eta$

Da das Integral der Fouriertransformation $\mathcal{F}\{f(\xi, \eta)\} = F(u, v)$ entspricht folgt

$\mathcal{F}\{f(x-\alpha, y-\beta)\} = F(u, v) \cdot e^{-j2\pi(\alpha u+\beta v)}$

1b) Faltungssatz

$\mathcal{F}\{h(x, y) * f(x, y)\} = \iint_{-\infty}^{\infty} [\iint_{-\infty}^{\infty} h(\chi, \psi) \cdot f(x-\chi, y-\psi) d\chi d\psi] \cdot e^{-j2\pi(xu+yv)} dxdy$

Durch Ausklammern und Umstellen der konstanten Faktoren erhält man

$= \iint_{-\infty}^{\infty} h(\chi, \psi) \cdot [\iint_{-\infty}^{\infty} f(x-\chi, y-\psi) \cdot e^{-j2\pi(xu+yv)} dxdy] d\chi d\psi$

Da das innere Integral mit der Beziehung aus Teilaufgabe 1a) der Fouriertransformation $\mathcal{F}\{f(x-\chi, y-\psi)\} = F(u, v) \cdot e^{-j2\pi(\chi u+\psi v)}$ entspricht folgt

$= \iint_{-\infty}^{\infty} h(\chi, \psi) \cdot F(u, v) \cdot e^{-j2\pi(\chi u+\psi v)} d\chi d\psi$

Durch Ausklammern des konstanten Faktor erhält man

$= F(u, v) \iint_{-\infty}^{\infty} h(\chi, \psi) \cdot e^{-j2\pi(\chi u+\psi v)} d\chi d\psi$

Da das Integral der Fouriertransformation $\mathcal{F}\{h(\chi, \psi)\} = H(u, v)$ entspricht folgt

$\mathcal{F}\{h(x, y) * f(x, y)\} = F(u, v) \cdot H(u, v)$

Aufgabe 2: Approximation von sinc(x) durch kubischen Spline

Ansatz und Ableitungen:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \begin{cases} f_1(x) = a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1 \\ f_2(x) = a_2x^3 + b_2x^2 + c_2x + d_2 \\ f_3(x) = 0 \end{cases} \\
f'(x) &= \begin{cases} f_1'(x) = 3a_1x^2 + 2b_1x + c_1 \\ f_2'(x) = 3a_2x^2 + 2b_2x + c_2 \\ f_3'(x) = 0 \end{cases} \\
f''(x) &= \begin{cases} f_1''(x) = 6a_1x + 2b_1 \\ f_2''(x) = 6a_2x + 2b_2 \\ f_3''(x) = 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Einsetzen der bekannten Werte der Funktion und der Ableitung an der Stelle 0 ergibt direkt Lösungen für c_1 und d_1:

$$
\begin{aligned}
f_1(0) = 1 = a_1 \cdot 0 + b_1 \cdot 0 + c_1 \cdot 0 + d_1 \Rightarrow \underline{d_1 = 1} \\
f_1'(0) = 0 = 3a_1 \cdot 0 + 2b_1 \cdot 0 + c_1 \Rightarrow \underline{c_1 = 0}
\end{aligned}
$$

Durch das Einsetzen der übrigen Funktions- und Ableitungswerte an den jeweiligen Grenzen der Splines ergeben sich fünf Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
f_1(1) =& 0 = a_1 + b_1 + 1 && (1) \\
f_2(1) =& 0 = a_2 + b_2 + c_2 + d_2 && (2) \\
f_2(2) =& 0 = 8a_2 + 4b_2 + 2c_2 + d_2 && (3) \\
f_1'(1) =& f_2'(1) : 3a_1 + 2b_1 = 3a_2 + 2b_2 + c_2 && (4) \\
f_2'(2) =& 0 = 12a_2 + 4b_2 + c_2 && (5)
\end{aligned}
$$

Zuerst wird c_2 mit Gleichung (5) aus a_2 und b_2 ausgedrückt:

$$12a_2 + 4b_2 + c_2 = 0 \Rightarrow \underline{c_2 = -12a_2 - 4b_2}$$

Dann wird d_2 mit Gleichung (2) und dem Ausdruck von c_2 aus Gleichung (5) auch durch a_2 und b_2 ausgedrückt:

$$
\begin{aligned}
&a_2 + b_2 + c_2 + d_2 = 0 \\
&d_2 = -a_2 - b_2 - c_2 \\
&d_2 = -a_2 - b_2 + 12a_2 + 4b_2 \\
&\underline{d_2 = 11a_2 + 3b_2}
\end{aligned}
$$

Mit Gleichung (3) und den vorherigen Ausdrücken von c_2 und d_2 können wir b_2 als Funktion von a_2 darstellen:

$$
\begin{aligned}
&8a_2 + 4b_2 + 2c_2 + d_2 = 0 \\
&8a_2 + 4b_2 + 2(-12a_2 - 4b_2) + 11a_2 + 3b_2 = 0 \\
&a_2(8 - 24 + 11) + b_2(4 - 8 + 3) = 0 \\
&\underline{b_2 = -5a_2}
\end{aligned}
$$

Durch Einsetzen dieses Ergebnisses in die aufgelösten Gleichungen (2) und (5) können wir dort das b_2 eliminieren:

$$
\begin{aligned}
&c_2 = -12a_2 - 4b_2 \\
&c_2 = -12a_2 - 4(-5a_2) = -12a_2 + 20a_2 \\
&\underline{c_2 = 8a_2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&d_2 = 11a_2 + 3b_2 = 11a_2 + 3(-5a_2) \\
&\underline{d_2 = -4a_2}
\end{aligned}
$$

Mit Gleichung (1) wird nun b_1 aus a_1 ausgedrückt:

$$a_1 + b_1 = -1 \Rightarrow \underline{b_1 = -1 - a_1}$$

Dies und die Ergebnisse für b_2, c_2 und d_2 werden nun in Gleichung (4) eingesetzt:

$$
\begin{aligned}
&3a_1 + 2b_1 = 3a_2 + 2b_2 + c_2 \\
&3a_1 + 2(-1 - a_1) = 3a_2 + 2(-5a_2) + 8a_2 \\
&a_1 - 2 = 3a_2 - 10a_2 + 8a_2 \\
&\underline{a_1 = a_2 + 2}
\end{aligned}
$$

Das Ergebins in (1) eingesetzt ergibt den Ausdruck für b_1:

$$
\begin{aligned}
&b_1 = -1 - a_1 \\
&b_1 = -1 - (a_2 + 2) \\
&b_1 = -a_2 - 3
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3: DFT/Abtastung/Abtasttheorem

a)

$\Delta x = \frac{L}{N} = \frac{10\,mm}{256} = 0.0391\,mm$

b)

$u_a = \frac{N}{L} = \frac{256}{10\,mm} = 25.6\,\frac{1}{mm}$

c)

$\Delta u = \frac{1}{N\Delta x} = \frac{1}{256 \cdot 0.0391\,mm} = 0.1\,\frac{1}{mm}$

d)

Die Schwingung $\sin(16\pi k)$ besitzt eine Kreisfrequenz von $\omega = 16\pi\,\frac{1}{mm}$ mit $\omega = 2\pi f$ also eine Frequenz von $f = \frac{16\pi}{2\pi}\,\frac{1}{mm} = 8\,\frac{1}{mm}$. Zusammen mit dem Intervall Δu aus Tailaufgabe c) ergeben sich

$l_1 = \frac{f}{\Delta u} = \frac{8\,\frac{1}{mm}}{0.1\,\frac{1}{mm}} = 80$ und $l_2 = 256 - 80 = 176$

e)

$f_{max} = \frac{u_a}{2} = 12.8\,\frac{1}{mm}$