Digitale Bildverarbeitung - Lösung Blatt 3 (Fourier-Transf., Splines, DFT)

Thomas Waldecker
Stefan Giggenbach

10. Mai 2012

Aufgabe 1: Fourier-Beziehungen

1a) Verschiebung im Ortsbereich

$\mathcal{F}\{f(x-\alpha, y-\beta)\} = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x-\alpha, y-\beta) \cdot e^{-j2\pi(xu+yv)} dxdy$

Mit den Substitutionen $\xi = x - \alpha$ $(x = \xi + \alpha)$ und $\eta = y - \beta$ $(y = \eta + \beta)$ ergibt sich

$= \iint_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta) \cdot e^{-j2\pi((\xi+\alpha)u+(\eta+\beta)v)} d\xi d\eta$

Durch Ausklammern der konstanten Faktoren erhält man

$= e^{-j2\pi(\alpha u+\beta v)} \iint_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta) \cdot e^{-j2\pi(\xi u+\eta v)} d\xi d\eta$

Da das Integral der Fouriertransformation $\mathcal{F}\{f(\xi, \eta)\} = F(u, v)$ entspricht folgt

$\mathcal{F}\{f(x-\alpha, y-\beta)\} = F(u, v) \cdot e^{-j2\pi(\alpha u+\beta v)}$

1b) Faltungssatz

$\mathcal{F}\{h(x, y) * f(x, y)\} = \iint_{-\infty}^{\infty} [\iint_{-\infty}^{\infty} h(\chi, \psi) \cdot f(x-\chi, y-\psi) d\chi d\psi] \cdot e^{-j2\pi(xu+yv)} dxdy$

Durch Ausklammern und Umstellen der konstanten Faktoren erhält man

$= \iint_{-\infty}^{\infty} h(\chi, \psi) \cdot [\iint_{-\infty}^{\infty} f(x-\chi, y-\psi) \cdot e^{-j2\pi(xu+yv)} dxdy] d\chi d\psi$

Da das innere Integral mit der Beziehung aus Teilaufgabe 1a) der Fouriertransformation $\mathcal{F}\{f(x-\chi, y-\psi)\} = F(u, v) \cdot e^{-j2\pi(\chi u+\psi v)}$ entspricht folgt

$= \iint_{-\infty}^{\infty} h(\chi, \psi) \cdot F(u, v) \cdot e^{-j2\pi(\chi u+\psi v)} d\chi d\psi$

Durch Ausklammern des konstanten Faktor erhält man

$= F(u, v) \iint_{-\infty}^{\infty} h(\chi, \psi) \cdot e^{-j2\pi(\chi u+\psi v)} d\chi d\psi$

Da das Integral der Fouriertransformation $\mathcal{F}\{h(\chi, \psi)\} = H(u, v)$ entspricht folgt

$\mathcal{F}\{h(x, y) * f(x, y)\} = F(u, v) \cdot H(u, v)$

Aufgabe 2: Approximation von sinc(x) durch kubischen Spline

2a) allgemeine Herleitung

Ansatz und Ableitungen:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) = a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1 & \text{für} \quad 0 < x < 1 \\ f_2(x) = a_2x^3 + b_2x^2 + c_2x + d_2 & \text{für} \quad 1 < x < 2 \\ f_3(x) = 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} f_1'(x) = 3a_1x^2 + 2b_1x + c_1 & \text{für} \quad 0 < x < 1 \\ f_2'(x) = 3a_2x^2 + 2b_2x + c_2 & \text{für} \quad 1 < x < 2 \\ f_3'(x) = 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} f_1''(x) = 6a_1x + 2b_1 & \text{für} \quad 0 < x < 1 \\ f_2''(x) = 6a_2x + 2b_2 & \text{für} \quad 1 < x < 2 \\ f_3''(x) = 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Einsetzen der bekannten Werte der Funktion und der Ableitung an der Stelle 0 ergibt direkt Lösungen für c_1 und d_1:

$$f_1(0) = 1 = a_1 \cdot 0 + b_1 \cdot 0 + c_1 \cdot 0 + d_1 \Rightarrow \underline{d_1 = 1}$$
$$f_1'(0) = 0 = 3a_1 \cdot 0 + 2b_1 \cdot 0 + c_1 \Rightarrow \underline{c_1 = 0}$$

Durch das Einsetzen der übrigen Funktions- und Ableitungswerte an den jeweiligen Grenzen der Splines ergeben sich fünf Gleichungen:

$$f_1(1) = 0 = a_1 + b_1 + 1 \tag{1}$$
$$f_2(1) = 0 = a_2 + b_2 + c_2 + d_2 \tag{2}$$
$$f_2(2) = 0 = 8a_2 + 4b_2 + 2c_2 + d_2 \tag{3}$$
$$f_1'(1) = f_2'(1) : 3a_1 + 2b_1 = 3a_2 + 2b_2 + c_2 \tag{4}$$
$$f_2'(2) = 0 = 12a_2 + 4b_2 + c_2 \tag{5}$$

Zuerst wird c_2 mit Gleichung (5) aus a_2 und b_2 ausgedrückt:

$$12a_2 + 4b_2 + c_2 = 0 \Rightarrow \underline{c_2 = -12a_2 - 4b_2}$$

Dann wird d_2 mit Gleichung (2) und dem Ausdruck von c_2 aus Gleichung (5) auch durch a_2 und b_2 ausgedrückt:

$$\begin{aligned} &a_2 + b_2 + c_2 + d_2 = 0 \\ &d_2 = -a_2 - b_2 - c_2 \\ &d_2 = -a_2 - b_2 + 12a_2 + 4b_2 \\ &\underline{d_2 = 11a_2 + 3b_2} \end{aligned}$$

Mit Gleichung (3) und den vorherigen Ausdrücken von c_2 und d_2 können wir b_2 als Funktion von a_2 darstellen:

$$\begin{aligned}
&8a_2 + 4b_2 + 2c_2 + d_2 = 0\\
&8a_2 + 4b_2 + 2(-12a_2 - 4b_2) + 11a_2 + 3b_2 = 0\\
&a_2(8 - 24 + 11) + b_2(4 - 8 + 3) = 0\\
&\underline{b_2 = -5a_2}
\end{aligned}$$

Durch Einsetzen dieses Ergebnisses in die aufgelösten Gleichungen (2) und (5) können wir dort das b_2 eliminieren:

$$\begin{aligned}
&c_2 = -12a_2 - 4b_2\\
&c_2 = -12a_2 - 4(-5a_2) = -12a_2 + 20a_2\\
&\underline{c_2 = 8a_2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&d_2 = 11a_2 + 3b_2 = 11a_2 + 3(-5a_2)\\
&\underline{d_2 = -4a_2}
\end{aligned}$$

Mit Gleichung (1) wird nun b_1 aus a_1 ausgedrückt:

$$a_1 + b_1 = -1 \Rightarrow \underline{b_1 = -1 - a_1}$$

Dies und die Ergebnisse für b_2, c_2 und d_2 werden nun in Gleichung (4) eingesetzt:

$$\begin{aligned}
&3a_1 + 2b_1 = 3a_2 + 2b_2 + c_2\\
&3a_1 + 2(-1 - a_1) = 3a_2 + 2(-5a_2) + 8a_2\\
&a_1 - 2 = 3a_2 - 10a_2 + 8a_2\\
&\underline{a_1 = a_2 + 2}
\end{aligned}$$

Das Ergebins in (1) eingesetzt ergibt den Ausdruck für b_1:

$$\begin{aligned}
&b_1 = -1 - a_1\\
&b_1 = -1 - (a_2 + 2)\\
&\underline{b_1 = -a_2 - 3}
\end{aligned}$$

2b) Lösung im Skript

$$s3(t) = \begin{cases} |t^3| - 2t^2 + 1 & \text{für} \quad 0 \leq t < 1\\ -|t^3| + 5t^2 - 8|t| + 4 & \text{für} \quad 1 \leq |t| < 2\\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Für diese Lösung gilt: $a_2 = -1$. Setzt man dieses a_2 in die in 2a berechneten allgemeinen Ausdrücke ein erhält man:

$$\begin{aligned}
a_1 &= a_2 + 2 = -1 + 2 = 1 \\
b_1 &= -a_2 - 3 = 1 - 3 = -2 \\
c_1 &= 0 \\
d_1 &= 1 \\
a_2 &= -1 \\
b_2 &= -5a_2 = -5(-1) = 5 \\
c_2 &= 8a_2 = 8(-1) = -8 \\
d_2 &= -4a_2 = -4(-1) = 4
\end{aligned}$$

Diese Lösung stimmt mit der Angabe im Skript überein.

2c) Lösung falls $f_1''(1) = f_2''(1)$

$$\begin{aligned}
&f_1''(1) = f_2''(1) \\
&6a_1 + 2b_1 = 6a_2 + 2b_2 \\
&6(a_2 + 2) + 2(-a_2 - 3) = 6a_2 + 2(-5a_2) \\
&6a_2 + 12 - 2a_2 - 6 = 6a_2 - 10a_2 \\
&6 = 8a_2 \\
&a_2 = \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

Die anderen Parameter ergeben sich dann:

$$\begin{aligned}
a_1 &= a_2 + 2 = \frac{3}{4} + 2 = \frac{11}{4} \\
b_1 &= -a_2 - 3 = -\frac{3}{4} - 3 = -\frac{15}{4} \\
c_1 &= 0 \\
d_1 &= 1 \\
a_2 &= \frac{3}{4} \\
b_2 &= -5a_2 = -5(\frac{3}{4}) = -\frac{15}{4} \\
c_2 &= 8a_2 = 8 \cdot \frac{3}{4} = 12 \\
d_2 &= -4a_2 = -4 \cdot \frac{3}{4} = -3
\end{aligned}$$

Interpretation:
Wenn die Funktion gezeichnet wird ergibt sich eine Funktion die kein kubischer Spline

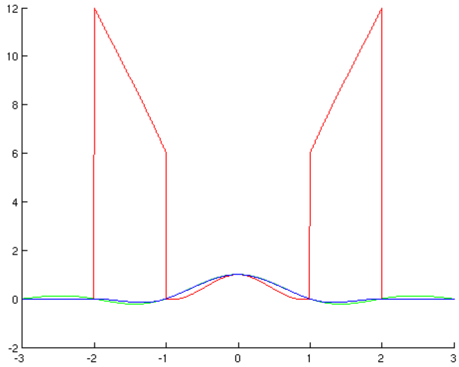

Abbildung 1: Die Funktion mit $f_1''(1) = f_2''(1)$ (rot)

ist. Es sieht aus als ob bei den Stellen -1 und +1 ein Sprung zwischen den Funktionen vorhanden ist. Dies darf bei Spline-Approximation nicht vorkommen.
Rechnerische überprüfung:

$$\begin{aligned} f_1(1) &= f_2(1) \\ \frac{11}{4}t^3 - \frac{15}{4}t^2 + 1 &= \frac{3}{4}t^3 - \frac{15}{4}t^2 + 12t - 3 \\ \frac{11}{4} - \frac{15}{4} + 1 &= \frac{3}{4} - \frac{15}{4} + 12 - 3 \\ \frac{11}{4} + 1 - \frac{3}{4} - 12 + 3 &= 0 \\ 2 + 1 - 12 + 3 &= 0 \\ -6 &= 0 \quad \lightning \end{aligned}$$

Die rechnerische Überprüfung ergibt das die Lösung"gar keine richtige Lösung des Gleichungssystems ist.

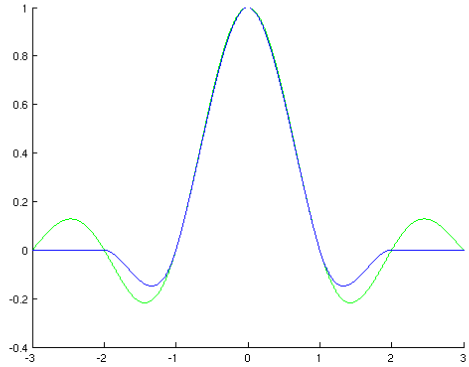

Abbildung 2: Der kubische Spline (blau) und die sinc(x) Funktion (grün)

Aufgabe 3: DFT/Abtastung/Abtasttheorem

a)

$\Delta x = \frac{L}{N} = \frac{10\,mm}{256} = 0.0391\,mm$

b)

$u_a = \frac{N}{L} = \frac{256}{10\,mm} = 25.6\,\frac{1}{mm}$

c)

$\Delta u = \frac{1}{N\Delta x} = \frac{1}{256 \cdot 0.0391\,mm} = 0.1\,\frac{1}{mm}$

d)

Die Schwingung $\sin(16\pi k)$ besitzt eine Kreisfrequenz von $\omega = 16\pi\,\frac{1}{mm}$ mit $\omega = 2\pi f$ also eine Frequenz von $f = \frac{16\pi}{2\pi}\,\frac{1}{mm} = 8\,\frac{1}{mm}$. Zusammen mit dem Intervall Δu aus Tailaufgabe c) ergeben sich

$l_1 = \frac{f}{\Delta u} = \frac{8\,\frac{1}{mm}}{0.1\,\frac{1}{mm}} = 80$ und $l_2 = 256 - 80 = 176$

e)

$f_{max} = \frac{u_a}{2} = 12.8\,\frac{1}{mm}$