Digitale Bildverarbeitung - Lösung Blatt 3 (Fourier-Transf., Splines, DFT)

Thomas Waldecker
Stefan Giggenbach

May 9, 2012

1 Aufgabe 1: Fourier-Beziehungen

1.1 1a) Verschiebung im Ortsbereich

$\mathcal{F}\{f(x-\alpha,y-\beta)\} = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x-\alpha,y-\beta)\cdot e^{-j2\pi(xu+yv)}dxdy$

mit den Substitutionen $\xi = x-\alpha$ $(x = \xi+\alpha)$ und $\eta = y-\beta$ $(y = \eta+\beta)$ ergibt sich

$= \iint_{-\infty}^{\infty} f(\xi,\eta)\cdot e^{-j2\pi((\xi+\alpha)u+(\eta+\beta)v)}d\xi d\eta$

durch Ausklammern der konstanten Faktoren erhält man

$= e^{-j2\pi(\alpha u+\beta v)} \iint_{-\infty}^{\infty} f(\xi,\eta)\cdot e^{-j2\pi(\xi u+\eta v)}d\xi d\eta$

da das Integral der Fouriertransformation $\mathcal{F}\{f(\xi,\eta)\} = F(u,v)$ entspricht folgt

$\mathcal{F}\{f(x-\alpha,y-\beta)\} = F(u,v)\cdot e^{-j2\pi(\alpha u+\beta v)}$

1.2 1b) Faltungssatz

$\mathcal{F}\{h(x,y)*f(x,y)\} = \iint_{-\infty}^{\infty}[\iint_{-\infty}^{\infty} h(\chi,\psi)\cdot f(x-\chi,y-\psi)d\chi d\psi]\cdot e^{-j2\pi(xu+yv)}dxdy$

durch Ausklammern und Umstellen der konstanten Faktoren erhält man

$= \iint_{-\infty}^{\infty} h(\chi,\psi)\cdot[\iint_{-\infty}^{\infty} f(x-\chi,y-\psi)\cdot e^{-j2\pi(xu+yv)}dxdy]d\chi d\psi$

da das innere Integral mit der Beziehung aus Teilaufgabe 1a) der Fouriertransformation $\mathcal{F}\{f(x-\chi,y-\psi)\} = F(u,v)\cdot e^{-j2\pi(\chi u+\psi v)}$ entspricht folgt

$= \iint_{-\infty}^{\infty} h(\chi,\psi)\cdot F(u,v)\cdot e^{-j2\pi(\chi u+\psi v)}d\chi d\psi$

durch Ausklammern des konstanten Faktor erhält man

$= F(u,v)\iint_{-\infty}^{\infty} h(\chi,\psi)\cdot e^{-j2\pi(\chi u+\psi v)}d\chi d\psi$

da das Integral der Fouriertransformation $\mathcal{F}\{h(\chi,\psi)\} = H(u,v)$ entspricht folgt

$\mathcal{F}\{h(x,y)*f(x,y)\} = F(u,v)\cdot H(u,v)$

2 Aufgabe 2: Approximation von sinc(x) durch kubischen Spline

3 Aufgabe 3: DFT/Abtastung/Abtasttheorem