

Blatt 3: Fourier-Transf., Splines, DFT

Aufgabe 1: Fourier-Beziehungen

1a) Verschiebung im Ortsbereich

Zeigen Sie die Gültigkeit folgender Beziehung, wobei $f(x, y) \circ \bullet F(u, v)$ gelte:

$$\mathcal{F}\{f(x - \alpha, y - \beta)\} \stackrel{!}{=} F(u, v)e^{-j2\pi(\alpha u + \beta v)}$$

Hinweis: Nehmen Sie folgende Transformation vor: $\xi = x - \alpha$, $\eta = y - \beta$.

1b) Faltungssatz

Zeigen Sie mit der Beziehung aus Aufgabe 1 die Gültigkeit des Faltungssatzes, wobei '*' für den Faltungsoperator siehe:

$$\mathcal{F}\{h(x, y) * f(x, y)\} \stackrel{!}{=} H(u, v) \cdot F(u, v)$$

Aufgabe 2: Approximation von $\sin(x)$ durch kubischen Spline

Bearbeiten Sie folgende Aufgaben bzw. fragen:

- Leiten Sie die Beziehung für $s_3(x)$ im Skript her: 'Interpolation durch kubische Splines'.
- Welcher Lösung für a_2 entspricht die im Skript angegebene Lösung?
- Welche Lösung resultiert, falls $f_1''(1) = f_2''(1)$ gefordert wird?

Hinweise (mit $f(x) = s_3(x)$): $f(x)$ ist

- symmetrisch um 0;
- überall stetig und differenzierbar;
- hat für $x > 0$ die allgemeine Form

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) = a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1 & ; 0 \leq x \leq 1 \\ f_2(x) = a_2x^3 + b_2x^2 + c_2x + d_2 & ; 1 \leq x \leq 2 \\ f_3(x) = 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Weitere Hinweise:

- Nutzen Sie bekannte Funktionswerte an den Intervallgrenzen aus:

$$\begin{array}{ll} x = 0 : & f_1(0) = 1 & f_1'(0) = 0 \\ x = 1 : & f_1(1) = f_2(1) = 0 & f_1'(1) = f_2'(1) \\ x = 2 : & f_2(2) = 0 & f_2'(2) = 0 \\ x = 0 : & f_1(0) \text{ ist konkav} & \Rightarrow f_1''(0) \leq 0 \\ x = 1 : & f_1(1), f_2(1) \text{ sind konvex} & \Rightarrow f_1''(1) > 0, f_2''(1) > 0 \end{array}$$

- Eliminieren Sie Unbekannte möglichst sofort.
- Eliminieren Sie a_2 zuletzt!

Aufgabe 3: DFT / Abtastung / Abtasttheorem

Ein Ortsignal $g(x) \circ \bullet G(u)$ wird über eine Länge von $L = 10$ Millimeter $N = 256$ mal abgetastet. Es resultiert das abgetastete Signal $g(k) = \sin(16\pi k)$ mit der diskreten Fourier-Transformierten $g(k) \circ \bullet G(l)$.

- Wie groß ist das Abtastintervall $\Delta x = x_n$?
- Wie groß ist die Abtastfrequenz u_n ?
- Wie groß ist das Intervall Δu zwischen zwei diskreten Frequenzen der DFT?
- Bei welchen bzw. welchen diskreten Frequenzwert(en) l ist der Signalanteil von $g(x)$ im diskreten Spektrum zu finden (bitte nachvollziehbare Begründung)?
- Welche Ortsfrequenz dürfte das Signal $g(x)$ maximal aufweisen, damit bei der gegebenen Abtastung keine Signalinformation verloren geht?